Prof. GUIDO FUBINI

LEZIONI
DI
ANALISI MATEMATICA
PER GLI ALLIEVI
DEL
R. POLITECNICO DI TORINO

RACCOLTE DAI

D.ri G. SANNIA e C. ROVETTI

VOLUME PRIMO

1908-1909

TIPO LITOGRAFIA G. PARIS
Via Urbano Rattazzi, N. 5
TORINO

Capitolo I.

Disposizioni, permutazioni, combinazioni.

Analisi combinatoria

§.1 Disposizioni di n elementi a m a m $(m \leq n)$.

Siano n elementi distinti $a_1, a_2, \dots, a_n$. Si dicono **disposizioni** di tali elementi a m a m i gruppi distinti di m oggetti scelti fra gli n elementi considerati, quando si intendano come distinti due gruppi che differiscano o per gli elementi scelti, o per l'ordine in cui si susseguono. Così per es. i tre elementi a_1, a_2, a_3 dànno luogo alle seguenti sei disposizioni a due a due: a_1, a_2; a_2, a_1; a_1, a_3; a_3, a_1; a_2, a_3; a_3, a_2. e a 1 a 1, 3: a_1, a_2, a_3

Si voglia trovare il numero D_n^m di tali disposizioni. È ben evidente che, se $m=1$, è $D_n^m = n$. Supponiamo $m>1$. Ognuna delle disposizioni cercate avrà uno degli elementi dati come primo elemento. Consideriamo quelle, che hanno a_i come primo elemento, essendo i uno qualsiasi degli interi $1, 2, \dots, n$. Se noi in ciascuna di queste disposizioni sopprimiamo l'elemento a_i, troviamo evidentemente tutte le D_{n-1}^{m-1} disposizioni degli $n-1$ elementi $a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n$ a $m-1$ a $m-1$, ciascuna una sola volta. E viceversa se noi a ciascuna di queste D_{n-1}^{m-1} disposizioni premettiamo l'elemento a_i, troviamo quelle tra

le disposizioni degli n elementi $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n$ a m a m, che cominciano con a_i. E le troviamo tutte una e una sola volta. Il numero di quelle fra le D_n^m disposizioni degli n elementi dati a m a m, che cominciano con a_i, è dunque D_{n-1}^{m-1}. Ripetendo questo ragionamento per gli n valori di i, si trova $D_n^m = n D_{n-1}^{m-1}$.
In modo analogo si trova:

$$D_{n-1}^{m-1} = (n-1) D_{n-2}^{m-2} \,;\; D_{n-2}^{m-2} = (n-2) D_{n-3}^{m-3} \,;\; \ldots \,;\; D_{n-m+2}^{2} = (n-m+2) D_{n-m+1}^{1} = (n-m+2)(n-m+1).$$

Se ne deduce facilmente, moltiplicando tutte queste uguaglianze membro a membro:

$$\boxed{D_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1)}$$

§. 2. Permutazioni di n elementi.

Se $n = m$ (Cfr. §. 1), le disposizioni prendono il nome di *permutazioni*. Il loro numero D_n^n si indica anche con P_n. E cioè $P_n = D_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2.1$. Il prodotto $1.2.3\ldots n$ si indica brevemente col simbolo $n!$ (o $\underline{n|}$ o $\pi(n)$) che si legge *fattoriale di n* oppure *n fattoriale*.

Così per es. gli elementi a_1, a_2, a_3 danno luogo alle sei permutazioni:

a_1, a_2, a_3 ; a_2, a_1, a_3 ; a_1, a_3, a_2 ; a_2, a_3, a_1 ; a_3, a_1, a_2 ; a_3, a_2, a_1.

La permutazione $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si suol chiamare la *permutazione principale*.

Se in una permutazione avviene che di due elementi quello a indice maggiore precede quello a indice più piccolo, si suol dire che i due elementi *formano* (in quella permutazione) *una inversione*, o anche sono *invertiti*. ordine opposto alla princip.

Nella permutazione principale non vi è alcuna inversione. e si dice pari.

Nella permutazione a_4, a_2, a_3, a_1 dei 4 oggetti a_1, a_2, a_3, a_4 vi sono le seguenti inversioni: $(a_4, a_2), (a_4, a_3), (a_4, a_1), (a_2, a_1), (a_3, a_1)$.

Una permutazione si dice pari o dispari secondo che in essa vi è un numero pari o un numero dispari di coppie di elementi invertiti, o, più brevemente, secondo che in essa vi è un numero pari, o un numero dispari di inversioni.

La permutazione principale si considera come pari, perchè il numero zero si considera pari.

Si dice trasposizione lo scambiare tra di loro di posto due elementi di una data permutazione. Così per es. con la trasposizione dei due elementi a_1, a_2, dalle permutazioni.

$$a_1, a_2, a_3 \quad ; \quad a_3, a_1, a_2 \quad ; \quad a_1, a_3, a_2$$

si passa rispettivamente alle permutazioni.

$$a_2, a_1, a_3 \quad ; \quad a_3, a_2, a_1 \quad ; \quad a_2, a_3, a_1 .$$

Con una trasposizione si può da una data permutazione passare a un'altra permutazione, dove un dato elemento è a un altro posto qualsiasi. Così per es. se dalla permutazione a_1, a_3, a_2, a_4 si volesse passare a un'altra permutazione, dove a_1 è al terzo posto, basterebbe trasporre gli elementi a_1, a_2. E si otterrebbe così la permutazione a_2, a_3, a_1, a_4.

Resta così evidente che con un numero abbastanza elevato di trasposizioni si può da una data permutazione pas sare a un'altra permutazione qualsiasi.

Così per es. per passare dalla permutazione

$$a_1, a_2, a_3, a_4 \quad \text{alla} \quad a_2, a_4, a_1, a_3$$

comincierò a portare a_1 nel terzo posto, trasponendo gli elementi a_1, a_3. E otterrò così la permutazione a_3, a_2, a_1, a_4. Porterò poi a_2 nel primo posto, trasponendo gli elementi a_2, a_3; otterrò così la permutazione a_2, a_3, a_1, a_4. Trasponendo infine gli elementi a_3, a_4, otterrò la permutazione a cui volevo pervenire.

Teorema *Una trasposizione trasforma una permutazione pari in una permutazione dispari e una dispari in una pari.*

Ciò è evidente se i due elementi trasposti nella permutazione che si considera sono consecutivi. Infatti in tal caso se i due elementi formavano (non formavano) nella permutazione iniziale una inversione, essi non formeranno più (formeranno) una inversione dopo eseguita la trasposizione. Le altre inversioni esistenti prima della trasposizione continueranno ad esistere anche poi. Dunque la nostra trasposizione ha soltanto distrutta (creata) una inversione. Il numero totale delle inversioni ha cambiato di parità.

Basterà dunque dimostrare che ogni trasposizione equivale a un numero dispari di trasposizioni di elementi consecutivi. Siano a_i, a_j gli elementi trasposti; e tra di essi nella permutazione iniziale siano compresi k elementi, che io indicherò senz'altro con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_k$.

Gli elementi $a_i, a_j, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ nella permutazione iniziale si seguivano nell'ordine:

$$a_i \; \alpha_1 \, \alpha_2 \dots \alpha_k \; a_j .$$

Dopo eseguita la trasposizione, l'ordine è il seguente:

$$a_j \; \alpha_1 \, \alpha_2 \dots \alpha_k \; a_i .$$

Ora l'effetto ottenuto con questa unica trasposizione si può ottenere così:

Si esegua la traspos. di elementi consecutivi $a_i \alpha_1$; si ottiene la permut. $\alpha_1 a_i \alpha_2 \dots \alpha_k a_j$ } K trasp.

" " " " $a_i \alpha_2$, " " $\alpha_1 \alpha_2 a_i \alpha_3 \dots \alpha_k a_j$

. . . .

" " " " $a_i \alpha_k$ " " $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k a_i a_j$

Si sono così fatte finora k trasposizioni di elementi consecutivi. Si traspongano quindi gli elementi consecutivi a_j, a_i; si ottiene la permutazione

$$\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \; a_j \; a_i$$ } 1 tra

Ora, in modo analogo a quanto sopra, facendo successivamente le k trasposizioni delle coppie $(a_j, \alpha_k), (a_j, \alpha_{k-1}), \dots, (a_j, \alpha_1)$, } K tra si ottiene appunto la permutazione

$$a_j \; \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \; a_i$$ 2K+

E in tutto si sono appunto eseguite $2k+1$ trasposizioni di elementi consecutivi. La nostra trasposizione equivale dunque a un numero dispari di trasposizioni tra elementi consecutivi. c. d. d.

Se noi consideriamo a coppie le P_m permutazioni di m elementi $a_1, a_2, \dots a_m$, considerando insieme quelle che si deducono l'una dall'altra trasponendo gli elementi a_1, a_2, ??

$\{ a_1 a_2 \dots a_m$ $\{ a_1 a_m \dots a_2$ $\{ a_2 a_m a_1$

le permutazioni di una stessa coppia saranno l'una pari, l'altra dispari. Quindi tra le nostre P_m permutazioni tante sono le pari quante le dispari.

§.3. Combinazioni di n elementi a m a m.

l'ordine non influisce

Si dicono combinazioni di n elementi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ad m ad m i gruppi distinti di m elementi scelti tra gli n considerati, quando si considerino come distinti soltanto due gruppi, che non abbiano tutti gli elementi comuni (e quindi si considerino come identici due gruppi che differiscono solo per l'ordine dei loro elementi). Così per es. i tre elementi a_1, a_2, a_3 dànno origine alle seguenti 3 combinazioni a 2 a 2: a_1, a_2 ; a_2, a_3 ; a_3, a_1. Il lettore confronti con le definizioni del §.1.

Sia C_n^m il numero delle combinazioni degli n elementi ad m ad m. Permutiamo gli m elementi di ognuna di queste combinazioni in tutti gli $m!$ modi possibili. Otterremo evidentemente così tutte le D_n^m disposizioni degli n elementi ad m ad m.

Ma da ogni combinazione si ottengono così P_m disposizioni. Quindi

$$C_n^m P_m = D_n^m ;$$

e perciò

$$C_n^m = \frac{D_n^m}{P_m} .$$

E, per le formole dei §§ 1-2, si avrà

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

Questo numero è certamente intero, e si indica con $\binom{n}{m}$.

Si ha $\binom{n}{1}=n$, $\binom{n}{n}=1$.

Si ha:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \qquad \text{o} \qquad \boxed{\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}}.$$

Infatti, scelta una combinazione degli n elementi ad m ad m, gli $n-m$ elementi restanti formano una delle combinazioni degli n elementi ad $n-m$ ad $n-m$, e a due distinte delle prime combinazioni corrispondono due distinte delle seconde; dunque:

$$C_n^m \leqq C_n^{n-m}.$$

Analogamente si prova che

$$C_n^{n-m} \leqq C_n^m$$

Da ciò segue che necessariamente

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

$(n-m)! = 1.2.3 \ldots$

Oppure

$$C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)}{m!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-m+1)(n-m)(n-m-1)\ldots\ldots 2.1}{m!\,(n-m)!}$$

ossia

$$\boxed{\binom{n}{m} = C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}}.$$

Es. $C_5^3 = \dfrac{1.2.3.4.5}{1.2.3.\,1.2}$

$C_5^2 = \dfrac{1.2.3.4.5}{1.2.\,1.2.3}$

Or cambiando m in $n-m$, il 2º membro non si altera, e però non si altera neanche il 1º.

Osservazione. Se applichiamo la relazione dimostrata nel caso in cui $m=0$ (illecitamente) otteniamo $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$, e però converremo di porre $\boxed{\binom{n}{0}=1}$.

Capitolo II.

Determinanti e sistemi di equazioni lineari.

§.1. Definizioni.

Si chiama matrice rettangolare a m linee ed n colonne l'insieme di $m \cdot n$ elementi disposti in m linee (o righe, od orizzontali) ed n colonne (o verticali) racchiuse fra due sbarre o coppie di sbarre verticali. Così per es.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ a & b & c & d \end{vmatrix} \quad \text{o anche} \quad \begin{Vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ a & b & c & d \end{Vmatrix}$$

è una matrice a due righe e quattro colonne.

L'elemento comune alla r^{esima} riga $(r = 1, 2, \ldots, m)$ e alla s^{esima} colonna $(s = 1, 2, \ldots, n)$ si suole indicare con a_{rs} (oppure con b_{rs}, c_{rs}, …). Così nell'esempio precedente

$$a = a_{11} \quad , \quad b = a_{22} \quad , \quad d = a_{24} \, , \quad \text{ecc.}$$

Se $m = n$, ossia se il numero delle righe è uguale a quello delle colonne, la matrice prende il nome di determinante di n^{esimo} ordine. Esso si racchiude sempre tra sole due sbarre verticali.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(dove i termini $a_{11}, a_{22}, \dots a_{nn}$ si dicono costituire la diagonale principale) e si assume come simbolo di una quantità Q, che si definisce nel seguente modo:

Si scrivano una sola volta tutti i prodotti distinti P di n fattori scelti tra le a_{rs}, in guisa che due qualsiasi di questi fattori appartengano tanto a righe, che a colonne distinte. Vale a dire i primi indici di questi n fattori sieno tutti distinti tra loro; e altrettanto avvenga dei secondi. I primi indici, tutti distinti, saranno quindi i numeri $1, 2, \dots n$, scelti in un certo ordine, e formeranno quindi una permutazione di questi n numeri. Altrettanto avverrà dei secondi indici. Premetteremo ad ognuno dei prodotti P il segno $+$ o il segno $-$, secondo che queste due permutazioni sono o non sono della stessa classe. La somma di tutti questi prodotti, presi col segno convenuto, si assumerà come valore Q del nostro determinante.

Osservazione. La definizione non è contraddittoria. Infatti un cambiamento nell'ordine dei fattori di uno dei prodotti P non muta il segno che, secondo la precedente convenzione, si deve dare a P. Infatti un qualsiasi cambiamento nell'ordine dei fattori si ottiene mediante trasposizioni: e una trasposizione qualsiasi per il teorema di pag. 6 cambia di classe entrambe le permutazioni, cui danno luogo gli indici dei fattori di P. Cosicchè esse dopo ogni trasposizione sono o non sono della stessa classe, secondo che tali erano inizialmente.

Es. Sviluppare il determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Le permutazioni degli indici 1, 2 sono due: (1, 2) e (2, 1). Quindi noi avremmo da considerare i prodotti $a_{11}\, a_{22}$, $a_{12}\, a_{21}$, $a_{21}\, a_{12}$, $a_{22}\, a_{11}$.

Ma il primo e il quarto, il secondo e il terzo non sono distinti. Restano dunque da considerare solamente i prodotti:

$$+\, a_{11} \cdot a_{22} \quad \text{e} \quad a_{12} \cdot a_{21}.$$

Ora si osservi che nel primo prodotto tanto i primi indici 1, 2 quanto i secondi 1, 2 formano una permutazione
12 pari (zero inversioni), e però noi premetteremo al prodotto il se-
21 gno +. Nel secondo prodotto i primi indici formano ancora la permutazione pari (1, 2) ma i secondi formano una permutazione (2, 1) che è dispari, perchè contiene una inversione; dunque noi premetteremo al prodotto il segno —.

Dunque lo sviluppo del determinante proposto è

$$a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$$

e perciò scriveremo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$$

Cambiando l'ordine dei fattori di un qualsiasi prodotto P, posso ottenere che o i primi o i secondi indici si dispongano in un ordine qualunque prefissato ad arbitrio. Posso per esempio ottenere che la permutazione dei primi indici sia la permutazione principale $1, 2, \dots, n$.

Dopo ciò il segno di un prodotto P sarà $+$ oppure $-$, secondo che la permutazione dei secondi indici è o non è della stessa classe della permutazione principale, ossia secondo che la permutazione dei secondi indici è pari o dispari.

Se noi, tenuta fissa la permutazione dei primi indici, facciamo percorrere ai secondi indici tutte le $n!$ permutazioni possibili degli indici $1, 2, \dots, n$, otterremo tutti i termini di Q, ciascuno una e una sola volta. Infatti è chiaro che in tal modo si hanno tutti i termini di Q, perchè se in ognuno di questi disponiamo i primi indici nell'ordine crescente $1, 2, \dots n$, i secondi indici dovranno formare una delle $n!$ permutazioni dei numeri $1, 2, \dots, n$. E ciascuno si otterrà una sola volta, ossia due qualunque degli $n!$ termini così formati sono distinti, perchè se due di essi fossero identici, cioè contenessero gli stessi elementi di Q, li conterrebbero nello stesso ordine, perchè in entrambi i primi indici sono nell'ordine crescente $1, 2, \dots n$, e però i secondi indici sarebbero pure ordinatamente eguali.

I termini di Q sono dunque in numero uguale a $n!$ e sono metà preceduti dal segno $+$, metà dal segno $-$, perchè vi sono tante permutazioni pari, quante dispari.

Calcoliamo come esempio il determinante di terz'ordine.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Questo determinante si sviluppa in un polinomio di $3! = 6$ termini, ciascuno dei quali è un prodotto di tre fattori. Se in ciascuno di questi prodotti facciamo in modo che i primi indici vadano crescendo, cioè in modo che formino la permutazione principale $(1, 2, 3)$, i secondi indici formeranno tutte le $3! = 6$ permutazioni degli indici 1, 2, 3, ossia:

$$(1, 2, 3), (2, 1, 3), (1, 3, 2), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).$$

delle quali la 1ª, la 4ª e la 5ª sono di classe pari e le rimanenti di classe dispari; avremo dunque i 6 prodotti:

$$a_{11}\, a_{22}\, a_{33}\,,\ a_{12}\, a_{21}\, a_{33}\,,\ a_{11}\, a_{23}\, a_{32}\,,\ a_{12}\, a_{23}\, a_{31}\,,\ a_{13}\, a_{21}\, a_{32}\,,\ a_{13}\, a_{22}\, a_{31}\,.$$

Il 1°, il 4° ed il 5° li dovremo far precedere dal segno $+$, gli altri dal segno $-$; dunque pel determinante dato avremo lo sviluppo

$$a_{11}\, a_{22}\, a_{33} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31}\,.$$

si altera
…biando righe
…lonne.

§ 2° Proprietà elementari dei determinanti.

Poniamo $b_{ki} = a_{ik}$. Il determinante

$$Q' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots\ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots\ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots\ldots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots\ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

si ottiene da Q, scambiando le righe con le colonne. Io dico che $Q = Q'$.

Sia infatti

$$\pm\, a_{1i_1}\, a_{2i_2} \ldots\ldots a_{ni_n}$$

un termine di Q, dove $(i_1, i_2, \ldots . i_n)$ è una permutazione dei numeri $1, 2, \ldots\ldots, n$. Questo termine è uguale per l'ipotesi $b_{ki} = a_{ik}$

al termine

$$\pm b_{i_1 1} \quad b_{i_2 2} \cdots\cdots b_{i_n n}$$

di Q', e si deve prendere con lo stesso segno, perchè in esso la permutazione formata dai primi indici e quella formata dai secondi coincidono rispettivamente con quella formata dai secondi indici e dai primi del termine di Q.

Altrettanto si può ripetere per tutti i termini di Q e quindi i due determinanti Q e Q' hanno lo stesso numero di termini ordinatamente eguali, e però sono eguali, c. d. d.

Poniamo:

$$b_{ik} = a_{ik} \qquad\qquad (i \neq 1,2)$$

per tutti i valori degli indici i, k, purchè l'indice i sia differente da $1, 2$. Poniamo poi

$$b_{1k} = a_{2k} \qquad , \qquad b_{2k} = a_{1k}$$

per tutti i valori dell'indice k. Consideriamo il determinante

$$Q'' = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots\cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots\cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots\cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

che si ottiene da Q scambiando la prima linea con la seconda.

