TEOREMI
SULLA DISTRIBUZIONE
DELLE
CORRENTI ELETTRICHE COSTANTI

(Memoria presentata alla R. Accademia dei Lincei nella seduta del 1 giugno 1879, pubblicata nel Vol. IV, Serie 3.ª delle Memorie della Classe di Scienze fis. mat. e naturali.)

1. Si abbia un corpo conduttore qualunque percorso da correnti elettriche costanti, lo si riferisca ad un sistema di tre assi ortogonali di coordinate, e si dicano ρ la resistenza specifica, X, Y, Z le componenti della forza elettromotrice totale, ed u, v, w le componenti della intensità unitaria della corrente nel punto (x, y, z).

Il lavoro fatto dalle forze elettromotrici nell'unità di tempo è

$$\Omega = \int (Xu + Yv + Zw)\, dS,$$

dove l'integrale è esteso a tutto il volume S del corpo; il lavoro equivalente alla quantità di calore svolta dalle correnti nel medesimo tempo è, in grazia della legge di Joule,

$$\int \rho\, (u^2 + v^2 + w^2)\, dS,$$

e pel principio della equivalenza del calore e del lavoro deve essere

$$\int (Xu + Yv + Zw)\, dS = \int \rho\, (u^2 + v^2 + w^2)\, dS. \qquad (1)$$

2. Ora esistono infinite funzioni diverse, che poste in luogo di u, v, w, adempiono alla condizione (1), ed a seconda della scelta, che si fa tra queste, l'integrale Ω esprimente il lavoro

delle forze elettromotrici prende valori diversi. Io dico, che il valore di Ω è un *massimo* quando si dànno ad u, v, w i valori determinati per mezzo della legge di Ohm, ossiano i valori

$$u = \frac{X}{\rho}, \qquad v = \frac{Y}{\rho}, \qquad w = \frac{Z}{\rho}. \tag{2}$$

Se infatti noi diamo ad u, v, w altri valori, se poniamo per esempio

$$u = \frac{X}{\rho} + \xi, \qquad v = \frac{Y}{\rho} + \eta, \qquad w = \frac{Z}{\rho} + \zeta, \tag{3}$$

il lavoro Ω delle forze elettromotrici aumenta della quantità

$$\int (X\xi + Y\eta + Z\zeta)\, dS.$$

Ma acciocchè le funzioni (3) soddisfacciano alla condizione (1) dev' essere

$$\int (X\xi + Y\eta + Z\zeta)\, dS = -\int \rho\, (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, dS,$$

dunque, qualunque sieno le funzioni ξ, η, ζ, il valore di Ω corrispondente ai valori (2) di u, v, w è sempre maggiore di quello che corrisponde ai valori (3).

Da questa stessa dimostrazione risulta evidente che i valori (2) sono i soli, che rendano massimo il lavoro Ω delle correnti.

Si sa che esiste sempre uno ed un solo sistema di valori delle funzioni u, v, w, il quale, mentre rende soddisfatte le equazioni (2), soddisfa per ogni punto del corpo alla condizione

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

per ogni punto della superficie isolata del corpo stesso alla condizione

$$u\frac{dx}{dn} + v\frac{dy}{dn} + w\frac{dz}{dn} = 0,$$

ove n è la normale, e, se esistono superficie di discontinuità, per ogni punto di queste alla condizione

$$\left(u\frac{dx}{dp} + v\frac{dy}{dp} + w\frac{dz}{dp}\right)_+ = \left(u\frac{dx}{dp} + v\frac{dy}{dp} + w\frac{dz}{dp}\right)_-,$$

ove p è la normale presa come positiva in un verso e come negativa nel verso opposto. Si sa anche come queste funzioni u, v, w si possano determinare. Ora, se si ammette, come tutti i confronti dei risultati dell' analisi con quelli dell' esperienza autorizzano a fare, che le funzioni u, v, w, determinate mediante le equazioni (3) e colle condizioni or ricordate, rappresentino la effettiva distribuzione delle correnti nel conduttore, il nostro teorema si può enunciare così:

Tra tutte le distribuzioni di correnti conciliabili col principio dell' equivalenza del calore e del lavoro quella che nel fatto si verifica è quella per cui è massimo il lavoro fatto dalle forze elettromotrici. In altri termini: fra tutti i modi nei quali l'elettricità potrebbe propagarsi soddisfacendo al principio dell'equivalenza del calore e del lavoro, quello, che realmente essa sceglie, è quell'unico, che rende massimo il lavoro degli elettromotori, o, ciò che vale lo stesso, il calore svolto nel conduttore.

3. Supponiamo che in una parte S' del corpo chiusa da una superficie σ non agiscano altre forze elettromotrici, che quelle dovute alla elettricità libera, in altri termini, supponiamo che nello spazio S' il potenziale V dell'elettricità libera sia una funzione continua delle coordinate, e che si abbia semplicemente

$$X = -\frac{dV}{dx}, \qquad Y = -\frac{dV}{dy}, \qquad Z = -\frac{dV}{dz}; \tag{4}$$

secondo la legge di Ohm le intensità delle correnti in questo spazio S' sono

$$u = -\frac{1}{\rho}\frac{dV}{dx}, \qquad v = -\frac{1}{\rho}\frac{dV}{dy}, \qquad w = -\frac{1}{\rho}\frac{dV}{dz}. \tag{5}$$

Ora supponiamo che le intensità u, v, w delle correnti, invece di avere i valori (5) voluti dalla legge di Ohm in tutto lo spazio S', abbiano questi valori soltanto sulla superficie σ; poniamo cioè

$$u = -\frac{1}{\rho}\frac{dV}{dx} + \xi, \qquad v = -\frac{1}{\rho}\frac{dV}{dy} + \eta, \qquad w = -\frac{1}{\rho}\frac{dV}{dz} + \zeta, \tag{6}$$

ove ξ, η, ζ sono funzioni che prendono il valore *zero* in tutti i punti della superficie σ; io dico, che, qualunque sieno le funzioni ξ, η, ζ, purchè soddisfacenti alle condizioni necessarie per la continuità delle correnti, l'integrale

$$\Omega' = \int \rho\,(u^2 + v^2 + w^2)\, dS',$$

esteso allo spazio S' prende un valore maggiore quando si dànno ad u, v, w i valori (6) che non quando si dànno a quelle funzioni i valori (5). In altri termini dico, che fra tutte le distribuzioni di correnti, per le quali sulla superficie σ queste hanno i valori dati, quella determinata mediante la legge di Ohm è quella che rende minimo il valore di Ω'.

Infatti passando dai valori (5) ai valori (6) l'integrale Ω' riceve l'aumento

$$-2\int\left(\frac{dV}{dx}\xi+\frac{dV}{dy}\eta+\frac{dV}{dz}\zeta\right)dS'+\int\rho\,(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\,dS'. \quad (7)$$

Ora il primo di questi integrali rappresenta il lavoro fatto dalle correnti ξ, η, ζ nello spazio S', e si può scrivere [1]

$$-\int_\sigma V\,i_n\,d\sigma,$$

ove si rappresenti con i_n la componente della intensità della corrente (ξ, η, ζ) secondo la normale alla superficie σ, e si estenda l'integrazione a tutta questa superficie. Ma noi abbiamo supposto ξ, η, ζ uguali a *zero* in tutti i punti della superficie σ; è quindi uguale a zero anche i_n. Dunque il primo termine dell' espressione (7) è nullo, e questa si riduce a

$$\int\rho\,(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\,dS',$$

ed è perciò sempre positiva.

Ammettendo che le funzioni u, v, w determinate per mezzo della legge di Ohm rappresentino l'effettiva distribuzione delle correnti nel conduttore, noi possiamo adunque dire: *Date le intensità delle correnti in tutti i punti della superficie σ limitante una porzione S' del corpo, nella quale agiscono soltanto le forze elettromotrici dipendenti dalla distribuzione dell'elettricità libera, si possono determinare le intensità delle correnti in tutto lo spazio S' cercando quelle funzioni che hanno i valori dati sulla superficie σ, che soddisfanno alle condizioni necessarie per la continuità e per la permanenza delle correnti, e che rendono* minimo *il valore dell'integrale*

$$\Omega'=\int(u^2+v^2+w^2)\,dS',$$

esteso al volume S'.

[1] Vedi Briot, *Théorie mécanique de la chaleur*, pag. 269.

Nel caso speciale in cui si hanno forze elettromotrici diverse da quelle, che dipendono dalla distribuzione della elettricità libera soltanto nei punti di uno straterello infinitamente sottile, come accade alla superficie di contatto di due parti eterogenee del conduttore, si sa che, data la differenza dei valori del potenziale sulle due faccie dello straterello, la funzione V è quella che rende minimo il valore dell' integrale

$$\int \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] dS,$$

esteso al rimanente del corpo. Questo noto teorema del Dirichlet può considerarsi come un caso particolare della precedente proposizione.

4. Vogliamo applicare le proposizioni qui sopra dimostrate al caso speciale, in cui il corpo conduttore sia costituito da una rete di conduttori filiformi isolati.

Diciamo $1, 2, 3, \ldots \alpha, \beta, \ldots n$ i vertici o *nodi* della rete, rappresentiamo con $r_{\alpha,\beta}$, $i_{\alpha,\beta}$ ed $E_{\alpha,\beta}$ la resistenza, l' intensità della corrente e la forza elettromotrice data sul lato $\alpha\beta$, e conveniamo di considerare le due ultime grandezze come positive quando sono dirette nel verso $\alpha\beta$, talchè sia in generale

$$\left.\begin{aligned} r_{\alpha,\beta} &= r_{\beta,\alpha}, \\ i_{\alpha,\beta} &= -i_{\beta,\alpha} \\ E_{\alpha,\beta} &= -E_{\beta,\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Come condizioni necessarie per la permanenza della trasmissione, avremo fra le intensità i, per ciascun vertice, una equazione come la

$$\Sigma\, i_{\alpha,\beta} = 0, \tag{9}$$

relativa al vertice α; e pel principio dell'equivalenza del lavoro e del calore, ammessa la legge di Joule, avremo

$$\Sigma\, E_{\alpha,\beta}\, i_{\alpha,\beta} = \Sigma\, r_{\alpha,\beta}\, i^2_{\alpha,\beta}, \tag{10}$$

ove Σ rappresenta una somma estesa a tutti i lati della rete.

Diciamo m il numero dei nodi ed n il numero dei lati della rete. Per ciascun nodo avremo un' equazione (9); ma una di queste è una conseguenza delle altre, giacchè, in grazia della relazione $i_{\alpha,\beta} = -i_{\beta,\alpha}$, si ottiene identicamente $0 = 0$, quando queste equazioni si sommano membro a membro tutte insieme. Avremo adunque $m - 1$ equazioni (9) distinte, che unite alla (10) formano un sistema di m equazioni fra le n variabili i. Ora il numero m dei nodi è sempre minore del numero n dei lati della rete, e quindi il principio dell'equivalenza del lavoro e del calore, espresso dall'equazione (10), e le condizioni della costanza della trasmissione, espressa nelle equazioni (9), non bastano a determinare tutte le intensità i. Soltanto nel caso di un conduttore semplice formante un unico circuito chiuso, nel qual caso non si ha che l'equazione (10) con una sola incognita, il problema è determinato.

In tutti gli altri casi, per avere un numero di equazioni uguali a quello delle incognite, si ammette, come conseguenza della legge di Ohm, che l'intensità i di ciascuna corrente sia proporzionale alla forza elettromotrice totale, ossia alla somma della forza elettromotrice data e della caduta del potenziale. Si scrive così per ciascun lato un'equazione come la

$$r_{\alpha,\beta}\, i_{\alpha,\beta} = V_\alpha - V_\beta + E_{\alpha,\beta}. \qquad (11)$$

Le n (11) e le $m - 1$ (9) formano un sistema di $n + m - 1$ equazioni di primo grado, che bastano a determinare le n intensità i e le $m - 1$ differenze di potenziale $V_\alpha - V_\beta$. È noto eziandio come per mezzo delle equazioni (11) si possa con Kirchhoff stabilire la regola seguente: Se nella rete di conduttori si considera una serie di lati formanti un perimetro chiuso, se si immagina di percorrere quel perimetro in un dato verso, e se si conviene di considerare le intensità e le forze elettromotrici come positive, o come negative, secondochè esse sono dirette in quel verso oppure nel verso contrario, la somma algebrica dei prodotti delle resistenze dei lati del perimetro per le intensità delle correnti, che si hanno su di essi, è uguale alla somma algebrica delle forze elettromotrici agenti sul perimetro. Nella rete data è sempre possibile trovare $n - m + 1$ perimetri diversi, ed applicando a ciascuno la regola enunciata, si ottengono $n - m + 1$ equazioni, le quali unite alle $m - 1$ equazioni (9) bastano a determinare tutte le intensità i.

Orbene il nostro primo teorema dice, che fra tutti gli infiniti sistemi di valori delle variabili i, i quali soddisfano alla equazione (10) esprimente il principio dell'equivalenza del calore e del lavoro, ed alle equazioni (9) necessarie per la costanza delle correnti, ve n'ha uno, ed uno solo, che rende massimo il lavoro

$$\Omega = \Sigma E_{\alpha,\beta}\, i_{\alpha,\beta}$$

delle forze elettromotrici, e che questo unico valore è quello determinato colle equazioni (9) ed (11), o ciò che val lo stesso, colle equazioni di Kirchhoff.

