MECCANICA RAZIONALE

MANUALI HOEPLI

R. MARCOLONGO
Professore ordinario nella R. Università di Napoli

MECCANICA RAZIONALE

VOLUME II.

DINAMICA - MECCANICA DEI SISTEMI DEFORMABILI

SECONDA EDIZIONE RIVEDUTA ED AMPLIATA
CON 23 INCISIONI

ULRICO HOEPLI
EDITORE-LIBRAIO DELLA REAL CASA
MILANO

1918

TIPOGRAFIA SOCIALE — Milano, Via G. Mameli, 15.

INDICE

PARTE TERZA

DINAMICA

CAPITOLO I.

Le tre leggi fondamentali del moto.

CAPITOLO II.

Problemi particolari sul moto di un punto.

CAPITOLO III.

Il principio di d'Alembert e le equazioni generali della dinamica.

CAPITOLO IV.

Teoremi generali sul moto di un sistema.

CAPITOLO V.

Dinamica dei sistemi rigidi.

CAPITOLO VI.

Attrazione degli ellissoidi e teoremi generali sulla funzione potenziale newtoniana.

PARTE QUARTA

MECCANICA
DEI SISTEMI DEFORMABILI

CAPITOLO I.

Cinematica e statica dei sistemi deformabili.

CAPITOLO II.

Equazioni fondamentali dell'equilibrio e del moto dei fluidi.

ERRATA CORRIGE

Vol. I.

		invece di	leggi
Pag. 77	linea 12 dall'alto	$\mathbf{a} = a(\cos\alpha + \cos\beta)\,\mathbf{i}$	$\mathbf{a} = a(\cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j})$
		$\mathbf{b} = a(\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta)\,\mathbf{j}$	$\mathbf{b} = -a(\operatorname{sen}\alpha\,\mathbf{i} + \operatorname{sen}\beta\,\mathbf{j})$
» »	» 21 »	$\alpha + \frac{\pi}{2\omega}$, ecc.	$\frac{\alpha + \pi}{2\omega}$, ecc.
» 123	» 3 dal basso	$\mathbf{i}' = r\,\mathbf{j}' - q\,\mathbf{k}$	$\mathbf{i}' = r\,\mathbf{j} - q\,\mathbf{k}$

Vol. II.

		invece di	leggi
Pag. 57	linea 4 dal basso	$1\ e \cos u$	$1 - e \cos u$
» 88	» 9 dall'alto	$\xi'' + i\,\mu''$	$\xi'' + i\,\eta''$
» 90	» 9 »	$(1 + b)\,u\,\varphi(\theta)$	$(1 + b)\,u = \varphi(\theta)$
» 94	» 3 dal basso	n	$u =$
» »	» » »	25	2ρ
» 166	» 10 dall'alto	§ 4	§ 5
» 169	» 9 »	§ 5	§ 6
» 178	» 1 »	§ 8	§ 7
» 181	» 2 dal basso	§ 9	§ 8
» 185	» 5 »	§ 10	§ 9
» 409	» 9 »	$\left(\frac{1}{k_1}\right) \frac{1}{3} - 1$	$\left(\frac{1}{k_1}\right)^{\frac{1}{3}} - 1.$

PARTE TERZA

DINAMICA.

§
§
§
§

CAPITOLO I.

LE TRE LEGGI FONDAMENTALI DEL MOTO.

La Dinamica di un punto materiale, cioè di un corpo di dimensioni sufficientemente piccole, o che si comporti come tale, che noi svilupperemo da principio, si fonda su tre leggi, dette di NEWTON. Enunciamole e commentiamole brevemente. Leonardo da Vinci

§ 1. **La prima legge o legge d'inerzia.** — *Ogni corpo persevera nel proprio stato di quiete o di moto rettilineo ed uniforme, finchè non interviene una forza esterna.* (*)

Questa prima legge, che considera la condizione di un corpo non soggetto a forze, asserisce intanto che le cause del moto sono esterne. Occorre poi considerare in essa due parti; nella

(*) L'enunciato classico di NEWTON è:
Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis statum illum mutare. [Philos. nat. Principia Mathe-

prima abbiamo la convenzione comunemente adottata per la misura del tempo. Riguardati infatti eguali i tempi durante i quali un particolare corpo, non soggetto a forze, passa per spazi eguali; ogni altro corpo, non soggetto a forze, si muoverà per spazi eguali in quei successivi intervalli di tempo durante i quali il corpo particolare si muove per spazi eguali. Il corpo scelto è la terra, la cui rotazione intorno al proprio asse si può considerare come uniforme. (*)

Inoltre si presuppone il riferimento ad una

---

matica; edizione del 1723; pag. 12; la prima edizione è del 1687].

Per la storia e la critica di questo principio, noto ed applicato da BURIDAN, LEONARDO da VINCI, BENEDETTI, KEPLER, GALILEO, ecc., si veda anzitutto E. WOHLWILL, *Die Entdeckung des Beharrungsgesetzes* [Zeit. für Völkerpsychologie und Sprachwissenschaft, **14**, pp. 365; **15**, pp. 70, 337 (1884); Bibliotheca Math. (2) **2**, p. 19 (1888)]; e poi il libro più volte citato del MACH, nonchè: VAILATI, *Le speculazioni di Giovanni Benedetti sul moto dei gravi* [Atti R. Acc. Torino, **33**, p. 159 (1898)]; MASCI, *Sul concetto di movimento* [Atti R. Acc. Scienze morali di Napoli, **25**, Par. 2ª, p. 159 (1892); e finalmente DUHEM, *De l'accélération produite par une force constante* [Comp. rendus du IIme Congrès international de Philosophie, Genève, 1904, p. 859].

(*) THOMSON A. TAIT, *Treatise on Natural Phil.*, **1**, art. 247.

speciale terna d'assi fissi (quella, per es., connessa colle stelle fisse). (*)

La seconda parte invece è una vera e propria legge di natura che deve essere riguardata come una verità sperimentale, perchè in perfetto accordo con le più ovvie esperienze e poscia resa generale per via di induzione. Infatti si osserva che il moto di un corpo continua tanto più invariabile quanto più si eliminano le cause perturbatrici, e tanto più si avvicina alla direzione rettilinea, quanto più è diminuita l'azione delle forze deviatrici. Galileo

§ 2. **La seconda legge del moto.** — *Il cambiamento di moto (cioè l'accelerazione) è proporzionale alla forza applicata, ed ha luogo secondo la linea retta nella quale agisce la forza.* (**)

Questa legge adunque esprime la proporzionalità tra forza ed accelerazione; e mentre la prima ci assicura che quando su di un corpo agisce una forza, si determina un moto non uniforme e quindi

(*) Sull'enunciato delle leggi dinamiche indipendentemente da qualsivoglia sistema speciale di riferimento e per la numerosa e ricca bibliografia vedasi: G. Giorgi, *Il problema del moto assoluto, ecc.* [Rend. Circ. mat. Palermo, **34**, pp. 301-332 (2° sem. 1912)].

