
ROTAZIONI ELETTRODINAMICHE

PRODOTTE

PER MEZZO DI CORRENTI ALTERNATE

(Nota presentata alla R. Accademia delle Scienze di Torino nell'adunanza del 18 marzo 1888. — Vol. XXIII degli Atti.)

1. Sia O (fig. 1) un punto di uno spazio nel quale si sovrappongono i campi magnetici prodotti da due correnti elettriche; le direzioni OX ed OY che hanno i due campi magnetici nel punto O sieno diverse, sieno per esempio perpendicolari l'una all'altra. Se si rappresentano con lunghezze OA ed OB portate su OX ed OY le intensità dei due campi, la diagonale OR del parallelogrammo $OARB$ dà colla propria lunghezza e colla propria direzione l'intensità e la direzione del campo magnetico risultante. Se le intensità dei campi magnetici componenti variano col tempo, il punto R si muove, e percorre una linea, la forma della quale è determinata dalla legge con cui variano OA ed OB ; ma in ogni istante il raggio vettore OR rappresenta colla sua lunghezza e colla sua direzione l'intensità che nello stesso istante il campo magnetico risultante ha nel punto O .

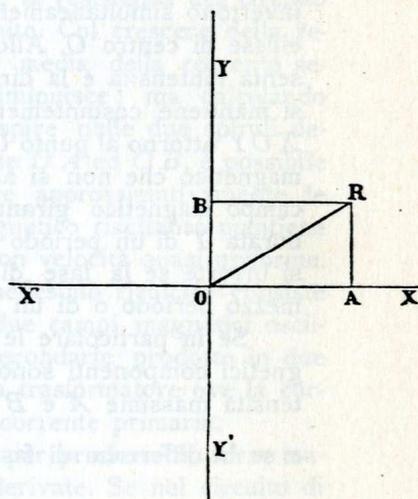


Fig. 1.

Se le due correnti sono alternate e sinusoidali col medesimo periodo, anche le intensità OA ed OB dei due campi magnetici componenti sono tali; se si rappresentano rispettivamente

con x e con y , esse si possono esprimere in funzione del tempo t colle uguaglianze

$$x = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t, \quad y = B \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} (t + \beta),$$

ove si indichino con A e con B i valori massimi di esse, con T la durata del periodo e con $\frac{\beta}{T}$ la differenza di fase fra le due correnti. Eliminando t fra queste due equazioni, si ottiene una relazione fra x ed y , che è l'equazione della linea percorsa dal punto R riferita alle rette OX , OY prese come assi di coordinate.

Quando la differenza di fase tra le due correnti è uguale a zero, oppure corrisponde ad un numero intero di semiperiodi, la linea percorsa dal punto R è una retta passante per O , e su questa retta il punto R percorre spazi proporzionali a quelli percorsi nel medesimo tempo dai punti A e B su OX ed OY . Allora il campo magnetico risultante ha una direzione costante ed una intensità variabile colla legge sinusoidale come i campi magnetici componenti.

In tutti gli altri casi, quando cioè le due correnti non si invertono simultaneamente, la linea percorsa dal punto R è una ellisse di centro O . Allora il raggio vettore OR , che rappresenta l'intensità e la direzione del campo magnetico risultante, si mantiene costantemente diverso da zero, e ruota nel piano XOY attorno al punto O ; in altri termini si ha allora un campo magnetico che non si annulla mai e che gira attorno ad O . Il campo magnetico girante compie la propria rivoluzione nella durata T di un periodo delle correnti. Il senso della rotazione si inverte se la fase di una delle correnti si fa variare di un mezzo periodo o di un numero dispari di mezzi periodi.

Se in particolare le direzioni OX ed OY dei campi magnetici componenti sono perpendicolari l'una all'altra, se le intensità massime A e B dei due campi sono uguali tra di loro, e se la differenza di fase $\frac{\beta}{T}$ è uguale ad $\frac{1}{4}$ si ha

$$x = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} t, \quad y = A \cos \frac{2\pi}{T} t;$$

quindi

$$OR = A \quad \text{ed} \quad \widehat{AOR} = \frac{2\pi}{T} t.$$

Allora la traiettoria del punto R è una circonferenza di raggio A , ed il punto R la percorre colla velocità angolare costante $\frac{2\pi}{T}$;

in altri termini, si ha allora un campo magnetico di intensità costante, il quale gira attorno ad O con velocità uniforme.

