CAPITOLO III.

IL PRINCIPIO DI D'ALEMBERT
E LE EQUAZIONI GENERALI DELLA DINAMICA.

§ 1. **Principio d' Alembert.** — Anche in Dinamica ammetteremo il *postulato delle pressioni vincolari*; ossia che, in un qualunque sistema in moto, l'azione che i vincoli esercitano su di un punto P del sistema, in cui si pensa concentrata la massa m, sia rappresentata da una forza di vettore $\mathbf{N}$ applicata in P, funzione del punto P e in generale diversa da quella che competerebbe alla stessa massa nel caso dell'equilibrio. Se inoltre in P è applicata una forza di vettore $\mathbf{F}$, la 2ª legge del moto ci dà

$$m P'' = \mathbf{F} + \mathbf{N},$$

per ogni punto del sistema.

Ma nella esposizione del principio dei lavori virtuali (Vol. I, pag. 267) si è riconosciuto (e giustificato in alcuni casi particolari) che il lavoro virtuale delle reazioni vincolari è nullo o positivo secondo che gli spostamenti sono invertibili o no; se quindi ammettiamo che tale principio seguiti ancora a sussistere pel caso del movimento, avremo

$$\Sigma \mathbf{N} \times \delta P \geq 0,$$

a sommatoria essendo estesa a tutti i punti del sistema; in conseguenza

$$\Sigma \left[\mathbf{F} - m P'' \right] \times \delta P \leq 0. \qquad (1)$$

(A[illegible] che [illegible])

Il vettore prodotto della massa per l'accelerazione dicesi *forza d'inerzia*; ed il paragone di (1) coll'equazione fondamentale della Statica, conduce al seguente principio:

Nel moto di un qualunque sistema, le forze direttamente applicate e le forze d'inerzia volte in senso contrario, compatibilmente coi vincoli del sistema, sono, in ogni istante, in equilibrio.

Questo principio, col quale ogni questione di Dinamica è ridotta ad una di Statica, è stato stabilito da d'ALEMBERT. (*)

(*) Esso fu enunciato un po' diversamente da d'ALEMBERT nel 1742 [*Traité de Dynamique*, Paris 1743; 2me partie, Ch. 1] che riguardava i moti impressi ai sistemi vincolati come composti dei moti effettivi e di altri che

Nella (1) poi è da osservare che tutto quanto fu stabilito nel principio dei lavori virtuali per rispetto agli spostamenti, è completamente indipendente dallo stato di quiete o di moto del sistema: quindi con δP noi rappresentiamo un qualunque spostamento (invertibile o no) indipendente dal tempo, e quindi, in generale, diverso dall'effettivo spostamento del punto, che si rappresenta con dP.

La (1), considerata pel caso degli spostamenti invertibili, dicesi *equazione fondamentale della Dinamica*; ed in coordinate cartesiane ortogonali si

---

vengono distrutti; e stabiliva quindi che il sistema era in equilibrio se fosse stato animato soltanto da questi.

In un caso particolare, nel problema del pendolo composto, era stato già applicato da GIAC. BERNOULLI [Acta eruditorum, 1686]. L'enunciato attuale è, in fondo, dovuto ad EULER [vedi LAGRANGE, *Méc. analy.* Oeuvres compl. **II**, p. 255; MACH, l. c., p. 316].

Il principio poi, nel modo con cui è stato dedotto, ha niente altro che una base sperimentale e costituisce sostanzialmente la generalizzazione della terza legge del moto [COMTE, *Cours de Philos. positive*, **I**, 4^me^ édit. (1877), p. 408; 492; THOMSON a. TAIT, l. c., **I**, p. 248].

Per una critica del modo usuale di giustificare questo principio, si veda, tra altri, MAGGI, *Stereodinamica*, pag. 80.

scrive:

$$(2)\quad \begin{aligned} &\Sigma\left[(X - m\, x'')\,\delta x\right. \\ &\left.+ (Y - m\, y'')\,\delta y + (Z - m\, z'')\,\delta z\right] = 0. \end{aligned}$$

Operando sulla (2) allo stesso modo che fu fatto in Statica, quando si tenga conto delle relazioni cui debbono soddisfare gli spostamenti invertibili, otterremo, per ogni punto del sistema un gruppo di equazioni della forma:

$$m\, x'' = X + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots, \text{ ecc.},$$

in cui le funzioni λ debbono, durante il moto, conservare segni ben determinati; e rappresentano quantità proporzionali alle intensità delle relazioni vincolari.

Nel caso speciale di un sistema olonomo (Volume I, pag. 273), soggetto a vincoli di equazioni

$$f_1 = 0,\; f_2 = 0, \ldots, f_r = 0,$$

le equazioni assumono la forma:

$$(3)\quad \begin{cases} m\,\dfrac{d^2 x}{d t^2} = X + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + \ldots + \lambda_r \dfrac{\partial f_r}{\partial x}, \\[2ex] m\,\dfrac{d^2 y}{d t^2} = Y + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial y} + \ldots + \lambda_r \dfrac{\partial f_r}{\partial y}, \\[2ex] m\,\dfrac{d^2 z}{d t^2} = Z + \lambda_1 \dfrac{\partial f_1}{\partial z} + \ldots + \lambda_r \dfrac{\partial f_r}{\partial z}; \end{cases}$$

che diconsi ***prima forma delle equazioni del moto di*** LAGRANGE (*) (1788).