(**) *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.* Newton; l. c., pag. 12.

una accelerazione (da ritenersi perciò funzione della forza); la nuova legge viene ad assegnare la forma di questa funzione e che è la più semplice possibile. Di guisa che se P è il punto materiale, **F** il vettore della forza applicata in P, sarà, in conformità della legge stessa, da porre

$$c P'' = \mathbf{F}$$

essendo c un fattore di proporzionalità, indipendente dalla forza, dallo stato di moto e dal tempo. (*)

Risulta di qui che se imprimiamo al sistema di riferimento una traslazione uniforme arbitraria, l'equazione scritta non muta di forma, ossia: se tutti i punti di un sistema materiale hanno un moto continuo di traslazione, e uno di essi viene sollecitato in un determinato istante da una forza, il movimento che esso assume rispetto agli altri, è indipendente dal moto di traslazione del sistema e quindi è lo stesso come se il sistema fosse in quiete.

Si può ancora osservare che se più punti materiali identici hanno uno stesso movimento di traslazione qualunque, ciò significa che essi sono sollecitati da forze di vettori eguali; se quindi su uno di essi agisce una nuova forza, esso as-

(*) Le derivate rispetto al tempo di un ente qualunque (punto, vettore, omografia) saranno indicate o colla ordinaria notazione di Leibniz, o con accenti.

sumerà un movimento, rispetto agli altri, indipendente dal moto del sistema: ossia l'accelerazione dovuta alla nuova forza è indipendente da quella dovuta alla prima. La legge enunciata include dunque la indipendenza dell'effetto di più forze: e però:

La accelerazione dovuta a più forze è la risultante delle accelerazioni delle singole forze.

Di qui NEWTON deduceva la legge di composizione di forze applicate ad un punto. (*)

Notiamo ancora quest'altra conseguenza:

Un punto materiale sollecitato da una forza costante, ed inizialmente in riposo o dotato di velocità parallela alla forza, assume un moto rettilineo uniformemente accelerato.

Il fattore di proporzionalità c varia da corpo a corpo; perchè l'esperienza dimostra che corpi diversi soggetti alla stessa forza prendono accelerazioni diverse, dopo uno stesso tempo. Si esprime un tal fatto dicendo che i corpi hanno *massa* diversa; precisamente, poichè basterà limitarci al caso delle forze costanti, diremo che:

Due corpi hanno masse eguali quando la stessa forza (costante) produce la stessa accelerazione; e un corpo ha massa doppia, tripla, ecc., di un altro, quando una forza (costante) doppia, tripla,... produce la stessa accelerazione.

(*) NEWTON, l. c., p. 13.

Brevemente:

Le forze (costanti) che producono la stessa accelerazione su due diversi corpi stanno fra di loro come le masse.

Se quindi diciamo m ed m_1 le masse di due corpi, $\mathbf{F}$ ed $\mathbf{F}_1$ i vettori delle forze (costanti) applicate ad essi, avremo

$$\text{mod } \mathbf{F} : \text{mod } \mathbf{F}_1 = m : m_1 .$$

Ma per la seconda legge risulta pure che il primo rapporto è espresso da $c : c_1$; dunque

$$c : m = c_1 : m_1 = \lambda$$

essendo λ una costante assoluta e dipendente solamente dal sistema di unità fondamentali.

Ora in cinematica noi abbiamo fissato l'unità di tempo e di lunghezza; dobbiamo ancora fissare quelle di massa e di forza; fissiamole in modo che risulti $\lambda = 1$. Di guisa che

$$(1) \qquad m P'' = \mathbf{F}.$$

In tale ipotesi è chiaro che scelta l'unità di massa, non è più arbitraria l'unità di forza e reciprocamente; perchè nel primo caso, l'unità di forza è quella forza costante che imprime l'unità di accelerazione all'unità di massa; e nell'altro caso, l'unità di massa è quella che acquista l'unità di accelerazione quando è sollecitata dall'unità di forza.

Si è trovato più conveniente adottare il primo modo e scegliere l'unità di massa nel modo che esporremo.

§ 3. **Misura della massa di un corpo.** — Nel modo con cui nel § precedente abbiamo introdotto il concetto di massa, per paragonare tra di loro le masse di due corpi occorrerebbe paragonare le grandezze di due forze costanti capaci di imprimere ad essi la stessa accelerazione. Ma le leggi sperimentali della caduta dei gravi, in vicinanza della terra, ci dànno un mezzo assai più semplice e più rapido. Queste leggi infatti dicono che ogni corpo abbandonato nel vuoto all'azione del proprio peso, assume un moto rettilineo, secondo la verticale, uniformemente accelerato *(moto naturale)* che è sempre lo stesso; mentre dimostreremo in seguito (Cap. II, § 8) che in una piccola regione della superficie terrestre, i movimenti si effettuano come se la terra fosse immobile e il peso del corpo restasse lo stesso. Allora, in virtù della seconda legge, si conclude esser costante la forza che sollecita un grave nel vuoto; e che le forze costanti a cui sono soggetti i gravi nel loro movimento stanno come le masse.

Se quindi p è il peso di un corpo di massa m; g l'accelerazione (dovuta alla gravità), la detta legge ci dà

$$p = m g.$$

Si dimostra poi che le masse si misurano colla bilancia; o in altre parole:

I pesi dei vari corpi, misurati colla bilancia, in uno stesso luogo, stanno fra loro come le masse.

Dalla precedente relazione risulta che fissata come unità fondamentale di massa, la massa di un grammo (cioè della millesima parte del chilogrammo campione); allora la forza che sollecita l'unità di massa equivale a g volte la forza unitaria; per conseguenza l'unità di forza, *dine*, cioè quella forza continua e costante che imprime l'accelerazione di un cm. (o ciò che è lo stesso le fa acquistare la velocità di un cm. dopo un secondo, partendo dal riposo) all'unità di massa, equivale alla g^{ma} parte del grammo peso. Quindi a Roma, la dine, essendo $g = 980,386$ (cm., sec.$^{-2}$), è circa la millesima parte del grammo; precisamente equivale a 1,02 milligramma. È dunque una unità assai piccola: però si suole anche considerare un suo multiplo, la *megadine*, equivalente a 10^6 dine, o a circa un kg.

Nel sistema adottato, centimetro, grammo-massa, secondo, l'equazione di dimensione di una forza è quindi

$$[f] = [l, m, t^{-2}].$$

Newton

§ 4. **La terza legge del moto.** — *Ad ogni azione corrisponde sempre una reazione eguale e contraria; ossia le azioni mutue di due corpi qua-*

lunque sono sempre eguali e dirette in senso contrario. (*)

Mentre le due prime leggi ci danno il mezzo di misurare una forza e quindi, come vedremo, di investigare il moto di un punto soggetto a date forze; questa terza legge ci abiliterà a trattare casi assai più complicati di moto, nei quali occorre considerare più corpi e le loro mutue pressioni.

La legge, già largamente applicata in statica, viene direttamente osservata dai più grandi fenomeni astronomici ai più volgari e semplici fatti della quotidiana esperienza. Così se un corpo preme o spinge un altro, esso è premuto o spinto da questo con una forza eguale e contraria; ecc. (**)

(*) *Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones, in se mutuo semper esse aequales et in partes contraria dirigi.* NEWTON, l. c. p. 13.

(**) Il preciso enunciato delle leggi del moto, come già si disse, è dovuto a NEWTON, dal quale incomincia, insieme colla scoperta del calcolo infinitesimale, lo sviluppo della moderna dinamica.

La dinamica di Aristotele, che ebbe larga diffusione nel medio evo, si fondava sulla legge, riconosciuta falsa dopo lungo volger di secoli, della proporzionalità della forza alla velocità: la quale, per es., avrebbe avuto per conseguenza che i gravi cadendo nel vuoto acquistano velocità proporzionali ai loro pesi.

