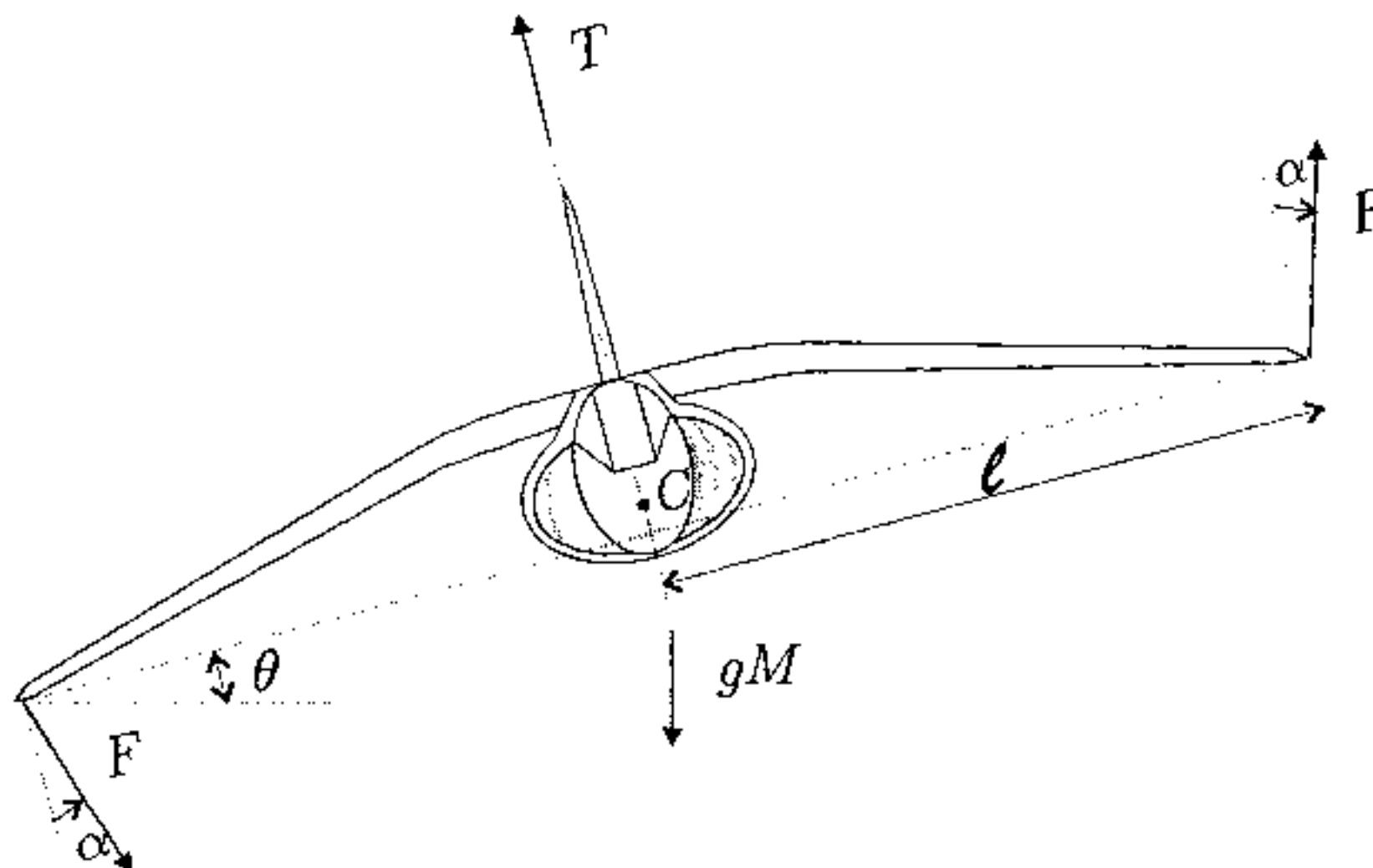


# POLITECNICO DI TORINO

## Esami di Stato per l'abilitazione alla professione di Ingegnere II sessione - Anno 2003

### Ramo INFORMATICO - Tema N. 3

Si consideri la dinamica planare di un aereo VTOL (Vertical TakeOff and Landing) schematizzato in figura, dove:  $T$  è la spinta lungo l'asse verticale del velivolo;  $F$  è la forza agente sulle estremità delle ali generata da aria ad alta pressione;  $\alpha$  è l'angolo che la forza  $F$  forma con l'asse verticale dell'aeromobile;  $\ell$  è la distanza delle estremità delle ali dal centro di gravità  $C$ ;  $M$  è la massa totale dell'aereo;  $g$  è l'accelerazione di gravità.



