CAPITOLO V.

DINAMICA DEI SISTEMI RIGIDI,

§ 1. Momento d'inerzia rispetto ad un asse.

Momento d'inerzia di un sistema materiale rispetto ad un asse è la somma dei prodotti delle masse dei vari punti del sistema per i quadrati delle distanze dei punti stessi dall'asse.

Se r è la distanza di un punto P del sistema in cui è concentrata la massa m, il momento di inerzia \mathfrak{F} (sempre positivo) è espresso da

$$\mathfrak{F} = \Sigma m r^2.$$

Le sue dimensioni sono $[m, l^2]$. Se si tratta di un sistema continuo a tre dimensioni e diciamo k la densità dell'elemento $d\tau$ di volume, abbiamo

$$\mathfrak{F} = \int k \, r^2 \, d \, \tau.$$

Se diciamo µ la massa totale del sistema, possiamo porre, conforme alla (1),

$$\mathfrak{F} = \mu \, a^2;$$

a è la distanza in cui si deve collocare una massa µ dall'asse perchè essa abbia lo stesso momento d'inerzia del corpo; ed anche è il raggio di una circonferenza col centro sull'asse e perpendicolare a questo, e sulla quale distribuendo tutta la massa del corpo, il momento d'inerzia di essa risulti eguale a quello del corpo. Perciò a dicesi raggio d'inerzia. (*)

In tutta questa teoria è di fondamentale importanza la considerazione della seguente omografia, funzione di un punto O e della distribuzione delle masse del corpo:

(3)
$$\sigma = -\sum m(P-O) \wedge [(P-O) \wedge];$$

la sommatoria (oppure integrale) è estesa a tutti i punti del sistema.

^(*) Questa teoria, cominciata da HUYGENS a proposito del problema del pendolo composto nel suo Horologium oscillatorium, Pars IV, 1673, fu sviluppata da EULER: Recherches sur la connaissance mécanique des corps [Mém. Acad. de Berlin, 1758, p. 131-153] e sopratutto in Theoria motus corporum solidorum, Rostock 1765, Cap. 5.

Si vede subito che essa è una dilatazione e ammette quindi tre direzioni unite ortogonali [Vol. I, pagg. 24, 25].

Il momento d'inerzia 🛪 rispetto ad un asse uscente da O e parallelo ad un vettore unitario u è espresso da

$$\mathfrak{F} = \mathbf{u} \times \sigma \, \mathbf{u} \, .$$

Infatti si ha

$$r = \operatorname{mod}\left[(P - O) \wedge \mathbf{u}\right]$$

quindi da (1):

$$\mathbf{\mathfrak{J}} = \sum m \left[(P - O) \wedge \mathbf{u} \right] \times \left[(P - O) \wedge \mathbf{u} \right]$$

$$= \mathbf{u} \times \sum \left[(P - O) \wedge \mathbf{u} \right] \wedge (P - O) = \mathbf{u} \times \sigma \mathbf{u}.$$

Una notevole rappresentazione dei vari momenti d'inerzia del sistema rispetto a tutti gli assi uscenti da O si ottiene col seguente teorema:

Riportando a partire da O su ogni asse e nei due sensi un segmento eguale ad $h: \sqrt{\mathfrak{F}}$, il luogo degli estremi di questi segmenti è un ellissoide con centro in O e che dicesi ellissoide d'inerzia relativo ad O. (*)

Posto infatti (h essendo costante)

$$(N-O)\sqrt{3}=h$$
 u

^(*) CAUCHY, Sur les moments d'inertie, Exercices de mathém., 1827 [Oeuvres compl. (2) 7, pag. 124].

da (4) risulta subito

$$(5) \qquad (N-O) \times \sigma(N-O) = h^2.$$

Questa è la quadrica indicatrice della dilatazione σ ; e poichè N-O è sempre reale e non può mai diventare infinito, tale quadrica è effettivamente un ellissoide. La costante h (dipendente dalle dimensioni) può essere fissata a piacere; i vari ellissoidi essendo tutti simili e similmente disposti.

Gli assi di tale ellissoide sono le direzioni unite di σ ; essi diconsi assi principali d'inerzia relativi ad O. Inoltre:

Il vettore σ (N-O) è normale al piano diametrale coniugato di N-O rispetto all'ellissoide d'inerzia. [Vol. I, pag. 24]; od anche

Il vettore σ (N-O) è normale al piano tangente in N all'ellissoide d'inerzia.

Diciamo i, j, k la terna di direzioni unite di σ; A, B, C i momenti d'inerzia (principali) rispetto agli assi principali d'inerzia; si ha

(6)
$$\sigma \mathbf{i} = A \mathbf{i} ; \sigma \mathbf{j} = B \mathbf{j} ; \sigma \mathbf{k} = C \mathbf{k}.$$

Deve essere infatti $\sigma \mathbf{i} = m \mathbf{i}$ e poscia per la (4), m = A; ecc.

Se ogni terna ortogonale è di direzioni unite der o, l'omografia si riduce ad un numero, che per la (4) è il momento d'inerzia del corpo rispetto ad ogni retta uscente da O.

Proviamo ora i due seguenti teoremi:

1. Un asse è principale d'inerzia per un suo solo punto; soltanto quelli relativi al centro di massa sono principali per ogni loro punto.

Abbiamo infatti pel punto O,

$$\sum m [(P-O) \wedge \mathbf{i}] \wedge (P-O) = A \mathbf{i}.$$

Considero il punto O1 tale che

$$0_1 = 0 + li;$$

e supponiamo che l'asse O O_1 sia d'inerzia pure rispetto al punto O_1 ; quindi

$$\sum m \left[(P - O_1) \wedge \mathbf{i} \right] \wedge (P - O_1) = A \mathbf{i}$$

od anche

$$\sum m [(P - O) \wedge \mathbf{i}] \wedge (P - O_1) = A \mathbf{i}.$$

Quindi per sottrazione troviamo

$$\sum m [(P-O) \wedge \mathbf{i}] \wedge \mathbf{i} = 0;$$

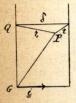
e se diciamo G il centro di massa,

$$[(G-O) \land \mathbf{i}] \land \mathbf{i} = 0;$$

cioè $(G-O) \land i$ dovendo risultare parallelo e normale ad i, deve essere nullo, e quindi G-O

deve essere parallelo ad \mathbf{i} ; cioè G deve giacere sulla O O_1 .

2. Se a è il raggio d'inerzia rispetto ad un asse; a, quello rispetto ad un asse parallelo condotto pel centro di massa G, ò la distanza dei due assi, si ha



(7)
$$a^2 = a_1^2 + \delta^2.$$

Sia infatti (Fig. 9) **i** un vettore unitario parallelo alla normale comune ai due assi; r ed r_1 le distanze di un punto P dai due assi. Risulta

Fig 9.
$$r^2 = r_1^2 + \delta^2 - 2 \delta \cdot (P - Q) \times i$$

e quindi, essendo

$$(P - Q) \times \mathbf{i} = (P - G) \times \mathbf{i},$$

$$\sum m r^2 = \sum m r_1^2 + \mu \delta^2 - 2 \delta \mathbf{i} \times \sum m (P - G)$$

ma $\sum m(P-G) = 0$; onde per la (2) risulta la (7). (*)

Il calcolo di ogni momento d'inerzia viene perciò ricondotto a quello rispetto ad assi uscenti dal centro di massa, cui competono i più piccoli momenti.

Dalle precedenti formule generali è assai agevole passare a formule in coordinate cartesiane.

^(*) HUYGENS, Horologium oscillatorium, Pars IV, Prop. XVIII.

Sia perciò $O(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ una terna fondamentale, e rispetto a questa siano: x, y, z le coordinate del punto generico P del sistema materiale; ξ, η, ζ quelle del punto N; α, β, γ i coseni direttori del vettore unitario \mathbf{u} . Inoltre poniamo:

(8)
$$A = \mathbf{i} \times \sigma \mathbf{i} ; B = \mathbf{j} \times \sigma \mathbf{j} ; C = \mathbf{k} \times \sigma \mathbf{k}$$
$$A_1 = \mathbf{j} \times \sigma \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \sigma \mathbf{j}$$
$$B_1 = \mathbf{k} \times \sigma \mathbf{i} = \mathbf{i} \times \sigma \mathbf{k}$$
$$C_1 = \mathbf{i} \times \sigma \mathbf{j} = \mathbf{j} \times \sigma \mathbf{i}.$$

Risulta che A, B, C sono i momenti d'inerzia del sistema rispetto agli assi coordinati e le loro espressioni in coordinate cartesiane sono

$$\sum m(y^2+z^2)$$
, $\sum m(z^2+x^2)$, $\sum m(x^2+y^2)$;

quanto ad A_1, B_1, C_1 , detti prodotti d'inerzia, essi sono nulli se $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ è la terna degli assi principali d'inerzia; hanno per espressione

$$-\Sigma myz$$
, $-\Sigma mzx$, $-\Sigma mxy$.

Ciò si deduce senz'altro dalla (3). Inoltre è (Vol. I, pagg. 22, 25)

$$I_1 \sigma = 2 \sum m (P - O)^2 = A + B + C.$$

L'espressione del momento d'inerzia è

(9)
$$\mathfrak{F} = A \alpha^2 + B \beta^2 + C \gamma^2 + 2 A_1 \beta \gamma + 2 B_1 \gamma \alpha + 2 C_1 \alpha \beta.$$

Infatti

$$\mathbf{u} = \alpha \mathbf{i} + \beta \mathbf{j} + \gamma \mathbf{k}; \sigma \mathbf{u} = \alpha.\sigma \mathbf{i} + \beta.\sigma \mathbf{j} + \gamma.\sigma \mathbf{k}.$$

Sostituendo nella (4), sviluppando i prodotti e tenendo presenti le (8) risulta la (9).

L'equazione dell'ellissoide d'inerzia (5) è

$$(10) \quad A\xi^{2} + B\eta^{2} + C\zeta^{2} \\ + 2A_{1}\eta\zeta + 2B_{1}\zeta\xi + 2C_{1}\xi\eta = h^{2}.$$

Se poi ci riferiamo alla terna degli assi principali d'inerzia, nelle formule precedenti faremo $A_1 = B_1 = C_1 = 0$; e se facciamo inoltre h = 1, l'equazione dell'ellissoide diventa

(11)
$$A \xi^2 + B \eta^2 + C \zeta^2 = 1$$
.

Vogliamo finalmente osservare che dalle (8) risulta

(12)
$$B+C-A>0$$
,
 $C+A-B>0$, $A+B-C>0$;

poichè ognuna delle espressioni precedenti vale $2 \sum m x^2$, ecc. Di qui segue che non ogni ellissoide può riguardarsi come ellissoide d'inerzia per una data distribuzione di masse, essendo intanto necessarie le (12). Se poi, supposte verificate le (12), poniamo

$$B + C - A = 2 \xi^2$$
, $C + A - B = 2 \eta^2$,
 $A + B - C = 2 \zeta^2$

e consideriamo sugli assi tre punti distanti da O rispettivamente di ξ , η , ζ ed in essi concentrate tre masse unitarie, otteniamo precisamente un sistema di tre masse che ha per momenti, rispetto gli assi, A, B, C e il cui ellissoide ha per centro O e per assi gli assi considerati. Dunque le (12) sono sufficienti. (*)

Nei corpi omogenei rotondi, anche l'ellissoide d'inerzia è di rotazione; se il corpo è un cubo o una sfera, l'ellissoide d'inerzia relativo al centro è una sfera; ecc.

§ 2. Energia cinetica e coordinate dell'impulso. — Vogliamo ora ricercare le relazioni che intercedono tra l'energia cinetica, coordinate dell'impulso e il moto istantaneo di un sistema rigido.

Cominciamo col caso particolare, specialmente interessante, in cui il corpo ha un punto fisso O e quindi il moto del corpo è una rotazione istantanea intorno all'asse $O \Omega$.

Le coordinate dell'impulso (Cap. IV, § 5) e l'energia cinetica sono espresse dalle formule

(13)
$$\mathbf{R} = \mu \Omega \wedge (G - O) = G'; \mathbf{M} = \sigma \Omega$$

$$(14) 2 T = \Omega \times \mathbf{M}$$

^(*) CISOTTI, Un'osservazione sopra gli ellissoidi d'inerzia. [Suppl. ai Rend. Circolo mat. di Palermo, 6, p. 30-31 (1911)].

in cui Ω è il vettore della velocità istantanea di rotazione.

Inoltre se \mathfrak{F} è il momento d'inerzia del corpo intorno all'asse $O\Omega$, ω la grandezza della velocità istantanea di rotazione Ω ; p,q,r le componenti di Ω rispetto ad una terna fondamentale coll'origine in O, si ha pure, colle notazioni del \S \mathfrak{I} ,

(15)
$$2 T = 3 \omega^2$$

(16)
$$2 T = A p^{2} + B q^{2} + C r^{2}$$

$$+ 2 A_{1} q r + 2 B_{1} r p + 2 C_{1} p q.$$

Basterà applicare le formule (21) del Capitolo precedente, e la formula fondamentale di Cinematica che nel caso attuale si traduce nella

$$P' = \Omega \wedge (P - O);$$

con ciò si deducono subito le (13), tenendo presente la (3). La (14) si deduce osservando che

2
$$T = \sum m P' \times P' = \sum m \Omega \times (P - O) \wedge P'$$

= $\Omega \times \sum m (P - O) \wedge P'$.

Posto finalmente $\Omega = \omega \mathbf{u}$ dalla (14) e dalla seconda di (13) risulta

$$2 T = \omega^2 \mathbf{u} \times \sigma \mathbf{u} = \mathfrak{F} \omega^2$$
$$= A \alpha^2 \omega^2 + \dots + 2 A_1 \omega^2 \beta \gamma + \dots$$

e quindi si ottengono le (15) e (16).

Notiamo ancora che se σ ha infinite terne ortogonali di direzioni unite (cioè si riduce a un numero) si ha:

$$M = 3\Omega$$
.

L'incremento di energia cinetica, per un incremento infinitesimo della velocità dei singoli punti del corpo, è espresso da

$$(17) dT = \mathbf{M} \times d\Omega = \Omega \times d\mathbf{M}.$$

Infatti si ha

$$dT = \sum m P' \times dP'$$
; $dP' = d\Omega \wedge (P - O)$

quindi si ha la prima delle (17); poscia differenziando la (14) risulta la seconda.

I precedenti risultati sono suscettibili di una elegante interpretazione geometrica.

Per il punto $I = O + \Omega$ (polo di rotazione) conduciamo un ellissoide simile e similmente posto all'ellissoide d'inerzia (luogo del punto N del § precedente); esso è rappresentato da

$$(I-O) \times \sigma(I-O) = \cos t$$
.

Quindi:

Il momento dell'impulso, cioè il vettore $\mathbf{M} = \sigma \, \Omega$, è normale al piano diametrale coniu-

^{14 -} MARCOLONGO.

gato di Ω rispetto all'ellissoide d'inerzia relativo al punto O. (*)

Si può inoltre osservare che, per la (14) e per essere 2 T > o, l'angolo di Ω e di M è sempre acuto.

La seconda delle (13) può invertirsi, cioè

$\Omega = \sigma^{-1} M$

indicando con σ⁻¹, come usualmente, l'inversa della omografia σ. Essa è del pari una dilatazione avente le stesse direzioni unite di σ. La sua quadrica indicatrice è l'ellissoide reciproco di quello d'inerzia; e però ha luogo una proprietà del tutto analoga alla precedente; cioè:

Il vettore della velocità istantanea di rotazione è normale al piano diametrale coniugato di M rispetto all'ellissoide reciproco a quello d'inerzia relativo ad O. (**)

Ora è facile passare al caso di un corpo libero. Basta osservare che il moto istantaneo consta di una traslazione di velocità O' e di una rotazione

^(*) Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation d'un corps, Paris, 1834 e Journ. de Mathém. pures et appl., 17, p. 79 (1851).

^(**) MAC CULLAGH, On the rotation.... Proceedings of the Roy. Irish Acad., 2 (1841), pag. 520, 540; The collected Works (Dublin 1880), pag. 329. CLEBSCH, Zur Theorie der Trägheitsmomente... Journ. für Mathem., 57 (1859), p. 73.

istantanea. Le coordinate dell'impulso, nel moto di traslazione, sono

$$\mu O'$$
, $\mu (G-O) \wedge O'$.

Quindi si hanno senz'altro le formule

(18)
$$\begin{array}{ccc} & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & \\ & & & \\ & \\ & & \\ & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ & & \\ &$$

(19)
$$\begin{cases} 2 T = 0' \times \mathbf{R} + \Omega \times \mathbf{M} \\ dT = 0' \times d\mathbf{R} + \Omega \times d\mathbf{M} \\ = \mathbf{R} \times d\mathbf{O}' + \mathbf{M} \times d\mathbf{\Omega}. \end{cases}$$

Quanto all'energia cinetica giova tener presente il teorema dimostrato al § 3 del Cap. precedente; e rilevare il fatto che nel caso del corpo rigido, alla decomposizione del moto (per rispetto alla velocità) in un moto di traslazione e in uno di rotazione, non corrisponde una analoga decomposizione dell'energia cinetica, a meno che il punto O non coincida con il centro di massa.

Non offre difficoltà il passaggio a formule in coordinate cartesiane; e si deduce subito che le componenti dell'impulso sono funzioni lineari ed omogenee delle componenti del moto istantaneo elicoidale del sistema, e quindi:

L'energia cinetica è una funzione quadratica omogenea, definita e positiva delle componenti del moto elicoidale.