Le (3) a loro volta equivalgono all'unica equazione vettoriale:

$$(4)\quad m\frac{d^2 P}{d t^2} = \mathbf{F} + \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \ldots \lambda_r \operatorname{grad} f_r .$$

Così, per es., nel caso del moto di un punto pesante su di una sfera di raggio a, l'asse z verticale verso l'alto (Cap. prec. § 6), si scrivono subito le equazioni del moto, cioè

$$x'' = \lambda x\ ,\ \ y' = \lambda y\ ,\ \ z'' = \lambda z - g;$$

se il mobile viene abbandonato senza velocità iniziale all'altezza z_0, è facile dedurre

$$v^2 = 2g(z_0 - z)\ ;\ \lambda = g(3z - 2z_0).$$

Il punto venga posto inizialmente nella parte concava dell'emisfero inferiore; z_0, e quindi z, risultano negative: anche λ è sempre negativo ed il punto non abbandona la sfera, come appunto deve essere perchè $x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z \geq 0$; se invece il punto vien posto sulla parte convessa dell'emisfero superiore, allora λ, inizialmente positivo, si conserva tale fino all'istante in cui

(*) LAGRANGE, l. c., **II**, pag. 267-77.

$3z = 2z_0$, dove si annulla; il mobile si distacca, in quell'istante, dalla sfera e da allora in poi valgono le equazioni del moto di un punto libero.

Se, per fissar le idee, i punti del sistema sono n, avremo n terne di equazioni (3) in cui le λ entrano linearmente. La eliminazione delle λ condurrà ad un sistema di $3n - r$ equazioni differenziali che diconsi *equazioni pure del moto*. Supposte date le forze, la integrazione di questo sistema dipende da quella di una unica equazione differenziale di ordine $6n - 2r$.

Date le condizioni iniziali, cioè le coordinate iniziali del sistema, in numero di $3n - r$ dovendo verificare le r equazioni dei vincoli, e le componenti delle velocità iniziali, pure in numero di $3n - r$, dovendo verificare le equazioni

$$\frac{df_1}{dt} = 0, \quad \frac{df_2}{dt} = 0, \ldots\ldots \frac{df_r}{dt} = 0,$$

sono individuate completamente le $6n - 2r$ costanti introdotte nella integrazione.

In molti casi poi la sola considerazione del principio conduce a scriver subito le equazioni del moto. Vediamone alcuni esempi.

1.° *Un sistema rigido con un punto fisso O o mobile di moto prestabilito* è un sistema olonomo la cui posizione (Vol. I pag. 103) dipende da quella di *tre* parametri e però dicesi con *tre gradi di libertà*. Basta quindi esprimere, come nel caso dell'equilibrio, che il momento delle forze esterne è eguale a quello delle forze d'inerzia rispetto al punto fisso; e si otterranno le equazioni pure del moto.

2.° *Un sistema rigido un cui punto O si muove su di una data superficie fissa o mobile di moto prestabilito* è pure un sistema olonomo con *cinque* gradi di libertà. Oltre alla equazione del caso precedente, basterà esprimere che la risultante delle forze esterne e quella delle forze d'inerzia secondo una qualunque tangente condotta per *O* alla superficie, sono eguali; ecc. (*)

§ 2. **Della percossa in un sistema vincolato.** — Un teorema del tutto analogo a quello di d'Alembert vale pel caso in cui, all'istante t_0, agiscano sul sistema materiale delle forze istantanee o percosse; cioè:

In ogni istante vi ha equilibrio tra le forze di percossa e gli impulsi perduti.

Una qualunque forza di percossa in *P* è definita come il limite del vettore $\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}\, dt$ per $t_1 = t_0$,

(*) MAGGI, *Principi di Stereodinamica*, Milano, 1903; pp. 20; 61; ecc.

limite che supporremo finito e determinato e accenneremo con $\mathbf{F}_1$. Ammetteremo poi che, soddisfatte certe condizioni, allorquando sul sistema vengono ad agire forze estremamente grandi in un istante brevissimo, la posizione del sistema vari infinitamente poco, mentre la velocità dei suoi punti variano, in generale, di quantità finite. Accenneremo con $\Delta(m P')$ la differenza finita dell'impulso in P relativo a $t_0 \pm \varepsilon$ quando $\varepsilon = 0$ e la diremo *perdita dell'impulso.*

Integrando la (1) tra t_1 e t_0; avremo

$$\Sigma\left[\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \times \delta P\, d t - \int_{t_0}^{t_1} m P'' \times \delta P\, d t\right] \leq 0;$$

e supponiamo che le forze, o parte di esse, col tendere di t_1 a t_0 crescano indefinitamente, in modo che al primo integrale possa applicarsi il teorema della media

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \times \delta \bar{P} . d t = \delta \bar{P} \times \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F}\, d t,$$

essendo $\delta \bar{P}$ un valore di δP relativo ad un istante tra t_0 e t_1; però accennando ancora con δP il valore corrispondente a t_0, il limite del primo integrale è $\mathbf{F}_1 \times \delta P$. Inoltre

$$\int_{t_0}^{t_1} m P'' \times \delta P\, d t = (m P' \times \delta P)_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} m P' \times \delta P\, d t;$$

quantità sotto il segno integrale a secondo
embro si mantiene sempre finita col tendere
t_1 a t_0; il limite del primo membro è dunque
$(m\,P') \times \delta P$.

Deduciamo dunque

$$\text{')} \qquad \Sigma\,[\mathbf{F}_1 - \Delta\,(m\,P')] \times \delta P \leqq 0;$$

quale prova il teorema enunciato.

Dalla (1') poi, tenuto conto dei vincoli, si ri-
vano le stesse conseguenze ricavate dalla (1).