§ 5. Forze istantanee. Impulso. — L'equazione fondamentale (1), integrata tra t_0 e t_1 dà

$$(2) \qquad \left(m P' \right)_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \, dt.$$

La scuola dell'Università di Parigi (secondo le ricerche più volte citate del DUHEM); BENEDETTI, e sopratutto GALILEO colla scoperta delle leggi della caduta dei gravi liberamente o per piani inclinati; o per archi e corde di cerchio; con quella delle leggi del pendolo e colla risoluzione del primo e più semplice dei problemi sul moto dei proietti; (per non citare che i maggiori), contribuirono potentemente a rovesciare la dinamica aristotelica e a promuovere la moderna.

È indubbiamente provato che i lavori di GALILEO risalgono ai primi anni del 1600 e furono resi universalmente noti, parte nei *Dialoghi sui massimi sistemi* (1632) e sopratutto nei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (1638). Ediz. naz. **8.** Una delle due nuove scienze è appunto la nuova dinamica. È quindi senza discussione la priorità di GALILEO sul BALIANI: *De motu naturali gravium solidorum* (1638 e 1646) e su G. MARCO MARCI: *De proportione motus* (Pragae, 1639) e unanime il consenso sulla grande, decisiva influenza che i *Discorsi* ebbero sullo sviluppo della nuova dinamica.

GASSENDI, CARTESIO precisando e generalizzando alcuni risultati di GALILEO poterono dimostrare che una forza costante produce un moto uniformemente accelerato.

Tra i grandi precursori di NEWTON è infine da citare HUYGHENS, delle cui scoperte sarà dato cenno ai luoghi opportuni.

Vedi i lavori citati del DUHEM, di CAVERNI, di MACH.

L'intervallo $t_1 - t_0$ sia assai piccolo ed $\mathbf{F}$ sia risultante di forze le cui intensità, in quell'intervallo, sono minori di quantità finite, e di altre la cui intensità è dell'ordine di $(t_1 - t_0)^{-1}$ e quindi assai grandi. Le prime si dicono generalmente *continue* e non producono variazioni finite nella velocità di P; invece l'integrale del secondo membro della (2) relativo alle seconde ha un valore finito e però esse producono una variazione finita, un brusco cambiamento, nella velocità di P. Ma avendosi sempre

$$\mathrm{mod}\left(m P'\right) < k,$$

con k finito, risulta integrando

$$\mathrm{mod}\,[m(P_1 - P_0)] < k\,(t_1 - t_0) < \varepsilon$$

con ε arbitrariamente piccolo; cioè il punto mobile, nello stesso intervallo di tempo, subisce spostamenti infinitamente piccoli.

Si dice, in tal caso, che all'istante t_0 ha agito sul mobile una *forza istantanea o una percossa*, rappresentata dal limite, per $t_1 = t_0$, del vettore

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}\,dt.$$

Il modulo di tale forza, per la (2), è eguale al prodotto della massa per il modulo del vettore che rappresenta il cambiamento di velocità; e le sue dimensioni sono

$$[m, l, t^{-1}];$$

cioè la forza istantanea può essere considerata come *il prodotto di una forza continua per il tempo*.

Cognito il movimento per $t \leq t_0$, e quindi la velocità pel valore t_0; se interviene una percossa, conosceremo il cambiamento di velocità in quell'istante; e a partire da questo (cioè per $t > t_0$) la legge fondamentale (1) determinerà (§ 6) il moto fino a che non intervengano nuove percosse.

Possiamo ora interpretare il vettore $m\,P'$.

Consideriamo un punto materiale mobile liberamente sulla propria traiettoria e sia P la posizione occupata al tempo t. In P pensiamo un punto materiale identico ed in riposo. Diremo *impulso* del mobile, al tempo t, quella forza istantanea capace di far assumere, in quell'istante, al mobile fittizio in riposo la stessa velocità del mobile reale. Poichè in tal caso la variazione di velocità del mobile fittizio è eguale alla velocità del mobile reale, così dicendo $\mathfrak{F}$ l'impulso avremo, per la (2),

$$(3) \qquad \mathfrak{F} = m\,P';$$

Il vettore impulso è eguale al prodotto della massa per la velocità. Il modulo del vettore impulso, cioè $m\,v$, dicesi anche *quantità di moto* del mobile.

Con questo nuovo concetto, l'equazione (1) può scriversi

$$\frac{d\,\mathfrak{J}}{d\,t} = \mathbf{F}\,; \qquad (4)$$

se $\mathbf{F}$ è nullo (e quindi il moto è rettilineo ed uniforme), risulta $\mathfrak{J} = \text{cost.}$; e però le prime due leggi fondamentali del moto si possono enunciare in quest'altro modo:

Se su di un punto materiale non agiscono forze, l'impulso è costante.

Se su di un punto materiale agisce una forza continua, la variazione dell'impulso nell'unità di tempo (cioè la derivata dell'impulso rispetto al tempo) è eguale alla forza.

§ 6. **Equazione del moto di un punto libero.** — L'equazione fondamentale (1), che traduce la seconda legge di Newton, permette di trovare la forza che sollecita un punto di massa m quando è cognito il suo movimento. Di più essa riconduce il problema inverso, cioè la determinazione del moto cognita la forza, ad un problema di cinematica: determinare il moto (velocità, traiettoria) cognita la forza.

In tutti i casi che si presentano in natura, la forza dipende dalla posizione del punto, dalla sua velocità (come avviene nel moto in un mezzo resistente) e dal tempo. Potremo quindi scrivere la (1) così

$$(5) \qquad m P'' = \mathbf{F}(P, P', t);$$

e la ricerca di P mediante t dipenderà adunque dalla integrazione di questa equazione differenziale del secondo ordine; ed è noto che se sono soddisfatte certe condizioni, abbastanza generali, sulla $\mathbf{F}$, considerata come funzione degli argomenti messi in évidenza, esiste una funzione P del tempo t che soddisfa la (5) e tale inoltre che per $t = 0$, sia $P = O$; $\frac{dP}{dt} = P'_0$. (*) Queste due ultime condizioni si dicono *condizioni iniziali;* quindi:

La forza e le condizioni iniziali individuano completamente il movimento di un punto materiale.

Alla (5) può essere utile sostituire le equazioni cartesiane, riferite cioè ad un sistema fondamentale fisso. Se x, y, z sono le coordinate di P; X, Y, Z le componenti della forza, avremo subito

$$(6) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = X \; ; \; m \frac{d^2 y}{dt^2} = Y \; ; \; m \frac{d^2 z}{dt^2} = Z .$$

(*) Teorema di esistenza di CAUCHY. Vedi PICARD, *Traité d'Analyse,* 2, pag. 308 e seg.

Le componenti della forza sono funzioni di x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, t; e quindi le (6) sono tre equazioni differenziali simultanee del secondo ordine.