Dette U, V, W le componenti di \mathbb{R} ; P, Q, R quelle di \mathbb{M} (componenti dell'impulso), la prima delle (19) ci dà

$$2 T = Uu + Vv + Ww + Pp + Q q + Rr;$$
cioè:

L'energia cinetica è una funzione bilineare delle componenti dell'impulso e del moto elicoidale. Dalla terza delle (19) deduciamo poi

$$\frac{dT = Udu + Vdv + Wdw + Pdp + Qdq + Rdr}{}$$

e quindi:

Le componenti dell'impulso sono le derivate parziali dell'energia cinetica rispetto alle componenti del moto elicoidale; ossia

(20)
$$U = \frac{\partial T}{\partial u}, \dots, P = \frac{\partial T}{\partial p}, \dots$$

Queste equazioni, come già fu osservato, sono lineari ed omogenee nelle u, v...r. Il loro determinante è il discriminante di T che è sempre positivo per essere T funzione quadratica omogenea definita positiva; e quindi è possibile inversamente esprimere le componenti del moto elicoidale come funzioni lineari ed omogenee delle componenti dell'impulso. Hanno quindi luogo le altre proprietà:

L'energia cinetica è una funzione quadratica omogenea definita positiva delle componenti dell'impulso;

Le componenti del moto istantaneo elicoidale sono le derivate parziali dell'energia cinetica rispetto alle componenti dell'impulso. (*)

E se finalmente ci riferiamo al centro di massa del corpo si ha

$$2 T = \mu (u^2 + v^2 + w^2) + A p^2 + ... + 2 A_1 q r + ...$$

Tutto ciò che precede vale per un qualsiasi sistema d'assi. In ciò che segue noi ci riferiremo ad un sistema d'assi fisso nel corpo; in tal modo le A, B, \ldots, C_1 non dipenderanno dal tempo, ma solamente dalla distribuzione delle masse e dalla forma del corpo.

I risultati precedenti (cinetici) non bastano alla trattazione del problema dinamico. Occorre, per porli in relazione colle forze esterne, valersi dei teoremi generali dell'impulso, dimostrati nel Cap. precedente.

§ 3. Moto di un corpo rigido intorno ad un asse fisso. — Siano O ed O_1 due punti fissi di un corpo rigido soggetto a forze qualunque; \mathbf{k} un vettore unità parallelo ad O O_1 ; e

^{. (*)} KLEIN U. SOMMERFELD, Theorie des Kreisels, Leipzig 1898, pag. 93.

proponiamoci di trovare le equazioni del moto di un tal corpo.

Applicheremo i due teoremi dell'impulso, tenendo conto, per ridurci al caso del corpo libero, delle reazioni dei punti fissi di vettori **r**, **r**₁. Riferendoci al punto O avremo quindi per le (32) del Cap. precedente:

(21)
$$R' = r + r_1 + R_e$$
; $M' = m_1 + M_e$,

in cui \mathbf{m}_1 è il momento, rispetto al punto O, della reazione di O_1 .

Moltiplichiamo la seconda scalarmente per \mathbf{k} ; osservando che $\mathbf{m}_1 \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$ e che \mathbf{k} è un vettore costante, risulta l'equazione pura del moto

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{M} \times \mathbf{k}) = \mathbf{M}_{e} \times \mathbf{k} = M_{z},$$

ed in cui il secondo membro esprime il momento delle forze esterne rispetto all'asse fisso delle z.

Il sistema considerato è ad un sol grado di libertà; se quindi diciamo φ (coordinata libera) l'angolo che un piano passante per l'asse e connesso col corpo forma con un piano analogo, fisso; ω la grandezza della velocità angolare, si ha

$$\omega = \frac{d \varphi}{d t} = \varphi'$$
; $\Omega = \omega \mathbf{k}$;

quindi, per la (14) e (15):

$$\mathbf{M} \times \mathbf{k} = \frac{1}{\omega} \mathbf{M} \times \Omega = \mathfrak{F} \omega = \mathfrak{F} \varphi';$$

e l'equazione pura del movimento assume la forma semplicissima:

(22)
$$\mathfrak{F}\varphi'' = M_z(\varphi, \varphi', t),$$

ed in cui a secondo membro si son messi in evidenza gli elementi da cui, in ultima analisi, verrà a dipendere il momento M_z .

La (22), equazione differenziale del secondo ordine, individua, insieme colle condizioni iniziali, φ come funzione del tempo. È di più notevole l'analogia tra la (22) e l'equazione del moto di un punto su di una retta, salvo la sostituzione di \Im (momento d'inerzia) alla massa, e di un momento, M_z , alla forza.

L'integrazione di (22) si effettua con quadrature se il secondo membro dipende soltanto da φ o da φ' o da t.

Se le forze esterne sono conservative, ha luogo l'integrale dell'energia cioè

(23)
$$3 \varphi'^2 + 2 \Pi(\varphi) = h$$

che è a sua volta un integrale primo della (22). In tal caso, dalla (23), con una sola quadratura si può determinare φ .

Resta ora a determinare le reazioni dei due sostegni.

Poichè la velocità dei vari punti sono normali a k, e quindi anche ad R, dalla prima delle (21) si deduce

$$\mathbf{r} \times \mathbf{k} + \mathbf{r}_{\scriptscriptstyle 1} \times \mathbf{k} + \mathbf{R}_{\scriptscriptstyle e} \times \mathbf{k} = 0$$
,

la quale determina soltanto la somma delle componenti delle reazioni secondo l'asse.

Conduciamo per O un piano perpendicolare all'asse e diciamo P_1 e G_1 le proiezioni ortogonali su questo piano del punto generico P del corpo e del centro di massa G; avremo (Vol. I, pagg. 143, 146)

$$\mathbf{R} = \sum m P_1' = \sum m \omega \cdot i (P_1 - O)$$

$$= \mu \omega \cdot i (G_1 - O);$$

$$\mathbf{R}' = \mu (\omega' i - \omega^2) (G_1 - O).$$

Dette perciò N, n, n_1 le componenti di R, r, r_1 secondo il piano, si ha

(24)
$$N + n + n_1 + \mu(\omega' i - \omega^2) (G_1 - O) = 0$$
.

Procederemo in modo identico colla seconda delle (21); e diciamo i e j gli altri due vettori unitari connessi col corpo. Poichè, per le (8),

$$\mathbf{M} \times \mathbf{i} = \omega \mathbf{i} \times \sigma \mathbf{k} = \omega B_1$$
,
 $\mathbf{M} \times \mathbf{j} = \omega \mathbf{j} \times \sigma \mathbf{k} = \omega A_1$,

la componente di M secondo il piano è

$$\mathbf{M} \times \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + \mathbf{M} \times \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \omega \left(B_1 \, \mathbf{i} + A_1 \, \mathbf{j} \right);$$

inoltre le derivate di i e j rispetto al tempo sono (Vol. I, pag. 123)

$$\mathbf{i}' = \omega \mathbf{j} \; ; \; \mathbf{j}' = -\omega \mathbf{i};$$

quindi la derivata rispetto al tempo di tale componente è

$$\omega'(B_1\mathbf{i} + A_1\mathbf{j}) + \omega^2(B_1\mathbf{j} - A_1\mathbf{i}).$$

Finalmente la componente del momento \mathbf{m}_1 è $li \mathbf{n}_1$ dove $l = \text{mod}(O_1 - O)$; quindi risulta

(25)
$$M_{x} \mathbf{i} + M_{y} \mathbf{j} + l i \mathbf{n}_{1} = \omega' (B_{1} \mathbf{i} + A_{1} \mathbf{j}) + \omega^{2} (B_{1} \mathbf{j} - A_{1} \mathbf{i}).$$

Questa equazione ci dà $\mathbf{n_1}$ e quindi la (24) ci darà \mathbf{n} .

§ 4. Moto per inerzia; pendolo composto. — Consideriamo due casi particolari.

a) Il corpo non sia soggetto a forze. L'integrale dell'energia esprime subito che l'energia cinetica è costante: quindi $\varphi' = \omega = \cos t$; il corpo, ricevuto un impulso iniziale, ruoterà uniformemente intorno l'asse e la velocità angolare è inversamente proporzionale alla radice quadrata del momento d'inerzia. Il polo di rotazione è un

punto fisso dell'asse e l'ellissoide condotto per tal punto, simile e similmente posto rispetto all'ellissoide d'inerzia relativo ad *O*, ruoterà del pari uniformemente intorno l'asse fisso.

La variazione della coppia di impulso nell'unità di tempo, per la seconda delle (21), è eguale al momento della reazione del punto O_1 , avendo scelto O come centro di riduzione. Se quindi vogliamo che il corpo non eserciti pressione, durante il moto, sul punto O_1 , dovrà risultare costante il momento dell'impulso e quindi il piano tangente all'ellissoide considerato, nel polo di rotazione deve essere un piano fisso; ciò che non è possibile se non è normale all'asse; cioè O O_1 deve essere asse principale d'inerzia relativo ad O; e reciprocamente.

Lo stesso risulta dalla (25); poichè da $\omega' = M_x$ = $M_y = 0$, $\mathbf{n}_1 = 0$ risulta $A_1 = B_1 = 0$. Dunque:

Se un corpo rigido, avente un punto fisso e non soggetto a forze, ruota inizialmente intorno ad uno degli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso, esso seguiterà a ruotare intorno allo stesso asse, come se fosse fisso.

Tali assi diconsi perciò assi permanenti di rotazione. (*)

^(*) Questa proprietà e la esistenza dei tre assi principali d'inerzia è stata scoperta da Segner, Specimen theoriæ turbinum, Halæ, 1755. Sul matematico Segner (1704-1777)

Se anche la pressione in O deve esser nulla, potendo ora supporre fisso il punto O_1 , l'asse dev'essere principale d'inerzia rispetto al punto O_1 e quindi esso deve contenere il centro di massa del corpo. Ciò risulta pure dalla (24); perchè $G_1 = O$ e quindi G deve appunto giacere sull'asse O O_1 . Dunque:

Se un corpo rigido libero, non soggetto a forze, ruota inizialmente intorno ad uno degli assi principali d'inerzia relativi al centro di massa, seguiterà a ruotare uniformemente intorno allo stesso asse, come se fosse fisso.

Per questo, gli assi suddetti (assi centrali) diconsi assi spontanei di rotazione.

b) Diciamo pendolo composto un corpo rigido pesante che oscilla intorno ad un asse orizzontale (asse di sospensione). Sia φ l'angolo che il piano condotto pel centro di massa e per l'asse forma con un piano verticale condotto per lo stesso asse. Scelto l'asse z verticale e positivo verso il basso, l'energia potenziale è — $\mu g \zeta$ (ζ è relativa al centro di massa G). Se l è la sua distanza dall'asse di sospensione, sarà $\zeta = l \cos \varphi$;

vedasi S. GÜNTHER, Note sur Jean-André de Segner [Bullettino di Bibl. e storia delle Scienze mat, 9 (1876), p. 217] e C. H. MÜLLER, Studien zur Geschichte der Mathem. etc... Abh. zur Geschichte d. mathem. Wissensch., 18, Leipzig 1904, pag. 51.

e però applicando direttamente la (23), troviamo

$$\mathfrak{F} \varphi'^2 = h + 2 g l \mu \cos \varphi;$$

e se diciamo a il raggio d'inerzia del corpo rispetto l'asse di sospensione, otteniamo

$$\varphi'^2 = \frac{2 g l}{a^2} (\cos \varphi + \cos L),$$

equazione differenziale che definisce il moto del pendolo composto e di forma del tutto analoga a quella del pendolo semplice [Cap. II, § 4]. Del resto supponendo che un pendolo semplice di lunghezza λ abbia il punto di sospensione sull'asse e oscilli in un piano normale a questo, e detto ancora φ l'angolo che la direzione del filo forma colla verticale, l'equazione del suo movimento si deduce subito dalla precedente osservando che $l = \lambda$, $a = \lambda$; otteniamo quindi la storre aquazione, ma in qui il fattore $\frac{2gl}{\hbar}$

stessa equazione, ma in cui il fattore $\frac{2 g l}{a^2}$ è so-

stituito da $\frac{2g}{\lambda}$. Dunque:

Un pendolo composto oscilla, nel vuoto, come un pendolo semplice la cui lunghezza è a²:1; le piccole oscillazioni sono isocrone e la loro durata è

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{a^2}{g l}}.$$

Sia a_1 il raggio d'inerzia relativo ad un asse condotto pel centro di massa parallelo all'asse di sospensione; si ha (7)

$$a^2 = a^2 + l^2$$

onde

$$\lambda = \frac{a^2}{l} = \frac{a^2}{l} + l > l.$$

I punti situati su di una retta distante di λ dall'asse di sospensione, che dicesi asse di oscillazione, oscillano dunque come tanti pendoli semplici, cioè come se fossero liberi; mentre che ogni altro asse avrà un moto diverso sia che oscilli trascinato dal corpo, sia che oscilli liberamente. Il centro di massa giace tra l'asse di sospensione e di oscillazione e dista da questi ri-

spettivamente di l e di $l_1 = \frac{a_1^2}{l}$; onde $ll_1 = a_1^2$;

cioè i due assi sono *invertibili*; sicchè facendo oscillare il corpo intorno all'asse di oscillazione, il primitivo asse di sospensione diventa il nuovo asse di oscillazione; la durata di oscillazione è la stessa per entrambi e la loro distanza è la lunghezza del pendolo semplice sincrono a quello composto.

Se nel piano verticale del centro di massa e dell'asse, consideriamo due rette a distanze diverse e da parti opposte di *G*, tali che, assunte

come assi di sospensione, corrisponda loro la stessa lunghezza del pendolo sincrono, la distanza tra i due assi è λ. Infatti da

$$\lambda = l + \frac{a_1^2}{l} = l_1 + \frac{a_1^2}{l_1}$$
 $(l \neq l_1)$

si deduce

$$l l_1 = a^2_1.$$

Detta ora ρ la lunghezza, $g:\pi^2$, del pendolo a secondi si ha

$$l^2 + a_1^2 = \rho l \tau^2$$

e per un altro asse

$$l_1^2 + a_1^2 = \rho l_1 \tau_1^2$$
.

Eliminando a_1 :

$$\frac{l^2 - l_1^2}{\rho} = l \, \tau^2 - l_1 \, \tau_1^2$$

che dà ρ , indipendentemente dalla forma e struttura del corpo. Se i due tempi sono eguali ed $l \neq l_1$ risulta

$$\frac{l+l_1}{\rho}=\tau^2;$$

quindi per la misura di ρ occorre far oscillare il corpo intorno a due assi fino a che i tempi di oscillazione siano eguali e misurare la distanza tra i due assi; evitando così la determinazione sperimentale di *G* e di *a*. Su questa proprietà è fondato il *pendolo reversibile* di KATER. (*)

Il punto in cui l'asse di oscillazione taglia la verticale di G, dicesi centro di oscillazione. (**)

§ 5. Percossa in un corpo rigido sospeso ad un asse fisso. Centro di percossa. — Immaginiamo un corpo inizialmente in riposo soggetto ad una forza di percossa di vettore Γ applicata in un punto P; e diciamo ancora \mathbf{r} e \mathbf{r}_1 i vettori delle forze di percossa dei sostegni O, O_1 . Colle stesse notazioni del § 3 e ricordando il teorema fondamentale (Cap. III, § 2) otteniamo le due equazioni per determinare la variazione delle coordinate dell'impulso:

$$\Delta R = \Gamma + \mathbf{r} + \mathbf{r}_1; \Delta M = (P - O) \wedge \Gamma + li \mathbf{n}_1$$

che possiamo trattare come le analoghe del § 3. Cerchiamo in particolare le condizioni perchè $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 = 0$. Si trova anzitutto

$\Gamma \times \mathbf{k} = 0$

^(*) KATER, Experiments for determining the length of the Pendulum... [Philos. Trans., 1818, pag. 32].

^(**) Tutta la teoria del pendolo composto è dovuta ad HUYGENS, l c. Il problema del pendolo composto è stato uno dei primi ad essere risoluti sui corpi rigidi, col sussidio dell'integrale dell'energia. Vedi Mach, l. c., p. 170.

cioè la forza di percossa è normale all'asse fisso. Assumiamo j parallelo a Γ e per la forza conduciamo un piano che tagli normalmente l'asse in un punto Q. Dalla equazione analoga alla (25) si deduce ancora che l'asse fisso deve essere principale d'inerzia per uno dei suoi punti; da quella analoga alla (24) poi deduciamo, essendo $\omega = o$ ed ω' sostituito con $\Delta \omega$,

$$\mu(G_1 - Q) \cdot \Delta \omega = \mathbf{i} \mod \Gamma;$$

ossia il centro di massa dista dall'asse fisso di una lunghezza

$$l = \frac{\mod \Gamma}{\mu \Delta \omega}.$$

Finalmente, poichè $\mathbf{M} = \mathfrak{F} \omega \mathbf{k}$,

$$\Im \Delta \omega = (P - O) \land \Gamma \times \mathbf{k} = (P - O) \times \mathbf{i} \mod \Gamma,$$

e se diciamo λ la distanza del punto P dall'asse fisso, cioè

$$(P-O)\times \mathbf{i}=\lambda,$$

deduciamo

$$\lambda = \frac{3}{\mu l} = \frac{a^2}{l}$$
;

quindi conosceremo il punto d'applicazione della forza di percossa; ora λ, riguardando il corpo come un pendolo composto, è la distanza del

centro di oscillazione dall'asse fisso. Il punto *P*, che dicesi *centro di percossa*, coincide dunque col centro di oscillazione del pendolo fisico.

§ 6. Moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso. — Sia O il punto fisso, centro di un sistema fondamentale \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} connesso col corpo; \mathbf{r} il vettore della reazione del punto fisso. Sappiamo già che il moto istantaneo del sistema è una rotazione intorno ad un asse $O \Omega$ (asse istantaneo di rotazione).

I due teoremi dell'impulso ci dànno subito le due equazioni

(26)
$$R' = r + R_e$$
; $M' = M_e$.

I primi membri possono interpretarsi come la velocità assoluta dei due punti $E = O + \mathbf{R}$, $F = O + \mathbf{M}$. Questa osservazione e l'applicazione del teorema di Coriolis, condurrebbe subito alle equazioni del moto in coordinate cartesiane. (*)

^(*) P. SAINT-GUILHEM Nouvelle détermination synthétique du mouvement etc. [Journ. de Mathém., 19 (1854), pag. 356; Nouvelles Ann. de Mathém., 15 (1856), p. 63]; R. B. HAYWARD, On a direct method. of estimating velocities... [Cambridge Philos. Trans., 10 (1856)].

