CAPITOLO IV.

TEOREMI GENERALI SUL MOTO DI UN SISTEMA.

§ 1. **Lavoro. Energia potenziale.** — Quando si produce un cambiamento nella configurazione di un sistema, in contrasto a forze che si oppongono a tale cambiamento, si dice che si compie un lavoro. Così, per es., se si solleva un kg. all'altezza di un metro dal suolo si è consumata una certa quantità di lavoro (chilogrammetro); a sollevare lo stesso peso di un altro metro (ritenendo costante la gravità) si richiede la stessa quantità di lavoro e così via. In generale diciamo che:

Una forza costante f *che agisce su di un corpo nel senso del moto, producendo uno spostamento* s, *compie un lavoro misurato da* f s.

Se la forza non è costante, potremo ritenerla tale in ogni tratto infinitesimo della traiettoria del mobile (asse x): il prodotto $f\,d\,x$ dicesi *lavoro elementare* della forza; e la somma dei lavori elementari compiuti nel passaggio da a in b (ascisse dei punti di partenza e di arrivo), cioè

$$\int_a^b f \, . \, d\,x$$

misura il *lavoro totale* compiuto dalla forza variabile f nel passaggio del mobile dalla posizione a alla posizione b.

Supponiamo ora che una forza qualunque di vettore $\mathbf{F}$ solleciti un punto mobile P; in un elemento $d\,s$ di traiettoria possiamo riguardare la forza costante. *Dicesi lavoro elementare della forza il prodotto scalare della forza e dello spostamento del punto d'applicazione,*

$$\mathbf{F} \times d\,P \, .$$

Per tale lavoro vale quindi ciò che si disse pel lavoro virtuale (Vol. I, pag. 258); da cui differisce solamente perchè lo spostamento di P è ora l'effettivo spostamento subìto dal punto mobile nel tempo $d\,t$.

La somma dei lavori elementari compiuti da una forza nel passaggio del punto d'applicazione da una posizione a, corrispondente, per es., al tempo t_0, ad un'altra b, corrispondente al tempo t_1, dicesi *lavoro totale* ed è quindi espresso da

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \times d\,P \, .$$

Considerando finalmente un qualunque sistema materiale soggetto a forze, diremo lavoro elementare delle forze del sistema la somma algebrica dei lavori elementari delle singole forze: lo rappresenteremo con dW, attribuendo però a questa notazione il significato di quantità infinitesima e non quello di differenziale esatto di una funzione; per modo che

$$(1) \qquad dW = \Sigma \, \mathbf{F} \times dP$$

in cui la sommatoria (nel caso di un sistema continuo) sarà sostituita da un integrale.

Finalmente il lavoro compiuto dalle forze di un sistema nel passaggio da una configurazione che accenneremo con a ad un'altra b, è espresso da

$$(2) \qquad \int_a^b \Sigma \, \mathbf{F} \times dP.$$

Nel sistema di misure assolute l'unità di lavoro è l'*erg*; cioè il lavoro che si deve compiere per spostare di un cm. il punto di applicazione di una dine. L'equazione di dimensione del lavoro è

$$[W] = [m, l,^2 t^{-2}].$$

In un luogo in cui $g = 981$ (cm., sec^{-2}) la dine vale circa 1,02 mg.; quindi l'*erg* equivale all'incirca al lavoro necessario per spostare il peso di 1 mg. di un cm. Unità più pratiche di lavoro sono:

megaerg $= 10^6$ erg $= 1{,}02$ (kg., cm.) $= 0{,}0102$ (Kg., m.)

Joule $= 10$ megaerg $= 0{,}102$ (kg., m.). (*)

In generale il calcolo del lavoro, colla (2), esige una quadratura; ma la forza dipende dalla posizione e dalla velocità del punto di applicazione e dal tempo; però per eseguire tale quadratura occorre aver espresso questi elementi per il tempo: occorre cioè aver già risolto il problema del moto.

Ora nella maggior parte dei casi che si presentano in natura, ha luogo questa notevole circostanza: *il calcolo del lavoro non esige la conoscenza del movimento.* Ciò avviene quando:

Il lavoro elementare delle forze di un sistema è il differenziale esatto di una funzione uniforme (cioè ad un sol valore) finita, derivabile, delle variabili che individuano la posizione del sistema:

$$(3) \qquad \Sigma\, \mathrm{F} \times dP = -\, d\,\Pi.$$

Il lavoro elementare è il decremento di una funzione Π, uniforme, ecc.

(*) La denominazione e la precisa definizione di lavoro si devono a CORIOLIS: *Traité de la mécanique*, 1829. Ma il concetto apparisce già nei fondatori della dinamica moderna e sopratutto in CARNOT: *Essai sur les machines*, 1784.

Poichè si chiama energia di un sistema l'attitudine a compiere un lavoro, così la funzione Π dicesi *energia di posizione*, cioè dipendente dalla sola posizione del sistema, o *energia potenziale*.

In tal caso il lavoro compiuto dalle forze del sistema nel passaggio dalla posizione o configurazione a alla b è espresso da

$$(4) \qquad W_{ab} = -(\Pi_b - \Pi_a) = \Pi_a - \Pi_b\,;$$

Il lavoro totale è misurato dal decremento dell'energia potenziale.

Esso quindi (per essere Π ad un sol valore) è indipendente dalle posizioni intermedie del sistema (tra a e b); ma dipende solamente dalle posizioni iniziale e finale, ed è nullo se esse coincidono.

Siffatti sistemi di forze diconsi *conservativi.*

La funzione Π, per la (3), è definita a meno di una costante; se scegliamo questa costante in modo che, per es., $\Pi_b = 0$; allora l'energia potenziale in a è il lavoro compiuto dalle forze nel passaggio del sistema da a in b.

§ 2. **Esempi di sistemi conservativi.** — Considereremo anzitutto tre casi notevoli di sistemi conservativi.

1. Supponiamo che la posizione di un sistema dipenda da k coordinate generali $q_1, q_2, \ldots$; e che Π sia quindi funzione delle sole q; la

espressione del secondo membro di (1) è riducibile alla forma $\Sigma\, Q_r\, d\, q_r$ e quindi le Q_r risultano eguali alle derivate negative di Π rispetto alle q_r. E' questo il caso considerato al § 3 del capitolo precedente.

2. Consideriamo il caso che il lavoro elementare sia un differenziale esatto indipendentemente dalle condizioni vincolari del sistema, e anche indipendentemente dalla sua composizione. Deve quindi essere differenziale esatto il lavoro di ogni singola forza applicata ad ogni punto materiale; cioè

$$\mathbf{F}_r \times d\, P_r = d\, U_r\,,$$

donde

$$\mathbf{F}_r = \text{grad}\; U_r\,. \tag{5}$$

Ciò avviene nei sistemi pesanti; se, ad es., si tratta di masse m_1,.... concentrate nei punti P_1...., scegliendo l'asse z verticale e diretto verso l'alto si trova subito $U_1 = -\, m_1\, g\, z_1$, ecc.; sicchè posto

$$U = -\, g\, (m_1\, z_1 + m_2\, z_2 + \ldots) \tag{6}$$

le forze risultano eguali al gradiente della U rispetto ai vari punti di applicazione. Si dice che le forze derivano dal *potenziale* U. L'energia potenziale differisce da U pel segno.

È importante notare che le forze potrebbero in generale essere risultanti di forze derivabili da un potenziale e di altre dipendenti dalla velocità e il cui lavoro è nullo. Così, per es., se nel moto di un punto libero o situato su di una curva o superficie fissa, si ha

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} U + \mathbf{a} \wedge P'$$

dove **a** è un vettore qualunque, risulta ancora evidentemente

$$\mathbf{F} \times dP = dU. \text{ (*)}$$

Più generalmente nel caso in cui i punti materiali sono soggetti ad una forza costante *(campo uniforme)*, parallela ad un vettore unitario **k** *(direzione del campo)* e di intensità f *(intensità del campo)*, si ha

$$W_{ab} = \int_a^b f\mathbf{k} \times dP = f(P_b - P_a) \times \mathbf{k}$$

avendo accennato con P_a e P_b le posizioni iniziale e finale del punto mobile. Il secondo membro esprime il prodotto di f per la proiezione del vettore $P_b - P_a$ su **k**. Si verifica quindi subito la indipendenza del lavoro compiuto non solo dalle posizioni intermedie, ma ancora dalle posizioni

(*) Helmholtz, *Über die Erhaltung der Kraft* (1847). Ostwald's Klassiker der ex. Wiss. Nr. 1. L'osservazione è di Lipschitz; vedi ibidem, p. 55.

che P_a e P_b possono assumere sui piani condotti per essi normalmente a $\mathbf{k}$ *(superficie di livello)*. Le normali a tali superficie *(linee di forza)* sono parallele alla direzione delle forze. Si vede ancora che se O è un punto qualunque:

$$\Pi(P) = -f(P-O) \times \mathbf{k}\,.$$

3. Passiamo finalmente al caso delle forze centrali. Un punto materiale è soggetto ad una forza diretta verso un centro fisso O e di intensità funzione della sola distanza r del punto P da O. Tale forza è quindi rappresentata da $\varphi(r)\dfrac{P-O}{r}$; ed il suo lavoro elementare da

$$\varphi(r)\frac{P-O}{r} \times dP = \varphi(r)\,dr\,;$$

che è appunto il differenziale esatto (cambiato di segno) della funzione della sola r (energia potenziale)

$$\Pi(r) = \int_r^\rho \varphi(r)\,dr \quad , \quad (\rho = \text{cost.})\,. \tag{7}$$

Quindi

$$W_{ab} = \int_a^b \varphi(r)\,dr = \Pi(a) - \Pi(b)\,. \tag{8}$$

Le superficie di livello sono sfere col centro in O; le linee di forza sono i raggi; il lavoro compiuto nel passaggio del mobile da P_a in P_b dipende solamente dai raggi a e b delle sfere passanti pei detti punti e non già dalla posizione di questi sulle sfere, nè dalle posizioni intermedie.