Diciamo **t**, **n**, **b** tre vettori unitari rispettivamente paralleli alla tangente (nel senso degli archi crescenti), alla normale principale (volta verso il centro di curvatura) e alla binormale nel punto P della traiettoria (Vol. I, pag. 17). Ricordando formule note (Vol. I, pag. 57), da (5) risulta:

$$(7)\quad m\frac{dv}{dt} = \mathbf{F}\times\mathbf{t}\,;\quad \frac{mv^2}{\rho} = \mathbf{F}\times\mathbf{n}\,;\quad 0 = \mathbf{F}\times\mathbf{b}\,,$$

dette appunto *equazioni intrinseche* del moto. (*)

Se la forza ha una direzione fissa, lo stesso accadrà dell'accelerazione e quindi la traiettoria del mobile è piana. Il moto del punto in direzione normale alla forza è uniforme; e sulla di-

(**) Le equazioni (7) furono esclusivamente adoperate dai geometri dopo NEWTON, e più specialmente da EULER, *Mechanica sive motus scientia, analytice exposita,* Petropoli, 1736; **I**, pag. 65, Prop. 21. Le (6) furono adoperate da MACLAURIN, *A complete Treatise on Fluxions,* art. 265, 469 e 984 (1742).

rezione della forza, assunta come asse z, è definito dalla sola equazione

$$(8) \qquad m \frac{d^2 z}{d t^2} = Z\left(z, \frac{d z}{d t}, t\right).$$

Se poi la velocità iniziale è nulla od ha la direzione della forza, la traiettoria è una retta. Notiamo infine che se Z dipende soltanto da z; o da $\frac{d z}{d t}$, o da t, l'integrazione della (8) si riconduce alle quadrature.

§ 7. **Moto verticale di un grave in un mezzo resistente (resistenza idraulica).** — Un corpo di forma sferica si muove in un mezzo resistente, per es., l'aria, che esercita normalmente su tutta la superficie del corpo una resistenza funzione della velocità. Se la sfera ha un semplice moto rettilineo di traslazione e quindi i suoi punti hanno, in ogni istante, la stessa velocità, come nel caso in cui si fa cadere la sfera liberamente, senza velocità iniziale; le resistenze risentite dai vari elementi della superficie si compongono in una unica, applicata al centro della sfera ed opposta alla direzione del moto. Per velocità non superiori a 240 metri al secondo e non troppo piccole, si può ammettere che essa sia proporzionale al quadrato della velocità e quindi della forma $C \rho_1 v^2$, essendo C una costante (dipendente dal mezzo e dalla forma del corpo) e ρ_1 la densità del mezzo. Il peso della sfera, in virtù del principio d'ARCHIMEDE, è $\frac{4}{3} \pi a^3 (\rho - \rho_1) g$, dove a è il raggio, ρ la densità della sfera. Tale peso è una forza che penseremo applicata al centro della sfera, in cui sia concentrata tutta la massa (Cap. IV, § 7).

Finalmente è da osservare che la massa del grave in moto in un mezzo resistente è maggiore di quella allo stato di riposo, di una frazione p del volume del fluido spostato; cioè:

$$m = \frac{4}{3} \pi a^3 (\rho + p \rho_1),$$

e dovuta al fatto che la sfera in moto trasporta avanti e dopo di sè una parte del fluido a guisa di prora e poppa fluida; e detta appunto carena fluida nel caso di una nave. Il coefficiente numerico p dipende dalla forma del corpo e per una sfera è circa 0,5. (*)

(*) DU BUAT, *Principes d'Hydraulique*, **2**, p. 229 (1786); BESSEL, Astron. Nachrich., 1828, pag. 142; BAILY, Phil. Trans. 1832, Part. I, pp. 399-492. Vedi ancora: MOSSOTTI *Lezioni di Mecc. raz.*, pag. 184. Firenze, 1851.

La teoria più completa ed il calcolo di p è dovuta a BOUSSINESQ, *Théorie analytique de la chaleur*, **2** (1903), pag. 199 e seg.

Assumendo l'asse z verticale, positivo verso il basso, l'equazione (8) diventa

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = g \frac{\rho - \rho_1}{\rho + p \rho_1} \pm \frac{3}{4} \frac{C \rho_1}{\pi a^3 (\rho + p \rho_1)} v^2 ;$$

in cui è da tenere il segno $+$ se si tratta di moto ascendente e il segno $-$ pel moto discendente. Posto

$$g_1 = g \frac{\rho - \rho_1}{\rho + p \rho_1} ; \; k^2 = \frac{4}{3} \frac{\pi a^3 g}{C} \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1} ,$$

otteniamo

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = g_1 \left(1 \pm \frac{v^2}{k^2} \right) .$$

Per il caso dei palloni si può porre $C = \pi a^2 c$, dove c è una costante indipendente dal raggio della sfera; quindi

$$k^2 = \frac{4}{3} \frac{a}{c} \frac{\rho - \rho_1}{\rho_1} g .$$

L'equazione differenziale cui siamo ridotti ha il secondo membro funzione della sola velocità. Limitiamoci a considerare il caso del moto discendente e se $v < k$, poniamo

$$v = \frac{d z}{d t} = k \operatorname{Th} u ,$$

essendo u una nuova funzione incognita. Fatte le sostituzioni si trova, con una integrazione,

$$u = \frac{g_1}{k}(t+\tau)\ ;\quad \frac{dz}{dt} = k\ \mathrm{Th}\ \frac{g_1}{k}(t+\tau).$$

Si vede subito che v cresce costantemente restando sempre minore di k; e per t infinitamente grande, converge a k; cioè il moto è accelerato, ma a mano a mano tende a diventare uniforme. Se la velocità iniziale v_0 è eguale a k risulta $\tau = \infty$ e quindi costantemente $v = k$, cioè il moto uniforme.

Se invece fosse $v > k$, basterebbe porre

$$v = k : \mathrm{Th}\ u$$

e procedere come prima; v decresce, in tal caso, continuamente, e tende a k.

Con una nuova integrazione si ottiene z mediante t; precisamente

$$z = \frac{k^2}{g_1} \log \mathrm{Ch}\ \frac{g_1}{k}(t+\tau) + \text{cost.}\ ;$$

e se supponiamo che sia inizialmente $v_0 = 0$ e quindi $\tau = 0$, e si contano le z dalla posizione iniziale del centro della sfera, avremo

$$v = k\ \mathrm{Th}\ \frac{g_1 t}{k}\ ;\quad z = \frac{k^2}{g_1} \log \mathrm{Ch}\ \frac{g_1 t}{k}\ ;$$

ed anche, posto $g_1 t : k = u$,

$$v = g_1 t \,.\, \frac{\mathrm{Th}\, u}{u} \;;\; z = g_1 t^2 \frac{\log \mathrm{Ch}\, u}{u^2} \,.$$

Nel vuoto $\rho_1 = 0$; quindi $g_1 = g$; k tende all'infinito ed u allo zero. Passando al limite, nelle espressioni precedenti, si hanno le note formule esprimenti le leggi di GALILEO:

$$v = g t \;;\; z = \frac{1}{2} g t^2 \,.$$

Le formule per il moto ascendente di un grave lanciato verticalmente con velocità v_0, sono invece

$$v = v_0 - g t \;;\; z = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \,.$$

Così un grave lanciato verticalmente nel vuoto con velocità v_0 giunge ad un'altezza data da

$$v^2_0 : 2 g = \text{cm. } 5,1 \,.\, v^2_0$$

in un tempo eguale a

$$v_0 : g = 10,2 \,.\, v_0 \,.$$

La resistenza dell'aria ha più influenza sull'altezza che sulla durata del moto. (*)

(*) La riduzione a quadrature del problema, anche nel caso più generale di una resistenza della forma $a v + b v^n$ è stata fatta da NEWTON, l. c. Lib. 2, p. 245.