^{15 -} MARCOLONGO.

Si può anche procedere così, cominciando dalla seconda delle (26) che è l'equazione pura del movimento. Moltiplicando scalarmente per i, si ha, tenendo presente che i è funzione del tempo:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{M}' = (\mathbf{M} \times \mathbf{i})' - \mathbf{M} \times \mathbf{i}' = \mathbf{M}_{e} \times \mathbf{i} = \mathbf{M}_{x};$$

valendoci della (3), Vol. I, pag. 121, e dello sviluppo di un prodotto misto; accennando con p, q, r le componenti di Ω ; con P, Q, R quelle di M e con P', le loro derivate, si ha la prima delle seguenti equazioni:

(27)
$$\begin{cases} P' + R q - Q r = M_{x} \\ Q' + P r - R q = M_{y} \\ R' + Q p - P q = M_{z}. \end{cases}$$

Allo stesso modo si procede per la prima delle equazioni (26) in cui figura la reazione incognita. (*)

Le componenti del momento dell'impulso sono, per le (20), funzioni lineari ed omogenee delle p, q, r (componenti della velocità istantanea di rotazione) con coefficienti costanti: e però i primi membri delle (27) sono lineari nelle derivate di p, q, r; i secondi membri dipendono, al pari

^(*) Per la forma assoluta di queste equazioni vedi Analyse vectorielle générale, II pag. 4.

delle forze esterne, dalle coordinate dei vari punti, dalle loro velocità e dal tempo; e però, in ultima analisi, verranno a dipendere dai coseni direttori che la terna connessa col corpo forma con una terna fissa e dalle loro derivate prime, le quali, in virtù, delle formule di Poisson [Vol. I, p. 124, form. (11)] possono essere eliminate.

Quindi i secondi membri dipendono dai nove coseni e da p, q, r. Ora la risoluzione del problema esige evidentemente la ricerca di p, q, r e dei nove coseni in funzione di t; però essa dipende dalla simultanea integrazione delle (27) e delle [Vol. I, pag. 123, form. (8)]

(28) $\mathbf{i}' = r\mathbf{j} - q\mathbf{k}$; $\mathbf{j}' = p\mathbf{k} - r\mathbf{i}$, $\mathbf{k}' = q\mathbf{i} - p\mathbf{j}$;

cioè di un sistema di 12 equazioni differenziali lineari e di primo ordine.

Integrato questo sistema, la prima delle (26) ci farà conoscere la reazione del punto fisso.

Il sistema (27) si semplifica notevolmente scegliendo per terna di riferimento quella degli assi principali d'inerzia relativi al punto fisso. In tal caso infatti l'energia cinetica è espressa da

(29)
$$2 T = A p^2 + B q^2 + C r^2;$$

e quindi

(30)
$$P = Ap$$
, $Q = Bq$, $R = Cr$;

ed il sistema (27) assume la seguente forma di EULER:

(31)
$$\begin{cases} A p' + (C - B) q r = M_x \\ B q' + (A - C) r p = M_y \\ C r' + (B - A) p q = M_z. \end{cases}$$
(*)

§ 7. Moto per inerzia; moto alla Poinsot. — Consideriamo il caso particolare in cui M_e = 0; ciò che accade, per es., se il corpo non è soggetto a forze; oppure, se il corpo è pesante e sospeso pel suo centro di massa. L'energia potenziale è costante e per l'integrale dell'energia risulta costante pure l'energia cinetica. La seconda delle (26) e la (14) ci danno dunque subito:

(32)
$$\mathbf{M} = \cos t$$
.; $2 T = \Omega \times \mathbf{M} = h$;

^(*) La soluzione del problema di questo § su iniziata da d'Alembert: Recherches sur la précession, Paris, 1749; e poi da Euler nella memoria già citata: Découverte d'un nouveau principe etc., 1750; in cui trovansi le equazioni analoghe alle (31) ma ancora complicate coi prodotti di inerzia. Scoperta l'esistenza degli assi principali d'inerzia da Segner (1755), Euler semplisicò subito le equazioni trovate, ottenendo le (31): Du mouvement de rotation.... [Mém. Acad. de Berlin, 1758, p. 154] e trattando dissuamente il caso del § seguente. Vedi pure: d'Alembert, Opusc. Mathém. 1 (1761); e sopratutto Euler: Theoria motus corporum rigidorum, Rostock 1765, Cap. XI-XV.

cioè è costante il momento dell'impulso rispetto al punto fisso.

Se poi per il polo *I* di rotazione conduciamo il piano tangente all'ellissoide simile e similmente posto a quello d'inerzia, passante per quel punto, questo piano risulta normale ad **M**; e poichè la proiezione di Ω su **M** è costante, sarà pure costante il segmento che esso taglia sulla direzione del momento e però il piano è fisso nello spazio. Possiamo dunque concludere:

Nel moto, per inerzia, di un corpo rigido avente un punto fisso, tutti gli ellissoidi simili e similmente posti all'ellissoide d'inerzia relativo al punto fisso rotolano, senza strisciare, su piani fissi. (*)

Senza strisciare, perchè il punto di contatto *I* è sempre polo di rotazione.

La curva descritta da *I* sul piano fisso è la *erpoloide*; quella descritta sull'ellissoide, cioè il luogo delle successive posizioni del polo sull'ellissoide, è la *poloide* (Vol. I, pag. 165).

Per ciò che riguarda la trattazione analitica del problema, si osserverà che in tal caso le equazioni (31) diventano

(33)
$$\begin{cases} A p' + (C - B) q r = 0 \\ B q' + (A - C) r p = 0 \\ C r' + (B - A) p q = 0 \end{cases}$$

^(*) È questa la celebre interpretazione del moto dovuta a Poinsor; l. c., pag. 85.

e contengono solamente p, q, r e le loro derivate prime. Il problema del moto, dal punto di vista della integrazione, si spezza in altri due: nella determinazione della velocità istantanea di rotazione rispetto agli assi principali d'inerzia, mobili, cioè nella integrazione del sistema (33) e poscia nella determinazione del moto di questi assi rispetto agli assi fissi.

Il sistema (33) ammette due integrali che si deducono dalle (32) ed esprimono che è costante l'energia cinetica, e costante pure mod $\mathbf{M} = k$; cioè

(34)
$$\begin{cases} A p^2 + B q^2 + C r^2 = h \\ A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2 = k^2; \end{cases}$$

essi possono subito dedursi da (33) moltiplicando le equazioni rispettivamente per p, q, r, sommando ed integrando: e poi per Ap, Bq, Cr, ecc. Essi, come vedremo, permettono la riduzione a quadrature ellittiche.

Poichè le coordinate di I rispetto agli assi mobili (d'inerzia) sono p,q,r, le (34) sono le equazioni della poloide ed esprimono che essa è la intersezione di due ellissoidi coassiali e le cui equazioni assolute, ricordando la (13) ed il teorema di commutazione (Vol. I, pag. 28) sono

$$(I - O) \times \sigma (I - O) = h,$$

$$(I - O) \times \sigma^{2} (I - O) = k^{2}.$$

La poloide è una curva di quarto ordine; il cono della poloide è di secondo grado, la cui equazione, combinando opportunamente le (34), è

$$A(A h - k^{2}) p^{2} + B(B h - k^{2}) q^{2} + C(C h - k^{2}) r^{2} = 0.$$

Supponiamo

$$A > B > C$$
, $(B + C > A)$;

risulta

$$A h - k^2 = B (A - B) q^2 + C (A - C) r^2 > 0$$

 $Ah > k^2$

a meno che inizialmente sia q = r = 0. In tal caso il primo membro è nullo: sarà sempre q = r = 0 e quindi $p = \cos t$. Abbiamo il caso della rotazione permanente uniforme intorno l'asse principale d'inerzia di momento massimo. In modo identico si deduce che

$$Ch < k^2$$

mentre Bh può essere maggiore, eguale o minore di k^2 .

Le condizioni precedenti si interpretano subito. Se $k^2 < Ch$, gli assi del secondo ellissoide (34) sono tutti più piccoli del primo, che è quindi esterno al secondo; il moto non è possibile. Se

 $k^2 = Ch$ i due ellissoidi si toccano nelle estremità dell'asse minimo d'inerzia; è il caso della rotazione permanente uniforme. Appena k² supera di poco Ch, l'intersezione, cioè la poloide consta di due piccole curve chiuse simmetriche rispetto al centro e contenenti i due estremi dell'asse minimo; di qui si comprende subito che l'asse di momento minimo è un asse stabile di rotazione. Crescendo il rapporto $k^2:h$, ma essendo sempre $k^2 < Bh$, le due curve aumentano e quando $k^2 = B h$ si riducono ad una curva sola e precisamente a due ellissi intersecantesi lungo l'asse medio (asse permanente, ma instabile). Il cono della poloide si spezza in due piani passanti per l'asse medio e si vedrebbe facilmente che la distanza del punto fisso dal piano fisso è eguale al semiasse medio dell'ellissoide. Finalmente se $k^2 > Bh$ ma < Ah, le due curve costituenti la poloide avvolgeranno l'asse di momento massimo; e quando $k^2 = A h$ essa si riduce agli estremi dell'asse; è il caso della rotazione permanente stabile. Se poi $k^2 > Ah$ il secondo ellissoide risulta esterno al primo ed il moto non è possibile. In ogni modo, nel moto di rotolamento, il punto I percorre uno solo dei rami della poloide, eccetto nel caso di $k^2 = B h$. L'altro ramo verrà descritto nel moto inverso (Vol. I, p. 165).

Vediamo, sommariamente, come il problema possa ridursi alle quadrature. Scelgasi l'asse fisso z₁

parallelo al momento costante dell'impulso. Poichè

$$\cos(x z_1) = A p : k = c_1, \text{ ecc.}$$

avremo

$$kc_1 = Ap$$
, $kc_2 = Bq$, $kc_3 = Cr$.

Poniamo

$$c_3 = u$$
, $Cr = ku$.

Esprimiamo p, q in funzione di u nell'ipotesi di $B h > k^2$. Si introducano perciò due nuove costanti a e b tali che

$$k^{2} (A - C) a^{2} = C (A h - k^{2});$$

 $k^{2} (B - C) b^{2} = C (B h - k^{2});$

e poichè

$$k^{2}(A - C)(B - C)(a^{2} - b^{2})$$

= $C(B - A)(Ch - k^{2}),$

risulta a > b. Poscia successivamente, risolvendo le (34), si ha

$$A C(A - B) p^{2} = k^{2} (B - C) (u^{2} - b^{2}),$$

$$B C(A - B) q^{2} = k^{2} (A - C) (a^{2} - u^{2}),$$

$$(A - B) p q = k n \sqrt{(a^{2} - u^{2}) (u^{2} - b^{2})}$$

dove n è definita da

$$A B C^2 n^2 = k^2 (A - C) (B - C)$$
.

Dopo ciò la terza delle (33) ci dà

$$u'^2 = n^2 (a^2 - u^2) (u^2 - b^2)$$

che con una quadratura ci farà conoscere u mediante t; u è una funzione ellittica di t.

Per la realtà di p e di q, dev'essere $a^2 > u^2 > b^2$; cioè u deve variare nell'intervallo (b, a) oppure in (-a, -b); u e quindi r non si annulla mai e però non cambia mai di segno; cioè u conserva il segno che ha per t = 0; per es. positivo.

Se u varia da b ad a, p, dapprima nullo, cresce e quindi p' è positivo e q negativo (per la prima delle (33): quando p avrà raggiunto il suo valore massimo a, comincerà a decrescere e q sarà positivo, ecc.

Le proprietà esposte si interpretano facilmente. Il cono descritto dall'asse di momento minimo intorno al momento dell'impulso è sempre compreso tra due coni rotondi, cui risulta periodicamente tangente. La velocità angolare ω , come p,q,r, risulta compresa tra due limiti facili ad assegnarsi; quindi anche l'erpoloide è compresa tra due cerchi ai quali è tangente.

La determinazione della posizione della terna mobile rispetto alla fissa si fa agevolmente ricorrendo agli angoli di Euler (Vol. I, pag. 103; form. (15) di pag. 168). Gioverà anzi esporre una più diretta e rapida dimostrazione di queste formule. Se poniamo

$$\operatorname{sen} \theta \cdot \mathbf{l} = \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{k}$$

risulta \mathbf{l} vettore unitario parallelo e dello stesso senso della retta OL e quindi complanare con \mathbf{i} , \mathbf{j} e con \mathbf{i}_1 , \mathbf{j}_1 ; e precisamente

$$\mathbf{l} = \cos \varphi \cdot \mathbf{i} - \sin \varphi \cdot \mathbf{j} = \cos \psi \cdot \mathbf{i}_1 + \sin \psi \cdot \mathbf{j}_1$$

D'altra parte osservando che dalla terna $O(\mathbf{i_1}, \mathbf{j_1}, \mathbf{k_1})$ si passa alla $O(\mathbf{i_1}, \mathbf{j_1}, \mathbf{k})$ con tre rotazioni: θ intorno OL, φ intorno $O\mathbf{k_1}$, risulta subito

$$\Omega = \theta' \mathbf{l} + \varphi' \mathbf{k} + \psi' \mathbf{k}_1 = p \mathbf{i} + q \mathbf{j} + r \mathbf{k}.$$

Ora, successivamente, col teorema sul doppio prodotto vettoriale:

$$\mathbf{k} \wedge \mathbf{l} \cdot \sin \theta = \mathbf{k}_1 - \cos \theta \cdot \mathbf{k};$$

$$\mathbf{k}_1 = (\cos \varphi \cdot \mathbf{j} + \sin \varphi \cdot \mathbf{i}) \sin \theta + \cos \theta \cdot \mathbf{k}.$$

Sostituendo nella espressione di Ω , risultano subito i valori di p, q, r conforme alle (15) già citate; oppure, inversamente, le espressioni di θ', φ', ψ' mediante le p, q, r e gli angoli euleriani.

Poichè le componenti c_1 , c_2 , c_3 di \mathbf{k}_1 sono (Vol. I, pag. 103)

$$c_1 = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta$$
, $c_2 = \cos \varphi \operatorname{sen} \theta$, $c_3 = \cos \theta$,

senz'altre quadrature conosceremo φ. Inoltre dalle ricordate formule si deduce

$$\psi' \operatorname{sen} \theta = p \operatorname{sen} \varphi + q \operatorname{cos} \varphi ; \psi' \operatorname{sen}^2 \theta = p c_1 + q c_2,$$

$$k \psi' (\mathbf{I} - u^2) = A p^2 + B q^2 = h - C r^2$$

che ci farà conoscere ψ mediante t, con un'altra quadratura.

Consideriamo due casi particolari.

Se $Bh = k^2$, risulta b = 0; e l'equazione differenziale in u, ponendo

$$u = a (\operatorname{Ch} v)^{-1}$$

ci dà

$$v = n a (\tau - t)$$
; $\tau = \cos t$.

e tutte le quadrature si effettuano colle funzioni elementari.

Un altro caso particolare interessante è quello in cui l'ellissoide d'inerzia è di rotazione; per es., intorno \mathbf{k} ; cioè A=B. La normale in I all'ellissoide, parallela ad \mathbf{M} , dovendo incontrare l'asse di rotazione, si deduce che $\mathbf{M}, \Omega, \mathbf{k}$ sono complanari; e però, per la (32),

$$(\mathbf{M} \times \mathbf{k})' = \mathbf{M} \times \mathbf{k}' = \mathbf{M} \times \Omega \wedge \mathbf{k} = 0$$

onde $\mathbf{M} \times \mathbf{k} = \text{cost.}$; cioè l'asse di momento minimo descrive un cono rotondo intorno al momento dell'impulso. Poi, per la (13)

$$\mathbf{k} \times \sigma \Omega = \text{cost.} = \Omega \times \sigma \mathbf{k}$$
; ossia $\Omega \times \mathbf{k} = \text{cost.}$;

e del pari $\Omega \times M = \cos t$. Ossia:

La poloide e l'erpoloide sono due cerchi normali a k ed M, descritti dal polo con moto uniforme.

Per quanto riguarda la integrazione, dal sistema (33) si deduce anzitutto $r=r_0=\cos t$; poscia dalle prime due, agevolmente:

$$p'' + n^2 p = 0$$
, $A n = (A - C) r_0$

che definisce un moto armonico: e però

$$p = \alpha \cos(n t + \tau)$$
; $q = \alpha \sin(n t + \tau)$.

Infine risulta, per gli angoli di EULER, $\theta = \cos t$.; $A \psi' = k$ e perciò ψ (ed anche φ) cresce proporzionalmente al tempo. Il movimento considerato dicesi moto regolare di precessione. (*)

^(*) Il problema di questo §, diffusamente trattato analiticamente da Euler nella *Theoria motus* etc., ricevette quasi la sua definitiva soluzione da Poinsot, l. c., e poi da Jacobi, che in modo elegante espresse i coseni direttori mediante funzioni razionali di funzioni doppiamente periodiche di 2* specie (Ges. Werke, 2) La espressione,

§ 8. Moto di un corpo rigido pesante sospeso per un punto fisso. — Sia k₁ un vettore unitario parallelo alla verticale e volto

mediante funzioni ellittiche, dei parametri α, β, γ, δ della rotazione (Vol. I, pag. 104) trovasi in Klein u. Sommerfeld, l. c. pag. 454.

Si può consultare; HERMITE, Sur quelques appl. des fonc. ellip., Paris 1885, pag. 23; HALPHEN, Traité des Fonc ellipt, 2, pag. 75 e seg.; e l'opera citata del WHITTAKER, § 69; e oltre quella sulle funzioni ellittiche del GREENHILL, le due grosse monografie dello stesso autore: Notes on Dynamics, London 1908; Report on Gyroscopic Theory, London 1914.

