CAPITOLO II.

PROBLEMI PARTICOLARI SUL MOTO DI UN PUNTO.

§ 1. **Moto di un punto vincolato.** — Supponiamo che un punto P di massa m, soggetto ad una forza di vettore $\mathbf{F}$, si muova su di una superficie o curva levigata fissa o mobile. Introducendo la reazione incognita R della superficie o curva, diretta secondo il vettore $\mathbf{n}$ normale alla superficie o curva, coll'applicazione della seconda e terza legge di NEWTON, possiamo scrivere che

$$(1) \qquad m P'' = \mathbf{F} + R\,\mathbf{n}$$

e questa è l'equazione del moto del punto vincolato.

Se l'equazione della superficie, riferita ad una terna fondamentale, è

$$f(x, y, z, t) = 0 ,$$

da (1) si deducono le equazioni cartesiane del moto, nella forma

$$(2)\quad m\frac{d^2 x}{d t^2}=X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x}\,;\quad m\frac{d^2 y}{d t^2}=Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y}\,;$$
$$m\frac{d^2 z}{d t^2}=Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}.$$

L'integrazione di questo sistema, dopo aver eliminato λ, che è proporzionale alla grandezza della reazione, dipende da quella di un'equazione differenziale del quarto ordine. Si introducono quindi quattro costanti arbitrarie, unicamente determinate dalle condizioni iniziali.

Invece per una curva definita dalle due equazioni

$$f_1(x, y, z, t)=0\ ,\ f_2(x, y, z, t)=0\,,$$

riflettendo che il vettore **n**, diretto secondo una normale alla curva, è una combinazione lineare dei due vettori normali alle due superficie $f_1=0$, e $f_2=0$, si ottengono le equazioni cartesiane nella forma

$$(3)\quad m\frac{d^2 x}{d t^2}=X+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}\,;\ \text{ecc.}$$

L'integrazione di questo sistema dipende da quella di una equazione differenziale di secondo ordine.

Possiamo trovare agevolmente le equazioni intrinseche del movimento; e supponiamo che la superficie o la curva siano fisse. Allora **n** risulta normale alla direzione del moto; quindi moltiplicando la (1) scalarmente per **t**, avremo

$$(4) \qquad m \frac{dv}{dt} = \mathbf{F} \times \mathbf{t} .$$

Nel caso poi del moto su di una curva fissa, a questa se ne possono aggiungere altre due, moltiplicando scalarmente per $\mathbf{n}_1$ e **b**, vettori unitari paralleli alla normale principale e alla binormale della curva; si ha

$$(5) \qquad \begin{aligned} m \frac{v^2}{\rho} &= \mathbf{F} \times \mathbf{n}_1 + R\,\mathbf{n} \times \mathbf{n}_1 ; \\ 0 &= \mathbf{F} \times \mathbf{b} + R\,\mathbf{n} \times \mathbf{b} ; \end{aligned}$$

e queste colle (4) costituiscono le *equazioni intrinseche del moto.*

Riguardo alla integrazione dei sistemi (2) e (3) possiamo notare un caso particolare notevolissimo in cui può essere subito assegnato un integrale primo delle equazioni del moto.

Il punto sia libero (in tal caso supporremo nella (1) nulla la reazione) o sia mobile su di una superficie (o curva) fissa; e la forza che lo sollecita sia tale che

$$(6) \qquad \mathbf{F} \times dP = -\,d\Pi ,$$

Π essendo una funzione del solo punto mobile.

Il primo membro di (6) esprime, come vedremo, il *lavoro elementare della forza*; la funzione Π dicesi *energia potenziale* ed è definita (a meno di una inessenziale costante additiva) dal fatto che il *suo decremento esprime il lavoro elementare della forza.* Confrontando con quanto fu detto nel Vol. I, pag. 274 si può dire anche che la forza ammette il potenziale $-\Pi$. Allora la (4) ci dà

$$m\frac{dv}{dt} = m\,v\frac{dv}{ds} = -\frac{d\Pi}{ds}$$

e quindi integrando

$$m\,v^2 + 2\,\Pi = h\,, \tag{7}$$

che è un integrale primo delle equazioni del moto, detto (ne vedremo la ragione) *integrale delle forze vive* o *della conservazione dell'energia.*

Quando le circostanze suddette si presentano nel moto di un punto su di una curva fissa, l'integrale (7) basta, colle condizioni iniziali, per la determinazione del moto. Infatti la posizione del punto sulla curva (sistema con un sol grado di libertà) e la sua velocità sono funzioni di un unico paramento q, per es. l'arco o la z del punto, e della derivata di questo parametro rispetto al tempo; la (7) si trasforma in una equazione differenziale di primo ordine che s'integra con una quadratura.

Nel caso di un punto pesante, scegliendo l'asse z verticale e positivo in alto si deduce $\Pi = m g z$; e quindi il problema è riducibile alle quadrature.

Nel moto di un punto su di una superficie fissa e soggetto a forza nulla o normale alla superficie, dalla (4) risulta $v =$ cost.; il moto è uniforme. Di più dalla (1) si deduce che l'accelerazione è parallela alla normale alla superficie; cioè il piano osculatore della traiettoria è normale alla superficie e perciò il punto descrive con moto uniforme una *geodetica* della superficie. (*)

Possiamo ancora osservare che se nel moto di un punto libero la forza incontra un asse fisso, per es. l'asse x, procedendo come a pag. 305 del Vol. I, risulterà l'integrale

$$m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = c, \tag{8}$$

che è l'integrale delle aree nel piano $y\,z$. Questo integrale avrà pur luogo nel moto di un punto su di una superficie, se questa è di rotazione intorno l'asse x, ferma restando l'ipotesi fatta sulle forze.

Ciò premesso passeremo a sviluppare una serie di problemi assai importanti sul moto di un punto libero o obbligato a restare su di una superficie o curva levigata.

(*) EULER, *Mechanica;* **2**, Cap. I, Prop. 7 e 8: Cap. 4°.

§ 2. **Moto relativo di due punti che si attraggono con una forza proporzionale alle masse e funzione della distanza.** — Il punto P di massa m è attratto da O (di massa *uno*) con una forza d'intensità $m f(r)$; però l'accelerazione assoluta di P, diretta da P verso O, è eguale ad $f(r)$. Riferiamo il moto di P rispetto O ad una terna di assi ortogonali di centro O e che, mantenendosi parallela a se stessa, segue, con moto progressivo il moto di O. L'accelerazione di O (di strascinamento) è eguale alla forza con cui O è attratto da P, divisa per la massa di O; ha dunque l'intensità $m f(r)$ ed è diretta da O verso P. L'accelerazione complementare è nulla: e però l'accelerazione relativa di P ha per intensità $(m + 1) f(r)$; il problema proposto adunque si riduce a quello di un punto P, di massa *uno*, attratto da O (riguardato come fisso) con una forza d'intensità $\mu f(r)$, in cui $\mu = 1 + m$.

Dalla cinematica sappiamo già che la traiettoria relativa è contenuta in un piano passante per O; che l'area descritta dal raggio vettore a partire dalla sua posizione iniziale cresce proporzionalmente al tempo; e che se O è il polo delle coordinate polari r e θ, si ha l'integrale delle aree

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = c, \tag{9}$$

in cui la costante c esprime il doppio dell'area descritta dal raggio in un secondo.

Un secondo integrale è quello delle forze vive; poichè

$$-d\,\Pi = \mathbf{F} \times d\,P = -\mu f(r) \frac{P-O}{r} \times d\,P$$
$$= -\mu f(r)\,d\,r$$

e quindi

$$\Pi(r) = \mu \int f(r)\,d\,r\,; \tag{10}$$

esso ci dà

$$v^2 + 2\,\Pi(r) = h\,. \tag{11}$$

I due integrali (9) e (11) bastano a ricondurre il problema alle quadrature.

Infatti ricordando le espressioni delle componenti radiale e normale della velocità (Vol. I, pag. 59) la (11) si scrive

$$\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\,\theta}{d\,t}\right)^2 + 2\,\Pi(r) = h\,;$$

si sono ottenute due equazioni differenziali di primo ordine; ricavando $\dfrac{d\,\theta}{d\,t}$ dalla prima e sostituendo nella seconda, otteniamo subito

$$\frac{d\,r}{d\,t} = \pm \sqrt{\psi(r)} \tag{12}$$

in cui

$$\psi(r) = h - 2\,\Pi(r) - \frac{c^2}{r^2}\,. \tag{13}$$

Di qui, senz'altro,

$$(14)\quad dt = \pm \frac{dr}{\sqrt{\psi(r)}}\ ; \quad d\theta = \pm \frac{c\,dr}{r^2\sqrt{\psi(r)}}\ ;$$

e quindi con due quadrature (che introducono altre due costanti, oltre h e c) otterremo una relazione tra t ed r ed un'altra tra θ e r che è poi la equazione della traiettoria relativa.

Le quattro costanti si determinano mediante le condizioni iniziali.

Per decidere del segno da tenere avanti al radicale, osserviamo che, essendo data la velocità iniziale, sarà determinato il segno di r', velocità radiale, per $t = 0$; e però è determinato il segno del secondo membro di (12) per $t = 0$, che conserveremo fino a raggiungere quel valore di r (se esiste ed è reale) che annulla $\psi(r)$; dopo questo valore, si terrà il segno contrario e così via.

Se poi fosse $\psi(r_0) = 0$, cioè la velocità iniziale normale al raggio vettore, da (12) si ha $r'_0 = 0$; il criterio precedente non è applicabile e dobbiamo valerci del valore di

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\mu f(r) + \frac{c^2}{r^3}\ ;$$

se esso, per $t = 0$, è positivo, r_0 è un minimo di r; quindi r cresce col crescere di t e nella (12) terremo il segno positivo fino a che $\psi(r)$ si annulla nuovamente; se invece è negativo, dovremo tenere il segno negativo. Finalmente se r' è nullo, per $t = 0$, si vede subito che tutte le derivate di r sono nulle, sempre per $t = 0$; quindi r è costante ed abbiamo un moto uniforme su di un cerchio.

I punti in cui r è normale alla traiettoria e quindi r è massimo o minimo, diconsi *apsidi;* e la retta che congiunge O con uno di questi punti dicesi *linea apsidale.* La traiettoria è simmetrica rispetto ad ogni linea apsidale. Infatti a partire da un apside A, cui corrisponde il raggio vettore a, da una parte e dall'altra consideriamo due angoli eguali a θ e limitati dal raggio vettore comune a e dagli altri due r_1, r_2 per modo però che entro questi limiti sia $\psi(r) \neq 0$; si ha, dalla seconda delle (14)

$$\theta = \pm c \int_a^{r_1} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\psi(r)}} \; ; \; \theta = \pm c \int_a^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\psi(r)}} \; ;$$

quindi

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\psi(r)}} = 0$$

ossia $r_1 = r_2$. (*)

(*) Una minuta discussione delle traiettorie trovasi in BOLTZMANN, *Vorlesungen über die Prinzipe der Mechanik*, Leipzig, 1893, **I**, pag. 78. Si può vedere subito che se

Facciamo una applicazione delle formule precedenti al caso in cui la forza varia in ragione inversa del quadrato della distanza. Avremo successivamente

$$f(r) = \frac{1}{r^2}\ ;\ \Pi = -\frac{\mu}{r}\ ;\ v^2 = \frac{2\,\mu}{r} + h$$

$$\psi(r) = h + \frac{2\,\mu}{r} - \frac{c^2}{r^2} = h + \frac{\mu^2}{c^2} - \left(\frac{c}{r} - \frac{\mu}{c}\right)^2 = \left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2.$$