§ 8. **Moto rettilineo di un punto attratto da un centro fisso in ragione inversa del quadrato della distanza.** — Supponiamo che la velocità iniziale del mobile sia nulla, oppure diretta verso il centro fisso O; il moto avverrà sulla congiungente di O colla posizione iniziale P_0 del punto e che assumeremo come asse z. La forza è quindi espressa da $-m\,k^2 : z^2$ e la (8) diventa

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = -\frac{k^2}{z^2},$$

in cui il secondo membro è funzione della sola z. Diciamo v la grandezza della velocità al tempo t; l'equazione può scriversi

$$\frac{d v}{d t} = v \frac{d v}{d z} = -\frac{k^2}{z^2};$$

integrando

$$v^2 = h + \frac{2 k^2}{z}.$$

Estraendo la radice, terremo il segno $+$ o $-$ secondo che z cresce o decresce col tempo. Notiamo poi che se $h \geqq 0$, la velocità non si annulla mai e nella ipotesi che il punto venga inizialmente lanciato nel senso $O P_0$, essa decresce continuamente; il mobile si allontana sempre da O ed il suo moto tende a diventare uniforme.

Se $h < 0$, poniamo

$$h = -\frac{2\,k^2}{\alpha}$$

quindi, dette v_0 e z_0 velocità e distanza iniziali,

$$v^2 = 2\,k^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\alpha}\right)\ ;\ v_0{}^2 = 2\,k^2\left(\frac{1}{z_0} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

cioè

$$\alpha \geqq z_0 .$$

Da z_0 sino ad α, la z cresce col tempo ed il mobile si allontana da O; la sua velocità decresce sempre fino ad annullarsi in un punto A (di ascissa α); avanti al radicale si terrà il segno $+$. Il mobile inoltre giunge in A in un tempo finito; infatti dalla

$$v = \frac{dz}{dt} = \sqrt{2\,k^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\alpha}\right)}$$

si trae

$$t = \sqrt{\frac{\alpha}{2\,k^2}}\int_{z_0}^{\alpha}\frac{\sqrt{z}\,dz}{\sqrt{\alpha - z}},$$

e l'integrale è finito per $z = \alpha$.

Supponendo che la velocità iniziale sia nulla (ciò che può sempre supporsi immaginando che il mobile anzichè da P_0 parta da A) avremo $\alpha = z_0$, ed il movimento avviene da A verso O; il tempo impiegato dal mobile a giungere da A in O è dato dal precedente integrale limitato però tra o e z_0. Posto $z = z_0 \operatorname{sen}^2 u$, si otterrà

$$t = 2\, z_0 \sqrt{\frac{z_0}{2\, k^2}} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \operatorname{sen}^2 u\, d\, u = \frac{\pi\, z_0 \sqrt{2\, z_0}}{4\, k}.$$

Nel prossimo capitolo tratteremo il caso in cui la velocità ha una direzione arbitraria e quindi la traiettoria è una conica col fuoco in O. Se la conica è una ellissi, e diciamo T il tempo periodico di rivoluzione, la accelerazione del mobile alla distanza z_0 da O è $\frac{4\, \pi^2\, z_0}{T^2}$ e poichè essa ha pure per valore $\frac{k^2}{z_0^{\,2}}$, risulta

$$k^2 = \frac{4\, \pi^2\, z_0^{\,3}}{T^2},$$

e quindi pel tempo t precedentemente calcolato, troviamo il valore

$$t = \frac{\sqrt{2}}{8}\, T = 0,176\, T.$$

Così per il caso del moto della luna intorno alla terra, $T = 27$ giorni e quindi $t = 4\,{}^3/_4$ giorni è il tempo che impiegherebbe a cadere sulla terra.

§ 9. — Moto dei proiettili lanciati nel vuoto o in un mezzo resistente.

a) Tratteremo uno dei casi più classici di moto di un grave lanciato nel vuoto. Immagineremo ancor qui il grave ridotto al suo centro di massa in cui sia applicato il peso; l'asse z sia la verticale del luogo, positiva verso l'alto e prescindiamo ancora dal moto di rotazione della terra.

Sia **k** un vettore unitario parallelo alla verticale passante pel punto iniziale O e volto verso

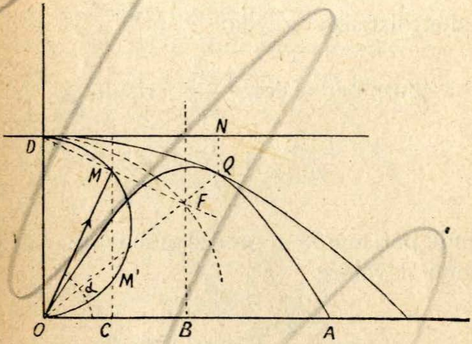

Fig. 1.

l'alto; v_0 la grandezza della velocità iniziale parallela ad un vettore unitario **b**. Poichè la forza è espressa da $-g\,\mathbf{k}$, l'equazione (1) si integra subito (Vol. I, pag. 70) e ci dà

$$P - O = v_0\, t\, \mathbf{b} - \frac{1}{2} g\, t^2\, \mathbf{k},$$

che rappresenta una parabola ad asse verticale e colla concavità in basso. Il moto odografo è rettilineo ed uniforme.

Se infine diciamo x e z (Fig. 1) le coordinate di P rispetto al sistema fondamentale O ($\mathbf{i}$, $\mathbf{k}$), ed α l'angolo che $\mathbf{b}$ forma con $\mathbf{i}$, si ha subito

$$x = v_0 \cos \alpha \,.\, t \quad ; \quad z = v_0 \operatorname{sen} \alpha \,.\, t - \frac{1}{2} g\, t^2 .$$

Per $t = 2\, v_0 \operatorname{sen} \alpha : g$, la z ridiventa nulla; il mobile taglia l'asse orizzontale in un punto A, tale che

$$O\,A = v_0^{\,2} \operatorname{sen} 2\,\alpha : g$$

e che dicesi *gittata* o *ampiezza del tiro*. Per una determinata velocità iniziale v_0, essa è massima per $\alpha = 45^0$. L'asse della parabola è la verticale passante pel punto medio B di $O\,A$; su questa si trova il fuoco F; di più l'angolo che $O\,F$ forma con $\mathbf{b}$ (parallela alla tangente alla parabola in O) è complementare di α; e quindi l'angolo $O\,F\,B$ è supplementare di $2\,\alpha$, perciò $O\,F = v_0^{\,2} : 2\,g$; questa è anche la distanza $O\,D$ del punto O dalla direttrice della parabola ed è l'altezza cui giungerebbe un grave lanciato verticalmente da O con velocità v_0. Si deduce quindi che tutte le traiettorie paraboliche uscenti da O, corrispondenti ad una stessa velocità iniziale e a varie inclinazioni complanari, hanno la stessa direttrice e i fuochi sono su di un cerchio di centro O.

La direzione della velocità iniziale taglia la DF nel punto medio M ortogonalmente: condotta quindi la verticale MC, risulta OC eguale alla quarta parte della gittata; e descritto un cerchio su OD come diametro, esso passa per M.

Dato il punto A sulla orizzontale per O, se si vuol costruire la parabola (per una data velocità iniziale) con cui viene a colpirsi A; basterà trovare la intersezione della verticale condotta per C (ad un quarto della gittata) col cerchio prima definito. Se i punti d'incontro sono due, avremo due parabole le cui tangenti in O sono le rette OM, OM' e di cui si costruiscono subito i fuochi e i vertici; se la verticale è tangente, avremo una sola parabola ed il caso della massima gittata; se la verticale non incontra il cerchio, il problema non ha soluzione.