§ 3. **Seconda forma delle equazioni di-
ımiche di Lagrange.** — *a*) Consideriamo un
stema olonomo con k gradi di libertà; cioè un
stema la cui posizione sia individuata da k va-
ıbili indipendenti q_1, q_2, ... q_k, oltre che dal
npo; per modo che ogni punto P del sistema
da riguardarsi funzione di queste k variabili,
e diremo *coordinate generali* o *libere* del si-
ema, e del tempo; ossia

$$P = P\,(q_1,\ q_2, \ldots\ldots, q_k,\ t).$$

Accenneremo con P', q'_1, ... le derivate to-
i di P, q_1, ... rispetto al tempo; si ha:

$$P' = \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial P}{\partial q_2} q_2' + \ldots\ldots$$

e se conveniamo di chiamare le q_1', q_2', ... *componenti generali della velocità*, la (6) esprime che:

La velocità è una funzione lineare delle sue componenti generali; lo stesso vale naturalmente per le componenti ortogonali della velocità.

Risulta ancora da (6)

$$\frac{\partial P'}{\partial q_r'} = \frac{\partial P}{\partial q_r}. \tag{7}$$

Poniamo

$$2\,T = \Sigma\, m\, P'^2, \tag{8}$$

e chiamiamo T *energia cinetica del sistema* o *forza viva* al tempo t. Essa, per la (6), risulta una funzione quadratica delle q_1', ... cioè delle componenti generali della velocità, con coefficienti che sono funzioni delle q_1 ..... e di t; ed è essenzialmente positiva. (Vedi Cap. IV, § 3).

Finalmente introduciamo il concetto di *forze generalizzate*.

Il lavoro virtuale delle forze del sistema è espresso da

$$\delta L = \Sigma\,\mathbf{F} \times \delta P = \Sigma\,\mathbf{F} \times \left(\frac{\partial P}{\partial q_1}\,\delta q_1 + \frac{\partial P}{\partial q_2}\,\delta q_2 + \ldots\right);$$

ossia, posto

$$Q_r = \Sigma\,\mathbf{F} \times \frac{\partial P}{\partial q_r}, \tag{9}$$

è espresso da

$$(10)\quad \delta L = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_k \delta q_k .$$

Le Q_r diconsi *forze generalizzate*; precisamente la Q_r esprime il rapporto tra lo spostamento δq_r e il lavoro virtuale compiuto dalle forze del sistema quando tutte le coordinate restano immutate e la sola q_r subisce lo spostamento δq_r.

Potendo q_r rappresentare anche un angolo (numero) si deduce che le dimensioni di Q_r possono non essere quelle di una forza.

Se esiste una funzione Π della sola posizione del sistema, cioè delle sole $q_1, q_2 \dots$, e tale che il suo decremento $-\delta \Pi$ esprime il lavoro virtuale delle forze, tale funzione, determinata a meno di una costante, (Vedi Cap. IV, § 1) dicesi *energia potenziale*; dalla (10), per la arbitrarietà delle $\delta q_1, \delta q_2 \dots$, si deduce

$$(11)\qquad Q_r = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_r};$$

Le forze generalizzate sono le derivate negative dell'energia potenziale, rispetto alle coordinate generali.

Ciò posto, dico che:

Le equazioni del moto nelle coordinate generali sono

$$(12)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_r'} - \frac{\partial T}{\partial q_r} = Q_r \quad (r = 1, 2, \dots k).$$

e che diconsi : *seconda forma delle equazioni dinamiche di* LAGRANGE. (*)

Infatti se nell'equazione fondamentale (1) della dinamica, al posto di δP sostituiamo la sua espressione per le $\delta q_1, \ldots$ e, per l'arbitrarietà di queste, poniamo a zero i singoli coefficienti, avremo subito

$$\Sigma m \frac{d^2 P}{d t^2} \times \frac{\partial P}{\partial q_r} = Q_r .$$

Ora il primo membro può scriversi :

$$\frac{d}{d t} \Sigma m \frac{d P}{d t} \times \frac{\partial P}{\partial q_r} - \Sigma m \frac{d P}{d t} \times \frac{d}{d t} \frac{\partial P}{\partial q_r}$$

od anche, per la (7), ed invertendo l'ordine delle derivazioni,

$$\frac{d}{d t} \Sigma m P' \times \frac{\partial P'}{\partial q_r'} - \Sigma m P' \times \frac{\partial P'}{\partial q_r} ;$$

ma le sommatorie, per la (8), sono rispettivamente le derivate di T rispetto a q_r' e q_r. Quindi è provata la (12).

Le equazioni (12) differenziali di 2° ordine sono in numero eguale ai gradi di libertà del sistema olonomo : la loro costruzione è assai semplice, non esigendo ehe la conoscenza dell'e-

---

(*) LAGRANGE, l. c., **II**, pp. 325 e seg.

nergia cinetica (mediante le q e q') e le espressioni delle forze generalizzate. Essendo eliminate le λ, esse non ci abilitano però a conoscere le reazioni dei vincoli.

Nel caso che esista la funzione Π (energia potenziale), definendo la *funzione di* LAGRANGE, o *potenziale cinetico*, con la

$$L = T - \Pi, \tag{13}$$

le equazioni (12) assumono la forma semplicissima

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_r'} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0. \tag{14}$$

Basta osservare la (11) e riflettere che Π non contiene le q_r', e quindi

$$\frac{\partial L}{\partial q_r'} = \frac{\partial T}{\partial q_r'}.$$

Si dice che le coordinate $q_1, \ldots, q_m$ $(m \leq k)$ sono *ignorate*, se esse non compariscono in L, che quindi risulta funzione delle rimanenti q e funzione quadratica di tutte le q'. In tal caso dalle (14) si deducono subito m integrali primi delle equazioni del moto; cioè

$$\frac{\partial L}{\partial q_1'} = \alpha_1, \frac{\partial L}{\partial q_2'} = \alpha_2, \ldots, \frac{\partial L}{\partial q_m'} = \alpha_m \tag{15}$$

le α essendo m costanti arbitrarie.

Si dimostra in tal caso che:

La integrazione delle equazioni (14) *relative al sistema con k gradi di libertà, si fa dipendere da quella di equazioni analoghe, ma relative ad un sistema con k — m gradi di libertà e il cui potenziale cinetico è*

$$(16) \quad R = L - \alpha_1 q_1' - \alpha_2 q_2' - \dots - \alpha_m q'_m,$$

e da m quadrature.