Sia $P'' = \pm b_{1i_1} \; b_{2i_2} \; b_{3i_3} \cdots b_{ni_n}$ un termine dello sviluppo di Q''. Esso è uguale (in valore assoluto) al termine $\pm a_{2i_1} \; a_{1i_2} \; a_{3i_3} \cdots a_{ni_n}$ ossia al termine $P = \pm a_{1i_2} \, a_{2i_1} \, a_{3i_3} \cdots a_{ni_n}$.

Ma il termine P'' dello sviluppo di Q'' si deve prendere col segno + o col segno —, secondo che $(i_1, i_2, i_3, i_4, \ldots, i_n)$ è una permutazione pari o dispari. Il termine P di Q si deve prendere col segno + o –, secondo che $(i_2\ i_1\ i_3\ i_4 \ldots i_n)$ è pari o dispari. I termini P'' e P di Q'' e di Q si devono quindi prendere con segno opposto, perchè le permutazioni $(i_1\ i_2\ i_3\ i_4 \ldots i_n)$ e $(i_2\ i_1\ i_3\ i_4 \ldots i_n)$ sono di classe distinta. Altrettanto ripetendo per tutti i termini di Q e Q'' si dimostra che $Q = -Q''$. Ora ricordando che Q'' si deduce da Q, trasponendo la prima e la seconda linea, e, riflettendo che i ragionamenti testè fatti si possono ripetere per due linee o due colonne qualsiasi, si trova che:

<u>La trasposizione di due linee, o di due colonne trasforma un determinante in un altro di uguale valore assoluto, ma di segno contrario.</u>

<u>Se due linee (o due colonne) di un determinante sono eguali, il determinante è nullo.</u>

Infatti se si traspongono le due linee (o colonne), il determinante Q resta evidentemente uguale a sè stesso. Ma, per il teorema precedente, dovrebbe mutare di segno. Dovrebbe quindi essere $Q = -Q$; è dunque $Q = 0$. c. d. d.

§. 3. Sviluppo di un determinante secondo una linea o colonna. Corollarii

Poniamo $b_{ik} = a_{i+1,\,k+1}$ per $i, k = 1, 2, \ldots, n-1$.

Consideriamo il determinante

$$A_{11} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1,n-1} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \ldots & b_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Sia $P' = \pm b_{1i_1}\ b_{2i_2} \dots b_{n-1,i_{n-1}}$ un termine dello sviluppo di A_{11}. Questo termine è da prendersi col segno + o col segno —, secondo che $(i_1 i_2 \dots i_{n-1})$ è una permutazione pari o dispari dei numeri $1, 2, \dots, n-1$. Consideriamo la permutazione $(1, i_1+1, i_2+1, \dots i_{n-1}+1)$ dei numeri $1, 2, \dots, n$. È facile vedere che questa permutazione è pari, se la precedente è pari, ed è dispari se la precedente è dispari. Infatti in essa il primo elemento 1 non fa inversione con nessuno dei seguenti che son tutti maggiori di 1; i rimanenti fanno tra loro tante inversioni quante ne fanno i numeri $i_1, i_2, \dots, i_{n-1}$, pel fatto che da $a \gtrless b$, segue $a+1 \gtrless b+1$, e viceversa; dunque le due permutazioni considerate hanno un egual numero di inversioni, e però sono della stessa classe.

Ora il termine

$$P = \pm a_{11} a_{2,i_1+1}\ a_{3,i_2+1} \dots \dots a_{n,i_{n-1}+1}$$

di Q si deve prendere col segno + o col segno —, secondo che $(1, i_1+1, i_2+1, \dots i_{n-1}+1)$ è pari o dispari. Quindi i termini P, P' si devono prendere con lo stesso segno nello sviluppo dei determinanti Q, A_{11}.

Ma $a_{2\, i_1+1} \cdot a_{3\, i_2+1} \dots \dots a_{n\, i_{n-1}+1} = b_{1 i_1} \cdot b_{2 i_2} \dots \dots b_{n-1\, i_{n-1}}$. Quindi, moltiplicando per a_{11} ogni termine di A_{11}, si trova un termine di Q. Quindi $a_{11} A_{11}$ è una parte dello sviluppo di Q.

Siano r, s due numeri uguali o distinti scelti tra $1, 2, \dots, n$. Voglio cercare di portare il termine a_{sr} al primo posto. Osservo intanto che con $r-1$ trasposizioni successive posso portare la r^{esima} colonna al posto della prima, lasciando inalterato l'ordine delle altre colonne. Il determinante

$$\mathcal{Q}' = \begin{vmatrix} a_{1r} & a_{11} & a_{12} \dots\dots a_{1,r-1} & a_{1,r+1} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{2r} & a_{21} & a_{22} \dots\dots a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s-1,r} & a_{s-1,1} & a_{s-1,2} \dots a_{s-1,r-1} & a_{s-1,r+1} & \dots\dots & a_{s-1,n} \\ a_{s,r} & a_{s1} & a_{s2} \dots a_{s,r-1} & a_{s,r+1} & \dots\dots & a_{sn} \\ a_{s+1,r} & a_{s+1,1} & a_{s+1,2} \dots a_{s+1,r-1} & a_{s+1,r+1} & \dots\dots & a_{s+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nr} & a_{n1} & a_{n2} \dots a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

così ottenuto sarà eguale a $(-1)^{r-1} \cdot \mathcal{Q}$.

Con $s-1$ trasposizioni successive posso ora portare la $s$esima riga al posto della prima, lasciando inalterato l'ordine delle altre righe. Il determinante

$$\mathcal{Q}'' = \begin{vmatrix} a_{sr} & a_{s1} & a_{s2} \dots\dots a_{s,r-1} & a_{s,r+1} & \dots\dots & a_{sn} \\ a_{1r} & a_{11} & a_{12} \dots\dots a_{1,r-1} & a_{1,r+1} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{2r} & a_{21} & a_{22} \dots\dots a_{2,r-1} & a_{2,r+1} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s-1,r} & a_{s-1,1} & a_{s-1,2} \dots\dots a_{s-1,r-1} & a_{s-1,r+1} & \dots\dots & a_{s-1,n} \\ a_{s+1,r} & a_{s+1,1} & a_{s+1,2} \dots\dots a_{s+1,r-1} & a_{s+1,r+1} & \dots\dots & a_{s+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{nr} & a_{n1} & a_{n2} \dots\dots a_{n,r-1} & a_{n,r+1} & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

sarà uguale a

$$(-1)^{s-1}\mathcal{Q}' = (-1)^{r-1+s-1}\mathcal{Q} = (-1)^{r+s-2}\mathcal{Q} = (-1)^{r+s}\mathcal{Q}$$

Ora il determinante $\mathcal{Q}''$ ha a_{sr} come primo elemento; e nello sviluppo di $\mathcal{Q}''$ compariscono, pel teorema precedente, tutti i termini del determinante

$$A''_{sr} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1,r-1} & a_{1,r+1} \ldots\ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s-1,1} & a_{s-1,2} \ldots & a_{s-1,r-1} & a_{s-1,r+1} \ldots & a_{s-1,n} \\ a_{s+1,1} & a_{s+1,2} \ldots & a_{s+1,r-1} & a_{s+1,r+1} \ldots & a_{s+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{n,r-1} & a_{n,r+1} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(che si ottiene da $\mathcal{D}''$, sopprimendovi la prima riga e la prima colonna) moltiplicati per a_{sr}. Ma il determinante A''_{sr} è proprio il determinante che si ottiene da $\mathcal{D}$ sopprimendovi la r^{esima} colonna e la s^{esima} riga. E se noi poniamo.

$$A_{sr} = (-1)^{r+s} A''_{sr}$$

troviamo che nello sviluppo di $\mathcal{D}$ compariscono tutti i termini di A_{sr} moltiplicati per a_{sr}. La quantità A_{sr}, che si ottiene moltiplicando per $(-1)^{r+s}$ il determinante ottenuto da $\mathcal{D}$, sopprimendo la r^{esima} colonna e la s^{esima} riga, si chiama il complemento algebrico di a_{sr}.

Nello sviluppo di $\mathcal{D}$ comparisce quindi il prodotto di ogni termine a_{sr} di $\mathcal{D}$ per il suo complemento algebrico A_{sr}. Questo prodotto (notiamolo) ha tanti termini, quanti sono i termini di A''_{sr}. Ma A''_{sr} è un determinante di $(n-1)^{esimo}$ ordine, Quindi il prodotto $a_{sr} \cdot A_{sr}$ ha $(n-1)!$ termini.

Consideriamo tutti gli elementi di una stessa colonna, per es. la r^{esima}: $a_{1r}, a_{2r}, \ldots, a_{nr}$.

Costruiamo i prodotti

$$a_{1r} \cdot A_{1r}, \quad a_{2r} \cdot A_{2r}, \ldots\ldots, a_{nr} \cdot A_{nr}$$

Ognuno di questi prodotti ha $(n-1)!$ termini, che tutti sono termini di Q. Ma i termini di uno di questi prodotti sono distinti dai termini degli altri prodotti. Infatti per es., mentre i termini del primo prodotto contengono tutti a_{1r} a fattore, i termini degli altri prodotti non hanno a_{1r} a fattore. Quindi nello sviluppo di Q compariranno i termini della somma:

$$a_{1r}A_{1r}+a_{2r}A_{2r}+\dots+a_{nr}A_{nr}.$$

E, poichè questa somma ha $n.(n-1)!=n!$ termini, proprio quanti sono i termini di Q, Q sarà proprio uguale a questa somma.

Se ne deduce il teorema: un determinante è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una sola linea o colonna, per i rispettivi complementi algebrici.

Per esempio

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{33} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{31}a_{23}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{31}a_{22}.$$

Si osservi che in $A_{1r}, A_{2r}, \dots, A_{nr}$ non compariscono più i termini $a_{1r}, a_{2r}, \dots, a_{nr}$. Se noi dunque moltiplichiamo $a_{1r}, a_{2r}, \dots, a_{nr}$ per uno stesso numero m, il determinante Q resta moltiplicato per questo numero. Donde il teorema: Se tutti gli elementi di una stessa linea (o colonna) di un determinante si moltiplicano per uno stesso numero, il determinante risulta moltiplicato per questo numero.

Ne segue facilmente l'altro: se un determinante ha due linee (o colonne) proporzionali, è nullo.

Infatti in tale ipotesi gli elementi dell'una linea (o colonna) sono eguali a quelli dell'altra moltiplicati per uno stesso numero (cioè il comune rapporto); sopprimendo questo fattore comune per darlo come fattore al determinante, questo acquista due linee (o colonne) uguali, e quindi è nullo.

Osserviamo che

$$a_{1r}A_{1s}+a_{2r}A_{2s}+\dots+a_{nr}A_{ns}$$

è uguale a $\mathcal{D}$ se $r=s$ (teorema precedente), ma è nullo, se $r\neq s$. Infatti questa somma, se $r\neq s$ è uguale allo sviluppo del determinante $\mathcal{D}'$, che si ottiene da $\mathcal{D}$, scrivendo a_{ir} al posto di a_{is}, e che quindi ha uguali le colonne r^{esima} ed s^{esima}.

Quindi

$$a_{1s}A_{1s}+a_{2s}A_{2s}+\dots+a_{ns}A_{ns}=\mathcal{D}.$$

$$a_{1r}A_{1s}+a_{2r}A_{2s}+\dots+a_{nr}A_{ns}=0 \text{ se } r\neq s.$$

E perciò si ha, per ogni valore di h:

$$(a_{1s}+ha_{1r})A_{1s}+(a_{2s}+ha_{2r})A_{2s}+\dots+(a_{ns}+ha_{nr})A_{ns}=\mathcal{D}.$$

Ma questa espressione non è che lo sviluppo di un determinante, dedotto da $\mathcal{D}$ aggiungendo alla s^{esima} colonna la r^{esima} moltiplicata per h; si ha quindi il teorema:

<u>Un determinante non muta di valore, se agli elementi di una sua linea (colonna) si aggiungono gli elementi omologhi di un'altra linea (colonna), anche moltiplicati per un medesimo numero arbitrario.</u>

§. 4 Sistema di n equazioni lineari non omogenee ad n incognite (*)

Per sistema di n equazioni di primo grado (o, come

(*) A. Capelli. Lezioni di Algebra Complementare. n.^i 154, ..., 157.

anche si dice, lineari) ad n incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$, s'intende un sistema di n equazioni ciascuna delle quali sia della forma:

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \dots + \lambda x_n = p,$$

dove le $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \lambda, p$ sono numeri costanti dati, coefficienti dell'equazione, da considerarsi come conosciuti. Il problema corrispondente a queste equazioni consiste dunque nel cercare un sistema speciale di valori da darsi alle $x_1, x_2, \dots, x_n$, tali che le n equazioni sieno tutte soddisfatte simultaneamente.

Indicando in generale con a_{ij} il coefficiente della incognita x_j nella i^{ma} equazione e con α_i il termine noto, che sta al secondo membro di questa stessa equazione, è chiaro che il sistema delle n equazioni date fra le n incognite prenderà la forma seguente:

$$[1] \quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = \alpha_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = \alpha_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = \alpha_n \end{cases}$$

ed in corrispondenza ad esse si avrà un certo determinante

$$[2] \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

che si suol chiamare il determinante dei coefficienti.

Indicando al solito con A_{ij} il complemento algebrico di a_{ij} in Δ, moltiplichiamo le equazioni [1] rispettivamente per $A_{1k}, A_{2k}, \dots, A_{nk}$. Sommando poi membro a membro otteniamo:

s compl. Alg.

$$
\begin{aligned}
& A_{1k}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1k}x_k+\cdots+a_{1n}x_n)\\
&+A_{2k}(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2k}x_k+\cdots+a_{2n}x_n)\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+A_{nk}(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nk}x_k+\cdots+a_{nn}x_n)\\
&=A_{1k}\alpha_1+A_{2k}\alpha_2+\cdots\cdots+A_{nk}\alpha_n
\end{aligned}
$$

od anche, riducendo i termini che contengono una stessa incognita

[illegible] compl. A . : Risultato è il Δ [illegible] dei coeff. (2)

[illegible] compl. [illegible] I°: Risultato: 0

$$
[3]\quad \left\{
\begin{aligned}
& (A_{1k}a_{11}+A_{2k}a_{21}+\cdots\cdots+A_{nk}a_{n1})x_1\\
&+(A_{1k}a_{12}+A_{2k}a_{22}+\cdots\cdots+A_{nk}a_{n2})x_2\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+(A_{1k}a_{1k}+A_{2k}a_{2k}+\cdots\cdots+A_{nk}a_{nk})x_k = 0 \text{ [illegible]}\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+(A_{1k}a_{1n}+A_{2k}a_{2n}+\cdots\cdots+A_{nk}a_{nn})x_n = 0.\\
&=A_{1k}\alpha_1+A_{2k}\alpha_2+\cdots\cdots+A_{nk}\alpha_n\,.
\end{aligned}
\right.
$$

[illegible] coeff.: termini noti.

Ma, per il § 3, ciascuna delle somme scritte fra parentesi nel primo membro è eguale a zero, ad eccezione della somma

[illegible]

$$A_{1k}a_{1k}+A_{2k}a_{2k}+\cdots\cdots+A_{nk}a_{nk} = \Delta$$

[illegible]

la quale, componendosi degli elementi della k^{esima} colonna del determinante moltiplicati proprio per i complementi algebrici degli stessi elementi, è uguale al valore del determinante Δ.

L'equazione [3] si riduce così alla seguente:

$$[4]\qquad \Delta x_k = A_{1k}\alpha_1+A_{2k}\alpha_2+\cdots\cdots+A_{nk}\alpha_n\,.$$

Di equazioni analoghe alla [4] ne abbiamo n, che si deducono da questa dando a k successivamente i valori $1,2,3,\ldots,n$. Pertanto, se il valore Δ del determinante del sistema è diverso da zero, ci sarà lecito dividere queste equazioni per Δ

e ne dedurremo:

$$[5] \qquad x_k = \frac{A_{1k}\alpha_1 + A_{2k}\alpha_2 + \dots + A_{nk}\alpha_n}{\Delta \text{ determin.}} .$$

deter. in cui al posto dei coeff. dell'incognita si mettono i termini noti: determin. dei coefficienti

Queste formule ci fanno conoscere i valori delle n incognite, poichè i secondi membri sono composti di quantità tutte conosciute. Esse ci dicono che per ogni incognita si avrà un unico possibile valore perfettamente determinato.

E reciprocamente, se i valori così determinati per x_1, $x_2, \dots; x_n$ si sostituiscono in una qualunque delle equazioni [1] del sistema, è facile verificare che essa è veramente soddisfatta. Infatti sostituendo nella r^{ma} in una

$$a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rn}x_n = \alpha_r ,$$

si ha:

$$a_{r1} \cdot \frac{A_{11}\alpha_1 + A_{21}\alpha_2 + \dots + A_{n1}\alpha_n}{\Delta} + a_{r2}\frac{A_{12}\alpha_1 + A_{22}\alpha_2 + \dots + A_{n2}\alpha_n}{\Delta} + \dots\dots$$

$$\dots + a_{rn}\frac{A_{1n}\alpha_1 + A_{2n}\alpha_2 + \dots + A_{nn}\alpha_n}{\Delta} = \alpha_r$$

ossia, ordinando il primo membro rispetto ad $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$$\frac{a_{r1}A_{11} + a_{r2}A_{12} + \dots + a_{rn}A_{1n}}{\Delta}\alpha_1 + \frac{a_{r1}A_{21} + a_{r2}A_{22} + \dots + a_{rn}A_{2n}}{\Delta}\alpha_2 + \dots$$

$$+ \frac{a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \dots + a_{rn}A_{rn}}{\Delta}\alpha_r + \dots + \frac{a_{r1}A_{n1} + a_{r2}A_{n2} + \dots + a_{rn}A_{nn}}{\Delta} = \alpha_r ;$$

ma il numeratore di ciascun coefficiente del primo membro è zero, tranne quello del coefficiente di α_r che vale Δ (§3), dunque l'ultima eguaglianza diventa $\alpha_r = \alpha_r$, cioè è identicamente soddisfatta.

Dunque: se il determinante di un sistema di n equazioni di primo grado con n incognite ha valore diverso da zero, esiste sempre un sistema, ed un unico sistema, di valori delle incognite che soddisfa a tutte le equazioni.

Osservando che il numeratore della [5] è lo sviluppo di un determinante che abbia la stessa matrice del determinante Δ del sistema, in cui però agli elementi $a_{1k}, a_{2k}, \ldots, a_{nk}$ siansi sostituiti i numeri $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, si può enunciare la **regola di Cramer**

Un incognita qualunque di un sistema di n equazioni di primo grado ad n incognite, col determinante diverso da zero, è eguale ad una frazione che ha per denominatore il determinante del sistema e per numeratore il determinante che si ottiene sostituendo nel determinante del sistema alla colonna dei coefficienti dell'incognita la colonna dei termini noti.

coeff.

Esempio - Del sistema

$$3x+2y+5z=2$$
$$x-7y+4z=0$$
$$9x+2y+3z=1$$

il determinante è

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -7 & 4 \\ 9 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 304$$

Semplif.