Benchè il teorema sia stato dimostrato in generale, non sarà inutile far vedere, che veramente i valori delle variabili i determinati per mezzo delle equazioni (9) ed (11) dànno alla somma Ω un valore maggiore di quello, che questa assume per qualunque altro sistema di valori delle variabili, il quale soddisfaccia alle condizioni (9) e (10). A questo scopo, conservando la lettera i per rappresentare i valori delle intensità dati dalle equazioni (9) ed (11), designiamo con $i + \eta$ il valore di una qualunque delle intensità in un altro sistema anch'esso compatibile colle condizioni (9) e (10). Abbiamo

$$\Omega(i + \eta) = \Omega(i) + \Sigma E_{\alpha,\beta}\, \eta_{\alpha,\beta}. \tag{12}$$

Ora dovendo tanto i valori i quanto i valori $i + \eta$ rendere soddisfatta l'equazione (10), è

$$\Sigma E_{\alpha,\beta}\, i_{\alpha,\beta} = \Sigma r_{\alpha,\beta}\, i^2_{\alpha,\beta},$$

$$\Sigma E_{\alpha,\beta}\, (i + \eta)_{\alpha,\beta} = \Sigma r_{\alpha,\beta}\, (i + \eta)^2_{\alpha,\beta};$$

e quindi:

$$\Sigma E_{\alpha,\beta}\, \eta_{\alpha,\beta} = 2\Sigma r_{\alpha,\beta}\, i_{\alpha,\beta}\, \eta_{\alpha,\beta} + \Sigma r_{\alpha,\beta}\, \eta^2_{\alpha,\beta}.$$

Ponendo nel primo termine del secondo membro in luogo dei prodotti $r_{\alpha,\beta}\, i_{\alpha,\beta}$ i loro valori (11), deduciamo da quest'equazione:

$$\Sigma E_{\alpha,\beta}\, \eta_{\alpha,\beta} = -2\Sigma (V_\alpha - V_\beta)\, \eta_{\alpha,\beta} - \Sigma r_{\alpha,\beta}\, \eta^2_{\alpha,\beta}. \tag{13}$$

Ma in grazia delle relazioni (8) si può scrivere

$$\Sigma (V_\alpha - V_\beta)\, \eta_{\alpha,\beta} = V_\alpha \Sigma \eta_{\alpha,\beta} + V_\beta \Sigma \eta_{\beta,\alpha},$$

ed in grazia delle equazioni (9), le quali debbono essere soddisfatte tanto dai valori i quanto dai valori $i + \eta$, si ha

$$\Sigma \eta_{\alpha,\beta} = 0, \qquad \Sigma \eta_{\beta,\alpha} = 0;$$

dunque l'uguaglianza (13) si riduce a

$$\Sigma E_{\alpha,\beta}\, \eta_{\alpha,\beta} = -\Sigma r_{\alpha,\beta}\, \eta^2_{\alpha,\beta},$$

e la (12) dà

$$\Omega(i+\eta) - \Omega(i) = -\Sigma r_{\alpha,\beta}\, \eta^2_{\alpha,\beta}.$$

Il secondo membro di questa uguaglianza è sempre negativo, qualunque sieno i valori attribuiti alle variabili η, dunque il valore $\Omega(i)$ della somma Ω corrispondente ai valori delle intensità i, che effettivamente si verificano, è maggiore del valore $\Omega(i+\eta)$ della medesima somma corrispondente ad altri valori qualunque delle medesime intensità.

Il sistema dei valori i dati dalle equazioni (11) è il solo, che dia alla somma Ω un valore massimo. Se infatti un altro sistema di valori, uno qualunque dei quali rappresenteremo con $i+\eta$, avesse la medesima proprietà, rappresentando con h quantità piccolissime qualunque, maggiori o minori dell' unità, avremmo la disuguaglianza

$$\Omega(i+\eta) > \Omega(i+h\eta),$$

dalla quale dedurremmo

$$\Sigma E\eta > \Sigma E h \eta.$$

Ma, come sopra, abbiamo

$$\Sigma E\eta = -\Sigma r\eta^2 \quad \text{e} \quad \Sigma E h\eta = -\Sigma r h^2 \eta^2,$$

dunque avremmo

$$\Sigma r\eta^2 < \Sigma r h^2 \eta^2.$$

Ora è impossibile, che questa disuguaglianza sussista per tutti i valori, che si possono dare ai fattori h, se non sono nulle tutte le variabili η.

5. I valori delle intensità i, e quindi anche quello della somma

$$\Omega = \Sigma E i = \Sigma r i^2,$$

sono funzioni delle resistenze r. Considerandoli come tali, possiamo scrivere come segue il differenziale totale di Ω:

$$d\Omega = \Sigma i\, d(ri) + \Sigma r i\, di,$$

ossia, essendo $ri\,di = i\,d(ri) - i^2 dr$:

$$d\Omega = 2\,\Sigma i\, d(ri) - \Sigma i^2 dr.$$

Ora le i sono funzioni di r tali, che si ha per ogni valore di r:

$$\Sigma E i = \Sigma r i^2,$$

e quindi

$$\Sigma E d i = \Sigma i d (r i) + \Sigma r i d i;$$

inoltre esse debbono soddisfare alla condizione, che, considerando le r come costanti, la somma $\Sigma E i$ sia un massimo, quindi dev' essere

$$\Sigma E d = i 2 \Sigma r i d i = 0;$$

per conseguenza si ha

$$\Sigma i d (r i) = 0.$$

Dunque il precedente valore di $d\Omega$ si riduce a

$$d\Omega = -\Sigma i^2 d r.$$

Quest' espressione ci dice, che ogni aumento di una delle resistenze produce una diminuzione del valore di Ω, ossia del lavoro fatto nell' unità di tempo dalle forze elettromotrici; ogni diminuzione di alcuna delle resistenze produce un aumento del detto lavoro. [1]

6. Supponiamo, che agiscano forze elettromotrici E soltanto sopra una parte dei conduttori filiformi, di cui la rete è formata; denominiamo, per distinguerle, colla lettera I le intensità delle correnti, che si hanno su questi conduttori, e riserbiamo la lettera i per rappresentare l'intensità su di uno qualunque degli altri lati, sui quali non agiscono forze elettromotrici. Consideriamo le I come date e le i come incognite. Per la costanza delle correnti deve sussistere tra le intensità I e le i, per ciascun vertice α, la relazione

$$\Sigma (I + i)_{\alpha,\beta} = 0; \tag{9'}$$

e queste relazioni, se sono in numero uguale a quello delle variabili i, bastano a determinare i valori in funzione delle I. Se il numero delle equazioni (9') è minore di quello delle incognite i, esistono infiniti sistemi di valori delle i, i quali ren-

[1] Questa conclusione coincide con quella, a cui accenna Gauss in un passo dei frammenti, con cui si termina l'edizione completa delle sue opere fatta per cura della Società delle scienze di Göttingen. Vedi: CARL FRIEDRICH GAUSS, *Werke*, Band V. Göttingen, 1867, pag. 604, Nachlass.

dono soddisfatte le equazioni (9). Fra tutti questi infiniti sistemi, quello, che realmente si verificherà, è quell'unico, che, rimanendo costanti i valori delle I, rende minima la somma

$$\Omega' = \Sigma r i^2.$$

Questo teorema è una applicazione della nostra seconda proposizione generale esposta all'art. 3. Volendone tuttavia dare una dimostrazione diretta, rappresentiamo colle lettere i i valori dati dalle equazioni (11), le quali nel caso presente si riducono alla forma:

$$r_{\alpha,\beta}\, i_{\alpha,\beta} = V_\alpha - V_\beta, \qquad (11')$$

e designiamo un altro valore qualunque di esse variabili colla somma

$$i + \eta.$$

Dovendosi avere, per ciascun vertice, ad un tempo l'equazione

$$\Sigma (I + i)_{\alpha,\beta} = 0,$$

e l'equazione

$$\Sigma (I + i + \eta)_{\alpha,\beta} = 0,$$

le grandezze η dovranno essere così scelte, da soddisfare, per ciascun vertice della rete, all'equazione

$$\Sigma \eta_{\alpha,\beta} = 0. \qquad (14)$$

Ciò posto, abbiamo

$$\Omega'(i + \eta)\ \Omega'(i) = 2\, \Sigma r i \eta + \Sigma r \eta^2.$$

Ora, ponendo nel primo termine del secondo membro in luogo dei prodotti $r\,i$ i valori (11'), otteniamo

$$\Sigma r i \eta = \Sigma (V_\alpha - V_\beta)\, \eta_{\alpha,\beta},$$

ossia, in grazia delle relazioni (8),

$$\Sigma r i \eta = V_\alpha\, \Sigma \eta_{\alpha,\beta} + V_\beta\, \Sigma \eta_{\beta,\alpha},$$

e quindi, in grazia delle (14):

$$\Sigma r i \eta = 0.$$

Dunque

$$\Omega'(i + \eta) - \Omega'(i) = \Sigma r \eta^2;$$

e siccome, qualunque sieno i valori atribuiti alle grandezze r_i, la somma $\Sigma r \eta^2$ è sempre positiva, così possiamo conchiudere, che $\Omega'(i)$ è un minimo.

7. Per dare qualche esempio di applicazione dei teoremi, che abbiamo dimostrato, e mostrare come essi, adoperati per determinare le intensità delle correnti costanti in una data rete di conduttori filiformi, conducano alle medesime equazioni, a cui conducono le regole del Kirchhoff, considereremo i casi semplici di un sistema di circuiti derivati da un unico circuito principale, e di un sistema di conduttori formanti la disposizione del ponte di Wheatstone.

Nel caso dei circuiti derivati diciamo E la forza elettromotrice unica agente sul circuito principale, R la resistenza di questo circuito, ed I la intensità della corrente, che lo percorre; diciamo invece $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ le resistenze degli n circuiti derivati ed $i_1, i_2, i_3, \ldots i_n$ le intensità delle correnti rispettive. Secondo il teorema del n. 4 le intensità cercate, $I, i_1, i_2, \ldots, i_n$, sono quelle, che soddisfanno alle condizioni

$$E\,I = \text{massimo},$$

$$E\,I = R\,I^2 + r_1 i_1^2 + r_2 i_2^2 + \ldots + r_n i_n^2, \tag{15}$$

$$I = i_1 + i_2 + \ldots + i_n. \tag{16}$$

Perchè queste condizioni sieno soddisfatte, i valori delle variabili $I, i_1, i_2, \ldots, i_n$ debbono essere tali, che, per qualunque sistema di valori dei differenziali $d\,I$, $d\,i$, ecc., riescano soddisfatte le equazioni

$$E\,d\,I = 0,$$

$$R\,I\,d\,I + r_1\,i_1\,d\,i_1 + \ldots + r_n\,i_n\,d\,i_n = 0,$$

$$d\,I - d\,i_1 - d\,i_2 - \ldots - d\,i_n = 0.$$

Moltiplicando la prima di queste equazioni per il fattore indeterminato λ, e la terza per un altro fattore indeterminato λ', poi sommando, ed uguagliando a zero le quantità, che nella somma moltiplicano $d\,I, d\,i_1, d\,i_2, \ldots d\,i_n$, otteniamo le $n+1$ equazioni

$$\lambda E + R\,I + \lambda' = 0,$$

$$r_1\,i_1 - \lambda' = 0,$$

$$r_2\,i_2 - \lambda' = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$r_n\,i_n - \lambda' = 0.$$

Combinando la prima di queste equazioni successivamente con tutte le altre, otteniamo

$$\begin{aligned} \lambda E + R I + r_1 i_1 &= 0, \\ \lambda E + R I + r_2 i_2 &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots &\ldots \\ \lambda E + R I + r_n i_n &= 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Queste moltiplicate rispettivamente per $i_1, i_2, i_3, \ldots i_n$, e sommate dànno

$$\lambda E (i_1 + i_2 + \ldots + i_n) + R I (i_1 + i_2 + \ldots i_n) + r_1 i^2_1 + r_2 i_2^2 + \\ + \ldots + r_n i^2_n = 0.$$

ossia, in grazia delle (15) e (16):

$$\lambda E I + E I = 0,$$

e quindi

$$\lambda = -1.$$

Con questo valore di λ le equazioni (17) diventano

$$\begin{aligned} r_1 i_1 &= E - R I, \\ r_2 i_2 &= E - R I, \\ &\ldots\ldots \\ r_n i_n &= E - R I, \end{aligned}$$

e sono queste, come è noto, le relazioni che si ricavano dall' applicazione del principio di Kirchhoff fatta agli n perimetri formati dal circuito principale con ciascuno degli n circuiti derivati.

