SUL LAVORO SVILUPPATO DALLA RESISTENZA MOLECOLARE

NELLA DEFORMAZIONE

DI UN SOLIDO ELASTICO QUALUNQUE

SOGGETTO ALL'AZIONE DI FORZE COMUNQUE OPERANTI

NOTA

DELL'INGEGNERE G. G. FERRIA

Assistente nella R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Torino.

(TAVOLA I).

§ 1. — L'Onorevole Professore G. Curioni presentava nel novembre 1872 alla R. Accademia delle Scienze di Torino una dotta memoria, nella quale egli insegna a trovare 1' espressione del lavoro della resistenza molecolare che si sviluppa in un solido qualunque soggetto all' azione di forze comunque operanti.

In questa Memoria, pubblicata nel volume VIII degli Atti dell'Accademia, il Chiar.mo Professore studia il caso generalissimo di un solido elastico avente per asse una curva qualunque, generato da una superficie piana di forma e di grandezza costanti o variabili secondo una data legge, moventesi normalmente all' asse col suo centro nella detta curva ; e sollecitato da forze comunque operanti; e, per arrivare a forinole di pratica applicazione , ammette che il solido considerato sia omogeneo almeno nei diversi punti di una medesima sezione retta.

Essendo OCI *(Fig. 1ª)* l'asse di un solido generato come or ora si è detto, egli incomincia dal trovare il lavoro della resistenza trasversale per la parte compresa fra due sezioni rette qualunque $L_1M_1N_1$ ed $L_2M_2N_2$; fa la medesima ricerca per quanto spetta alla resistenza longitudinale; e finalmente somma le espressioni dei due lavori trovati, per avere quella del totale lavoro di resistenza molecolare sviluppato fra le sezioni stesse.

Per determinare in modo facile le posizioni delle diverse sezioni rette che avviene di dover considerare nella risoluzione del proposto problema, si serve della parte di asse compresa fra il loro centro di superficie, ed il punto fìsso 0, assunto sull' asse medesimo come origine degli archi.

Per trovare la formola di determinazione del lavoro della resistenza trasversale relativa alla parte di solido limitato fra le due sezioni rette $L_1M_1N_1$ ed $L_2M_2N_2$, egli immagina fra queste le due sezioni rette vicinissime DEF ed LMN ; e pel centro di superfìcie C della sezione DEF suppone condotti tre assi coordinati Cx, Cy e Cz ; i due primi coincidenti cogli assi principali centrali d'inerzia, della sezione considerata, ed il terzo normale al piano della sezione stessa.

Chiama poi :

l la distanza CC' fra i centri delle indicate vicinissime sezioni,

Ω la superficie della sezione retta DEF,

I_x, I_y, I_z i suoi momenti d'inerzia rispetto ai tre assi,

X, Y, Z le somme algebriche delle componenti delle forze estrinseche applicate al disopra della sezione DEF, prese queste componenti parallelamente agli assi Cx, Cy, Cz.

M_x, M_y, M_2 le somme algebriche dei momenti di tutte le indicate forze rispetto agli assi Cx, Cy, Cz,

E_l ed E_t i coefficienti di elasticità longitudinale e trasversale.

Finalmente, in conformità di quanto sembra confermato dall'esperienza nei limiti degli sforzi a cui praticamente si assoggettano i corpi nelle costruzioni, egli ammette :

1°. Che la sezione retta qualsiasi DEF presa nel solido prima dell' applicazione delle forze estrinseche, si sposti in modo che dopo la deformazione i suoi punti si trovino ancora in uno stesso piano.

2°. Che la resistenza trasversale provocata in un elemento superficiale qualunque e dell'indicata sezione , sia proporzionale all' area dello stesso elemento ; nonché allo spostamento trasversale da esso subito per rapporto all'elemento corrispondente *e*' , della sezione retta LMN; ed inversamente proporzionale alla distanza CC' fra i centri di superficie delle due sezioni rette vicinissime considerate.

3°. Che la resistenza longitudinale provocata nell' elemento superficiale qualunque *e* sia proporzionale all' area dello stesso elemento ; nonché allo spostamento longitudinale da esso subito relativamente all'elemento corrispondente *e' ;* ed ancora inversamente proporzionale alla distanza *CC* dei centri di superficie delle accennate vicinissime sezioni.