Sulla storia di questo problema cfr. GILBERT, Étude historique et critique sur le problème de la rotation, etc. [Annal. de la Soc. scientif. de Bruxelles, 2, pag. 255-350 (1878)]. Nella monografia del sig. Domogaroff, Sul moto libero di un giroscopio, Pietrogrado 1893 (in russo), si trova una estesa e cronologica bibliografia del problema.

Numerosi modelli sono stati costruiti per la realizzazione di questo caso di giroscopio da Mach, Obermayer [Carls Repertorium 4, pag. 361; 15, pag. 54; vedi anche Maxwell, The Collected Pap. 1, pag. 248] da Greenhill; i più interessanti sono quelli cinematici di H. Grassmann (junior) costruiti dallo Schilling, rappresentanti i tre casi del cono della poloide e il tracciato della erpoloide; e il giroscopio di Prandt, che consiste in fondo in una ruota di bicicletta sospesa in modo da poter ritenere fisso il suo centro di massa e i cui assi principali d'inerzia sono l'asse della ruota e due altri contenuti nel piano della ruota; coll'aggiunta di alcuni pesi all'asse si può fare in modo

verso l'alto; il momento delle forze esterne è eguale a $-\mu g(G-O) \wedge \mathbf{k}_1$; quindi la seconda delle (26) diviene, compenetrando il fattore g in μ che verrà quindi a rappresentare il peso del corpo,

(35)
$$\mathbf{M'} = \mu \, \mathbf{k}_1 \wedge (G - O),$$

nella quale sono racchiuse tutte le leggi del movimento.

Moltiplicando scalarmente per Ω e ricordando che, (17),

$$T' = \Omega \times \mathbf{M}', G' = \Omega \wedge (G - O),$$

si deduce

$$T' = \mu \Omega \times \mathbf{k}_1 \wedge (G - O) = -\mu G' \times \mathbf{k}_1,$$

ed integrando

(36)
$$T = -\mu (G - O) \times \mathbf{k}_1 + \frac{1}{2} h$$

che è l'integrale dell'energia.

Moltiplicando la (35) scalarmente per \mathbf{k}_1 ed integrando si deduce pure

$$(37) M \times \mathbf{k}_1 = \text{cost.}$$

che l'asse della ruota abbia il momento massimo o minimo, ecc. ed anche che l'ellissoide d'inerzia sia di rotazione.

Interessantissimi riescono gli esperimenti sulle precessioni regolari e sulla stabilità dei vari assi, ecc.

La componente verticale del momento dell'impulso è costante. Posto, come al \S 6, F = O + M, il punto F descrive, nello spazio fisso, la cosidetta prima curva d'impulso; la (37) esprime che essa è contenuta in un piano orizzontale.

Oltre i due integrali (36) e (37) non si può in generale determinare alcun altro integrale. Notiamo soltanto che dalla (35) si può ancora dedurre la relazione:

(38)
$$|(G-O) \times \mathbf{M}|' = (G-O) \wedge \mathbf{M} \times \Omega$$
.

Per riconoscere le difficoltà dell'integrazione, riferiamoci agli assi principali d'inerzia e teniamo presente che le componenti di \mathbf{k}_1 sono c_1, c_2, c_3 ; se quindi diciamo ξ, η, ζ le coordinate (costanti) di G rispetto gli stessi assi otteniamo le equazioni cartesiane:

(39)
$$\begin{cases} A p' + (C - B) q r = \mu (c_2 \zeta - c_3 \eta) \\ B q' + (A - C) r p = \mu (c_3 \xi - c_1 \zeta) \\ C r' + (B - A) p q = \mu (c_1 \eta - c_2 \xi); \end{cases}$$

insieme colle quali occorre tener presenti, dalle (28), le

(40)
$$c_1' = rc_2 - qc_3, c_2' = pc_3 - rc_1, c_3' = qc_1 - pc_2.$$

Di guisa che il sistema delle dodici equazioni del caso generale, § 6, si scinde nel caso attuale in due sistemi distinti di sei equazioni simultanee di primo ordine. Eliminando il tempo, il nostro sistema si può porre sotto la forma:

$$dp: \pi = dq: \chi = \ldots = dc_3: C_3$$

in cui π non dipende da ρ ,......... C_3 non dipende da c_3 . I due integrali (36) e (37) sono espressi da

(36')
$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h - 2\mu(\xi c_1 + \eta c_2 + \zeta c_3)$$

(37')
$$A p c_1 + B q c_2 + C r c_3 = \cos t$$
.

e questi possono dedursi direttamente da (39) e (40) come nel § 6. Si ha ancora

Ma:
$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1.$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} + \dots + \frac{\partial C_1}{\partial c_1} + \dots = 0;$$

quindi, la teoria dell'ultimo moltiplicatore ci assicura che la conoscenza di un quarto integrale del sistema (39), (40), distinto dai precedenti e indipendente dal tempo, permette di assegnarne un quinto con una sola quadratura; (*) ed allora anche il problema è risoluto. Dunque:

^(*) JACOBI, Vorlesungen über Dynamik, pag. 97. Per una rapida esposizione della teoria dell'ultimo moltiplicatore vedi: MAGGI, l. c. pag. 246.

^{16 -} MARCOLONGO.

La conoscenza di un quarto integrale del sistema, indipendente dal tempo, riconduce la risoluzione del problema alle quadrature. (*)

In generale questo integrale non sa assegnarsi, I casi speciali in cui esso è stato assegnato sono i seguenti:

- I. Il corpo è sospeso pel suo centro di massa (Caso di Euler e Poinsot). Poichè G = O, si riottiene subito $\mathbf{M} = \cos t$.
- 2. L'ellissoide d'inerzia è di rotazione e il centro di massa giace sull'asse. (Caso di La-GRANGE). (**) Queste condizioni sono certamente soddisfatte se il corpo è omogeneo di rotazione e sospeso per un punto dell'asse (giroscopio ordinario). In questo caso, lo abbiamo già osservato, i tre vettori \mathbf{M} , \mathbf{Q} , G O sono complanari e però dalla (38) ricaviamo

$$(G-O)\times \mathbf{M} = \cos t$$
.

che è appunto il quarto integrale richiesto: ed esprime che il punto F, precedentemente considerato, descrive nel corpo una curva, che dicesi

pag. 253.

^(*) Le equazioni del moto possono porsi sotto varie altre notevoli forme: vedi una mia nota: Sul moto di un corpo pesante, ecc. [Rend. R. Acc. Lincei, (5) 17, pagine 698-705 (1908)].

^(**) LAGRANGE, Mécanique anal., Ouevres compl. 12,

seconda curva d'impulso, contenuta in un piano perpendicolare all'asse di simmetria.

La relazione precedente si può scrivere

$$(G - O) \times \sigma \Omega = \Omega \times \sigma (G - O) = \text{cost.}$$

e poichè $\sigma(G-O)$ è parallelo a G-O, si conclude che è costante la componente di Ω secondo l'asse di simmetria (e ciò si deduce subito dalla terza delle (39)): ed anche:

La poloide è una curva contenuta in un piano normale all'asse di simmetria.

Le quadrature si eseguono col sussidio delle funzioni ellittiche. JACOBI ha poi dimostrato il seguente notevolissimo teorema:

Il moto di un giroscopio simmetrico pesante è identico al moto relativo di due moti alla Poinsot. (*)

^(*) Fragments sur la rotation d'un corps, communiqués par Lottner; Werke, 2, pag. 477. La bibliografia di questo caso è straordinariamente ricca: per la riduzione alle quadrature, nonchè per lo studio approfondito del teorema di Jacobi vedasi sopratutto: Halphen, Fonctions ellipt. 2, pag. 81; Klein U. Sommerfeld, l. c., pag. 199 e 392 (specialmente per la rappresentazione ellittica mediante funzioni doppiamente periodiche di seconda specie dei parametri della rotazione); le Notes à la Mécanique de Despeyrous e la memoria: Sur le mouvement d'un corps pesant etc. [Journ. de Mathém. (4), 1, pag. 403 (1885)] di Darboux; e infine due miei lavori in Annali di Matem. (2), 22, pag. 157 (1894) e (3), 7, pag. 99 (1902)].

3. Il caso in cui A = B = 2 C ed il centro di massa giace nel piano dei due primi assi di inerzia (Caso della Kowalevski).

Anche in questo caso si può assegnare un quarto integrale algebrico delle equazioni del moto e le quadrature si effettuano col sussidio delle funzioni iperellettiche. (*)

(*) S. KOWALEVSKI, Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe [Acta mathem., 12, pag. 177 (1889); Mém. présentés par divers savants étragers,... Paris, 30, n.° 1]. La determinazione dei coseni direttori è stata compiuta da F. KÖTTER [Acta mathem., 17, pag. 209 (1898)]. Numerosi geometri, specialmente russi, si sono occupati, della rappresentazione cinematica di questo caso: vedasi la monografia di O. LAZZARINO: Rend. R. Acc. di Scienze fis. e mat. di Napoli (3) 42, pag. 68-146 (1911); e Analyse vectorielle, 2, pag. 14.

La Kowalevski trovò il caso di moto ora conosciuto col suo nome, ricercando le condizioni affinchè il sistema (39), (40) ammetta integrali uniformi con poli a distanza finita. Appelroth, Ueber das Problem der Bewegung.... Moskau, 1893, completò l'analisi della Kowalevski e mostrò che i tre casi enumerati sono i soli i quali ammettano integrali uniformi. Se si suppone anche l'esistenza di poli si ottiene un altro caso detto di Hess [Mathem. Ann, 37, pagg. 153-181 (1890)], profondamente studiato da Nekrassoff [Ibid., 47, pagg. 445-530 (1893)]. R. Liouville [Acta mathem., 20, pag. 239 (1896)] si propose il problema della ricerca di tutti i casi in cui le equazioni differenziali del moto ammettono un quarto integrale algebrico

§ 9. Moto di un corpo rigido libero. — Applicheremo ancora i teoremi dell'impulso: ma converrà riferire i momenti ad un punto G fisso nel corpo. Diremo poi sempre O un punto fisso nello spazio, quindi avremo le equazioni (Vol. I, pag. 210).

(41)
$$\mathbf{R}' = \mathbf{R}_{e}$$
$$[\mathbf{M} + (G - O) \wedge \mathbf{R}]' = \mathbf{M}_{e} + (G - O) \wedge \mathbf{R}_{e}.$$

indipendente dal tempo. Egli trovò le seguenti condizioni nesessarie

 $\zeta = 0$, A = B = 2 C: n (n intero e positivo). Poichè A + B = C

se deduce che $n \le 4$. Per n = 1 si ottiene il caso della Kowalevski; per n = 2 l'ellissoide d'inerzia è una sfera e abbiamo un caso particolare del problema di Lagrange; n = 3, 4 sarebbero casi nuovi; ma la ricerca del quarto integrale, malgrado gli sforzi di vari matematici, non riusci. Infatti le condizioni di Liouville non sono sufficienti per stabilire che il quarto integrale non sia una combinazione dei tre già noti; ed Husson, Recherche des intégrales algébriques.... [Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, (2) 8, pag. 73 (1906)] e Burgatti [Rend. Circolo matem. Palermo, 29, pag. 363 (1910)] poterono rigorosamente dimostrare che ogni integrale algebrico indipendente dal tempo del sistema (39), (40) è una combinazione degli integrali noti ad eccezione dei casi di Euler, Lagrange e Kowalevski.

Sviluppando questa seconda e riducendo, otte-

$$\mathbf{M}' + G' \wedge \mathbf{R} = \mathbf{M}_{\mathrm{e}}.$$

Col solito metodo si ottengono le equazioni cartesiane rispetto ad una terna coll'origine in G e connessa col corpo. Se diciamo u, v, w le componenti della velocità di G, otteniamo le equazioni:

$$(43) U' + Wq - Vr = R_x; \text{ ecc.}$$

(44)
$$P' + Rq - Qr + Wv - Vw = M_x$$
; ecc.

A primo membro, ricordando le (20), figureranno linearmente le derivate delle componenti del moto elicoidale (u, v, w, p, q, r), oltre le stesse componenti. I secondi membri dipenderanno dalle coordinate ξ , η , ζ di G rispetto agli assi fissi e dai coseni direttori che la terna fissa nel corpo forma con quella fissa nello spazio (in particolare dai tre angoli di EULER) e dalle loro derivate. Le derivate di ξ , η , ζ si esprimono mediante u, v, w e i coseni; poscia tra le p, q, r e angoli di Euler e loro derivate sussistono le equazioni (15) del Vol. I, pag. 168. Si ha dunque un sistema di dodici equazioni differenziali del primo ordine tra le $u, v, \ldots, r, \xi, \eta, \zeta$ e i detti tre angoli. Il problema, assegnate le condizioni iniziali, è perfettamente determinato.

Si ottiene una notevole semplificazione scegliendo per punto G il centro di massa del corpo e per assi connessi con esso gli assi principali relativi a G; ricordando l'espressione di T e le (20), troviamo

(43')
$$\mu(u' + q w - r v) = R_x, \dots$$

(44')
$$Ap' + (C - B)qr = M_x,$$

Nel caso del corpo pesante $\mathbf{M} = 0$; le ultime tre precedenti si possono integrare indipendentemente dalle prime e definiscono un moto alla Poinsot (§ 7); mentre il teorema sul moto del centro di massa (Cap. IV, § 5) ci dice che G descrive una parabola. In questo caso abbiamo decomposto il movimento in due: quello del centro di massa e quello del corpo intorno al centro di massa riguardato come fisso.

Tale decomposizione ha luogo tutte le volte che M_x ,..... non dipendono da u, v, w. Così per es., se tutti i punti del corpo sono attratti da un centro fisso O proporzionalmente alla distanza, la risultante di queste forze è una forza applicata in G e proporzionale alla distanza di G da O (Vol. I, pag. 224) onde G descrive una ellissi con centro in O (Ibid., pag. 65), mentre il moto del corpo intorno G riducesi ancora ad un moto alla Poinsot.

Conviene, a volte, riferire la posizione del corpo ad una terna qualunque non rigidamente connessa col corpo ma sempre coll'origine nel centro di massa. Dicendo in tal caso p_1, q_1, r_1 le componenti della rotazione rispetto ai nuovi assi, le equazioni (43) diventano

$$\mu (u' + q_1 w - r_1 v) = R_x$$
, ecc.

mentre le (44) ci dànno

$$P' + q_1 R - r_1 Q = M_x$$
; ecc.

ma qui occorre osservare che derivando P, \ldots rispetto al tempo, le A, B, \ldots, C_1 variano pur esse col tempo.

Notiamo un caso particolare: quello in cui un solo asse, per es., z, è connesso rigidamente col corpo. Un punto P di questo asse deve avere la stessa velocità assoluta sia che venga considerato appartenente al corpo o alla terna; quindi

$$\Omega \wedge (P - G) = \Omega_1 \wedge (P - G)$$

cioè $\Omega_1 - \Omega$ è parallelo a P - G; quindi

$$p = p_1$$
, $q = q_1$ ed $r \neq r_1$.

§ 10. Percossa in un corpo rigido con un punto fisso o libero. — Conforme ai so-

liti teoremi applicheremo equazioni analoghe alle (26), e cioè

$$(45) \qquad \Delta R = r_1 + R_1 \; ; \; \Delta M = M_1$$

essendo \mathbf{R}_1 ed \mathbf{M}_1 le coordinate della percossa, \mathbf{r}_1 la reazione alla percossa del punto fisso. Rispetto agli assi d'inerzia, dalla seconda delle (45) si deduce

$$A \Delta p = \mathbf{M}_1 \times \mathbf{i}$$
; ecc.

Se quindi il momento della percossa non è nullo, il moto di rotazione varia bruscamente; e se all'istante t_0 della percossa il corpo è in riposo, $A p = \mathbf{M}_1 \times \mathbf{i}$, ecc., cioè:

L'asse istantaneo di rotazione è coniugato al piano della coppia di percossa rispetto all'ellissoide d'inerzia; quindi:

Per i soli assi principali d'inerzia l'asse di rotazione coincide coll'asse della coppia di percossa.

Finalmente per un corpo rigido libero, riferendoci agli assi centrali di inerzia e nell'ipotesi che il corpo parta dal riposo, si ha

$$\mu u = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{i} , \dots , A p = \mathbf{M}_1 \times \mathbf{i} , \dots ;$$

quindi per ogni diname di percossa, si può determinare l'asse di moto elicoidale (o della vite) intorno al quale il corpo incomincerà a ruotare e a scorrere; dopo ciò il moto sarà retto dalle solite equazioni.

È possibile determinare una diname di percossa in modo che coincida colla corrispondente vite? Essa deve intanto coincidere con uno degli assi principali; per es., \mathbf{i} e se poniamo $A = \mu a^2$, e diciamo τ ed ω la grandezza della traslazione e della rotazione nel moto elicoidale, risulta

$$\operatorname{mod} \mathbf{R}_1 = \mu \tau$$
, $\operatorname{mod} \mathbf{M}_1 = A \omega = \mu a^2 \omega$;

e se il parametro k della diname deve risultare eguale a quello della vite (Vol. I, pagg. 86, 239) dovrà essere

$$k = a^2 : k$$
; cioè $k = \pm a$;

Abbiamo dunque sei dinami o viti principali d'inerzia.

In generale si dimostra:

Un corpo rigido con r gradi di libertà, possiede r viti o dinami principali d'inerzia. (*)

§ 11. Sull'urto di due corpi. — Due corpi Γ_1 e Γ_2 liberi, le cui superficie sono liscie e convesse, vengono ad urtarsi in un punto P; si de-

^(*) R. S. Ball, Researches in the Dynamics of a rigid Body by the aid of the Theory of Screws [Phil. Trans. London, 1873, 164] The Theory of Screws, Cambridge, 1900. TIMERDING, Geometrie der Kräfte, Leipzig, 1908.

termina una brusca variazione nel moto dei due corpi, che appunto si tratta di investigare.