Nel caso della disposizione del ponte di Wheatstone diciamo r_1, r_2, r_3, r_4 le resistenze dei quattro lati del parallelogrammo ed r_5 la resistenza della diagonale, con cui supporremo congiunti i vertici (1, 2) e (3, 4); diciamo i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 le intensità su questi lati e su questa diagonale, e rappresentiamo con I la intensità della corrente principale, il cui circuito, che è il solo che contenga una pila, è collegato ai vertici (1, 4) e (2, 3) del parallelogrammo. Il teorema del n. 6 dice che le intensità incognite i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 sono quelle, che, riguardando come costante l' intensità I della corrente principale, rendono minima la somma

$$\Omega' = r_1 i^2_1 + r_2 i^2_2 + r_3 i^2_3 + r_4 i^2_4 + r_5 i^2_5, \tag{18}$$

e che intanto soddisfanno alle condizioni

$$i_3 = I - i_2\,, \qquad i_4 = I - i_1\,, \qquad i_5 = i_1 - i_2\,. \tag{19}$$

Portando nella (18) i valori (19) di i_3, i_4, i_5, e formando le equazioni

$$\frac{d\,\Omega'}{d\,i_1} = 0\,, \qquad \frac{d\,\Omega'}{d\,i_2} = 0\,,$$

si ottengono le due equazioni

$$\begin{aligned} (r_1 + r_4 + r_5)\, i_1 - r_5\, i_2 &= r_4\, I, \\ (r_2 + r_3 + r_5)\, i_2 - r_5\, i_1 &= r_3\, I, \end{aligned} \tag{20}$$

le quali, unite alle tre (19), bastano a determinare le cinque intensità i_1, i_2, i_3, i_4, i_5 in funzione di I e delle resistenze. Il valore di i_5, così calcolato, è

$$i_5 = I\,\frac{r_2\, r_4 - r_1\, r_3}{(r_1 + r_4 + r_5)\,(r_2 + r_3 + r_5) - r_5^2}\,,$$

e si riduce a zero quando è

$$r_2\, r_4 = r_1\, r_3\,.$$

È questo il noto principio, su cui è fondato l'uso del ponte.

8. Terminando, ci piace accennare ad un passo di Gauss, che trovasi nei frammenti sopra citati. Dopo di avere stabilito un principio generale per la determinazione delle intensità delle correnti costanti in una rete qualunque di fili conduttori, il quale principio, fatta astrazione dalle denominazioni, coincide con quello di Kirchhoff, e dopo di avere considerato in particolare il caso del ponte di Wheatstone, il Gauss dice:[1]

"Il principio fondamentale conduce a questa conseguenza, che

$$\Sigma\, r\, i\, i$$

dev' essere un *minimum,* ove r rappresenti la resistenza di un elemento ed i l'intensità della corrente. Ancor più semplicemente, dev' essere minimo

$$\Sigma\, i\, v\, v\,,$$

[1] Carl Friedrich Gauss, *Werke*, Band V. Göttingen, 1867, pag. 603. Nachlass.

ove ε rappresenti un elemento del fluido mosso e v la sua velocità. „

Questa proposizione è un' applicazione del nostro secondo teorema, il quale in questo caso coincide col teorema di Dirichlet.

Quello però, che principalmente ci pare importante aver posto in chiaro, è la relazione che passa tra questa proposizione e quella che si riferisce al massimo lavoro delle forze elettromotrici. E in quanto a questa ultima proposizione, la quale forma l'oggetto principale di questo scritto, a noi pare, che essa si presenterà con maggiore interesse, se avremo fatto notare, che la legge della distribuzione dei potenziali, dalla quale è desunta l'ipotesi espressa nelle equazioni (2), trova nella esperienza diretta una conferma meno facile e meno completa di quella che ebbe la legge di Joule, sulla quale si appoggia l'enunciato del nostro teorema.

RICERCHE TEORICHE E SPERIMENTALI

SUL

GENERATORE SECONDARIO

GAULARD E GIBBS

(Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino — 11 gennaio 1885, Tomo XXXVII, Serie II.)

Nella Sezione internazionale di elettricità dell'Esposizione generale italiana, di recente chiusa in Torino, figuravano esposti dalla *National Society for the distribution of electricity by Secundary Generators di Londra,* con grande ricchezza di impianto e nella loro forma più nuova, i *Generatori secondari di Gaulard e Gibbs.*

Tali apparati di induzione, che gli inventori presentavano come un mezzo acconcio per distribuire a grandi distanze e su estese superficie correnti elettriche per l'illuminazione o per altri impieghi industriali, suscitarono, come si sa, discussioni e controversie, che perdurano tuttavia ostinate ed acerbe. Quindi io, avendo a mia disposizione nella Esposizione un impianto di generatori secondari fatto nelle condizioni di un vero impianto industriale e quale difficilmente si potrebbe riprodurre in un laboratorio scientifico, aveva il dovere di servirmene per fare esperienze, le quali potessero apportare nella soluzione delle questioni dibattute un qualche contributo. La maggiore controversia si riferiva alla determinazione del coefficiente di rendimento, ed era principalmente dovuta alle obbiezioni alle quali dava luogo l'impiego fatto dall'Hopkinson e da altri dell'elettrometro a quadranti e dell'elettrodinamometro quali strumenti di misura per le correnti alternative. E siccome a tali obbiezioni non si sarebbe potuto rispondere in modo decisivo se non dimostrando la coincidenza dei risultati delle esperienze fatte coi due strumenti nominati con quelli di altre esperienze ove essi non fossero impiegati come strumenti di misura, così io, assecondando un parere ed un desiderio del Giurì internazionale dell' Esposizione, feci alcune determinazioni, nelle quali tutte le misure erano eseguite per mezzo del solo strumento contro l' uso del quale non si fossero sollevate obbiezioni: per mezzo di un calorimetro.

Il confronto tra le mie misure e quelle già da altri eseguite coll'elettrometro e coll'elettrodinamometro riuscì, come speravo, istruttivo. Ma dalla discussione dei risultati ricavai più di quello che dapprima aveva sperato e cercato.

Tale discussione, infatti, mi condusse ad uno studio teorico dei fenomeni che avvengono nel generatore secondario, studio teorico, che, controllato coll' esperienza, venne a rischiarare, in modo superiore alle mie previsioni, la questione. Da tale studio infatti risultò:

1.° Che tutte le esperienze che si erano eseguite per la determinazione del coefficiente di rendimento, anche quando erano veramente atte a servire a tale determinazione, erano state male interpretate ed erroneamente calcolate.

2.° Che non solo dalle mie esperienze calorimetriche, ma anche da quelle già fatte da altri coll'elettrometro e coll'elettrodinamometro, rettamente interpretate, si può effettivamente ricavare il coefficiente di rendimento; ma che tale coefficiente ha un valore diverso da quello che si era creduto finora, e segue una legge affatto diversa da quella a cui l'erronea interpretazione delle esperienze aveva condotto.

3.° Finalmente che dalle medesime esperienze è possibile ricavare, oltre al coefficiente di rendimento, anche gli altri elementi utili a conoscersi per uno studio numerico, completo, dei fenomeni che avvengono nel generatore secondario.

Nella Memoria che oggi presento ho cercato di riassumere i risultati principali delle mie ricerche.

La Memoria si compone, come è naturale, di due parti: la prima parte riassume le ricerche teoriche necessarie per la interpretazione delle esperienze; la seconda le ricerche sperimentali.

PARTE I.

RICERCHE TEORICHE.

§ 1.° DESCRIZIONE DEL GENERATORE SECONDARIO. — I generatori secondari di Gaulard e Gibbs sono apparecchi d'induzione aventi per iscopo di produrre per mezzo di una corrente alternativa di data intensità altre correnti alternative, rappresentanti con lieve perdita la medesima energia, ma aventi una intensità diversa, della quale si possa far variare il valore a seconda del bisogno. Essenzialmente essi consistono in due spirali avvolte su di un medesimo nucleo di ferro; nella prima di queste, nella *primaria*, si fanno passare le correnti date da una macchina dinamoelettrica a correnti alternative, e nella seconda, nella *secondaria*, si producono per induzione altre correnti alternative. Se, come accade nelle applicazioni alle quali sono principalmente destinati i generatori secondari, si vuole ottenere nelle correnti indotte una intensità maggiore di quella della corrente induttrice, la spirale primaria si fa di un solo pezzo, e si divide invece la spirale secondaria in più parti uguali, che si possano, per mezzo di un commutatore, collegare a piacimento in circuito unico od in circuito multiplo. Si farebbe l'opposto se si presentasse il caso di dover ottenere alle estremità della spirale secondaria una differenza di potenziali più grande di quella che si ha tra le estremità della spirale primaria.

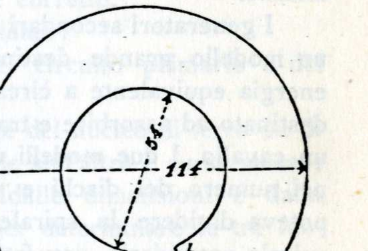

Fig. 1.

Nei generatori secondari dell'ultimo tipo, i quali comparvero per la prima volta nella Mostra di elettricità di Torino, le spirali sono fatte con dischi di lastra sottile di rame. I dischi hanno la forma di una corona circolare (fig. 1) tagliata in $A\,a$, $B\,b$ e munita sui due lembi del taglio, verso l'esterno, di due linguette rettangolari A, B, che servono alle saldature. La linguetta B di un disco viene saldata colla linguetta A di un secondo disco, la linguetta B del quale è parimente saldata colla A di un terzo disco, e così via via. Per tal modo si forma una spirale a nastro, di cui ciascun disco rappresenta una spira. Le due spirali primaria e secondaria sono identiche, e le spire dell'una sono alternate con quelle dell'altra.

L'isolamento è ottenuto per mezzo di dischi a corona circolare fatti di cartoncino spalmato con gommalacca. I dischi delle due spirali e quelli di cartoncino destinati ad isolarli sono infilzati su di un tubo verticale di vulcanite o di altra materia isolante, nell'interno del quale si introduce un nucleo cilindrico di fili di ferro. Quattro colonnette metalliche e due tavole quadrate di legno, formanti lo zoccolo ed il capitello, costituiscono l'intelaiatura dell'apparato. Sul capitello sono i morsetti delle due spirali, ed un commutatore per mezzo del quale si può a piacimento introdurre l'apparecchio nel circuito della corrente primaria, oppure estrarnelo sostituendovi un corto filo. Il commutatore per collegare in circuito semplice od in circuito multiplo le parti, nelle quali è divisa la spirale secondaria, è un commutatore a spine, ed è collocato su di una tavoletta di ebanite che sta di fianco all'apparecchio. Per regolare la potenza del generatore secondario si può estrarre più o meno dal suo interno il nucleo di ferro. A quest'uopo il capitello porta lateralmente una vite, colla quale il nucleo può essere fermato a tutte le altezze.

I generatori secondari esposti a Torino erano di due modelli: un modello grande destinato ad assorbire e trasformare una energia equivalente a circa 1,80 cavalli, ed un modello piccolo destinato ad assorbire e trasformare l'energia equivalente a circa un cavallo. I due modelli differivano l'uno dall'altro unicamente pel numero dei dischi e pel numero delle parti, nelle quali si poteva dividere la spirale secondaria. Nel modello grande la spirale secondaria era fatta di quattro parti uguali, collegabili a piacimento in tensione od in quantità; nel piccolo modello la spirale era formata di sole due sezioni.

§ 2.° Intensità delle correnti e della magnetizzazione del nucleo. — Studieremo dapprima il caso nel quale le spirali secondarie sono, come le primarie, tutte riunite in un circuito semplice; potremo in seguito, con facili considerazioni, passare al caso generale.

Diciamo ε la forza elettromotrice della macchina dinamoelettrica, i l'intensità della corrente primaria, i' quella della corrente secondaria, ed m l'intensità della magnetizzazione del nucleo di ferro. Se ε è una data funzione periodica del tempo t, le grandezze i, i', m sono esse pure funzioni periodiche di t, ed egli è evidente che l'analisi dei fenomeni che avvengono nel generatore secondario dipende tutta dalla determinazione di queste funzioni.

Ora noi possiamo fare facilmente tale determinazione, se, riservandoci di verificare in seguito l'ammessibilità dell'ipotesi per mezzo del confronto dei risultati della teoria con quelli degli esperimenti, riteniamo per ora che l'intensità della magnetizzazione del nucleo sia proporzionale alla intensità della corrente che la produce. Possiamo poi semplificare subito i calcoli osservando che, in grazia della disposizione dell'apparecchio del Gaulard, le due spirali, primaria e secondaria, sono identiche l'una all'altra, hanno le spire vicinissime ed alternate, e sono ugualmente collocate rispetto al nucleo di ferro. Queste osservazioni infatti ci permettono di ritenere:

1.° Che i coefficienti d'induzione delle due spirali su se stesse siano uguali tra di loro ed uguali entrambi al coefficiente d'induzione mutua dell'una sull'altra.

2.° Che i coefficienti d'induzione del nucleo sulle due spirali siano uguali.

3.° Che l'intensità m della magnetizzazione sia dovuta alla somma $i + i'$ delle intensità delle due correnti.