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -7 & 11 \\ 9 & 2 & 14 \end{matrix} = \begin{matrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & -7 & 10 \\ 9 & 2 & 8 \end{matrix}$$

quindi esso è soddisfatto da

$$x=\frac{\begin{vmatrix}2&2&5\\0&-7&4\\1&2&3\end{vmatrix}}{304}=-\frac{15}{304},\quad y=\frac{\begin{vmatrix}3&2&5\\1&0&4\\9&1&3\end{vmatrix}}{304}=\frac{59}{304}\quad z=\frac{\begin{vmatrix}3&2&2\\1&-7&0\\9&2&1\end{vmatrix}}{304}=\frac{107}{304}$$

§.5. Caratteristica di una matrice ad m righe ed n colonne. (*).

Consideriamo una matrice ad m righe ed n colonne

$$[6]\qquad \begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots\dots&a_{mn}\end{vmatrix}$$

Sia K un numero intero non superiore nè ad m nè ad n e scegliamo a piacere fra le colonne della matrice certe K colonne e similmente del pari a piacere fra le orizzontali della matrice certe K orizzontali. È chiaro che le colonne e le orizzontali scelte si incrocieranno in K^2 punti, nei quali si troveranno altrettanti elementi della matrice disposti in modo da rappresentare una matrice quadrata di ordine K e quindi anche un certo determinante di ordine K. I determinanti così formati si dicono determinanti minori contenuti nella matrice proposta.

(*) Capelli. loc. cit. n° 164.

Così ad esempio nella matrice rettangolare ($m=5$, $n=7$),

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{vmatrix}$$

si trova contenuto il determinante minore di ordine 3 ($K=3$)

$$\begin{vmatrix} b_3 & b_5 & b_6 \\ d_3 & d_5 & d_6 \\ e_3 & e_5 & e_6 \end{vmatrix}$$

formato dagli elementi nei quali la seconda, quarta e quinta orizzontale incontrano la terza, quinta e sesta verticale. È facile riconoscere che questa matrice contiene $\binom{7}{5}=21$ determinanti minori di ordine 5, che è il massimo ordine possibile. Quanto poi ai determinanti minori di ordine minimo possibile, cioè 1, ve ne sono 35, cioè tanti quanti sono gli elementi della matrice, giacchè un determinante di ordine 1 altro non è che un determinante di un solo elemento come $|b_4|$, e $|e_7|$, ... i cui valori coincidono coi valori stessi b_4, e_7, ... degli elementi.

Ciò premesso, si chiamerà caratteristica della matrice [6] quel numero h che è uguale al massimo ordine di determinanti minori diversi da zero contenuti nella matrice. Così ad esempio la matrice rettangolare

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 11 & 7 \\ 3 & 6 & 3 & 18 & 9 \end{vmatrix}$$

ha per caratteristica 2, poichè i determinanti minori di quarto e terzo ordine contenuti in essa hanno tutti il valore zero (come è facile persuadersene, anche senza calcolare effettivamente tutti questi determinanti, considerando che la terza orizzontale della matrice è eguale alla somma delle due precedenti e che la quarta è eguale alla somma della seconda e della terza), nel mentre che si trova poi un determinante minore di secondo ordine (come per es. il determinante $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ formato dall'incontro delle prime due verticali colle prime due orizzontali) il quale ha un valore diverso da zero.

È bene osservare che se in una matrice sono nulli tutti i minori di ordine $h+1$, sono nulli anche quelli di ordine $h+2, h+3, \ldots$

Infatti ogni minore di ordine $h+2$ della matrice è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una sua riga per i rispettivi complementi algebrici (§ 3); or questi sono determinanti di ordine $h+1$, certamente contenuti nella matrice, e però tutti nulli per ipotesi, dunque è nullo anche il determinante di ordine $h+2$ considerato. Son dunque nulli tutti i minori di ordine $K+2$, e quindi anche tutti quelli di ordine $K+3$, per lo stesso ragionamento ora fatto; e così via.

§.6 – Forme di 1° grado in n variabili.

Si dice <u>forma di 1° grado</u> (o <u>lineare</u>) in n variabili $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un polinomio di primo grado ed omogeneo in queste variabili; cioè un polinomio del tipo

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n,$$

ove $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono n costanti (<u>coefficienti</u> della <u>forma</u>).

Sieno le forme

$$[7] \quad \begin{cases} U_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n \\ U_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_h = a_{h1} x_1 + a_{h2} x_2 + \ldots + a_{hn} x_n . \end{cases}$$

Esse si dicono <u>linearmente dipendenti</u> se esiste un sistema di costanti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$ <u>non tutte nulle</u>, tali che per tutti i valori delle x_i sia

$$[I] \qquad \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_h U_h = 0$$

ossia ~~che~~

$$\begin{aligned} &(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \ldots + \lambda_h a_{h1}) x_1 + \\ &+ (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \ldots + \lambda_h a_{h2}) x_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ (\lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \ldots + \lambda_h a_{hn}) x_n = 0 \end{aligned}$$

per tutti i valori possibili delle x.

Ciò equivale a dire (come si vede, rendendo nulle tutte le x tranne una) che sia

$x = 1$

$$[8] \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_h a_{h1} = 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \dots + \lambda_h a_{h2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_1 a_{1n} + \lambda_2 a_{2n} + \dots + \lambda_h a_{hn} = 0 \end{array} \right\} = 0$$

per sol. ligaz

Poichè tutte le λ non sono nulle, una di esse, per es. λ_1, sarà differente da zero. Ponendo:

$$-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \mu_2, \quad -\frac{\lambda_3}{\lambda_1} = \mu_3, \quad \dots\dots, \quad -\frac{\lambda_h}{\lambda_1} = \mu_h$$

la [I] e le [8] si possono scrivere

$$[I]' \qquad U_1 = \mu_2 U_2 + \mu_3 U_3 + \dots\dots + \mu_h U_h$$

$$[8]' \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} = \mu_2 a_{21} + \mu_3 a_{31} + \dots + \mu_h a_{h1} \\ a_{12} = \mu_2 a_{22} + \mu_3 a_{32} + \dots + \mu_h a_{h2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n} = \mu_2 a_{2n} + \mu_3 a_{3n} + \dots + \mu_h a_{hn} . \end{array} \right.$$

Si suole anche esprimere l'esistenza delle costanti λ (non tutte nulle) soddisfacenti alle [8], o l'esistenza di costanti finite μ soddisfacenti alle [8]' dicendo che le righe della matrice

$$[9] \quad \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hn} \end{array} \right|$$

sono *linearmente dipendenti*, o che la prima è *combinazione lineare delle seguenti*, in quanto che ogni termine della prima si ottiene moltiplicando i termini analoghi delle righe seguenti rispettivamente per $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_h$ e sommando i risultati così ottenuti.

Se invece gli unici valori delle λ che soddisfano alle [8] sono i valori $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_h = 0$, le forme [7] e le righe della matrice [9] si dicono *linearmente indipendenti*.

Lemma 1° Se la caratteristica della matrice

$$[II] \qquad \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

formata coi coefficienti delle forme

$$V_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

è h, *allora è nullo identicamente* (cioè per ogni valore che si dia a $x_1, x_2, \dots, x_n$) *ogni determinante Δ di ordine $h+1$ formato con $h+1$ righe di detta matrice, le cui $h+1$ colonne sono tutte colonne della [II], eccetto l'ultima, la quale è formata con quelle delle forme V_i che corrispondono alle $h+1$ righe scelte per formare Δ.*

Infatti dire che la matrice [II] ha la caratteristica h equivale a dire che sono nulli tutti i suoi determinanti di ordine $h+1$, ma non sono nulli tutti quelli di ordine h. Precisamente (1) non sia nullo il determinante.

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} \end{vmatrix}$$

Siccome ogni altro determinante di ordine h nella [II] si può ridurre a far l'ufficio di B (permutando convenientemente le date forme e i loro termini), così non si lede la generalità ragionando su B.

Ora sia $s = 1, 2, \ldots, m-h$. Il determinante di ordine $h+1$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1h} & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{h1} & a_{h2} & \cdots & a_{hh} & a_{hr} \\ a_{h+s,1} & a_{h+s,2} & \cdots & a_{h+s,h} & a_{h+s,r} \end{vmatrix}$$

è nullo per $r = 1, 2, \ldots h$ (perchè allora ha l'ultima verticale identica a una delle precedenti) ed è nullo anche per $r = h+1, h+2, \ldots, n$ [giacchè la caratteristica di [II] è h].

Cosicchè, moltiplicando gli elementi dell'ultima verticale per x_r, prendendo poi successivamente $r = 1, 2, \ldots, n$ e poi sommando i risultati, avremo identicamente (cioè qualunque sia il sistema dei valori dati alle x)

---

(1) D'Ovidio – Algebra Complementare pag. 81.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1h} & V_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2h} & V_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots & a_{hh} & V_h \\ a_{h+s,1} & a_{h+s,2} & \dots & a_{h+s,h} & V_{h+s} \end{vmatrix} = 0.$$

Il precedente lemma si può anche enunciare dicendo

Lemma 2° - La matrice (II) e la matrice

$$[\mathrm{III}] \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & V_1 \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} & V_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & V_m \end{vmatrix}$$

hanno la stessa caratteristica, qualunque siano i valori dati alle x.

Infatti la matrice [II], essendo compresa nella matrice [III], tutti i determinanti che appartengono alla [II] appartengono pure alla [III], quindi la caratteristica della [III] non può essere inferiore alla caratteristica h della [II].

Ma per il 1° lemma sono nulli tutti i determinanti di ordine $h+1$ estratti dalla [III] che non appartengono alla [II]; il che significa appunto che h è la caratteristica della [III], ossia che le [II] e [III] hanno la stessa caratteristica

Dal 1° Lemma si può dedurre una importante conseguenza.

Supponiamo, com'è lecito, che sia $\neq 0$ il minore:

$$B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2h} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots\dots & a_{hh} \end{vmatrix}$$

Per il primo lemma

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1h} & U_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{h1} & a_{h2} & \dots\dots & a_{hh} & U_h \\ a_{h+s,1} & a_{h+s,2} & \dots\dots & a_{h+s,h} & U_{h+s} \end{vmatrix} = 0,$$

per $s = 1, 2, \dots, n-h$.

Quindi, sviluppando C secondo gli elementi dell'ultima colonna, si ha:

$$C = \lambda_{s1} U_1 + \lambda_{s2} U_2 + \dots + \lambda_{sh} U_h + B U_{h+s} = 0$$

dove le λ sono costanti (indipendenti dalle x).

Poichè $B \neq 0$, posto $-\dfrac{\lambda_{si}}{B} = \mu_{si}$, si trova:

[10] $$U_{h+s} = \mu_{s1} U_1 + \mu_{s2} U_2 + \dots\dots + \mu_{sh} U_h .$$

Ossia le $U_{h+1}, U_{h+2}, \dots, U_n$ sono combinazioni lineari delle $U_1, U_2, \dots, U_h$.

Invece le $U_1, U_2, \dots\dots, U_h$ sono linearmente indipendenti.

Infatti, se esistessero certe quantità $\lambda_1, \lambda_2, \dots\dots, \lambda_h$ non tutte nulle e tali che fosse identicamente

[11] $$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \dots\dots + \lambda_h U_h = 0,$$

allora si avrebbe in particolare, ponendo tutte le x eguali a zero eccetto $x_r = 1$ e facendo poi successivamente $r = 1, 2, \dots, h$,

$$[12] \quad \begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \cdots\cdots + \lambda_h a_{h1} = 0, \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \cdots\cdots + \lambda_h a_{h2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 a_{1h} + \lambda_2 a_{2h} + \cdots\cdots + \lambda_h a_{hh} = 0. \end{cases}$$

Queste sono h equazioni lineari omogenee nelle h incognite $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h$; la condizione necessaria perchè esse siano soddisfatte da valori non tutti nulli delle incognite, è che sia nullo il determinante dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots\cdots & a_{h1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{h2} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{1h} & a_{2h} & \cdots\cdots & a_{hh} \end{vmatrix};$$

poichè se questo fosse diverso da zero, allora vi sarebbe un solo sistema di soluzioni dato evidentemente da $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots\cdots = \lambda_h = 0$. (pag. 25).

Ma se in questo scambiamo le orizzontali colle verticali, otteniamo il determinante B che per ipotesi è diverso da zero, dunque è impossibile che esista un sistema di valori non tutti nulli per le λ, tale che sia soddisfatta la [11], cioè le $U_1, U_2, \ldots\ldots U_h$ sono linearmente indipendenti. Si ha dunque il teorema:

Se la caratteristica della matrice [II] è h e se è diverso da zero un minore d'ordine h formato ad esempio colle prime h righe della [III], allora le prime h righe di detta matrice e le h forme U corrispondenti sono tra loro indipendenti. Le altre $m-h$ righe e le altre $m-h$ forme U sono combinazione lineari di quelle.

§7 - Sistema di m equazioni lineari con n incognite.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè sia risolubile il sistema

$$[13]\quad \begin{cases} U_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = l_1 \\ U_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = l_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n = l_m \end{cases}$$

con valori finiti delle incognite x, è che le matrici

$$[IV]\quad \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{matrix} \right\| \qquad [V]\quad \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & l_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & l_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & l_m \end{matrix} \right\|$$

abbiano la stessa caratteristica.

Se questa caratteristica è h, noi potremo, cambiando l'ordine delle equazioni e delle incognite, supporre che sia precisamente

$$[14]\quad B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1h} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2h} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{h1} & a_{h2} & \ldots\ldots & a_{hh} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Allora il sistema più generale di valori per le x

che soddisfa alle [13] si ottiene, dando alle

$$x_{h+1}\ ,\ x_{h+2}\,,\ \ldots\ldots,x_n$$

valori arbitrarii, e dando poi alle $x_1, x_2, \ldots x_h$ il sistema di valori, che si ottiene risolvendo le

$$[15]\begin{cases} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\ldots\ldots+a_{1h}\,x_h=l_1-a_{1,h+1}\,x_{h+1}-\ldots\ldots-a_{1n}\,x_n \\ a_{21}\,x_1+\ldots\ldots\ldots+a_{2h}\,x_h=l_2-a_{2,h+1}\,x_{h+1}-\ldots-a_{2n}\,x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{h1}\,x_1+\ldots\ldots+a_{hh}\,x_h=l_h-a_{h,h+1}\,x_{h+1}-\ldots\ldots-a_{hn}\,x_n\,. \end{cases}$$

Le [15], considerate come equazioni nelle $x_1, x_2, \ldots, x_h$, formano un sistema di h equazioni con h incognite, il cui determinante $\cancel{\Delta}$ B è differente da zero, le quali si risolvono col metodo di pag. 25. Cramer

Che la condizione sia necessaria, segue subito dal Lemma 2° del precedente paragrafo. Infatti, se le [13] sono risolubili, la matrice [V] è proprio uguale alla matrice [III] del Lemma 2°, in cui alle x si dia un sistema di valori, che soddisfi alle [13].

Dimostreremo che la condizione è sufficiente. Infatti nelle nostre ipotesi ognuna delle righe $(h+1)^{esima}$, $(h+2)^{esima}$, ... m^{esima} di [V] è combinazione lineare delle prime h righe di [V] per l'ultimo teorema del precedente paragrafo. Ossia esiste per ogni valore di s $(s=1, 2, \ldots m-h)$ un sistema di costanti μ tali che

$$a_{h+s,1}=\mu_{s1}\,a_{1i}+\mu_{s2}\,a_{2i}+\ldots\ldots+\mu_{sh}\,a_{hi}$$
$$l_{h+s}=\mu_{s1}\,l_1+\mu_{s2}\,l_2+\ldots\ldots\ldots+\mu_{sh}\,l_h\,.$$

Ciò significa che la $(h+s)^{esima}$ delle equazioni

[13] si ottiene moltiplicando le prime h equazioni [13] rispettivamente per $\mu_{s1}, \mu_{s2}, \ldots\ldots, \mu_{sh}$ e sommando. Ossia ognuna delle equazioni [13] dopo la h^{esima} è conseguenza delle prime h equazioni [13]. E quindi per trovare i sistemi di valori per le x, che soddisfino alle nostre m equazioni, basta trovare quei sistemi, che soddisfano alle prime h. Il nostro teorema è allora evidente, poichè mettendo le prime h equazioni sotto la forma [15] è subito visto che le $m-h$ incognite $x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots x_m$ si possono scegliere arbitrariamente e che risultano in conseguenza determinate le altre $x_1, x_2, \ldots, x_h$ in quanto che il determinante di quelle equazioni nelle h variabili $x_1, x_2, \ldots, x_h$ (che sole si considerano ora come incognite, poichè alle altre x si sono dati valori noti qualsiasi) è differente da zero.

Esempio 1° – Sia dato un sistema di n equazioni lineari omogenee in n incognite.

$$
\begin{aligned}
a_{11} x_1 + \ldots\ldots + a_{1n} x_n &= 0 \\
a_{21} x_1 + \ldots\ldots + a_{2n} x_n &= 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1} x_1 + \ldots\ldots + a_{nn} x_n &= 0 .
\end{aligned}
$$

Se il determinante dei coefficienti è diverso da zero, questo sistema ammette un solo sistema di soluzioni, che è dato evidentemente dalle $x_1 = x_2 = \ldots x_n = 0$.

Dunque, se si vuole che esista un sistema di soluzioni non tutte nulle, è necessario che il determinante dei coefficienti sia nullo. E, se la sua caratteristica è h, questa sarà pure la caratteristica della matrice formata coi coefficienti e termini noti, dal momento che questi sono tutti nulli.

Perciò il sistema sarà certamente risolubile e precisamente, se supponiamo che sia diverso da zero il determinante formato ad es. con le prime h righe e le prime h colonne, pel teorema ora dimostrato, potremo dare valori arbitrari alle $n-h$ incognite $x_{h+1}, x_{h+2}, \dots x_n$; risulteranno allora perfettamente determinate le prime h incognite $x_1, x_2, \dots, x_h$, applicando la regola di Cramer al sistema

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1h} x_h = -(a_{1,h+1} x_{h+1} + \dots + a_{1n} x_n) \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2h} x_h = -(a_{2,h+1} x_{h+1} + \dots + a_{2n} x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{h1} x_1 + a_{h2} x_2 + \dots + a_{hh} x_h = -(a_{h,h+1} x_{h+1} + \dots + a_{h,n} x_n) \end{cases}$$

e il sistema di valori così ottenuti per $x_1, x_2, \dots, x_n$ soddisferà certamente anche le altre $n-h$ equazioni. Cosicchè potremo enunciare il teorema:

<u>La condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema di n equazioni lineari omogenee con altrettante incognite sia soddisfatto da valori non tutti nulli delle incognite è che sia nullo il determinante dei coefficienti.</u>

Esempio 2° – Siano dati $n-1$ equazioni lineari omogenee con n incognite.

$$[16]\quad \begin{aligned} &a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}\,x_n = 0,\\ &a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}\,x_n = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{n-1,1}\,x_1 + a_{n-1,2}\,x_2 + \cdots\cdots + a_{n-1,n}\,x_n = 0. \end{aligned}$$

Il sistema sarà certamente risolubile perchè la matrice dei coefficienti e quella dei coefficienti e termini noti hanno la stessa caratteristica. Dicendo h questa caratteristica, può essere $h=n-1$ o $h<n-1$. Sia $h=n-1$ e precisamente, per fissare le idee, sia diverso da zero il determinante

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots\cdots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

Allora potremo dare a x_n il valore che a noi piace; le altre incognite si troveranno risolvendo il sistema:

$$[17]\quad \begin{aligned} &a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1,n-1}\,x_{n-1} = -\,a_{1n}\,x_n\\ &a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots\cdots + a_{2,n-1}\,x_{n-1} = -\,a_{2n}\,x_n\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{n-1,1}\,x_1 + a_{n-1,2}\,x_2 + \cdots + a_{n-1,n-1}\,x_{n-1} = -\,a_{n-1,n}\,x_n. \end{aligned}$$

È chiaro che, una volta fissata a nostro arbitrio x_n, risulteranno completamente determinate $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, poichè nel sistema [17] il determinante dei coefficienti è A_n che è diverso da zero, e quindi si possono cercare $x_1, x_2, \ldots, x_n$, applicando al sistema [17] la regola di Cramer.