Indicando con  $\eta$  e  $\xi$  rispettivamente la posizione verticale e laterale del centro di gravità  $C$ , e con  $\theta$  l'angolo di rollio che il velivolo forma rispetto all'orizzonte, il moto dell'aereo sul piano verticale-laterale è modellato dalle seguenti equazioni dinamiche:

$$\begin{aligned} M\ddot{\eta} &= \cos(\theta) \cdot T + 2 \sin(\theta) \cdot \sin(\alpha) \cdot F - gM \\ M\ddot{\xi} &= -\sin(\theta) \cdot T + 2 \cos(\theta) \cdot \sin(\alpha) \cdot F \\ J\ddot{\theta} &= 2\ell \cos(\alpha) \cdot F \end{aligned}$$

dove  $J$  rappresenta il momento di inerzia complessivo dell'aeromobile rispetto al punto  $C$ .

Gli ingressi di controllo del sistema sono le forze  $T$  ed  $F$ , mentre le uscite, ossia le variabili da controllare, sono  $\eta$ ,  $\xi$  e  $\theta$ .

- Determinare il modello matematico *non lineare* in variabili di stato del sistema (del tipo  $\dot{z} = f(z, v)$ ,  $w = h(z, v)$ ), specificando quali sono i vettori d'ingresso  $v$ , di stato  $z$  e di uscita  $w$  adottati.
- Calcolare gli stati di equilibrio  $\bar{z}$ , gli ingressi di equilibrio  $\bar{v}$  e le uscite di equilibrio  $\bar{w}$  in corrispondenza dei quali all'equilibrio si annulla l'angolo di rollio, ossia  $\theta(t) = \bar{\theta} = 0^\circ \forall t \geq 0$ .
- Operare la linearizzazione del modello nell'intorno dei punti di equilibrio  $(\bar{z}, \bar{v})$  precedentemente determinati, specificando quali sono le equazioni d'ingresso-stato-uscita (del tipo  $\dot{x} = Ax + Bu$ ,  $y = Cx + Du$ ), i vettori d'ingresso  $u$ , di stato  $x$  e di uscita  $y$ , nonché le matrici del sistema linearizzato.
- Facendo ricorso al metodo di linearizzazione, discutere la stabilità degli stati di equilibrio  $\bar{z}$  del sistema non lineare. Confrontare tale conclusione con l'analisi di stabilità condotta invece sul seguente sistema dinamico *lineare*<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} M\ddot{\eta} &= 0 \\ M\ddot{\xi} &= -gM \cdot \theta \\ J\ddot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

Le domande che seguono fanno riferimento esclusivamente al modello linearizzato. In particolare, mediante un'opportuna scelta delle variabili d'ingresso-stato-uscita, si può ricondurre lo studio del sistema complessivo allo studio dei due seguenti sistemi dinamici lineari *disaccoppiati*  $S'$  ed  $S''$ , che descrivono rispettivamente la dinamica verticale e la dinamica laterale ed angolare del velivolo nell'intorno dell'equilibrio:

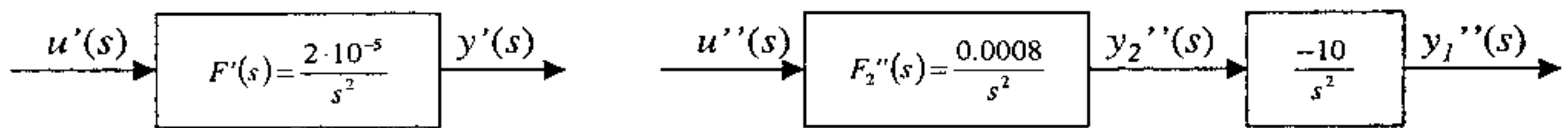
<sup>1</sup>È facile verificare che tale modello lineare bene approssima la dinamica del velivolo per  $\theta(t) \cong \bar{\theta} = 0^\circ$  e  $v(t) = \bar{v} \forall t \geq 0$ .

$$S'(u', x', y') : \begin{cases} \dot{x}'_1 = x'_2 \\ \dot{x}'_2 = \frac{1}{M} u' \\ y' = x'_1 \end{cases} \quad S''(u'', x'', y'') : \begin{cases} \dot{x}''_1 = x''_2 \\ \dot{x}''_2 = -gx''_3 + \frac{2 \sin(\alpha)}{M} u'' \\ \dot{x}''_3 = x''_4 \\ \dot{x}''_4 = \frac{2\ell \cos(\alpha)}{J} u'' \\ y''_1 = x''_1 \\ y''_2 = x''_3 \end{cases}$$