Se il punto A non sta sulla orizzontale, la costruzione viene lievemente modificata; basterà costruire un cerchio passante per D e tangente in O alla OA; poi condurre per C, distante da O della quarta parte di OA, la parallela ad OD e procedere come nel caso precedente.

Congiungiamo O con F e sia Q il punto di incontro di OF con la parabola; dimostriamo che il luogo dei punti Q, relativi alle varie traiettorie paraboliche, è una parabola fissa avente il vertice in D e il fuoco in O. Infatti il punto Q è egualmente distante da F e dalla direttrice; di più $OF = OD$; costruita quindi la simmetrica di OA rispetto al punto D, il punto Q sarà egualmente distante da O e da questa nuova retta.

La parabola luogo del punto Q è tangente a tutte le traiettorie; infatti essa e la parabola di fuoco F hanno in Q la stessa tangente che è la bisettrice dell'angolo OQN; in altre parole: la parabola di vertice D e fuoco O è l'inviluppo di tutte le traiettorie paraboliche uscenti da O, per una stessa velocità iniziale, e contenute nel piano DOA. Tale parabola dicesi *parabola di sicurezza* o di TORRICELLI.

Facendo ruotare la figura intorno ad OD si otterrà un paraboloide come inviluppo di tutte le traiettorie paraboliche uscenti da O con una stessa velocità iniziale.

Secondo che un punto nel piano DOA è interno alla parabola di sicurezza o giace su di essa od è esterno, esso potrà essere colpito in due, o in uno, o in nessun modo; alla parabola corrispondente al minor angolo d'inclinazione corrisponde il tempo minore.

Se facciamo variare infinitamente poco l'angolo α, otterremo una nuova parabola che incontrerà la prima in un punto infinitamente prossimo a Q, e quindi differirà infinitamente poco dalla primitiva traiettoria nel tratto da O a Q; mentre da questo punto in poi le due traiettorie (e i moti dei due mobili) differiranno sempre più col crescere di t. Si dice che il movimento è *stabile* nel primo dei suddetti tratti; *instabile* nell'altro. (*)

b) Passiamo ora al caso del moto in un mezzo resistente.

Supponiamo che la risultante di tutte le resistenze che il mezzo esercita sulla superficie del

---

(*) La scoperta della traiettoria parabolica dei gravi nel vuoto è dovuta a GALILEO, che la rese di pubblica ragione nel 1638 nei famosi *Discorsi*. Ediz. naz., **8**; giornata 4ª, p. 268. Era stata trovata, in base ai principi galileiani, dal CAVALIERI: *Specchio ustorio*, Bologna 1632. La priorità di GALILEO, impugnata dal CAVERNI: *Storia del metodo*, ecc. **4**, cap. 9, § 2, è stata difesa dal WOHLWILL. [Abhan. zur Geschichte der Mathematik, **9**, p. 577 (1899)].

La teoria del moto dei proietti fu condotta a grande perfezione da TORRICELLI, *Opera geometrica*. [*De motu*. Lib. 2°, pp. 154-190] Florentiae, 1644; da G. GRANDI, *Instituzioni meccaniche*, Cap. 7°. Firenze 1739; da FRISI, *Operum*, **2**, p. 95, Mediolani 1783, ecc.

corpo sia applicata al centro di massa, sia tangente alla traiettoria e diretta in senso contrario al moto. L'accelerazione del mobile è sempre contenuta in un piano verticale; il piano osculatore è verticale e quindi la traiettoria è ancora contenuta in un piano verticale. Qui possiamo opportunamente valerci delle equazioni intrinseche del moto.

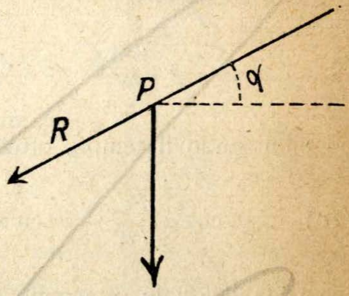

Fig. 2.

Sia α (Fig. 2) l'angolo che la tangente forma coll'orizzonte ed $m\,R$ la grandezza della resistenza: eseguite le correzioni per la massa e per l'accelerazione g (§ 7); le (7) ci danno:

$$\frac{dv}{dt} = -R - g \operatorname{sen} \alpha \; ; \quad \frac{v^2}{\rho} = g \cos \alpha \, .$$

Ma

$$\rho = -\frac{ds}{d\alpha} = -\frac{v\,dt}{d\alpha};$$

perchè è da osservare che la risultante di R e del peso è situata dalla parte delle z negative rispetto alla tangente; la curva volge la concavità in basso, e quindi α, da un valore iniziale α_0, decresce fino alla sommità della traiettoria in cui è nullo e poi seguita a decrescere indefinitamente. Dunque

$$(9) \qquad v \frac{d\alpha}{dt} = -g \cos \alpha ;$$

ed eliminando il tempo, otteniamo

$$(10) \qquad \cos \alpha \frac{dv}{d\alpha} - v \operatorname{sen} \alpha = \frac{R}{g} v ;$$

integrata la quale otterremo una relazione tra v ed α. La (10) è l'equazione differenziale dell'odografo.

Se $\frac{R}{g}$, che in generale dipende dalla sola v, è della forma $a + b v^n$, l'equazione precedente divenuta una equazione di Bernoulli, e la sua integrazione si riduce alle quadrature. Infatti si ha

$$\cos \alpha \frac{dv}{d\alpha} - (a + \operatorname{sen} \alpha) v = b v^{n+1},$$

e colla sostituzione

$$w = v^{-n}$$

diventa lineare e di primo ordine e cioè

$$\frac{dw}{d\alpha} + \frac{n(a + \operatorname{sen}\alpha)}{\cos\alpha} w = -\frac{nb}{\cos\alpha};$$

integrando col metodo noto si ottiene

$$\frac{1}{v^n} = Cq - nbq \int \frac{d\alpha}{q\cos\alpha}$$

dove C è una costante e

$$q = \cos^n\alpha \operatorname{tang}^{na}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Supponiamo che le costanti a, b, n siano positive; inoltre se il grave è abbandonato senza velocità iniziale, la resistenza del mezzo è eguale ad $m g a$ che dovremo supporre minore del peso $m g$; dunque $a < 1$.

Per $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, q tende a zero;

$$-nbq \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{q\cos\alpha}$$

ha lo stesso limite di

$$-nb \frac{1}{q\cos\alpha} : -\frac{1}{q^2}\frac{dq}{d\alpha} = \frac{nb}{\cos\alpha} : \frac{d\log q}{d\alpha}$$

$$= -\frac{b}{a + \operatorname{sen}\alpha},$$

per $\alpha = -\frac{\pi}{2}$; cioè $\frac{b}{1-a}$. Dunque v^{II}, e quind v, ha un limite finito. D'altra parte da (9) de duciamo

$$g\,t = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{v\,d\alpha}{\cos\alpha};$$

e poichè la funzione da integrare, per $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ diventa infinita di primo ordine, concludiamo ch il tempo impiegato a raggiungere il valore $-\frac{\pi}{2}$ è infinito. Infine, osservando che

$$\frac{dx}{dt} = v\cos\alpha \;, \quad \frac{dz}{dt} = v\,\text{sen}\,\alpha$$

e quindi

$$g\,x = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2\,d\alpha \quad , \quad g\,z = -\int_{\alpha_0}^{\alpha} v^2 \operatorname{tang}\alpha\,d\alpha$$

risulta che per lo stesso valore di α, la x tend a un limite finito, mentre z cresce, in valor as soluto, indefinitamente. Dunque:

La traiettoria ha un asintoto verticale; col cre scere del tempo il moto tende a diventare uniforme

Nel caso, particolarmente interessante, di $a = 0$ si può procedere più speditamente così.