Due masse in P e P_1 esercitano tra loro una azione diretta secondo la congiungente i due punti, funzione della sola distanza e proporzionale alle masse; e rappresentata quindi da $m\, m_1\, \varphi(r)$. Riterremo $\varphi(r) > 0$ se i due punti si respingono, cioè se r tende ad aumentare; mentre riterremo $\varphi(r) < 0$ nel caso dell'attrazione. I lavori elementari della forza che P_1 esercita su P e di quella che P esercita su P_1 sono espressi da

$$m\, m_1\, \varphi(r) \frac{P - P_1}{r} \times dP\,, \; m\, m_1\, \varphi(r) \frac{P_1 - P}{r} \times dP_1\,;$$

e il lavoro complessivo da

$$m\, m_1\, \varphi(r) \frac{(P - P_1) \times d(P - P_1)}{r} = m\, m_1\, \varphi(r)\, dr\,.$$

Di guisa che posto, come nel caso precedente,

$$\text{(9)} \qquad \Pi(r) = m\, m_1 \int_r^\rho \varphi(r)\, dr\,,$$

il lavoro elementare viene espresso da $-d\Pi$; dunque Π, definita a meno di una costante, è l'energia potenziale del sistema delle due masse soggette a forze centrali.

Il lavoro compiuto da tali forze nel passaggio dalla posizione in cui le due masse sono alla distanza r a quella in cui sono alla distanza r_1, è dato da

$$W_{rr_1} = \Pi(r) - \Pi(r_1). \tag{10}$$

Posto

$$P(r) = m\,m_1 \int_r^\infty \varphi(r)\,dr, \tag{11}$$

nell'ipotesi che $\varphi(r)$ sia integrabile tra r ed ∞, si vede subito che P differisce da Π per una costante e quindi ancora

$$W_{rr_1} = P(r) - P(r_1);$$

in particolare

$$W_{r\infty} = P(r).$$

P dicesi *autopotenziale* del sistema (delle due masse), e rappresenta il lavoro compiuto dalle forze nel passaggio dalla posizione attuale a quella in cui i due punti sono a distanza infinita tra loro; in cui, come dicesi, il sistema è disgregato. Tanto Π che P dipendono dalla sola posizione reciproca delle due masse.

Le stesse cose si estendono subito ad un sistema di masse che a due a due esercitano una azione diretta secondo la congiungente i due punti, proporzionale alle masse e funzione della sola distanza. L'energia potenziale sarà espressa in modo del tutto analogo alla (9), solo che nel secondo membro avremo una sommatoria estesa alle masse due a due; e così per l'autopotenziale.

Più generalmente ancora potremo estendere le precedenti considerazioni al caso di due sistemi di masse m e m' soggette alle solite forze. Posto

$$(12) \qquad Q = \Sigma\, m_i\, m'_j \int_{r_{ij}}^{\infty} \varphi(r)\, dr$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le masse m_i e m'_j dei due sistemi, Q rappresenta il lavoro compiuto dalle azioni mutue dei due sistemi per il passaggio dalla posizione attuale, a quella in cui i due sistemi sono a distanza infinita tra loro e dicesi *potenziale mutuo*.

Se il secondo sistema si riduce ad una sola massa m' posta in P, avremo

$$(13) \qquad Q = m' \,\Sigma\, m_i \int_{r_i}^{\infty} \varphi(r)\, dr\,;$$

e per un dato sistema di masse m la sommatoria non dipende che dalla posizione del punto P.

Pongasi

$$(14)\qquad V = \Sigma\, m_i \int_{r_i}^{\infty} \varphi(r)\, dr = V(P);$$

V dicesi *funzione potenziale* in P del sistema ed il punto P, *punto potenziato;* allora

$$Q = m' V$$

e se $m' = 1$, è $V = Q$.

La funzione potenziale di un sistema di masse (che esercitano un'azione centrale su di un'altra massa) è il potenziale mutuo del sistema dato e di una massa unitaria posta nel punto potenziato; oppure:

E' il lavoro compiuto dalle forze del sistema nel passaggio dell'unità di massa dal punto P all'infinito.

La risultante delle azioni che le masse m esercitano sulla massa m', è espressa da

$$-\, m' \operatorname{grad}_P V.$$

(Vedi Cap. VI, § 1).

Nel caso dell'attrazione newtoniana (Cap. II, § 3)

$$\varphi(r) = \frac{f}{r^2}\,, \quad \int_r^{\infty} \varphi(r)\, dr = \frac{f}{r};$$

quindi

$$(15)\qquad V = f\,\Sigma\,\frac{m}{r}.$$

La sommatoria, nel caso di sistemi continui, deve essere sostituita da un integrale.

§ 3. **Energia cinetica.** — Già nel caso del moto di un punto libero od obbligato a restare sopra una curva o superficie fisse, abbiamo trovato una relazione importante, detta integrale delle forze vive o della conservazione dell'energia (Cap. II, § 1). Definiremo ora in generale:

L' energia cinetica, o forza viva, di un qualunque sistema materiale al tempo t *è la semisomma dei prodotti delle masse lei vari punti del sistema per il quadrato delle rispettive velocità.*

Accennandola con T si ha dunque

$$(16) \qquad 2\,T = \Sigma\, m\, P'^2 = \Sigma\, m\, P' \times P'.$$

Le dimensioni dell'energia cinetica sono $[m, l^2, t^{-2}]$, cioè quelle stesse di un lavoro.

Da (16) si deduce, differenziando

$$(17) \quad d\,T = \Sigma\, m\, P'' \times \mathbf{P}'\, d\,t = \Sigma\, m\, \mathbf{P}'' \times d\,P;$$

L' incremento di energia cinetica è eguale al lavoro elementare delle forze d' inerzia.

Dimostriamo che:

L'energia cinetica di un sistema è eguale alla somma dell'energia cinetica nel moto relativo al centro di massa e dell'energia cinetica del centro *di massa in cui si immagini riunita tutta la massa del sistema.*

Infatti sia G il centro di massa del sistema al tempo t; e riferiamo il moto ad un sistema connesso con G. Il teorema di Coriolis ci dà

$$P' = P'_r + G'.$$

Ma (Vol. I, pag. 219)

$$\Sigma\, m\,(P - G) = 0 \quad ; \quad \Sigma\, m\, P'_r = 0$$

quindi

$$2\, T = \Sigma\, m\, P_r^{\prime 2} \quad + \quad G'^2\, \Sigma\, m.$$

§ 4. Teorema ed integrale della conservazione dell'energia.

Diremo che un sistema materiale è a vincoli indipendenti dal tempo quando, tra gli infiniti sistemi di spostamenti virtuali invertibili, è anche compreso lo spostamento effettivo all'istante t; cioè se $d\,P = \delta\,P$.

Una tale proprietà non sussiste sempre: basta riflettere al moto di un punto su una superficie fissa e mobile. Infatti gli spostamenti virtuali invertibili sono sempre contenuti sulla superficie, mentre lo spostamento effettivo è contenuto sulla superficie (e quindi può farsi $\delta\,P = d\,P$) se questa è fissa, ed è esterno alla posizione da essa occupata al tempo t, se è mobile.

Limitiamoci alla considerazione dei sistemi olonomi: è facile dimostrare:

Perchè tra gli infiniti sistemi di spostamenti invertibili di un sistema olonomo, al tempo t, *sia compreso lo spostamento effettivo è necessario e basta che le equazioni dei vincoli non contengano esplicitamente il tempo.*

Infatti sia $f(\ldots P \ldots, t) = 0$ l'equazione di uno dei vincoli, che conterrà almeno uno dei punti, oltre il tempo.

Uno spostamento virtuale invertibile, all'istante t, è tale che

$$\Sigma \operatorname{grad} f \times \delta P = 0$$

(Vol. I, pag. 256). Lo spostamento effettivo invece essendo tale che

$$f(\ldots P + dP \ldots t + dt) = 0\,,$$

deve soddisfare alla

$$\frac{\partial f}{\partial t} dt + \Sigma \operatorname{grad} f \times dP = 0\,.$$

Se quindi $dP = \delta P$ deve essere $\dfrac{\partial f}{\partial t} = 0$ e reciprocamente. Il teorema è dunque provato.