La quantità $h + \frac{\mu^2}{c^2}$, qualunque siano le condizioni iniziali, è positiva; sicchè posto

$$\alpha^2 = h + \frac{\mu^2}{c^2}\ ;\ u = \frac{c}{r} - \frac{\mu}{c},$$

la seconda delle (14) ci dà

$$d\,\theta = \pm\,\frac{d\,u}{\sqrt{\alpha^2 - u^2}},$$

e di qui integrando

$$u = \alpha \cos(\theta - \theta_0);$$

---

la forza varia come r^n, per $n = 1, -2, -3$ le integrazioni si effettuano colle funzioni circolari; la traiettoria è una conica o una spirale di COTES; per $n = 5, 3, 0, -4, -5, -7$ prendendo come variabile $u = r^{-1}$, oppure, u^2, le integrazioni si effettuano colle funzioni ellittiche. Cfr. WHITTAKER, *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and rigid Bodies*, Cambridge, 1904, pag. 80.

quindi

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \theta_0)}$$

dove

$$p = \frac{c^2}{\mu} \; ; \; e^2 = 1 + \frac{h\, c^2}{\mu^2} .$$

Dunque la traiettoria è una conica di cui O è un fuoco, p il parametro, e l'eccentricità: è dunque una iperbole, parabola od ellissi secondo che $h \gtreqless 0$. (*)

(*) Bertrand ha proposto il problema di assegnare tutte le forze, che fanno descrivere a un mobile, qualunque sieno le condizioni iniziali, una conica. [Comp. rendus, **84**, p. 671, 731 (1877)]. Con ragionamento geometrico egli ha dimostrato che la forza deve intanto passare per un punto fisso o essere parallela a una direzione fissa. Così semplificato, il problema fu risoluto da Darboux (Ibid., pag. 270, 936; Note XII à la *Mécanique de* Despeyroux) e da Halphen (Ibid. p. 939), il quale, nella ipotesi che la forza dipenda dalle coordinate del suo punto d'applicazione, ha dimostrato analiticamente la proprietà del Bertrand.

Il caso generale è stato considerato da Stephanos, *Sur les forces donnant lieu à des trajectoires coniques* [Journ. für r. u. ang. Mathematik, **131**, pag. 136 (1906)] e da Hazzidakis [Ibid., **133**, pag. 68 (1908)].

Vedi esempio 5 di questo capitolo; e l'esercizio 6 del cap. precedente.

Se il raggio vettore iniziale r_0 è normale alla traiettoria e diciamo v_0 la velocità, ω_0 la velocità angolare iniziali, si ha

$$v_0 = r_0\,\omega_0\ ;\ c = r^2_0\,\omega_0\ ;\ h = r^2_0\,\omega^2_0 - \frac{2\,\mu}{r_0},$$

e però il valore assoluto di e risulta eguale a $\frac{r_0^3\,\omega_0^2}{\mu} - 1$; si può quindi dire che la traiettoria è una iperbole, parabola od ellissi secondo che

$$r_0^3\,\omega_0^2 \gtreqless 2\,\mu\,.$$

Se poi la forza fosse ripulsiva, dovremo cambiare nelle formule precedenti μ in $-\mu$; si vede subito che $h > 0$ e quindi la traiettoria è sempre una iperbole.

Diciamo a il semiasse maggiore o trasverso della conica: sarà

$$a = \pm\frac{p}{1 - e^2} = \mp\frac{\mu}{h}$$

secondo si tratta di una ellissi o di una iperbole. Quindi si ha la semplice espressione

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} \pm \frac{1}{a}\right);$$

mentre per la parabola, essendo $h = 0$, risulta

$$v^2 = \frac{2\,\mu}{r}.$$

Resta ora ad esprimere r e θ in funzione di t e perciò limitiamoci al caso del moto ellittico.

Sia A (Fig. 3) un estremo dell'asse maggiore, F il fuoco (centro di attrazione); descrivasi un cerchio di raggio $O\,A$; da P si conduca la normale all'asse e che incontri in Q il cerchio. L'angolo $Q\,\widehat{O}\,A = u$ dicesi *anomalia eccentrica*.

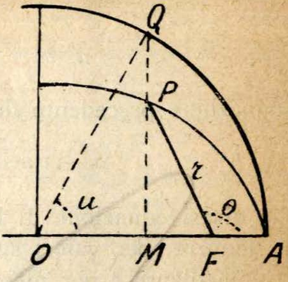

Fig. 3.

Se $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ sono due vettori unitari paralleli agli assi, e $\mathbf{K}$ l'altro vettore che coi primi forma la solita terna, si ha

$$(P - F) \wedge P' \times \mathbf{k} = c\,;$$

inoltre è

$$P - F = (a \cos u - a\,c)\,\mathbf{i} + b \operatorname{sen} u\,\mathbf{j}\,;$$

e quindi con semplice calcolo risulta

$$c = a\,b\,(1 \ e \cos u)\,u'\,.$$

Integrando e supponendo che sia $u = o$ per $t = 0$ si ha

$$\frac{c}{a\,b}\,t = u - e \operatorname{sen} u\,.$$

Ricordando che il parametro è $p = b^2 : a$, poniamo

$$n^2 = \frac{c^2}{a^2\, b^2} = \frac{\mu\, p}{a^2\, b^2} = \frac{\mu}{a^3};$$

l'equazione precedente diventa

$$u - e \operatorname{sen} u = n\, t$$

che dicesi equazione di KEPLER. Essa permette di dedurre, per valori sufficientemente piccoli di e, u mediante t per mezzo di una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di e. Si può quindi riguardare nota l'anomalia eccentrica in funzione del tempo. Dopo ciò se x è l'ascissa $O\,M$ di P, è noto che

$$r = a - e\, x = a\,(1 - e \cos u);$$

inoltre

$$\cos\theta = \frac{x - a\,e}{a - e\,x}\;;\;\; 1 \mp \cos\theta = \frac{(1 \pm e)\;\;(a \mp x)}{r}$$

donde, per divisione,

$$\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} \operatorname{tang} \frac{u}{2},$$

quindi potremo ritenere, espressi per t, il raggio vettore e l'anomalia θ. (*)

§ 3. **Moto dei pianeti intorno al sole.** — Le tre leggi che regolano il moto dei pianeti, supposti ridotti ai loro centri di massa, intorno al sole, e che prendono nome dal loro scopritore KEPLER, sono:

1° *La traiettoria di un pianeta è una ellissi di cui il sole occupa uno dei fuochi;*

2° *Le aree descritte dal raggio vettore crescono proporzionalmente al tempo;* (**)

3° *I quadrati dei tempi delle rivoluzioni periodiche stanno fra loro come i cubi dei grandi assi.* (***)

Queste leggi permisero a NEWTON di assegnare la forza di attrazione tra il sole e i pianeti. (****)

In virtù della seconda legge (delle aree) la forza deve passare pel sole; di più la sua componente normale è diretta verso il centro di curvatura della ellissi, interno alla ellissi; dunque la forza è diretta verso il sole.

(*) Per la ricca bibliografia sulla equazione di KEPLER, vedasi: Bulettin astronomique, 1900.

(**) J. KEPLER, *Astronomia nova, seu physica cœlestis tradita commentariis de motibus stellae Martiis*, etc., Praga, 1609.

(***) J. KEPLER, *Harmonice mundi*, etc. Lintz, 1619.

(****) NEWTON, l. c., pag. 362.

Se p è il parametro di una delle orbite, si trova subito (Vol. I, pag. 64, formula (11)) che la grandezza della accelerazione è espressa da $\frac{c^2}{p} \frac{1}{r}$, essendo c la costante delle aree; se quindi m è la massa di un pianeta, la grandezza della forza è $\frac{m c^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}$.

Sia T la durata della rivoluzione periodica: siccome c è il doppio dell'area descritta dal raggio vettore in una unità di tempo, si ha

$$c T = 2 \pi a b$$

quindi, ricordando il valore di p, la grandezza della forza viene espressa da

$$4 \pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{m}{r^2};$$

in cui il fattore $\frac{a^3}{T^2}$, in virtù della terza legge, è costante per tutti i pianeti.

Ma pel principio dell'azione eguale e contraria alla reazione, questa è pure la intensità della forza con cui il pianeta attrae il sole: quindi detta f una costante assoluta, M la massa del sole, l'espressione della forza è

$$f \cdot \frac{M m}{r^2};$$

cioè varia in ragione diretta del prodotto delle masse e in ragione inversa del quadrato della distanza.

L'estensione di questa legge a due elementi materiali qualunque, a distanza finita tra loro, costituisce la *legge universale di attrazione* o *gravitazione*. (*)

L'accelerazione d'un pianeta alla distanza a, ha per grandezza

$$w = \frac{4\,\pi^2\,a}{T^2}\,.$$

Nel caso del moto, supposto circolare, della luna intorno alla terra avremo: $a = 60$ raggi terrestri circa; $T = 27$ giorni. Quindi

$$2\,\pi\,a = 60\,.\,40\,.\,10^8\ \text{cm.}\ ;\quad T = 27\,.\,24\,.\,60^2\ \text{sec.}$$

e perciò

$$w = \frac{25\,.\,12}{252}\cdot\frac{10^4}{60^2} = \frac{997}{60^2}\,(\text{cm., sec.}^{-2})\,.$$

Partendo invece dal valore dell'accelerazione g alla superficie della terra, per l'accelerazione ad una distanza eguale a quella della luna, supposto che vari in ragione inversa del quadrato della distanza, si trova

$$w = \frac{981}{60^2}\,(\text{cm., sec}^{-2})\,;$$

che è in buon accordo col precedente valore.

(*) NEWTON, l. c., pag. 369. Prop. VII,

La costante f, dipendente dalla scelta delle unità fondamentali, dicesi *costante di gravitazione* o di GAUSS; le sue dimensioni sono quelle di una forza, divise per m^2 ed l^{-2}; onde

$$[f] = [l^3, m^{-1}, t^{-2}];$$

essa esprime la forza che si esercita tra due masse unitarie all'unità di distanza.

Per averne un valore approssimato, nel sistema di misure fondamentali, si supponga M eguale alla massa della terra; la forza si riduce al peso di m cioè $m g$. Fatto $r = a$ (raggio terra) risulta

$$g = \frac{4}{3} f \pi a \rho .$$

Ora: ρ (densità media della terra) $= 5,67$; $2 \pi a = 4 . 10^7$ metri; quindi

$$f = \frac{3}{2} . \frac{9,81}{2 \pi a \rho} = \frac{29,43}{8 . 10^7 . 5,67} = \frac{1}{1,543 . 10^7}$$

ossia

$$f = 6,67 . 10^{-8} (\mathrm{cm}^3, \mathrm{gr}^{-1}, \mathrm{sec}^{-2});$$

si ha quindi un valore estremamente piccolo. Più esattamente si è trovato

$$f = 6,6576 \ (*)$$

(*) BOYS, *On the Newtonian Constant of Gravitation.* Philos. Trans., London, **186**, Part. I, (1895).

§ 4. **Pendolo semplice oscillante nel vuoto.** — Un punto pesante è collegato mediante una sottile asta rigida o un filo, di cui si trascura il peso, ad un punto fisso; spostato dalla posizione verticale, il mobile venga lanciato con una velocità v_0 contenuta in un piano verticale.

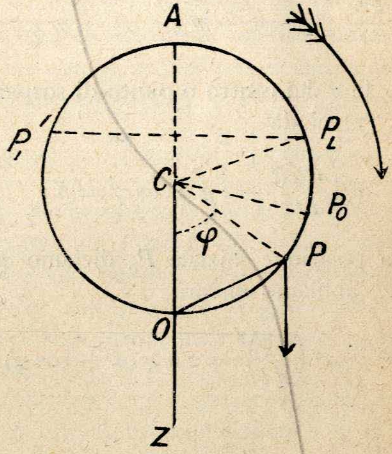

Fig. 4.

Il moto avverrà sempre in questo piano. Un sistema siffatto, quando ancora si prescinda dalla resistenza dell'aria, costituisce un *pendolo semplice* ed il problema del moto è equivalente a quello del moto di un punto pesante su di un cerchio verticale.