L'urto avvenga senza attrito: cioè il sistema delle percosse subite dai due corpi nell'urto sia riducibile, per ciascun corpo, ad una percossa N, incognita, applicata in P e diretta secondo la normale interna di ciascun corpo.

Pel primo corpo diciamo m_1 la massa, G_1 il centro di massa; \mathbf{M}_1 il momento dell'impulso rispetto a G_1 prima dell'urto; \mathbf{M}'_1 dopo l'urto; e così accenniamo con $\frac{d}{d} \frac{G_1}{t}$ e $\left(\frac{d}{d} \frac{G_1}{t}\right)'$ la velocità di G_1 prima e dopo l'urto. Il solito teorema ci dà

(46)
$$m_1 \left(\frac{d G_1}{d t} \right)' - m_1 \frac{d G_1}{d t} = \mathbf{N} ,$$

$$\mathbf{M'}_1 - \mathbf{M}_1 = (P - G_1) \wedge \mathbf{N} ;$$

e due equazioni analoghe, cambiando l'indice I in 2 ed N in — N, varranno pel secondo corpo. Di più, sempre per la (13),

$$\mathbf{M}_1 = \sigma \Omega_1 : \mathbf{M}'_1 = \sigma \Omega'_1$$
, ecc.

Cognito il moto prima dell'urto, le quattro equazioni precedenti non bastano per determinare \mathbf{N} e le coordinate dei due moti elicoidali: $\left(\frac{d G_1}{d t}\right)'$, Ω'_1 , ecc. dopo l'urto.

Per assegnare una quinta equazione bisogna ricorrere a qualche altro dato sperimentale. Diciamo T_1 e T_1' l'energia cinetica di Γ_1 ; \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_1' la velocità di P, considerato come appartenente a Γ_1 prima e dopo l'urto; per modo che

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{d \ G_1}{d \ t} + \Omega_1 \wedge (P - G_1); \text{ ecc.} \\ \mathbf{2} \ T_1 &= m \ \left(\frac{d \ G_1}{d \ t} \right)^2 + \Omega \times \mathbf{M}_1, \text{ ecc.} \end{aligned}$$

Valendosi delle (46), e del fatto che

$$\mathbf{M}_{1} \times \mathbf{\Omega'}_{1} = \mathbf{\Omega'}_{1} \times \sigma \, \mathbf{\Omega}_{1} = \mathbf{\Omega}_{1} \times \sigma \, \mathbf{\Omega'}_{1} = \mathbf{\Omega}_{1} \times \mathbf{M}_{1}'$$

si deduce agevolmente:

$$2 (T_1' - T_1) = \mathbf{N} \times (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1'), 2 (T_2' - T_2) = -\mathbf{N} \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2');$$

e quindi per la variazione totale di energia cinetica:

$$\mathbf{2}\left(T'-T\right)=\mathbf{N}\times(\mathbf{v}_{1}+\mathbf{v'}_{1}-\mathbf{v}_{2}-\mathbf{v'}_{2}).$$

Ora si ammette, come dato sperimentale, che in nessun caso si può avere comento di energia cinetica; cioè in nessun caso T'-T è positivo; e nel caso limite dei corpoperfettamente elastici, tale differenza è nulla. In questo caso adunque la quinta equazione indicata è la

$$(47) T' = T.$$

Se i due corpi prima dell'urto si corrono incontro $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{N}$ è negativo. Se invece procedono secondo la stessa direzione, sarà il primo prodotto ancora negativo e negativo del pari il secondo; ma perchè l'urto avvenga deve essere $(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times \mathbf{N} > \mathbf{o}$. Dopo l'urto, o i due corpi avranno rimbalzato o saranno rimasti a contatto; cioè $(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2') \times \mathbf{N} \ge \mathbf{o}$; ma pel principio ammesso, dovrà risultare

$$(\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2') \times \mathbf{N} \leq (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times \mathbf{N}.$$

È quindi lecito porre

(48)
$$(\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}'_2) \times \mathbf{N} = -e(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \times \mathbf{N}$$
,

e essendo, per ogni coppia di corpi, un numero da ritenersi sensibilmente costante, compreso tra o ed 1 e da determinarsi sperimentalmente. Esso dicesi coefficiente di elasticità all'urto o coefficiente di restituzione.

La (48) costituisce, in generale, la quinta equazione richiesta. Nel caso dei corpi perfettamente elastici, e = 1; la (48) diviene identica alla (47); nel caso dei corpi molli o anelastici, e = 0; e la (48) diviene

$$\mathbf{v'}_1 \times \mathbf{N} = \mathbf{v'}_2 \times \mathbf{N} .$$

Dopo ciò il calcolo di **N** non presenta difficoltà. Posto $\mathbf{u}_1 = (P - G_1) \wedge \mathbf{n}$, essendo \mathbf{n} un vettore

unitario normale a Γ_1 e volto verso l'interno, un breve calcolo ci dà

$$\mathbf{v}'_1 \times \mathbf{N} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{N} + \frac{\mathbf{N}^2}{m_1} + \mathbf{N}^2 \, \mathbf{u}_1 \times \sigma^{-1} \, \mathbf{u}_1$$
; ecc.

quindi sostituendo nella (48) deduciamo

$$\operatorname{mod} \mathbf{N} = \frac{(\mathbf{I} + e) \ (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times \mathbf{n}}{\frac{\mathbf{I}}{m_1} + \frac{\mathbf{I}}{m_2} + \mathbf{u}_1 \times \sigma^{-1} \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \times \sigma^{-1} \mathbf{u}_2}$$

Perchè la velocità di rotazione non subisca alterazione, occorre che $(P-G_1) \land \mathbf{N} = \mathbf{0}$ cioè che la normale comune passi per i centri di massa dei due corpi, cioè che l'urto sia centrale.

Il caso dell'urto centrale di due sfere animate da un semplice moto di traslazione lungo l'asse delle x si deduce assai facilmente.

Per le sfere anelastiche:

$$v_1' = v_2' = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

è la velocità del centro di massa delle due sfere unite. In questo caso vi ha perdita di forza viva espressa da

$$\frac{m_1\,m_2}{2\;(m_1+m_2)}(v_1-v_2)^2.$$

Nel caso delle sfere perfettamente elastiche si ha

$$\begin{aligned} v_{_{1}} &= v_{_{2}} + \alpha \;,\; v_{_{2}}' = v_{_{1}} + \alpha \;;\; v_{_{1}}' - v_{_{2}}' = v_{_{2}} - v_{_{1}} \;;\\ \alpha &= \frac{m_{_{1}} - m_{_{2}}}{m_{_{1}} + m_{_{2}}} (v_{_{1}} - v_{_{2}}) \;. \end{aligned}$$

Se le due sfere sono eguali vi ha scambio di velocità.

Nel caso finalmente dei corpi qualunque, la perdita di energia cinetica è

$$({\bf 1}\,-e^2)\,\frac{m_1\,m_2}{2\,(m_1+m_2)}(v_1-v_2)^2.$$

Se il secondo corpo è in quiete, il rapporto tra la energia cinetica perduta e quella impiegata è

$$(1-e^2)\frac{m_2}{(m_1+m_2)}$$
.

Conviene, nei casi pratici, che questo rapporto sia il più piccolo possibile e quindi assumere (caso del martello e chiodo, maglio e massa da comprimere) m_1 grande e v_1 piccolo; disporre cioè di una forte massa con piccola velocità.

Se il secondo corpo è una sfera di raggio infinitamente grande, per es., un masso fisso limitato da un piano, si ha $v_2 = v_2' = 0$; quindi la (48)

$$v_1' = -e v_1;$$

e se la sfera cade sul piano supposto orizzontale dall'altezza h, sarà $v_1 = \sqrt{2 h g}$; quindi rimbalzerà con velocità $-e \sqrt{2 g h} = -\sqrt{2 g e^2 h}$; rimbalzerà cioè all'altezza $e^2 h$; ecc. Questo fornisce un mezzo per la determinazione sperimentale di e. (*)

Vedi Poisson, Traité de Mécanique, 2º édition (1833), 2, pag. 254; e per la storia: MACH, l. c., pag. 296.

^(*) Le leggi dell'urto cercate invano da GALILEO, da DESCARTES, che enunciò, in un caso particolare, il teorema sulla costanza della variazione dell'impulso (ossia delle quantità di moto) costituirono oggetto di speculazione di G. MARCO MARCI e di ALFONSO BORELLI; ma in sostanza furono stabilite, in seguito a problema proposto dalla Società Reale di Londra nel 1668, da WREEN, da WALLIS. pel caso dei corpi perfettamente elastici, Mechanica seu motus scientia (1671) e da HUYGENS, le cui ricerche furono pubblicate nel 1704 negli Opuscula posthuma. È qui che compare il concetto di energia cinetica o forza viva, così chiamata poi da LEIBNITZ. La disputa tra cartesiani e leibniziani sulla misura delle forze vive e su quella delle forze morte (che è la quantità di moto) e sorta a proposito delle leggi dell'urto, continuò per tutto il secolo XVIII anche quando d'ALEMBERT ne aveva mostrato la perfetta inutilità, riducendosi tutto ad una questione di parole.

Basterà limitarci a considerare rette uscenti dal centro. Per la sfera

$$\int x^2 d\tau = \int y^2 d\tau = \int \zeta^2 d\tau = \frac{1}{3} \int r^2 d\tau.$$

Ma l'elemento di volume è dato da $r^2 dr d\omega$, essendo $d\omega$ l'elemento di superficie sterica di raggio uno: onde

$$\int r^2 d\tau = 4 \pi \int r^4 dr = \frac{4 \pi R^5}{5};$$

quindi dicendo a, b, c i raggi principali d'inerzia

$$a^2 = b^2 = c^2 = \frac{2}{5} R^2$$
.

Per un ellissoide di semiassi a_1 , b_1 , c_1 , colla sostituzione $x = a_1 x'$, ecc., ci riduciamo alla sfera; quindi si trova

$$a^2 = \frac{b_1^2 + c_1^2}{5}$$
; ecc.

Per un parallelepipedo rettangolo di spigoli a_1 , b_1 , c_1 , posto il centro delle coordinate nel centro del parallelepipedo si ha

$$\int x^2 d\tau = \int x^2 dx dy dz = \frac{1}{12} a_1^3 b_1 c_1, \text{ ecc.}$$

onde

$$a^2 = \frac{1}{12} (b_1^2 + c_1^2);$$
 ecc.

2. Momento d'inerzia d'un triangolo.

Il lato OB = a del triangolo OAB poggi sull'asse rispetto al quale si deve calcolare il momento d'inerzia e sia I la massa dell'unità di area. L'altezza relativa al vertice A sia α ; una striscia dx, alla distanza x da A ha per momento $\frac{ax}{\alpha}$ ($\alpha - x$)² dx; quindi integrando da x = 0 ad $x = \alpha$ risulta

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{12} a \alpha^3.$$

Consideriamo ora un asse condotto per O nel piano del triangolo e che tagli AB in un punto C; siano α e β (con segno) le distanze di A e B da O C = a. Il momento d'inerzia rispetto OC è $\frac{1}{12}$ a ($\alpha^3 - \beta^3$); ma $\frac{1}{2}$ a ($\alpha - \beta$) è la massa μ dell'area: onde

$$\mathfrak{F} = \frac{\mu}{6} \left(\alpha^2 + \alpha \beta + \beta^2 \right).$$

Consideriamo tre masse, $\frac{1}{3}\mu$, poste nei punti medi dei lati: il loro momento d'inerzia rispetto OC è

$$\frac{\mu}{3} \left[\left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 + \left(\frac{\beta}{2} \right)^2 \right],$$

cioè lo stesso di prima. Esse poi hanno lo stesso centro di massa dell'area del triangolo e quindi lo stesso momento d'inerzia rispetto ad ogni retta. Si ha un semplice esempio di sistemi di eguali momenti d'inerzia.

Si può dimostrare che, per un tetraedro omogeneo di massa μ si ha un sistema di eguali momenti ponendo ai quattro vertici quattro masse eguali ad $\frac{1}{20}$ μ e nel centro di massa una massa eguale a $\frac{4}{5}$ μ .

[ROUTH, The elem. part of a Treatise on the Dynamics of a System of rigid Body, London 1891, pag. 28].

3. Cogniti gli assi centrali d'inerzia, determinare quelli relativi ad un altro punto qualunque.

Posto $P - O = \mathbf{r}$ basterà determinare un vettore unitario \mathbf{u} , parallelo ad un asse uscente da P, in modo che sia massimo (minimo)

$$\mathfrak{J} = \mu [\mathbf{r}^2 - (\mathbf{r} \times \mathbf{u})^2] + \mathbf{u} \times \sigma \mathbf{u}.$$

Differenziando ed eguagliando a zero si trova, tenendo conto che $\mathbf{u}^2 = \mathbf{I}$, e detta λ una costante:

(a)
$$(\sigma - \lambda) \mathbf{u} = \mu \mathbf{r} \times \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}$$

Moltiplicando scalarmente per ${\bf u}$ si deduce che $\lambda={\mathfrak F}-\mu~{\bf r}^2.$ Di qui

$$\mathbf{u} = \mu (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \cdot (\sigma - \lambda)^{-1} \mathbf{r},$$

la quale dice che il vettore \mathbf{u} è normale in P alla quadrica

$$\mu \mathbf{r} \times (\sigma - \lambda)^{-1} \mathbf{r} = 1,$$

che è una delle tre quadriche passanti per P omofocali all'ellissoide reciproco a quello d'inerzia (§ 2). La traduzione in coordinate è immediata.

[BINET, Journ. de l'École Polytec. 16, pag. 41 (1811)]. Si deduce pure subito da (a) la relazione (quadratica)

$$\mathbf{r} \wedge \mathbf{u} \times \sigma \mathbf{u} = 0$$

cui debbono soddisfare tutte le rette che sono assi principali d'inerzia per un loro punto. Essa rappresenta un complesso quadratico tetraedrale costituito dalle normali comuni a tutte le quadriche omofocali ad una data.

[Reye, Geometrie der Lage, 2, 1 Auflage 1868. TIMER-DING, Geometrie der Kräfte, pag. 252].

4. Momento d'inerzia rispetto ad un piano.

Se O è un punto del piano, u un vettore unitario normale al piano, adottando la definizione stessa del § 1, sostituendo alle distanze dall'asse quelle rispetto al piano, si ha subito

$$\mathfrak{F}_1 = \sum m (P - O)^2 - \mathbf{u} \times \sigma \mathbf{u} = \mathbf{u} \times \left(\frac{1}{2} I_1 \sigma - \sigma\right) \mathbf{u}.$$
ossia

 $\mathfrak{F}_1 = \mathbf{u} \times \mathbf{\sigma}_1 \, \mathbf{u} \,$

in cui comparisce l'omografia $\sigma_1 = \frac{1}{2} \operatorname{I}_1 \sigma - \sigma$ che è una dilatazione avente le stesse direzioni unite di σ . Varranno dunque teoremi del tutto analoghi a quelli del \S 1; e in particolare la relazione (7). Riportando da O sulla nor-

male al piano segmenti eguali a \mathfrak{J}_1^{-2} il luogo degli estremi, col variare del piano, è un ellissoide avente per assi le direzioni unite di σ e la cui equazione è

$$(B+C-A)x^2+(C+A-B)y^2+(A+B-C)z^2=1.$$

L'ellissoide reciproco a questo dicesi di BINET; ed è omofocale a quello considerato nell'esercizio precedente. L'inviluppo dei piani aventi lo stesso momento d'inerzia è una quadrica del sistema omofocale ivi considerato; ecc. (Vol. I, pag. 234).

Cerchiamo quattro masse m_1, \ldots da porre in certi punti P_1, \ldots e tali che il loro momento rispetto a qualunque piano sia identico a quello del sistema dato. Riferendoci ai piani passanti pel centro di massa, si trova subito che le quattro masse ed il sistema dato hanno stesso centro di massa, stessa massa, stesso ellissoide.

Poscia colle solite notazioni, osservando che (Vol. I, p. 25).

$$|(P_1 - 0) \times \mathbf{u}|^2 = \mathbf{r}_1 \times H(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1) \mathbf{u},$$

indicando con σ una nuova dilatazione tale che $\sigma_1 = \sigma^2$ e posto

$$\sqrt{m_1} \mathbf{r}_1 = \sigma \mathbf{I}_1$$
, ecc...; $\mu \theta_1 = m_1$; ecc....

si deduce agevolmente

$$\begin{array}{lll} H\left({{\bm{l}_1},{\bm{l}_1}} \right) + H\left({{\bm{l}_2},{\bm{l}_2}} \right) + \dots & = I \\ &{{\theta _1}^2} + {{\theta _2}^2} + \dots & = I \\ &{{\theta _1}} \, {{\bm{l}_1}} + {{\theta _2}} \, {{\bm{l}_2}} + \dots & = o. \end{array}$$

Queste equazioni non bastano per la ricerca delle m_1, \ldots $r_1 \ldots$ Per interpretarle, diciamo ξ_1, η_1, ξ_1 le componenti di l_1 secondo le direzioni unite di σ_1 ; ecc...; si vede subito_che_la_sostituzione fra le quadruple $(\xi_1, \eta_1, \xi_1, \theta_1), \ldots$ (colonne) è ortogonale; è quindi del pari ortogonale quella fra le linee delle stesse quadruple: ossia

$$\mathbf{r}_1 \times \sigma_1^{-1} \mathbf{r}_1 + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1}$$
; ecc....
 $\mathbf{r}_1 \times \sigma_1^{-1} \mathbf{r}_2 + \frac{1}{\mu} = 0$; ecc....

Queste ultime esprimono che i quattro punti sono vertici di un tetraedro autoconiugato rispetto all'ellissoide immaginario

$$\mathbf{u} \times \sigma_1^{-1} \mathbf{u} + \frac{1}{\mu} = 0.$$

Assegnati i punti le prime quattro equazioni determineranno le masse.

[Reve, Beitrag zur Lehre von den Trägheitsmomenten, Zeitchrift für Mathem. u. Physik, 10, pag. 433 (1865)].