Fatte queste osservazioni, se diciamo:

r ed r' le resistenze totali del circuito primario e del secondario;

a e b il coefficiente di induzione del nucleo di ferro su di una delle spirali, e quello di una spirale sull'altra e su se stessa;

M un coefficiente dipendente dalle dimensioni e dalla struttura dell'apparecchio; abbiamo per determinare le tre funzioni i, i', m le tre equazioni differenziali:

$$\left.\begin{aligned} r\,i &= \varepsilon - a\frac{d\,m}{d\,t} - b\left(\frac{d\,i}{d\,t} + \frac{d\,i'}{d\,t}\right) \\ r'\,i' &= -\,a\frac{d\,m}{d\,t} - b\left(\frac{d\,i}{d\,t} + \frac{d\,i'}{d\,t}\right) \\ m &= M\,(i + i'). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

L'ultima di queste equazioni dà

$$\frac{d\,m}{d\,t} = M\left(\frac{d\,i}{d\,t} + \frac{d\,i'}{d\,t}\right),$$

e le due prime dànno per sottrazione:

$$r\,i - r'\,i' = \varepsilon,$$

e quindi

$$r\frac{di}{dt} - r'\frac{di'}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Colle quali relazioni si possono eliminare dalla prima delle (1) le derivate $\frac{dm}{dt}$ e $\frac{di'}{dt}$, dalla seconda le derivate $\frac{dm}{dt}$ e $\frac{di}{dt}$, e dalla terza i ed i'. Per tal modo si possono trasformare, con semplici riduzioni, le tre equazioni (1) nelle seguenti:

$$\frac{di}{dt} - \frac{1}{r+r'}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{r\,r'}{r+r'}\frac{1}{aM+b}\left(i - \frac{\varepsilon}{r+r'}\right) = \left(\frac{r'}{r+r'}\right)^2 \frac{\varepsilon}{aM+b},$$

$$\frac{di'}{dt} + \frac{1}{r+r'}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{r\,r'}{r+r'}\frac{1}{aM+b}\left(i' + \frac{\varepsilon}{r+r'}\right) = \frac{r\,r'}{(r+r')^2}\frac{\varepsilon}{aM+b},$$

$$\frac{dm}{dt} + \frac{r\,r'}{r+r'}\frac{1}{aM+b}\,m = \frac{Mr'}{r+r'}\frac{\varepsilon}{aM+b}.$$

Se adunque poniamo

$$\frac{r\,r'}{r+r'}\frac{1}{aM+b} = p, \tag{2}$$

e se diciamo y la funzione di t, che soddisfa all'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dt} + p\,y = \frac{p}{r}\varepsilon, \tag{3}$$

abbiamo

$$i = \frac{r'y + \varepsilon}{r+r'}, \quad i' = \frac{r\,y - \varepsilon}{r+r'}, \quad m = M\,y. \tag{4}$$

L'integrale generale dell'equazione (3) è, detta C una costante arbitraria,

$$y = e^{-pt}\left(\frac{p}{r}\int \varepsilon\, e^{pt}\,dt + C\right).$$

ε poi è una funzione periodica data, la quale, detta T la durata del periodo, ossia l'intervallo di tempo che passa fra due consecutivi cambiamenti di segno della forza elettromotrice della macchina dinamoelettrica, si può sempre mettere sotto la forma

$$\varepsilon = \sum E_n \operatorname{sen} \frac{2 n \pi}{T} (t + \alpha_n) .$$

Quindi ricordando che

$$\int e^{pt} \operatorname{sen} \frac{2 n \pi}{T} (t + \alpha_n) \, d t = \frac{p \operatorname{sen} \frac{2 n \pi}{T} (t + \alpha_n) - \frac{2 n \pi}{T} \cos \frac{2 n \pi}{T} (t + \alpha_n)}{p^2 + \frac{4 n^2 \pi^2}{T^2}} e^{pt},$$

ed osservando che affinchè y sia, come deve essere, una funzione periodica, la costante arbitraria C dev' essere posta uguale a zero, si ha

$$y = \frac{p}{r} \sum \frac{E_n}{p^2 + \frac{4 n^2 \pi^2}{T^2}} \left[p \operatorname{sen} \frac{2 n \pi}{T} (t + \alpha_n) - \frac{2 n \pi}{T} \cos \frac{2 n \pi}{T} (t + \alpha_n) \right] . \quad (5)$$

Questo valore di y si può scrivere

$$y = \frac{p}{r} \sum Y_n \operatorname{sen} \frac{2 n \pi}{T} (t + \alpha_n - \beta_n) , \quad (6)$$

ove si pongano le condizioni:

$$Y_n \cos \frac{2 n \pi}{T} \beta_n = \frac{E_n}{p^2 + \frac{4 n^2 \pi^2}{T^2}} p ,$$

$$Y_n \operatorname{sen} \frac{2 n \pi}{T} \beta_n = \frac{E_n}{p^2 + \frac{4 n^2 \pi^2}{T^2}} \frac{2 n \pi}{T} ;$$

dalle quali si ricava

$$\left. \begin{aligned} Y_n^2 &= \frac{E_n^2}{p^2 + \frac{4 n^2 \pi^2}{T^2}} , \\ \operatorname{tang} \frac{2 n \pi}{T} \beta_n &= \frac{2 n \pi}{p T} . \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Se adesso portiamo il trovato valore di y nelle espressioni (4), abbiamo subito i, i' ed m.

Il valore (5) portato nella prima delle (4) dà

$$i = \frac{1}{r+r'} \sum E_n \left| \left(\frac{p^2 \frac{r'}{r}}{p^2 + \frac{4 n^2 \pi^2}{T^2}} + 1 \right) \operatorname{sen} \frac{2 n \pi}{T} (t + \alpha_n) - \right.$$

$$\left. - \frac{p \frac{r'}{r} \frac{2 n \pi}{T}}{p^2 + \frac{4 n^2 \pi^2}{T^2}} \cos \frac{2 n \pi}{T} (t + \alpha_n) \right| ,$$

e questa espressione di i si può scrivere sotto la forma

$$i = \sum I_n \operatorname{sen} \frac{2 n \pi}{T} (t + \alpha_n - \gamma_n) , \tag{8}$$

ove si pongano le condizioni:

$$I_n \cos \frac{2 n \pi}{T} \gamma_n = \frac{E_n}{r + r'} \left(\frac{p^2 \frac{r'}{r}}{p^2 + \frac{4 n^2 \pi^2}{T^2}} + 1 \right) ,$$

$$I_n \operatorname{sen} \frac{2 n \pi}{T} \gamma_n = \frac{E_n}{r + r'} \frac{p \frac{r'}{r} \frac{2 n \pi}{T}}{p^2 + \frac{4 n^2 \pi^2}{T^2}} ;$$

dalle quali si ricavano per I_n e per tang $\frac{2 n \pi}{T} \gamma_n$ i valori:

$$I_n^2 = E_n^2 \frac{r^2 \frac{4 n^2 \pi^2}{T^2} + p^2 (r + r')^2}{r^2 (r + r')^2 \left(p^2 + \frac{4 n^2 \pi^2}{T^2} \right)} ,$$

$$\operatorname{tang} \frac{2 n \pi}{T} \gamma_n = \frac{p r' \frac{2 n \pi}{T}}{p^2 (r + r') + r \frac{4 n^2 \pi^2}{T^2}} .$$

Se in queste espressioni sostituiamo a p il suo valore (2), e se per brevità di scrittura poniamo

$$C_n = (a M + b) \frac{2 n \pi}{T} , \tag{9}$$

otteniamo

$$I_n{}^2 = E_n{}^2 \frac{C_n{}^2 + r'^2}{r^2 r'^2 + (r + r')^2 C_n{}^2}, \tag{10}$$

$$\operatorname{tang} \frac{2n\pi}{T} \gamma_n = \frac{r'^2 C_n}{r r'^2 + (r + r') C_n{}^2} \tag{11}$$

Analogamente il valore (5) di y portato nella seconda delle formole (4) dà

$$i' = \frac{1}{r + r'} \sum E_n \left[\left(\frac{p^2}{p^2 + \frac{4n^2\pi^2}{T^2}} - 1 \right) \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{T}(t + \alpha_n) - \right.$$

$$\left. \frac{p \frac{2n\pi}{T}}{p^2 + \frac{4n^2\pi^2}{T^2}} \cos \frac{2n\pi}{T}(t + \alpha_n) \right],$$

espressione che si può mettere sotto la forma

$$i' = \sum I_n' \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{T}(t + \alpha_n - \gamma_n'),$$

purchè si ponga:

$$I_n' \cos \frac{2n\pi}{T} \gamma_n' = \frac{E_n}{r + r'} \left(\frac{p^2}{p^2 + \frac{4n^2\pi^2}{T^2}} - 1 \right), \tag{12}$$

$$I_n' \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{T} \gamma_n' = \frac{E_n}{r + r'} \frac{p \frac{2n\pi}{T}}{p^2 + \frac{4n^2\pi^2}{T^2}}.$$

Da queste equazioni di condizione ricaviamo

$$I_n'^2 = \frac{E_n{}^2}{(r + r')^2} \frac{\frac{4n^2\pi^2}{T^2}}{p^2 + \frac{4n^2\pi^2}{T^2}},$$

$$\operatorname{tang} \frac{2n\pi}{T} \gamma_n' = -p \frac{T}{2n\pi}.$$

Se come sopra, sostituiamo a p il suo valore (2), e poniamo

$$C_n = (a\,M + b)\,\frac{2\,n\,\pi}{T},$$

le espressioni di $I_n'^2$ e di tang $\frac{2\,n\,\pi}{T}\,\gamma_n'$ si trasformano nelle seguenti:

$$I_n'^2 = E_n^2\,\frac{C_n^2}{r^2\,r'^2 + (r+r')^2\,C_n^2}, \tag{13}$$

$$\text{tang}\,\frac{2\,n\,\pi}{T}\,\gamma_n' = -\,\frac{r\,r'}{r+r'}\,\frac{1}{C_n}. \tag{14}$$

Portando finalmente il valore (6) di y nella terza delle formole (4) otteniamo

$$m = \frac{M\,p}{r}\sum Y_n\,\text{sen}\,\frac{2\,n\,\pi}{T}\,(t + \alpha_n - \beta_n),$$

e possiamo mettere questa espressione sotto la forma

$$m = \sum G_n\,\text{sen}\,\frac{2\,n\,\pi}{T}\,(t + \alpha_n - \beta_n),$$

ponendo semplicemente

$$G_n^2 = \left(\frac{M\,p}{r}\,Y_n\right)^2 = \frac{M^2\,p^2}{r^2}\,\frac{E_n^2}{p^2 + \frac{4\,n^2\,\pi^2}{T^2}},$$

e ritenendo per β_n il valore (7), ossia

$$\text{tang}\,\frac{2\,n\,\pi}{T}\,\beta_n = \frac{2\,n\,\pi}{p\,T}.$$

Se in questi valori di G_n^2 e di tang $\frac{2\,n\,\pi}{T}\,\beta_n$ sostituiamo a p il suo valore (2) e se facciamo uso del simbolo C_n il cui significato è dato dalla (9), abbiamo

$$G_n^2 = E_n^2\,\frac{M^2\,r'^2}{r^2\,r'^2 + (r+r')^2\,C_n^2}, \tag{15}$$

$$\text{tang}\,\frac{2\,n\,\pi}{T}\,\beta_n = \frac{r+r'}{r\,r'}\,C_n. \tag{16}$$

Così noi abbiamo nelle formole (10), (11), (13), (14), (15) e (16), espresse in funzione del tempo t, tutte le grandezze che occorre considerare per fare un esame completo dei fenomeni che si verificano quando il generatore secondario funziona. È utile che prima di servirci di queste formole pel calcolo dei potenziali e dei lavori, noi le discutiamo brevemente e vediamo con esse come variino le intensità e le fasi delle due correnti e del magnetismo del nucleo, quando si fanno variare le condizioni dell' apparecchio.

Una prima osservazione importante offrono le formole precedenti, ed è che i valori delle intensità i ed i' delle due correnti primaria e secondaria e della intensità m della magnetizzazione del nucleo sono sempre espressi da somme trigonometriche, i cui termini sono in numero uguale e corrispondono a quelli della somma trigonometrica esprimente il valore della forza elettromotrice periodica ε della macchina dinamoelettrica. Se la serie trigonometrica con cui si esprime il valore di ε non contiene tutti i termini corrispondenti a tutti i valori possibili di n, ma contiene soltanto i termini corrispondenti a determinati valori n_1, n_2, ecc...., di n, anche le serie trigonometriche esprimenti i valori di i, di i' e di m contengono soltanto i termini corrispondenti ad n_1, n_2, ecc.... Se la serie che dà ε si riducesse al suo primo termine, se cioè la forza elettromotrice della macchina dinamoelettrica fosse espressa dalla formola

$$\varepsilon = E \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t+\alpha)\,,$$

anche le funzioni i, i' ed m sarebbero esprimibili con un solo termine, sarebbero cioè della forma

$$i = I \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t+\alpha-\gamma)\,, \qquad i' = I' \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t+\alpha-\gamma')\,,$$

$$m = G \operatorname{sen} \frac{2\gamma}{T}(t+\alpha-\beta)\,.$$

I valori massimi I_n, I_n', G_n di uno dei termini delle espressioni di i, i', m, sono proporzionali al valore massimo E_n del termine corrispondente dell' espressione di ε ed a semplici funzioni delle resistenze. Rispetto poi al termine di ε quelli corrispondenti di i, i', m presentano un ritardo, ossia una differenza di *fase* γ, γ', β, funzione esso pure delle resistenze. Ci faremo un' idea chiara della cosa, idea di cui avremo bisogno per interpretare esattamente i risultati delle esperienze, esaminando come variino I_n, γ_n, I_n', γ_n', G_n, β_n, quando, rimanendo costanti tutte le altre grandezze, si faccia variare da zero fino all' infinito il valore della resistenza r' del circuito secondario.