Sia a il raggio (lunghezza del pendolo); φ l'angolo che la direzione del raggio forma colla verticale passante pel centro e positiva verso il basso. Come già si è osservato, § 1, l'integrale delle forze vive (7) basta per la determinazione del moto; si osservi infatti che

$$v = a\frac{d\varphi}{dt} \;;\; \Pi = -mgz = -mga\cos\varphi$$

(contando le z dal centro o punto di sospensione); quindi la (7) ci dà

$$a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - 2ga\cos\varphi = h\,;$$

e se nella posizione iniziale P_0 diciamo φ_0 il valore di φ, abbiamo ancora

$$(15)\qquad v^2 = a^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2ag(\alpha + \cos\varphi)$$

dove

$$\alpha = \frac{v_0^{\,2}}{2ag} - \cos\varphi_0\,.$$

La (15) è una equazione differenziale di primo ordine che, con una quadratura, determina φ in funzione di t.

Diciamo R la grandezza della reazione normale, valutata positiva verso il centro del cerchio; la

(5) ci dà subito, per la (15),

$$R = m \frac{v^2}{a} + m g \cos \varphi = m g (2 \alpha + 3 \cos \varphi).$$

Se si suppone il punto mobile entro un tubo circolare infinitamente sottile, esso eserciterà una pressione sulla parete esterna o interna secondo che R è positiva o negativa; se invece è collegato col centro mediante un filo sottile, questo resterà teso se R è positivo, e nei punti in cui $R = 0$, tali cioè che

$$\cos \varphi = - \frac{2}{3} \alpha = \frac{1}{3} \left(2 \cos \varphi_0 - \frac{v_0^2}{a g} \right)$$

il punto abbandonerà il cerchio descrivendo una solita parabola. Perchè ciò abbia luogo occorre che il secondo membro dell'equazione precedente sia in valor assoluto non maggiore di uno.

Occorre ora distinguere tre casi nella discussione della (15).

1° Sia $|\alpha| > 1$; v non può mai annullarsi; estraendo da ambo i membri di (15) la radice quadrata, dovremo sempre tenere avanti al radicale il segno del valore iniziale di v. Il mobile percorrerà il cerchio sempre nello stesso senso e si ha il caso del moto rivolutivo.

2° Sia $\alpha = 1$; si ha

$$v^2 = a^2 \left(\frac{d \varphi}{d t} \right)^2 = 4 a g \cos^2 \frac{\varphi}{2};$$

per $\varphi = \pi$, v si annulla; e, se la velocità iniziale è diretta da P_0 verso O, il mobile giungerà nel punto A più alto del cerchio con velocità nulla. La espressione di φ mediante t può ottenersi mediante funzioni elementari; basta valersi delle funzioni iperboliche e porre

$$\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{Th} u;$$

si trova subito che $u = \sqrt{\frac{g}{a}}\,(t + \tau)$. Quando φ tende a π, t tende ad infinito; cioè il mobile raggiungerebbe il punto più elevato dopo un tempo infinito. Si ha un caso di *moto asintotico.*

3. Il moto essendo reale non è possibile che $\alpha = -1$; non resta dunque che supporre $|\alpha| < 1$. Determiniamo allora un angolo (reale) φ_1 tale che

$$\alpha = -\cos \varphi_1 = \frac{v_0{}^2}{2\,a\,g} - \cos \varphi_0;$$

φ_1 sarà acuto od ottuso secondo che α è negativo o positivo; e inoltre $\varphi_1 > \varphi_0$.

Se in particolare il punto viene abbandonato senza velocità iniziale, $v_0 = 0$, sarà $\varphi_1 = \varphi_0$. La (15) ci dà

$$a^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\,a\,g\,(\cos\varphi - \cos\varphi_1)$$

$$= 4\,a\,g \left(\operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_1}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}\right);$$

però deve essere

$$-\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_1 .$$

La velocità, nulla per $\varphi = \pm \varphi_1$, assume lo stesso valore per $\pm \varphi$; il moto è quindi oscillatorio tra $-\varphi_1$ e $+\varphi_1$. La durata T di una semioscillazione è il tempo impiegato a percorrere l'arco da φ_1 a zero; cioè

$$T\sqrt{\frac{g}{a}} = \int_0^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_1}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}}} .$$

Colla sostituzione

$$\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{sen} \frac{\varphi_1}{2} . \operatorname{sen} u \quad ; \quad k = \operatorname{sen} \frac{\varphi_1}{2}$$

si ottiene

$$(16) \qquad T\sqrt{\frac{g}{a}} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u}} ;$$

e con ciò T viene espresso mediante l'integrale ellittico completo di prima specie.

Se poi φ_1, e quindi φ, è molto piccolo, per modo che si possano ai seni sostituire gli archi, si ha

$$\operatorname{sen}^2 \frac{\varphi_1}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{4} (\varphi_1{}^2 - \varphi^2)$$

e quindi, approssimativamente,

$$(17) \qquad T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

La (17) è la formula classica delle piccole oscillazioni del pendolo semplice; poichè T risulta indipendente dall'angolo φ_1, massimo scartamento dalla verticale, si conclude l'isocronismo delle piccole oscillazioni. (*)

Più brevemente si può osservare che dalla (15) con una derivazione si deduce

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} + \frac{g}{a} \operatorname{sen} \varphi = 0$$

e quindi, nel caso delle piccole oscillazioni,

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} + \frac{g}{a} \varphi = 0 ;$$

la quale prova che le piccole oscillazioni sono armoniche e quindi isocrone col periodo $\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$.

Finalmente se si vuole il valóre del secondo membro della (16), basterà valersi di uno svi-

(*) GALILEO, *Discorsi*, etc., già citati, pag. 139 e seg. Vedi ancora: *Dialogo sui massimi sistemi.* Ediz. naz., **7**, pag. 256, 475.

luppo in serie: osservando che

$$(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 u)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \sum_1^\infty \frac{1 . 3 . 5 \ldots . (2r - 1)}{2 . 4 . 6 \ldots . \quad 2r .} k^{2r} \operatorname{sen}^{2r} u ,$$

e che la serie può essere integrata termine a termine, risulta facilmente

$$(18) \qquad T\sqrt{\frac{g}{a}}$$

$$= \pi \left\{ 1 + \sum_1^\infty \left(\frac{1 . 3 . 5 \ldots . (2r - 1)}{2 . 4 . 6 \ldots . \quad 2r} k^r \right)^2 \right\}.$$

Così volendo tener conto dei termini in $\varphi_1{}^2$, si trova

$$T\sqrt{\frac{g}{a}} = \pi \left\{ 1 + \frac{\varphi_1{}^2}{16} \right\}. \text{ (*)}$$

Si può finalmente notare che $2\sqrt{\dfrac{a}{g}}$ rappresenta il tempo che impiega un grave a percorrere qualunque corda uscente da O. Detto K il valore

(*) L'interessante problema del pendolo di lunghezza variabile è stato trattato da LECORNU, *Mém: sur le pendule de longueur variable* [Acta math., **19**, p. 201, (1895)] e da PEANO [Rend. Circ. matem. Palermo, **10**, pag. 36, (1896)].

dell'integrale ellittico completo di 1ª specie, e supposto $\varphi_0 < 90^\circ$, cioè $k^2 \leq \frac{1}{2}$, si vede subito che

$$K \leq \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots \right\}$$
$$= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \right\} < 2;$$

quindi il tempo della caduta di un grave per una corda è sempre maggiore del tempo della caduta per l'arco sotteso, purchè minore di un quadrante. Si ritrovano così i famosi teoremi di GALILEO. (*)

§ 5. **Pendolo cicloidale.** — Si tratta ancor qui del moto di un punto pesante sospeso ad un punto fisso mediante un sottile filo flessibile e che si costringe a percorrere una cicloide contenuta in un piano verticale. Ricordando le proprietà della cicloide e della sua evoluta (Vol. I, pagg. 43 e 44) ecco come può realizzarsi un tal pendolo.

Sia AO (Fig. 5) una mezza cicloide colla tangente in O orizzontale; AQ la sua evoluta; un filo sottilissimo lungo quanto $QO = a$, fisso in Q, porta in O una massa m. Il filo, spostato dalla verticale QO, oscilla in modo che svolgendosi

(*) *Discorsi*, ecc. Giornata 3ª.

su AQ (e l'arco simmetrico) foggiate a guisa di pareti metalliche, il punto O percorre l'arco di cicloide AO ed il suo simmetrico.

Lo studio del moto, che può farsi ancor qui col sussidio della (7), si fa in modo più semplice così.

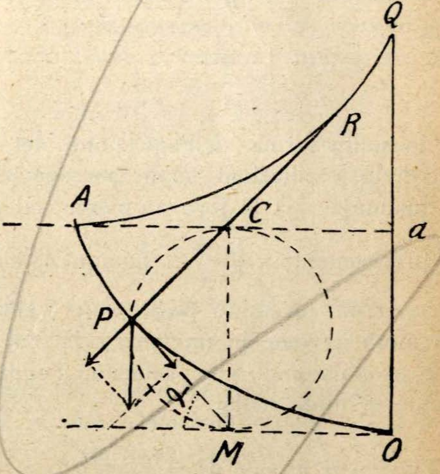

Fig. 5.

Il segmento PR è eguale all'arco AR e siccome $PC = CR$, si conclude che CR è la metà dell'arco AR; così parimente PM è la metà di $PO = s$. La forza che sollecita P, cioè il proprio peso, parallela a QO, può decomporsi in una diretta secondo la normale RP alla cicloide e rappresenta la tensione del filo; in un'altra tangenziale secondo PM; e questa sta all'intero peso mg come $PM : CM$; cioè come $s : a$. Quindi l'accelerazione tangenziale, diretta verso M, è eguale a $\frac{g}{a} s$; e però l'equazione del moto è

$$\frac{d^2 s}{d t^2} + \frac{g}{a} s = 0 ,$$

che ha la solita forma dell'equazione del moto armonico; le oscillazioni sono isocrone intorno ad O, qualunque sia la loro ampiezza ed il periodo è precisamente $\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$. Dunque la cicloide è *tautocrona* per un punto pesante nel vuoto. (*)

Se il moto avviene in un mezzo la cui resistenza è proporzionale alla velocità, l'equazione precedente si muta nella

$$\frac{d^2 s}{d t^2} - h^2 \frac{d s}{d t} + \frac{g}{a} s = 0 ;$$

il moto è ancora tautocrono. (Vol. I, pag. 75). (**)

(*) C. Huyghens, *Orologium oscillatorium*, Paris (1673); Pars II, Prop. XXV; Newton, lib. cit., I, Prop. XXVI, pag. 137.

(**) Newton, lib. cit., II, Prop. XXVI, pag, 275, Si può inversamente dimostrare che la cicloide è la sola curva tautocrona per un punto pesante nel vuoto. Proponiamoci la ricerca di una tale curva; essa deve essere contenuta in un piano verticale colla concavità in alto. Sia O il punto più basso, colla tangente orizzontale, s l'arco contato da O; dal punto P_0, all'altezza z_0, il mobile venga abbandonato senza velocità iniziale. Assumendo l'asse z verticale in alto, la (7) ci dà

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(z_0 - z),$$

ed il tempo impiegato a percorrere l'arco $P_0 O$ è dato

$$t\sqrt{2g} = \int_0^{z_0} \frac{ds}{dz} \frac{dz}{\sqrt{z_0 - z}},$$

pensando s come funzione di z. Posto

$$s = \psi(z), \quad z = z_0 u$$

e procedendo come nell'esercizio I del Cap. I, affinchè il moto sia tautocrono, cioè t indipendente da z_0, occorre che

$$s = \sqrt{8az}$$

a essendo una costante. Con tale valore risulta

$$t\sqrt{2g} = \sqrt{2a} \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{z(z_0 - z)}}$$

$$= \sqrt{2a} \left(\operatorname{arsen} \frac{2z - z}{z_0}\right)_0^{z_0},$$

cioè

$$t = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Se diciamo α l'angolo che la tangente in un punto P della curva forma coll'asse orizzontale, si ha, detto **a** un vettore unitario fisso

$$\frac{dP}{ds} = -e^{i\alpha}\mathbf{a}\,,\; ds = a\cos\alpha\, d\alpha\,,$$

di qui con una semplice integrazione, determinando la costante in modo che per $2\alpha = \pi$ sia $P = O$ e poscia ponendo $\pi - 2\alpha = \varphi$, si trova

$$P - O = a\varphi\mathbf{a} + ia\mathbf{a} - iae^{-i\varphi}\mathbf{a}$$

che rappresenta (Vol. I, pag. 43) una cicloide il cui cerchio generatore ha per raggio a.