Ciò premesso, con opportuni ragionamenti, il Chiar.[mo] Professore arriva a questa formola finale esprimente il lavoro totale della resistenza molecolare sviluppata in un solido elastico qualunque sollecitato da forze comunque operanti :

$$L=\frac{1}{2}\left\{\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{1}{E_1}\left(\frac{X^2+Y^2}{\Omega}+\frac{M_z^2}{I_z}\right)d\lambda+\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{1}{E}\left(\frac{Z^2}{\Omega}+\frac{M_x^2}{I_x}+\frac{M_y^2}{I_y}\right)d\lambda\right\}$$

dove λ_1 e λ_2 sono le lunghezze degli archi OC_1 ed OC_2

§ 3. — Assnnto di questo lavoro è di dimostrare che il secondo membro di questa equazione si può anche dedurre direttamente dal *Principio del minimo lavoro* o *Principio di elasticità,* conosciuto anche sotto il nome di *Principio di Menabrea,* che suole rappresentarsi con

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{T^2}{\varepsilon}=\text{minimo}\,;$$

dove il simbolo Σ si estende a tutte le coppie di punti del corpo , T rappresenta l' azione vicendevole fra due punti qualunque ed ε è un coefficiente di proporzionalità che pei corpi non omogenei varia da punto a punto.

Per arrivare a questa conclusione , considereremo separatamente il lavoro della resistenza molecolare corrispondente a ciascuna delle sei caratteristiche X, Y, Z, M_x, M_y, M_z delle forze esterne , supponendo nulle tutte le altre ; poi sommeremo tutti i lavori parziali cosi ottenuti, ed in virtù del principio dell'accumulazione degli effetti, avremo il lavoro totale cercato.

§ 3. — Ciò premesso, consideriamo il prisma infinitesimo di 1° ordine di volume Ωdλ, compreso fra la sezione retta DEF e quella infinitamente vicina, e cerchiamo dapprima il lavoro di deformazione dovuto alla sola forza Z.

Per effetto di questa forza si svilupperanno nell' interno del prisma una infinità di azioni molecolari, che si ridurranno tutte ad una risultante unica, uguale e contraria alla forza Z.

Ora io dico che tutte queste azioni molecolari che si esercitano fra punto e punto del prisma sono eguali fra loro.

Infatti supponiamo che non siano fra loro tutte eguali, e diciamo T la minore di esse. Allora ciascuna delle altre potrà rappresentarsi rispettivamente con *aT, bT, cT,...* essendo *a, b, e,...* coefficienti >1. Ma in virtù del principio di elasticità, dovrà essere

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{T^2}{\varepsilon}=\frac{1}{2}T^2\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{a^2}{\varepsilon_1}+\frac{b^2}{\varepsilon_2}+\frac{c^2}{\varepsilon_3}+\dots\right)=\text{min.}$$

la quale condizione è solo soddisfatta per

$$a=b=c=\dots=1,$$

ossia per

$$T_1=T_2=T_3=\dots=T. \qquad \textbf{(1)}$$

Se ora chiamiamo *v* il numero dei punti contenuti nella faccia DEF, potremo dire che essa è in equilibrio sotto l'azione di un numero *v* di forze interne e della forza esterna Z, uguale e contraria alla loro risultante. Ognuna pertanto di queste forze interne, in virtù della relazione (1), varrà $\frac{Z}{v}$.

Intanto osserviamo che il prisma essendo omogeneo per ipotesi, detto K un coefficiente di proporzionalità, il numero dei punti materiali che costituiscono il prisma potrà essere rappresentato con KΩ*d*λ, e quello dei punti contenuti nella faccia DEF con KΩ. Il valore pertanto di ciascuna forza interna potrà anche esprimersi

con $\frac{Z}{K\Omega}$, il suo lavoro con

$$\frac{Z^2}{2\varepsilon K^2\Omega^2}$$

ed il lavoro di tutte le forze interne con

$$\frac{Z^2}{2\varepsilon K^2\Omega^2}K\Omega d\lambda,$$

ossia con

$$\frac{Z^2}{2\varepsilon K\Omega}d\lambda,$$

che sarà pure il lavoro fatto dalla forza Z.