Ciò giustifica pienamente la denominazione di *sistemi a vincoli indipendenti dal tempo* per ogni sistema in cui $dP = \delta P$.

Ciò posto, si ha:

In ogni sistema a vincoli indipendenti da tempo, l'incremento della energia cinetica è egual al lavoro compiuto dalle forze nel passaggio de sistema da una posizione ad un'altra.

Infatti l'equazione fondamentale della dinamic (Cap. III, § 1) ci dà

$$\Sigma \mathbf{F} \times d P = \Sigma m \mathbf{P}'' \times d P ;$$

quindi, per la (1) e la (17):

$$d W = d T ;$$

e integrando tra una posizione a e una posizione b

$$W_{ab} = T_b - T_a , \tag{18}$$

la quale prova l'asserto.

Questa relazione notevolissima tra energia c netica e lavoro non permette però, in general di conoscere nè il lavoro, nè l'energia cinetic se non è conosciuto il moto.

Supponiamo di più che le forze siano conse vative, allora:

In ogni sistema a vincoli indipendenti d tempo e soggetto a forze conservative, la somm dell'energia cinetica e dell'energia potenziale, ci l'energia totale del sistema, è costante per tutta durata continua del moto.

Infatti, se diciamo Π l'energia potenziale, da (4) e (18) ricaviamo:

$$\Pi_a - \Pi_b = T_b - T_a$$

ossia

$$(19) \qquad \Pi_b + T_b = \Pi_a + T_a\,;$$

ma la posizione *a* è arbitraria, dunque è vero il teorema.

L'energia totale dunque è una quantità che non può essere nè aumentata, nè diminuita: l'energia cinetica, quindi, aumenta o diminuisce di quanto diminuisce o aumenta l'energia potenziale: cioè l'una si trasforma nell'altra o si risolve in un lavoro.

Questo è *il principio della conservazione dell'energia,* dimostrato pei sistemi materiali e che, colla scoperta di altre forme di energia, si è esteso a tutte le energie e costituisce una delle leggi fondamentali della natura. (*)

(*) HUYGENS [*Horologium oscillatorium*, Pars IV, prop. 4 (1673)] è stato il primo a far uso di questo principio meccanico nel problema del pendolo composto. Altri esempi sono dovuti a GIOVANNI BERNOULLI, Comm. Petrop., 2 (1727), p. 200 e in generale a DAN. BERNOULLI, in *Hydrodynamica*, 1738 e Mem. Acad. de Berlin, 1748, p. 356 e a d'ALEMBERT [*Traité de Dynamique*. Part. II, Ch. IV]. Vedi le note di HELMHOLTZ nel libro citato al § 2 e MACH, lib. cit.

La relazione (19), lasciando indeterminata la posizione del sistema, si scrive

$$(20) \qquad T + \Pi = h = \text{cost.},$$

e costituisce un integrale primo delle equazioni del moto, quadratico rispetto alle componenti della velocità.

Nei sistemi con un sol grado di libertà, soggetti a forze dipendenti dalla sola coordinata q del sistema, avendosi

$$\Pi(q) = -\int Q\, d q$$

con Q, forza generalizzata, funzione della sola q, e inoltre

$$2\, T = \Sigma\, m \left(\frac{\partial P}{\partial q}\right)^2 q'^2 = q'^2\, F(q),$$

la (20) si trasforma in una equazione differenziale del 1° ordine a variabili separabili, che con una quadratura ci farà conoscere q mediante t. Dunque il solo integrale (20) riconduce la determinazione del moto alle quadrature.

Tale proprietà è applicata nelle macchine, nel moto di un corpo pesante intorno ad un asse fisso, di un punto su di una curva fissa, ecc.

Più in generale si potrebbe dimostrare:

Se in un sistema olonomo con k *gradi di libertà sussiste l'integrale* (20) *della conservazione* *dell'energia, la integrazione delle equazioni del moto si può ricondurre a quella di un sistema con* k — 1 *gradi di libertà, per il quale però non sussiste più, in generale, l'integrale* (20).

E di qui si deduce ancora:

Se nello stesso sistema, k — 1 *coordinate sono ignorate, la integrazione delle equazioni del moto si riconduce alle quadrature.* (*)

Nel moto di un punto pesante, libero o mobile su di una curva o superficie fissa, si ha, in particolare, l'asse z verticale in alto,

$$v^2 + 2gz = h.$$

Le superficie di livello sono piani orizzontali: ed il mobile incontra una stessa superficie di livello, qualunque sia la traiettoria, colla stessa velocità.

Quindi un grave, che partendo da uno stesso punto e dal riposo, cada liberamente nel vuoto o percorra vari piani inclinati, giungerà su di uno stesso piano orizzontale sempre colla stessa velocità. (**)

(*) Whittaker, Mess. of Mathem (2), **30**, p. 93 (1900); *Analytical Dynamics*, Cambridge 1904, pag. 63 e seg.

(**) Galileo, *Dimostrazioni matem. intorno a due nuove scienze*. Ediz. naz. **8**; giornata 3ª. Per la storia di questo principio, ammesso anzitutto da Galileo come postulato, vedasi l'opera del Caverni, **4**, Cap. 5°.

Nel moto di un sistema[1] di punti soggetti a forze centrali si ha

$$T + P = T_0 + P_0;$$

se quindi la posizione iniziale (contrassegnata coll'indice o) non è di equilibrio e il sistema parte dal riposo, si ha $T_0 = 0$; quindi

$$T = P_0 - P;$$

e per essere T positivo si deduce che

Il potenziale ha tendenza a diminuire.

§ 4. **Stabilità dell'equilibrio.** — Le considerazioni precedenti permettono di dare la dimostrazione rigorosa di un principio adoperato nella Statica (Vol. I, pag. 273) e cioè:

La posizione del sistema, in cui l'energia potenziale è un minimo, è di equilibrio stabile. (*)

Siano $q_1, q_2, \ldots q_n$ le coordinate generali di un sistema a vincoli indipendenti dal tempo; Π l'energia potenziale dipendente da tutte le q. In una posizione in cui $q_1 = a_1, \ldots, q_n = a_n$, Π abbia un valor minimo. Sappiamo già che in questa posizione vi ha equilibrio; di più potendo assumere

(*) Si osservi che in statica abbiamo sempre parlato di potenziale di forze che è per noi eguale e di segno contrario all'energia potenziale.

come nuove variabili le $q_1 - a_1, \ldots, q_n - a_n$; potremo supporre nulle le $a_1, \ldots, a_n$; infine, approfittando del fatto che Π è determinata a meno di una costante, potremo supporre che il valore minimo sia zero.

Quindi, scelto ad arbitrio ε, per ogni q_i tale che $q_i^2 < \varepsilon^2$, sarà $\Pi > 0$. La condizione imposta equivale alla

$$q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_n^2 < \varepsilon^2,$$

che può interpretarsi dicendo che il punto P $(q_1, q_2, \ldots q_n)$ di uno spazio ad n dimensioni è interno alla sfera di raggio ε col centro nella origine. La superficie limite di questo campo sferico è rappresentata dalla

$$q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_n^2 = \varepsilon^2.$$

Diciamo m il più piccolo dei valori che Π assume sulla superficie limite del campo; rimoviamo il sistema infinitamente poco dalla sua posizione di equilibrio, imprimendo una piccola velocità ai vari punti. In questa nuova posizione, le q_i saranno molto piccole e così del pari l'energia cinetica e potremo sempre sceglierle in modo che (riguardata la posizione come iniziale)

$$T_0 + \Pi_0 < m.$$

Il sistema si porrà in movimento; ma sussistendo la (20), sarà per tutta la durata del moto

$$T + \Pi < m$$

e quindi

$$m - \Pi > 0.$$

È dunque impossibile che il punto P, benchè spostato dalla sua posizione di equilibrio, raggiunga la superficie limite del campo, che in tal caso $m - \Pi$ risulterebbe negativo o nullo. Dunque P resta sempre nell'interno (arbitrariamente piccolo) del campo sferico, cioè la *posizione di equilibrio è stabile.* (*)

È stato dimostrato che, quando in una posizione di equilibrio, Π è massima e la esistenza di questo massimo si riconosce dai termini di ordine meno elevato nello sviluppo in serie di Π, allora l'equilibrio è instabile. (**)

(*) Questo teorema è dovuto a LAGRANGE, *Méc. analy.* Oeuvres compl. **11**, pag. 69 e 457. La dimostrazione generale e rigorosa (indipendente da sviluppi in serie) fu data da MINDING, *Mechanik*, Berlin 1838, pag. 268 e poi da DIRICHLET, Journ. für Mathem, **32**, pag. 85 (1846); Werke, **2**, pag. 3. La condizione che Π debba dipendere da tutte le q trovasi in APPELL, *Méc. rationnelle*, **2**, pag. 353.