§ 6. **Pendolo sferico.** — Trattiamo lo stesso problema del § 4, nella ipotesi che il punto pesante venga lanciato in una direzione qualsiasi, restando su di una sfera col centro nella origine degli assi (punto di sospensione del filo).

L'equazione del moto, se diciamo R la tensione del filo è

$$(19) \qquad m\frac{d^2P}{dt^2} = mg\mathbf{k} - \frac{R}{a}(P - O)\,.$$

Ha luogo il solito integrale (7) che ci dà

$$v^2 = h + 2gz;$$

d'altra parte si deduce pure che

$$\mathbf{k} \times (P - O) \wedge P'' = 0$$

e quindi

$$\mathbf{k} \times (P - O) \wedge P' = c$$

(integrale delle aree nel piano equatoriale xy). Consideriamo la proiezione del punto P su detto piano e siano r e θ le coordinate polari di questa proiezione. I due integrali trovati ci danno dunque

$$r'^2 + r^2\theta'^2 + z'^2 = h + 2gz; r^2\theta' = c;$$

e questi insieme alle due relazioni (equazione della sfera ed equazione derivata)

$$r^2 + z^2 = a^2, rr' + zz' = 0,$$

permettono di ridurre il problema alle quadrature. Eliminando r' e θ' si ha

$$(20) \qquad a\frac{dz}{dt} = \pm\sqrt{f(z)}; \; dt = \pm\frac{a\,dz}{\sqrt{f(z)}},$$

dove

$$(21) \qquad f(z) = (a^2 - z^2)(h + 2gz) - c^2;$$

e poi

$$(22) \qquad d\theta = \frac{c\,dt}{r^2} = \pm \frac{a\,c\,dz}{(a^2 - z^2)\sqrt{f(z)}}.$$

Con due quadrature conosceremo una relazione tra z e t e un'altra tra θ e z; questa, osservando che $\theta = \operatorname{arctang} \frac{y}{x}$, è l'equazione di una superficie; ed insieme colla sfera definisce la traiettoria. La discussione e le quadrature si fanno col sussidio delle funzioni ellittiche. (*)

Possiamo tuttavia accennare a qualche proprietà generale del movimento.

La $f(z)$ assume valori negativi per $z = \pm a$ e non potendo essere sempre negativa, si annullerà per due valori reali α e β di z compresi tra $+a$ e $-a$. La traiettoria è quindi sempre limitata da due paralleli che il mobile alternativamente tocca e raggiunge in tempo finito; infatti, l'integrale che si deduce dalla seconda delle (20), esprimente il tempo, si conserva finito poichè $\sqrt{f(z)}$ diventa infinitesima di ordine $\frac{1}{2}$ per $z = \alpha, \beta$ e inoltre, per questi stessi valori di z,

(*) DURÈGE, *Theorie der ellipt. Funct.* Prag, 1876, pp. 304-330; GREENHILL, *The Appl. of elliptic Funct.*, London 1892, p. 214; WHITTAKER, *A Treatise on the Analytical Dynamics*, Cambridge, 1904, pag. 102.

$z' = 0$ e perciò la velocità essendo diretta secondo i corrispondenti paralleli, la traiettoria risulta loro tangente.

Sia γ la terza radice reale della $f(z) = 0$ e compresa tra $-a$ e $-\infty$; poichè

$$\alpha\beta + \gamma(\alpha + \beta) = -a^2$$

ed il prodotto $\alpha\beta$ non è maggiore, in valor assoluto, di a^2, risulta $\gamma(\alpha + \beta) < 0$ e però $\alpha + \beta > 0$; ossia il parallelo equidistante dai paralleli estremi (limiti della traiettoria) giace dalla parte delle z positive, o, possiamo dire, nell'emisfero sud. Inoltre, secondo che

$$a^2 h - c^2 \gtrless 0$$

α e β sono di segno contrario: per es., α positivo e β negativo, ma in valor assoluto più piccolo di α; oppure sono entrambe positive e $\alpha > \beta$. Nel primo caso la traiettoria taglia l'equatore e la sua proiezione sul piano equatoriale risulterà tangente alle proiezioni dei paralleli estremi e all'equatore; nel secondo caso tale proiezione sarà solamente tangente alle dette proiezioni.

Nel caso in cui $c = 0$, da (22) risulta $\theta =$ cost., il movimento avviene in un piano meridiano e ricadiamo nel caso del pendolo semplice; se $\alpha = \beta$ il punto si muove uniformemente su di un parallelo e in tal caso le quadrature si effettuano con funzioni elementari.

Quanto al segno da tenere innanzi ai radicali, osserviamo che se inizialmente z decresce, terremo il segno —, sino a che z abbia raggiunto il suo valore minimo β, in cui $z' = 0$; dopo ciò z cresce e terremo il segno $+$; sino a che z avrà raggiunto il suo valor massimo α; e così di seguito.

Quanto alla reazione normale, dalla (19) otteniamo

$$m(P-O) \times P'' = m\,\mathrm{g}\,\mathbf{k} \times (P-O) - R\,a\,;$$

derivando due volte la

$$(P-O)^2 = a^2$$

otteniamo, valendoci successivamente dell'integrale delle forze vive,

$$(P-O) \times P' + P'^2 = 0$$

ossia

$$R = \frac{m}{a}(h + 3\,g\,z).$$

Nei punti in cui $R = 0$, il mobile si distacca dalla sfera. Se α e β sono positivi e quindi anche z positivo si ha costantemente $R > 0$; il punto non potrà mai lasciare la sfera.

Assai interessante è il caso in cui il mobile compie delle piccole oscillazioni; supponendo in tal caso z poco differente da a; v_0 molto piccola, per modo che, trascurando v^2_0, si possa ritenere $h = -2ga$, si deduce $R = mg$. Quindi chiamando Q la proiezione di P sul piano equatoriale, dalla (19) si ricava

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{g}{a}(Q - O);$$

cioè Q si muove come se fosse soggetto ad una forza che lo attrae verso O proporzionalmente alla distanza. La traiettoria di Q è quindi una ellissi il cui centro è O e che viene percorsa nel tempo $2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$. Più precisamente si può provare che questa ellissi ruota uniformemente intorno al centro e nello stesso senso in cui il punto si sposta sulla sfera. (*)

Uno dei risultati più notevoli che risultano dalla rappresentazione del moto per funzioni ellittiche nel caso generale, è che le coordinate orizzontali del pendolo sferico possono esprimersi razionalmente, mediante il tempo, con funzioni doppiamente periodiche di 2ª specie; la proiezione della traiettoria sul piano xy non ha flessi

---

(*) Resal, *Traité de Mécanique générale*, Paris, 1873, pp. 180-287; si veda ancora per una elegante verifica sperimentale: Giornale di matem. (3), **5**, pp. 257-266 (1914).

e l'angolo compreso tra un massimo ed un minimo successivi di r è maggiore di 90^0. (*)

§ 7. **Equazioni del moto relativo.** — L'applicazione della seconda legge ci dà

$$m P'_a = \mathbf{F};$$

e pel teorema di Coriolis (Vol. I, pag. 130).

$$(23) \qquad m P''_r = \mathbf{F} - m P''_s - m P''_c;$$

da questa equazione possono ricavarsi tre equazioni di 2^0 ordine rispetto alle coordinate relative del punto mobile; le quali servono per lo studio del moto relativo.

Se $\mathbf{t}$ è un vettore unitario parallelo alla tangente alla traiettoria relativa di P e notiamo che

---

(*) Questo problema, che presenta notevoli analogie con quello del giroscopio (Cap. 5°, § 7, 8), ha una ricca bibliografia. Si possono consultare: LAGRANGE, *Méc. analy.*, **2**, Sect. VIII, pag. 183; PUISEAUX, Jour. de mathém. (1), **7**, p. 517, (1842); TISSOT, Ibid., **17**, p. 88, (1852); DE SPARRE, Bull. Soc. scient. de Bruxelles, 1884-85, p. 49; HERMITE. Journ. für r. und angew. Mathem., **85**, p. 246, e *Sur quelques applications des fonctions ellip.* Paris, 1885. pag. 112; HALPHEN, *Traité des fonct. ellip.*, **2**, pag. 126, CHAILAN, Bull. Soc. mathèm. de France, **17**, (1889).

Si veda il modello costruito da M. SCHILLING.

$P''_c \times \mathbf{t} = 0$, da (23) si deduce

$$m \frac{dv}{dt} = (\mathbf{F} - m P''_s) \times \mathbf{t}. \tag{24}$$

Vediamo alcune applicazioni.

§ 8. **Libera discesa dei gravi nel vuoto, tenuto conto della rotazione della terra.** — Supponiamo di trovarci nell'emisfero boreale alla colatitudine λ; la terna x, y, z mobile e connessa colla terra, supposta sferica, sia così costituita: l'asse z sia la verticale del luogo, positiva verso l'alto; l'asse x tangente al parallelo verso l'Est e l'asse y tangente al meridiano verso il Sud. Nello studio di questi moti relativi si può prescindere dal moto di traslazione della terra, il cui centro, nel tempo assai breve in cui accade il fenomeno della caduta di un grave, può supporsi dotato di un moto rettilineo ed uniforme, percorrendo circa $3 . 10^4$ m. al secondo. Non terremo dunque conto che del moto di rotazione intorno alla linea dei poli riguardata come fissa; il moto di rotazione avendo luogo da Ovest verso Est, la direzione positiva dell'asse di rotazione è quella da Nord verso Sud, conforme alle convenzioni fatte. La grandezza della velocità angolare è

$$\omega = 2\pi : 86400 = 73 . 10^{-6} \text{ circa}$$

e però
$$\omega^2 = 53 \cdot 10^{-10},$$

ossia una quantità assai piccola. Notiamo ancora che
$$P''_c = 2\,\Omega \wedge P'_r;$$

se quindi la velocità relativa si mantiene entro limiti ristretti e piccoli, mod P''_c è dello stesso ordine di ω e si può trascurare in una prima approssimazione e ritenere che
$$m\,P''_r = \mathbf{F} - m\,P''_s.$$

Supposto il grave in riposo relativo, in una regione assai prossima alla terra, la forza che lo sollecita, misurata colla bilancia o dalla tensione di un filo, si riduce al peso, costante e sensibilmente verticale. L'accelerazione è pure costante e la stessa come se il peso non fosse cambiato e la terra non ruotasse; e ciò giustifica quanto fu detto al Cap. I, § 3.