Si avrà per $r = 1, 2, \ldots, n-1$

$$x_r = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots a_{1,r-1} & -a_{1n}x_n & a_{1,r+1} \dots a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots a_{2,r-1} & -a_{2n}x_n & a_{2,r+1} \dots a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} \dots\dots a_{n-1,r-1} & -a_{n-1,n}x_n & a_{n-1,r+1} \dots a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}}{A_n}$$

ossia

[18] $$x_r = (-1)^{n-r} \cdot x_n \frac{A_r}{A_n},$$

ove

$$A_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots a_{1,r-1} & a_{1,r+1} \dots a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots a_{2,r-1} & a_{2,r+1} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} \dots\dots a_{n-1,r-1} & a_{n-1,r+1} \dots a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

è il determinante che si ottiene dalla matrice dei coefficienti del sistema [16]:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots\dots & a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

sopprimendovi la r^{ma} verticale.

Detto λ un parametro arbitrario e posto

$$x_n = (-1)^n \lambda A_n,$$

si ha per le [18]

$$x_r = (-1)^{2n-r} \lambda A_r = (-1)^{2(n-r)+r} \lambda A_r = (-1)^r \lambda A_r$$

per $r = 1, 2, \dots, n-1$; quindi

[19] $$x_1 = -\lambda A_1,\ x_2 = +\lambda A_2,\ x_3 = -\lambda A_3, \dots, x_n = (-1)^n A_n \lambda$$

Dunque: Se la matrice dei coefficienti di un sistema
[16] di $n-1$ equazioni lineari omogenee con n incognite ha per caratteristica $n-1$, sono completamente individuati i rapporti di $n-1$ incognite alla rimanente; precisamente il sistema ammette infinite soluzioni espresse dalle [19], ove λ è un numero arbitrario ed A_r è il determinante che si ottiene dalla matrice dei coefficienti sopprimendosi la r^{esima} verticale.

Se poi $h < n-1$, il numero delle incognite i cui valori si possono scegliere ad arbitrio è maggiore di uno, e precisamente eguale ad $n-h$.

Esempio 3° - Abbiamo esaminato nei due casi precedenti i sistemi di n equazioni lineari omogenee con n o con $n+1$ incognite: esaminiamo ora il sistema più generale di m equazioni lineari omogenee con n incognite (1)

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0.
\end{aligned}
$$

In esso la matrice dei coefficienti e termini noti ha nulli tutti gli elementi dell'ultima verticale e quindi ha nulli tutti quei suoi determinanti cui contribuisce l'ultima verticale e però la sua caratteristica è quella stessa della matrice dei coefficienti. Avremo dunque:

---

(1) D'Ovidio - Algebra Compl. pag. 88.

Un sistema di m equazioni lineari omogenee con n incognite ammette sempre qualche soluzione.

Se la matrice dei coefficienti ha la caratteristica $h = n$ (nel qual caso il numero delle equazioni non è certamente inferiore al numero delle incognite) vi è l'unica soluzione evidente $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, e il sistema è determinato.

Quando $h < n$, allora h delle date equazioni sono indipendenti. Precisamente, se nella matrice si considera un determinante non nullo di ordine h, e poi si considerano quelle h equazioni e quelle h incognite i cui coefficienti costituiscono tale determinante, queste h equazioni sono indipendenti, mentre le rimanenti $m-h$ equazioni sono conseguenze di esse, anzi combinazioni lineari di esse. E le dette h equazioni permettono di esprimere le dette h incognite come combinazioni lineari delle rimanenti $n-h$ incognite le quali restano arbitrarie, cosicchè il sistema è indeterminato.

Segue da ciò che:

Affinchè un sistema di equazioni lineari omogenee sia soddisfatto da valori non tutti nulli delle incognite, è necessario e sufficiente che la matrice dei coefficienti abbia la caratteristica minore del numero delle incognite.

Dal 2° Lemma si deduce (dando alle x valori qualsiasi):

Se noi aggiungiamo a una matrice una colonna, che sia combinazione lineare delle altre, la caratteristica della matrice non muta.

Questo teorema vale naturalmente anche per le righe di una matrice. Vale anche il teorema reciproco, che noi enuncieremo per le righe di una matrice:

Se la matrice [I] del 1° Lemma non cambia di caratteristica per l'aggiunta di una nuova riga $a_{m+1,1}$, $a_{m+1,2}$, ..., $a_{m+1,n}$, questa nuova riga è combinazione lineare delle prime m.

Infatti, se la caratteristica di [I] è h, e p. es. le prime h righe di [I] sono indipendenti e se con (III) indichiamo la matrice ottenuta aggiungendo la nuova riga, per il teorema di pag. 35, tutte le righe di (III) dopo la h^{esima}, e in particolare la riga aggiunta, sono combinazioni lineari delle prime h.

Dai due ultimi teoremi, abbiamo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una linea di una matrice sia combinazione lineare delle linee omologhe, è che la caratteristica della matrice non muti, sopprimendo detta linea.

O anche:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la forma U_{m+1} sia combinazione lineare delle forme $U_1, U_2, \dots, U_m$ è che la matrice dei coefficienti delle forme $U_1, U_2, \dots, U_m$ e quella dei coefficienti delle forme $U_1, U_2, \dots, U_m, U_{m+1}$ abbiano la stessa caratteristica.

§. 8. Prodotto di determinanti.

Lemma 1° – Il determinante di ordine $2n$.

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & 0 & 0 \dots\dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & 0 & 0 \dots\dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} & 0 & 0 \dots\dots & 0 \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} \dots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} & a_{n+1,n+2} \dots & a_{n+1,2n} \\ a_{n+2,1} & a_{n+2,2} \dots & a_{n+2,n} & a_{n+2,n+1} & a_{n+2,n+2} \dots & a_{n+2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} \dots & a_{2n,n} & a_{2n,n+1} & a_{2n,n+2} \dots & a_{2n,2n} \end{vmatrix}$$

è eguale al prodotto dei due determinanti A e B formati il primo degli elementi comuni alle prime n orizzontali e alle prime n verticali, il secondo degli elementi comuni alle ultime n orizzontali e alle ultime n verticali; ossia è eguale al prodotto

$$A . B = \overset{A}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} \times \overset{B}{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \dots\dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots\dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots\dots & b_{nn} \end{vmatrix}},$$

dove si è posto

$$b_{rs} = a_{n+r,\, n+s} \qquad (r, s = 1, 2, \dots, n)$$

Infatti il determinante M è uguale alla somma di tutti i prodotti del tipo.

[1] $(-1)^s \cdot a_{1i_1} a_{2i_2} \ldots\ldots a_{ni_n} \cdot a_{n+1,i_{n+1}} a_{n+2,i_{n+2}} \ldots\ldots a_{2n,i_{2n}}$

dove s è il numero delle inversioni che presenta la permutazione

[2] $i_1, i_2, \ldots i_n, i_{n+1}, i_{n+2}, \ldots\ldots i_{2n}.$

degli indici $1, 2, \ldots, 2n$. Ora ogni termine del tipo [1] in cui uno almeno dei primi n fattori abbia il secondo indice maggiore di n è nullo: basterà quindi considerare quei termini nei quali $i_1, i_2, \ldots i_n$ è una permutazione dei numeri $1, 2, \ldots, n$ ed in conseguenza $i_{n+1}, i_{n+2}, \ldots i_{2n}$ è una permutazione dei numeri $n+1, n+2, \ldots 2n$. Allora gli indici $i_1, i_2, \ldots, i_n$ non fanno inversioni con nessuno degli indici $i_{n+1}, i_{n+2}, \ldots i_{2n}$; perciò se diciamo s' il numero di inversioni nella permutazione

[3] $i_1, i_2, \ldots, i_n$

e s'' quello della permutazione

[4] $i_{n+1}, i_{n+2}, \ldots, i_{2n},$

si ha

$$s = s' + s''.$$

Ma per ipotesi abbiamo

$$a_{n+1,i_{n+1}} \cdot a_{n+2,i_{n+2}} \ldots\ldots a_{2n,i_{2n}} = b_{1,i_{n+1}-n} \cdot b_{2,i_{n+2}-n} \ldots\ldots b_{n,i_{2n}-n},$$

quindi se poniamo

$$i_{n+1} - n = j_1 \quad , i_{n+2} - n = j_2, \ldots, i_{2n} - n = j_n.$$

(dimodochè $j_1, j_2, \ldots j_n$ risulta una permutazione dei numeri $1, 2, \ldots, n$ con s'' inversioni) il termine [1] diviene

$$[5] \qquad (-1)^s \, a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \dots a_{ni_n} \cdot b_{1j_1} \cdot b_{2j_2} \dots \dots b_{nj_n},$$

dove $i_1, i_2, \dots, i_n$, $j_1, j_2, \dots, j_n$ sono due permutazioni qualunque degli indici $1, 2, \dots, n$ aventi rispettivamente s' e s'' inversioni. E siccome $s = s' + s''$, si deduce che il termine [5] si ottiene moltiplicando un termine qualunque

$$(-1)^{s'} \cdot a_{1i_1} \, a_{2i_2} \dots \dots a_{ni_n}$$

del determinante A per un termine qualunque

$$(-1)^{s''} \, b_{1j_1} \cdot b_{2j_2} \dots \dots b_{nj_n}$$

del determinante B.

Dunque il determinante M, essendo eguale alla somma di tutti i termini [5], cioè alla somma di tutti i prodotti che si ottengono moltiplicando un termine qualunque del determinante A per un termine qualunque del determinante B, sarà precisamente eguale al prodotto $A \times B$.

Da questo lemma si deduce subito il seguente

Lemma 2° — Il determinante di ordine $2n$

$$N = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \dots a_{1n} & a_{1,n+1} & a_{1,n+2} \dots \dots & a_{1,2n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} & a_{2,n+1} & a_{2,n+2} \dots \dots & a_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} & a_{n,n+1} & a_{n,n+2} \dots \dots & a_{n,2n} \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} \dots a_{n+1,n} & 0 & 0 \dots \dots & 0 \\ a_{n+2,1} & a_{n+2,2} \dots a_{n+2,n} & 0 & 0 \dots \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} \dots a_{2n,n} & 0 & 0 \dots \dots & 0 \end{vmatrix}$$

è uguale al prodotto dei due determinanti C e D formati il primo dagli elementi comuni alle prime n verticali e alle ultime n orizzontali, il secondo mediante gli elementi comuni alle prime n orizzontali colle ultime n verticali, preso col segno + o col segno − secondochè n è pari o dispari; ossia è eguale al prodotto

$$
\begin{array}{ccc}
 & C & D
\end{array}
$$

$$
(-1)^n \times \begin{vmatrix} a_{n+1,1} & a_{n+1,2} \dots & a_{n+1,n} \\ a_{n+2,1} & a_{n+2,2} \dots & a_{n+2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} \dots & a_{2n,n} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_{1,n+1} & a_{1,n+2} \dots & a_{1,2n} \\ a_{2,n+1} & a_{2,n+2} \dots & a_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n,n+1} & a_{n,n+2} \dots & a_{n,2n} \end{vmatrix}.
$$

Infatti nel determinante N trasponiamo la r^a orizzontale colla $(n+r)^a$, ponendo successivamente $r = 1, 2, \dots, n$; otterremo il determinante

$$
P = \begin{vmatrix} a_{n+1,1} & a_{n+1,2} \dots & a_{n+1,n} & 0 & 0 \dots & 0 \\ a_{n+2,1} & a_{n+2,2} \dots & a_{n+2,n} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} \dots & a_{2n,n} & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{1n} & a_{1,n+1} & a_{1,n+2} \dots & a_{1,2n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & a_{2,n+1} & a_{2,n+2} \dots & a_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} & a_{n,n+1} & a_{n,n+2} \dots & a_{n,2n} \end{vmatrix}
$$

Siccome abbiamo così operato n trasposizioni fra le righe di N, risulterà $N=(-1)^n P$; ma per il lemma 1° è $P=C.D$, dunque $N=(-1)^n\cdot C.D$. c.d.d.

Da ciò si deduce facilmente una regola per la moltiplicazione di due determinanti.

Siano dati due determinanti A, B dello stesso ordine n

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \dots\dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} \dots\dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots\dots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

Moltiplicando gli elementi della r^a orizzontale di A per gli analoghi elementi della s^a orizzontale di B e sommando i prodotti, si forma l'espressione:

$$c_{rs}=a_{r1}\, b_{s1}+a_{r2}\, b_{s2}+\dots\dots+a_{rn}\, b_{sn};$$

dando ad r e a s tutti i valori interi da 1 a n, si ottengono n^2 di tali espressioni, le quali si possono assumere come elementi di un nuovo determinante C di ordine n

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \dots\dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} \dots\dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} \dots\dots & c_{nn} \end{vmatrix}.$$

Dico che il determinante C è uguale al prodotto dei due determinanti A e B.

Infatti, per il 1° lemma si ha:

$$M=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = A\times B,$$

perchè il determinante B non si altera scambiandovi le orizzontali colle verticali (Cap. II, § 2°).

Se ora nel determinante M alla $(n+r)^a$ colonna aggiungiamo le prime n colonne moltiplicate rispettivamente per $b_{r1}, b_{r2}, \dots, b_{rn}$ e poniamo successivamente $r=1,2,\dots,n$, il determinante M non cambia di valore (II, § 3°) e diviene

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

dove

$$c_{rs} = a_{r1}\, b_{s1} + a_{r2}\, b_{s2} + \dots + a_{rn}\, b_{sn} \quad (r, s = 1, 2, \dots, n).$$

Ma, per il lemma 2°, questo determinante è uguale al prodotto

$$(-1)^n \times \begin{vmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

quindi si ha

$$M = (-1)^n \times (-1)^n \times C = C.$$

Tenendo presente che $M = A \times B$, si ha dunque

$$C = A \times B.$$

Osservazione 1ª Notiamo che invertendo l'ordine dei due determinanti A e B, il loro prodotto non cambia: difatti quest'inversione equivale a scambiare in C le orizzontali colle verticali.

Il determinante C si dice il *prodotto per orizzontali* dei due determinanti A e B e la regola esposta per ottenere questo prodotto si dice *moltiplicazione per orizzontali* degli stessi A e B.

La moltiplicazione dei due determinanti A e B si può fare anche *per verticali*, vale a dire si può assumere per elemento generico del determinante C l'espressione

$$c_{rs} = a_{1r}\, b_{1s} + a_{2r}\, b_{2s} + \dots + a_{nr}\, b_{ns};$$

ed è chiaro che il determinante così ottenuto ha lo stesso valore di quello formato moltiplicando per orizzontali, poichè moltiplicare A e B per verticali equivale a scambiare in ciascuno dei due determinanti A e B le orizzontali colle verticali e poi moltiplicarli per orizzontali.

A e B possono pure moltiplicarsi per orizzontali e verticali cioè si può dare a c_{rs} l'uno o l'altro dei due valori

$$c_{rs} = a_{r1}\, b_{1s} + a_{r2}\, b_{2s} + \dots + a_{rn}\, b_{ns},$$

$$c_{rs} = a_{1r}\, b_{s1} + a_{2r}\, b_{s2} + \dots + a_{nr}\, b_{sn};$$

nè varia anche qui il valore del determinante prodotto, poichè si è così fatto lo scambio delle orizzontali colle verticali o in B o in A, ed eseguito poi il prodotto per orizzontali.

Esempio – Moltiplicando due determinanti di 2º ordine prima per orizzontali, poi per verticali e infine per orizzontali e verticali, si ottiene:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_2 & a_1 d_1 + a_2 d_2 \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 & b_1 d_1 + b_2 d_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_1c_1+b_1d_1 & a_1c_2+b_1d_2 \\ a_2c_1+b_2d_1 & a_2c_2+b_2d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1c_1+a_2d_1 & a_1c_2+a_2d_2 \\ b_1c_1+b_2d_1 & b_1c_2+b_2d_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_1c_1+b_1c_2 & a_1d_1+b_1d_2 \\ a_2c_1+b_2c_2 & a_2d_1+b_2d_2 \end{vmatrix} .$$

Osservazione 2ª. Per moltiplicare due determinanti che non sono dello stesso ordine, si possono prima ridurre ad avere lo stesso ordine, inserendo nuove orizzontali e nuove verticali in quello di ordine minore (ma tali che non ne alterino il valore) e poi si può applicare la regola precedente. Per esempio

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \alpha' & \beta' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\alpha+b\beta & a\alpha'+b\beta' & c \\ a'\alpha+b'\beta & a'\alpha'+b'\beta' & c' \\ a''\alpha+b''\beta & a''\alpha'+b''\beta' & c'' \end{vmatrix}$$

Osservazione 3ª. Si può eseguire in particolare il quadrato di un determinante ossia il prodotto di un determinante per sè stesso (ed in quattro modi diversi). Per esempio (procedendo per orizzontali)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2 & aa'+bb'+cc' & aa''+bb''+cc'' \\ a'a+b'b+c'c & a'^2+b'^2+c'^2 & a'a''+b'b''+c'c'' \\ a''a+b''b+c''c & a''a'+b''b'+c''c' & a''^2+b''^2+c''^2 \end{vmatrix}.$$

Un determinante

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots\dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

si dice simmetrico quando in esso sono eguali gli elementi simmetricamente posti rispetto alla diagonale principale, cioè quando

$$a_{rs} = a_{sr} \quad (r,s = 1, 2, \dots, n).$$

Per es. è simmetrico il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & -5 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 6 \\ -5 & 0 & 6 & 8 \end{vmatrix}.$$

È facile convincersi che: il quadrato di un determinante è un determinante simmetrico.

Infatti, secondo la regola generale, l'elemento generico c_{rs} del quadrato di A (per orizzontali) è

$$c_{rs} = a_{r1}a_{s1} + a_{r2}a_{s2} + \dots + a_{rn}a_{sn},$$

e però non si altera scambiando tra loro r ed s, ossia $c_{rs} = c_{sr}$.

Osservazione 4ª — La definizione di prodotto si può estendere a due matrici simili, cioè aventi un ugual numero di orizzontali e di verticali:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{vmatrix}.$$

Moltiplicando gli elementi della r^{ma} orizzontale della prima per gli elementi omologhi della s^{ma} orizzontale della seconda e poi sommando i prodotti, si hanno $m \cdot m = m^2$ espressioni del tipo.

$$c_{rs} = a_{r1}\, b_{s1} + a_{r2}\, b_{s2} + \dots a_{rn}\, b_{sn}$$
$$(r, s = 1, 2, \dots, m)$$

con le quali si può formare un determinante di ordine m.

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

Questo determinante si chiama *il prodotto per orizzontali delle due matrici*. Dunque, mentre le due matrici non hanno alcun valore, noi ne attribuiamo uno al loro prodotto, quello del determinante C.

Si può dimostrare (*) che il prodotto per orizzon-

(*) Cfr. i trattati di d'Ovidio (litog.), di Cesaro, di Capelli, di Pincherle, ecc.

tati di due matrici simili, nelle quali il numero delle orizzontali supera il numero delle verticali, è un determinante identicamente nullo. Se invece il numero delle orizzontali non supera il numero delle verticali, il prodotto è un determinante che è eguale alla somma dei prodotti ottenuti moltiplicando i minori di massimo ordine della prima matrice per i minori omologhi della seconda.