(**) LIAPUNOFF, Journ. de Math. (5) **3**, pag. 81 (1897) Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, (2) **9**, pp. 203-274 (1908); in particolare vedasi pag. 295; HADAMARD, Journ. de Math. (5) **3**, (1897), pp. 331-387 e in particolare pag. 364; KNESER, Journ. für Math. **115**, pag. 308 (1895); **118**, pag. 186 (1897).

Se invece Π non è, nella posizione di equilibrio considerata, nè massima nè minima, nulla può dirsi con sicurezza. Così se la non esistenza di un minimo si riconosce dai termini di secondo grado nello sviluppo di Π, allora l'equilibrio è instabile; mentre sono stati assegnati dei casi generali in cui, benchè il minimo non esista, tuttavia l'equilibrio è stabile. (*)

§ 5. **Impulso di un sistema. Teoremi ed integrali del centro di massa e delle aree.** — Consideriamo gl'impulsi $m\,P'$ dei vari punti di un sistema; cioè quel sistema d'impulsi che, in modo istantaneo, sarebbe capace di far assumere al sistema, supposto in quiete, lo stato di moto al tempo t (Cap. I, § 5). Tale sistema di impulsi si dirà *impulso del sistema all'istante* t.

Riguardati i vari impulsi come un sistema di forze istantanee, diciamo $\mathbf{R}$ la risultante o semplicemente vettore impulso, $\mathbf{M}$ il momento risul-

---

(*) Liapunoff, mem. cit.; Painlevé, Comp. rendus, **125**, p. 1021 (1897); **138**, p. 1555 (1904); Hamel, Math. Ann., **57**, pag. 541 (1903). Per i sistemi con un sol grado di libertà, a vincoli indipendenti dal tempo, l'equilibrio è instabile se l'energia potenziale non è minima; vale cioè la reciproca del teorema di Lagrange, come ha mostrato Levi-Civita: *Sulla stabilità dell'equilibrio per i sistemi a legami completi.* [Atti Ist. Veneto (7) 8, (1896-97)].

tante rispetto ad un punto fisso O; poniamo cioè

$$(21) \quad \mathbf{R} = \Sigma\, m\, P' \;,\; \mathbf{M} = \Sigma\, m\, (P - O) \wedge P' \;;$$

esse diconsi le *coordinate dell'impulso del sistema*. Una prima proprietà dell'impulso è la seguente:

La risultante degli impulsi è eguale all'impulso del centro di massa in cui si immagina concentrata tutta la massa del sistema.

Si ha infatti

$$\mu\,(G - O) = \Sigma\, m\,(P - O),$$

detta μ la somma delle singole masse. Quindi derivando rispetto al tempo:

$$(22) \qquad \mu\, G' = \mathbf{R}\,.$$

Diciamo $\mathbf{R}_e$ ed $\mathbf{M}_e$ le coordinate delle forze applicate ai vari punti del sistema (forze esterne): poniamo cioè

$$(23) \quad \mathbf{R}_e = \Sigma\, \mathbf{F} \;,\; \mathbf{M}_e = \Sigma\,(P - O) \wedge \mathbf{F}\,.$$

Si hanno le seguenti fondamentali proprietà.

1. *Se i vincoli del sistema permettono uno spostamento virtuale invertibile, dovuto ad una traslazione in una determinata direzione, allora la derivata della componente, secondo quella direzione, del vettore impulso è eguale alla componente della risultante delle forze esterne, sempre secondo quella direzione.*

Abbiamo infatti, pel principio di d'Alembert,

$$\Sigma(\mathbf{F} - m P'') \times \delta P = 0;$$

e per l'ipotesi fatta, poniamo

$$\delta P = k \mathbf{a},$$

essendo k una costante, qualunque sia il punto, $\mathbf{a}$ un vettore fisso. Si otterrà

$$\Sigma m P'' \times \mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F} \times \mathbf{a}$$

ossia, in virtù delle (21) e (23)

$$(24) \qquad (\mathbf{R} \times \mathbf{a})' = \mathbf{R}_e \times \mathbf{a},$$

che dimostra il teorema.

2. *Se le condizioni del precedente teorema sono soddisfatte per tre direzioni qualunque non complanari, allora la derivata del vettore impulso (o anche la variazione del vettore impulso nell'unità di tempo) è eguale alla risultante delle forze esterne; cioè*

$$(25) \qquad \mathbf{R}' = \mathbf{R}_e.$$

Questo teorema dicesi: *primo teorema dell'impulso.*

In tal caso infatti il sistema può ricevere uno spostamento (traslazione) parallelamente ad una qualunque direzione: allora, per la arbitrarietà di $\mathbf{a}$ nella (24), risulta la (25).

3. *Nelle condizioni del teorema precedente, il centro di massa del sistema si muove come se, concentrata in esso tutta la massa, fosse sollecitato dalla risultante delle forze esterne.*

Infatti la (25), tenuto conto della (22), ci dà

$$\mu G'' = \mathbf{R}_e, \tag{26}$$

che è l'equazione del moto di G di massa μ, sollecitato dalla forza di vettore $\mathbf{R}_e$.

Si deve per altro osservare che in generale $\mathbf{R}_e$ dipende dalla posizione e dalla velocità dei singoli punti del sistema, le quali non possono certamente esprimersi per le coordinate e la velocità di G. Basta osservare che uno stesso punto può essere centro di massa di infiniti sistemi. Quindi la (26) esprime una notevole proprietà del moto del centro di massa, ma non ci abilita a determinare tale moto, almeno in generale.

Il teorema dimostrato, di cui abbiamo già fatto qualche applicazione, dicesi *teorema della conservazione del moto del centro di massa* o brevemente *teorema del centro di massa.*

4. *Sempre nelle condizioni del teorema* 2, *se la risultante delle forze esterne è nulla, il vettore impulso è costante e il centro di massa si muove di moto rettilineo uniforme o sta in riposo.*

Infatti se $\mathbf{R}_e = 0$, segue da (25) $\mathbf{R} =$ cost., e da (26) risulta nulla l'accelerazione di G.

In tal caso sussistono i sei integrali del centro di massa rispetto ad una terna d'assi fissi; e cioè

$$(27) \begin{cases} \Sigma m x' = a \ , \ \Sigma m y' = b \ , \ \Sigma m z' = c \\ \Sigma m x = a t + a_1 \ , \ \Sigma m y = b t + b_1 \ , \\ \qquad \Sigma m z = c t + c_1 \ . \end{cases}$$

Essi sono algebrici e lineari nelle componenti della velocità e nelle coordinate dei vari punti. Se poi i vincoli fossero tali da permettere soltanto una traslazione parallelamente ad $\mathbf{i}$; e se inoltre $\mathbf{R}_e \times \mathbf{i} = 0$, allora sussisterebbero soltanto i due integrali

$$\Sigma m x' = a \ , \ \Sigma m x = a t + a_1 \ . \ (*)$$

Considerazioni e teoremi analoghi possono stabilirsi per il momento dell'impulso.

5. *Se i vincoli del sistema permettono uno spostamento virtuale invertibile, dovuto ad una rotazione intorno ad un determinato asse uscente da O, allora la derivata della componente, secondo quell'asse, del momento impulso è eguale alla componente del momento delle forze esterne, sempre secondo l'asse.*

(*) NEWTON, *Philos. natur. princ. math.*, Lib. I, pag. 17; d'ALEMBERT, *Traité de Dynamique*, 2ª parte, Ch. II; LAGRANGE, *Méc. anal.* **I**; Oeuvres comp. **11**, pag. 277.

Se **a** è un vettore unità parallelo all'asse, è possibile porre

$$\delta P = k\,\mathbf{a} \wedge (P - O)$$

con k costante qualunque sia il punto. E l'equazione fondamentale della dinamica ci dà

$$\Sigma\, m\, P'' \times \mathbf{a} \wedge (P - O) = \Sigma\, \mathbf{F} \times \mathbf{a} \wedge (P - O)$$

ossia

$$\mathbf{a} \times \Sigma\, m\, (P - O) \wedge P'' = \mathbf{a} \times \Sigma\, (P - O) \wedge \mathbf{F}$$

e in conseguenza

$$(\mathbf{M} \times \mathbf{a})' = \mathbf{M}_e \times \mathbf{a} \tag{28}$$

che prova il teorema.

6. *Se le condizioni del teorema precedente sono soddisfatte per due assi uscenti da O, allora la derivata del momento impulso (ossia la variazione del momento impulso nell'unità di tempo) è eguale al momento delle forze esterne rispetto ad O; cioè*

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M}_e\,. \tag{29}$$

Questo teorema dicesi *secondo teorema dell' impulso.*

Infatti, per la proprietà della composizione di due rotazioni intorno ad assi concorrenti, e quindi per la arbitrarietà di **a** nella (28), risulta la (29).

7. *Sempre nelle ipotesi del teorema 6, se è nullo il momento delle forze esterne rispetto O, il momento dell'impulso è costante.*

Ciò è immediata conseguenza della (29).

Questi ultimi risultati possono anche interpretarsi in altro modo.