Possiamo ancora osservare che la $m\,P'_s$ nel caso attuale ha per modulo $m\,\omega^2\,r$ [Vol. I, pagina 122, form. (5)], è diretta normalmente e verso l'asse di rotazione; la $-m\,P''_s$ è quindi volta in senso contrario e dicesi *forza centrifuga*. Si passa poi da questa alla $m\,P''_c$ sostituendo all'asse di rotazione, alla velocità angolare, ecc., l'asse di rotazione degli assi mobili (che coincide in questo caso col primo), la velocità relativa, ecc.; di qui il nome di *forza centrifuga composta* dato, da CORIOLIS, alla P''_c. Siccome **F** è la forza dovuta all'attrazione della terra, e in una regione assai prossima a questa si può ritenere costante (vedi Cap. VI, § 2), come P''_s; così risulta costante $\mathbf{F} - m\,P''_s$; ed il peso, che noi misuriamo

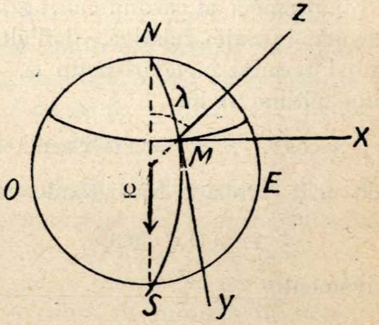

Fig. 6.

colla bilancia, è dunque la risultante dell'attrazione della terra e della forza centrifuga.

Spingiamo ora più oltre l'approssimazione. Le componenti di Ω (Fig. 6) secondo gli assi mobili sono: o, ω sen λ, $-\omega \cos\lambda$; e però quelle di P''_c sono

$$2\,\omega\,(z' \operatorname{sen}\lambda + y' \cos\lambda)\,,\ -2\,\omega\,x' \cos\lambda\,,$$
$$-2\,\omega\,x' \operatorname{sen}\lambda$$

e però dalla (24) dedurremo

$$(25)\quad \begin{cases} x'' = -2\,\omega\,(y'\cos\lambda + z'\,\mathrm{sen}\,\lambda)\,, \\ y'' = 2\,\omega\,x'\cos\lambda \\ z'' = -g + 2\,\omega\,x'\,\mathrm{sen}\,\lambda \end{cases}$$

e queste equazioni potrebbero integrarsi rigorosamente qualunque sieno le condizioni iniziali di moto. Limitiamoci al caso in cui il grave cade, senza velocità iniziale relativa, dall'altezza a e trascuriamo i termini in ω^2 rispetto ω.

Dalle due ultime si ha

$$y' = 2\,\omega\,x\cos\lambda \quad , \quad z' = 2\,\omega\,x\,\mathrm{sen}\,\lambda - g\,t\,;$$

sostituendo nella prima e tràscurando ω^2 risulta

$$x'' = 2\,\omega\,g\,t\,\mathrm{sen}\,\lambda,$$

e successivamente

$$x' = \omega\,g\,t^2\,\mathrm{sen}\,\lambda \;\; ; \;\; x = \frac{1}{3}\,\omega\,g\,t^3\,\mathrm{sen}\,\lambda\,.$$

Poscia

$$y' = 0 \;\; ; \;\; z' = -g\,t$$

ed infine

$$x = \frac{1}{3}\,\omega\,g\,t^3\,\mathrm{sen}\,\lambda \;\; , \;\; y = 0 \;\; , \;\; z = a - \frac{1}{2}\,g\,t^2.$$

Eliminando t tra la prima e la terza, si ha l'equazione della traiettoria che è una parabola semicubica. Il tempo impiegato dal grave a raggiungere il suolo è $\sqrt{2a:g}$ ed il punto in cui il mobile colpisce il piano xy ha per coordinate

$$x = \frac{1}{3}\,\omega g \operatorname{sen}\lambda \left(\frac{2a}{g}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad y = 0 .$$

Avendosi $x > 0$ si deduce

Un grave che cade nell'emisfero boreale senza velocità iniziale devia dalla verticale verso l'Est.

Tenendo conto dei termini in ω^2 avremo trovata anche una deviazione verso Sud. Quella verso Est è stata messa in luce, almeno qualitativamente, da numerose esperienze. (*)

§ 9. **Pendolo di Foucault** — Ferme restando le notazioni del § precedente, supponiamo che un punto pesante sia connesso con un punto dell'asse z, di altezza a, mediante un filo sottilissimo. Si tratta di studiare il moto di questo punto mobile su di una sfera tangente in M alla terra.

(*) Il fatto era stato già notato da GALILEO; e l'esperienza eseguita, senza successo da HOOHE, per suggerimento di NEWTON, fu ritentata da GUGLIELMINI, nel 1790 e 1791 a Bologna dalla torre degli Asinelli (alta circa m. 78); da TADINI a Bergamo nel 1795; da BENZENBERG (1803) dalla torre di S. Michele in Amburgo (m. 130) e poi (1804) in un pozzo delle miniere di Schlebusch (m. 100). Queste esperienze, che in base al calcolo, avrebbero dovuto dare una deviazione di mm. 10,37; 8,91 diedero col fatto

Avendosi

$$x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2,$$

le equazioni del moto si ottengono dalle (25), tenendo conto della reazione della superficie. Avremo quindi

$$(26)\begin{cases} x'' = \mu\, x - 2\,\omega\,(y' \cos\lambda + z' \operatorname{sen}\lambda) \\ y'' = \mu\, y + 2\,\omega\, x' \cos\lambda \\ z'' = \mu\,(z - a) + 2\,\omega\, x' \operatorname{sen}\lambda - g, \end{cases}$$

le quali ammettono l'integrale

$$v^2 = h - 2\,g\,z\,.$$

---

mm. 11,3 e 8,02. Nelle lunghe e laboriose esperienze di REICH (1830-31) in una miniera di Freiberg (m. 158) la deviazione calcolata in mm. 27,5 risultò di 28,4. Altre esperienze furono fatte da HALL in Cambdrige Mass. (1902). Tutte le esperienze poi si trovarono in pieno disaccordo circa la deviazione verso Sud. Si veda: GILBERT, *Les preuves mécaniques de la rotation de la terre.* [Bulletin des Sciences mathèm. (2), **6**; pag. 189, (1882)]; G. PESCI, *Sulla deviazione meridionale dei gravi*, Livorno, 1887.

Recentemente il padre HAGEN ha proposto di ripetere le esperienze valendosi della macchina di ATWOOD: *La rotation de la terre, ses preuves mécaniques anciennes et nouvelles.* Roma, 1911; che sembra dare un accordo maggiore tra teoria ed osservazione. Vedi anche GIANFRANCESCHI in Rivista di Fisica, matem. e scienze naturali, anno **13**, 1912; Nuovo Cimento (6), **6**, (1914).

Eliminando la funzione incognita μ tra le due prime si ha

$$x\,y'' - y\,x'' = 2\,\omega \cos\lambda\,(x\,x' + y\,y') \\ + 2\,\omega \operatorname{sen}\lambda\,.\,y\,z'$$

cioè

$$\frac{d}{d\,t}\left\{x\,y' - y\,x' - \omega\cos\lambda\left(x^2 + y^2\right)\right\} \\ = 2\,\omega\operatorname{sen}\lambda\,.\,y\,z' \tag{27}$$

la quale non è integrabile. Se però $\lambda = 0$, cioè se l'osservazione è fatta al polo, otteniamo subito un altro integrale delle (26). Però partendo da M e muovendoci su di un meridiano, portiamoci al polo, trasportando la terna x, y, z. Avremo da (27)

$$x\,y' - y\,x' - \omega\,(x^2 + y^2) = c\,;$$

cioè, in coordinate polari, e come nel § 6:

$$r^2\,\theta' - \omega\,r^2 = c\,.$$

Potremmo ora procedere come in quel § e ridurre il problema alle quadrature. Più brevemente si può procedere così. Riferiamo la posizione del mobile allo stesso asse z e ad una coppia d'assi fissi ξ, η; i quali saranno dotati, rispetto ai mobili, di un moto di rotazione uniforme, di velocità angolare ω, da Est verso Ovest, cioè di un moto contrario a quello della terra.

All'istante t, gli assi ξ ed x, coincidenti per $t=0$, comprenderanno un angolo ωt e però da note formule di trasformazione risulta

$$\xi + i\eta = (x+iy)\, e^{-i\omega t}\ ,\quad (i=\sqrt{-1})\,.$$

D'altra parte le (26), per $\lambda = 0$, danno

$$x'' + iy'' = \mu\,(x+iy) + 2\,\omega\, i\,(x'+iy')$$
$$z'' = \mu\,(z-a) - g\,;$$

quindi

$$\xi'' + i\mu'' = (\mu - \omega^2)\,(\xi + i\eta)\,;$$

e trascurando i termini in ω^2, avremo

$$\xi'' = \mu\,\xi\ ;\ \mu'' = \mu\,\eta\ ,\ z'' = \mu\,(z-a) - g$$

che coincidono con le equazioni differenziali del pendolo sferico. Quindi:

Il moto di un punto pesante su di una sfera posta al polo e mobile colla terra è identico al moto di un punto pesante sulla stessa sfera supposta fissa rispetto gli assi ξ, η, z.

In particolare se il moto avviene in un piano meridiano, per es. quello determinato dall'asse ξ, abbiamo il moto di un pendolo semplice oscillante al polo: dunque:

Il piano di oscillazione del pendolo, al polo, girerà intorno l'asse della terra in senso inverso al moto di rotazione della terra e compirà un giro in un giorno.

Supponiamo ora fatta l'osservazione alla colatitudine λ; ma limitiamoci a considerare le piccole oscillazioni del pendolo in un piano verticale per modo che z e z' possono trascurarsi: allora dalla (27) deduciamo

$$x y' - y x' - \omega \cos \lambda (x^2 + y^2) = c$$

e siamo ricondotti al caso precedente, salvo la sostituzione di $\omega \cos \lambda$ ad ω; onde:

Il piano di oscillazione di un pendolo, alla colatitudine boreale λ, gira in senso contrario al moto diurno della terra colla velocità $\omega \cos \lambda$.

L'inverso avviene nell'emisfero australe.

Lo spostamento in un giorno sarà dato da

$$86400 \,.\, \omega \cos \lambda = 2 \pi \cos \lambda ;$$

e lo spostamento angolare sarà $360^\circ . \cos \lambda$; è nullo all'equatore, massimo ai poli; alla latitudine di 45° è eguale a circa 252°; cioè il piano di oscillazione si sposta di $15'$ circa in un minuto secondo. La teoria precedente illustra una esperienza celebre di FOUCAULT. (*)

(*) La deviazione del piano di oscillazione del pendolo era stata già osservata dagli accademici del Cimento; i quali, ricevendo la punta di un pendolo sopra della polvere di marmo, notarono che la traiettoria era una spirale ovata, che sempre va restringendosi verso il centro (novembre 1661) [*Saggi di naturali esperienze*, 3ª ed. fio-

Esercizi.

1. Dimostrare che se in un moto centrale la forza è espressa da

$$m c^2 \{ \varphi(\theta) r^{-2} + b r^{-3} \}$$

la determinazione della traiettoria si riconduce alle quadrature.

Posto $u = r^{-1}$, dalla (11) del Vol. I, pag. 64, si ricava

$$\frac{d^2 u}{d \theta^2} + (1 + b) u \varphi(\theta) = 0,$$

equazione diff. di 2° ordine completa ed a coefficienti costanti; ecc.

---

rentina (1841), pag. 20; e Atti e Mem. inedite dell'Acc. del Cimento pubbl. da G. TARGIONI TOZZETTI, (1780), pp. 389 e 669]. Particolareggiate notizie storiche si trovano in BERTELLI, *Ricerche sui piccoli e spontanei moti dei pendoli* [Bull. di Bibl. di Boncompagni, **6**, p. 1, (1872)]; in GENOCCHI, *Rassegna di scritti intorno alle deviazioni dei pendoli e alla sperienza del* FOUCAULT [Ibidem, **15**, p. 631 (1882)].

L'esperienza di FOUCAULT fu eseguita nel 1851 al Panthéon a Parigi [*Recueil des travaux scientifiques de* L. FOUCAULT, Paris (1878), pp. 378-385; Revue scientifique, (4), **18**, pag. 548, (1902)].