Gli effetti sovra descritti si possono produrre per mezzo di una sola corrente alternativa. È infatti sempre possibile, ed in più modi, per mezzo di una corrente alternativa data ottenere le due correnti necessarie per produrre le forze magnetiche componenti OA ed OB , e far variare, fra certi limiti, la differenza di fase fra le medesime. Un modo per fare ciò consiste nel far passare la corrente data nella spirale primaria di un trasformatore. Allora si hanno a disposizione la corrente data e la corrente secondaria da essa prodotta nel trasformatore. Facendo passare le due correnti in due spirali aventi gli assi sulle rette OX ed OY , si può far servire la prima a produrre la forza magnetica OA , e la seconda a produrre la forza magnetica OB . Acciocchè le due correnti presentino la voluta differenza di fase basta inserire una conveniente resistenza nel circuito secondario; la differenza di fase, che così si ottiene, tende verso un quarto di periodo se la resistenza del circuito secondario si fa crescere fino all'infinito. Col crescere della resistenza, il rapporto tra la intensità media della corrente secondaria e quella della primaria diminuisce; ma calcolando convenientemente il numero delle spire nelle due spirali destinate a produrre le forze magnetiche OA ed OB , è possibile far sì che risulti $A=B$, e realizzare approssimativamente le condizioni nelle quali il campo magnetico risultante mantiene una intensità quasi costante e ruota con velocità quasi uniforme.

Un altro modo per ottenere il medesimo risultato consiste nel far servire alla produzione dei due campi magnetici oscillatori componenti le due correnti secondarie prodotte in due trasformatori od in due porzioni d'un trasformatore ove la corrente alternativa data funzioni come corrente primaria.

Si possono finalmente adoperare per produrre le forze magnetiche OA ed OB due correnti derivate. Se nel circuito di una di tali correnti si inseriscono resistenze esenti da induzione propria, e nel circuito dell'altra si inserisce invece una spirale con piccola resistenza e con grande coefficiente di autoinduzione, si può fare sì che mentre le medie intensità delle due correnti sono uguali, oppure hanno tra di loro un rapporto prefisso, le

fasi delle correnti medesime differiscano notevolmente l'una dall'altra.

Dunque per mezzo di una semplice corrente alternativa, operante in spirali immobili, è possibile produrre un campo magnetico rotante ed ottenere con questo tutti gli effetti che si potrebbero ottenere per mezzo della rotazione di una calamita.

Si possono, fra gli altri, riprodurre per mezzo di una semplice corrente alternata i fenomeni di induzione che si hanno quando si fa rotare una calamita in vicinanza di una massa conduttrice; e per tal modo si possono ripetere sotto una forma nuova le antiche esperienze sul magnetismo di rotazione. Se nello spazio ove si sovrappongono i campi magnetici alternativi si ha un corpo conduttore, la rotazione del campo magnetico

risultante produce in tale corpo correnti indotte, che per la legge di Lenz si oppongono alla rotazione del campo magnetico, e sulle quali il campo magnetico reagisce con forze che tendono a trascinare il conduttore nella propria rotazione. Se il conduttore è mobile attorno all'asse O (v. fig. 1.^a) esso si mette in movimento e prende a rotare come farebbe quando esso si trovasse fra i poli di una calamita rotante attorno all'asse O medesimo.

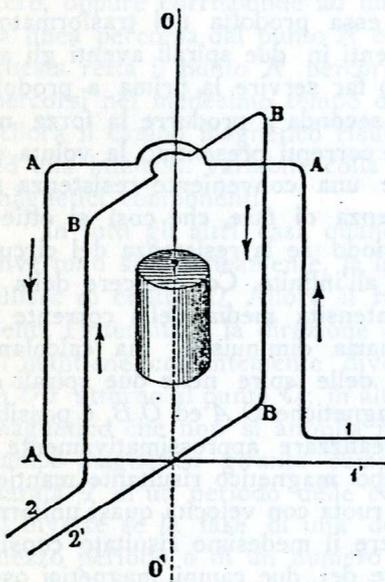


Fig. 2.