Supponiamo dapprima che r' sia nullo, supponiamo cioè che la resistenza propria della spirale secondaria sia trascurabile, e che i due capi della medesima sieno direttamente congiunti insieme per mezzo di un conduttore di resistenza anch' essa trascurabile.

Per $r' = 0$ la (10) dà

$$I_n = \frac{E_n}{r},$$

e la (11) dà

$$\gamma_n = 0;$$

quindi la (8):

$$i = \frac{1}{r} \sum E_n \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t + \alpha_n),$$

ossia

$$i = \frac{\varepsilon}{r}:$$

l' intensità e la fase della corrente primaria sono allora quelle che si avrebbero se il generatore secondario non esistesse.

La (13) dà per $r' = 0$:

$$I_n' = \frac{E_n}{r} = I_n;$$

la (14) poi dà

$$\operatorname{tang} \frac{2n\pi}{T} \gamma_n' = 0,$$

e siccome dalla (12) si ricava

$$\cos \frac{2n\pi}{T} \gamma_n' = -1, \tag{17}$$

così si ha

$$\frac{2n\pi}{T} \gamma_n = \pi,$$

ossia

$$\gamma_n' = \frac{T}{2\,n}\,.$$

Si ha adunque

$$i' = \sum I_n \operatorname{sen}\left[\frac{2\,n\,\pi}{T}\,(t + \alpha) - \pi\right]$$

$$= - \sum I_n \operatorname{sen} \frac{2\,n\,\pi}{T}\,(t + \alpha)\,,$$

ossia

$$i' = - i\,;$$

il che vuol dire che *la corrente secondaria è in ogni istante uguale ed opposta alla corrente primaria.*

Essendo

$$i + i' = 0\,,$$

è anche

$$m = M\,(i + i') = 0\,;$$

dunque nel caso di $r' = 0$, del quale ci occupiamo, *la magnetizzazione del nucleo di ferro è nulla.*

Questo ci dice pure la (15), la quale per $r' = 0$ dà

$$G_n = 0\,.$$

La (16) dà per $r' = 0$:

$$\operatorname{tang} \frac{2\,n\,\pi}{T}\,\beta_n = \infty\,,$$

e quindi

$$\frac{2\,n\,\pi}{T}\,\beta_n = \frac{\pi}{2}\,, \qquad \beta_n = \frac{T}{4\,n}\,;$$

il che vuol dire che se si fa diminuire la resistenza r' del circuito secondario fino a zero, la differenza di fase tra la magnetizzazione del nucleo e la corrente primaria tende verso ad un valore uguale ad un quarto della durata del periodo. Al limite la magnetizzazione è espressa dalla formola

$$m = \sum G_m \operatorname{sen}\left[\frac{2\,n\,\pi}{T}\,(t + \alpha) - \frac{\pi}{2}\right]$$

ossia

$$m = -\sum G_m \cos \frac{2n\pi}{T}(t+\alpha).$$

Se invece delle fasi γ, γ', β si considerano gli angoli $\frac{2n\pi}{T}\gamma$, $\frac{2n\pi}{T}\gamma'$, $\frac{2n\pi}{T}\beta$ corrispondenti, si può dire concisamente, che i ed i' sono a 180° l'una dall'altra, ed m è a 90° da entrambe.

Supponiamo adesso che la resistenza r' del circuito secondario abbia un valore finito diverso da zero.

In questo caso la (10), che si può scrivere

$$I_n^2 = \frac{E_n^2}{r^2} \frac{\left(\frac{C_n}{r'}\right)^2 + 1}{\left(\frac{r+r'}{r}\right)^2 \left(\frac{C_n}{r'}\right)^2 + 1},$$

dimostra che I_n è minore di $\frac{E_n}{r}$ e diminuisce di mano in mano che r' cresce.

E intanto la (11), che si può scrivere

$$\tang \frac{2n\pi}{T}\gamma_n = \frac{C_n}{r + \frac{r+r'}{r'^2} C_n^2},$$

fa vedere che l'aumento di fase γ_n, che per $r'=0$ era nullo, assume un valore diverso da zero, il quale va aumentando di mano in mano che si fa crescere il valore di r'. Adunque la corrente primaria assume una intensità minore di quella che si avrebbe se il generatore secondario non esistesse od avesse una resistenza nulla nel circuito secondario, ed intanto essa subisce un ritardo γ rispetto alla forza elettromotrice della macchina dinamoelettrica, ritardo, che, nullo per $r'=0$, va aumentando di mano in mano che cresce r'.

La (13) fa vedere che per r' diverso da zero anche I_n' è minore di $\frac{E}{r}$ e che anzi è minore di I_n, e che diminuisce più rapidamente di I_n quando si fa crescere la resistenza r'. La (14) intanto dimostra che $\tang \frac{2n\pi}{T}\gamma_n'$ è sempre negativa, e che il valore numerico della medesima cresce fino all'infinito col crescere di r'. E siccome noi sappiamo per la (12) che il coseno di $\frac{2n\pi}{T}\gamma_n'$ è sempre negativo, così vediamo che l'angolo $\frac{2n\pi}{T}\gamma_n'$, che per $r'=0$ era uguale a π, va diminuendo di mano in mano che si fa crescere la resistenza r'.

L'intensità della magnetizzazione del nucleo di ferro, della quale il valor massimo è espresso dalla (15), ossia dalla

$$G_n^2 = E_n^2 \frac{M^2}{r^2 + \left(\frac{r+r'}{r'}\right)^2 C_n^2},$$

prende per r' diverso da zero, un valore diverso da zero, il quale aumenta mentre cresce r'.

La sua fase data dalla (16), intanto, diminuisce.

Supponiamo finalmente che la resistenza r' del circuito secondario sia infinita, o, ciò che val lo stesso, supponiamo che il circuito secondario sia rotto.

Allora il valore (10) di I_n^2 si riduce a

$$I_n^2 = \frac{E_n^2}{r^2 + C_n^2},$$

ed è questo il minimo corrispondente al dato valore di E_n. La (11), che dà la fase della corrente primaria, si riduce intanto a

$$\tang \frac{2n\pi}{T}\gamma_n = \frac{C_n}{r},$$

ed il valore di γ_n dato da questa formola è il massimo che si possa avere per dati valori di T e di r.

Le (13) e (14) dànno per $r'=\infty$:

$$I_n'^2 = 0,$$

e

$$\tang \frac{2n\pi}{T}\gamma_n' = -\frac{r}{C_n} = -\frac{1}{\tang \frac{2n\pi}{T}\gamma_n};$$

quindi l'intensità della corrente secondaria si riduce, come era evidente, a zero, ed *al limite, quando la resistenza r' sta per diventare infinita, l'angolo*

$$\frac{2n\pi}{T}(\gamma_n' - \gamma_n),$$

è retto, ossia si ha $\gamma_n' - \gamma_n = \frac{T}{4\,n}$.

Finalmente le (15) e (16) dànno per $r' = \infty$:

$$G_n^2 = E_n^2 \frac{M^2}{r^2 + C_n^2} = M^2 I_n^2,$$

e

$$\operatorname{tang} \frac{2\,n\,\pi}{T} \beta_n = \frac{C_n}{r} = \operatorname{tang} \frac{2\,n\,\pi}{T} \gamma_n .$$

Quindi

$$G_n = M I_n \quad \text{e} \quad \beta_n = \gamma_n .$$

Si ha per conseguenza

$$m = M \sum I_n \operatorname{sen} \frac{2\,n\,\pi}{T} (t + \alpha_n - \gamma_n) = M i,$$

come era naturale prevedere sapendo che per $r' = \infty$ la magnetizzazione è prodotta unicamente dalla corrente primaria.

Il valore

$$G_n^2 = E_n^2 \frac{M^2}{r^2 + C_n^2},$$

che si ha per $r' = \infty$ corrisponde alla massima intensità di magnetizzazione che si possa avere nel nucleo coi dati valori di E_n, di r e di T.

Così abbiamo un'idea generale del modo di variare delle due correnti i ed i' e della intensità m della magnetizzazione del nucleo. Ma alcune relazioni semplici fra i valori massimi e le fasi dei termini corrispondenti di tali funzioni possiamo dedurre dai valori (10) ed (11), (13) e (14), (15) e (16).

In primo luogo le (10) e (13), divise l'una per l'altra membro a membro, dànno:

$$\frac{I_n^2}{I_n'^2} = 1 + \frac{r'^2}{C_n^2} . \tag{18}$$

Questa formola dimostra che, come già risultò dalla discussione precedente, I_n' è sempre minore di I_n, ma va avvicinandosi al valore limite I_n quando si fa diminuire fino a zero la resistenza r' del circuito secondario.

Essa è inoltre importante perchè, collegando con una relazione molto semplice grandezze facilmente misurabili, riesce, come vedremo, utilissima nelle verificazioni sperimentali.

Le medesime uguaglianze (10) e (13), sottratte membro a membro l'una dall'altra, dànno:

$$I_n^2 - I_n'^2 = E_n^2 \frac{r'^2}{r^2 r'^2 + (r + r')^2 C_n^2};$$

o, se si confronta tale valore con quello di G_n dato dalla (15):

$$I_n^2 - I_n'^2 = \frac{G_n^2}{M^2},$$

ossia

$$G_n^2 = M^2 (I_n^2 - I_n'^2). \tag{19}$$

In secondo luogo dalle (11) e (14) si ricava

$$\text{tang} \frac{2n\pi}{T} (\gamma_n' - \gamma_n) = -\frac{r'}{C_n}; \tag{20}$$

oppure anche, avuto riguardo alla (18):

$$\text{tang}^2 \frac{2n\pi}{T} (\gamma_n' - \gamma_n) = \frac{I_n^2}{I_n'^2} - 1.$$

La $\text{tang} \frac{2n\pi}{T} (\gamma_n' - \gamma_n)$ è sempre negativa, e ciò dimostra, quello che già risultò dalla discussione precedente, che $\frac{2n\pi}{T} (\gamma_n' - \gamma_n)$ è sempre compreso fra $\frac{\pi}{2}$ e π. Variando r' da 0 a ∞, la tangente di $\frac{2n\pi}{T} (\gamma_n' - \gamma_n)$ varia da zero a $-\infty$, ossia l'angolo decresce da π a $\frac{\pi}{2}$.

Se finalmente si confrontano le formole (14) e (16), si vede che

$$\text{tang} \frac{2n\pi}{T} \beta_n = -\frac{1}{\text{tang} \frac{2n\pi}{T} \gamma_n'};$$

e da ciò si deduce che *l'angolo* $\frac{2n\pi}{T} (\gamma_n' - \beta_n)$ *è sempre retto, ossia che, qualunque sia la resistenza* r', *si ha sempre*

$$\gamma_n' - \beta_n = \frac{T}{4n}.$$

§ 3.° Differenza di potenziali tra le estremità delle spirali. — Conoscendo i valori delle intensità ι ed ι' delle correnti primaria e secondaria, possiamo trovare facilmente anche la differenza dei potenziali, funzioni periodiche del tempo, che si verificano sui morsetti terminali delle due spirali.

Spirale primaria. — Cominciando dalla spirale primaria, diciamo ρ la resistenza di essa e rappresentiamo con v la differenza di potenziali fra le sue estremità. Possiamo avere una equazione, da cui si possa ricavare v, scrivendo che nella resistenza $r - \rho$ la corrente di intensità i è prodotta dalla forza elettromotrice $\varepsilon - v$. Abbiamo infatti così:

$$\varepsilon - v = (r - \rho)\, i,$$

e ne ricaviamo

$$v = \varepsilon - (r - \rho)\, i.$$

Ponendo in questa uguaglianza in luogo di ε e di i i loro valori

$$\varepsilon = \sum E_n \operatorname{sen} \frac{2 n \pi}{T} (t + \alpha_n),$$

$$i = \sum I_n \operatorname{sen} \frac{2 n \pi}{T} (t + \alpha_n - \gamma_n),$$

si vede subito che si può scrivere

$$v = \sum V_n \operatorname{sen} \frac{2 n \pi}{T} (t + \alpha_n - \varphi_n), \tag{22}$$

purchè si pongano le condizioni

$$V_n \cos \frac{2 n \pi}{T} \varphi_n = E_n - (r - \rho) I_n \cos \frac{2 n \pi}{T} \gamma_n ,$$

$$V_n \operatorname{sen} \frac{2 n \pi}{T} \varphi_n = -(r - \rho) I_n \operatorname{sen} \frac{2 n \pi}{T} \gamma_n . \tag{23}$$

Da queste equazioni di condizione si deduce

$$V_n^2 = E_n^2 + (r - \rho)^2 I_n^2 - 2 E_n I_n (r - \rho) \cos \frac{2 n \pi}{T} \gamma_n ,$$

e

$$\operatorname{tang} \frac{2 n \pi}{T} \varphi_n = - \frac{(r - \rho) I_n \operatorname{sen} \frac{2 n \pi}{T} \gamma_n}{E_n - (r - \rho) I_n \cos \frac{2 n \pi}{T} \gamma_n}$$

e se in tali espressioni si sostituiscono ad I_n, a $\cos\frac{2n\pi}{T}\gamma_n$ ed a $\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{T}\gamma_n$ i loro valori ricavati dalle formole (10) ed (11) si ottengono, fatte alcune trasformazioni e riduzioni, le formole seguenti:

$$V_n^2 = E_n^2 \frac{\rho^2 r'^2 + (\rho + r')^2 C_n^2}{r^2 r'^2 + (r + r')^2 C_n^2}, \tag{24}$$

$$\operatorname{tang}\frac{2n\pi}{T}\varphi_n = -\frac{r'^2 (r - \rho) C}{\rho r r'^2 + (r' + r)(r' + \rho) C^2}. \tag{25}$$

Siccome il valore di $\operatorname{tang}\frac{2n\pi}{T}\varphi_n$ dato dalla (25) è sempre negativo, e siccome d'altra parte la (23) dà sempre pel seno di $\frac{2n\pi}{T}\varphi_n$ un valore negativo, così si vede che l'angolo $\frac{2n\pi}{T}\varphi_n$ è sempre compreso nel quarto quadrante, ossia che il tempo φ_n rappresenta un *ritardo* compreso fra $\frac{3}{4}\frac{T}{n}$ e $\frac{T}{n}$, o più semplicemente una *precessione* od una *anticipazione* minore di $\frac{T}{4n}$.