Le equazioni (25) su cui sostanzialmente si fonda tutta la teoria sono di POISSON [Jour. de l' École Polytechn., **26**, (1838), p. 1].

Nel caso particolare in cui $\varphi(\theta) = a$ (costante) ed $1 + b = n^2$, posto $u = v - \frac{a}{1+b}$, risulta

$$\frac{n^2}{a} r^{-1} = 1 + A \cos n (\theta - \theta_0) .$$

Se $1 + b$ è negativo, muteremo il coseno circolare nel coseno iperbolico; se $1 + b = 0$, r^{-1} risulta una funzione di secondo grado in θ.

[JACOBI, *De motu puncti singularis*, Journ. f. reine und ang. Math., **24**, p. 5 (1827)]. Pel caso in cui $\varphi(\theta) =$ costante, vedi esercizio 21. Il problema è ancora riducibile alle quadrature se la forza è della forma $\frac{\varphi(\theta)}{r^2(a\,t + b)}$; vedi ARMELLINI, Rend. Acc. Lincei, (5) **21**, (2° sem. 1912), pag. 177].

2. Discutere il caso in cui la forza centrale è della forma

$$k^2 r - k_1^2 r^{-3} .$$

Si applichi il metodo del § 2; posto $u = r^{-2}$ si ha

$$2\,d\theta = \pm \frac{c\,d\,u}{\sqrt{-k^2 + h\,u - (k_1^2 + c^2)\,u^2}} .$$

Il trinomio in u sotto radice, negativo per $u = 0, \infty$, ha due radici reali e positive tra le quali è compreso u: quindi la traiettoria è compresa tra due cerchi concentrici ai quali risulta tangente. Posto il trinomio sotto la forma

$$-n^2 (u - \alpha)(u - \beta)$$

e fatto

$$u = \alpha \cos^2 \varphi + \beta \operatorname{sen}^2 \varphi$$

risulta $\varphi = \frac{n}{c} \theta$; e l'equazione della traiettoria è

$$\frac{1}{r^2} = \alpha \cos^2 \frac{n}{c} \theta + \beta \operatorname{sen}^2 \frac{n}{c} \theta .$$

Dalla (9) poi abbiamo

$$n\, d\, t = \frac{\frac{n}{c}\, d\, \theta}{\alpha \cos^2 \frac{n}{c} \theta + \beta \operatorname{sen}^2 \frac{n}{c} \theta} = \frac{d \operatorname{tag}^2 \frac{n}{c} \theta}{\alpha + \beta \operatorname{tag}^2 \frac{n}{c} \theta}, \text{ ecc.}$$

3. Supposto noto il moto centrale per una forza $f(r)$, studiare quello dovuto alla forza $f(r) + \frac{a}{\mu r^3}$.

Terremo le notazioni del § 2; la $\Pi(r)$ sarà ora sostituita da $\Pi(r) - \frac{a}{2 \mu^2 r^2}$, form. (10); e la $\psi(r)$, form. (13), da $h - 2\Pi(r) - \frac{c^2 + a}{r^2}$. Se quindi considero un secondo movimento dovuto alla forza centrale $f(r)$ e in cui la costante delle aree è $\sqrt{c^2 + a}$ e diciamo θ_0 l'anomalia di questo movimento e θ quella del primo annullantesi contemporaneamente, dal confronto della seconda delle (14) per i due movimenti si trae che $\alpha\, \theta_0$, con $\alpha = \frac{c}{\sqrt{c^2 + a}}$, nel 2° movimento è la stessa funzione di r che θ nel primo; per modo che se $r = F(\theta_0)$ è l'equazione della traiettoria nel secondo movimento, $r = F\left(\frac{1}{\alpha}\,\theta\right)$ è l'equazione della traiettoria nel primo.

Così ad es., se $f(r) = 0$, la traiettoria del secondo movimento è una retta di equazione $r \cos \theta_0 =$ cost. $= r_0$; quindi la traiettoria per la forza $\frac{a}{\mu\, r^3}$ è la spirale

$$r \cos \frac{\theta}{\alpha} = r_0 \, .$$

Se $a = -c^2$, la traiettoria è un cerchio; se $a + c^2 < 0$, si sostituisce il coseno circolare col coseno iperbolico.

4. Traiettoria nel moto centrale dovuto alla forza

$$m\, c^2\, r^{-2} (a + b \cos 2\,\theta)\, .$$

Procedendo come nell'esercizio 1, si ha

$$\frac{d^2 u}{d\,\theta^2} + u = -(a + b \cos 2\,\theta).$$

Posto

$$u = v - a + \beta \cos 2\,\theta,$$

dove $3\,\beta = b$, ci riduciamo ad una equazione omogenea: quindi

$$\frac{1}{r} = A \cos \theta + B \,\mathrm{sen}\, \theta - a - \frac{1}{3}\, b \cos 2\,\theta,$$

che rappresenta una curva di quarto ordine.

5. Stesso problema per la forza

$$m\, c^2\, r^{-2} (a \cos 2\,\theta + b \,\mathrm{sen}\, 2\,\theta + c)^{-3/2}\, .$$

L'equazione da integrare, posto

$$a = \rho \cos 2\alpha \quad , \quad b = \rho \operatorname{sen} 2\alpha$$

e cambiando θ in $\theta + \alpha$, è

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = -(\rho \cos 2\theta + c)^{-\frac{3}{2}}.$$

L'applicazione del metodo generale della variazione delle costanti arbitrarie, osservando che:

$$\int \frac{\operatorname{sen}\theta \, d\theta}{(\rho\cos 2\theta + c)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\rho - c} \frac{\cos\theta}{(\rho\cos 2\theta + c)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{\cos\theta \, d\theta}{(\rho\cos 2\theta + c)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\rho + c} \frac{\operatorname{sen}\theta}{(\rho\cos 2\theta + c)^{\frac{1}{2}}},$$

ci dà facilmente

$$u = A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta$$

$$+ \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2}(a\cos 2\theta + b\operatorname{sen} 2\theta + c)^{\frac{1}{2}}$$

che rappresenta una conica.

Nel caso di $\rho = c$ i due precedenti integrali diventano

$$\frac{1}{2}(2p)^{-\frac{3}{2}}(\cos\theta)^{-2} \; , (2\rho)^{-\frac{3}{2}} \operatorname{tang}\theta;$$

quindi

$$n\, A\cos\theta + B\operatorname{sen}\theta + \frac{C}{\cos\theta}; 2\,C = -(25)^{-\frac{3}{2}},$$

ossia, in coordinate cartesiane,

$$C(x^2 + y^2) + x(Ax + By - 1) = 0$$

conica tangente nell'origine all'asse y.

[HALPHEN, Comp. rendus, **84**, pag. 939 (1877); DARBOUX, ibidem, pp. 760, 936, e *Note XII à la Mécanique de Despeyrous*].

6. In un moto centrale, con una trasformazione omografica, si può supporre il centro all'infinito.

Poniamo

$$x_1 = \frac{x}{y}, \; y_1 = \frac{1}{y}; \; d t_1 = - \frac{d t}{y^2};$$

risulta

$$\frac{d x_1}{d t_1} = \frac{1}{y^2} \left(y \frac{d x}{d t} - x \frac{d y}{d t} \right) \frac{dt}{dt_1} = c \quad , \quad \frac{d^2 x_1}{d t_1^2} = 0;$$

$$\frac{d y_1}{d t_1} = \frac{d y}{d t} \quad , \quad \frac{d^2 y_1}{d t_1^2} = - y^2 \frac{d^2 y}{d t^2}.$$

Ma se f è l'intensità della forza attrattiva si ha pure

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = - \frac{f y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

onde abbiamo le due equazioni;

$$\frac{d^2 x_1}{d t_1^2} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 y_1}{d t_1^2} = \frac{f y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

che sono appunto le equazioni nel moto di un punto soggetto ad una forza parallela all'asse x_1.

[APPELL, l. c., **1**, pag. 273].

7. Moto di un punto in un piano allorchè la forza deriva dal potenziale

$$U = m\, f(r) + m . F(\theta)\, r^{-2}.$$

La componente della forza secondo la normale al raggio, cioè $\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}$ ci dà (Vol. I, pag. 59)

$$\frac{d}{d\,t}\left(r^2 \frac{d\,\theta}{d\,t}\right) = \frac{1}{r^2} \frac{d\,F}{d\,\theta};$$

integrando

$$\left(r^2 \frac{d\,\theta}{d\,t}\right)^2 = 2\,F(\theta) + A.$$

L'integrale delle forze vive poi dà

$$\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\,\theta}{d\,t}\right)^2 - 2\,f(r) - \frac{2\,F(\theta)}{r^2} = h.$$

Eliminando $\frac{d\,\theta}{d\,t}$, risulta

$$\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 + \frac{A}{r^2} - 2\,f(r) = h$$

che con una quadratura ci dà r in funzione di t; ecc. Vedasi eserc. 2 del capitolo seguente

8. Moto di un punto su di una spirale logaritmica, attratto dal polo con una forza proporzionale alla distanza.

Si ha subito, supponendo $v = 0$ per $r = a$,

$$v^2 = k^2(a^2 - r^2) = \left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\,\theta}{d\,t}\right)^2.$$

Ma $r = e^{m\theta}$; onde

$$\frac{dr}{dt} = \pm c\sqrt{a^2 - r^2}\,;\; c = \frac{k\,m}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Se r decresce col tempo risulta

$$r = a \cos c\,t.$$

Il moto avviene sempre nello stesso senso; il tempo impiegato a raggiungere il polo è $\frac{\pi}{2c}$, indipendente dal valore iniziale di r.

9. Un punto descrive una spirale logaritmica attratto dal polo con una forza $\mu\, r^n$; alla distanza a la velocità è v_0. Trovare la velocità e la pressione sulla curva.

Il teorema delle forze vive ci dà

$$v^2 + \frac{2\,\mu\, r^{n+1}}{n+1} = v_0^2 + \frac{2\,\mu\, a^{n+1}}{n+1}\,,\quad (n \neq -1).$$

La componente normale della forza è $\mu\, r^n \operatorname{sen} \alpha$, α essendo l'angolo costante del raggio colla tangente; quindi la (6) ci dà

$$\frac{v^2}{\rho} = R + \mu\, r^n \operatorname{sen} \alpha\,;$$

inoltre $\rho = \frac{r}{\operatorname{sen} \alpha}$; quindi

$$R = \left(v_0^2 + \frac{2\,\mu\, a^{n+1}}{n+1}\right) \frac{\operatorname{sen} \alpha}{r} - \frac{n+3}{n+2}\,\mu\, r^n$$

Se $n = -3$ e $v_0^2 = \frac{\mu}{a^2}$, risulta $v^2 = \frac{\mu}{r^2}$, $R = 0$; il punto percorre liberamente la spirale.

[ROUTH, *A Treatise on Dynamics of a Particle*, Cambridge, 1908, pag. 110].

10. Nel moto prodotto da una forza centrale, funzione della sola distanza, la traiettoria è un circolo di raggio $\frac{1}{a}$. In un istante qualunque si fa variare infinitamente poco la direzione della velocità; studiare il moto

Se F è l'intensità della forza, $u = r^{-1}$, si ha

$$\frac{d^2 u}{d\,\theta^2} + u = \frac{1}{c^2}\,\varphi(u) \; ; \; \varphi(u) = u^{-2} F.$$

Poichè la traiettoria sia circolare è necessario che

$$c = r_0 v_0 = \frac{v_0}{a} \quad , \quad \frac{\varphi(a)}{c^2} = a\,.$$

In un punto qualunque sia v_0 la velocità e formi con il raggio non più un angolo retto, ma un angolo $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$ (ε assai piccolo).

La costante c nel nuovo movimento sarà $c \cos \varepsilon$. Inoltre porremo

$$u = a + \rho$$

con ρ funzione di θ, contato a partire dal raggio vettore iniziale.