2. Descrivo alcuni degli esperimenti coi quali ho verificato ed utilizzato questo fatto.¹

La figura 2 rappresenta schematicamente in prospettiva la disposizione di una prima esperienza. Con $1AAA1'$ e con $2BBB2'$, sono rappresentate due spirali piatte, delle quali la prima è formata con poche spire di grosso filo, e la seconda contiene un numero più grande di spire fatte con un filo più sottile. Per rendere semplice la figura si è rappresentata una sola spira per ciascuna spirale, e si sono indicati in $1, 1'$ ed

¹ Le esperienze, delle quali si fa cenno, furono eseguite nell'autunno del 1885.

in $2, 2'$ i reofori ai quali le due spirali sono collegate. I piani delle spire delle due spirali sono verticali e perpendicolari tra di loro; essi si tagliano secondo la verticale OO' che rappresenta l'asse dell'apparecchio. La spirale $1AAA1'$ di filo grosso è inserita nel circuito primario di un trasformatore di Gaulard e Gibbs; la spirale $2BBB2'$ di filo sottile è inserita nel circuito secondario del trasformatore medesimo. Nello stesso circuito secondario è inserita una resistenza variabile priva di induzione propria, per mezzo della quale si può far variare il rapporto tra le intensità medie della corrente primaria e della secondaria, e con esso la differenza di fase tra le due correnti.

Il trasformatore è disposto per un rapporto di trasformazione uguale ad *uno*, ossia ha un medesimo numero di spire nelle due eliche primaria e secondaria; ma siccome per produrre una grande differenza di fase fra le due correnti conviene inserire nel circuito secondario una resistenza alquanto grande, così l'intensità della corrente secondaria risulta notevolmente minore di quella della primaria. Il maggior numero di spire esistente nella spirale $2BBB2'$ compensa questa differenza. Determinando convenientemente la resistenza inserita nel circuito secondario si può far sì che, pur avendo una notevole differenza di fase, le intensità medie dei campi magnetici prodotti dalle due correnti nel centro comune C delle due spirali siano sensibilmente uguali. Questa condizione si può verificare facilmente per tentativi. Quando essa è verificata, si ha nello spazio compreso nelle due spirali un campo magnetico di intensità approssimativamente costante, il quale gira uniformemente attorno all'asse OO' compiendo un giro intiero per ogni periodo della corrente alternativa. In tale spazio è sospeso un piccolo cilindro C di rame, vuoto e chiuso, sostenuto da un filo O .

Se si fa passare la corrente soltanto in una delle spirali, il cilindretto rimane immobile, ma se si fanno passare le correnti in entrambe le spirali, nel modo suddetto, il piccolo cilindro incomincia subito a rotare attorno al proprio asse, torcendo il filo di sospensione per molte decine di giri. Se per mezzo di un commutatore inserito nel circuito secondario si invertono le congiunzioni delle estremità 2 e $2'$ della spirale BBB coi capi dell'elica secondaria del trasformatore, colla qual cosa si fa variare di un mezzo periodo la fase della corrente in BBB , la rotazione del cilindretto C si inverte. Se l'inversione del commutatore si opera mentre il cilindretto sta girando in un certo

verso, si vede la rotazione rallentarsi rapidamente ed estinguersi quasi subito per ricominciare nel verso opposto.

I medesimi effetti si ottengono se si inseriscono le due spirali *AAA* e *BBB* in due circuiti derivati, uno dei quali contenga una resistenza, ma sia esente da induzione propria, mentre l'altro presenti soltanto una piccola resistenza, ma contenga una spirale con nucleo di ferro e con un notevole coefficiente di induzione propria.

Le esperienze furono ripetute coi medesimi risultati sostituendo al cilindretto di rame un uguale cilindretto di ferro. Se il cilindro adoperato è piccolo ed occupa solamente una piccola parte dello spazio che si ha nell'interno delle spirali, l'esperienza riesce facilmente tanto col ferro quanto col rame. Quando invece si adoperano cilindri grandi riempienti per una grande parte l'interno delle spirali, l'esperienza riesce meno facilmente col ferro che col rame. Ciò in causa dei grandi coefficienti di induzione propria che allora acquistano le spirali. Quando infatti le spirali *AAA* e *BBB* dell'apparecchio presentano grandi coefficienti di induzione, non si può provocare nelle due correnti la differenza di fase di cui si ha bisogno, se non alla condizione di inserire nei circuiti esterni resistenze considerevoli, le quali consumano inutilmente una notevole parte dell'energia di cui si dispone.