Riferiamo ora a due assi Ql, OT *(Fig. 2),* un punto M la cui ascissa MQ rappresenti lo spostamento del punto d'applicazione di una delle forze interne, corrispondente ad un certo istante mentre si compie la deformazione, e l'ordinata MP rappresenti il valore corrispondente di questa forza.

Essendo per principii ammessi

$$T=\varepsilon l,$$

il luogo dei punti come M sarà una retta passante per 0.

L' area del triangolo OMP rappresenta il valore di

$$\int_0^l Tdl,$$

ossia rappresenterà il lavoro fatto dalla forza T dal principio della deformazione sino all'istante che si considera. Il rettangolo infinitesimo MP*dl* rappresenta il lavoro elementare fatto da questa forza; e l'ordinata MP rappresenterà ad un tempo il valore della forza T, e la derivata dell'espressione $\int_0^l$ T*dl* presa rispetto ad *l.*

Considerando ora il triangolo OMQ, potremo subito conchiudere per analogia che l'ascissa MQ rappresenta nello stesso tempo lo spostamento *l*, e la derivata rispetto a T di $\int_0^T$ *l*dT. Ma i due triangoli OMP ed OMQ sono uguali, perciò l'area di ciascuno rappresenta il lavoro della forza T. Conchiuderemo che *la derivata di questo lavoro presa rispetto a* T, *ci da lo spostamento* 1 *del punto d'applicazione della forza* T ; *e la derivata dello stesso lavoro presa rispetto ad* 1 *ci dà il valore corrispondente della forza* T.

La stessa cosa manifestamente dovrà dirsi della risultante di tutte le forze interne, epperò anche della forza Z, che è uguale e contraria a questa risultante.

Pertanto lo spostamento del punto di applicazione della forza Z, ossia la variazione di lunghezza che subisce il prisma infinitesimo considerato sarà

$$\frac{d\,\frac{Z^2}{2\varepsilon K\Omega}d\lambda}{dZ}$$

ossia

$$\frac{Z}{\varepsilon K\Omega}d\lambda.$$

Ma noi sappiamo dall'esperienza che quando un prisma di sezione Ω e di lunghezza *d*λ è soggetto ad una forza esterna Z diretta secondo il suo asse, la variazione di lunghezza subita dal prisma è espressa da

$$\frac{Z}{E_1\Omega}d\lambda,$$

perciò il lavoro della resistenza molecolare provocato dalla forza Z nel prisma elementare *Ωdλ*

potrà esprimersi con $\frac{Z^2}{2E_1\Omega}d\lambda$, e quello di tutto il solido con

$$\frac{1}{2}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{1}{E_1}\frac{Z^2}{\Omega}d\lambda.$$

In modo analogo si può dimostrare che i lavori delle resistenze molecolari sviluppati sotto le azioni delle forze X ed Y sono rispettivamente:

$$\frac{1}{2}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{1}{E_1}\frac{X^2}{\Omega}d\lambda \quad \text{ed} \quad \frac{1}{2}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{1}{E_1}\frac{Y^2}{\Omega}d\lambda.$$

§ 4. — Veniamo ora al lavoro della resistenza molecolare provocata dalla coppia M_x.

In virtù dei principii sui quali si fonda la formola del Chiar[mo] Prof. Curioni, qualunque sieno le forze interne provocate da questa coppia, si riducono ad una coppia unica uguale e contraria ad M_x ; e questa coppia avrà per effetto di spostare tutti i punti di una sezione piana qualunque DEF *(Fig. 3)* facendoli girare attorno ad una retta, detta *asse neutro,* parallela all'asse delle *x*, di intersezione dei piani corrispondenti alle posizioni iniziale e finale della sezione DEF. Detto *0* l'angolo che formano fra loro i piani di queste due posizioni estreme, ed *r* la distanza di un punto qualunque della sez. retta DEF dell' asse neutro, sarà *rθ* lo spostamento piccolissimo subito da questo punto nei limiti delle applicazioni pratiche.