Trascurando i termini in ε^2 e ρ^2, è

$$\frac{1}{c^2}\,\varphi(u) = a + \rho\,\frac{a\,\varphi'(a)}{\varphi(a)}\,;$$

quindi otteniamo

$$(\alpha) \qquad \frac{d^2 \rho}{d\,\theta^2} + \rho\left[1 - \frac{a\,\varphi'(a)}{\varphi(a)}\right] = 0.$$

Nel caso che

$$0 < 1 - \frac{a\,\varphi'(a)}{\varphi(a)} = k^2$$

si ha

$$\rho = A \operatorname{sen} k\,\theta.$$

Ma poichè

$$\left(r\frac{d\,\theta}{d\,r}\right)_0 = \operatorname{cotg} \varepsilon\,, \quad \text{ossia} \quad -\left(\frac{d\,\rho}{d\,\theta}\right)_0 = a\,\varepsilon$$

otteniamo per la costante A il valore $-\dfrac{a\,\varepsilon}{k}$ e quindi

$$u = a - \frac{a\,\varepsilon}{k} \operatorname{sen} k\,\theta.$$

Il valore di u è compreso tra $a + \dfrac{a\,\varepsilon}{k}$ e $a - \dfrac{a\,\varepsilon}{k}$; e però pure r è sempre compreso tra due cerchi assai prossimi alla circonferenza primitiva. La traiettoria perturbata è tangente a questi due cerchi negli apsidi, comprendenti l'angolo $\dfrac{\pi}{k}$ e taglia la traiettoria circolare. In queste condizioni si dice che il primitivo movimento *è stabile*. Se k è un numero razionale, la traiettoria perturbata è (in prima approssimazione) una curva chiusa. Il moto è invece *instabile* se il coefficiente di ρ nell'equazione (α) è nullo o negativo. Se la forza varia come la potenza n del raggio, tale coefficiente risulta eguale ad $n + 3$; si ha dunque stabilità se $n + 3 > 0$.

[Thomson a. Tait, l. c., **1**, p. 350].

11. Un arco AD di ipocicloide è percorso da un punto soggetto ad una forza diretta al

centro O del cerchio fisso e proporzionale alla distanza. Studiare il moto.

Ci varremo dello stesso metodo seguito per la cicloide. Descrivasi (Fig. 7) un cerchio di centro O, e raggio $OM = \overline{OC}^2 : OD$, e sopra CM come diametro un nuovo cerchio di centro O_1. Questo, rotolando entro il cerchio

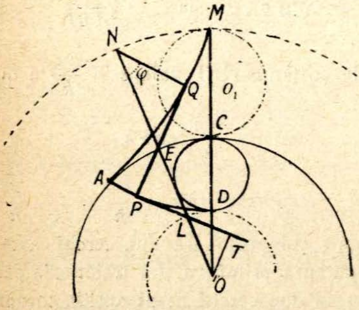

Fig. 7.

grande, descrive una nuova ipocicloide che tocca il cerchio di raggio OC nel vertice A della prima ipocicloide. Dico che AM è la evoluta di AD. Consideriamo infatti la retta ON e sopra NE ed EL descritte due semicirconferenze che potranno riguardarsi come due nuove posizioni di quelle descritte su CD e CM; se per E traccio una retta che formi un angolo $NEQ = LEP$ che stia ad MON come $OM : MC = CO : CD$, allora mentre P descrive l'ipocicloide AD, Q descriverà la AM; e poichè PE, normale alla prima, risulta tangente alla seconda, così è vero che AM è l'evoluta di AD.

Immaginiamo ora che P sia attratto da O con una forza di intensità $k^2 . PO$ e decomponiamola in due: una secondo la normale PQ, l'altra secondo la tangente PL. Se T è il piede della perpendicolare condotta da O sulla tangente sarà PT (a meno del fattore k^2) la componente tangenziale.

Posto $OC = R$, $MC = 2r$, risulta

$$CD = 2r \frac{R}{R+2r} \quad ; \quad MD = 4r \frac{R+r}{R+2r}.$$

Poscia:

$$PL : PT = 2r : R + 2r;$$

$$PL : \text{arco } PD = QE : \text{arco } AQ = MC : MD;$$

però

$$PT : \text{arco } PD = (R+2r)^2 : 4r(R+r);$$

ossia, detto s l'arco PD, la componente tangenziale, è data da $a^2 s$ dove

$$a^2 = \frac{k^2 (R+2r)^2}{4r(R+r)} = k^2 \frac{MO}{MD}.$$

Essendo proporzionale all'arco, il moto è tautocrono col periodo $\frac{\pi}{a}$.

Collo stesso metodo si può provare che la catenaria è tautocrona per una forza diretta secondo l'ordinata ed eguale a $k^2 z$; poichè anche in tal caso la forza tangenziale è eguale a $k^2 s$.

[Newton, l. c., Lib. I, pag. 139. Prop. LI].

12. Trovare la curva tautocrona per un punto pesante in un mezzo la cui resistenza è proporzionale al quadrato della velocità.

Applicando la (4) si ha

$$(\alpha) \qquad v\frac{d v}{d s} - k v^2 = - g \frac{d z}{d s},$$

moltiplicando per e^{-2ks} ambo i membri, si può poi procedere come all'eserc. 1 del Cap. I. Più direttamente, poniamo

$$k u = 1 - e^{-ks};$$

risulta

$$\frac{d^2 u}{d t^2} = e^{-ks}\left[\frac{d^2 s}{d t^2} - k\left(\frac{d s}{d t}\right)^2\right].$$

Se dunque è, con a costante,

$$a^2 u = g\, e^{-ks}\frac{d z}{d s}$$

l'equazione (α) si trasforma in quella notissima del moto armonico

$$\frac{d^2 u}{d t^2} = - a^2 u;$$

il moto è dunque tautocrono e l'equazione differenziale della curva è

$$k\frac{d z}{d s} = \frac{a^2}{g}(e^{ks} - 1).$$

Si può esprimere z e poi x in funzione di s.

Se la resistenza del mezzo fosse della forma $h v + k v^2$ ed il moto avvenisse sulla stessa curva, l'equazione (α) sarebbe sostituita da

$$\frac{d^2 s}{d t^2} - h\frac{d s}{d t} - k\left(\frac{d s}{d t}\right)^2 = - \frac{a^2}{g}\,\frac{e^{ks} - 1}{k}$$

che colla stessa sostituzione si trasforma in

$$\frac{d^2 u}{d t^2} - h \frac{d u}{d t} = - \frac{a^2}{g} u.$$

analoga a quella del § 5. Onde una stessa curva è tautocrona per la resistenza $k v^2$ e per $h v + k v^2$.

[LAPLACE, *Méc. Céleste*, **I**, pag. 36. R. LESLIE ELLIS, *The mathematical and other Writings*, Cambridge (1863), pag. 94. Sui moti tautocroni vedi anche APPELL, l. c., **I**, pag. 324; JULLIEN, *Problèmes de Méc. ration.*, **I**, pag. 374-383; e finalmente le monografie di C. OHRTMANN, *Le problème des tautochrones*, Roma (1875), e di F. AMODEO: Avellino (1883)].

13. Trovare in un piano verticale una curva siffatta che un punto pesante P, partendo senza velocità da O, percorra un arco qualunque nello stesso tempo della corda.

Se $O P = r$ forma un angolo θ con la verticale, volta in basso, si ha pel moto sulla curva e sulla retta rispettivamente

$$\left(\frac{d s}{d t}\right)^2 = 2 g z = 2 g r \cos \theta \ , \quad r = \frac{1}{2} g t^2 \cos \theta$$

onde

$$2 \sqrt{\frac{r}{\cos \theta}} = \int_0^s \frac{d s}{\sqrt{r \cos \theta}}.$$

Differenziando si trova

$$\cos \theta \, d r + r \operatorname{sen} \theta \, d \theta = \cos \theta \, d s = \cos \theta \sqrt{d r^2 + r^2 d \theta^2}$$

elevando a quadrato e riducendo

$$\frac{dr}{r} = \operatorname{cotg} 2\theta \,.\, d\theta$$

donde con una integrazione

$$r^2 = c^2 \operatorname{sen} 2\theta,$$

equazione di una lemniscata con l'asse inclinato a 45° sulla verticale.

[Questo problema fu proposto e risoluto da T. Bonati, *Nuova curva isocrona.* (Rac. ferrarese di opus. scient., Venezia 1781, p. 1, app. p. 18). Malfatti ritrovò la stessa proprietà per via sintetica nelle curve di Cassini, delle quali la lemniscata è un caso particolare: *Della curva, cassiniana e di una nuova proprietà meccanica di cui essa è dotata.* Pavia 1781. Saladini, *Della discesa dei gravi per la lemniscata*, ecc. Mem. Ist. naz. ital. **1**, parte 2ª, pag. 43 (1806) provò che la proprietà compete soltanto alla lemniscata,

Che la lemniscata fosse un caso particolare della curva di Cassini era già stato osservato, forse per la prima volta, da Feroni — *De calculo Integralium exercitatio math.* Firenze, 1792, p. 206].

14. Stesso problema supponendo il punto soggetto ad una forza centrale, proporzionale alla distanza.

Le distanze di P e di O da C (centro di attrazione) siano ρ ed a. Avremo

$$\rho^2 = a^2 + r^2 - 2\,a\,r \cos\theta;$$

e poscia pel moto del punto sulla curva e sulla corda

$$\left(\frac{d\,s}{d\,t}\right)^2 = k^2\,(a^2 - \rho^2) = k^2\,(2\,a\,r\cos\theta - r^2)$$

$$\left(\frac{d\,r}{d\,t}\right)^2 = k^2\,(2\,a\,r\cos\theta - r^2)\ ,\ \theta = \text{cost.}$$

Dalla seconda si ricava:

$$k\,t = \text{arc. cos}\,\frac{a\cos\theta - r}{a\cos\theta}$$

quindi, per la prima,

$$\text{arc. cos}\,\frac{a\cos\theta - r}{a\cos\theta} = \int_0^s \frac{d\,s}{\sqrt{2\,a\,r\cos\theta - r^2}}$$

Differenziando otteniamo come prima

$$\cos\theta\,d\,r + r\,\text{sen}\,\theta\,d\,\theta = \cos\theta\,d\,s\,;$$

la curva è una lemniscata come nell'esempio precedente.
[O. Bonnet, Jour. de Mathém., **9**, pag. 116 (1844)].

15. Un punto è mobile su di un cerchio ed è attratto da un punto O di questo con una forza $\varphi(r)$ funzione della sola distanza. Determinare la forza in modo che la reazione risulti costante.

Sia $r = 2\,a\cos\theta$ l'equazione del cerchio, il polo essendo in O. Il teorema delle forze vive ci dà

$$v^2 = h - 2\int\varphi(r)\,d\,r.$$

Poscia la (5)

$$\frac{v^2}{a} = R + \varphi(r)\cos\theta.$$

Eguagliando i due valori di v e differenziando si ottiene:

$$r\varphi'(r) + 5\varphi(r) = 0$$

donde

$$\varphi(r) = \frac{2c}{r^5}.$$

[SAINT-GERMAIN, l. c., pag. 238].

16. Il problema della brachistocrona.

Un punto si muove, per l'azione di forze che ammettono un potenziale U, su di una curva. Come deve essere questa curva perchè il tempo impiegato a percorrere un arco sia minimo?