5. Determinare il centro di oscillazione di un rettangolo omogeneo sospeso per uno dei suoi lati e quello di un triangolo isoscele sospeso per il vertice.

Se h è l'altezza, h la base orizzontale del rettangolo, si trova subito

$$\Im = \int y^2 dx dy = \frac{1}{3} b h^3 ; a^2 = \frac{1}{3} h^2 ; l = \frac{h}{2}$$

quindi, § 4,

$$\lambda = \frac{a^2}{l} = \frac{2}{3} h.$$

Nell'altro caso, dicendo ancora h l'altezza del triangolo,

$$\lambda = \frac{3}{4} h.$$

6. Due aste rigide eguali ed omogenee sono legate con due fili $A A_1$, $B B_1$ lunghi l. La A B ruota intorno al suo punto medio fisso O e tutto

il sistema è contenuto in un piano verticale. Determinare il moto.

Si ha un sistema con due gradi di libertà: la verticale per O verso il basso, formi l'angolo φ con OA e l'angolo θ con AA_1 . Il doppio dell'energia cinetica di AB è μ $k^2 \varphi'^2$; quella di A_1B_1 è μ $k^2 \varphi'^2 + \mu$ $l^2 \theta'^2$; il lavoro elementare è μ g d $\chi = -\mu$ g l sen θ d θ . Le equazioni di Lagrange ci danno subito

$$\varphi' = \cos t$$
: $l \theta'' = -g \sin \theta$.

Il moto di AB intorno O è uniforme; mentre quello di AA_1 è un moto pendolare [APPELL, l. c, 2, pag. 162].

7. Un corpo rigido Γ è sospeso ad un asse fisso; un altro corpo rigido Γ_1 è girevole intorno ad un altro asse, parallelo al primo e che è connesso col primo corpo. I corpi

minare il moto.

Pel centro di massa G di Γ_1 (Fig. 10) conducasi un piano normale in O ed O_1 ai due assi. Sia $OO_1=a$, $O_1G=b$, φ e ψ gli angoli che queste due rette formano con una retta fissa del piano (coordinate del sistema). Il doppio dell'energia

non sono soggetti a forze: deter-



Fig. 10.

cinetica di Γ , girevole intorno O, è $m k^2 \varphi'^2$ (k raggio d'inerzia); quella di Γ_1 consta di due parti: la prima, $m_1 k_1^2 \psi'^2$ è dovuta al moto di rotazione intorno a G; la seconda dovuta al moto di G in cui sia concentrata tutta la massa cioè $m_1 v^2$, se v è la grandezza della velocità di G. Tale

velocità è la risultante di due altre: $b \psi'$ normale ad $O_1 G$ e $a \varphi'$ normale ad $O O_1$ e che comprendono l'angolo $\varphi - \psi$. Quindi

$$2 T = (m k^2 + m_1 k_1^2) \varphi'^2 + m_1 (k_1^2 + b^2) \psi'^2 + 2 a b m_1 \cos(\varphi - \psi) \varphi' \psi' = \alpha \varphi'^2 + \beta \psi'^2 + 2 \gamma \varphi' \psi'.$$

La 2ª forma delle equazioni di Lagrange ci dà subito gli integrali

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi'} + \frac{\partial T}{\partial \psi'} = c \quad ; \quad 2 T = b$$

cioè

$$(\alpha + \gamma) \varphi' + (\gamma + \beta) \psi' = \varepsilon,$$

$$\varphi' (\alpha \varphi' + \gamma \psi') + \psi' (\gamma \varphi' + \beta \psi') = b.$$

Posto $\varphi - \psi = \omega$, valendoci del primo integrale possiamo esprimere φ' e ψ' per ω ed ω' ; sostituendo poscia nel secondo si trova

$$\omega'^{2} = \frac{h(\alpha + \beta + 2 m_{1} a b \cos \omega) - c^{2}}{\alpha \beta - m_{1}^{2} a^{2} b^{2} \cos^{2} \omega}.$$

Il problema è ridotto alle quadrature.

Nel caso dei corpi soggetti a forze, si stabiliscono subito le equazioni del moto, ma, in generale, la loro integrazione non è possibile.

Il problema è noto col nome di doppio pendolo (campana e battaglio; braccio ed avambraccio, ecc.).

[THOMSON a. TAIT, l. c. 1, pagg. 310, 324; FÖPPL, Vorl. ü. technische Mechanik, 6, Leipzig 1910, pagg. 97-131; O. FISCHER, Theor. Grundl. für eine Mech. der lebenden Körper, Leipzig 1906].

8. Stesso problema supponendo i due assi normali; inoltre il piano condotto per il primo

normalmente al secondo lo taglia in un punto O, rispetto al quale è asse d'inerzia.

Siano OZ il primo asse (Fig. 11); O, (i, j, k) gli assi principali d'inerzia di I, (O, i asse di rotazione del se-

condo corpo; $OO_1 = a$) $O_1 Z_1$ parallelo ad OZ; θ l'angolo che O, Zforma con j; φ l'angolo che un piano per OZ forma con un piano fisso. L'energia cinetica di Γ è la stessa dell' esercizio precedente; per quella di l', osserviamo che alla rotazione istantanea intorno OZ di velocità angolare o', si può sostituire una rotazione eguale intorno O, Z, ed una

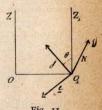


Fig. II.

traslazione istantanea parallela ad O, i e di velocità a o'. La velocità intorno O, Z, si può decomporre in altre due secondo O_1 j e O_1 k per modo che $q = \varphi' \cos \theta$, $r = \varphi' \sin \theta$. Finalmente secondo O, i si ha pure un moto istantaneo di velocità $\theta' = p$. Quindi il doppio dell'energia di Γ , è data da

onde

$$m_1 a^2 \varphi'^2 + A p^2 + B q^2 + C r^2;$$

 $2 T = (\alpha + \beta \cos^2 \theta) \varphi'^2 + \gamma \theta'^2 = b;$

con

$$\alpha = m k^2 + m_1 a^2 + C$$
; $\beta = B - C$, $\gamma = A$.

Dalle solite equazioni di LAGRANGE (essendo p coordinata ignorata) si deduce $\frac{\partial}{\partial z'} = c$; e quindi

$$\gamma^{\theta'^2} = h - \frac{c^2}{\alpha + \beta \cos^2 \theta}; \ \varphi' = \frac{c}{\alpha + \beta \cos^2 \theta}; \ \text{ecc.}$$

[THOMSON a. TAIT; l. c.; l, pag. 312].

9. Forma assoluta delle equazioni di EULER.

Si ha, osservando che o è funzione di t, dalla (3) facilmente:

$$M' = (\sigma \Omega)' = \sigma \Omega' + \overline{\Omega} \wedge \sigma \Omega.$$

Dopo ciò ai due membri della (26) si applichi l'operatore Rσ e si tenga conto della relazione dimostrata all'Esercizio 8, Vol. I, pag. 47 e che σ è una dilatazione: avremo la richiesta forma assoluta

(a)
$$I_{3} \sigma \cdot \Omega' + \sigma \Omega \wedge \sigma^{2} \Omega = R \sigma M_{e}$$
.

Notiamo che in questa ed in altre teorie, insieme con l'omografia fondamentale σ , hanno pure importanza queste altre tre

$$\sigma_1 = \sigma^2 - (B+C) \sigma + BC$$
; ecc.

ed è

(b)
$$\sigma_1 \mathbf{i} = (A - B)(A - C)\mathbf{i}, \sigma_1 \mathbf{j} = \sigma_1 \mathbf{k} = 0$$
; ecc.

Quindi

(c)
$$\mathbf{u} \times \sigma_1 \mathbf{u} = (A - B) (A - C)(\mathbf{u} \times \mathbf{i})^2$$
; ecc.

e infine

(d)
$$\mathbf{u} \times \sigma_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \times \sigma_2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \times \sigma_8 \mathbf{u} = -[\mathbf{u} \times \sigma \mathbf{u} \wedge \sigma^2 \mathbf{u}]^2$$
.

Nel caso del moto alla Poinsot in cui $M_e = 0$, detta y la componente costante della velocità angolare secondo il momento costante dell'impulso cioè v = h : k, si ponga, per l'omogeneità delle formole

$$\mathbf{M}^2 = k^2 = D^2 \, \mathbf{v}^2 \,, \ k = D \, \mathbf{v}^2,$$

D avendo le stesse dimensioni di A, B, C. Sia P il punto in cui O Ω taglia l'ellissoide (11) d'inerzia; δ la lunghezza della normale da O sul piano fisso tangente in P al detto

ellissoide; dico che $\delta = D^{\frac{1}{2}}$. Infatti

2
$$T = 3 \omega^2 = \omega^2 : (P - O)^2 = h;$$

3 : mod $(P - O) = \nu : \omega$

quindi è vero, ecc. Nell'ipotesi del § 7 risulta D compreso tra B e C; la somma di due delle A, B, C sempre maggiore di D. Se $k^2 = Bh$, risulta B = D e la distanza & è eguale al semi-asse medio dell'ellissoide.

Inoltre si tenga presente che

$$\mathbf{M} \times \Omega = \Omega \times \sigma \Omega = h = D v^{2}$$

$$\mathbf{M}^{2} = \sigma \Omega \times \sigma \Omega = \Omega \times \sigma^{2} \Omega = D^{2} v^{2}$$

e però da (c):

(e)
$$\Omega \times \sigma_1 \Omega = B C(\omega^2 - \alpha^2) = p^2(A - B)(A - C)$$
; ecc.

dove le costanti reali α, β, γ sono definite dalle

(f)
$$\alpha^2 B C = \gamma^2 (B + C - D) D$$
; ecc.

Moltiplicando (a) scalarmente per Ω ; applicando la (d) al caso di $\mathbf{u} = \Omega$, nonchè le posizioni già fatte, si trova

(g)
$$\omega^2 \omega'^2 + (\omega^2 - \alpha^2)(\omega^2 - \beta^2)(\omega^2 - \gamma^2) = 0$$

che con una quadratura ellittica ci dà ω in funzione di t. [EULER, *Theoria motus*, pag. 299. LAGRANGE, *Méc. analy*. Oeuvres compl. 12, pag. 234].

Dalle (e), (f) facilmente risulta

$$\gamma^2 < \alpha^2 < \omega^2 < \beta^2$$
.

10. Equazione differenziale e proprietà dell'erpoloide in un moto alla Poinsot.

Sia ρ il raggio vettore, cioè la distanza di P dal piede Q della normale condotta da O sul piano fisso. Dalle due espressioni di $(P-O)^2$ dell'esercizio precedente si ricava

$$\omega^2 = v^2 (D \rho^2 + 1).$$

Poscia poniamo

$$\omega^2 - \alpha^2 = D \gamma^2 (\rho^2 - a); \text{ ecc.}$$

le nuove costanti a, b, c essendo definite dalle

$$a \cdot B C D = -(B - D)(C - D)$$
; ecc.

Quindi per (e) di esercizio precedente:

$$(A - B) (A - C) p^2 = v^2 D B C (\rho^2 - a);$$
 ecc.

donde risulta

$$b > \varrho^2 > a > 0 > c$$
;

e la (g) ci dà subito

$$\rho^2 \, \rho'^2 + D \, \gamma^2 \, (\rho^2 - a) \, (\rho^2 - b) \, (\rho^2 - c) = 0.$$

L'erpoloide è sempre compresa fra due cerchi di centro Q e raggi a e b cui risulta tangente.

Per ottenere l'angolo ψ che il raggio vettore P-Q forma con un asse fisso del piano, osserviamo che

$$\mathbf{M} \wedge \Omega \times \Omega' = h \, \mathbf{M} \wedge (P - Q) \times P' = h \, k \, \rho^2 \, \psi'.$$

Moltiplichiamo (a) vettorialmente per Ω . Sviluppando il duplice prodotto vettoriale risulta

$$\mathbf{I_3} \, \mathbf{\sigma} \, . \, \Omega \, \big \wedge \, \Omega' = \mathbf{v^2} \, D \, (\mathbf{\sigma} - D) \, \mathbf{\sigma} \, \Omega$$

e quindi la precedente:

$$\mathbf{I}_{3} \mathbf{\sigma} \cdot D \mathbf{v} \cdot \mathbf{\rho}^{2} \mathbf{\psi}' = \Omega \times (\mathbf{\sigma}^{3} - D \mathbf{\sigma}^{2}) \Omega$$

ed eliminando σ^3 coll'identità del terzo ordine [Vol. I, p. 47] il secondo membro diventa

$$\begin{split} &(\mathrm{I}_{1}\,\sigma-D)\,D^{2}\,\nu^{2}-\mathrm{I}_{2}\,\sigma\,.\,D\,\nu^{2}+\mathrm{I}_{3}\,\sigma\,.\,\nu^{2}\,(D\,\rho^{2}+\mathrm{I})\\ &=\nu^{2}\,D\,.\,\mathrm{I}_{3}\,\sigma\,.\,\rho^{2}+\nu^{2}\,(-\,D^{3}+\mathrm{I}_{1}\,\sigma\,.\,D^{2}-\mathrm{I}_{2}\,\sigma\,.\,D+\mathrm{I}_{3}\,\sigma)\\ &=\nu^{2}\,D\,.\,\mathrm{I}_{3}\,\sigma\,.\,\rho^{2}+\nu^{2}\,\mathrm{I}_{3}\,(\sigma-D) \end{split}$$

onde finalmente:

$$o^2 b' = v (o^2 + E)$$

in cui

$$E = I_3 (\sigma - D) : D I_3 \sigma$$
.

Il punto P descrive l'erpoloide con velocità areale funzione lineare di ρ^2 . Col valore precedentemente trovato per ρ' si trova infine

$$\rho\sqrt{D}\cdot\sqrt{-(\rho^2-a)(\rho^2-b)(\rho^2-c)}\,d\psi=(\rho^2+E)\,d\,\rho$$

che è l'equazione differenziale dell'erpoloide.

Per la sua integrazione colle sigma ellittiche, vedi i trattati del Whittaker e di Halphen, 2.

Se $k^2 = Bh$, si ha B = D, $\alpha = c = E = 0$; onde

$$d \rho = \sqrt{D} \cdot \rho \sqrt{b - \rho^2} d \psi$$
.

Si integra subito ponendo

$$\rho = \sqrt{b} \left(\operatorname{Ch} u \right)^{-1},$$

e risulta u funzione lineare di ψ e quindi

$$\text{Ch } (\psi \sqrt{D b}) = \sqrt{b};$$

equazione della spirale di Poinsot.

[LORIA, l. c., pag. 588]. Se diciamo v la grandezza della velocità di P sull'er-

poloide, $a^2 y^2 = a^2 a'^2 + a^4 \psi'^2$

$$\rho^{2} v^{2} = \rho^{2} \rho'^{2} + \rho^{4} \psi'^{2}$$

$$= - v^{2} D(\rho^{2} - a)(\rho^{2} - b)(\rho^{2} - c) + v^{2}(\rho^{2} + E)^{2};$$

il secondo membro ha il termine noto nullo, poichè $a b c D + E^2 = 0$; onde il quadrato della velocità è una funzione di secondo grado in ρ^2 ; ecc.

[DARBOUX, Notes à la Mécanique de Despeyrous, 17 e 18 (1884-1886)]. Si può ancora provare che:

L'erpoloide non ha nè flessi, nè regressi.

Si consideri il punto

$$. S = O + \Omega \wedge \Omega'$$

e si rifletta che in un punto di flesso l'accelerazione è tangenziale e però

$$P' \wedge P'' = \Omega' \wedge \Omega'' = 0 ; \Omega'' = m \Omega';$$

in conseguenza

(a)
$$S' = \Omega \wedge \Omega'' = m \Omega \wedge \Omega' = m (S - O).$$

Le componenti di S-O secondo gli assi d'inerzia (a meno del fattore comune $D v^2 : A B C$) sono A (A-D) p, ecc.; quelle di S' osservando che

$$S' \times \mathbf{i} = \frac{d \left[(S - O) \times \mathbf{i} \right]}{d t} - (S - O) \times \Omega \wedge \mathbf{i}$$
$$= A(A - D) p' + \left[C(C - D) - B(B - D) \right] q \tau,$$

sono (sempre a meno dello stesso fattore).

$$(B-C)(B+C-A)qr$$
; ecc.

Quindi la (a) ci dà pei punti di flesso

$$\frac{A(A-D)p^{2}}{(B-C)(B+C-A)} = \frac{B(B-D)q^{2}}{(C-A)(C+A-B)}$$
$$= \frac{C(C-D)r^{2}}{(A-B)(A+B-C)};$$

il primo rapporto è positivo, mentre gli altri due sono negativi; p, q, r non sono reali e non si hanno flessi. Lo stesso dicasi pei regressi.

Se l'ellissoide non è d'inerzia e quindi non è soddistatta la condizione B+C>A, perchè compariscano flessi occorre che

$$B+C < A$$
 , $B < D$.

[W. Hess, Das Rollen einer Fläche zweiten Grades auf einer invariablen Ebene. Diss. München, 1881. MANNOURY, Bull. des Sciences mathém. (2), 19, pag. 282 (1895); Lecornu; Bull. Société mathém. de France, 34, p. 40 (1900); A. Petrus, Beiträge zur Theorie der Herpolhodie Poinsots. Inaug. Diss. Halle, 1902].

ogni quadrica conciclica all'ellissoide d'inerzia rotola senza strisciare su di una quadrica di rotazione intorno al momento dell'impulso.

L'equazione di una quadrica conciclica all'ellissoide è

(a)
$$(N-O) \times (\sigma - a)(N-O) = \cos t = \lambda$$

a essendo una costante, σ la solita omografia. Diciamo S il punto in cui essa incontra l'asse ist. di rot.; porremo

quindi $S - O = m \Omega$ e poscia (32)

$$m^2 (h - a \omega^2) = \lambda$$
.