Si può definire allo stesso modo il prodotto per verticali di due matrici simili, e si può enunciare un teorema analogo al precedente.

Per esempio, il prodotto per orizzontali delle due matrici

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}$$

è il determinante di secondo ordine

$$C = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{13}b_{13} & a_{11}b_{21}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{13} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{12}+a_{23}b_{13} & a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{23} \end{vmatrix}$$

ossia, giusta il teorema enunciato,

$$C = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ b_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{21} & b_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}$$

mentre che il prodotto per verticali è il determinante di terzo ordine

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11}+a_{21}b_{21} & a_{12}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{13}b_{11}+a_{23}b_{21} \\ a_{11}b_{21}+a_{21}b_{22} & a_{12}b_{21}+a_{22}b_{22} & a_{13}b_{21}+a_{23}b_{22} \\ a_{11}b_{31}+a_{21}b_{23} & a_{12}b_{31}+a_{22}b_{23} & a_{13}b_{31}+a_{23}b_{32} \end{vmatrix}$$

il quale è identicamente nullo.

§ 9. Determinanti reciproci.

Dato un determinante di ordine n

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

con i complementi algebrici A_{rs} dei suoi elementi, in numero di n^2, si può formare un altro determinante pure di ordine n

$$A' = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

che dicesi reciproco del primitivo A.

Il determinante reciproco di un determinante di ordine n è uguale alla $(n-1)^{ma}$ potenza del primitivo, ossia

$$A' = A^{n-1}.$$

Infatti, moltiplicando per orizzontali i due determinanti A e A', l'elemento generico c_{rs} del determinante prodotto sarà uguale ad A se $r=s$ ed eguale a zero se $r \neq s$.

$$c_{rs} = a_{r1} A_{s1} + a_{r2} A_{s2} + \dots + a_{rn} A_{sn} = 0 \quad (r \neq s)$$

$$c_{rr} = a_{r1} A_{r1} + a_{r2} A_{r2} + \dots + a_{rn} A_{rn} = A,$$

come risulta dalle formole di pag. 21. Quindi

$$AA' = \begin{vmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{vmatrix} = A^n$$

Se $A \neq 0$, dividendo per A, si ha subito la formola da dimostrare. Se poi $A = 0$, anche $A' = 0$ e la formola regge. Infatti ciò è naturale se tutti gli elementi di A son nulli; se invece non son tutti nulli ed è per esempio $a_{11} \neq 0$, moltiplichiamo nel determinante A' la 1ª colonna per a_{11} (il che equivale a moltiplicare A' per a_{11}) e ad essa aggiungiamo tutte le altre colonne moltiplicate ordinatamente per $a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1n}$ (il che non altera il valore del determinante); per le stesse formole di pag. 21, avremo allora:

$$a_{11} A' = \begin{vmatrix} A & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

poichè la prima colonna è tutta costituita di zeri, essendo $A = 0$.

Dividendo per a_{11} $(\neq 0)$, otteniamo $A' = 0$.

Calcolo infinitesimale. Franc. in Grecia. Cartesio. Newton Leibnitz. 16[illegible]
Cauchi Abel — prima era una com. più [illegible] fra le matem. ora no
dell integraz. teoremi di limite in luogo dell infinitesimo attuale è
dell inf. di 2° grado quantità è più piccola possibile $\neq 0$. l'area del cerchio, un calcolo [illegible] somma delle aree di infiniti triangoli infinitesimali.

Capitolo III.

Le funzioni.

§1. Intervallo.

Avvertiamo anzitutto che d'ora in poi, fino ad esplicita dichiarazione in contrario, noi non considereremo che numeri reali.

L'insieme di tutti i numeri compresi tra due numeri a e b si chiama intervallo tra a e b, e si rappresenta con (a, b). I numeri a e b si dicono gli estremi dell'intervallo e si considerano come appartenenti all'intervallo. Il minore dei due numeri si chiama estremo inferiore ed il maggiore l'estremo superiore. Il valore assoluto della loro differenza $|b-a|$ si chiama grandezza dell'intervallo. L'intervallo 5 - 100 è: il segm. tra i punti [illegible] 5 e 1000: tutti i punti (numeri) compresi tra 5 e 1000. —

Oltre questi intervalli finiti noi possiamo anche considerare intervalli infiniti. Indicheremo per es. con (a, ∞) l'insieme di tutti i numeri non minori di a, con $(-\infty, b)$ l'insieme di tutti i numeri non maggiori di b, con $(-\infty, \infty)$ l'insieme di tutti i numeri reali.

È spesso utile giovarsi di una rappresentazione geometrica dei numeri (reali) sopra una retta, sulla quale si sia stabilito un sistema di coordinate ascisse, ossia un'origine 0, un verso positivo ed un'unità lineare: ad

[illegible] intorno
Intorno di A è BA per es. [illegible]
[illegible] all'intervallo B A C
Intorno di 10 i numeri fra 9 e 11 Intorno destro di 10 i numeri fra 10 e ∞ [illegible]

Gruppo di punti: un insieme di punti; ... numeri interi; i numeri fratti: un intervallo — gruppo ...

ogni numero x si fa corrispondere quel punto della retta che ha per ascissa il numero x. Allora agli estremi a e b di un intervallo corrisponderanno due punti A e B della retta ed ai numeri dell'intervallo (a,b) corrisponderanno i punti del segmento AB; la grandezza dell'intervallo misurerà la lunghezza del segmento AB.

E noi spesso adopereremo le locuzioni di punto x, segmento (a,b), lunghezza del segmento (a,b), invece di numero x, intervallo $(a\,b)$, grandezza dell'intervallo (a,b).

L'intervallo (a,∞) sarà rappresentato dalla semiretta positiva che ha per origine a, $(-\infty,b)$ dalla semiretta negativa che ha per origine b, $(-\infty,\infty)$ dall'intera retta.

§.2 - Funzioni

Dicendo che y è una funzione data di x in un certo intervallo si intende che ad ogni valore di x appartenente a quell'intervallo corrisponde un valore di y, e che si dà il mezzo di calcolare questo valore quando si ha il valore di x. La x si chiama la variabile indipendente mentre la y, pur essendo anch'essa una variabile, è dipendente dalla x, e l'intervallo in cui essa varia si dice il campo di variabilità della x. Questo può anche essere costituito di più intervalli o di un gruppo qualsiasi di numeri reali.

o si abbia — Una quantità suscettibile a più valori (massa di gas..) ... di x ...

... valori di x. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2-x}$ x ... tra 2 e 1 ... numeri negat. ... Dato ... di x ...

Il mezzo di calcolare il valore della y, quando è data la x, può risultare dall'espressione stessa della funzione; così per es.

$$y = x^2 + x - 2$$

rappresenta un complesso di operazioni da eseguirsi sulla variabile x, ed è una funzione della x nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$ cioè, come suol dirsi, una funzione definita nell'intero campo dei numeri reali; le funzioni

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y = \sqrt{1-x^2} \quad (*)$$

sono invece definite soltanto, la prima per tutti i valori reali di x, escluso il valore zero (poichè $\frac{1}{0}$ non ha significato); la seconda per tutti i valori di x compresi tra -1 e $+1$; poichè se $|x| > 1$, allora $1-x^2 < 0$, e quindi l'espressione $\sqrt{1-x^2}$ non ha significato, fin quando almeno non si introducono i numeri complessi. Oppure può il mezzo di calcolare la y consistere nell'effettuare una certa misura, (che si suppone poter effettuarsi con una precisione perfetta) o anche a cercare in una tavola, dove si trovi scritto il valore di y corrispondente al valore di x.

È chiaro pertanto che anche un numero fisso può considerarsi come una funzione di x: a ciascun valore della x si fa corrispondere sempre lo stesso

---

(*) Fissiamo il segno del radicale, ad es. prendendolo positivo.

numero, la funzione è costante.

È comodo di adoperare un simbolo come $f(x)$ per indicare una funzione di x; se si considera x come un numero dato, lo stesso simbolo indica il valore corrispondente della funzione: in altri termini, si fa la convenzione di rappresentare con $f(a)$ il valore che la funzione assume per il valore particolare a della variabile. Così $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$ è il valore che la funzione $\operatorname{sen} x$ assume per $x=\frac{\pi}{2}$.

Scrivendo

$$y=f(x)$$

si esprime semplicemente che y è una funzione di x, che a ciascun valore di x (almeno compreso in certi limiti) corrisponde un valore di y, valore che si troverebbe effettuando sul numero x i calcoli che indica il segno funzionale f posto davanti alla lettera x messa tra parentesi. Si può benissimo adoperare anche un'altra lettera diversa da f, scrivere per esempio, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$, ...; l'uso di questi diversi simboli è comodo quando si deve parlare di funzioni diverse.

Altri esempî di funzione sono i seguenti:

Sen$x$ è funzione di x in tutto il campo dei numeri reali, poichè per ogni valore dato a x si ha un valore determinato di sen$x$.

L'area o il perimetro di un poligono regolare iscritto nel circolo di raggio 1 è funzione del numero dei lati del poligono stesso.

Se indichiamo con x il numero dei lati, x può assumere soltanto valori interi maggiori o almeno eguali a 3; epperò se indichiamo con y l'area o il perimetro del poligono, sarà y una funzione di x nel campo dei numeri interi maggiori di 2.

Anche fuori della matematica pura e sopratutto in Fisica si hanno molti esempî di funzioni. Così il prezzo di una merce è funzione del peso, il reddito delle imposte è funzione del numero degli abitanti; il volume di una massa di gas a data temperatura è funzione della pressione; l'intensità della corrente elettrica in un dato filo è funzione della differenza di potenziale alle estremità del filo ecc.

Per rappresentare queste funzioni si suol ricorrere a tavole numeriche o a procedimenti grafici assumendo x e y come coordinate cartesiane ortogonali. Se la x percorre tutti i valori di un dato segmento, allora l'immagine della funzione sarà una curva (diagramma).

Così per es. il volume y di una certa massa di gas perfetto a una data temperatura è una funzione della pressione x ($x \geq 0$) a cui è sottoposta; questa funzione è definita da un'eguaglianza

$$y = \frac{k}{x},$$

dove k è una costante numerica positiva.

La curva rappresentativa è quella metà della iperbole equilatera $xy=k$ che si trova nel quadrante $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

Se la x non può assumere tutti i valori di un dato segmento, ma solo alcuni, allora non si ottiene più come immagine della funzione una curva, ma si hanno dei punti staccati o, come suol dirsi, un gruppo discreto di punti.

Ora vogliamo esaminare un esempio particolare di rappresentazione di funzione:

Poniamo una certa massa d'acqua della temperatura di $-10°$ centig. in un recipiente; quest'acqua aumenterà di temperatura, e se noi somministriamo calore al recipiente, gli aumenti ci saranno resi noti da un termometro immerso nell'acqua stessa.

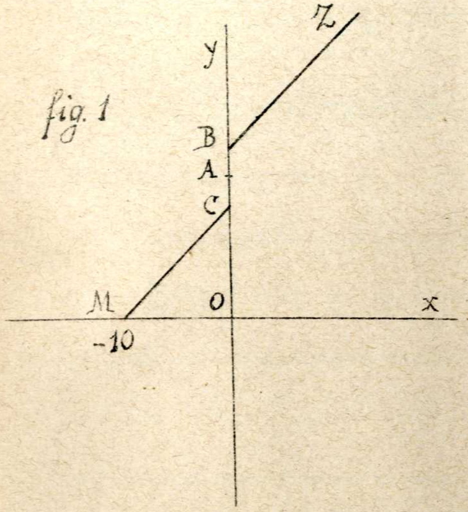
La quantità di calore che si dà possiamo ritenerla come funzione della temperatura alla quale arriva l'acqua.

Siano x, y due assi cartesiani ortogonali; indichiamo con x la temperatura dell'acqua e con y la quantità di calore che si somministra: la y è funzione della x.

Seguiamo l'andamento di questa funzione.

Per x compresa tra $-10°$ e $0°$, la quantità di calore (ammesso in prima approssimazione costante il calore specifico) è funzione lineare, cioè di primo grado della temperatura; essa sarà quindi rappresentata da un segmento MC (Fig. 1). Giunti a $0°$, se si continua a somministrare calore, si osserva che il termometro per un certo tempo non segna aumento di temperatura, e ciò perchè il calore che si somministra viene assorbito dalla liquefazione dell'acqua.

fig. 1



Quando l'acqua si è liquefatta, la quantità di calore ritorna ad essere funzione lineare della temperatura (in prima approssimazione), quindi ancora rappresentabile con un segmento BZ.

Ora ci preme osservare che a $0°$ la nostra funzione non è definita, perchè pure essendo x costantemente zero, la y varia tra OB, OC. Per definirla potremo prendere come y un numero qualsiasi OA compreso tra OB e OC.

La funzione y ha quindi, come si può dire, un salto, una discontinuità per $x=0$, perchè, quando x passa pel valore 0, salta bruscamente da OC ad OA, e da OA ad OB. Perciò diremo che la y è una funzione discontinua.

Si possono avere discontinuità di genere più complicato della precedente. Per es. consideriamo la funzione y che per $x>0$ abbia il valore

$$y = sen\,\frac{1}{x},$$

per $x=0$ il valore 1 e per $x<0$ il valore 2.

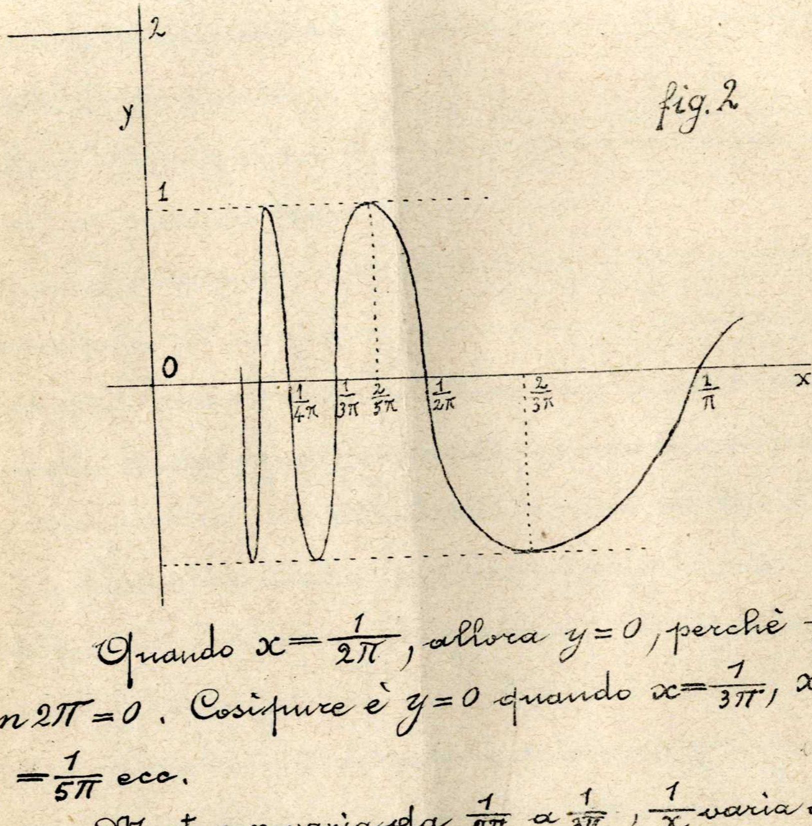


fig. 2

Quando $x=\frac{1}{2\pi}$, allora $y=0$, perchè $\frac{1}{x}=2\pi$ e $sen\,2\pi=0$. Così pure è $y=0$ quando $x=\frac{1}{3\pi}$, $x=\frac{1}{4\pi}$, $x=\frac{1}{5\pi}$ ecc.

Mentre x varia da $\frac{1}{2\pi}$ a $\frac{1}{3\pi}$, $\frac{1}{x}$ varia da 2π a 3π, e $sen\frac{1}{x}$ cresce dal valore 0 fino a $+1$, poi ridiscende fino a 0; quando x varia da $\frac{1}{3\pi}$ a $\frac{1}{4\pi}$, $\frac{1}{x}$ varia da 3π a 4π, e il suo seno decresce da 0 fino a -1, per poi crescere fino a 0; e così via. Si hanno cioè delle oscillazioni tra -1 e $+1$ che sono in numero infinito, perchè mentre x va verso 0, $\frac{1}{x}$ cresce indefinitamente, quindi $sen\frac{1}{x}$

piglia infinite volte tutti i suoi valori.

Per $x = 0$ si ha per definizione $y = 1$, e per $x < 0$ si ha $y = 2$.

Questa curva non è neanche completamente disegnabile e presenta per $x = 0$ una discontinuità di natura più complicata della precedente.

I matematici chiamano la precedente discontinuità una discontinuità di prima specie, quest'ultima una discontinuità di seconda specie. Esistono poi curve più complicate ancora che fanno infinite oscillazioni vicino a ogni punto, e altre che si avvolgono a spirale attorno a ogni loro punto.

[illegible] spirali [illegible] sempre meno di quanto [illegible]

vicev. [illegible]

§ 3 – Funzioni continue.

Tra le funzioni, importantissime sono quelle che si dicono funzioni continue, cioè tali che il loro valore cambia pochissimo, tanto poco anzi quanto si vuole, quando il valore della variabile cambii anch'esso pochissimo.

Noi vogliamo ora appunto definire in modo rigoroso questo concetto di continuità di una funzione.

Definizione – *Diremo che una funzione $f(x)$ della variabile x, definita in un intervallo (a, b), è continua in questo intervallo, quando, scelto ad arbitrio un numero positivo ε, per quanto piccolo esso sia (*), sempre*

(*) d'ora innanzi, quando diremo « quantità piccola ad arbitrio » intenderemo sempre che essa sia positiva.

si può determinare un altro numero positivo δ soddisfacente alla condizione che presi ad arbitrio nell'intervallo (a, b) due punti x_1 e x_2 distanti tra loro meno di δ

$$|x_1 - x_2| < \delta,$$

la differenza tra i valori corrispondenti della funzione sia in valore assoluto minore di ε:

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

Esempio - Dimostriamo, come esempio, che la funzione sen x è continua nell'intervallo $(-\infty, \infty)$ cioè in tutto il campo dei numeri reali. A tale scopo premettiamo il seguente

Lemma - Se x è la misura (in radianti)(*) di un arco compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$, si ha

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

Infatti descritta una circonferenza (Fig. 3) di centro O e raggio l'unità lineare sia AB (minore di $\frac{\pi}{2}$) l'arco misurato da x e HB il suo seno; prolungando BH fino ad incontrare nuovamente la circonferenza in C, sarà

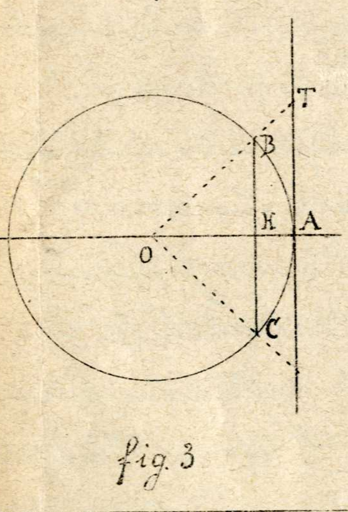


fig. 3

$$\text{arco } CAB = 2x, \qquad CB = 2 \operatorname{sen} x$$

ma, siccome la linea retta segna il più breve cammino tra due punti,

(*) Per la misura di un arco in radianti, vedi E. d'Ovidio - Geometria analitica Cap. III.

si ha

$$CB < \text{arco } CAB$$

quindi

$$2 \operatorname{sen} x < 2x$$

ossia

$$\operatorname{sen} x < x.$$

Conducendo in A la tangente al circolo fino ad incontrare in T il raggio OB, si ha

$$AT = \operatorname{tg} x$$

perciò l'area del triangolo OAT vale

$$\frac{1}{2} \cdot OA \cdot AT = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x.$$

L'area del settore circolare OAB è uguale alla metà del prodotto del raggio per la lunghezza dell'arco AB epperò vale

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{1}{2} x.$$

Ma evidentemente l'area del settore OAB è minore dell'area del triangolo OAT, dunque

$$\frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \operatorname{tg} x$$

ossia

$$x < \operatorname{tg} x. \qquad \text{c.d.d.}$$

Da questo lemma risulta subito che

$$|\operatorname{sen} x| < |x| \quad (*)$$

(*) se a è un numero, col simbolo $|a|$ si indica il valore assoluto di a.

qualunque sia x (zero escluso).