Posto

$$u = v \cos \alpha \ , \quad R = b g v^n \, (n \neq 0)$$

la (10) diventa

$$\frac{du}{d\alpha} = b \left(\frac{u}{\cos \alpha} \right)^{n+1} ;$$

donde

$$\frac{1}{u^n} - \frac{1}{u_0^{\,n}} = -n b \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{(\cos \alpha)^{n+1}} ;$$

e se poniamo

$$p = \operatorname{tang} \alpha \, ,$$

$$\frac{1}{u^n} - \frac{1}{u_0^{\,n}} = -n b \int (1 + p^2)^{\frac{n-1}{2}} \, dp ;$$

quindi, successivamente

$$g t = -\int u \, dp$$

$$g x = -\int u^2 \, dp \ ; \ g z = -\int u^2 p \, dp .$$

Tutto dipende dalla ricerca di

$$\int (1 + p^2)^{\frac{n-1}{2}} \, dp$$

pel quale si può stabilire facilmente una formula di riduzione, mentre l'integrale stesso si calcola subito per $n = 1, 2, 3$. Così, per $n = 1$, v risulta funzione razionale di sen α e cos α e tutte le quadrature restanti possono effettuarsi elementarmente. (*)

(*) Anche questo problema, nel caso della resistenza proporzionale a v o a v^2, è stato trattato da NEWTON, lib. cit., Lib. 2°. GIOV. BERNOULLI [Acta Eruditorum Lips., 1719, pag. 216] considerò il caso di $R = v^n$. La trattazione più completa è dovuta a d'ALEMBERT [*Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* (1744), pag. 359], il quale diè quattro forme diverse di R (e tra queste $a + b\,v^n$) in cui la integrazione della (10) si può ridurre alle quadrature. Il caso di $a + b\,v^n$ fu ancora trattato da LEGENDRE [Mém. de l'Ac. de Berlin (1782), pag. 59] e da JACOBI [Journal für r. und angew. Mathematik, **24**, pp. 1-27 (1842); Gesamm. Werke, **4**, p. 286]. Recentemente SIACCI fece conoscere altre 14 leggi di resistenza, per le quali il problema è parimenti riducibile alle quadrature [Comptes rend., **132**, p. 1175 (1901); **133**, pag. 381 (1901); Rivista d'Artiglieria e Genio, **3**, p. 5; **4**, p. 5 (1901)].

Per la discussione completa del problema e le esperienze sulle varie resistenze occorre confrontare i trattati di Balistica. Tra le più importanti esperienze citeremo quelle inglesi di BASHFORTH dal 1865 al 1880; e quello di MAYEVSKI (1872). Per basse ed altissime velocità la resistenza varia all'incirca come v^2; ma per velocità tra 280 e 415 m. al secondo, può variare come il cubo o come la sesta potenza.

Per la integrazione grafica della (10) relativa a qualunque legge di resistenza si veda: PASCAL, *Integrafo per l'equazione differenziale dell'odografo relativo al movimento di un proiettile in un mezzo comunque resistente.* [Rend. Acc. Lincei, (5), **22**, pp. 749-756 (1913)].

Esercizi.

1. In un moto rettilineo la forza è funzione della sola distanza; determinarla in modo che il moto risulti tautocrono.

L'equazione del moto, posto $v = \frac{dz}{dt}$, è

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = v \frac{dv}{dz} = \frac{1}{2} \varphi'(z)$$

avendo rappresentato, col secondo membro, la forza. Se per z_0 è $v = 0$, si ha

$$v^2 = \varphi(z) - \varphi(z_0) = u - u_0 .$$

Quindi posto

$$z = \psi(u); \quad u = u_0 w$$

risulta, per il tempo impiegato a percorrere la distanza z_0,

$$t = \int_0^1 \frac{\sqrt{u_0 w}\, \psi'(u_0 w)}{\sqrt{(1-w)w}}\, dw ;$$

perchè il moto sia tautocrono occorre che t sia indipendente da z_0 e quindi da u_0: e però è necessario e basta che $\sqrt{u_0}\, \psi'(u_0 w)$ sia indipendente da u_0; ossia

$$\sqrt{u_0 w}\, \psi'(u_0 w) = \sqrt{u}\, \psi'(u) = \text{cost.}$$

Integrando risulta

$$z = \psi(u) = 2c\sqrt{u}$$

(coll'ipotesi che $u = 0$ per $z = 0$). In conseguenza

$$u = \varphi(z) = \frac{z^2}{4c^2} = k^2 z^2 ;$$

e la forza $\frac{1}{2}\varphi'(z) = k^2 z$ risulta proporzionale alla distanza; inoltre $t = \frac{1}{k}\frac{\pi}{2}$.

2. Moto rettilineo di un punto attratto da un centro fisso della retta proporzionalmente alla distanza, in un mezzo la cui resistenza è proporzionale alla velocità, oppure al quadrato della velocità (resistenza idraulica).

Si ha, nel primo caso:

$$\frac{d^2 z}{d t^2} + 2 h \frac{d z}{d t} + k^2 z = 0$$

(caso delle lente oscillazioni di un pendolo nell'aria; di un ago magnetico; ecc.); l'equazione è del secondo ordine lineare ed omogenea a coefficienti costanti.

Se $h^2 \geqq k^2$ il moto è aperiodico; nel caso più interessante di $h^2 < k^2$, posto $m^2 = k^2 - h^2$, l'integrale generale della precedente equazione è

$$x = A e^{-ht} \cos m (t + \tau);$$

ed abbiamo il moto studiato in cinematica, detto delle oscillazioni smorzate (Vol. I, p. 75) e che può essere riguardato come il moto della proiezione di un punto che si muove uniformemente su di una spirale logaritmica, su di una retta passante pel polo.

[Maywell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 1873, § 731].

Se oltre le forze dette il punto è soggetto ad un'altra forza periodica rispetto al tempo, della forma $e \cos p t$;

l'integrale è

$$z = A e^{-ht} \cos m (t + \tau) + c \cos (p t - \varepsilon)$$

essendo c, ε costanti facilmente date mediante quelle note; e quindi l'oscillazione risulta come la sovrapposizione di una oscillazione smorzata e di una ordinaria oscillazione sinusoidale.

Nel caso della resistenza idraulica, posto $v^2 = u = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$, si ha l'equazione lineare:

$$\frac{du}{dz} + 4 h u + 2 k^2 z = 0;$$

il problema si riconduce alle quadrature; ma la discussione è assai più complicata.

È stata fatta da A. Signorini [Atti Ist. Veneto, **73**, pp. 803-858 (1913-1914)].

3. Moto rettilineo di due punti che si attraggono proporzionalmente alla distanza.

Si ottengono subito le due equazioni

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = k^2 (z_1 - z) \; ; \; \frac{d^2 z_1}{d t^2} = k_1^2 (z - z_1) ;$$

posto $k^2 + k_1^2 = \alpha^2$; risulta

$$z - z_1 = A \cos \alpha t + B \operatorname{sen} \alpha t$$
$$k_1^2 z + k^2 z_1 = C t + D .$$

Se i mobili partono dal riposo, e diciamo a, a_1 le distanze iniziali, si ha

$$z - z_1 = (a - a_1) \cos \alpha t \quad , \quad k_1^2 z + k^2 z_1 = k_1^2 a + k^2 a_1 .$$

Dopo un tempo $t = \frac{\pi}{2\alpha}$, i due mobili si incontrano nel punto di ascissa $\frac{k_1^2 a + k^2 a_1}{k^2 + k_1^2}$.