Consideriamo ora un elemento infinitesimo di 2° ordine *e* della sez. DEF alla distanza *r* dell'asse neutro, ed il suo corrispondente *e'* della sez. infinitamente vicina LMN ; e diciamo *dλ* le distanze di queste due sezioni. La resistenza opposta dal prisma infinitesimo di 3° ordine *edλ* sarà espressa da

$$E_1\frac{er\theta}{d\lambda},$$

potendosi esso ritenere sollecitato da una forza diretta secondo il suo asse. Il lavoro sviluppato dalle sue forze interne durante la deformazione, sarà, per quanto si è veduto nel § precedente, espresso da

$$\frac{1}{2}E_1\frac{er\theta}{d\lambda}r\theta,$$

ossia da

$$\frac{1}{2}E_1\frac{er^2\theta^2}{d\lambda};$$

ed il lavoro totale sviluppato dalle forze interne in tutto il prisma sottilissimo compreso fra le due sezioni rette considerate sarà espresso da

$$\frac{1}{2}\iint E_1 \frac{e r^2 \theta^2}{d\lambda} = \frac{1}{2} E_1 \theta^2 I \frac{1}{d\lambda}, \qquad (2)$$

dove I rappresenta il momento d' inerzia della sezione CDE rispetto all'asse neutro.

Ora in virtù del principio di elasticità questo lavoro deve essere un minimo ; e poichè tutte le quantità che entrano nella sua espressione sono costanti, all'infuori del momento d'inerzia I, il valore dell'espressione che ci dà il lavoro cercato, si otterrà mettendo nel 2° membro dell'uguaglianza (2) il valore minimo di I. Ma dalla teorica dei momenti d' inerzia sappiamo che il valore minimo del momento d'inerzia di una figura qualunque rispetto ad un asse si ha quando quest'asse passa pel centro di gravità della figura. Nel nostro caso avremo adunque il valore cercato di I nel momento d'inerzia della sezione DEF rispetto all'asse delle *x*, col quale coinciderà perciò l'asse neutro. Ciò premesso, l'espressione cercata del lavoro di deformazione diventerà

$$\frac{1}{2} E_1 \theta^2 I_x \frac{1}{d\lambda}. \qquad (3)$$

Esprimiamo ora 1' angolo *0* in funzione di quantità note.

Per questo osserviamo che da quanto si è venuto esponendo, risulta chiaramente che il momento della resistenza opposta dal prisma infinitesimo di 3° ordine che ha per base 1' elemento superficiale *e* sarà

$$E_1 \frac{e r^2 \theta}{d\lambda},$$

e che l'integrale di questa espressione estesa a tutta la sezione DEF dovrà essere uguale ad M_x, per cui sarà

$$\iint E_1 \frac{e r^2 \theta}{d\lambda} = E_1 \theta \frac{1}{d\lambda} I_x = M_x,$$

donde si ricava

$$\theta = \frac{M_x}{E_1 I_x} d\lambda ;$$

e sostituendo questo valore di θ nella formola (3) che dà il lavoro testè trovato, avremo

$$\frac{1}{2} E_1 I_x \frac{1}{d\lambda} \frac{M_x^2}{E_1^2 I_x^2} d\lambda^2 = \frac{1}{2} \frac{M_x^2}{E_1 I_x} d\lambda.$$

Se finalmente prendiamo l'integrale di questa espressione esteso fra i limiti corrispondenti alle sezioni estreme del solido considerato, avremo il lavoro molecolare totale sviluppato per l'azione della coppia M_x espresso da

$$\frac{1}{2}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{E_1} \frac{M_x^2}{I_x} d\lambda.$$

§ 5. — In modo analogo si troverebbe che i lavori della resistenza molecolare sviluppato per le azioni delle coppie M_y ed M, sono espresse rispettivamente dalle formole

$$\frac{1}{2}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{E_1} \frac{M_y^2}{I_y} d\lambda$$

ed

$$\frac{1}{2}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{E_t} \frac{M_z^2}{I_z} d\lambda.$$

§ 6. — Per ultimo sommando i valori dei lavori parziali così ottenuti e mettendo in evidenza i fattori comuni, avremo che il lavoro della resistenza molecolare provocata in un solido elastico qualunque sotto 1' azione di forze comunque operanti è espresso da

$$L = \frac{1}{2}\left\{ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{E_t}\left(\frac{X^2+Y^2}{\Omega} + \frac{M_z^2}{I_z} \right) d\lambda + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{E_1}\left(\frac{Z^2}{\Omega} + \frac{M_x^2}{I_x} + \frac{M_y^2}{I_y} \right) d\lambda \right\},$$

che è la formola trovata dal Chiar.^mo^ Prof. Curioni.

Torino, Novembre 1882.

Ing. G. G. FERRIA.