

POLITECNICO DI TORINO

Esami di Stato per l'abilitazione alla professione di Ingegnere
II sessione - Anno 2003

Sezione B - Settore dell'Informazione

Prova pratica del 27 febbraio 2004 - Tema n. 4

Il moto di un aereo VTOL (Vertical TakeOff and Landing) sul piano verticale-laterale è modellato dalle seguenti equazioni dinamiche:

$$\begin{aligned}
 M\ddot{\eta} &= \cos(\theta) \cdot T - gM \\
 M\ddot{\xi} &= -\sin(\theta) \cdot T \\
 J\ddot{\theta} &= 2\ell \cdot F
 \end{aligned}$$

in cui η e ξ sono rispettivamente la posizione verticale e laterale del centro di gravità C del velivolo; θ è l'angolo di rollio che il velivolo forma rispetto all'orizzonte; T è la spinta lungo l'asse verticale del velivolo; F è la forza agente sulle estremità delle ali generata da aria ad alta pressione; ℓ è la distanza delle estremità delle ali dal centro di gravità; M è la massa totale dell'aereo; g è l'accelerazione di gravità; J rappresenta il momento di inerzia complessivo dell'aeromobile rispetto al punto C .

Gli ingressi di controllo del sistema sono T e F , mentre le uscite, ossia le variabili da controllare, sono η e ξ .

- A) Determinare il modello matematico *non lineare* in variabili di stato del sistema (del tipo $\dot{z} = f(z, v)$, $w = h(z, v)$), specificando quali sono i vettori d'ingresso v , di stato z e di uscita w adottati.
- B) Calcolare gli stati di equilibrio \bar{z} , gli ingressi di equilibrio \bar{v} e le uscite di equilibrio \bar{w} in corrispondenza dei quali all'equilibrio si annulla l'angolo di rollio, ossia $\theta(t) = \bar{\theta} = 0^\circ \forall t \geq 0$.
- C) Operare la linearizzazione del modello nell'intorno dei punti di equilibrio (\bar{z}, \bar{v}) precedentemente determinati, specificando quali sono le equazioni d'ingresso-stato-uscita (del tipo $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$), i vettori d'ingresso u , di stato x e di uscita y , nonché le matrici del sistema linearizzato.
- D) Facendo ricorso al metodo di linearizzazione, discutere la stabilità degli stati di equilibrio \bar{z} del sistema non lineare.

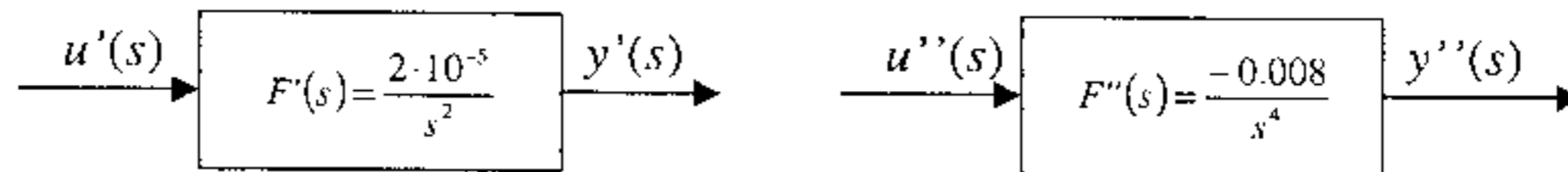
Le domande che seguono fanno riferimento esclusivamente al modello linearizzato. In particolare, mediante un'opportuna scelta delle variabili d'ingresso-stato-uscita, si può ricondurre lo studio del sistema complessivo allo studio dei due seguenti sistemi dinamici lineari *disaccoppiati* S' ed S'' , che descrivono rispettivamente la dinamica verticale e la dinamica laterale ed angolare del velivolo nell'intorno dell'equilibrio:

$$S' (u', x', y') : \begin{cases} \dot{x}'_1 = x'_2 \\ \dot{x}'_2 = \frac{1}{M} u' \\ y' = x'_1 \end{cases} \quad S'' (u'', x'', y'') : \begin{cases} \dot{x}''_1 = x''_2 \\ \dot{x}''_2 = -gx''_3 \\ \dot{x}''_3 = x''_4 \\ \dot{x}''_4 = \frac{2\ell}{J} u'' \\ y'' = x''_1 \end{cases}$$

- E) Analizzare le proprietà di raggiungibilità e di osservabilità dei sottosistemi S' ed S'' .
- F) Determinare le funzioni di trasferimento $F'(s) = y'(s)/u'(s)$ ed $F''(s) = y''(s)/u''(s)$.
- G) Studiare le caratteristiche di stabilità interna ed esterna (o stabilità BIBO) dei sottosistemi S' ed S'' .
- H) È possibile progettare opportuni dispositivi di controllo in grado di stabilizzare asintoticamente i due sottosistemi S' ed S'' , supponendo di avere a disposizione la misura di tutte le variabili di stato? Motivare adeguatamente la risposta e, in caso affermativo, precisare la struttura dei dispositivi di controllo mediante schemi a blocchi "di principio", senza calcolarne esplicitamente i parametri di progetto.

Per le domande successive, si consideri per semplicità il sottostante schema a blocchi del sistema, dove sono stati assunti i seguenti valori numerici dei parametri:

$$M = 5 \cdot 10^4 \text{ kg}, J = 1.25 \cdot 10^4 \text{ kg m}^2, \ell = 5 \text{ m}, g = 9.81 \text{ m/s}^2.$$



Si assuma inoltre di utilizzare soltanto due trasduttori, che misurano rispettivamente le uscite y' ed y'' , con funzioni di trasferimento ridotte a semplici costanti di proporzionalità $K_t = 1 \text{ V/m}$.

- I) Discutere la possibilità di garantire l'asintotica stabilità dei due sottosistemi S' ed S'' ad anello chiuso (chiudendo ogni singolo sottosistema con retroazione negativa unitaria) mediante controllori in cascata puramente proporzionali K_c , ove K_c può assumere qualsiasi valore reale compreso tra $-\infty$ e $+\infty$.
- J) Progettare due sistemi di controllo, in retroazione rispettivamente dell'uscita y' e dell'uscita y'' , per mezzo di controllori in cascata da realizzarsi in forma analogica, tali da soddisfare le seguenti specifiche:
 - gli errori di inseguimento a riferimenti costanti siano nulli in regime permanente;
 - gli errori di inseguimento a riferimenti sinusoidali $r(t) = \sin(\tilde{\omega}t)$ siano non superiori in modulo all'1% in regime permanente, per qualsiasi pulsazione $\tilde{\omega} \leq 2 \text{ rad/s}$;
 - il tempo di salita delle risposte a riferimenti a gradino unitari sia dell'ordine del decimo di secondo;
 - la sovraelongazione massima delle risposte a riferimenti a gradino unitari sia non superiore al 30%.

Analizzare le proprietà dei sistemi ad anello chiuso ottenuti, mettendone in evidenza (oltre al soddisfacimento delle specifiche imposte, compatibilmente con i mezzi di calcolo a disposizione) le caratteristiche ritenute più significative e valutando in particolare:

- il tempo di assestamento al 5% delle risposte a riferimenti a gradino unitari;
- l'attività sul comando richiesta dai controllori progettati.