In una esperienza ho adoperato un cilindretto di ferro formato con tanti dischi uguali di lastra sottile separati ed isolati per mezzo di dischetti di carta frapposti. In un tale cilindretto non si possono produrre le correnti indotte per mezzo delle quali si spiegano i risultati ottenuti col rame; tuttavia l'esperienza riuscì come prima. In questo caso la rotazione è dovuta al ritardo col quale la magnetizzazione dei dischetti di ferro segue la rotazione del campo magnetico a cui è dovuta.

Le esperienze sovradescritte, ad eseguire le quali bastano apparecchi grossolani ed improvvisati, possono servire nei corsi non solo come modificazione delle antiche e classiche esperienze di Arago e di Babbage ed Herschel, ma soprattutto come mezzo per porre in evidenza l'esistenza delle differenze di fase fra le correnti primaria e secondaria di un trasformatore, o quella delle differenze di fase che si hanno tra le correnti derivate alternative, o quelle che possono esistere fra due correnti alternative qualunque di ugual periodo. È anzi facile disporre le esperienze in modo tale che esse valgano a porre in chiaro il

modo di variare delle differenze di fase col variare delle resistenze dei circuiti e dei coefficienti di induzione esistenti nei medesimi.

Se poi si adopera un leggero cilindretto di rame riempiente quasi completamente l'interno di due moltiplicatori incrociati, portato da una lunga sospensione bifilare e munito di uno specchio per le letture col cannocchiale e colla scala, si può formare uno strumento molto sensibile, atto ad attestare, anche con correnti di debole intensità, piccolissime differenze di fase.

3. Invece di appendere il cilindro conduttore mobile ad un filo o ad una sospensione bifilare, lo si può far portare da un albero metallico appoggiato su cuscinetti; ed allora, dando all'apparecchio maggiori dimensioni, se ne può formare un motore elettrico per correnti alternative. È evidente *a priori*, e

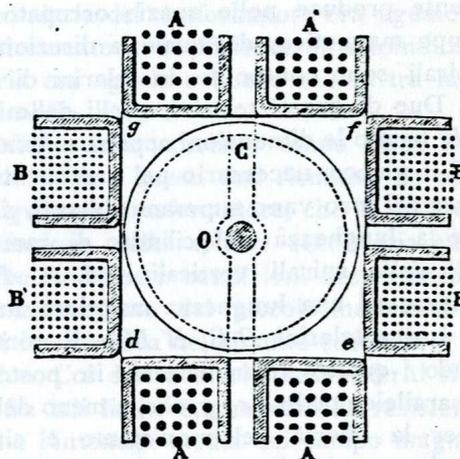


Fig. 3.

risulterà anche dalle considerazioni che farò più sotto, che un motore così fatto non potrebbe avere importanza come mezzo di trasformazione industriale di energia, ma per la sua semplicità e per le sue proprietà esso potrebbe tuttavia servire ad utili applicazioni. Io ho combinato un modello provvisorio di motore, ed ho eseguito su di esso alcuni esperimenti.

La fig. 3 è una sezione del motore fatta con un piano perpendicolare all'asse di rotazione; essa può servire a dare un'idea della disposizione delle parti principali dell'apparecchio.

La parte mobile della macchina consiste in un cilindro di rame C , centrato su di un albero di ferro O , col quale è solidario. Il cilindro di rame è vuoto, ma è chiuso, con fondi pure di rame, alle due estremità; ha il diametro esterno di 8,9 centimetri e la lunghezza di 18 centimetri; pesa 4,9 chilogrammi. L'albero O ha il diametro di un centimetro, è orizzontale e si appoggia sopra due cuscinetti.