Immaginiamo infatti di poter ricavare, dal sistema (15) lineare nelle q', le $q_1', q_2', \dots, q'_m$ in funzione (lineare) delle $q'_{m+1}, \dots q_k'$ e delle q; allora da (16), pensando R espressa mediante le q e le $q'_{m+1}, \dots q_k'$, si ha

$$\frac{\partial R}{\partial q_r} = \frac{\partial L}{\partial q_r} + \frac{\partial L}{\partial q_1'} \frac{\partial q_1'}{\partial q_r} + \dots - \alpha_1 \frac{\partial q_1'}{\partial q_r} - \dots$$

ossia, per le (15):

$$\frac{\partial R}{\partial q_r} = \frac{\partial L}{\partial q_r};$$

e così del pari:

$$\frac{\partial R}{\partial q'_{m+1}} = \frac{\partial L}{\partial q'_{m+1}}, \text{ ecc.}$$

Avremo dunque da integrare il sistema

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial q'_{m+1}} - \frac{\partial R}{\partial q_{m+1}} = 0, \text{ ecc.}$$

del tutto analogo a (14). La sua integrazione permetterà di esprimere le $q_{m+1}, \ldots$ in funzione di t e di $2(k-m)$ costanti. Le $q_1, \ldots q_m$ si ricaveranno poscia (con quadrature) dalle:

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = -q_1', \ldots \frac{\partial R}{\partial \alpha_m} = -q'_m. \ (*)$$

b) Supponiamo ora che il sistema non sia olonomo e che quindi tra le coordinate q che fissano la posizione del sistema, esista un certo numero di equazioni differenziali, non integrabili. Anche in questo caso possiamo dire che un qualunque spostamento virtuale compatibile coi vincoli, ha la forma

$$\delta P = \mathbf{a}_1 \delta q_1 + \mathbf{a}_2 \delta q_2 + \ldots + \mathbf{a}_n \delta q_n$$

le $\delta q_1, \ldots, \delta q_n$ essendo tutte arbitrarie. Quindi l'equazione fondamentale (1) si scinde in queste altre

$$(17) \quad \Sigma m \, \mathbf{a}_r \times P'' = \Sigma \, \mathbf{F} \times \mathbf{a}_r = Q_r \ (r = 1, 2, \ldots n).$$

(*) Il metodo, detto dagli inglesi della *ignorazione delle coordinate (ignoration of coordinates)* è dovuto ad E. J. Routh, *A Treatise on the stability of a given state of motion*, London, 1877. *Die Dynamik der Systeme starrer Körper*, I Leipzig, 1898; pag. 378.

Le coordinate $q_1 \ldots q_m$ diconsi appunto *coordinate ignorate*.

— Marcolongo.

Ma

$$2\,T = \Sigma\, m\, P'^2 = \Sigma\, m\, (\mathbf{a}_1\, q'_1 + \ldots + \mathbf{a}_n\, q'_n)^2;$$

quindi essendo, come prima,

$$\Sigma\, m\, \mathbf{a}_r \times P'' = \frac{d}{d\,t} \Sigma\, m\, \mathbf{a}_r \times P' - \Sigma\, m\, P' \times \frac{d\,\mathbf{a}_r}{d\,t},$$

$$\Sigma\, m\, \mathbf{a}_r \times P' = \frac{\partial\, T}{\partial\, q'_r};$$

posto

$$R_r = \Sigma\, m\, P' \times \frac{d\,\mathbf{a}_r}{d\,t},$$

risultano le equazioni, analoghe alle (12),

$$\frac{d}{d\,t} \frac{\partial\, T}{\partial\, q'_r} - R_r = Q_r\,.$$

Una forma più semplice si ricava ancora calcolando direttamente il primo membro di (17). Si ha infatti

$$P'' = \mathbf{a}_1\, q_1'' + \mathbf{a}_1'\, q_1' + \ldots\ldots;$$

onde

$$\mathbf{a}_r = \frac{\partial\, P''}{\partial\, q''_r}\,.$$

Però

$$\Sigma\, m\, \mathbf{a}_r \times P'' = \Sigma\, m\, P'' \times \frac{\partial\, P''}{\partial\, q''_r} = \frac{\partial\, S}{\partial\, q''_r}\,,$$

dove

(18) $$S = \Sigma\, m\, P''^2_r$$

è formata coll'accelerazione allo stesso modo che T è formata colla velocità.

Otteniamo con ciò la forma di GIBBS-APPELL

$$(19) \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_r} = Q_r \,. \, (^*)$$

§ 4. **Equazioni di Hamilton.** — Sviluppando la (8), tenendo presente la (6), otterremo l'energia cinetica espressa come somma di due parti: una quadratica omogenea nelle q' e l'altra lineare; cioè

$$(20) \left\{ \begin{aligned} 2\,T = P_{11} q'^2_1 + P_{22} q'^2_2 + \ldots + 2\,P_{12} q'_1 q'_2 + \ldots \\ + 2\,(\alpha_0 + \alpha_1 q'_1 + \ldots\ldots), \end{aligned} \right.$$

in cui tutti i coefficienti dipendono solamente dalle coordinate q del sistema olonomo e dalla distribuzione delle masse.