Eliminando m, ω , osservando che

$$(S-O)\times \mathbf{M}=m\ b$$

risulta che S giace sulla quadrica fissa di rotazione intorno O M:

$$(b \quad a(S-O)^2 - \frac{1}{b}[(S-O) \times \mathbf{M}]^2 = -\lambda.$$

La normale in S alla (a) è parallela al vettore

$$a(S-O) - \sigma(S-O)$$

$$= a(S-O) - \frac{1}{h}[(S-O) \times \mathbf{M}] \mathbf{M}$$

e quindi parallela alla normale in S alla (b). Quindi è vero, ecc. Per $a = \mathbf{M}^2 : b$, la (b) è un cilindro

[SIACCI, Collectanea math. in memoriam D. Chelini, Milano 1881; Gebbia, Mem. R. Acc. Lincei, (4), 1, p. 326 (1885)].

Si può anche dimostrare agevolmente che il moto risultante di un moto alla Poinsot con una rotazione intorno all'asse O \mathbf{M} è pure un moto alla Poinsot; le relative quadriche fondamentali sono omofocali. Infatti se Ω_0 è il vettore della velocità di rotazione intorno O \mathbf{M} , abbiamo

$$\Omega = \alpha^{-1} \mathbf{M}$$
; $\Omega_0 = n \mathbf{M}$ (n costante)

e quindi pel moto risultante

$$\Omega_1 = \Omega + \Omega_0 = (\alpha^{-1} + n) M;$$

ciò dimostra il teorema.

[SYLVESTER, Philos Trans., 156 (1866)].

12. Ridurre alle quadrature il problema del moto di un giroscopio simmetrico pesante. (Caso di LAGRANGE).

È il caso considerato nel § 8, in cui A = B, $\xi = \eta = 0$ e quindi $r = \cos t = n$. Dagli integrali (36'), (37') e dalla terza delle (40) osservando che

$$(q c_1 - p c_2)^2 = (p^2 + q^2)(c_1^2 + c_2^2) - (p c_1 + q c_2)^2,$$

e ponendo

$$l = \frac{2 \mu \zeta}{A}$$
, $m = \frac{C n}{A}$, $c_3 = \cos \theta$,

si deduce

$$c'_3 = \sqrt{f(c_3)}$$
; $f(c_3) = (1 - c^2_3)(h - lc_3) - (c - mc_3)^2$;

quindi cos θ è una funzione ellittica del tempo. Come nel caso del pendolo sferico si prova che la $f(\cos \theta) = 0$ ha le radici reali: due comprese tra +1 e -1; la terza, per $\zeta > 0$, è superiore ad 1; risultato di facile interpretazione.

Per la ricerca degli altri coseni e delle p, q, r giova introdurre gli angoli euleriani. Infatti (37') e la terza delle (15), Vol. I, pag. 168 ci danno

$$sen^2 \theta \cdot \psi' = c - m \cos \theta, \ \phi' = n - \frac{(c - m \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta}.$$

Esprimendo che le due radici della f sono eguali ed eguali al valore iniziale di $\cos \theta$, si ottengono le condizioni per il moto di *precessione regolare*.

Nell'ipotesi che il corpo ruoti inizialmente intorno all'asse di simmetria, risulta $c = m \cos \theta_0$, $b = l \cos \theta_0$; quindi $f(\cos \theta) = (\cos \theta_0 - \cos \theta) [l(1 - \cos^2 \theta) - m^2(\cos \theta_0 - \cos \theta)]$. Supponendo $\zeta > 0$, n > 0, il fattore di secondo grado, positivo per $\cos \theta = \cos \theta_0$, e negativo per $\cos \theta = -1$, si annulla per un valore $\theta_1 > \theta_0$; quindi θ oscilla periodicamente tra i due valori θ_0 , θ_1 e raggiunge quest'ultimo dopo un tempo finito. L'angolo ψ che la nodale forma con x_1 è tale che ψ' ha lo stesso segno di n se $\theta > \theta_0$ e segno contrario se $\theta < \theta_0$.

La curva descritta dalla proiezione del centro di massa sul piano orizzontale ha per coordinate polari $\rho = \zeta$ sen θ , ψ : è quindi compresa tra due cerchi di raggi ζ sen θ_1 , ζ sen θ_0 . Di più si trova subito che la derivata di ρ rispetto ψ è nulla per $\theta = \theta_1$, infinita per $\theta = \theta_0$; tale curva è però tangente al primo e normale al secondo cerchio.

La discussione generale di questo problema, sia nel caso ora accennato, sia in quello delle condizioni iniziali qualunque, è stata approfondita da HESS [Mathem. Annalen, 19, pagg. 121-154 (1882) e 29, pagg. 500-580 (1887)].

Se n è assai grande e quindi μ ζ A assai piccolo di fronte a C^2 n^2 , θ si mantiene sempre molto prossimo a θ_0 ; poniamo $\theta = \theta_0 + \epsilon$ e trascuriamo i termini in ϵ^2 ; si ha quindi

$$\begin{split} \cos\theta &= \cos\theta_0 - \epsilon \sin\theta_0 \ , \ \sin\theta = \sin\theta_0 + \epsilon \cos\theta_0 \\ & \sin\theta_0 . \ \epsilon'^2 = m^2 \epsilon \sin\theta_0 (2 \epsilon_1 \sin\theta_0 - \epsilon \sin\theta_0) \end{split}$$

con

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu \zeta A}{C^2 n^2} \operatorname{sen} \theta_0 ,$$

quindi

$$\varepsilon = \varepsilon_1 (1 - \cos m t)$$
, $\theta = \theta_0 + \varepsilon_1 (1 - \cos m t)$,

e successivamente

$$\dot{\psi}' = \frac{m(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{\sin^2\theta} = \frac{m}{\sin\theta_0} \varepsilon , \\ \psi = \frac{m\,\varepsilon_1}{\sin\theta_0} t - \frac{\varepsilon_1}{\sin\theta_0} \sin m t.$$

 θ è una funzione periodica di t col periodo $\tau = 2\pi : m$; il valore massimo è $\theta_0 + 2 \epsilon_1$ per $t = \pi : m$. L'asse di figura oscilla intorno alla sua posizione iniziale e in virtù di questo movimento, che dicesi appunto *nutazione*, il piano equatoriale si avvicina ed allontana dalla verticale e dopo il tempo τ riprende la stessa posizione.

Il moto della nodale (definito da ψ) non è periodico e dopo il tempo τ l'angolo si è spostato, nel senso positivo, di $2\pi \epsilon_1$: sen θ_0 (moto di precessione). Perchè la nodale torni ad assumere il valore iniziale, occorre che $2\pi \operatorname{sen} \theta_0 = m \epsilon_1 t$ cioè deve trascorrere un tempo $2\pi \operatorname{sen} \theta_0$: $m \epsilon_1$ (periodo di precessione). Se θ_0 non è molto piccolo, il periodo di precessione è assai più grande di quello di nutazione. Si vedono subito le modificazioni che intervengono se $\zeta < 0$. I risultati, in tal caso, collimano qualitativamente coi fenomeni di nutazione e precessione della terra. Per le esperienze coll'ordinario giroscopio, col pendolo di Gruey, ecc., vedi una mia nota: Giorn. di Matem. (3) 5, pag. 257-266 (1914).

13. Equazioni del moto di un giroscopio soggetto a forze derivanti da un potenziale.

Detta II l'energia potenziale, il lavoro elementare -d II delle forze è espresso da $\Omega \times \mathbf{M} dt$; cioè (Vol. I, p. 168) si deduce

$$M_{x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \cos \varphi - \frac{\sin \varphi}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \cos \theta \right)$$

$$M_{y} = \frac{\partial \Pi}{\partial \theta} \sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} - \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \cos \theta \right)$$

$$M_{z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}.$$

Basta quindi sostituire questi valori nelle (27).

Le equazioni ammettono l'integrale dell'energia; inoltre se \mathbf{k}_1 è un vettore unità parallelo all'asse ζ_1 (di coseni c_1 , c_2 , c_3) si trova subito

$$\mathbf{M} \times \mathbf{k}_1 = -\frac{\partial \Pi}{\partial \psi}.$$

Se quindi II non dipende da ψ , si ha, come nel § 8, l'integrale (37'); e se II non dipende che da c_3 e l'ellissoide d'inerzia è di rotazione intorno χ , si ha $r = \cos t = n$; il problema (come nel caso di LAGRANGE) si riduce alle quadrature. Poichè

$$p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = p^2 + q^2 + r^2 = a + b \prod (c_3)$$

$$r_1 = p c_1 + q c_2 + r c_3 ; c_3 = a_1 + b_1 r_1$$

si deduce

$$p_1^2 + q_1^2 = a - r_1^2 + b \Pi (a_1 + b_1 r_1) = \varphi (r_1);$$

l'erpoloide giace su di una superficie di rotazione intorno all'asse 71 fisso. Nel caso di Lagrange è una sfera.

Il caso in cui Π è proporzionale a cos² θ conduce a funzioni ellittiche ed ha importanza per alcune ricerche astronomiche.

[Tisserand, Comp. rendus, 101, p. 195 (1885); Padova, Rend. R. Acc. Lincei, (4) 2, pagg. 135-168 (1886); Paladini, ibidem (4) 4, pag. 187 (1888), oltre i lavori citati al § 8. Per la ricerca di casi in cui esiste un altro integrale lineare o quadratico vedi Burgatti, Mem. Acc. Bologna, (6) 10 (1912-913)].

14. Moto di un corpo rigido intorno ad un punto fisso allorchè i suoi punti sono soggetti a

forze il cui potenziale è

$$\frac{1}{2} a m [(P-O) \times \mathbf{k}_1]^2 + \varphi [(P-O)^2].$$

Alla funzione φ corrisponde una forza passante per O e che quindi non influisce sul moto: all'altra parte, una forza $am(P-O) \times \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_1$, parallela a \mathbf{k}_1 , vettore unitario costante, e proporzionale alla distanza di P dal piano normale a \mathbf{k}_1 . Supposto a costante per tutti i punti si vede subito che l'energia potenziale e il momento \mathbf{M}_e sono

$$2 \Pi = a \left\{ \mathbf{k}_1 \times \sigma \mathbf{k}_1 - \frac{1}{2} \mathbf{I}_1 \sigma \right\}$$

$$\mathbf{M}_e = a \mathbf{k}_1 \wedge \sigma \mathbf{k}_1.$$

Applicando la (26) si ha l'equazione assoluta del moto. Riferendoci agli assi principali d'inerzia si hanno immediatamente le equazioni cartesiane del moto:

$$A p' = (B - C) (q r - a c_2 c_3); ecc.$$

Esse ammettono i seguenti integrali: quello dell'energia

$$A p^2 + B q^2 + C r^2 + a (A c_1^2 + B c_2^2 + C c_3^2) = h;$$

inoltre $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{M}' = 0$ ossia $\mathbf{M} \times \mathbf{k}_1 = \text{cost.}$; ed ancora

$$A p c_1 + B q c_2 + C r c_3 = m$$

che si deducono anche subito dalle equazioni cartesiane. Infine si deduce pure agevolmente un terzo integrale

$$A^{2}p^{2} + B^{2}q^{2} + C^{2}r^{2} - a(BCc_{1}^{2} + CAc_{2}^{2} + ABc_{3}^{2}) = cost.$$

di cui è facile assegnare la forma assoluta

$$\mathbf{M}^2 - a \, \mathbf{I}_3 \, \mathbf{\sigma} \cdot \mathbf{k}_1 \times \mathbf{\sigma}^{-1} \, \mathbf{k}_1 = \text{cost.}$$

Il problema si può ricondurre alle quadrature.

[F. DE BRUN, Académ des Sciences de Stockholm, 1893; KOBB, Bullet. de la Soc. mathém. de France, 23, pp. 210-215 (1895); per una elegante analogia idrodinamica vedi STE-KLOFF, Comp. rendus, 135, pag. 526 (1902). Vedasi ancora la mem. di BURGATTI precedentemente citata].

roscopio pesante, il momento dell'impulso è parallelo ad un piano fisso nel corpo, tale piano taglia l'ellissoide reciproco a quello d'inerzia secondo un cerchio ed il moto del centro di massa è identico a quello del pendolo sferico (Caso di Hess).

Per la (35) tale piano deve risultare normale a G-O; quindi per la (38) i tre vettori G-O, \mathbf{M} , Ω sono complenari, e inoltre \mathbf{M} e G-O normali.

Pel punto $F = O + \mathbf{M}$ conduciamo il piano tangente all'ellissoide reciproco a quello d'inerzia (§ 2); esso risulta normale ad Ω e taglia il piano descritto da F - O secondo una retta normale a F - O e tangente all'ellissi sezione; tale conica è dunque un cerchio il cui raggio è \sqrt{B} . Si possono ora assegnare due altri integrali del moto; osserviamo che

$$\Omega = a \mathbf{M} + b (G - O)$$
; $2 T = \Omega \times \mathbf{M} = a \mathbf{M}^2$;

e il valore di a si deduce dalla

$$\mod(F-O) = \frac{\mathbf{M}^2}{2 T} = \frac{1}{a} = \sqrt{B}.$$

Di qui, successivamente

$$G' = \Omega \wedge (G - O) = a \mathbf{M} \wedge (G - O)$$
$$(G - O) \wedge G' = a (G - O)^2 \mathbf{M},$$

(a)
$$\mathbf{k}_1 \times (G - O) \wedge G' = a (G - O)^2 \mathbf{M} \times \mathbf{k}_1 = \text{cost.}$$

e poscia

$$G^{12} = a^2 M^2 (G - O)^2 = 2 a (G - O)^2 \cdot T$$

e per la (36):

(b)
$$G'^2 = a h (G - O)^2 - 2 a \mu (G - O)^2 \cdot (G - O) \times \mathbf{k}_1$$
;

ora gli integrali (a) e (b) sono appunto quelli del pendolo sferico [Cap. II, § 6] Riflettendo che le sezioni circolari dell'ellissoide sono definite da

$$\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)x^2 = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)\zeta^2,$$

si deduce che le condizioni analitiche del problema sono

$$\eta = 0$$
, $\xi^2 \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C} \right) = \xi^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$.

[JOUKOWSKY, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. 3, p. 62 (1893)].

Un altro caso speciale di movimento è stato considerato nel 1899 dal signor Goriatchoff ed ha luogo quando A = B = 4 C, ed inoltre è nulla la costante delle aree. Vedi Rend. Circolo mat. Palermo, 16, pp. 346-357 (1902).

16. Nel moto di un giroscopio pesante determinare i casi in cui l'asse istantaneo di rotazione è fisso nel corpo.

Tale asse sarà pure fisso nello spazio (Vol. I pag. 180); poniamo quindi, con **u** vettore unitario fisso

$$\Omega = \omega \mathbf{u}$$
 , $\mathbf{M} = \omega . \sigma \mathbf{u}$

(ω funzione del tempo, al pari di σ). Dalla (3) si deduce agevolmente (vedi anche Eser. 9).

$$(\sigma \Omega)' = \sigma \Omega' + \Omega \wedge \sigma \Omega = \omega' \cdot \sigma \mathbf{u} + \omega^2 \mathbf{u} \wedge \sigma \mathbf{u}$$

e quindi la (35) ci dà

(a)
$$\omega' \cdot \sigma \mathbf{u} + \omega^2 \mathbf{u} \wedge \sigma \mathbf{u} = \mathbf{k}_1 \wedge (G - O)$$
.

Da questa moltiplicando scalarmente per G - O, e poi per $\mathbf{k_1}$ e per $(G - O) \land \sigma$ u si hanno le equazioni

(a)
$$\begin{cases} \omega' \cdot (G - O) \times \sigma \mathbf{u} + \omega^2 \mathbf{u} \wedge \sigma \mathbf{u} \times (G - O) = \mathbf{0} \\ \omega' \cdot \mathbf{k}_1 \times \sigma \mathbf{u} + \omega^2 \mathbf{u} \wedge \sigma \mathbf{u} \times \mathbf{k}_1 = \mathbf{0} \end{cases}$$

(β)
$$\omega^{2}[\mathbf{u} \wedge \sigma \mathbf{u}] \times [(G - O) \wedge \sigma \mathbf{u}] + [(G - O) \wedge \sigma \mathbf{u}] \times [(G - O) \wedge \mathbf{k}_{1}] = 0.$$

Eliminando ω' dalle (α) si ha

$$\mathbf{k}_1 \times \{\mathbf{u} \land \sigma \mathbf{u} \times (G - O), \sigma \mathbf{u} - (G - O) \times \sigma \mathbf{u}, \mathbf{u} \land \sigma \mathbf{u}\} = 0.$$

Il vettore entro parentesi, supposto diverso da zero, è fisso nel corpo; e poichè $\mathbf{k}_1 \times \mathbf{u} = \cos t$, si deduce che pure \mathbf{k}_1 è fisso nel corpo: quindi dalla $\mathbf{k}'_1 = \omega \mathbf{u} \wedge \mathbf{k}_1$ si de-

duce $\mathbf{u} = \mathbf{k}_1$; e dalla (β) risulta che ω^2 è costante e quindi dalla (α)

$$\mathbf{u} \wedge \sigma \mathbf{u} \times (G - O) = 0.$$

Questa è l'equazione di un cono quadratico: ogni sua generatrice, posta in posizione verticale, è un asse permanente di rotazione (rotazioni permanenti di STAUDE). Appartengono a questo cono gli assi principali d'inerzia e le congiungenti il centro di massa col punto fisso; per gli assi principali \(\omega \) è infinito; nel caso di EULER l'equazione è identicamente soddisfatta.