Sieno (Figura 8) Q, $Q + Q'$ le proiezioni di P e $P + P'$ sul piano condotto per O normalmente al vettore unitario $\mathbf{a}$; Q' è la velocità di Q; e sia S l'area descritta da $Q - O$. Si ha (Vol. I, pag. 64)

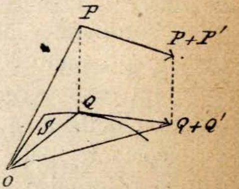

Fig. 8.

$$\mathbf{a} \times (P - O) \wedge P' = \mathbf{a} \times (Q - O) \wedge Q' = 2\, S' \, ;$$

e l'equazione (28) si trasforma in quest'altra

$$2 \frac{d}{dt} \Sigma\, m\, S' = \mathbf{M}_e \times \mathbf{a} \, .$$

Di qui:

8. *Se nelle condizioni del teorema* 5 *si ha* $\mathbf{M}_e \times \mathbf{a} = 0$, *risulta*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{M} = 2\, \Sigma\, m\, S' = \text{cost.}$$

ossia

$$(30) \qquad \Sigma\, m\, S = a\, t + a_1 \, .$$

Questa equazione chiamasi *integrale delle aree* nel piano normale ad $\mathbf{a}$.

Così se **a** è parallelo all'asse x, se sono soddisfatte le condizioni relative ai vincoli ed è inoltre $M_x = 0$, si ha

$$\Sigma m (y z' - y' z) = a . \tag{31}$$

Due integrali analoghi per gli altri due piani se $\mathbf{M} = 0$. Essi sono algebrici e bilineari rispetto alle coördinate e alle componenti della velocità dei singoli punti. (*)

In tal caso avremo tre integrali delle aree; il teorema delle aree è vero in un piano qualunque e la costante delle aree è la proiezione della coppia d'impulso sulla normale al piano; quindi per il piano normale all'asse di tal coppia e che dicesi *piano invariabile*, essa assume il valore massimo. (**)

Nel caso di un punto libero la condizione $M_x = 0$ esprime che la forza incontra l'asse x (Cap. II, § 1); nel caso di un punto mobile su di una superficie, perchè sussista la (31), oltre la condizione $M_x = 0$, occorre che la superficie sia di rotazione intorno lo stesso asse.

(*) NEWTON, *Philos. naturalis princ. math.* Lib. I, Sectio II, Prop. 1; D. BERNOULLI, *Nouveau problème de Mécanique.* [Mém. de l'Acad. de Berlin, 1745, pp. 54-70]; EULER, *Solutio problematis mechanici, etc.* Opuscula varii argumenti; **I**, pp. 1-136 (1747); d'ARCY, *Problème de dynamique* [Mém. de l'Acad. de Paris, 1747, pp. 344-361].

(**) LAPLACE, *Mécanique céleste.* Libro I; p. 65.

Nel moto di un sistema di n masse concentrate in altrettanti punti, soggette a forze dirette secondo le congiungenti i punti due a due e funzioni delle sole distanze (*problema degli* n *corpi*) sussistono dunque: l'integrale della conservazione dell'energia; i sei integrali del centro di massa e i tre integrali delle aree; cioè in totale *dieci* integrali, che per $n > 2$ non bastano alla determinazione del moto. (*)

Vogliamo finalmente osservare che le condizioni relative ai vincoli enunciate nei teoremi 2 e 6 sono certamente soddisfatte nel caso di un sistema di punti liberi e di un corpo rigido completamente libero. Dunque:

9. *Nel moto di un sistema di punti liberi o di un corpo rigido completamente libero valgono i due teoremi dell'impulso; cioè la variazione, nell'unità di tempo, delle coordinate dell'impulso è eguale alle coordinate omonime delle forze esterne; ossia*

$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}_e \,, \quad \mathbf{M}' = \mathbf{M}_e \,. \tag{32}$$

Questo teorema è la generalizzione della seconda legge del moto.

(*) Vedi per più ampii particolari e per la storia di questo problema: MARCOLONGO: *Il problema dei tre corpi da Newton (1686) ai nostri giorni.* [Atti R. Accad. Scienze fis. e mat. di Napoli, (2) **14**; N. 6 (1915); Nuovo Cimento, (6) **9**, **10** (1915)].

§ 8. **Azione di un sistema.** — Supponiamo che un sistema olonomo a vincoli qualunque (anche dipendenti dal tempo) sia soggetto a forze conservative e sia Π l'energia potenziale. Supposte integrate le equazioni del moto, possiamo immaginare costruita la funzione

$$V = \int_{t_0}^{t} (T + \Pi)\, dt. \tag{33}$$

Essa è stata chiamata da HAMILTON, *azione compiuta dal sistema nel passaggio dalla posizione corrispondente all'istante* t_0 *a quella all'istante* t.

Si dice anche che V è l'*integrale* o *funzione caratteristica* di HAMILTON. (*)

L'azione, come il lavoro compiuto dalle forze, non dipende che dalle posizioni iniziale e finale del sistema.

Immaginiamo infatti che le traiettorie dei punti del sistema varino infinitamente poco, attribuendo ad ogni punto uno spostamento virtuale compatibile coi vincoli, per modo che ad un punto, su di una determinata traiettoria, verrà a corrispondere un punto infinitamente prossimo e le coordinate generali q avranno variato di δq. L'azione, calcolata per rispetto alle nuove posizioni, avrà pure variato di δV, mentre vogliamo supporre

(*) Vedi nota al § 4, Cap. prec.

che il tempo del passaggio sia rimasto inalterato. Dalla (33) avremo

$$\delta V = \int_{t_0}^{t} \Sigma \left(\frac{\partial T}{\partial q_r} \delta q_r + \frac{\partial T}{\partial q'_r} \delta q_r - \frac{\partial \Pi}{\partial q_r} \delta q_r \right) dt;$$

inoltre:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial T}{\partial q'_r} \delta \frac{d q_r}{d t} dt = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial T}{\partial q'_r} \frac{d \delta q_r}{d t} dt = \left(\frac{\partial T}{\partial q'_r} \delta q_r \right)_{t_0}$$

$$- \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_r} \right) \delta q_r \, dt;$$

quindi, ricordando le (21) del capitolo precedente, risulta

$$\delta V = \Sigma (p_r \delta q_r - p_r^0 \delta q_r^0)$$

$$- \int_{t_0}^{t} \Sigma \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{d T}{\partial q'_r} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_r} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_r} \right\} \delta q_r \, dt$$

e tenendo conto delle equazioni del moto (seconda forma di LAGRANGE) si ha infine

$$\delta V = \Sigma (p_r \delta q_r - p_r^0 \delta q_r^0) . \tag{34}$$

Supponiamo ora fisse le posizioni estreme del sistema, corrispondenti ai tempi t e t_0; le traiettorie dei vari punti, pur variando infinitamente poco, hanno a comune le posizioni estreme; e però per queste $\delta q_r = \delta q_r^0 = 0$ e la (34) ci dà $\delta V = 0$, la quale prova il teorema.

Esso ci dice in fondo che *l'azione non ha va- variato;* e quindi si ha il *teorema dell'azione stazionaria.*

Reciprocamente, da questo teorema e ferme le precedenti ipotesi, seguono di necessità le equazioni del moto del sistema nella 2ª forma di LAGRANGE.

Più generalmente: posto

$$\delta V = \int_{t_0}^{t} \{\delta T + \Sigma Q \delta q\} dt$$

in cui $\Sigma Q \delta q$ è l'espressione del lavoro virtuale delle forze esterne (non necessariamente conservative), la condizione $\delta V = 0$ deve condurre alle equazioni del moto.

Essa può dedursi anche direttamente dal principio di d' ALEMBERT, integrando tra t_0 e t_1 e poscia integrando per parti, supponendo le δP funzioni continue del tempo.

Questa osservazione costituisce il così detto *principio di* HAMILTON, e fornisce un nuovo mezzo per la ricerca delle equazioni del moto di un sistema.

Se infine non si fa l'ipotesi della coincidenza delle posizioni iniziale e finale del sistema dato con quello infinitamente poco variato, varrà sempre la (34); essa costituisce il *teorema dell'azione variante.*

Come si è detto, la costruzione di V esige la risoluzione del problema del moto; cioè la ricerca delle q_r mediante il tempo e i valori iniziali delle coordinate e delle loro derivate. Quindi V risulterà funzione, oltre che delle q_r, anche di questi valori iniziali. Supposto sia possibile ricavare i valori iniziali delle derivate, mediante t, q_r e q_r^0, V risulterà funzione di questi parametri e però

$$\delta V = \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial q_r} \delta q_r + \frac{\partial V}{\partial q_r^0} \delta q_r^0 \right)$$

t essendo rimasto costante. Dal confronto colla (34), attesa l'arbitrarietà delle δq_r e $\delta q_r{}^0$, risulta

$$(35) \qquad p_r = \frac{\partial V}{\partial q_r} \quad , \quad p_r^0 = - \frac{\partial V}{\partial q_r^0} ;$$

Le componenti dell' impulso sono le derivate dell'azione rispetto alle coordinate generali del sistema.