Per $r' = 0$ la (24) dà

$$V_n = E_n \frac{\rho}{r};$$

e la (25) dà:

$$\operatorname{tang}\frac{2n\pi}{T}\varphi_n = 0, \quad \varphi_n = 0.$$

Quindi si ha

$$v = \frac{\rho}{r}\sum E_n \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{T}(t + \alpha) = \frac{\rho}{r}\varepsilon.$$

Adunque nel caso di $r' = 0$, quando cioè la resistenza del circuito secondario è nulla, la differenza dei potenziali fra i due morsetti terminali della spirale primaria è semplicemente quella dovuta alla resistenza della spirale primaria. La sua fase è quella della corrente primaria i, che in questo caso è quella stessa che si avrebbe se non esistesse il generatore secondario.

Quando r' è diverso da zero, la (24), che si può scrivere

$$V_n^2 = E_n^2 \frac{\rho^2}{r^2} \frac{r'^2 + \left(1 + \frac{r'}{\rho}\right)^2 C_n^2}{r'^2 + \left(1 + \frac{r'}{r}\right)^2 C_n^2}$$

dà evidentemente per V_n un valore maggiore di $E_n \frac{\rho}{r}$, poichè è $r > \rho$.

Quindi si ha anche

$$\frac{1}{T}\int_0^T v\,dt > \frac{1}{T}\frac{\rho}{r}\int_0^T \varepsilon\,dt,$$

ossia la media differenza di potenziali fra i due morsetti della spirale primaria è maggiore di quella dovuta alla semplice resistenza di questa. La (25) poi, la quale si può anche scrivere

$$\operatorname{tang} \frac{2n\pi}{T} \varphi_n = - \frac{(r - \rho)\, C_n}{r\rho + \frac{r + r'}{r'} \frac{r' + \rho}{r'} C_n^2},$$

dà per l'*anticipazione* $-\varphi_n$ un valore diverso da zero, il quale va aumentando di mano in mano che aumenta la resistenza r'.

Quando finalmente r' è infinitamente grande, vale a dire quando il circuito secondario è aperto, V_n prende il massimo valore che esso possa avere ed è dato dalla

$$V_n^2 = E_n^2 \frac{\rho^2 + C_n^2}{r^2 + C_n^2}. \tag{26}$$

La (25) poi dà per $r' = \infty$:

$$\operatorname{tang} \frac{2n\pi}{T} \varphi_n = - \frac{(r - \rho)\, C}{r\rho + C^2};$$

e se, come è nella pratica, ρ è molto piccola a fronte di r e di C, questo valore si riduce prossimamente a

$$\operatorname{tang} \frac{2n\pi}{T} \varphi_n = - \frac{r}{C}.$$

Se si confronta questo valore limite di $\tang \frac{2n\pi}{T}\gamma_n$ col valore di $\tang \frac{2n\pi}{T}\gamma_n$ dato dalla (11) pel caso di $r' = \infty$, valore che è

$$\tang \frac{2n\pi}{T}\gamma_n = \frac{C_n}{r},$$

si vede che per $r' = \infty$ e per $\rho = 0$ si ha

$$\tang \frac{2n\pi}{T}\varphi_n = -\frac{1}{\tang \frac{2n\pi}{T}\gamma_n},$$

il che vuol dire che l'*angolo*

$$\frac{2n\pi}{T}(\gamma_n - \varphi_n),$$

è allora uguale a $\frac{\pi}{2}$, *ossia che la differenza di fase tra la corrente primaria e la differenza di potenziali ai due morsetti della spirale primaria è allora uguale ad un quarto della durata del periodo.*

Questo, che sarebbe assolutamente esatto se fosse possibile avere una spirale primaria di resistenza ρ uguale a zero, è vero per approssimazione nel caso pratico degli apparecchi del Gaulard, nei quali la resistenza ρ è sempre molto piccola.

Questa osservazione è importante, e su di essa dovremo ritornare quando ci occuperemo del lavoro assorbito dal generatore secondario e quando esamineremo i metodi sperimentali per la determinazione del rendimento e della efficacia dell' apparecchio.

Intanto possiamo servirci della osservazione fatta, per scrivere subito, pel caso di $r' = \infty$ e di $\rho = 0$, il valore di v.

Portando infatti nella (22) in luogo di V_n il valore (26), e facendo

$$\rho = 0 \quad \text{e} \quad \frac{2n\pi}{T}\varphi_n = \frac{2n\pi}{T}\gamma_n - \frac{\pi}{2},$$

abbiamo

$$v = \sum E_n \frac{C_n}{\sqrt{r^2 + C_n^2}} \cos \frac{2n\pi}{T}(t + \tau_n - \gamma_n);$$

ossia, notando che per $r' = \infty$ si ha $I_n = \dfrac{E_n}{\sqrt{r^2 + C_n^2}}$:

$$v = \sum I_n \, C_n \cos \frac{2 n \pi}{T} (t + \alpha_n - \gamma_n) ;$$

ossia ancora, ricordando che $C_n = (a\, M + b) \dfrac{2 n \pi}{T}$:

$$v = (a\, M + b) \sum I_n \frac{2 n \pi}{T} \cos \frac{2 n \pi}{T} (t + \alpha_n - \gamma_n) ,$$

ossia finalmente:

$$v = (a\, M + b) \frac{d\, i}{d\, t} .$$

In alcuni dei procedimenti sperimentali, per mezzo dei quali si è cercato di determinare il rendimento pratico dei generatori secondari, si cerca di determinare la resistenza di un conduttore esente da selfinduzione, il quale sostituito nel circuito primario al posto del generatore secondario produce sulle proprie estremità, per una medesima intensità media della corrente, una media differenza di potenziali uguale a quella che si ha sui due morsetti terminali della spirale primaria del generatore secondario. E siccome le determinazioni sperimentali si fanno o con elettrometri adoperati alla maniera del Joubert, o con elettrodinamometri, o con calorimetri, così le medie intensità e le medie differenze di potenziali di cui si intende allora di parlare sono le radici quadrate delle medie dei quadrati.

È importante per noi di determinare la resistenza del filo su nominato, o, come suol dirsi impropriamente dai pratici, la resistenza equivalente al generatore secondario.

Ora una tale determinazione si può fare facilissimamente se si ammette che la forza elettromotrice ε della macchina dinamo-elettrica si possa esprimere con un solo termine della serie trigonometrica, cioè con

$$\varepsilon = E \operatorname{sen} \frac{2 \pi}{T} (t + \alpha).$$

Questa supposizione è dimostrata praticamente ammessibile dalle esperienze del Joubert, e sarà del resto giustificata a posteriori dal confronto dell'esperienza coi risultati della teoria. Noi abbiamo dimostrato che in questo caso tutte le altre grandezze periodiche sono rappresentabili in modo analogo, e che quindi si può scrivere

$$i = I \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t + \alpha - \varphi),$$

$$v = V \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t + \alpha - \varphi),$$

I quadrati dei valori medi di i e di v quali sono dati dagli strumenti di misura sono allora i seguenti:

$$\frac{1}{T}\int_0^T I^2 \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{T}(t + \alpha - \varphi)\, dt = \frac{I^2}{2},$$

e

$$\frac{1}{T}\int_0^T V^2 \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{T}(t + \alpha - \varphi)\, dt = \frac{V^2}{2}.$$

Quindi la condizione a cui deve soddisfare la resistenza r_1 che noi cerchiamo si riduce alla seguente:

$$r_1 I = V$$

ossia alla

$$r_1^2 = \frac{V^2}{I^2}.$$

Ora se in questa espressione della resistenza r_1 sostituiamo a V^2 e ad I^2 i valori dati dalle formole (24) e (10) otteniamo subito

$$r_1^2 = \frac{\rho^2 r'^2 + (\rho + r')^2 C^2}{r'^2 + C^2}, \tag{27}$$

od anche

$$r_1^2 = \rho^2 + \frac{2\rho + r'}{r'^2 + C^2} r' C^2; \tag{27}$$

ove con C si è rappresentato il valore di C_n per $n = 1$, ossia per l'unico termine esistente della serie trigonometrica.

Vedesi che r_1^2 ha il valore ρ^2 per $r' = 0$, come dovevamo aspettarci avendo già veduto che per $r' = 0$ il generatore secondario non ha alcun effetto sul circuito della corrente primaria su cui è inserto. Per valori crescenti della resistenza r' del circuito secondario, r_1^2 cresce e prende il valore massimo

$$r_1^2 = \rho^2 + C^2, \tag{28}$$

quando è $r' = \infty$, ossia quando il circuito secondario è aperto.

La (28) dà

$$C^2 = r_1^2 - \rho^2; \tag{28'}$$

essa permette adunque di determinare sperimentalmente la costante C per mezzo di una semplice misura di resistenza.

Dalla 27') si ricava

$$1 + \frac{r'^2}{C^2} = \frac{r'(r' + 2\rho)}{r_1^2 - \rho^2},$$

e quindi, in grazia della (18):

$$\left(\frac{I}{I'}\right)^2 = \frac{r'(r' + 2\rho)}{r_1^2 - \rho^2}. \tag{27''}$$

Questa relazione, che permette di calcolare il rapporto delle intensità medie delle due correnti per mezzo delle sole resistenze r' ed r_1, è notevolissima. Essa ci tornerà utile nel calcolo delle esperienze di cui parleremo nella seconda parte della presente Memoria.

Spirale secondaria. Il valore v' della differenza di potenziali fra i morsetti terminali della spirale secondaria si determina facilmente per mezzo del valore che conosciamo di i'. Siccome infatti non si hanno sul circuito secondario altre forze elettromotrici che quella che si produce nell'interno dell'apparecchio, così, se diciamo ρ' la resistenza della spirale secondaria e se, per fare come abbiamo fatto per la spirale primaria, consideriamo come positiva la differenza v' di potenziali quando il potenziale maggiore si ha sul morsetto corrispondente a quello per cui entra la i quando è positiva, possiamo scrivere:

$$v' = -(r' - \rho')\, i'.$$

Quindi

$$v' = -(r' - \rho') \sum I_n' \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{T}(t + \gamma_n - \gamma_n');$$

e possiamo scrivere

$$v' = \sum V_n' \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{T}(t + \alpha_n - \varphi_n'), \tag{29}$$

alla condizione di porre

$$V_n' = (r' - \rho') I_n' \quad \text{e} \quad \varphi_n' = \gamma_n' - \frac{T}{2n}.$$

Ricordando i valori (13) e (14) di I_n' e di γ_n', abbiamo adunque:

$$V_n'^2 = E_n^2 \frac{(r' - \rho')^2 C_n^2}{r^2 r'^2 + (r + r')^2 C_n^2}, \tag{30}$$

$$\operatorname{tang} \frac{2n\pi}{T} \varphi_n' = -\frac{r r'}{r + r'} \frac{1}{C_n}. \tag{31}$$

Il valore di $V_n'^2$ cresce da zero fino al massimo

$$V_n'^2 = E_n^2 \frac{C_n}{r^2 + C_n^2},$$

quando r' cresce da ρ' fino all'infinito; l'angolo $-\frac{2n\pi}{T}\varphi_n'$ intanto, il quale rappresenta una *anticipazione,* cresce in valore assoluto da zero fino al massimo determinato dalla

$$\operatorname{tang} \frac{2n\pi}{T} \varphi_n' = \frac{r}{C_n}.$$

Merita di essere notato che se nei valori (24) e (25) di V_n^2 e di $\operatorname{tang} \frac{2n\pi}{T}\varphi_n$ si fa $\rho = 0$, e se similmente nei valori (30) e (31) relativi alla spirale secondaria si suppone $\rho' = 0$, si ha

$$V_n^2 = E_n^2 \frac{r^2 C_n}{r^2 r'^2 + (r + r')^2 C_n^2},$$

$$\operatorname{tang} \frac{2n\pi}{T} \varphi_n = \frac{r r'}{r + r'} \frac{1}{C},$$

$$V_n'^2 = E_n^2 \frac{r'^2 C_n}{r^2 r'^2 + (r + r')^2 C_n^2},$$

$$\operatorname{tang} \frac{2n\pi}{T} \varphi_n' = -\frac{r r'}{r + r'} \frac{1}{C}.$$

Nel caso adunque che le resistenze interne ρ e ρ' delle due spirali fossero nulle o trascurabili, la differenza di potenziali v' fra i due morsetti terminali della spirale secondaria sarebbe uguale per grandezza e per fase a quella che esiste fra i morsetti terminali della spirale primaria. Nel caso reale della pratica, ove ρ e ρ' non sono nulle ma sono piccole, l' uguaglianza dei valori massimi e medi e delle fasi delle differenze di potenziali v e v' si verifica approssimativamente alla sola condizione che non sieno molto piccole le resistenze r ed r'.