Nel caso di un punto libero, le componenti dell'impulso $m\,x'$, ... (Cap. I, § 4) sono le

---

(*) J. W. GIBBS, *On the Fundamental Formulae of Dynamics* [American Jour. of Math., **2** (1879), p. 49; Scientific Papers, **2**, p. 1; New-York]; APPELL, Comp. rendus, **129**, pp. 317, 459 (1899); Journ. für Math., **121** (1899); **122** (1900); *Les mouvements de roulement en dynamique*: Scientia, 1899; e numerosi articoli nel Journ. de Math. pures et appl. (5), **6**, **7**, **9**. Vedasi anche MAGGI, *Principii di Stereodinamica*, p. 199.

derivate dell'energia cinetica rispetto alle componenti della velocità, come è subito visto. In generale:

Diremo componenti dell'impulso di un sistema, le derivate dell'energia cinetica rispetto alle componenti generali della velocità.

Le accenneremo con p_r, cioè porremo

$$(21)\quad p_r = \frac{\partial T}{\partial q'_r} = P_{r1} q'_1 + P_{r2} q'_2 + \ldots + \alpha_r$$

quindi:

In un sistema olonomo, le componenti dell'impulso sono funzioni lineari delle componenti generali della velocità.

Il determinante delle (21), riguardate come equazioni lineari nelle q', è il discriminante della parte di T che è quadratica ed omogenea nelle q'.

Se il sistema è a vincoli indipendenti dal tempo, cioè nella (5) P è funzione delle sole q, T si riduce alla sola parte quadratica ed omogenea; il discriminante, trattandosi di forma definita positiva, è maggiore di zero. Ma anche nel caso generale di vincoli qualunque tale determinante è diverso da zero. Se infatti esso fosse nullo, potremmo determinare le q', non tutte nulle, e a meno di un coefficiente arbitrario, tali che

$$P_{r1} q'_1 + P_{r2} q'_2 + \ldots + P_{rk} q'_k = 0 \quad (r = 1, 2, \ldots k)$$

e poscia determinare tale coefficiente in modo che

$$\alpha_1 q'_1 + \alpha_2 q'_2 + \dots + \alpha_k q'_k = -\alpha_0 ;$$

ma allora per le q' così determinate e non tutte nulle, risulta $2\,T = 0$; e ciò è evidentemente assurdo. In conseguenza, il sistema (21) è sempre risolubile rispetto alle q', che a loro volta risulteranno funzioni lineari delle p; cioè:

Le componenti generali della velocità sono funzioni lineari delle componenti dell'impulso.

Sostituendo nella (20) le espressioni delle q' mediante le p, otterremo T espresso con una forma quadratica delle p, i cui coefficienti sono funzioni delle q e di t, e che accenneremo con T_p

Ciò posto, faremo vedere che al sistema delle equazioni differenziali (12) di 2° ordine di LAGRANGE, si può sostituire il seguente sistema di $2\,k$ equazioni differenziali di 1° ordine nelle p e q

$$(22) \qquad \frac{d\,q_r}{d\,t} = \frac{\partial\,\Theta}{\partial\,p_r} \; ; \; \frac{d\,p_r}{d\,t} = Q_r - \frac{\partial\,\Theta}{\partial\,q_r} ;$$

dove Θ è la seguente funzione delle p e q

$$(23) \qquad \Theta = \Sigma\, p_r\, q'_r - T_p .$$

Infatti, teniamo presente che essendo arbitrarie le coordinate e le velocità iniziali, cioè le q e q', e potendo considerare un istante qualunque come iniziale, potremo, al tempo t, riguardare come arbitrarie ed indipendenti le q e q' e quindi le q e le p. Allora, t rimanendo invariabile, attribuiamo alle p e q accrescimenti arbitrari δp, δq; dalla (23) otterremo

$$\delta \Theta = \Sigma \left(p_r \delta q'_r + q'_r \delta p_r - \frac{\partial T}{\partial q_r} \delta q_r - \frac{\partial T}{\partial q'_r} \delta q'_r \right);$$

cioè, per le (21),

$$\delta \Theta = \Sigma \left(q'_r \delta p_r - \frac{\partial T}{\partial q_r} \delta q_r \right);$$

quindi per l'arbitrarietà delle δp e δq, si trae

$$\frac{\partial \Theta}{\partial q_r} = - \frac{\partial T}{\partial q_r}, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial p_r} = q'_r;$$

la seconda delle quali coincide colla prima delle (22); la seconda delle (22) poi si deduce subito, tenendo presente la (12), e la (21).

Se esiste la funzione Π (energia potenziale), posto

$$\text{(24)} \qquad \mathrm{H} = \Theta + \Pi$$

per la (11), notando che Π è funzione delle sole q (ed eventualmente del tempo) il sistema (22) si trasforma nell'altro

$$\text{(25)} \qquad \frac{d q_r}{d t} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p_r}, \quad \frac{d p_r}{d t} = - \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q_r}.$$

Consideriamo ora il caso più specialmente interessante di *un sistema olonomo a vincoli indipendenti dal tempo.*

Abbiamo già osservato che in tal caso:

L'energia cinetica è una funzione quadratica omogenea delle componenti generali della velocità; le componenti dell'impulso sono funzioni lineari omogenee delle componenti della velocità.

Dico inoltre che:

Le componenti generali della velocità sono le derivate dell'energia cinetica rispetto alle componenti dell'impulso.

Infatti dal teorema di Euler sulle funzioni omogenee si ha

$$2\,T = \Sigma\, q'_r \frac{\partial T}{\partial q'_r} = \Sigma\, p_r\, q'_r\,;$$

quindi, dalla (23) risulta

$$\Theta = T_p,$$

e dalla prima delle (22)

$$(26) \qquad q'_r = \frac{\partial T}{\partial p_r}.$$

Infine, nella ipotesi dell'esistenza della funzione Π varranno ancora le equazioni (25), in cui, per la (24), risulta

$$(27) \qquad \mathrm{H} = T_p + \Pi$$

(H rappresenta l'energia totale del sistema).

Le equazioni (25) diconsi *equazioni canoniche* o di HAMILTON. (*) Per formare queste equazioni occorre conoscere solamente H (energia totale) in funzione delle coordinate e degli impulsi.