Si ha

$$v^2 = h + 2U = V^{-2};$$

onde

$$t = \int \frac{ds}{\sqrt{h + 2U}} = \int V\, ds.$$

Annullando la variazione prima di t, si giunge all'equazioni

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{d}{ds}\left(V \frac{dx}{ds}\right); \text{ ecc.}$$

ossia all'unica:

$$\operatorname{grad} V = \frac{d}{ds}(V\mathbf{t}).$$

Di qui facilmente, ricordando che $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$, risulta

$$\mathbf{F} = \frac{dv}{dt}\mathbf{t} - \frac{v^2}{\rho}\mathbf{n}_1.$$

Quindi dalle (6)

$$R\,\mathbf{n} \times \mathbf{n}_1 = -2\mathbf{F} \times \mathbf{n}_1;\ R\,\mathbf{n} \times \mathbf{b} = -\mathbf{F} \times \mathbf{b} = 0;$$

cioè la reazione è tutta normale. Si possono avere di qui queste interpretazioni:

a) Ferma restando la $\mathbf{F} \times \mathbf{t}$ e quindi v, cambiamo segno alla $\mathbf{F} \times \mathbf{n}_1$ cioè supponiamo il punto soggetto ad una forza simmetrica alla $\mathbf{F}$ rispetto alla tangente: allora la reazione normale è nulla ed il punto descrive liberamente la brachistocrona.

b) L'equazione trovata è del tutto analoga a quella per la forza $\mathbf{F}'$ che sollecita un punto libero percorrente la stessa linea, e cioè

$$\mathbf{F}' = \frac{d\,v'}{d\,t'}\,\mathbf{t} + \frac{v'^2}{\rho}\,\mathbf{n}_1\,;$$

e le due equazioni coincidono se poniamo:

$$v = \frac{1}{v'}\,,\quad d\,t = v'^2\,d\,t'\,,\quad \mathbf{F} = -\frac{1}{v'^4}\,\mathbf{F}'\,;$$

cioè la brachistocrona viene quindi considerata come la traiettoria descritta liberamente da un punto mobile soggetto ad una forza $\mathbf{F}'$ contraria alla $\mathbf{F}$ e che sta alla prima nel rapporto di $1 : v^4$ e con una velocità che è la reciproca della prima.

Gli stessi risultati si estendono alla brachistocrona su di una superficie. Notiamo alcune applicazioni.

Un punto descrive una ellissi sotto l'azione di una forza $\frac{k}{r^2}$ diretta al fuoco: la stessa ellissi è brachistocrona per una forza diretta all'altro fuoco e proporzionale a $k : (a - r')^2$.

In un moto centrale $v\,p = \text{cost.}$; quindi le brachistocrone per le forze centrali godono della proprietà che $v' = A\,p$.

Se U e quindi V non contengono x, y, si deduce subito che la brachistocrona è piana. Nel caso del punto pesante, poichè **F** è verticale volta verso il basso e $v^2 = h - 2gz$, la **F'** sarà verticale volta in alto ed avrà la intensità $g:(h-2gz)^2$; la traiettoria di un punto libero soggetto a tale forza è la brachistocrona. Si deduce subito, dalle equazioni di p. 106,

$$\frac{1}{\sqrt{h-2gz}}\frac{dx}{ds} = \text{cost.},$$

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{\frac{z_0 - z}{2a}} \quad ; \quad \frac{dz}{ds} = \sqrt{\frac{2a - z_0 + z}{2a}};$$

da quest'ultima

$$s = \text{cost} + 2\sqrt{2a}\sqrt{2a - z_0 + z}$$

e trasportando opportunamente l'origine, si deduce

$$s^2 = 8az$$

che definisce, § 5, una cicloide.

Se la forza essendo sempre parallela alla z è proporzionale a z^{-3}, posto che $v = 0$ per $z = \infty$ si ha

$$\frac{dx}{ds} = \frac{a}{z} \quad , \quad \frac{dz}{ds} = \frac{1}{z}\sqrt{z^2 - a^2}$$

donde

$$s^2 = z^2 - a^2$$

che definisce una catenaria.

[Questo famoso problema fu proposto ai matematici da Giovanni Bernoulli nel 1696 e fu l'origine del calcolo delle variazioni. Vedi: Loria, l. c., pag. 474; Pascal, *Calcolo delle variazioni*, pag. 172; Kneser, l. c., pag. 37, e 248; Jellett, *Calculus of Variations*, Chap. 9, (1850); Routh, l. c., pag. 365 e seg.; Pennacchietti, Rend. Cir. Mat. di Palermo. **5**, **6** (1891-92)].

17. Un punto pesante si muove su di un piano che ruota uniformemente intorno ad una sua retta. Studiare il moto supponendo la retta verticale o orizzontale.

Si applichino le equazioni (2), supponendo la retta verticale e volta in alto. Poichè l'equazione del piano, detta ω la velocità angolare costante, è

$$f = y - x \operatorname{tang} \omega t = 0,$$

otteniamo:

$$x'' = -\lambda \operatorname{tang} \omega t, \quad y'' = \lambda, \quad z'' = -g;$$

il moto parallelamente alle z è uniformemente accelerato. Eliminando λ, si trova che nel moto della proiezione del punto sul piano xy è nulla l'accelerazione radiale; quindi (Vol. I, pag. 59)

$$r'' - \omega^2 r = 0;$$

ossia

$$r = a e^{\omega t} + b e^{-\omega t} = a e^{\theta} + b e^{-\theta}$$

che è l'equazione della proiezione della traiettoria sul piano xy.

Nel caso in cui la retta è orizzontale

$$f = z - y \operatorname{tang} \omega t = 0;$$

procedendo come prima si trova che il moto parallelamente ad x è uniforme, e per la proiezione sul piano yz si ha

$$r'' - \omega^2 r = - g \operatorname{sen} \omega t$$

donde

$$r = a e^{\omega t} + b e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \operatorname{sen} \omega t.$$

Se per $t = 0$ è $r = 0$, $\frac{dr}{dt} = \frac{g}{2\omega}$, risulta $r = \frac{g}{2\omega^2} \operatorname{sen} \omega t$ che rappresenta un cerchio. La traiettoria è un'elica.

18. Moto di un punto pesante su di una retta che ruota uniformemente intorno ad un asse verticale.

La retta incontri l'asse z sotto un angolo α nella origine: avremo quindi le due equazioni

$$y - x \operatorname{tang} \omega t = 0; \quad x^2 + y^2 - k^2 z^2 = 0; \quad k = \operatorname{tang} \alpha;$$

e quindi le equazioni (3) diventano

$$x'' = -\lambda \operatorname{tang} \omega t + \mu x, \; y'' = \lambda + \mu y, \; z'' = -g - \mu k^2 z.$$

Moltiplicandole rispettivamente per x, y, z e sommando, si ha

$$x x'' + y y'' + z (z'' + g) = 0;$$

e se ci riferiamo alle coordinate polari nel piano xy, ed osserviamo che

$$r = k z$$

l'equazione precedente diventa

$$(1 + k^2) z'' + g - \omega^2 k^2 z = 0.$$

Posto

$$m^2 = \frac{k^2 \omega^2}{1 + k^2} = \omega^2 \operatorname{sen}^2 \alpha,$$

risulta facilmente

$$z = \frac{g}{k^2 \omega^2} + A \operatorname{Ch} m (t + \tau)$$

ed anche

$$z = \frac{g}{k^2 \omega^2} + A \operatorname{Ch}(\operatorname{sen} \alpha \cdot \theta).$$

La traiettoria ha la forma di una spirale conica.

19. Moto di un punto pesante su di una superficie di rotazione ad asse verticale.

Come nel caso del pendolo sferico, § 6, avremo i due integrali

$$v^2 = 2 g (h - z) \quad ; \quad r^2 \frac{d\theta}{dt} = c$$

con $r = \varphi(z)$, equazione della superficie. Il problema si riduce alle quadrature collo stesso metodo. Sarà poi

$$0 < c < v r.$$

Consideriamo la superficie cubica C_3, di rotazione:

$$(h - z) r^2 = \frac{c^2}{2 g}.$$

e però la r del punto mobile deve essere maggiore della r dei punti di C_3.

Questa divide la superficie data in tante zone separate da cerchi. Il moto dunque avviene in quelle zone che sono più distanti dall'asse delle zone corrispondenti di C_3; ed entro una di tali zone abbiamo un moto analogo a quello del pendolo sferico. Se C_3 tocca la superficie, il moto è uniforme e circolare. Si può inoltre provare che la traiettoria è stabile o no secondo che le zone adiacenti sono più o meno lontane dall'asse che la C_3; ecc.

[Kobb, Acta math., **10**, pag. 89 (1887), assegnò, oltre la sfera, il paraboloide ed il cono, altre due superficie per le quali il problema è riducibile alle quadrature ellittiche; STÄCKEL, Math Annalen, **41**, p. 571 (1893) ne assegnò una sesta e finalmente SALKOWSKI, *Zur Bewegung eines Punktes auf Rotationsflächen*; Inaug. Diss., Iena 1904, ne trovò una settima di equazione

$$r^6 + 2a^6 = 8a^3 r^2 z,$$

e dimostrò che non ve ne sono altre.

Per altre proprietà vedi: STAUDE, Acta math., **11**, p. 303 (1888); PUGLISI, Rend. Circ. matem. di Palermo, **12**, pag. 312 (1898)].

20. Moto dei proiettili lanciati orizzontalmente, tenuto conto della rotazione della terra.

Integreremo le (25) supponendo che all'inizio il mobile sia nell'origine e abbia una velocità di componenti α, β, γ. Quindi

$$\begin{aligned} x &= \alpha t - \omega t^2 (\beta \cos\lambda + \gamma \operatorname{sen}\lambda) + \frac{1}{3} \omega g t^3 \operatorname{sen}\lambda \\ y &= \beta t + \omega \alpha t^2 \cos\lambda \\ z &= \gamma t - \frac{1}{2} g t^2 + \omega \alpha t^2 \operatorname{sen}\lambda, \end{aligned}$$

trascurando ω^2. Se il proiettile è lanciato verso Sud, $\alpha = \gamma = 0$, $\beta > 0$; onde

$$x = -\omega t^2 \left(\beta \cos\lambda - \frac{1}{3} g t \operatorname{sen}\lambda\right), \; y = \beta t, \; z = -\frac{1}{2} g t^2.$$

Ma essendo β assai grande, t molto piccolo, si ha $\beta \cos\lambda - \frac{1}{3} g t \operatorname{sen}\lambda > 0$; quindi $x < 0$; cioè una deviazione verso Ovest.

Se il tiro fosse fatto verso Nord, si avrebbe deviazione verso Est.

21. Un punto è attratto da un centro fisso colla legge di NEWTON; la sua massa è una funzione lineare del tempo. Studiare il moto.

L'equazione del moto è

$$m \frac{d^2 \mathbf{P}}{d t^2} + k^2 \frac{P - O}{r^3} = 0; \quad m = a + b\, t.$$

Se poniamo

$$\mathbf{P} - O = m(Q - O); \quad d\, t = m^2\, d\, \tau; \quad \rho = \operatorname{mod}(Q - O)$$

troviamo subito

$$\frac{d^2 Q}{d \tau^2} + k^2 \frac{Q - O}{\rho^3} = 0;$$

ossia il moto del punto Q, di massa 1, è quello studiato al § 2.

La stessa trasformazione è applicabile nel caso più generale in cui

$$m = \sqrt{\alpha + \beta\, t + \gamma\, t^2}\ ;$$

se poniamo $n = \frac{1}{4}\, \beta^2 - \alpha\, \gamma$ troviamo

$$\frac{d^2 Q}{d\, \tau^2} + k^2 \frac{Q - O}{\rho^3} - n\,(Q - O) = 0;$$

cioè il punto Q, di massa 1, si muove sotto l'azione di una forza centrale risultante di due altre: una proporzionale alla distanza e l'altra inversamente al quadrato della distanza. È un caso particolare di un celebre problema (Cap. IV, eserc. 4).

[MESTCHERSKY, Astron. Nachr., **159**, pag. 229 (1902); e per ricerche generali ed importanti sul problema dei due corpi di masse variabili vedi ARMELLINI, Memorie Soc. italiana dei XL, (3) **19** (1915)].