4. Moto rettilineo d'un punto attratto da due centri fissi della retta in ragione inversa del quadrato della distanza.

I due centri, alla distanza a, siano O ed A. Se P è tra O ed A, avremo

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = -\frac{k^2}{z^2} + \frac{k_1^2}{(a-z)^2}.$$

Essendo v la velocità alla distanza z; v_0 la velocità iniziale alla distanza z_0 da O, poichè il primo membro equivale a $v\frac{dv}{dz}$, si ha integrando:

$$v^2 = v_0^2 + 2k^2\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right) + 2k_1^2\left(\frac{1}{a-z} - \frac{1}{a-z_0}\right).$$

Vediamo se v può annullarsi, discutendo (col metodo di Rolle) l'equazione $v = 0$. Eguagliando a zero la semiderivata di v^2 (che è l'espressione della forza) si ha una equazione di primo grado che ha per radice

$$z_1 = \frac{ak}{k+k_1}\ ; \quad a - z_1 = \frac{ak_1}{k+k_1},$$

e che corrisponde ad una posizione P_1 di equilibrio (instabile). Inoltre se z (mantenendosi positivo) tende allo zero; oppure mantenendosi minore di a, tende ad a, v^2 tende a $+\infty$. Se quindi nel punto z_1 il valore di v^2 è positivo cioè

$$(\alpha) \qquad v_0^2 - 2\left(\frac{k^2}{z_0} + \frac{k_1^2}{a - z_0}\right) + \frac{2}{a}(k + k_1)^2 > 0,$$

l'equazione non ha radici reali comprese tra o ed a. Il mobile, lanciato verso P_1, supera questa posizione e cade in A.

Se l'espressione precedente è negativa, l'equazione ha due radici reali; una compresa tra O e P_1, l'altra tra P_1 ed A. La prima può cadere tra O e P_0 oppure tra P_0 e P_1; in questo secondo caso il mobile non raggiunge P_1.

Se finalmente il primo membro di (α) è nullo, risulta

$$v^2 = \frac{2\,(k + k_1)^2\,(z - z_1)^2}{a\,z\,(a - z)}$$

il mobile giunge in P_1 con velocità nulla, ma dopo un tempo infinito.

[Saint-Germain, l. c., pag. 194].

5. Provare che la determinazione del moto di un grave in un mezzo la cui resistenza è $g\,(a + b \log v)$ si riconduce alle quadrature.

L'equazione (10), posto $u = \log v$, diventa

$$\cos\alpha \frac{du}{d\alpha} - b\,u = a + \operatorname{sen}\alpha,$$

lineare; onde ecc.

6. Una forza è parallela ad una direzione fissa (asse z) ed ha l'intensità eguale a

$$\mu\,(a\,x + b\,y + c\,z + d)^{-3}, \text{o}, \ \mu\,(a\,x^2 + b\,x + c)^{-\frac{3}{2}}$$

Trovare la traiettoria.

La traiettoria è piana; il moto secondo x è uniforme; e però

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \; ; \; \frac{d^2 z}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2 z}{dx^2} \, .$$

L'equazione differenziale della traiettoria, nel piano $z\,x$, è

$$\alpha^2 \frac{d^2 z}{dx^2} = \mu \, (a\,x + c\,z + d)^{-3} \, .$$

Posto $u = a\,x + c\,z + d$ si ha

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \mu_1 \, u^{-3}$$

ed integrando

$$x + c_2 = \frac{1}{c_1} \sqrt{c_1 \, (a\,x + c\,z + d)^2 - \mu_1}$$

che rappresenta una conica.

Nell'altro caso si deve integrare la

$$\alpha^2 \frac{d^2 z}{dx^2} = \mu \, (a\,x^2 + b\,x + c)^{-\frac{3}{2}} \, ,$$

donde

$$\alpha^2 \frac{dz}{dx} = \frac{2\,\mu}{4\,a\,c - b^2} \frac{2\,a\,x + b}{(a\,x^2 + b\,x + c)^{1/2}} + c_1$$

ed infine

$$\alpha^2 z = \frac{2\,\mu}{4\,a\,c - b^2} \sqrt{a\,x^2 + b\,x + c} + c_1\,x + c_2$$

che pure rappresenta una conica.

7. Moto di un punto soggetto ad una forza normale ad una retta fissa e inversamente proporzionale al quadrato della distanza dalla retta.

Se la retta è l'asse z, il moto secondo z è uniforme e sul piano xy si riduce ad un moto centrale già studiato in cinematica (Vol. I, pag. 66).

Se la velocità iniziale è parallela a z il moto avviene in un piano, per es., xz; quindi

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = - \frac{k^2}{x^2} \; ; \; \frac{d^2 z}{d t^2} = 0 \, ,$$

e di qui si ha per l'equazione differenziale della traiettoria

$$\frac{d x}{d z} = \frac{k}{c \sqrt{x_0}} \sqrt{\frac{x - x_0}{x}} \; ; \text{ ecc.}$$

8. Un grave è soggetto ad una forza tangenziale in modo che la velocità risulta costante. Studiare il moto.

Procedendo come al § 9, si ha

$$R + g \operatorname{sen} \alpha = 0 \; , \; v \frac{d \alpha}{d t} = - g \cos \alpha \; , \; v = a;$$

quindi

$$\frac{d \alpha}{d x} = - \frac{g}{a^2} \; , \; \alpha = \alpha_0 - \frac{g x}{a^2} \; ;$$

$$\frac{d z}{d x} = \operatorname{tang} \left(\alpha_0 - \frac{g x}{a^2} \right) ; \; z = \frac{a^2}{g} \log \frac{\cos \left(\alpha_0 - \dfrac{g x}{a^2} \right)}{\cos \alpha_0}$$

se per $x = 0$ si ha pure $z = 0$.

La z cresce col crescere di x fino a $x = \frac{a^2 \alpha_0}{g}$, poi decresce sempre e per $x = \frac{a^2}{g}\left(\alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right)$ diventa infinita negativa. Per $x = \frac{a^2 \alpha_0}{g} \pm x_1$, z assume valori eguali e si annulla per $x = \frac{2\,a^2}{g}\,\alpha_0$.

9. Paragonare le equazioni dell'equilibrio di un filo, con quelle del moto di un punto libero.

Scriviamo la (1) in questo modo

$$\frac{\mathbf{F}}{m\,v} = \frac{d\,(v\,\mathbf{t})}{d\,s};$$

confrontata colla (6), Vol. I, pag. 297 ci dice che la traiettoria di un mobile soggetto alla forza $\mathbf{F}$ e la curva di equilibrio di un filo soggetto alla forza $-\frac{1}{m\,v}\mathbf{F}$ sono le stesse: velocità e tensione si corrispondono; oppure la curva di eqilibrio di un filo soggetto alla forza $\mathbf{F}$ e la traiettoria di un mobile soggetto alla forza $-m\,\mathbf{F}\,\tau$ sono le stesse. Così un punto soggetto ad una forza verticale e proporzionale alla velocità descrive una catenaria.