E, indicando con h un numero qualsiasi $\neq 0$, si ha pure

$$|\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x| < |h|. \qquad [1]$$

Infatti una nota formola di trigonometria ci dà

$$\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x = 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{h}{2}$$

da cui prendendo i valori assoluti

$$|\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x| = \left|2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\operatorname{sen}\frac{h}{2}\right| = 2\left|\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right| \cdot \left|\operatorname{sen}\frac{h}{2}\right|$$

ma $\left|\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\right| \leq 1$, $\left|\operatorname{sen}\frac{h}{2}\right| < \left|\frac{h}{2}\right|$

quindi $|\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x| < 2 \cdot 1 \cdot \left|\frac{h}{2}\right| = |h|.$

Ciò premesso, per dimostrare che $\operatorname{sen} x$ è continua nell'intervallo $(-\infty, +\infty)$, bisogna provare che comunque si scelga un numero positivo ε, per quanto piccolo esso sia, sempre si può determinare un altro numero positivo δ soddisfacente a questa condizione:

presi due numeri reali qualunque x e $x+h$, tali però che la loro distanza sia minore di δ, sempre si ha, qualunque siano x e $x+h$:

$$|\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x| < \varepsilon.$$

Ora è subito visto che si può effettivamente determinare un δ soddisfacente a questa condizione: basta prendere $\delta = \varepsilon$. Infatti se x e $x+h$ sono due numeri reali qualunque distanti tra loro meno di ε, cioè tali che

$$|h| < \varepsilon,$$

si ha dalla [1]

$$|\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x) < |h|$$

ossia

$$|\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x| < \varepsilon .$$

Teorema I° - Se una funzione è continua in un intervallo finito, esiste ivi almeno un punto in cui la funzione assume il suo maggior valore; ed almeno un punto in cui la funzione assume il suo più piccolo valore; ogni valore intermedio al più grande e al più piccolo è pure assunto dalla funzione almeno in un punto dell'intervallo.

Questo teorema è intuitivo, ma bisognerebbe dimostrarlo rigorosamente, deducendolo dalla definizione data di funzione continua, però tale dimostrazione è molto lunga e difficile e noi per ora la ometteremo.

Teorema 2°. Se due o più funzioni, in numero finito, sono continue nello stesso intervallo, la loro somma è pure una funzione continua in quell'intervallo.

Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni continue in un intervallo (a, b); vogliamo dimostrare che la loro somma $\varphi(x) + \psi(x)$ è pure una funzione continua nello stesso intervallo.

Dire che la funzione $\varphi(x)$ è continua nell'intervallo (a, b) equivale a dire che, comunque si prenda un numero positivo ε, per quanto piccolo esso sia, si può determinare un altro numero positivo δ_1 tale che soddisfi alla condizione seguente:

presi nell'intervallo (a, b) due qualsiasi punti x_1 e x_2 la cui distanza sia minore di δ_1

$$|x_1 - x_2| < \delta_1 ,$$

la differenza tra i valori corrispondenti della funzione è in valore assoluto minore di ε:

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon. \qquad [2]$$

Parimenti essendo $\psi(x)$ continua nello stesso intervallo, esisterà un δ_2 tale che presi in (a, b) due qualsiasi punti x' e x'', la cui distanza sia minore di δ_2

$$|x' - x''| < \delta_2 ,$$

la differenza tra i valori corrispondenti della funzione $\psi(x)$ è in valore assoluto minore di ε:

$$|\psi(x') - \psi(x'')| < \varepsilon \qquad [2]'$$

Se ora in luogo di δ_1 e δ_2 noi poniamo un qualunque altro numero positivo δ inferiore (o al più eguale) ad essi:

$$\delta \leq \delta_1 \quad , \quad \delta \leq \delta_2$$

le due precedenti condizioni [2] e [2]' continueranno ad essere soddisfatte, giacchè se la distanza di due punti è inferiore a δ, è certamente inferiore tanto a δ_1 quanto a δ_2. Cosicchè potremo conchiudere che comunque si scelga una quantità (positiva) arbitrariamente piccola ε, sempre si può trovare una quantità positiva δ tale che, presi ad arbitrio nell'intervallo (a, b) due punti x_1 e x_2 distanti tra loro meno di δ

$$|x_1 - x_2| < \delta \qquad [3]$$

si abbia in ogni caso:

$$|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| < \varepsilon \quad , \quad |\psi(x_1) - \psi(x_2)| < \varepsilon . \qquad [4]$$

e quindi anche

$$|[\varphi(x_1) + \psi(x_1)] - [\varphi(x_2) + \psi(x_2)]| < 2\varepsilon \qquad [5].$$

[Quest'ultima diseguaglianza risulta subito osservando che:

$$|[\varphi(x_1) + \psi(x_1)] - [\varphi(x_2) + \psi(x_2)]| =$$

$$= |[\varphi(x_1) - \varphi(x_2)] + [\psi(x_1) - \psi(x_2)]| \leq$$

$$\leq |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| + |\psi(x_1) - \psi(x_2)|^{(*)} < 2\varepsilon].$$

Ed ora è subito visto che la funzione $\varphi(x) + \psi(x)$ è continua nell'intervallo considerato.

Infatti se si sceglie comunque una quantità arbitrariamente piccola ε', risulta dal ragionamento fatto che prendendo $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$, si può determinare un δ tale che per x_1 e x_2 soddisfacenti alla [3], abbia luogo la [5].

Ma questa, ora che $2\varepsilon = \varepsilon'$, si può scrivere così:

$$|\varphi(x_1) + \psi(x_1)] - [\varphi(x_2) + \psi(x_2)] < \varepsilon'$$

e ci esprime che i valori della funzione $\varphi(x) + \psi(x)$ in due punti x_1 e x_2 distanti tra loro meno di δ hanno una differenza minore in valore assoluto della quantità arbitrariamente

---

(*) Ricordiamo che il valore assoluto della somma di più addendi (in numero finito) è inferiore o al più eguale alla somma dei valori assoluti degli addendi.

piccola ε prefissata. Ciò equivale ad affermare la continuità di $\varphi(x)+\psi(x)$

È facile ora estendere il teorema a più di due funzioni (in numero finito); così per es., se $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ sono funzioni continue in un intervallo, ivi sarà continua $\varphi(x)+\psi(x)$ e quindi anche $[\varphi(x)+\psi(x)]+\chi(x)$ cioè $\varphi(x)+\psi(x)+\chi(x)$.

Teorema 3° Se più funzioni (in numero finito) sono continue e finite in un intervallo, il loro prodotto è pure una funzione continua e finita nello stesso intervallo.

Diciamo che una funzione è finita in un intervallo (a,b) quando i suoi valori assoluti in (a,b) si mantengono tutti inferiori a un certo numero fisso A. Se la funzione è continua nell'intervallo e questo è finito, allora in esso la funzione è certamente finita poichè pel teorema 1° essa raggiunge ivi il suo massimo M e il suo minimo m e quindi essa non può superare in valore assoluto qualunque numero A tale che

$$A \geq |M| \quad , \quad A \geq |m|$$

Supponiamo ora che $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ siano due funzioni continue e finite nell'intervallo (a,b). Allora in esso $|\varphi(x)|$ non potrà superare un certo numero Φ e $|\psi(x)|$ non potrà superare un certo numero Ψ. Inoltre ragionando come nel caso precedente si deduce che, scelto un ε piccolo a piacere, si può determinare un δ tale che presi ad arbitrio in (a,b) due valori x_1 e x_2

distanti tra loro meno di δ, abbiano luogo le [4].

Osservando ora che:

$$|\varphi(x_1)\ \psi(x_1) - \varphi(x_2)\ \psi(x_2)| =$$

$$= \left|\psi(x_1)\left[\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\right] + \varphi(x_2)\left[\psi(x_1) - \psi(x_2)\right]\right| \leq$$

$$\leq |\psi(x_1)| \cdot |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| + |\varphi(x_2)| \cdot |\psi(x_1) - \psi(x_2)| \leq$$

$$\leq \Psi \cdot |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| + \Phi \cdot |\psi(x_1) - \psi(x_2)|$$

e tenendo presenti le [4], possiamo concludere

$$|\varphi(x_1) \cdot \psi(x_1) - \varphi(x_2) \cdot \psi(x_2)| < \varepsilon(\Phi + \Psi) \quad [6].$$

Ed ora il nostro teorema è dimostrato giacchè se si sceglie comunque un arbitrariamente piccolo ε', allora prendendo $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{\Phi + \Psi}$ si potrà determinare un δ tale che per x_1 e x_2 distanti tra loro meno di δ abbia luogo la diseguaglianza [6] ossia la diseguaglianza:

$$|\varphi(x_1) \cdot \psi(x_1) - \varphi(x_2) \cdot \psi(x_2)| < \varepsilon',$$

cioè si potrà determinare un δ tale che i valori che la funzione $\varphi(x)\ \psi(x)$ assume in due punti qualsiasi x_1 e x_2 dell'intervallo (a, b) distanti tra loro meno di δ abbiano una differenza in valore assoluto minore di ε'. Il che esprime appunto che $\varphi(x) \cdot \psi(x)$ è continua nell'intervallo dato. Essa è anche finita giacchè $|\varphi(x) \cdot \psi(x)| < \Phi \cdot \Psi$.

È facile poi estendere il teorema a più di due funzioni, come nel caso precedente.

Osservazione - Per quel che si è detto, il teorema è certamente valido se le funzioni sono continue in un intervallo finito.

4 Teorema 4° - Se $\varphi(x)$ è una funzione continua in un intervallo e in questo $|\varphi(x)|$ si mantiene sempre superiore a un numero fisso $m>0$, la sua reciproca $\frac{1}{\varphi(x)}$ è continua e finita in quell'intervallo.

Essendo $\varphi(x)$ diversa da zero in tutto l'intervallo, la sua reciproca $\frac{1}{\varphi(x)}$ è pure definita in tutto l'intervallo. Per la continuità di $\varphi(x)$ si ha poi che data una quantità arbitrariamente piccola ε, esiste un δ tale che per due punti qualsiasi dell'intervallo, x_1 e x_2, distanti tra loro meno di δ, è

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| < \varepsilon .$$

Ora

$$\left|\frac{1}{\varphi(x_1)}-\frac{1}{\varphi(x_2)}\right| = \frac{|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)|}{|\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)|}$$

e siccome

$|\varphi(x_1)| > m \quad |\varphi(x_2)| > m$

$$|\varphi(x_1)\cdot\varphi(x_2)| > m^2 ,$$ $, |\varphi(x_2)-\varphi(x_1)| <$

si deduce

$$\left|\frac{1}{\varphi(x_1)}-\frac{1}{\varphi(x_2)}\right| < \frac{\varepsilon}{m^2} .$$

Quando si scelga adunque una quantità arbitrariamente piccola ε', si prenda $\varepsilon = \varepsilon' . m^2$ e si costruisca δ nel modo sopra indicato, allora per due punti qualsiasi x_1 e x_2 dell'intervallo, tra loro distanti meno di δ, si avrà

$$\left|\frac{1}{\varphi(x_1)}-\frac{1}{\varphi(x_2)}\right| < \varepsilon' ,$$

epperò $\frac{1}{\varphi(x)}$ è funzione continua nel dato intervallo. Essa è quivi anche finita poichè per ogni valore x dell'intervallo si ha $\left|\frac{1}{\varphi(x)}\right| < \frac{1}{m}$.

Osservazione. Se è finito l'intervallo in cui $\varphi(x)$ è continua, esisterà pel teorema 1° un minimo di $|\varphi(x)|$, e se nell'intervallo la $\varphi(x)$ non si annulla mai, questo minimo sarà certamente maggiore di zero, dimodochè il teorema vale certamente se $\varphi(x)$ è continua in un intervallo finito e in questo non si annulla mai.

Teorema 5° - Se $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ sono due funzioni continue nello stesso intervallo dove $\psi(x)$ sia finita e $|\varphi(x)|$ si mantenga sempre superiore a un numero fisso $m>0$, il quoziente $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ è una funzione continua e finita nello stesso intervallo.

Essendo $\varphi(x)$ continua e maggiore (in valore assoluto) di m nel dato intervallo, pel teorema 4° sarà ivi continua e finita anche $\frac{1}{\varphi(x)}$ e quindi anche il prodotto $\psi(x)\cdot\frac{1}{\varphi(x)}$ ossia $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$.

Funzioni di funzioni - Sia $z=\varphi(x)$ e $y=f(z)$ allora y è funzione della x per mezzo di z. Se la $\varphi(x)$ è definita pei valori di x appartenenti ad un intervallo (a,b) e se, mentre x varia tra a e b, la $z=\varphi(x)$ varia tra m e M, allora, se $f(z)$ è definita nell'intervallo (m,M), sarà $y=f[\varphi(x)]$ una funzione definita della x nell'intervallo (a,b).

Teorema 6° - Se $\varphi(x)$ è una funzione continua della x nell'intervallo (a,b) e ivi varia tra m

e M e se $f(z)$ è funzione continua nell'intervallo (m, M) allora la $y = f[\varphi(x)]$ è funzione continua della x nell'intervallo (a, b).

Anzitutto possiamo affermare, per l'osservazione precedente, che y è funzione definita della x nell'intervallo (a, b). Si tratta di vedere che è continua.

Intanto, essendo per ipotesi $f[\varphi(x)]$ continua nello intervallo $m \leq \varphi(x) \leq M$, data una quantità arbitrariamente piccola ε, esiste una quantità δ tale che se $\varphi(x)$ varia per meno di δ, anche $f[\varphi(x)]$ varia per meno di ε. D'altra parte per la continuità di $\varphi(x)$ esiste un δ' tale che se x varia meno di δ', anche $\varphi(x)$ varia per meno di δ. Quindi, dato ad arbitrio un numero ε per quanto piccolo, si può trovare un altro numero δ' tale che se x varia per meno di δ', anche [$\varphi(x)$ varii per meno di δ e quindi] $y = f[\varphi(x)]$ varii per meno di ε. Il che equivale a dire che y è una funzione di x continua [nell'intervallo (a, b)].

§.4. Alcuni teoremi.

Prima di passare alla teoria dei limiti dimostriamo alcuni teoremi che ci occorreranno in seguito.

Teorema Se $y > 0$, $t > 1$, si ha

$$(1+y)^t \geq 1 + ty \quad (*) \qquad [1]$$

(*) Si può anzi dimostrare che vale sempre il segno $>$: dalla nostra dimostrazione ciò risulterebbe solo per t razionale.

Lo dimostreremo prima per t razionale, poi per t irrazionale.

1° Sia t un numero razionale $\frac{h}{k}$ ove h e k sono numeri interi positivi, e $h > k$ (giacchè $\frac{h}{k} = t > 1$). Ponendo $1+y = z^k$, donde $z > 1$, la [1] si può scrivere:

$$z^h - 1 \geq \frac{h}{k}\left(z^k - 1\right).$$

In questa dividendo ambo i membri per la quantità positiva $z-1$, si ottiene:

$$\left(z^{h-1} + z^{h-2} + \cdots + z^k\right) + \left(z^{k-1} + z^{k-2} + \cdots + 1\right) \geq \frac{h}{k}\left(z^{k-1} + z^{k-2} + \cdots + 1\right)$$

donde, dividendo per $z^{k-1} + \cdots + 1$,

$$\frac{z^{h-1} + z^{h-2} + \cdots + z^k}{z^{k-1} + \cdots + 1} + 1 \geq \frac{h}{k}$$

ossia

$$\frac{z^{h-1} + z^{h-2} + \cdots + z^k}{z^{k-1} + z^{k-2} + \cdots + 1} \geq \frac{h-k}{k}$$

Ora nella frazione che compare al primo membro il numeratore è costituito di $h-k$ termini, ciascuno dei quali non inferiore a z^k (giacchè $z > 1$); il denominatore è costituito invece di k termini tutti inferiori a z^k, dunque la frazione stessa è maggiore di $\frac{(h-k)z^k}{kz^k}$ cioè di $\frac{h-k}{k}$ c. d. d.

Risulta così dimostrato che per t razionale si ha

$$(1+y)^t > 1 + ty.$$

2° La precedente disuguaglianza scritta sotto la forma

$$\frac{(1+y)^t - 1}{t} > y$$

dimostra che la funzione

$$\varphi(t) = \frac{(1+y)^t - 1}{t}$$

della variabile t è $> y$ quando t assume valori razionali (>1). Vogliamo dimostrare che $\varphi(t) \geq y$, quando t assume valori *irrazionali*. Perciò osserviamo che in ogni intervallo compreso tra 1 e un qualunque numero >1, la funzione $\varphi(t)$ è continua. Infatti in questo intervallo la funzione $(1+y)^t$ della variabile t è continua e finita (*); lo stesso accade per la funzione $(1+y)^t - 1$ e per la funzione t, la quale inoltre si mantiene sempre superiore a 1. Per il teorema 5° sarà dunque continua nell'intervallo considerato anche la funzione $\varphi(t)$.

Sia ora t un numero irrazionale maggiore di 1. Per la continuità di $\varphi(t)$ in ogni intervallo compreso tra 1 e un numero $\alpha > 1$ si deduce che scelto un numero ε piccolo a piacere, esisterà un numero δ tale che presi ad arbitrio nell'intervallo $(1, \alpha)$ due valori della variabile i quali differiscano per meno di δ, i due valori corrispondenti della funzione differiscono per meno di ε. Se quindi x è un numero razionale (>1) distante da t meno di δ,

---

(*) Cfr. Esercizi di analisi matem. I - Cap. III.

si ha

$$|\varphi(x)-\varphi(t)|<\varepsilon$$

e in conseguenza

$$\varphi(x)-\varphi(t)<\varepsilon \quad , \quad \varphi(t)>\varphi(x)-\varepsilon .$$

ma $\varphi(x)>y$, quindi

$$\varphi(t)>y-\varepsilon .$$

Di qui risulta che $\varphi(t)$ non può essere inferiore a y, poichè ε è piccolo a piacere; sarà dunque

$$\varphi(t)\geq y . \qquad \text{c.d.d.}$$

Cambiamento di base nei logaritmi.