§ 4.° Energia assorbita e restituita dal generatore secondario. — Il calcolo della quantità di energia che bisogna spendere nel circuito primario per far funzionare il generatore secondario, e di quella che l'apparecchio restituisce nel circuito secondario, si può fare facilmente se si suppone che la somma trigonometrica che esprime il valore di ε si riduca ad un solo termine, nel qual caso, come abbiamo dimostrato, accade lo stesso per tutte le altre funzioni periodiche del tempo che si hanno da considerare. Noi ci limiteremo a considerare questo caso, salvo a vedere poi fino a qual punto le esperienze giustifichino l'ipotesi.

Energia assorbita dal generatore secondario. — Diciamo q la media quantità di energia assorbita in ogni unità di tempo dal generatore secondario. Possiamo calcolare il valore di q in vari modi; fra i quali io scelgo il seguente:

Il lavoro assorbito dal generatore secondario è la differenza tra l'energia elettrica prodotta dalla macchina dinamoelettrica e quella che si converte in calore nel circuito primario fuori del generatore secondario. Per un elemento di tempo dt l' energia elettrica prodotta dalla macchina dinamoelettrica è $\varepsilon\, i\, dt$; quella trasformata in calore nel circuito primario, fuori dell'apparecchio Gaulard è invece $(r-\rho)\, i^2\, dt$; abbiamo quindi

$$q = \frac{1}{T}\int_0^T [\varepsilon - (r-\rho)\, i]\, i\, dt.$$

Alla stessa espressione si arriva se si considera che il lavoro speso nel tempuscolo dt nel generatore secondario vale $v\, i\, dt$, e se si ricorda che altrove abbiamo trovato

$$v = \varepsilon - (r-\rho)\, i.$$

Se nella espressione di q si sostituiscono ad ε e ad i i valori

$$\varepsilon = E \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t + \alpha),$$

$$i = I \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t + \alpha - \varphi),$$

si ottiene la

$$q = \frac{E I}{T} \int_0^T \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t + \alpha) \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t + \alpha - \varphi)\, d t -$$

$$- (r - \rho) \frac{I^2}{T} \int_0^T \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{T}(t + \alpha - \varphi)\, d t,$$

dalla quale si deduce subito

$$q = \frac{E I}{2} \cos \frac{2\pi}{T} \varphi - (r - \rho) \frac{I^2}{2}. \tag{32}$$

Possiamo adesso sostituire in q ad I ed a $\cos \frac{2\pi}{T}\varphi$ i loro valori ricavati dalle formole (10) ed (11), e con alcune trasformazioni e riduzioni, che riescono facili se si osserva che

$$(C^2 + r'^2)\,[r^2 r'^2 + (r + r')^2 C^2] = (r r'^2 + (r + r')\, C^2)^2 + r'^4 C^2,$$

si arriva all' espressione

$$q = \frac{E^2}{2} \frac{\rho r'^2 + (r' + \rho)\, C^2}{r^2 r'^2 + (r + r')^2 C^2}. \tag{33}$$

Tale valore si può anche scrivere:

$$q = \frac{r' E^2}{2} \frac{C^2}{r^2 r'^2 + (r + r')^2 C^2} + \frac{\rho E^2}{2} \frac{r'^2 + C^2}{r^2 r'^2 + (r + r')^2 C^2},$$

ossia in grazia delle (10) e (13):

$$q = \frac{1}{2}(I'^2 r' + I^2 \rho). \tag{34}$$

Tale uguaglianza dice che l'energia assorbita dall'apparecchio è uguale alla somma di quella che viene restituita come calore nel circuito secondario e di quella che si converte in calore nella spirale primaria. Noi avremmo potuto scrivere subito questa uguaglianza partendo dal principio della conservazione dell'energia e passare poi da essa alla (33); abbiamo tuttavia voluto seguire l'altra strada, benchè questa fosse meno facile, perchè, come avremo occasione di notare più sotto, tutti quelli che finora fecero misure elettriche sull'apparecchio fecero il calcolo di q per mezzo di v e di i, ma sbagliarono arrivando senza accorgersi a valori incompatibili col principio della conservazione dell' energia.

Le formole (33) e (34) fanno vedere come l'energia assorbita dall' apparecchio varii col variare della resistenza del circuito secondario. Ed una cosa che dobbiamo notare subito è che tanto per $r' = 0$ quanto per $r' = \infty$ le formole dànno

$$q = \frac{I^2}{2}\,\rho\,;$$

ossia dicono che l'apparecchio assorbe in entrambi i casi quella sola quantità di energia che secondo la legge di Joule si trasforma in calore nella spirale primaria.

Energia restituita come calore nel circuito secondario. — La energia restituita dall' apparecchio è rappresentata dal calore svolto nel circuito secondario. Detta q' la media quantità di energia svolta in un' unità di tempo, si ha adunque

$$q' = r' \frac{I'^2}{T} \int_0^T \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{T}(t + \alpha - \gamma')\, dt,$$

ossia

$$q' = \frac{r' I'^2}{2},$$

ossia ancora, ricordando il valore (13) di I'^2:

$$q' = \frac{E^2}{2}\,\frac{r' C^2}{r^2 r'^2 + (r + r')^2 C^2}. \tag{35}$$

Il rapporto tra q', che è la totale quantità di energia svolta nell'intiero circuito secondario, e la quantità q di energia spesa per tenere in funzione il generatore secondario si può denominare il *coefficiente di rendimento totale* dell'apparecchio. Se noi rappresentiamo tale coefficiente colla lettera μ, abbiamo in virtù delle (33) e (35):

$$\mu = \frac{q'}{q} = \frac{r' C^2}{\rho\, r'^2 + (r' + \rho)\, C^2}. \tag{36}$$

Si vede che, essendo ρ piccolo, μ è sempre prossimo all'unità. Per $\rho = 0$ sarebbe esattamente

$$\mu = 1,$$

e ciò è naturale, poichè in tutta la teoria da noi svolta è stata fatta completa astrazione dalle correnti di Foucault, dal consumo di energia dovuto alle alternative di magnetizzazione e di smagnetizzazione del nucleo e dalle perdite dovute alla imperfezione dell'isolamento.

Per $r' = 0$ la (36) dà $\mu = 0$; per $r' = \infty$ essa dà di nuovo $\mu = 0$. Vi ha adunque tra 0 ed ∞ un valore della resistenza r' pel quale il coefficiente di rendimento μ è massimo. Il valore di r' a cui corrisponde tale massimo è dato dall'equazione

$$\frac{d\mu}{dr'} = 0,$$

ed è, come è facile vedere:

$$r' = C. \tag{36'}$$

È degno di nota il fatto che il valore di r', a cui corrisponde il massimo, è indipendente da ρ.

Il valore massimo di μ si ha mettendo nella (36) in luogo di r' il valore C; esso è per conseguenza:

$$\mu_m = \frac{C}{C + 2\rho}. \tag{36'}$$

Dalla quantità totale q' di energia prodotta nel circuito secondario soltanto una parte è utilizzabile per le applicazioni a cui si vuole destinare l'apparecchio, ed è questa quella parte q'' di q' che si svolge nel circuito esterno. Se diciamo ρ' la resistenza della spirale secondaria, abbiamo

$$q'' = \frac{r' - \rho'}{r'} q'.$$

Il rapporto $\frac{q''}{q}$, il rapporto dell'energia utilizzabile nel circuito secondario esterno alla energia spesa nel primario è il *coefficiente di rendimento esterno od utile* dell'apparecchio. Se rappresentiamo con ν tale coefficiente, abbiamo

$$\nu = \frac{(r' - \rho')\, C^2}{\rho r' + (r' + \rho)\, C^2} \tag{37}$$

ν non è $= 1$ se non per $\rho = \rho' = 0$.

Il coefficiente di rendimento esterno ν dato dalla (37) è uguale a zero per $r' = \rho'$, ed è di nuovo uguale a zero per r' infinito. Vi ha tra zero e l'infinito un valore di r' per cui ν è massimo, e tale valore è quello che soddisfa alla equazione

$$\frac{d\nu}{dr'} = 0$$

ossia, come è facile vedere;

$$r' = \rho' + \sqrt{\rho'^2 + \frac{\rho + \rho'}{\rho} C^2}. \tag{37'}$$

Esso dipende, come vedesi, da ρ e da ρ', ed è sempre maggiore di quello che rende massimo μ, e che è dato dalla (36').

Il valore massimo di ν è

$$\nu_m = \frac{C^2 \sqrt{\rho'^2 + \frac{\rho + \rho'}{\rho} C^2}}{2\rho\rho'^2 + 2(\rho + \rho')C^2 + (2\rho\rho' + C^2)\sqrt{\rho'^2 + \frac{\rho + \rho'}{\rho} C^2}}; \tag{37''}$$

e se, avuto riguardo alla piccolezza di ρ e di ρ', si trascurano le frazioni $\frac{\rho^2}{C^2}$, $\frac{\rho'^2}{C^2}$ e $\frac{\rho\rho'}{C^2}$ esso si riduce a

$$\nu_m = \frac{C}{C + 2\sqrt{\rho(\rho + \rho')}}. \tag{37'''}$$

E se si ha $\rho = \rho'$:

$$\nu_m = \frac{C}{C + 2\rho\sqrt{2}}. \tag{37''''}$$

Un fatto che emerge dalle formole precedenti, e che merita di essere avvertito, è che, a parità delle altre circostanze, i coefficienti di rendimento μ e ν sono tanto più grandi quanto più è grande la costante C; e siccome

$$C = (aM + b)\frac{2\pi}{T},$$

così ad ottenere grandi coefficienti di rendimento giova adoperare macchine dinamoelettriche per le quali T sia piccolo, ossia macchine che diano in ogni unità di tempo un grande numero di inversioni di correnti. Il signor Gaulard adopera attualmente macchine che dànno da 260 a 300 inversioni per minuto secondo.

Per giudicare della potenza di un generatore secondario è utile paragonare le quantità di energia q' e q'' svolte nel circuito secondario e nella parte esterna del medesimo colla media intensità $\frac{I}{\sqrt{2}}$ della corrente primaria che si adopera per far funzionare l'apparato.

È perciò interessante trovare i valori delle resistenze

$$\frac{q'}{{}^1/_2\, I^2} \quad \text{e} \quad \frac{q''}{{}^1/_2\, I^2}\,.$$

Ora si ha dalle (10) e (35):

$$\frac{q'}{{}^1/_2\, I^2} = \frac{r'\, C^2}{r'^2 + C^2}\,, \quad \frac{q''}{{}^1/_2\, I^2} = \frac{(r' - \rho)\, C^2}{r'^2 + C^2}\,. \tag{38}$$

I secondi membri di queste uguaglianze sono i valori di quelle resistenze prive di selfinduzione, che se venissero sostituite al generatore secondario trasformerebbero in calore quantità di energia uguali a quelle che colla medesima intensità media della corrente primaria il generatore secondario genera rispettivamente nel totale circondario secondario e nella sua parte esterna.

Se si vuol calcolare l'energia prodotta nel circuito secondario o nella parte esterna di esso quando il generatore secondario è attivato da una corrente di data intensità media, basta moltiplicare pel quadrato di tale intensità rispettivamente l'una o l'altra delle resistenze (38). Le resistenze date dalle formole (38) si potrebbero assai acconciamente denominare *equivalenti al generatore secondario.*

Per ottenere, per mezzo di una corrente primaria di data intensità media, la massima produzione di energia nel totale circuito secondario bisogna rendere massimo $\frac{q'}{{}^1/_2\, I^2}$. Ora la prima delle (38) si può scrivere

$$\frac{q'}{{}^1/_2\, I^2} = \frac{C^2}{r' + \frac{C^2}{r'}}\,;$$

il massimo cercato si ha adunque quando è minimo il denominatore $r' + \frac{C^2}{r'}$, e siccome questo è la somma di due grandezze r' e $\frac{C^2}{r'}$ aventi un prodotto C^2 costante, ed è quindi minimo quando tali due grandezze sono uguali, così il massimo di $\frac{q'}{{}^1\!/_2 I^2}$ si ha quando $r' = \frac{C^2}{r'}$, ossia quando

$$r' = C.$$

Il valore del massimo è $\frac{q'}{{}^1\!/_2 I^2} = \frac{C}{2}$.