Se Π, e quindi H, non contiene esplicitamente il tempo, un integrale delle equazioni del moto (25) è

$$\mathrm{H} = h\,.$$

Infatti

$$\frac{d\,\mathrm{H}}{d\,t} = \Sigma_1 \left(\frac{\partial\,\mathrm{H}}{\partial\,q_r} q'_r + \frac{\partial\,\mathrm{H}}{\partial\,p_r} p'_r \right) = 0\,.$$

Ne vedremo il significato meccanico nel capitolo seguente.

Esercizi.

1. Equazioni del moto di un punto in coordinate polari.

La posizione del punto di massa uno sia fissata mediante le coordinate r, θ, φ (raggio vettore, colatitudine, longitudine); si ha

$$2\,T = r'^2 + r^2\,\theta'^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot \varphi'^2.$$

(*) R. W. HAMILTON, *Second Essay on a general Method in Dynamics.* [Philos. Trans. Part. 1, 1835, pp. 95-144].

Siano R, Θ, Φ le componenti della forza secondo il raggio vettore e le tangenti al meridiano ed al parallelo; poichè δP ha per componenti, secondo quelle direzioni, δr, $r\,\delta\theta$, $r \operatorname{sen}\theta \cdot \delta\varphi$, avremo

$$\delta L = \Sigma \mathbf{F} \times \delta P = R\,\delta r + r\,\Theta\,\delta\theta + r \operatorname{sen}\theta \cdot \Phi\,\delta\varphi.$$

Posto quindi $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$, le forze generalizzate (9) risultano R, $r\,\Theta$, $r \operatorname{sen}\theta\,\Phi$. Quindi le (12) diventano

$$\begin{aligned} r'' - r\,\theta'^2 - r \operatorname{sen}^2\theta \cdot \varphi'^2 &= R, \\ \frac{d}{dt}(r^2\,\theta') - r^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \cdot \varphi'^2 &= r\,\Theta \\ \frac{d}{dt}(r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot \varphi') &= r \operatorname{sen}\theta \cdot \Phi. \end{aligned}$$

Pel moto di un punto in un piano invece si ha

$$r'' - r\,\theta'^2 = R \quad , \quad \frac{d}{dt}(r^2\,\theta') = r\,\Theta.$$

(Vedi Vol. I, pag. 59).

2. Nel moto di un punto libero l'energia potenziale ha la forma

$$\Pi = f_1(r) + \frac{f_2(\theta)}{r^2} + \frac{f_3(\varphi)}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}.$$

Provare che la determinazione del moto dipende dalle quadrature

Si ha, per la (11),

$$r \operatorname{sen}\theta \,.\, \Phi = -\frac{1}{r^2 \operatorname{sen}^2\theta}\frac{d f_3}{d\varphi}, \quad r\,\Theta = -\frac{1}{r^2}\frac{d f_2}{d\theta} + \frac{2 f_3 \cos\theta}{r^2 \operatorname{sen}^3\theta}$$

quindi la terza dell'esercizio precedente, con una integrazione ci dà

$$\frac{1}{2}(r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \varphi')^2 = a - f_3 ;$$

e la seconda:

$$\frac{d}{dt}(r^2 \theta') - r^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cdot \varphi'^2 = - \frac{1}{r^2} \frac{df_2}{d\theta} + \frac{2 f_3 \cos \theta}{r^2 \operatorname{sen}^3 \theta}.$$

Eliminando φ' ed integrando,

$$\frac{1}{2}(r^2 \theta')^2 = - \frac{a}{\operatorname{sen}^2 \theta} - f_2 + b .$$

Il teorema delle forze vive ci dà poi

$$r'^2 + r^2 \theta'^2 + r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \varphi'^2 + 2\,\Pi = h ;$$

eliminando θ' e φ', otteniamo

$$r'^2 + \frac{2b}{r^2} + 2 f_1(r) = h,$$

che con una quadratura ci darà r in funzione di t, ecc.
[ROUTH, *Dynamics of a particle*, Cambridge, 1908 ; p. 307].

3. Equazioni canoniche del pendolo sferico.

Il punto pesante, di massa uno, si muova su di una sfera di raggio uno. Si ha

$$2T = \theta'^2 + \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \varphi'^2 \quad ; \quad (q_1 = \theta,\ q_2 = \varphi)$$
$$Q_1 \delta \theta + Q_2 \delta \varphi = Z \delta z = g \operatorname{sen} \theta \cdot \delta \theta.$$

Le equazioni (12) di LAGRANGE sono

$$q_1'' - \operatorname{sen} q_1 \cos q_1 \cdot q_2'^2 = g \operatorname{sen} q_1 \ ; \quad \frac{d}{dt}(\operatorname{sen}^2 q_1 \cdot q_2') = 0.$$

Le componenti dell'impulso sono

$$p_1 = q'_1 \quad , \quad p_2 = \operatorname{sen}^2 q_1 \cdot q_2' ;$$

quindi posto:

$$H = T_p + \Pi = \frac{1}{2}\left\{p_1^2 + \frac{p_2^2}{\operatorname{sen}^2 q_1}\right\} + g \cos q_1,$$

risultano le equazioni canoniche (25),

$$q_1' = p_1 \quad , \quad q_2' = \frac{p_2}{\operatorname{sen}^2 q_1}$$

$$p_1' = g \operatorname{sen} q_1 + \frac{p_2^2 \cos q_1}{\operatorname{sen}^3 q_1} \quad , \quad p'_2 = 0 .$$

Due integrali di questo sistema sono: $H = h$ (delle forze vive) e $p_2 = c$ (delle aree; Cap. IV, § 4 e 7, ecc.).

4. Moto di un punto su di una sfera ed attratto dal polo Nord con una forza il cui potenziale è $k \operatorname{cotg} \theta$.