Sappiamo che dato un numero positivo $a\neq 1$, ad ogni numero $x>0$, corrispondono uno e un solo numero reale y (positivo, nullo o negativo secondochè x è maggiore, uguale o minore di 1), tale che sia soddisfatta l'equazione

$$x=a^y \qquad [1].$$

Il numero y è il <u>logaritmo</u> di x nella <u>base a</u> e si scrive

$$y=\log_a x . \qquad [2]$$

La [1] e la [2] ci offrono un semplice esempio di due funzioni l'una inversa dell'altra; la [1] è definita nell'intero campo dei numeri reali, vale a dire, la variabile indipendente y può assumere un qualsiasi valore dell'intervallo $(-\infty,\infty)$; la [2] invece è definita solo nel campo dei numeri positivi, cioè la variabile indipendente x può assumere soltanto valori dell'intervallo $(0,\infty)$, da cui si escluda però l'estremo inferiore 0.

Sia ora dato un altro numero positivo b e diciamo z il logaritmo di x nella base b:

$$z = \log_b x \; ; \qquad [3]$$

vogliamo vedere che relazione passa tra y e z.

Osserviamo perciò che la [3] è equivalente a

$$x = b^z$$

e quindi, per la [1], abbiamo

$$a^y = b^z,$$

da cui, prendendo i logaritmi in base a,

$$\log_a a^y = \log_a b^z .$$

Ma il logaritmo di una potenza è eguale al prodotto dell'esponente per il logaritmo della base, e, manifestamente, $y = \log_a a^y$; perciò

$$y = z \log_a b$$

da cui

$$z = \frac{1}{\log_a b} y$$

ossia

$$\log_b x = \frac{1}{\log_a b} \times \log_a x,$$

cioè il logaritmo di un numero qualunque (>0) in una base b è uguale al logaritmo dello stesso numero in un'altra base a diviso per il logaritmo di b nella base a.

Ponendo, in particolare, $x = a$ nella relazione precedente e ricordando che in qualunque sistema di logaritmi il logaritmo della base è sempre eguale a 1, (mentre il logaritmo di 1 è sempre uguale a 0) si ha

$$1 = \log_a b \cdot \log_b a.$$

Capitolo IV.

Teoria dei limiti.

§.1. Definizione di limite.

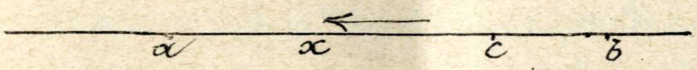
Sia $y=f(x)$ una funzione della x definita in un certo campo di variabilità; e supponiamo che la variabile indipendente x percorrendo questo campo varii sempre crescendo o sempre decrescendo.

1° Così per esempio, se y è definita nel campo dei numeri interi positivi, si può fare assumere alla x successivamente tutti i valori $1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ della serie dei numeri naturali, dimodochè la x andrà sempre crescendo e diverrà maggiore di qualunque numero A fissato in precedenza, per quanto grande esso sia; il che si esprime pure dicendo che la x diviene infinitamente grande oppure che la x tende a $+\infty$ (per valori interi).

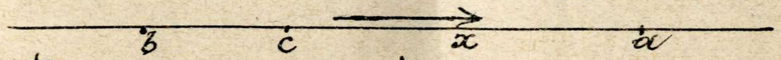
Se poi la y è definita nell'intero campo dei numeri reali, o nel campo dei numeri reali maggiori di un certo numero, possiamo far tendere la x all'∞ per valori reali qualsiasi.

2° Oppure sia la y definita nell'intervallo (a, b) ove $a<b$ e la x, partendo da un qualsiasi valore c

dell'intervallo assuma valori sempre più piccoli, avvicinandosi sempre più ad a, il che si esprime pure dicendo che la x tende al numero a venendo dalla destra di a.



3°- O ancora la y sia definita nell'intervallo (b, a) ove $b < a$; e la x varii partendo da un qualunque numero dell'intervallo, assumendo valori sempre più grandi in modo da avvicinarsi indefinitamente ad a, cioè tenda ad a, venendo dalla sinistra di a.



Definizione — In tutti questi casi diremo che "il limite di $y = f(x)$ (quando x tende all' ∞ nel 1° caso, al numero a nel 2° e 3° caso) è eguale a zero" o che "y tende a zero" o che "y è infinitesima", quando, data una quantità ε arbitrariamente piccola, da un certo punto in poi la y è in valore assoluto minore di ε.

Così nel 1° caso, dire che da un certo punto in poi $|y| < \varepsilon$ equivale a dire che esiste un certo numero n tale che per i valori di x più grandi di questo n è $|f(x)| < \varepsilon$. Il numero n naturalmente varierà in generale con ε; se, comunque dato ε, esiste un tal numero n, diremo allora che, quando x tende all' ∞, il limite di y è lo zero o che y tende a zero o che y

è infinitesima, e scriveremo

$$\lim_{x=\infty} y = 0 ;$$

se poi vogliamo indicare più chiaramente che x diviene infinitamente grande restando sempre positiva o sempre negativa, scriveremo rispettivamente

$$\lim_{x=+\infty} y = 0 \quad , \quad \lim_{x=-\infty} y = 0 .$$

Nel 2° caso, dire che da un certo punto in poi $|y| < \varepsilon$ significa dire che esiste un numero c a destra di a, $c > a$, tale che per tutti i valori di x compresi tra a e c,

$$a < x < c$$

si ha

$$|f(x)| < \varepsilon .$$

Il numero c naturalmente varia col variare di ε: se, comunque dato ε, esiste un tal numero c, allora y tende a zero mentre x tende ad a, il che si esprime scrivendo

$$\lim_{x=a} y = 0 .$$

Se poi ci interessa far sapere che la x si avvicina ad a venendo da destra, cioè conservando valori maggiori di a scriveremo

$$\lim_{x=a+0} y = 0 .$$

Similmente nel 3° caso, se comunque dato un ε piccolo a piacere, esiste un numero c a sinistra di a, $c < a$, tale che per i valori di x compresi fra c e a:

$$c < x < a$$

si abbia

$$|f(x)| < \varepsilon,$$

diremo che il limite di y, quando x tende ad a restando sempre a sinistra di a, è lo zero e scriveremo

$$\lim_{x=a-0} y = 0 .$$

Definizione. Diremo che "$y = f(x)$ tende ad A" o che "il limite di y è A", essendo A una quantità qualsiasi, e scriveremo

$$\lim y = A$$

quando

$$\lim (y - A) = 0 .$$

Così per es. nel 1° caso diremo che

$$\lim y = A$$

quando presa una quantità ε piccola ad arbitrio, si può trovare un n tale che per $x > n$ sia

$$|y - A| < \varepsilon$$

Definizione — Diremo che "il limite di y è lo infinito" e scriveremo

$$\lim y = \infty$$

quando si ha

$$\lim \frac{1}{y} = 0 .$$

Questa definizione si può trasformare. Infatti dire che $\lim \frac{1}{y} = 0$, è affermare che, preso un numero ε piccolo ad arbitrio, da un certo punto in poi è

$$\left|\frac{1}{y}\right| < \varepsilon,$$

cioè

$$|y| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Essendo ε un numero piccolo a piacere, $\frac{1}{\varepsilon}$ sarà un numero grande a piacere. Poniamo $\frac{1}{\varepsilon} = \eta$.

Ne segue che: $\lim \frac{1}{y} = 0$ o $\lim y = \infty$, allorquando preso un numero η grande a piacere, da un certo punto in poi sia

$$|y| > \eta.$$

<u>Esempi di limiti</u> — Sia q un numero qualunque positivo maggiore di 1. Vogliamo trovare $\lim q^x$ quando x variando nel campo dei numeri reali positivi, o nel campo dei numeri interi positivi, tende all'∞. È facile vedere che

$$\lim_{x=\infty} q^x = \infty. \qquad [1]$$

Infatti, se $q > 1$, potremo porre $q^x = (1+h)^x$ (dove $h > 0$) e per il teorema del § 4 nel Cap. III avremo

$(1+h)^x \geq 1 + hx$ cioè $\quad (1+h)^x > hx.$

Ora, se η è un numero grande a piacere, per $x > \frac{\eta}{h}$ si ha

$$hx > \eta$$

e quindi a fortiori

$$(1+h)^x > \eta.$$

Dunque per la definizione precedente è vera la [1]

Vogliamo cercare

$$\lim_{x=\infty} p^x, \qquad q = 1$$

essendo p un numero positivo minore di 1. Posto
$$p=\frac{1}{q}$$
sarà q un numero positivo maggiore dell'unità e
$$\lim p^x = \lim \frac{1}{q^x}.$$

Ma q^x tende a ∞, perciò $\frac{1}{q^x}$ ha per limite zero:
$$\lim p^x = 0 \qquad [2]$$

Osservazione — Abbiamo dimostrato le [1] e [2] nell'ipotesi che q e p fossero numeri positivi, ipotesi necessaria perchè tendendo x a ∞ in modo qualunque può assumere valori fratti o irrazionali e per tali valori q^x e p^x, se q e p fossero negativi, non avrebbero significato.

Detta ipotesi cessa di essere necessaria, se si suppone che x tenda a ∞ per valori interi, ossia assumendo i valori 1, 2, 3, ...

Allora osservando che
$$\lim_{x=\infty} |q^x| = \infty, \qquad \lim_{x=\infty} |p^x| = 0$$
se $q>1$ se $p<1$

sarà ancora
$$\lim_{x=\infty} q^x = \infty \quad \text{se } |q|>1$$
$$\lim_{x=\infty} p^x = 0 \quad \text{se } |p|<1$$
quando x tende ad ∞ assumendo i valori 1, 2, 3, ...

Applicazione — Vogliamo cercare il limite della somma dei primi n termini della progressione geometrica

$$1, p, p^2, p^3, \dots\dots$$

ossia vogliamo calcolare

$$\lim_{n=\infty}(1+p+p^2+\dots+p^{n-1}).$$

Posto

$$s=1+p+p^2+\dots+p^{n-1},$$

si ha

$$ps=p+p^2+p^3+\dots+p^{n-1}+p^n,$$

quindi, sottraendo,

$$(1-p)s=1-p^n$$

da cui, se $p\neq 1$,

$$s=\frac{1}{1-p}-\frac{1}{1-p}\cdot p^n. \qquad [3]$$

Or, se $|p|>1$, è $\lim p^n=\infty$, cioè dato un numero $R>0$ grande ad arbitrio, a partire da un certo n risulta

$$|p^n|>|1-p|R+1$$

ossia

$$\left|\frac{1}{1-p}\cdot p^n\right|-\left|\frac{1}{1-p}\right|>R;$$

ma dalla [3] risulta che

$$|s|\geq\left|\frac{1}{1-p}p^n\right|-\left|\frac{1}{1-p}\right|$$

quindi a fortiori

$$|s|>R.$$

Ciò prova che se $|p|>1$, $\lim s=\infty$.

Se poi $p=1$ ancora $\lim s=\infty$, perchè in tal caso $s=n$.

Infine sia $|p|<1$. In tal caso $\lim p^n=0$, cioè dato un numero $\varepsilon>0$ piccolo ad arbitrio a partire da un certo n è

$$|p^n| < \varepsilon\,|1-p| \qquad \text{o} \qquad \left|\frac{1}{1-p}p^n\right| < \varepsilon;$$

ma per la [3]

$$\left|s-\frac{1}{1-p}\right| = \left|\frac{1}{1-p}p^n\right|,$$

dunque da un certo n in poi

$$\left|s-\frac{1}{1-p}\right| < \varepsilon$$

ossia

$$\lim\left(s-\frac{1}{1-p}\right) = 0,$$

da cui

$$\lim s = \frac{1}{1-p}.$$

Dunque la somma dei termini di una progressione geometrica, col primo termine 1 e con ragione p di modulo minore di 1, tende ad $\frac{1}{1-p}$ coll'aumentare all'infinito il numero dei suoi termini.

Così la frazione periodica semplice

$$0,\overline{2222} = \frac{2}{10}\left[1+\frac{1}{10}+\left(\frac{1}{10}\right)^2+\left(\frac{1}{10}\right)^3+\cdots\right]$$

crescendo infinitamente il numero dei termini tenderà al valore

$$\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{9},$$

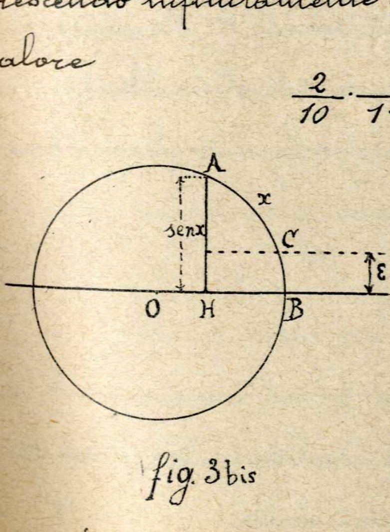


fig. 3bis

come già sapevamo dall'aritmetica elementare.

Dimostriamo che

$$\lim_{x=0} \operatorname{sen} x = 0.$$

Basterà dimostrare che preso un numero ε piccolo a piacere, da un certo punto in poi è $|\operatorname{sen} x| < \varepsilon$.

Nella fig. 3 prendiamo perpendicolarmente al raggio OB un segmento eguale a ε, e dalla sua estremità tiriamo la parallela al raggio stesso. Per tutti i valori dell'arco x compresi fra queste parallele, cioè per tutti i valori di x minori dell'arco BC (misurato al solito in radianti) è appunto $\operatorname{sen} x < \varepsilon$: quindi è vero che

$$\lim_{x=0} \operatorname{sen} x = 0.$$

Analogamente si può dimostrare che

$$\lim_{x=0} (1-\cos x) = 0$$

ossia che

$$\lim_{x=0} \cos x = 1.$$

§ 2 – Teoremi sui limiti.

Lemma – Immaginiamo di avere due quantità y_1 e y_2 che sieno funzioni della variabile indipendente x, e di avere un altra funzione y della variabile x sempre compresa tra i valori di y_1 e y_2. Se y_1 e y_2 hanno il medesimo limite finito A, la quantità y compresa tra y_1 e y_2 ha pure per limite A.

Infatti supponiamo, per fissare le idee che i valori che la x può assumere sieno

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots (*)$$

Vogliamo dimostrare che

(*) La dimostrazione che daremo sarà però valida anche nel caso che si tenda ad un numero reale a qualsiasi per valori reali.

$$\lim y = A,$$

cioè che, data una quantità ε piccola ad arbitrio, da un certo punto in poi (per x maggiore di un certo numero K, variabile con ε) è

$$|y-A| < \varepsilon, \qquad [1]$$

Siccome per ipotesi $\lim y_1 = A$, per un ε piccolo a piacere, da un certo punto in poi (cioè per valori di x_1 maggiori di un certo numero n) è $m > n$

y

$$|y_1 - A| < \varepsilon. \qquad [2]$$

Analogamente, siccome $\lim y_2 = A$, preso un numero ε piccolo a piacere, da un certo punto in poi (cioè per valori di x_2 più grandi di un certo numero m) è

$$|y_2 - A| < \varepsilon. \qquad [3]$$

I numeri n e m possono essere o eguali o uno minore dell'altro.

Supponiamo $n \leq m$.

Allora quando x è maggiore di m sarà anche maggiore di n, quindi la disuguaglianza (2) che vale per $x > n$ varrà anche per $x > m$. Ma per $x > m$ vale anche la disuguaglianza (3), quindi da un medesimo punto in poi, cioè per $x > m$, sono soddisfatte entrambe le disuguaglianze (2) e (3).

Ora, poichè y è compresa tra y_1 e y_2, sarà anche $|y-A|$ compreso tra $|y_1 - A|$ e $|y_2 - A|$; questi ultimi due valori, come abbiamo visto sopra, per $x > m$ sono più piccoli di ε. Ma una quantità compresa tra due altre più piccole di un certo numero è pure più piccola di quel numero, quindi anche $|y-A|<\varepsilon$. Per $x>m$, oltre alle disuguaglianze [2] e [3] resta dunque soddisfatta anche la [1]. Potremo quindi dire che preso al solito un ε piccolo a piacere, da un certo punto in poi (cioè per $x>m$) è $|y-A|<\varepsilon$, il che equivale a dire che:

$$\lim y = A.$$

Resta dunque dimostrata che una quantità compresa tra due altre che hanno un medesimo limite ha pure il medesimo limite.

Esempio – Vogliamo dimostrare che V. Sseuy

$$\lim_{x=0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0.$$

Basta dimostrare che il limite del valore assoluto di quella quantità è 0, cioè che:

$$\lim_{x=0} \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = 0.$$

La quantità $\left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|$ non può essere più piccola di 0 perchè il valore assoluto di ogni quantità è maggiore di 0, quindi sarà

$$0 \leq \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right|.$$

Il valore di $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ è compreso tra -1 e $+1$ quindi $\left|\operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|$ è al più eguale a 1; il valore assoluto di x è $|x|$, dunque tutto il prodotto $\left|x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\right|$ non può superare $|x|$, avremo perciò:

$$0 \leq \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| \leq |x|.$$

quando x tende a 0, allora

$$\lim 0 = 0 \quad , \quad \lim |x| = 0 .$$

$\left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right|$ essendo sempre compreso tra i valori 0 e $|x|$ che tendono entrambi a 0 avrà (in virtù del lemma precedente) per limite pure lo 0, cioè

$$\lim_{x=0} \left| x \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right| = 0 .$$

c.d.d.

Disegniamo ora l'andamento della curva immagine della funzione

$$y = x \operatorname{sen} \frac{1}{x} .$$

Diamo ad x consecutivamente i valori $\frac{1}{2\pi}$, $\frac{1}{3\pi}$, $\frac{1}{4\pi}$, $\frac{1}{5\pi}$ .... ecc.

Per $x = \frac{1}{2\pi}$, $\frac{1}{x} = 2\pi$ e $\operatorname{sen} \frac{1}{x} = \operatorname{sen} 2\pi = 0$, quindi, poichè uno dei fattori è 0, tutto il prodotto $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ sarà 0, cioè:

$$y = 0 .$$

Per $x = \frac{1}{3\pi}$, $\frac{1}{x} = 3\pi$ e $\operatorname{sen} \frac{1}{x} = \operatorname{sen} 3\pi = 0$, quindi ancora

$$y = 0 .$$

Analogamente $y = 0$ per $x = \frac{1}{4\pi}$, $\frac{1}{5\pi}$, ... ecc.

Quando x varia tra $\frac{1}{2\pi}$ e $\frac{1}{3\pi}$, $\frac{1}{x}$ varia da 2π a 3π e $\operatorname{sen} \frac{1}{x}$ cresce dal valore 0 fino ad assumere il massimo valore 1 per poi decrescere fino a 0; il valore massimo che può assumere la x in quell'intervallo è $\frac{1}{2\pi}$, quindi il valore massimo che può assumere tutto il prodotto $x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ non sarà maggiore di $\frac{1}{2\pi} \cdot 1 = \frac{1}{2\pi}$.

Siano $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ due funzioni definite in uno stesso campo di variabilità della x, e aventi, per $x=a$, dei limiti finiti A e B:

$$\lim_{x=a} \varphi(x)=A \quad , \quad \lim_{x=a} \psi(x)=B;$$

vogliamo dimostrare che anche la loro somma ha un limite, per $x=a$, e che questo limite è uguale alla somma dei loro limiti:

$$\lim_{x=a} \left[\varphi(x)+\psi(x)\right]=A+B.$$

Supponiamo, per fissare le idee, che a sia un numero reale e che $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ siano definite nello stesso intervallo (a, b) [dove b indichi per es. un numero maggiore di a o l'infinito positivo]. Allora, per definizione, dire che $\lim_{x=a} \varphi(x)=A$ equivale a dire che scelto un ε piccolo a piacere, esiste un δ' tale che per un qualsiasi punto x' dell'intervallo (a, b) distante da a meno di δ' si ha

$$|\varphi(x')-A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Similmente dire che $\lim_{x=a} \psi(x)=B$ equivale a dire che esiste un δ'' tale che per un punto qualsiasi x'' dell'intervallo (a, b) distante da a meno di δ'' si ha

$$|\psi(x'')-B| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Detto δ un numero positivo non superiore nè a δ' nè a δ'', per es. il più piccolo fra di essi, allora per un punto qualunque x di (a, b) distante da x meno di δ, si ha

$$|\varphi(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad |\psi(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2},$$

da cui

$$|\varphi(x)-A|+|\psi(x)-B| < \varepsilon$$

e quindi a fortiori
$$\left|[\varphi(x)+\psi(x)]-(A+B)\right|<\varepsilon,$$
vale a dire il limite della funzione $\varphi(x)+\psi(x)$ è il numero $A+B$.