Se il vettore suddetto è parallelo ad u

$$\mathbf{u} \wedge \sigma \mathbf{u} \times (G - O) \cdot \sigma \mathbf{u} - (G - O) \times \sigma \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \wedge \sigma \mathbf{u} = m \mathbf{u}$$

moltiplicando scalarmente per $\mathbf{u} \wedge \sigma \mathbf{u}$ e escludendo il caso di $(G - O) \times \sigma \mathbf{u} = 0$, si deduce $\mathbf{u} \wedge \sigma \mathbf{u} = 0$; onde $\sigma \mathbf{u} = \rho \mathbf{u}$; cioè \mathbf{u} è asse principale d'inerzia, e allora è m = 0; in altre parole il vettore è nullo; cioè

$$\mathbf{u} \wedge \sigma \mathbf{u} \times (G - O) \cdot \sigma \mathbf{u} = (G - O) \times \sigma \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \wedge \sigma \mathbf{u}$$

e quindi come prima \mathbf{u} è asse d'inerzia: per es., \mathbf{i} . Le (α) ci danno

$$\omega' \cdot (G - O) \times \mathbf{i} = 0, \quad \omega' \cdot (G - O) \times \mathbf{k}_1 = 0$$

e dalla (a)

$$A \omega' \mathbf{i} = \mathbf{k}_1 \wedge (G - O).$$

Il corpo oscilla intorno ad un asse orizzontale come un ordinario pendolo composto. [Moti di MLODZJEJOWSKI].

Nel caso in cui $(G - O) \times \sigma \mathbf{u} = 0$, essendo $\sigma \mathbf{u}$ diverso da zero, risulta pure $(G - O) \times \mathbf{u} \wedge \sigma \mathbf{u} = 0$; e dalle (α) ,

282

di cui la prima è identicamente soddisfatta, e (B) risulta pure $(G-O) \times \mathbf{u} = 0$ e quindi G-O=0; ecc.

[STAUDE, Journ. für Mathem., 113, pag. 318 (1894); B. K. Mlodzjejowsky, Arbeiten der phys. Section der Freunde der Naturkunde in Moskau, 7, pag. 46 (1894); P. STÄCKEL, Math. Ann. 67, pag. 399 (1909)].

17. Moto di un corpo rigido pesante su di un piano orizzontale.

Ferme le solite notazioni, quando è fissata la posizione degli assi principali d'inerzia relativi al centro di massa saranno fissati gli angoli φ, θ; quindi l'altezza ζ, del centro di massa dal piano orizzontale è determinata, cioè

$$\zeta_1 = f(\theta, \varphi)$$
.

Si ha un sistema con cinque gradi di libertà. Sia N il vettore della reazione normale applicata nel punto P di contatto tra il piano ed il corpo. Poichè

$$\mathbf{R}' = \mu \, g \, \mathbf{k}_1 + \mathbf{N},$$

se i, è un vettore fisso parallelo al piano, si deduce $\mathbf{R} \times \mathbf{i}_1 = \text{cost.}$; la proiezione di G sul piano si muove li moto rettilineo uniforme.

Il lavoro di N è nullo e però ha luogo l'integrale dell'energia

$$\mu G^{\prime 2} + \mathbf{M} \times \widehat{\Omega} - 2 \mu g \zeta_1 = h$$

ossia, essendo G'^2 eguale a $\zeta_1'^2$, a meno di una costante idditiva,

$$\mu \zeta_1^{\prime 2} + \mathbf{M} \times \Omega - 2 \mu g \zeta_1 = h.$$

Finalmente sussiste ancora l'integrale (37)

$$\mathbf{M} \times \mathbf{k}_1 = \text{cost.}$$

E questi sono i soli integrali noti nel caso generale.

Se l'ellissoide d'inerzia e la superficie del corpo sono di rivoluzione intorno χ , come al \S 8, 2 si deduce che la componente r di Ω secondo χ è costante e inoltre ζ non può dipendere che da θ . Il problema si può ricondurre alle quadrature come nell'Esercizio 12.

Nel caso della trottola il corpo poggia per una punta sul piano; è

$$\zeta_1 = l\cos\theta = lc_3;$$

nel caso di un disco $\zeta_1 = l \sqrt{1 - c_3^2}$.

[Poisson, Traité,... 2, pag. 214. Jullien, l. c. 2, p. 186. APPELL, l. c. 2, pag. 270. Padova, Atti R. Ist. Veneto (7) 6, (1894-95) e la citata monografia del Greenhill.

18. L'asse di simmetria di un corpo solido ed omogeneo ha un punto fisso O e scorre su di un cerchio fisso levigato orizzontale, il cui centro sta sulla verticale di O. Determinare il moto.

Sussistono i due integrali del caso generale; ed essendo $\zeta_1 = \cos t$, $\cos \theta = c_3 = \cos t$, essi ci danno

$$A p^{2} + B q^{2} + C r^{2} = h$$

 $A p c_{1} + B q c_{2} + C r c_{3} = \text{cost.}$

mentre le (15) del Vol. I, pag. 168 si riducono alle

$$p = \psi' \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$$
, $q = \psi' \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$, $r = \psi' \cos \theta + \varphi'$

con

$$c_1 = \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$$
, $c_2 = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$, $c_3 = \cos \theta$.

Il problema si riduce alle quadrature.

[PAINLEVÉ, Leçons sur l'intégr. des équations de la Méc. Paris, 1895, pag. 32].

19. Moto di un corpo rigido pesante che rotola e gira su di un piano (o superficie).

In ogni istante il moto del corpo si riduce ad una rotazione intorno ad un asse uscente dal punto di contatto P del corpo colla superficie che vogliamo supporre sia un piano orizzontale fisso. Tale rotazione istantanea può decomporsi in una normale alle due superficie (velocità di rotazione propria) ed in un'altra parallela al piano tangente (velocità di rotolamento). Inoltre il vincolo imposto si traduce nel fatto che la velocità del punto di contatto è nulla: e si esprime con due relazioni differenziali non integrabili (Vol. I, p. 258); il sistema è dunque anolonomo. Riferiamoci agli assi centrali d'inerzia ed applichiamo le (43') e (44'); indicando α , β , γ i coseni della normale in P al corpo, positiva in alto, X, Y, Z le componenti della reazione, si ha

$$\mu (u' + q w - r v) = \mu g \alpha + X, \text{ ecc.}$$

$$A p' + (C - B) q r = Z y - Y z; \text{ ecc.}$$

Ora dobbiamo esprimere che la velocità di P è nulla, cioè u'+q z-r y=0, ecc., e che la direzione α , β , γ è fissa nello spazio; cioè

$$\alpha' = r \beta - q \gamma$$
, ecc.

Si hanno dodici equazioni con altrettante incognite $(u,..., \rho,..., x,..., x,...)$; poichè essendo nota l'equazione della superficie, α , β , γ sono funzioni note di x, y, z. Il lettore potrà mettere i risultati precedenti sotto forma assoluta [Analyse vect. 2 pag. 1]. Si può dedurre agevolmente

$$T' = \mu(uu' + \ldots) + App' + \ldots = -\mu g \frac{d}{dt} (\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

che dà l'integrale dell'energia.

[APPELL, Les mouv. de roulem., pag. 25].

20. Stesso problema supponendo il corpo di rotazione.

Conserviamo le notazioni dell'Eser. preced.: l'asse x sia un asse fisso del piano meridiano, ma non fisso nel corpo, e sia PM l'intersezione del piano orizzontale col piano PGz. Si ha (Fig. 12)

$$\zeta_1 = f(\theta)$$
.

Cerchiamo le componenti della velocità istantanea di rotazione della terna x, y, z. Sia ψ l'angolo che y forma con y_1 ;

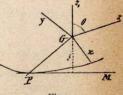


Fig. 12.

si ha una rotazione intorno χ_1 di velocità ψ' ; ed una di velocità θ' intorno y; quindi (\S 9):

$$p_1 = -\psi' \operatorname{sen} \theta$$
, $q_1 = \theta'$, $r_1 = \psi' \cos \theta$.

Si ha infine una rotazione del corpo intorno τ ; e se φ é l'angolo che x forma con una retta fissa nel corpo, la velocità di tale rotazione è φ' ; quindi

$$p = p_1$$
, $q = q_1$, $r = r_1 + \varphi'$.

Per quanto fu detto in fine del § 9 abbiamo le equazioni

$$\mu(u' + qw - r_1v) = -\mu g \operatorname{sen} \theta + X; \mu(v' + r_1u - pw) = Y$$

$$\mu(w' + pv - qu) = \mu g \cos \theta + Z$$

$$Ap' + (Cr - Ar_1)q = -\chi Y;$$

$$Aq' - (Cr - Ar_1)p = \chi X - \chi Z, Cr' = \chi Y.$$

Esprimendo che la velocità di P è nulla si ha ancora

$$u + qz = 0$$
, $v + rx - pz = 0$, $w - qx = 0$.

Si hanno nove equazioni: eliminando u, v, w e le componenti della reazione risultano tre equazioni differenziali di 2° ordine.

Ha luogo l'integrale dell'energia. Si deduce infatti che

$$T' = \mu g (w \cos \theta - u \sin \theta)$$

ossia

$$T' = \mu g (x \cos \theta + z \sin \theta) \theta' = \mu g \zeta'_1$$

perchè infatti

$$\zeta_1 = x \operatorname{sen} \theta - z \cos \theta$$
 , $\zeta'_1 = (x \cos \theta + z \operatorname{sen} \theta) \theta'$; ecc.

21. Trattare il caso particolare che il corpo si riduce ad un cerchio omogeneo di massa uno.

Sa a è il raggio del cerchio, le coordinate di P sono (a, 0, 0); inoltre $A = B = \frac{1}{2} a^2$; $C = a^2$. Dalle equazioni dell'esercizio precedente, eliminando le u, v, w, X...; si ha

$$\frac{1}{2}p' + \left(r - \frac{1}{2}r_1\right)q = \theta, \quad \frac{3}{2}q' - \left(2r - \frac{1}{2}r_1\right)p = \frac{g}{a}\cos\theta$$

$$2r' + pq = 0.$$

Inoltre si trova subito $r_1 = -p \cot \theta$, $q = \theta'$; le tre equazioni precedenti sono appunto tre equazioni differenziali tra p, r, θ . Moltiplicandole rispettivamente per $p, \theta', 2r$, sommando e integrando si ha

$$p^2 + 4r^2 + 3\theta'^2 = \frac{4g}{a} \sin \theta + h$$
.

Riguardiamo p ed r come funzioni di θ ; la prima e terza ci danno

$$\frac{dp}{d\theta} + 2r + p \cot \theta = 0 ; 2 \frac{dr}{d\theta} + p = 0;$$

ed eliminando p;

$$\frac{d^2 r}{d\theta^2} + \cot \theta \, \frac{d r}{d \theta} - r = 0$$

che s'integra colla serie ipergeometrica: poscia si trova p e quindi θ' , ecc.

[APPELL, l. c., pag. 34; Rend. Circolo matem. Palermo, 14, pagg. 1-6 (1900); KORTEWEG, ibidem, pag. 7; CARVALLO, Théorie du mouvement du monocycle et de la bicyclette, Jour. de l'Èc. Polytechnique,

(2) 5, 6 (1900)].

22. Problema della bicicletta.

In prima approssimazione riguardiamo la bicicletta come un sistema rigido, simmetrico rispetto ad un piano passante

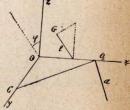


Fig. 13.

per una retta O O_1 di un piano orizzontale (Fig. 13); O è il punto di contatto colla ruota posteriore; O_1 con

288

l'anteriore (direttrice); O O, è la tangente alla traiettoria di O; sia a la tangente a quella di O_1 . La distanza O O_2 è costante ed il moto di O uniforme con velocità v. Il centro istantaneo C di rotazione è nella intersezione delle normali y alla O O, e O, C alla a; e l'asse di rotazione è la verticale in C. Se R = OC sarà $\omega = v:R$ la velocità angolare costante. Finalmente l'asse z sia la verticale di O verso l'alto e sia p l'angolo che il piano passante pel centro di massa e per l'asse x forma col piano x z. Applicheremo l'integrale della conservazione dell'energia in questo problema di moto relativo (Cap. II, § 7). L'energia cinetica del corpo è $\frac{1}{2}$ $A \varphi'^2$ dove A è il momento d'inerzia del corpo secondo x. L'energia potenziale dovuta alle forze esterne (peso) è $\mu g \zeta = \mu g l \cos \varphi$; quella dovuta all'accelerazione di strascinamento coincide con quella delle forze centrifughe; le componenti di queste, per una massa m di coordinate x, y, z, ricordando la posizione dell'asse di rotazione, sono

$$m \omega^2 x$$
 , $m \omega^2 (y - R)$, o

ed il lavoro è

$$m \omega^2 (y - R) dy = m \omega^2 r (r \operatorname{sen} \varphi - R) \cos \varphi d\varphi$$

poichè $y = r \operatorname{sen} \varphi$, essendo r la distanza dall'asse x. Il lavoro complessivo, notando che $A = \sum m r^2$, $\mu l = \sum m r$, risulta

$$A \omega^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi d \varphi - \mu l R \omega^2 \cos \varphi d \varphi$$

ed è la derivata rispetto a \u03c3, cambiata di segno, di

$$\frac{1}{4} \omega^2 A \cos 2\varphi + \omega^2 \mu l R \operatorname{sett} \varphi$$

che è quindi il potenziale delle forze centrifughe. Non dovendo considerare il lavoro delle forze o accelerazioni complementari, l'integrale dell'energia si scrive

$$\frac{1}{2} A \varphi'^2 + \mu g l \cos \varphi + \frac{1}{4} \omega^2 A \cos 2 \varphi + \omega^2 \mu l R \sin \varphi = h.$$

Di qui si deduce

$$A \varphi'' = \mu g l \operatorname{sen} \varphi + \omega^2 (A \operatorname{sen} \varphi - \mu R l) \cos \varphi$$

che avrebbe potuto stabilirsi direttamente, applicando la (22). Nel caso dell'equilibrio il primo membro è nullo e si ricava

$$\omega^2 = \frac{\mu g l}{\mu R l - A \operatorname{sen} \varphi} \operatorname{tang} \varphi;$$

donde, nell'ipotesi di φ molto piccolo, risulta la formula di RANKINE:

tang
$$\varphi = \frac{v^2}{R \ g}$$
.

[Sur les principes dyn. du mouv. des vélocipèdes; Les Mondes, 21, p. 371 (1869)]. Per uno stesso v, al crescere di φ, deve diminuire R, cioè C deve accostarsi ad O e quindi, volendo conservare l'equilibrio, piegare il manubrio dalla parte in cui inchina la macchina.

Il precedente valore di φ annulla la derivata prima dell'energia potenziale; la derivata seconda (entro i soliti limiti) è

$$\mu g l \cos \varphi + \omega^2 \mu R l \sin \varphi$$

che per φ sufficientemente piccolo è positiva. Si ha dunque un minimo per l'energia e la posizione di equilibrio è instabile. [BOURLET, Traité des bicycles et des bicyclettes, Paris (1894); APPELL, Traité de Méc., 2, pag. 297 e Les mouv. de roulem., pag. 36].

23. Problema della palla da bigliardo.

Una sfera omogenea pesante di centro O e raggio a è, all'istante t, a contatto in C con un piano orizzontale. La reazione del piano è una forza applicata in C; ma, a causa dell'attrito del piano, consta di una reazione normale eguale al peso della sfera, e di una reazione tangenziale \mathbf{F} (attrito radente) contraria alla velocità assoluta di C e la cui grandezza è proporzionale alla reazione normale, ossia al peso; cioè μ g f (f un fattore da determinarsi sperimentalmente). Detta \mathbf{v} la velocità del centro di massa O; riflettendo che in tal caso, \S 2, $\mathbf{M} = \Im \Omega = \frac{2}{5} \mu a^2 \Omega$, le equazioni del moto del centro di massa e la (26) ci danno:

$$\mu \mathbf{v}' = \mathbf{F} : \frac{2}{5} \mu a^2 \Omega' = -a \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{F};$$

 $\mathbf{k_1}$ vettore unitario normale al piano e volto in alto. Dalla seconda si deduce subito $\mathbf{k_1} \times \Omega = \mathrm{cost.}$, quindi detta Ω_1 la componente di Ω parallelamente al piano possiamo in detta equazione sostituire Ω_1 ad Ω . La velocità di C è $\mathbf{v} - \Omega \wedge \mathbf{k_1} = \mathbf{v} - \Omega_1 \wedge \mathbf{k_1}$; perciò

$$\mathbf{F} = - \, \mu \, g \, f \frac{\mathbf{v} - \Omega_1 \, \bigwedge \, \mathbf{k}_1}{\mathrm{mod} \, (\mathbf{v} - \Omega_1 \, \bigwedge \, \mathbf{k}_1)}.$$

D'altra parte dalle due equazioni trovate, integrando si ha

$$\frac{2}{5} a \Omega_1 + \mathbf{k}_1 \wedge \mathbf{v} = \text{cost.}$$

e di qui agevolmente:

$$\mathbf{v} - \Omega_1 \wedge \mathbf{k}_1 = \frac{7}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{a}) \; ; \; \mathbf{F} = - \mu \, g \, f \, \frac{\mathbf{v} - \mathbf{a}}{\text{mod} (\mathbf{v} - \mathbf{a})} ;$$

e però la prima equazione diventa

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -fg \frac{\mathbf{v} - \mathbf{a}}{\text{mod } (\mathbf{v} - \mathbf{a})};$$

e di qui, calcolando il mod dei due membri ed eliminando d t, con una nuova integrazione risulta

$$\frac{\mathbf{v} - \mathbf{a}}{\bmod{(\mathbf{v} - \mathbf{a})}} = \cot.$$

La **F** risulta costante e pure costante la direzione della velocità di C; il moto del punto O è un moto parabolico; ecc. Quando $\mathbf{v} = \mathbf{a}$, la velocità di C è nulla; ciò avviene dopo un tempo $t = \frac{1}{f g} \mod(\mathbf{v}_0 - \mathbf{a})$. A partire da questo istante non vi ha più scivolamento, ma rotolamento della sfera; il moto di O è rettilineo ed uniforme; ecc.

[Poisson, Traité, 2, pag. 251; Coriolis, Théorie mathém. des effets du jeu de billard, Paris 1835; Appell, l. c. 2 pag. 274; Jullien l. c., 2, pag. 192; Hemming, Billards mathematically treated, London 1899; Maggi, Dinamica dei sistemi, Pisa, 1917, pag. 277].