Le (35) sono $2n$ relazioni tra p_r, q_r e $2n$ costanti (valori iniziali); esse sono dunque gli integrali delle equazioni del moto, i quali vengono così a dipendere dalla ricerca della funzione V. Vediamo se tale ricerca può farsi indipendentemente dalla integrazione delle equazioni del moto.

§ 9. Proprietà fondamentale dell'azione. Teorema di Jacobi. — Dimostriamo che:

L'azione soddisfa ad una equazione alle derivate parziali del primo ordine e di secondo grado.

Deriviamo infatti la (33) rispetto al tempo; risulta

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma \frac{\partial V}{\partial q_r} q'_r = T + \Pi$$

e per le (35)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma p_r q'_r - T - \Pi = 0 ;$$

introducendo quindi la funzione Θ e poi la H del § 4 del capitolo precedente si ha

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \mathrm{H} = 0 . \tag{36}$$

Se nella H, funzione delle q_r e funzione quadratica delle p_r, al posto di queste, per le (35) sostituiamo le $\frac{\partial V}{\partial q_r}$, otteniamo l'equazione richiesta.

È di capitale importanza notare che la regola precedente permette di formare, sempre, la (36).

L'importanza di questo risultato scaturisce dal seguente teorema fondamentale di Jacobi. (*)

(*) Jacobi, *Vorles. über Dynamik*, (1842-43), herausgeg. von Clebsch, Berlin 1866; Ges. Werke. Supplem. Berlin 1884; pag. 157.

Sia V $(t, q_1, q_2, \dots q_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)$ *un integrale completo della* (36); *cioè contenente* n *costanti arbitrarie nessuna delle quali addittiva; allora le*

$$(37)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial q_1} = p_1, & \dfrac{\partial V}{\partial q_2} = p_2, \dots \\ \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_1} = \beta_1, & \dfrac{\partial V}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \dots \end{cases}$$

dove le β *sono altre* n *costanti arbitrarie, sono gli integrali delle equazioni del moto.*

Ci limiteremo a fare una rapida verifica del teorema, provando inversamente che, dal sistema (37) si deducono effettivamente le equazioni del moto.

Infatti facendo variare le q_r e le α_r rispettivamente di δq_r e $\delta \alpha_r$, avremo

$$\delta V = \Sigma \left(\frac{\partial V}{\partial q_r} \delta q_r + \frac{\partial V}{\partial \alpha_r} \delta \alpha_r \right) = \Sigma (p_r \delta q_r + \beta_r \delta \alpha_r).$$

Derivando rispetto al tempo

$$(38)\qquad \frac{d \delta V}{dt} = \Sigma (p'_r \delta q_r + p_r \delta q'_r).$$

Ora

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \Sigma p_r q'_r = -\mathrm{H} + \Sigma p_r q'_r$$

in virtù della (36). Differenziando colla caratteristica δ si ha

$$(39)\quad \delta\frac{dV}{dt} = -\Sigma\left(\frac{\partial H}{\partial q_r}\delta q_r + \frac{\partial H}{\partial p_r}\delta p_r\right) + \Sigma(p_r\delta q'_r + q'_r\delta p_r);$$

e per la eguaglianza dei primi membri di (38) e (39) risulta

$$\Sigma\left[\left(q'_r - \frac{\partial H}{\partial p_r}\right)\delta p_r - \left(p'_r + \frac{\partial H}{\partial q_r}\right)\delta q_r\right] = 0$$

e potendo assumere ad arbitrio δq_r e δp_r risulta infine

$$q'_r = \frac{\partial H}{\partial p_r}\quad,\quad p'_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r},$$

cioè appunto le equazioni del moto sotto forma canonica.

In sostanza dunque: *il problema della ricerca degli integrali del moto di un sistema olonomo soggetto a forze conservative è identico con quello della ricerca di un integrale completo della* (36).

Se i vincoli sono indipendenti dal tempo, sussiste l'integrale dell'energia, e si ha

$$H = T + \Pi = h,$$

cioè H rappresenta *l'energia totale*. Poniamo

$$(40)\quad V = -ht + W(q_1, q_2, \ldots q_n).$$

L'equazione (36) si trasforma nell'altra più semplice

$$(41) \quad H\left(q_1, q_2, \ldots, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots\right) = h$$

contenente le sole derivate della funzione W che funge in questo caso da *funzione caratteristica.*

Determinato un integrale completo della (41), cioè un integrale contenente, oltre h, altre $n - 1$ costanti $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ arbitrarie, nessuna additiva, gli integrali ultimi del problema di meccanica sono

$$(42) \quad \frac{\partial W}{\partial h} = t + \tau, \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \ldots, \frac{\partial W}{\partial \alpha_{n-1}} = \beta_{n-1}$$

essendo $\tau, \beta_1, \ldots \beta_{n-1}$ altre n costanti arbitrarie. (*)

§ 10. **Teorema della minima azione e del minimo sforzo.** — Ci limiteremo a enunciarli. Supponiamo intanto che sussista l'integrale dell'energia, cioè l'integrale (20) e consideriamo

$$(43) \qquad \int_{t_0}^{t} T\,dt = \frac{1}{2} \Sigma \int m\,v\,ds;$$

(*) Per tutta questa teoria, di cui qui è dato appena un fugace cenno, si vedano la citata opera di Jacobi e sopratutto l'*Analytical Dynamics* del Whittaker.

si suppongano dati per t e t_0 i valori delle coordinate generali del sistema ed il valore di T per $t = t_0$, ciò che equivale a fissare la costante h della (20). Si ha:

Le funzioni q *di* t *che rappresentano gli integrali del moto, rendono minimo l'integrale* (43); *o più precisamente annullano la sua variazione prima.*

Questo è il principio detto della minima azione. (*)

(*) Il principio della minima azione è dovuto a MAUPERTUIS: *Accord des différentes lois de la nature.* [Mém. de l'Acad. de Paris, 1744]; *Des lois de mouvement et de repos déduites d'un principe métaphysique.* [Mém. de l'Ac. de Berlin, 1745, pag. 286; Oeuvres, Lyon, 1768], che non ne diede una vera dimostrazione, ma si contentò di verificarlo in alcuni casi. Questo principio sollevò una vivace e famosa polemica. Vedi: JACOBI, *Vorles ü. Dynamik*, p. 43; MACH, l. c., pp. 346-348; e per più ampie notizie storiche: HELMHOLTZ, *Zur Geschichte d. Prin. der kleinsten Action* [Berliner Berichte, 1887, pag. 225; Gesamm. Abhand., **3**, pag. 249]; MAYER, *Storia del principio della minima azione* [Bull. Bibliogr. di BONCOMPAGNI, **II**, pp. 155-156 (1878)].

La sua esatta formulazione è dovuta ad A. MAYER [Leipziger Berichte **38**, pag. 343 (1878)] e ad O. HÖLDER [Göttinger Nachrichten, 1896, pag. 150].

Vedansi ancora le opere di MAGGI, pagina 181 e di WHITTAKER.

Nelle stesse condizioni la

$$\Sigma \left\{ \frac{1}{m} (m P'' - \mathbf{F})^2 \right\}$$

riesce pure un minimo pel movimento effettivo; e si ha il teorema del *minimo sforzo di* GAUSS. (*)

Esercizi.

1. Trattare col metodo di JACOBI il problema del moto di un punto attratto da un centro fisso con una forza funzione della sola distanza.

Il centro di attrazione sia nell'origine delle coordinate e la posizione del punto sia fissata dal raggio vettore q_1, dalla colatitudine q_2 e dalla longitudine q_3. Si ha

$$2\,T = m\,(q_1'^2 + q_1^2\,q_2'^2 + q_1^2 \operatorname{sen}^2 q_2 \,.\, q_3'^2),$$

e poichè le componenti dell'impulso sono

$$p_1 = m\,q'_1 \quad , \quad p_2 = m\,q_1^2\,q'_2 \quad , \quad p_3 = m\,q_1^2 \operatorname{sen}^2 q_2 \,.\, q'_3$$

(*) GAUSS, *Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik* [Journ. für Math. **4**, pag. 232 (1829). Werke **5**, pag. 23]. Vedasi sopratutto: BOLTZMANN: *Vorles über die Prinzipe der Mech.* **I**, pag. 65 e i lavori citati di GIBBS e APPELL al § 3, Cap. III; i quali contengono un approfondito esame sulle relazioni tra il principio di GAUSS e quello delle velocità virtuali.

risulta

$$2T = \frac{1}{m}\left(p_1^2 + \frac{1}{q_1^2} p_2^2 + \frac{1}{q_1^2 \operatorname{sen}^2 q_2} p_3^2\right).$$

L' energia potenziale è poi espressa da una funzione di q_1; e poichè ha luogo l'integrale della conservazione dell'energia, l'equazione (41) diventa

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{q_1^2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{1}{q_1^2 \operatorname{sen}^2 q_2}\left(\frac{\partial W}{\partial q_3}\right)^2 = 2m\,[h - \Pi(q_1)].$$

In questa la q_3 non figura esplicitamente; si cerca di soddisfarvi ponendo

$$W = W_1 + W_2 + \alpha_2 q_3$$

in cui α_2 è una costante, W_1 funzione della sola q_1 e W_2 funzione della sola q_2. L'equazione precedente si spezza in queste altre due

$$\left(\frac{d W_1}{d q_1}\right)^2 = 2m(h - \Pi) - \frac{\alpha_1^2}{q_1^2}, \quad \left(\frac{d W_2}{d q_2}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{\operatorname{sen}^2 q_2} = \alpha_1^2$$

essendo α_1 una nuova costante: con due quadrature si determinano W_1 e W_2 e quindi l'integrale W completo dell'equazione di HAMILTON-JACOBI. Con successive derivazioni, applicando le (42), si ottengono gli integrali delle equazioni del moto.