La seconda delle (38) dà per $\frac{q''}{{}^1\!/_2 I^2}$ un valore massimo quando r' ha il valore

$$r' = \rho' + \sqrt{\rho'^2 + C^2}.$$

Essendo ρ' molto piccolo a fronte di C, il valore di r' a cui corrisponde il massimo è approssimativamente uguale a

$$C + \rho'.$$

Portando poi questo valore nell'espressione di $\frac{q''}{{}^1\!/_2 I^2}$ si ha un valore approssimativo del massimo. E questo, se si trascura $\frac{\rho'^2}{C}$ è

$$\frac{C^2}{2\,(C + \rho')}.$$

Energia assorbita da un conduttore esente da selfinduzione, che sostituito al generatore secondario produce la medesima media differenza di potenziale. Immaginiamo, come abbiamo già fatto in altra occasione, di togliere dal circuito della corrente primaria il generatore secondario, e di sostituire in sua vece un semplice conduttore privo di selfinduzione e di tale resistenza da produrre fra le sue due estremità, per una medesima intensità media della corrente, una media differenza di potenziali uguale a quella che si aveva fra i due morsetti terminali della spirale primaria dell'apparecchio.

Noi abbiamo già veduto come si possa calcolare la resistenza r_1 di un tale conduttore, e abbiamo a tal uopo dimostrato la formola (27), che qui trascriviamo:

$$r_1{}^2 = \frac{\rho^2 r'^2 + (\rho + r')^2 C^2}{r'^2 + C^2}.$$

Ora è importante conoscere la quantità di energia che si converte in calore nella resistenza r_1, ed il rapporto di essa colla q' che si spendeva, a parità di intensità della corrente, nel generatore secondario.

Diciamo Q la quantità di energia cercata, la quale si svolge, per una corrente di data intensità media $\frac{I}{\sqrt{2}}$, sul conduttore di resistenza r_1; abbiamo

$$Q = r_1 \frac{I^2}{2};$$

e sostituendo ad r_1 e ad I^2 i valori (27) e (10):

$$Q = \frac{E^2}{2} \frac{\sqrt{(r'^2 + C^2)\,[\rho^2 r'^2 + (\rho + r')^2 C^2]}}{r^2 r'^2 + (r + r')^2 C^2}. \tag{39}$$

Ora è facile trasformare tale espressione in quest'altra

$$Q = \frac{E^2}{2} \frac{\sqrt{[\rho r'^2 + (\rho + r') C^2]^2 + r'' C^2}}{r^2 r'^2 + (r + r')^2 C^2},$$

la quale in grazia delle (33), (35) e (36), si può scrivere

$$Q = \sqrt{q^2 + \left(\frac{r'}{C} q'\right)^2}, \tag{40}$$

oppure

$$Q = q \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{C} \mu\right)^2}. \tag{41}$$

Se si rappresenta con m il rapporto tra la quantità di energia q' svolta nel totale circuito secondario e la Q che si spenderebbe nel circuito primario se al generatore secondario fosse sostituito il conduttore di resistenza r_1, se cioè si pone

$$m = \frac{q'}{Q} \tag{42}$$

si ha

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \left(\frac{r'}{C} \mu\right)^2}}. \tag{43}$$

Da questa poi si ricava

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{r'}{C} m\right)^2}}. \qquad (44)$$

Devesi notare che essendosi posto

$$Q = r_1 \frac{I^2}{2},$$

ed essendosi calcolata la resistenza r_1 per mezzo della condizione

$$r_1 I = V,$$

si ha

$$Q = \frac{V}{\sqrt{2}} \frac{I}{\sqrt{2}},$$

ossia Q rappresenta anche il prodotto della media differenza di potenziali fra i due morsetti terminali della spirale primaria per la media intensità della corrente primaria, quando colla parola *media* si intenda la radice quadrata della media dei quadrati, ossia quella media che viene indicata dagli strumenti di misura che si adoperano per le correnti alternative.

Le formole (40) e (41) dànno la relazione che passa tra il detto prodotto di medie che dagli sperimentatori che prima d'ora si occuparono dell' apparecchio Gaulard venne ordinariamente considerato come equivalente alla quantità di energia spesa per tenere in funzione l' apparecchio, e la vera energia consumata dall'apparecchio, che è q. E le formole (43) e (44) dànno la relazione che passa tra il vero coefficiente di rendimento totale μ del generatore secondario ed il rapporto m tra l'energia q' della corrente secondaria ed il prodotto Q, rapporto che finora gli sperimentatori hanno confuso col coefficiente di rendimento μ medesimo.

Su queste relazioni torneremo più sotto quando ci occuperemo delle ricerche sperimentali. Intanto però notiamo le grandi differenze che possono sussistere tra i valori di Q e di q e tra i valori di m e di μ.

Mentre l' energia Q calcolata col prodotto della media differenza di potenziali per la media intensità della corrente, col crescere di r' da zero fino all' infinito cresce continuamente dal valore $\frac{1}{2}\frac{E^2}{r^2}\rho$ fino al valore massimo

$$\frac{E^2}{2}\frac{\sqrt{\rho^2+C^2}}{r^2+C^2},$$

e, come mostra la formola (39), prende questo valore massimo appunto per $r'=\infty$; il vero valore q dell'energia assorbita dal generatore secondario, il quale è espresso dalla (33), col variare di r' da zero all' infinito, comincia a crescere dal minimo

$$\frac{1}{2}\frac{E^2}{r^2}\rho,$$

corrispondente a $r'=0$ fino ad un massimo che esso raggiunge per un valore finito di r' è poi diminuisce di nuovo fino a ridursi per $r'=\infty$, ad

$$\frac{E^2}{2}\frac{\rho}{r^2+C^2},$$

e quindi a quasi zero se ρ, come è nel fatto, è molto piccola.

Mentre nella realtà il lavoro assorbito e trasformato dall' apparecchio è quasi nullo tanto quando il circuito secondario ha una minima resistenza, quanto quando il circuito secondario è aperto, l'energia Q calcolata moltiplicando le medie di v e di i ha il massimo suo valore quando l' apparecchio, avendo il circuito secondario rotto, non produce alcun effetto utile. La causa di questa differenza sta nel fatto che quando la resistenza r' è diversa da zero, esiste tra l' intensità i della corrente primaria e la differenza di potenziali v alle estremità della spirale primaria una differenza di fase $\gamma-\varphi$ che va aumentando fino a circa $\frac{T}{4}$ quando r' cresce da zero fino all'infinito. Ora l'energia assorbita dall' apparecchio vale

$$\frac{VI}{T}\int_0^T \operatorname{sen}\frac{2\pi}{T}(t+\alpha-\gamma)\operatorname{sen}\frac{2\pi}{T}(t+\alpha-\varphi)\,dt,$$

ossia

$$\frac{VI}{2}\cos\frac{2\pi}{T}(\gamma-\varphi),$$

e si riduce a zero quando essendo $\gamma-\varphi=\frac{T}{4}$ è $\frac{2\pi}{T}(\gamma-\varphi)=\frac{\pi}{2}$.

Quando $\gamma - \varphi = \frac{T}{4}$ l'intensità i ha il valore massimo nei momenti in cui la differenza di potenziali v ha il valore zero, e viceversa v è massimo quando i è nullo, e la somma dei lavori $v\, i\, d\, t$ si compone di parti positive e di parti negative di cui la somma algebrica è uguale a zero.

Del resto che l'energia assorbita dal generatore secondario quando questo non produce alcuna corrente secondaria sia massima è una assurdità, perchè ripugna col principio della conservazione dell'energia.

La (43) poi fa vedere che mentre il vero coefficiente di rendimento interno μ ha, come abbiamo veduto, un massimo per $r' = C$, il rapporto m, invece, è massimo per un valore di r' molto più piccolo. Ed è questo il fatto che hanno costantemente trovato gli sperimentatori che confusero m col coefficiente di rendimento.

§ 5.° Caso del generatore secondario colle spirali indotte collegate in circuiti multipli. — Dopo quello che si disse sul caso di un generatore secondario colle spirali secondarie riunite in circuito semplice bastano poche parole per far vedere come si possa trattare anche l'altro caso, nel quale le spirali secondarie sono tra loro collegate in circuito multiplo.

A noi basta considerare il caso in cui le spirali secondarie sono tutte identiche ed ugualmente collocate rispetto ai nuclei. In questo caso le spirali secondarie sono percorse da correnti aventi tutte, in qualunque istante, una medesima intensità ed il loro effetto complessivo sulla spirale primaria e sul nucleo è identico a quello che sarebbe prodotto da un'unica corrente che le percorresse tutte qualora fossero riunite in tensione. Se quindi diciamo i' l'intensità di una delle correnti che si hanno nelle singole spirali secondarie, la prima e la terza delle equazioni differenziali (1) sussistono, come nel caso che abbiamo già trattato, anche nel caso attuale.

Invece la seconda equazione dovrà essere modificata. Se infatti i coefficienti di induzione a e b che figurano nella prima equazione differenziale si riferiscono all'intiero sistema delle spirali, quelli che debbono figurare in loro vece nella seconda equazione si riferiscono soltanto ad una delle singole spirali secondarie. Se si denomina N il numero delle spirali secondarie riunite in circuito multiplo, tali coefficienti debbono essere $\frac{a}{N}$

e $\frac{b}{N}$. Intanto l'intensità totale della corrente secondaria, vale $N i'$, e se si continua a rappresentare con r' la resistenza totale del circuito secondario, la forza elettromotrice necessaria per produrre in questo la corrente $N i'$ è $r' N i'$. Quindi alla seconda delle equazioni differenziali (1) bisogna sostituire quest'altra

$$N^2 r' i' = -a \frac{dm}{dt} - b\left(\frac{di}{dt} + \frac{di'}{dt}\right).$$

Vedesi adunque che la sola modificazione che bisogna introdurre nelle equazioni differenziali fondamentali per passare dal caso già trattato al caso di cui adesso ci occupiamo consiste nel sostituire alla resistenza totale r' del circuito secondario la resistenza più grande $N^2 r'$. Quindi facendo la stessa sostituzione nelle espressioni (10), (11), (13), (14), (15) e (16), si possono avere subito i valori di

$$I_n^2, \text{ tang } \frac{2n\pi}{T}\gamma_n, I_n'^2, \text{ tang } \frac{2n\pi}{T}\gamma_n', G_n^2 \text{ e tang } \frac{2n\pi}{T}\beta_n,$$

valevoli pel caso attuale. L'intensità della corrente secondaria nel circuito unico esterno al generatore secondario si ottiene poi moltiplicando i' per N; detta cioè j' l'intensità della corrente esterna ed J_n il coefficiente del termine n^{imo} della serie trigonometrica che la rappresenta, è

$$j' = N i', \quad J' = N I'.$$

Noi ci limitiamo a registrare qui i valori che si ottengono per I_n^2 ed $J_n'^2$. Essi sono i seguenti:

$$I_n^2 = E_n^2 \frac{C_n^2 + N^4 r'^2}{N^4 r^2 r'^2 + (r + N^2 r')^2 C_n^2},$$

$$J_n'^2 = E_n^2 \frac{N^2 C_n^2}{N^4 r^2 r'^2 + (r + N^2 r')^2 C_n^2}.$$

Se ne deduce

$$\frac{J_n'}{I_n} = \frac{N}{\sqrt{1 + N^4 \frac{r'^2}{C_n^2}}},$$

e quindi

$$\frac{J_n'}{I_n} < N.$$

È adunque inesatto dire che colle spirali secondarie collegate in quantità il generatore secondario moltiplica l'intensità della corrente nel rapporto di uno al numero delle spirali secondarie; tale proposizione si verifica solamente per approssimazione quando è molto grande C e piccolissima la resistenza r' complessiva del circuito secondario.

Dai valori di i, i', j si possono poi ricavare, ripetendo con facili modificazioni le considerazioni svolte nei paragrafi precedenti, tutte le altre grandezze periodiche che si presentano nel funzionamento dell'apparecchio. Fra queste interessano in modo speciale la V_n e la V_n'. La prima è data dalla

$$v = \varepsilon - (r - \rho)\, i,$$

e siccome qui non figura oltre la i altra grandezza che dipenda dai circuiti secondari, così essa si ottiene subito dalla (24) sostituendovi $N^2 r'$ ad r', Si ha così

$$V_n^2 = E_n^2 \frac{N^4 \rho^2 r'^2 + (\rho + N^2 r')^2 C_n^2}{N^4 r^2 r'^2 + (r + N^2 r')^2 C_n^2}.$$

L'altra si deduce dalla

$$-v' = (r' - \rho')\, j',$$

ove ρ' rappresenta la resistenza complessiva delle N spirali collegate in circuito multiplo, ossia la N^{ma} parte della resistenza di una di esse. Da tale relazione si ricava:

$$V_n'^2 = E_n^2 \frac{(r' - \rho')^2 N^2 C_n^2}{N^4 r^2 r'^2 + (r + N^2 r')^2 C_n^2}.$$

Da questi valori di V_n e di V_n' si deduce:

$$\frac{V_n'^2}{V_n^2} = \frac{(r' - \rho')^2 N^2 C_n^2}{N^4 \rho^2 r'^2 + (\rho + N^2 r')^2 C_n^2},$$

formola che per $\rho = \rho' = 0$ dà

$$\frac{V_n'}{V_n} = \frac{1}{N}, \tag{45}$$

essendo in pratica ρ e ρ' piccolissimi, la (45) è sempre approssimativamente verificata; quindi si può dire che effettivamente un generatore secondario colle spirali secondarie collegate in derivazione fa diminuire la caduta di potenziali approssimativamente nel rapporto di N ad 1.