È poi facile estendere il teorema a più di due funzioni.

Teorema 2° Se più funzioni (in numero finito) della variabile x, definite per gli stessi valori di x, ammettono per $x=a$, dei limiti finiti, il loro prodotto avrà pure, per $x=a$, un limite, eguale al prodotto dei loro limiti.

Teorema 3° Se y è una funzione che per $x=a$ ha un limite finito e non nullo A, anche la sua reciproca $\frac{1}{y}$ ha un limite per $x=a$, eguale al reciproco di A.

Teorema 4°- Se y e z sono due funzioni che per $x=a$, hanno limiti finiti A e B ed è $B\neq 0$, la funzione quoziente $\frac{y}{z}$ ha un limite, eguale al quoziente $\frac{A}{B}$ dei due limiti.

Osservazione 1ª- Spesso, per brevità di linguaggio, questi teoremi si sogliono enunciare dicendo: il limite di una somma (o di un prodotto o di un quoziente) è la somma (o il prodotto o il quoziente) dei limiti.

In questi enunciati sono taciute tutte le ipotesi; però si tenga ben presente che qui il tacere equivale a sottintendere non a sopprimere.

Osservazione 2ª – I teoremi precedenti, giusta gli enunciati, valgono quando i limiti delle funzioni sono finiti.

Pur tuttavia alcuni di essi seguitano a sussistere anche quando questi limiti non sono finiti. È intuitivo per es. che: se y e z sono due funzioni che tendono a $+\infty$, ossia tendono all'infinito assumendo valori positivi (da un certo punto in poi) anche $y+z$ tende a $+\infty$; che se y e z tendono a $-\infty$ anche $y+z$ tende a $-\infty$; ma che se y tende a $+\infty$ e z a $-\infty$ (o viceversa) nulla si può asserire in generale circa il modo di comportarsi di $y+z$.

Se y e z tendono all'infinito, anche il prodotto yz tende all'infinito; se y tende ad un limite finito non nullo e z tende all'infinito, il prodotto yz tende all'infinito; ma che se y tende a 0 e z tende all'infinito, nulla si può asserire circa il modo di comportarsi del prodotto yz.

Se y tende a 0, $\frac{1}{y}$ tende all'infinito e viceversa (per definizione, cfr. §1).

Osservazione 3ª – I teoremi 1°, 2°, 3°, 4° possono anche applicarsi quando il limite di qualche funzione non esiste o non si sa se esista.

Per es. se y tende all'infinito e $\lim z$ non esiste ma z si conserva finita e non minore di un numero positivo fisso (almeno a partire da un certo punto) yz tende all'infinito; se y tende a 0 e z si conserva finita, yz tende a 0, ecc.

PAGINE MANCANTI: 101-102

§. 4 - Quantità crescenti, decrescenti o costanti.

Abbiamo visto esempi di quantità che tendevano a un limite andando sempre nel medesimo verso, di quantità che tendevano a un limite facendo infinite oscillazioni le quali oscillazioni andavano di mano in mano diminuendo di ampiezza, e di quantità che facevano infinite oscillazioni non tendendo a nessun limite. Ora vogliamo dimostrare il seguente

Teorema - Se una quantità non fa oscillazioni, tende a un limite (che può anche essere l'infinito).

Dire che una quantità non fa oscillazioni, vuol dire che essa o è sempre crescente, o è sempre decrescente, o che da un certo punto in poi conserva sempre lo stesso valore A. In questo ultimo caso il teorema è evidente, poichè è chiaro che la quantità in questione ammette per limite appunto il valore A.

Basterà allora dimostrare il teorema per il caso di una quantità sempre crescente, essendo analoga la dimostrazione per una quantità sempre decrescente.

Supponiamo dunque di avere una quantità y sempre crescente. Per la dimostrazione occorre distinguere due casi:

1° Caso - La quantità y diventa grande a piacimento, cioè preso un numero k, grande quanto si vuole, esiste qualche valore di y maggiore di k. Ora, se la quantità y ha un valore più grande di k, tutti i valori successivi della quantitá (che va sempre crescendo) saranno pure più grandi di k, il che equivale a dire che presa una quantitá k grande a piacere, da un certo punto in poi la quantitá è maggiore di k, cioè per definizione

$$\lim y = \infty$$

2° Caso – La quantitá y è sempre crescente, ma esiste qualche numero l tale che nessun valore di y è maggiore di l. Allora, dividiamo i numeri in due classi: nella prima classe mettiamo tutti i numeri k tali che nessun valore di y li superi, nella seconda tutti gli altri numeri, che indicheremo con h, e che saranno uguali o minori di un qualche valore della y, e perciò saranno superati da tutti i valori successivi della y. Un numero non potrá appartenere che a una sola delle due classi. Ogni numero h della 2ª classe sarà minore di qualche valore di y (se no apparterrebbe alla prima classe); tutti i valori di y sono minori dei numeri k della prima classe, quindi ogni numero h della seconda classe è più piccolo di tutti i numeri k della prima classe.

Dunque le nostre due classi hanno la proprietá che ogni numero appartiene a una e una sola classe, e ogni numero della seconda classe è minore di tutti i numeri della prima. Ora, per il teorema del § 3, che abbiamo dedotto dal postulato della continuitá, sappiamo che tale divisione individua un numero α tale che ogni numero maggiore di α appartiene alla prima classe cioè è un

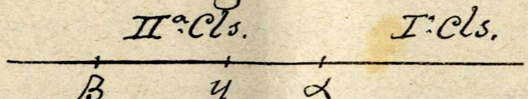
k, e ogni numero minore di α appartiene alla seconda, cioè è un h.

Dimostreremo che in questo caso

$$\lim y = \alpha .$$

Dire che $\lim y = \alpha$ vuol dire che, preso un numero ε piccolo a piacere, da un certo punto in poi la differenza $|y-\alpha|$ è minore di ε.

Prendiamo un segmento $\beta\alpha = \varepsilon$ a sinistra di α



L'estremo β essendo a sinistra, e perciò più piccolo di α, sarà un numero h, quindi c'è qualche valore di y che lo supera. I valori successivi di y (poichè la y cresce sempre) saranno tutti più grandi di β perciò saranno a destra di β, ma non potranno andare a destra di α perchè i numeri a destra di α sono numeri della prima classe, i quali sono più grandi di tutti i valori della y. Allora la differenza tra questi valori di y e il numero α sarà minore del segmento $\beta\alpha = \varepsilon$ cioè sarà

$$|y-\alpha| < \varepsilon ,$$

da cui per definizione:

$$\lim y = \alpha .$$

Dunque, anche in questo caso la quantità y ammette un limite. Resta perciò dimostrato il teorema

§. 5. Permutabilità dei simboli f e lim per una funzione $f(x)$ continua.

Teorema — Se $f(x)$ è una funzione continua della variabile x in un intervallo (a, b) e c è un valore qualsiasi di questo intervallo (*) si ha

$$\lim_{h=0}\left[f(c+h)-f(c)\right]=0$$

ossia

$$\lim_{h=0} f(c+h)=f(c) \qquad [1]$$

Ciò vuol dire che, preso un numero ε piccolo a piacere, da un certo punto in poi (per $h < \delta$)

$$|f(c+h)-f(c)| < \varepsilon.$$

La frase: da un certo punto in poi significa

(*) Se c cade in a, cioè nell'estremo di sinistra dell'intervallo ab in cui la funzione è definita, allora la h non potrà avere che valori positivi, minori della lunghezza L dell'intervallo ab, perchè altrimenti $c+h$ cadrebbe fuori dell'intervallo ab

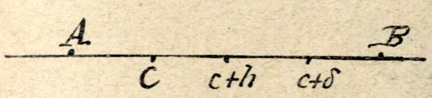
Analogamente, se c cade in b, cioè nell'estremo di destra del segmento in cui la funzione è definita, allora h non potrà avere che valori negativi minori di L in valore assoluto, perchè altrimenti $c+h$ cadrebbe fuori del segmento ab.

Se c è interno al segmento ab, allora h può avere tanto valori positivi che valori negativi, minori in valore assoluto rispettivamente della lunghezza di cb e di ca.

nel nostro caso (in cui si studia un limite quando h tende a zero) per i valori di h, minori in valore assoluto di un certo numero σ.

Siccome la funzione $f(x)$ è continua, per definizione, preso un numero ε piccolo ad arbitrio, esiste un numero δ tale che, per ogni coppia di punti di (a, b) distanti per meno di δ, la differenza dei corrispondenti valori della funzione è in valore assoluto minore di ε.

Poniamo $\delta = \sigma$ e prendiamo un valore di h minore di σ (per es. positivo); quel valore di h sarà minore anche di δ. Allora il segmento $c, c+\delta$ conterrà il punto $c+h$



perchè $|h|<\delta$. Ma il segmento $c, c+\delta$ è di lunghezza δ, e c, $c+h$ sono due punti di questo segmento, quindi sarà

$$|f(c+h)-f(c)| < \varepsilon \qquad \text{c.d.d.}$$

Osservazione. Si può dimostrare che inversamente: *Se una funzione $f(x)$ è tale che per ogni punto c di un intervallo finito (a, b) si ha*

$$\lim f(c+h) = f(c),$$

essa è continua in (a, b).

Quando h tende a 0, $x=c+h$ tende a c, quindi la [1] può scriversi

$$\lim f(x) = f(\lim x).$$

I teoremi precedenti provano che per una funzione $f(x)$ continua i simboli f e $\lim$ sono permutabili e che questa proprietà è caratteristica per le funzioni continue.

§.6 - Calcolo di due limiti notevoli.

Prima di passare allo studio delle derivate è necessario premettere dei limiti speciali che ci serviranno a determinare le derivate del seno e del logaritmo di una variabile x.

Abbiamo dimostrata la disuguaglianza

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tang} x$$

che vale per x compreso tra 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Poichè

$$\operatorname{tang} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x},$$

avremo

$$\operatorname{sen} x < x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Dividiamo quest'ultima disuguaglianza per $\operatorname{sen} x$. Sappiamo che si può dividere una disuguaglianza per una quantità, lasciando inalterato il senso della disuguaglianza, se la quantità per la quale si divide è positiva, cambiando invece il senso della disuguaglianza se la quantità per la quale si divide è negativa. Nel nostro caso, poichè x varia da 0 a π, $\operatorname{sen} x$ è sempre positivo, quindi potremo scrivere

$$1 < \frac{x}{\operatorname{sen} x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Quando x tende a 0, il primo termine della disuguaglianza testè scritta tende a 1, perchè il limite di una costante è la costante stessa.

Essendo $\cos x$ continua avremo poi

$$\lim_{x=0} \cos(0+x) = \cos 0 = 1$$

quindi (§ 2, teor. 3°)

$$\lim_{x=0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

Ora $\frac{x}{\operatorname{sen} x}$ è compreso tra 1 e $\frac{1}{\cos x}$ che al tendere di x a 0 tendono entrambi a 1, quindi (§ 2, lemma)

$$\lim_{x=0} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1,$$

da cui [illegible]

$$\boxed{\lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1}$$

pel teorema 3° del § 2.

Questa formola dà uno dei limiti fondamentali che volevamo trovare; essa vale anche per x negativo, perchè il cambiare il segno di x non altera $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

In questa formola l'arco x è misurato in radianti. Detta y la sua misura in gradi, si ha

$$x : y = \pi : 180,$$

perchè π e 180 sono le misure della semicirconferenza in radianti e in gradi rispettivamente, da cui

$$x = \frac{\pi}{180} y \quad \text{e} \quad y = \frac{180}{\pi} x$$

Ne segue

$$\frac{\operatorname{sen} y}{y} = \frac{\operatorname{sen} x}{y} = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{\pi}{180}$$

e

$$\lim_{y=0} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = \frac{\pi}{180} \lim_{x=0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\pi}{180}.$$

Dunque il limite del rapporto $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ quando x tende a 0 è 1, se x è la misura di un arco in radianti, ed è $\frac{\pi}{180}$, se x è la misura di un arco in gradi.

Or questo limite interviene spesso nei calcoli; da ciò l'utilità di misurare gli archi in radianti. (Misurandoli in gradi, dovremmo introdurre nei calcoli la costante irrazionale $\frac{\pi}{180}$).

Esiste, è finito e diverso da zero il

$$\boxed{\lim_{x=1} \frac{x-1}{\log x}}.$$

Se a è la base del sistema di logaritmi, e si pone $\log x = z$, questo limite si può indicare anche con

$$\lim_{z=0} \frac{a^z-1}{z}$$

$\lim_{a^z=1} \frac{a^z-1}{z}$ $(a^z = x)$ $(a^0 = 1)$

Supporremo per fissare le idee $a>1$, ed osserviamo anzitutto che se $x_1 > x_2 > 1$, è

$$\frac{x_1-1}{\log x_1} > \frac{x_2-1}{\log x_2}.$$

$\log x_1 = t \log x_2$

Infatti, posto $\frac{\log x_1}{\log x_2} = t$, e quindi $x_1 = x_2^t$, e posto $x_2 = 1+y$, è $t>1$, $y>0$; e la nostra disuguaglianza diventa

$$\frac{(1+y)^t - 1}{t} \geq y$$

che noi abbiamo già dimostrato (Cap. III, § 4).

Quindi, se x si avvicina ad 1 venendo da destra, $\frac{x-1}{\log x}$ varia sempre in un verso (non aumenta), e quindi (pel teorema del § 4) tende a un limite finito positivo o nullo A. Dico che $A > 0$

Infatti, posto $\log x = \frac{1}{k}$ ossia $a^{\frac{1}{k}} = x$, si ha

$$\frac{x-1}{\log x} = \frac{a^{\frac{1}{k}} - 1}{\frac{1}{k}} = k\left(a^{\frac{1}{k}} - 1\right),$$

perché sia $x=1$ cioè $a^{\frac{1}{k}} = 1$ ben cioè $\frac{1}{k} = 0$ cioè $k = \infty$

quindi basterà dimostrare che

$\lim k(a^{\frac{1}{k}} - 1) \neq 0$
$x=1$
cioè $\lim k(a^{\frac{1}{k}} - 1) \neq 0$
$a^{\frac{1}{k}} = 1$

cioè $$\lim_{k=\infty} k\left(a^{\frac{1}{k}} - 1\right) \neq \cancel{\infty}\, 0$$

quando per es. k tende all'infinito con valori interi positivi. Ma

$$k\left(a^{\frac{1}{k}} - 1\right) > 1 - \frac{1}{a},$$

perchè essendo $a^{\frac{1}{k}} = x$, questa disuguaglianza diventa

$$k(x-1) > \frac{x^k - 1}{x^k}.$$

ossia

$$k x^k > \frac{x^k - 1}{x - 1}$$

oppure

$$k x^k > x^{k-1} + x^{k-2} + \cdots + x + 1,$$

la quale è evidente, essendo $x > 1$ e quindi x^k maggiore di ognuno dei k termini del secondo membro.

Dunque

$$A = \lim_{x=1} k\left(a^{\frac{1}{k}} - 1\right) \geq 1 - \frac{1}{a} > 0,$$

perchè se fosse $A < 1-\frac{1}{a}$, allora $k(a^{\frac{1}{k}}-1)$ col tendere ad A finirebbe per diventare e restare minore di $1-\frac{1}{a}$, contro il dimostrato c. d. d.

Si avvicini ora x ad 1 venendo da sinistra. Posto $x=\frac{1}{u}$ la u si avvicinerà ad 1 venendo da destra; e quindi

$$\lim_{x=1-0}\frac{x-1}{\log x}=\lim_{u=1}\frac{1}{u}\cdot\lim_{u=1+0}\frac{u-1}{\log u}=1\cdot A=A=\lim_{x=1+0}\frac{x-1}{\log x}\quad \text{c.d.d.}$$

È dunque

$$\lim_{x=1}\frac{x-1}{\log_a x}=\lim_{z=0}\frac{a^z-1}{z}=A\neq 0.$$

Se $a=10$, si trova, come vedremo più tardi, che

$$A=2{,}30258509\ldots.$$

Come varia A al variare della base a?

Sia c una nuova base di logaritmi. Sarà (Cap. III § 4)

$$\frac{x-1}{\log_c x}=\frac{x-1}{\log_c a\cdot\log_a x}=\log_a c\cdot\frac{x-1}{\log_a x}$$

e quindi

$$\lim_{x=1}\frac{x-1}{\log_c x}=\lim_{z=0}\frac{c^z-1}{z}=A\cdot\log_a c=\frac{A}{\log_c a}.$$

Se in particolare si assume come base quel numero e, il cui logaritmo a base a è $\frac{1}{A}$, avremo

$$\boxed{\lim_{x=1}\frac{x-1}{\log_e x}=\lim_{z=0}\frac{e^z-1}{z}=1.}\qquad [1]$$

Il numero e soddisfa per definizione alla

$$A=\log_e a.$$

Il precedente risultato si può dunque scrivere

$$\lim_{x=1} \frac{x-1}{\log_a x} = \lim_{z=0} \frac{a^z-1}{z} = \log_e a . \quad [2]$$

Dalla [1] segue, posto $x-1=\delta$, $m=\frac{1}{\delta}$, che

$$\lim_{\delta=0} \frac{\delta}{\log_e(1+\delta)} = 1, \quad \lim_{\delta=0} \frac{\log_e(1+\delta)}{\delta} = 1, \quad \lim_{\delta=0} \log_e(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = 1,$$

ossia

$$\boxed{\lim_{\delta=0} (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e}, \quad \boxed{\lim_{m=\infty} \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e} \quad [3].$$

Queste ultime due eguaglianze danno una definizione diretta del numero e.

I logaritmi a base e si chiamano anche <u>naturali, neperiani o iperbolici</u>.

Osservazione - D'ora innanzi assumeremo costantemente il numero e come base dei logaritmi, base che perciò faremo a meno di scrivere, sicchè

$$\log x = \log_e x .$$

Diamo la preferenza alla base e su qualunque altra a, perchè in tal modo non siamo costretti ad introdurre nei calcoli la costante A quando dovremo applicare la [1] o le [3], ciò che accadrà molto spesso.

Esempio - Cerchiamo il

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x} .$$

Poniamo $x=2t$; allora osservando che $1=\operatorname{sen}^2 t+\cos^2 t$, $\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t$ e che t tende a zero con x, si ha

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{t=0} \frac{sen^2 t + \cos^2 t - \cos^2 t + sen^2 t}{2t}$$

$$= \lim_{t=0} \frac{2\, sen^2 t}{2t} = \lim_{t=0} \frac{sen^2 t}{t} = \lim_{t=0} \left(\frac{sen\, t}{t}\, sen\, t \right)$$

Ora $\frac{sen\, t}{t}$, quando t tende a 0, ha per limite 1, e sent tende a 0, quindi il prodotto $\frac{sen\, t}{t}$ sent tende a 0, cioè:

$$\lim_{x=0} \frac{1-\cos. x}{x} = 0.$$