Questo è uno dei più semplici esempi della integrazione della (41) colla separazione delle variabili.

[JACOBI, l. c., pag. 183].

2. Lo stesso pel moto di un punto su di una superficie levigata e fissa.

Riferiti i punti della superficie ad un sistema di coordinate curvilinee q_1, q_2 e posto l'elemento lineare sotto la forma

$$d s^2 = E\, d q_1^2 + 2 F\, d q_1\, d q_2 + G\, d q_2^2,$$

risulta, supposta eguale ad uno la massa:

$$2 T = E q_1'^2 + 2 F q'_1 q'_2 + G q_2'^2$$
$$p_1 = E q'_1 + F q'_2 \quad , \quad p_2 = F q'_1 + G q'_2;$$

e quindi nella ipotesi che esista l'integrale della energia, l'equazione (41) diventa

$$G \left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 - 2 F \left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right) \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right) + E \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2$$
$$= 2 (h - \Pi) (E G - F^2).$$

Se le coordinate sono ortogonali ed isoterme cioè

$$E = G = \lambda (q_1, q_2), F = 0;$$

e il punto non è soggetto a forze (moto geodetico), l'equazione precedente diventa

$$\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2 = 2 h \lambda.$$

Nel caso delle superficie di Liouville, in cui

$$\lambda = \lambda_1 (q_1) + \lambda_2 (q_2),$$

posto

$$W = W_1 (q_1) + W_2 (q_2)$$

si deduce subito W; quindi gli integrali del moto sono

$$\frac{\partial W}{\partial h} = t + \tau, \quad \int \frac{d q_1}{\sqrt{2 h \lambda_1 + \alpha_1}} - \int \frac{d q_2}{\sqrt{2 h \lambda_2 - \alpha_1}} = \beta_1$$

in cui τ, α, β_1 sono costanti arbitrarie. L'ultima è l'equazione delle geodetiche, la cui determinazione quindi dipende dalle quadrature.

Le quadriche appartengono alle superficie di LIOUVILLE [JACOBI, l. c., pag. 198 e 212].

Sempre nel caso delle superficie di LIOUVILLE, la integrazione della equazione di HAMILTON-JACOBI, colla separazione delle variabili, riesce ancora se l'energia potenziale è espressa da

$$\Pi = \frac{1}{\lambda} \{\Pi_1 (q_1) + \Pi_2 (q_2)\} .$$

Se poi si vogliono trovare tutte le superficie per le quali l'equazione detta può essere integrata colla separazione delle variabili, si trova che esse sono precisamente le superficie di LIOUVILLE, in cui sia fatta una conveniente scelta di variabili.

[MORERA, *Sulla separazione delle variabili ecc.* Atti dell'Accad. di Torino, **16**, pag. 276 (1881); STAECKEL, Math. Annalen, **35**, pag. 91 (1890)].

3. Moto di un punto su di una superficie di rotazione, supposta l'energia potenziale funzione del raggio del parallelo.

Se q_1 è il raggio del parallelo, q_2 la longitudine e l'asse z è l'asse di rotazione, essendo $z = f(q_1)$ l'equazione della curva meridiana, si ha

$$d s^2 = [1 + f'(q_1)^2]\, d q_1^2 + q_1^2\, d q_2^2,$$

l'equazione da integrare (esercizio precedente) è

$$q_1^2 \left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + [1 + f'(q_1)^2] \left(\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)^2$$
$$= 2\, q_1^2 [1 + f'(q_1)^2]\, [h - \Pi (q_1)] .$$

Se si pone $W = \alpha_1 q_2 + W_1(q_1)$ si trova subito (α_1 essendo costante)

$$W = \alpha_1 q_2 + \int \frac{d\, q_1}{q_1} \sqrt{[1 + f'(q_1)^2]\, [2\, q_1^2 (h - \Pi) - \alpha_1^2]}.$$

Basta ora applicare le (42).

4. Trasformare la (41) nel caso delle coordinate ellittiche nel piano. Problema di EULER.

Nel caso di un moto piano la posizione di un punto sia fissata mediante le sue distanze r ed r_1 da due punti fissi F ed F_1 distanti di 2 a (coordinate bipolari). Queste coordinate non essendo ortogonali, riferiamo la posizione di P ad un sistema di coordinate ellittiche u e v ponendo

$$r + r_1 = 2\, u \quad , \quad r - r_1 = 2\, v.$$

Le curve $u =$ cost. sono ellissi coi fuochi in F ed F_1 e di semi assi $u, \sqrt{u^2 - a^2}$; le curve $v =$ cost. sono iperboli omofocali di semi assi $v, \sqrt{a^2 - v^2}$; od anche di semi assi: $a \operatorname{Ch} \xi, a \operatorname{Sh} \xi$ ed $a \cos \eta, a \operatorname{sen} \eta$.

Le coordinate ortogonali di uno dei punti P d'intersezione di queste coniche rispetto ai loro assi sono date da

$$a\, x = u\, v \quad ; \quad a\, y = \sqrt{(u^2 - a^2)\, (a^2 - v^2)}$$

oppure da $x = a \operatorname{Ch} \xi \cos \eta$, $y = a \operatorname{Sh} \xi \operatorname{sen} \eta$.

Deduciamo quindi per l'energia cinetica agevolmente, colle coordinate u e v:

$$2\, T = \frac{u^2 - v^2}{u^2 - a^2} u'^2 - \frac{u^2 - v^2}{v^2 - a^2} v'^2.$$

Se il movimento del punto P non avviene in un piano, possiamo individuare la sua posizione nello spazio assegnando l'angolo w che un piano passante per $F F_1$ forma con un piano fisso e, sul piano mobile, le coordinate u e v. L'energia cinetica complessiva si comporrà di due parti: della precedente e di quella dovuta al moto di rotazione del piano, espressa dalla metà di $y^2 w'^2$; quindi

$$2\,T = \frac{u^2 - v^2}{u^2 - a^2}\,u'^2 - \frac{u^2 - v^2}{v^2 - a^2}\,v'^2 + \frac{a^2}{(u^2 - a^2)\,(a^2 - v^2)}\,w'^2 .$$

Ciò posto, ricercando le componenti dell'impulso, si trova subito che la (41) si trasforma nella

$$(u^2 - a^2)\left(\frac{\partial W}{\partial u}\right)^2 - (v^2 - a^2)\left(\frac{\partial W}{\partial v}\right)^2$$
$$+ a^2\left(\frac{1}{u^2 - a^2} - \frac{1}{v^2 - a^2}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial w}\right)^2 + 2\,(u^2 - v^2)(\Pi + h) = 0.$$

L'integrazione di questa equazione si ottiene col metodo della separazione delle variabili e quindi con quadrature se

$$\Pi = \frac{\varphi(u) - \psi(v)}{u^2 - v^2}.$$

In particolare, dicendo ρ la distanza di P dal punto medio O di $F F_1$, possiamo sempre ridurci a questa forma se

$$\Pi = \frac{k^2}{r} + \frac{k_1{}^2}{r_1} + \alpha\,\rho^2 + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{y^2}.$$

Infatti

$$\frac{k^2}{r} + \frac{k_1{}^2}{r_1} = \frac{k^2\,(u - v) + k_1{}^2\,(u + v)}{u^2 - v^2}\;;\quad \rho^2 + a^2 = u^2 + v^2$$

e quindi

$$\rho^2 = \frac{u^4 - v^4 - a^2 (u^2 - v^2)}{u^2 - v^2};$$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{u^2 - v^2} \left(\frac{u^2 - a^2}{u^2} - \frac{v^2 - a^2}{v^2} \right);$$

$$\frac{1}{y^2} = \frac{a^2}{u^2 - v^2} \left(\frac{1}{u^2 - a^2} - \frac{1}{v^2 - a^2} \right).$$

Se $\alpha = A = B = 0$, abbiamo il problema di EULER del moto di un punto attratto verso due centri fissi secondo le legge di NEWTON. [Mém. Acad. de Berlin, 1760, p. 228; Novi Comm. Acad. Petrop, **10**, p. 207 (1766); **11**, p. 152 (1767)].