Le equazioni dell'esercizio 1, posto $r = 1$, ci danno:

$$\theta'' - \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cdot \varphi'^2 = \frac{k}{\operatorname{sen}^2 \theta}\ ; \ \frac{d}{dt}(\operatorname{sen}^2 \theta \cdot \varphi') = 0 .$$

Trasformiamole ponendo

$$\rho = \operatorname{tang} \theta \quad ; \quad dt = \cos^2 \theta \,.\, dt_1 ;$$

ρ è la distanza da N della proiezione P_1 di P dal centro sul piano tangente in N alla sfera. Le equazioni del moto si trasformano agevolmente in queste:

$$\frac{d^2 \rho}{d t_1^2} - \rho \left(\frac{d \varphi}{d t_1}\right)^2 = \frac{k}{\rho^2} \ , \ \frac{d}{d t_1}\left(\rho^2 \frac{d \varphi}{d t_1}\right) = 0$$

che definiscono il moto del punto P_1 attratto da N in ragion inversa del quadrato della distanza. La traiettoria di P_1 è una conica di cui N è un fuoco: quella di P è dunque una conica sferica avente un fuoco in N.

La trasformazione adoperata vale qualunque sia la forza. [APPELL, American Journ. of Math., **13**, p. 153 (1891); NEUMANN, Berichte k. Gesell. Leipzig, 1879, p. 53].

5. Un filo flessibile e inestensibile, lungo l, congiunge, attraverso un foro O praticato in un piano orizzontale, due masse m ed m_1; m giace sul piano. Studiare il moto.

Se rispetto ad O le coordinate di m sono r e θ, la distanza di m_1 da O è $l - r$; onde

$$2\,T = m\,(r'^2 + r^2\,\theta'^2) + m_1\,r'^2,$$

e le equazioni del moto sono

$$(m + m_1)\,r'' - m\,r\,\theta'^2 = -\,m_1\,g\;;\quad \frac{d}{d\,t}\,(r^2\,\theta') = 0.$$

Esse definiscono il moto di m come se fosse attratto da O, con una forza di intensità

$$-\,m\,(r'' - r\,\theta'^2) = \frac{m\,m_1}{m + m_1}\left(g + \frac{c^2}{r^3}\right)$$

c essendo la costante delle aree.

La riduzione alle quadrature si fa osservando che

$$(m + m_1)\,r'\,d\,r' = \left(\frac{m\,c^2}{r^3} - g\,m_1\right)d\,r\;;\ \text{ecc.}$$

[THOMSON a. TAIT, l. c., **1**, p. 309; SCHELL, l. c., **2**, pag. 551].

6. Un'asta, di cui si trascura la massa, è situata in un piano orizzontale e può ruotare intorno ad un suo estremo fisso O; essa sostiene

due masse; una m fissa nell'estremo libero A; l'altra m_1 può scorrere lungo OA; movimento del sistema.

Sia $OA = a$, e la posizione di m_1 sia fissata dalle coordinate polari r, θ. L'energia cinetica di m è $\frac{m}{2} a^2 \theta'^2$; quella di m_1 è $\frac{m_1}{2}(r'^2 + r^2 \theta'^2)$; onde

$$2T = (m a^2 + m_1 r^2)\theta'^2 + m_1 r'^2.$$

Le equazioni del moto sono

$$m_1 r'' - m_1 r \theta'^2 = 0 \; ; \quad \frac{d}{dt}\left\{ (m a^2 + m_1 r^2)\theta' \right\} = 0 .$$

Dalla seconda si trae

$$(m a^2 + m_1 r^2)\theta' = c_1$$

e sostituendo il valore di θ' nella prima:

$$\frac{dr'}{dt} = r' \frac{dr'}{dr} = \frac{c_1^2 r}{(m a^2 + m_1 r^2)^2} \; ;$$

donde

$$r'^2 = c_2 - \frac{c_1^2}{m_1} \frac{1}{m a^2 + m_1 r^2} .$$

Con una nuova quadratura si troverà t mediante r, e quindi θ con un'altra quadratura; gli integrali ottenuti possono interpretarsi agevolmente (Cap. IV, § 4, 7).

[Clairaut, Mém. Académie des Sciences de Paris, 1742; d'Alembert, ibidem e Traité de Dynamique, p. 104].

7. Una massa m posta in A scorre su di una retta ed è collegata ad un'altra m_1 posta

in B, mediante un'asta di cui si trascura la massa; studiare il moto del sistema, posto su di un piano orizzontale.

Sia O un punto della retta; $OA = x$, $AB = a$, e l'angolo $OAB = \theta$. L'energia cinetica di A è $\frac{m}{2} x'^2$; per quella di B osserviamo che la sua velocità, di grandezza v, è la risultante di quella dovuta alla traslazione del sistema parallelamente ad x e di grandezza x', e di quella dovuta alla rotazione dell'asta intorno ad A e di grandezza $a\theta'$. Queste due velocità comprendono un angolo $90^0 - \theta$; quindi

$$v^2 = a^2 \theta'^2 + x'^2 + 2 a x' \theta' \operatorname{sen} \theta.$$

L'energia cinetica del sistema è

$$2T = m x'^2 + m_1 (a^2 \theta'^2 + x'^2 + 2 a x' \theta' \operatorname{sen} \theta);$$

e le equazioni del moto sono

$$\frac{d}{dt} \left\{ (m + m_1) x' + m_1 a \theta' \operatorname{sen} \theta \right\} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ m_1 a^2 \theta' + m_1 a x' \operatorname{sen} \theta \right\} - m_1 a x' \theta' \cos \theta = 0.$$

Dalla prima ricaviamo

$$(m + m_1) x' + m_1 a \theta' \operatorname{sen} \theta = c_1$$

(integrale centro di massa parallelamente ad x, Cap. IV, § 7); sviluppando la seconda si ha

$$a^2 \theta'' + a x'' \operatorname{sen} \theta = 0;$$

e poichè

$$(m + m_1) x'' = - m_1 a (\theta'' \operatorname{sen} \theta + \theta'^2 \cos \theta)$$

eliminando x'' otteniamo

$$\theta'' = \theta' \frac{d\,\theta'}{d\,\theta} = \frac{m_1\,\theta'^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{m + m_1\cos^2\theta}.$$

Integrando

$$\theta' = \frac{c_2}{\sqrt{m + m_1\cos^2\theta}}.$$

la quale definisce un moto pendolare

[CLAIRAUT, Mém. Académie des sciences de Paris, 1736].