- E) Analizzare le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità dei sottosistemi  $S'$  ed  $S''$ ; per quest'ultimo sottosistema, in particolare, valutare separatamente l'osservabilità dalla sola uscita  $y''_1$ , dalla sola uscita  $y''_2$  e dalle due uscite congiunte  $(y''_1, y''_2)$ .
- F) Determinare le funzioni di trasferimento  $F'(s) = y'(s)/u'(s)$ ,  $F''_1(s) = y''_1(s)/u''(s)$ ,  $F''_2(s) = y''_2(s)/u''(s)$ .
- G) Studiare le caratteristiche di stabilità interna ed esterna (o stabilità BIBO) dei sottosistemi  $S'$  ed  $S''$ .
- H) È possibile progettare opportuni dispositivi di controllo in grado di stabilizzare asintoticamente i due sottosistemi  $S'$  ed  $S''$ , supponendo di avere a disposizione la misura di tutte le variabili di stato? Motivare adeguatamente la risposta e, in caso affermativo, precisare la struttura dei dispositivi di controllo mediante schemi a blocchi "di principio", senza calcolarne esplicitamente i parametri di progetto.
- I) È possibile stabilizzare asintoticamente i due sottosistemi  $S'$  ed  $S''$  mediante opportuni dispositivi di controllo basati sull'uso di osservatori (o ricostruttori) asintotici dello stato? Motivare adeguatamente la risposta e, in caso affermativo, precisare la struttura dei dispositivi di controllo mediante schemi a blocchi "di principio", senza calcolarne esplicitamente i parametri di progetto.

Per le domande successive, si consideri per semplicità il sottostante schema a blocchi del sistema, dove sono stati assunti i seguenti valori numerici dei parametri:

$$M = 5 \cdot 10^4 \text{ kg}, J = 1.25 \cdot 10^4 \text{ kg m}^2, \alpha = 4^\circ, \ell = 5 \text{ m}, g = 9.81 \text{ m/s}^2.$$



Si assuma inoltre di utilizzare soltanto due trasduttori, che misurano rispettivamente le uscite  $y'$  ed  $y''_1$ , con funzioni di trasferimento ridotte a semplici costanti di proporzionalità  $K_t = 1 \text{ V/m}$ .

- J) Confrontare il modello proposto con le funzioni di trasferimento precedentemente calcolate al punto F e verificare la bontà dell'approssimazione.
- K) Discutere la possibilità di garantire l'asintotica stabilità dei due sottosistemi  $S'$  ed  $S''$  ad anello chiuso (chiudendo ogni singolo sottosistema con retroazione negativa unitaria) mediante controllori in cascata puramente proporzionali  $K_c$ , ove  $K_c$  può assumere qualsiasi valore reale compreso tra  $-\infty$  e  $+\infty$ .
- L) Progettare due sistemi di controllo, in retroazione rispettivamente dell'uscita  $y'$  e dell'uscita  $y''_1$ , per mezzo di controllori in cascata da realizzarsi in forma digitale, tali da soddisfare le seguenti specifiche:

- gli errori di inseguimento a riferimenti costanti siano nulli in regime permanente;
- gli errori di inseguimento a riferimenti sinusoidali  $r(t) = \sin(\bar{\omega}t)$  siano non superiori in modulo all'1% in regime permanente, per qualsiasi pulsazione  $\bar{\omega} \leq 2 \text{ rad/s}$ ;
- la sovraelongazione massima delle risposte a riferimenti a gradino unitari sia non superiore al 30%;
- il tempo di salita delle risposte a riferimenti a gradino unitari sia dell'ordine del decimo di secondo.

Analizzare le proprietà dei sistemi ad anello chiuso ottenuti, mettendone in evidenza (oltre al soddisfacimento delle specifiche imposte, compatibilmente con i mezzi di calcolo a disposizione) le caratteristiche ritenute più significative e valutando in particolare:

- il tempo di assestamento al 2% delle risposte a riferimenti a gradino unitari;
- l'attività sul comando richiesta dai controllori progettati.

Nota: Il candidato può determinare direttamente le funzioni di trasferimento  $C(z)$  (nella variabile  $z$ ) dei controllori digitali, avendo preventivamente definito opportuni passi di campionamento, oppure può progettare controllori analogici e convertirne successivamente le funzioni di trasferimento  $C(s)$  in forma digitale, scegliendo passi di campionamento (e metodi di discretizzazione) in modo tale che i segnali a tempo discreto riproducano al meglio i segnali a tempo continuo uscenti dai  $C(s)$  e che le specifiche imposte siano garantite dai sistemi di controllo digitali.