Poichè nella equazione di HAMILTON-JACOBI, w non comparisce esplicitamente un integrale completo può ottenersi ponendo

$$W = \gamma w + W_1(u) + W_2(v)$$

e si trova subito, indicando con c una nuova costante

$$(u^2 - a^2) \frac{d W_1}{d u} = 2 (u^2 - a^2) \{ c - (k^2 + k_1^2) u - h u^2 \} = R(u)$$

$$(v^2 - a^2) \frac{d W_2}{d v} = 2 (v^2 - a^2) \{ c - (k^2 - k_1^2) v - h v^2 \} = S(v).$$

Ricordando poi che, pel teorema di Jacobi,

$$\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{u^2 - v^2}{u^2 - a^2} u', \text{ ecc.}$$

otteniamo le due equazioni del movimento

$$(u^2 - v^2) \frac{d u}{d t} = \sqrt{R(u)} \quad ; \quad (u^2 - v^2) \frac{d v}{d t} = - \sqrt{S(v)}$$

che servono di base alla completa discussione del problema.

La traiettoria, nel caso di movimento piano in cui $\gamma = 0$, può essere una conica (e in particolare una ellissi) coi fuochi in F ed F_1. Vi hanno infiniti casi in cui essa è una curva algebrica, la cui equazione differenziale è

$$\frac{d\,u}{\sqrt{R(u)}} + \frac{d\,v}{\sqrt{S(v)}} = 0.$$

I calcoli, conducenti a funzioni ellittiche, possono essere fatti anche in modo semplice ed elegante, partendo direttamente dalle equazioni di LAGRANGE per mezzo delle coordinate ξ ed η.

Considerazioni generali sulla forma della traiettoria si trovano in MORERA, Giornale di Mat., **18**, (1880), pag. 34; CHARLIER, *Mechanik des Himmels*, **I**, Leipzig 1902; e per il caso che un centro attragga ed uno respinga, WÖLLER, Inaug. Diss., Kiel 1905.

Per $A = B = 0$ si ha il problema di LAGRANGE, in cui all'attrazione dei due centri F e F_1, si aggiunge un'attrazione diretta verso O e proporzionale alla distanza. [Misc. Taurinensia, **4** (1766-1769); Oeuvres compl. **2**, pag. 67]. La trattazione è del tutto analoga.

Si veda ancora: SERRET, Journ. de Mathém., **13**, p. 17 (1848); KÖNIGSBERGER: *De motu puncti versus duo fixa centra attracti*. Diss. Berlin, 1860; PERLEWITZ, *Untersuch. über die Fälle u. s. w.* Inaug. Diss. Leipzig, 1872; WHITTAKER, *Analy. Dynam.* pag. 69, 95.

È anche frequente in Meccanica l'uso delle coordinate paraboliche; in cui le coordinate di un punto in un piano sono funzioni dei parametri u, v di un sistema di parabole omofocali (col fuoco nell'origine)

$$y^2 = 4\,u\,(u - x) \quad ; \quad y^2 = 4\,v\,(v + x);$$

d'onde

$$x = u - v \quad , \quad y = 2\sqrt{u\,v}\,.$$

5. Il moto di un sistema con due gradi di libertà può sempre ridursi ad un problema di moto in un piano.

Siano x ed y le coordinate del sistema e siano scelte in modo che l'energia cinetica abbia la forma

$$2\,T = \lambda\,(x'^2 + y'^2)$$

con λ funzione di x ed y. Le equazioni del moto, indicando con t_1 il tempo e supposto il sistema soggetto a forze conservative, sono

$$\frac{d}{d\,t_1}(\lambda\,x') - \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2)\frac{\partial\lambda}{\partial x} = -\frac{\partial\,\Pi}{\partial x}\,;\ \text{ecc.}$$

Inoltre

$$\frac{1}{2}\lambda\,(x'^2 + y'^2) = h - \Pi\,.$$

Posto $d\,t_1 = \lambda\,dt$ otteniamo facilmente

$$\frac{d^2 x}{d\,t^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda\,(\Pi - h)\right];\ \text{ecc.}$$

che sono le equazioni del moto di un punto in un piano, la energia potenziale essendo $\lambda\,(\Pi - h)$.

Se in particolare

$$\lambda\,(\Pi - h) = \varphi\,(x) - \psi\,(y)\,,$$

avremo

$$\frac{d^2 x}{d\,t^2} = -\frac{d\,\varphi\,(x)}{d\,x} \quad ; \quad \frac{d^2 y}{d\,t^2} = \frac{d\,\psi\,(y)}{d\,y}\,;$$

donde

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\varphi(x) + A \quad ; \quad \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \psi(y) + B;$$

ma per l'integrale dell'energia $A + B = 0$. Il problema è ridotto alle quadrature. L'equazione della traiettoria è

$$\frac{dx}{\sqrt{A - \varphi(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{\psi(y) - A}} .$$

Se la condizione imposta vale qualunque sia h; e quindi per $h = 0$ e $h = 1$, deve essere $\lambda = \alpha(x) - \beta(y)$; l'elemento lineare nel piano xy è quindi della forma

$$ds^2 = \{\alpha(x) - \beta(y)\}(dx^2 + dy^2).$$

Esso si riduce a questa forma: 1° nel caso delle coordinate cartesiane; 2° nel caso delle coordinate polari in cui posto $x = \log r$, $y = \theta$ esso assume la forma $e^{2x}(dx^2 + dy^2)$; l'energia potenziale è della forma

$$\varphi(x) - e^{-2x}\psi(y),$$

3° nel caso delle coordinate ellittiche e paraboliche; e in queste soltanto.

[Liouville, *Sur quelques cas particuliers où les équations du mouv. d'un point peuvent s'intégrer*. Journ. de Mathém. **11**, pag. 345 (1846); **12**, pag. 410 (1847)].

6. Trattare col metodo di Jacobi l'esercizio 17, Cap. II.

Abbiamo un caso di vincolo dipendente dal tempo; e

$$2T = r'^2 + r^2\omega^2 + z'^2;$$

posto $q_1 = r$, $q_2 = z$, $\Pi = g z$, si ha

$$\Theta = \Sigma p q' - T = \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2 - r^2 \omega^2)$$

e l'equazione da integrare è

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 - r^2 \omega^2 \right] + g z = 0 .$$

Si trova un integrale completo, ponendo

$$V = - h t + W_1 (r) + W_2 (z)$$

e si ottengono gli integrali

$$\int \frac{d r}{\sqrt{a_1 + r^2 \omega^2}} - \int \frac{d z}{\sqrt{2 h - a_1 - 2 g z}} = b_1$$

$$\int \frac{d z}{\sqrt{2 h - a_1 - 2 g z}} = t - t_0 ; \text{ ecc.}$$

7. Se l'energia cinetica di un sistema con k gradi di libertà (per es. $k = 3$) è della forma

$$2 T = (A_1 + A_2 + A_3) (B_1 q_1'^2 + B_2 q_2'^2 + B_3 q_3'^2)$$

essendo le A_i, B_i funzioni rispettivamente di q_i; e se l'energia potenziale è della forma

$$\Pi = \frac{U_1 + U_2 + U_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

con U_i funzione di q_i; il problema è riducibile alle quadrature (Problema di Liouville).

Supposti i vincoli indipendenti dal tempo, si deve integrare la

$$\frac{1}{2 B_1}\left(\frac{\partial W}{\partial q_1}\right)^2 + U_1 + \ldots\ldots = h(A_1 + A_2 + A_3).$$

La ricerca di un integrale completo riesce (colla separazione delle variabili), ponendo

$$W = W_1(q_1) + W_2(q_2) + W_3(q_3).$$

In questo caso rientrano le coordinate ellittiche nello spazio.

Ricerche generali sulla forma delle equazioni di Hamilton-Jacobi integrabili mediante la separazione delle variabili si debbono a Staeckel [Math. Annal. **42** (1893)]; a Levi-Civita, a Dall'Acqua [ibid. **59** (1904), **66** (1908)] ed al Burgatti [Rend. R. Acc. Lincei, (5), **20**, pp. 108-111 (1° sem. 1911)].

Riguardo a questa classe di problemi, che comprendono i più classici della meccanica, vogliamo notare che è stato dimostrato il seguente elegante teorema.

Tutti i problemi di moto con due gradi di libertà, prodotti da forze conservative, in cui ha luogo un integrale quadratico rispetto alle componenti della velocità, diverso da quello dell'energia, sono problemi di Liouville.

Le ricerche di Bertrand [Journ. de Math. (2), **2**, pp. 113-140 (1857)] furono completate da Massieu, *Sur les intégrales algébriques des problèmes de mécanique*. Thèse, Paris 1861, cui devesi il teorema enunciato, e da Darboux [Arch. Néerl. (2), **6**, pp. 371-376 (1901)].

Vedi anche una mia nota in Rend. Acc. di Napoli (3), **21**, pp. 79-83 (1915).

Il caso del moto geodetico è stato considerato da Ricci [Atti Ist. Veneto, **52**, pp. 643-681 (1893-94)].