8. Un punto pesante si muove su di un cilindro circolare retto il cui asse è inclinato di un angolo α sulla verticale. Determinare il moto.

Pel punto P si conduca un piano normale all' asse e che sega il cilindro secondo un cerchio; si fissi la posizione di P colla distanza r del cerchio da una origine fissa sull'asse e coll'angolo φ che il raggio passante per P forma con un piano meridiano fisso. Si ha

$$2\,T = m\,(r'^2 + a^2\,\varphi'^2)\ ;\ z = r\cos\alpha + a\cos\varphi\operatorname{sen}\alpha\,;$$

e per le forze generalizzate:

$$Q_r = -\,m\,g\,\frac{\partial z}{\partial r} = -\,m\,g\cos\alpha\ ;$$

$$Q_\varphi = -\,m\,g\,\frac{\partial z}{\partial \varphi} = m\,g\,a\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi.$$

Onde:

$$r'' = -\,g\cos\alpha\ ;\ a^2\,\varphi'' = a\,g\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi.$$

Il moto secondo l'asse del cilindro è uniformemente accelerato con l'accelerazione $g\cos\alpha$; lungo il cerchio è pendolare con l'accelerazione $g\operatorname{sen}\alpha$.

9. Due masse m, m_1 si muovono su due rette concorrenti in O e si attraggono in ragion diretta della distanza. Studiare il moto, trascurando il peso.

Dette r ed r_1 le distanze rispettive di m e m_1 da O, ρ la loro distanza, α l'angolo delle due rette, si ha

$$2\,T = m\,r'^2 + m_1\,r_1'^2 \;;\; Q_r\,d\,r + Q_{r_1}\,d\,r_1 = -\,k^2\,\rho\,d\,\rho$$

cioè, essendo

$$\rho\,d\,\rho = r\,d\,r + r_1\,d\,r_1 - \cos\alpha\,(r_1\,d\,r + r\,d\,r_1),$$

risultano le equazioni

$$r'' = h^2\,(-\,r + r_1 \cos\alpha) \;,\; r_1'' = h_1^2\,(-\,r_1 + r\cos\alpha)$$

dove

$$m\,h^2 = k^2 \;,\; m_1\,h_1^2 = k^2.$$

Eliminando r (oppure r_1) si ha

$$r^{\mathrm{IV}} + r''\,(h^2 + h_1^2) + r\,h^2\,h_1^2 \,\mathrm{sen}^2\,\alpha = 0.$$

L'integrale ha la forma

$$r = A\cos\mu\,(t - \beta) + B\cos\nu\,(t - \gamma)\,;$$

il moto di ciascuna massa risulta come composizione di due moti armonici.

10. Su due rette concorrenti in O e contenute in un piano verticale sono situate due masse m, m_1, congiunte con un filo flessibile e inestensibile che si accavalcia in O su di una piccola carrucola. Studiare il moto.

Dette x ed x_1 le distanze delle due masse da O ed l la lunghezza del filo, α ed α_1 gli angoli che le due rette fanno colla verticale, osserviamo che il lavoro virtuale delle forze d'inerzia è

$$m\,x''\,\delta x + m_1\,x_1''\,\delta x_1 = (m + m_1)\,x''\,\delta x\,;$$

e quello delle forze di gravità

$$m\,g\cos\alpha\cdot\delta x + m_1\,g\cos\alpha_1\cdot\delta x_1 = g\,(m\cos\alpha - m_1\cos\alpha_1)\,\delta x.$$

L'equazione fondamentale della dinamica, ci dà

$$(m + m_1)\,x'' = g\,(m\cos\alpha - m_1\cos\alpha_1) = \text{cost}.$$

Il moto di m (e quindi anche quello di m_1) è uniformemente accelerato, purchè

$$m\cos\alpha \neq m_1\cos\alpha_1\,;$$

l'equazione precedente poi vale fin tanto che m ed m_1 giacciono ognuno su ciascuna retta.

[SAINT-GERMAIN, l. c., pag. 248].

11. Stesso problema supponendo il filo sostituito da una catena omogenea pesante.

Se diciamo $d\,s$ e $d\,s_1$ rispettivamente due elementi dei tratti x e x_1 del filo e quindi rappresentiamo con $m\,d\,s$, $m\,d\,s_1$ le loro masse, accennando con m la massa dell'unità di lunghezza, la stessa equazione fondamentale ci dà

$$\int_0^x (m\,g\cos\alpha - m\,x'')\,d\,s = \int_0^{x_1} (m\,g\cos\alpha_1 - m\,x_1'')\,d\,s_1\,;$$

e di qui, posto come prima $l = x + x_1$,

$$-\, l x'' = g \{ (l - x) \cos \alpha_1 - x \cos \alpha \},$$

di cui integrale è

$$x = \frac{l \cos \alpha_1}{\cos \alpha + \cos \alpha_1} + A \operatorname{Ch} k (t + \tau)$$

dove

$$k^2 = \frac{g (\cos \alpha + \cos \alpha_1)}{l}\,.$$

[Saint-Germain, l. c., pag. 431].