La parte fissa della macchina è costituita semplicemente da due coppie di spirali, che nella figura si vedono sezionate in $AA, A'A'$ ed in $BB, B'B'$. Una di queste coppie di spirali, la $AA, A'A'$, è disposta colle sue spire in piani verticali; e quando è percorsa da una corrente produce nel proprio interno, nello spazio ove si trova il cilindro di rame, un campo magnetico di direzione media orizzontale. L'altra coppia, la $BB, B'B'$ invece ha le sue spire in piani orizzontali, e quando è percorsa da una corrente produce nello spazio occupato dal cilindro di rame un campo magnetico, del quale la direzione media è verticale. Le spirali sono contenute in telarini di legno di forma rettangolare. Due di questi telarini, quelli delle spirali orizzontali $BB, B'B'$ hanno le dimensioni appena sufficienti per lasciare al cilindro C il giuoco necessario pel movimento; la larghezza e la lunghezza del loro vano superano soltanto di un centimetro il diametro e la lunghezza del cilindro di rame. Gli altri due telarini, quelli delle spirali verticali $AA, A'A'$ hanno la medesima larghezza ed una lunghezza maggiore, in modo che essi abbracciano i due telarini $BB, B'B'$ e li contengono esattamente. Quando i quattro telarini sono in posto essi chiudono uno spazio parallelepipedo $defg$, che, a meno del piccolo giuoco necessario per la libertà del movimento è circoscritto al cilindro C . La fessura lasciata tra le spirali A ed A' è quella lasciata tra B e B' hanno la larghezza strettamente necessaria per lasciar passare l'albero O .

Le spirali, $AA, A'A'$ sono fatte con filo di rame del diametro di millimetri 1,92; ciascuna di esse contiene 96 spire; esse sono collegate tra di loro in serie in modo da formare una spirale unica di 192 spire; la resistenza totale delle due spirali collegate in serie è di 0,844 ohm.

Le spirali $BB, B'B'$ sono fatte con filo di rame del diametro di 0,97 millimetri, e ciascuna di esse contiene 504 spire. Le due spirali sono collegate in circuiti paralleli, in modo da equivalere ad una spirale unica di 504 spire fatta con filo di

sezione doppia. Le resistenze delle singole spirali sono uguali a 7,12 ohm ed a 6,63 ohm; la resistenza delle due spirali riunite è di 3,43 ohm.

Per mettere in azione il piccolo motore che ho descritto mi servii di un generatore secondario di Gaulard e Gibbs. Inserii le spirali di filo grosso $AA, A'A'$ nel circuito primario e le spirali di filo sottile $BB, B'B'$ nel circuito secondario. Nello stesso circuito secondario era pure inserito un reostato industriale a filo di pakfong, esente da induzione propria, per mezzo del quale si potevano far variare l'intensità e la fase della corrente secondaria. La resistenza alla quale corrispondeva il migliore funzionamento del piccolo motore si poteva così determinare praticamente per tentativi. Tale resistenza dipende naturalmente dai coefficienti di induzione del trasformatore e dalla durata del periodo della corrente adoperata. Nelle mie esperienze la spirale secondaria del trasformatore era uguale alla primaria, e quindi praticamente il coefficiente di autoinduzione della spirale secondaria era uguale a quello mutuo tra la spirale medesima e la primaria.

Le inversioni della corrente erano circa 80 per minuto secondo; ed in base a questi dati risultava da esperienze anteriormente eseguite sul trasformatore, che la resistenza apparente dovuta all'induzione della spirale secondaria su sè stessa era di circa 8 Ohm. In queste condizioni l'esperienza dimostrò che il migliore funzionamento del piccolo motore si aveva quando col reostato si introduceva nel circuito secondario una resistenza di 15 a 18 Ohm. Coi dati numerici sovrariferiti si può calcolare che appunto fra tali limiti è compresa la resistenza necessaria per fare sì che l'intensità media del campo magnetico prodotto dalle spirali $BB, B'B'$ percorse dalla corrente secondaria sia uguale a quella del campo magnetico prodotto dalle spirali $AA, A'A'$ percorse dalla corrente primaria. Si può poi calcolare che coi sovraindicati valori della resistenza inserita nel circuito secondario, la differenza di fase tra la corrente secondaria e la primaria doveva corrispondere a poco meno di un quinto di periodo.

Colle cose disposte nel modo descritto, il cilindro di rame del piccolo motore cominciava a mettersi in movimento spontaneamente quando la corrente nel circuito primario raggiungeva una intensità media di circa 5 ampère. Con correnti di intensità superiore a questo limite il cilindro di rame prendeva una ve-

locità, la quale poteva crescere fino a 900 giri per minuto. Al di là di questo limite l'imperfetto centramento del cilindro sul suo asse dava luogo a scosse troppo violenti per poter continuare l'esperimento.

Nel circuito secondario era inserito un commutatore, col quale si potevano invertire le congiunzioni delle spirali BB , $B'B'$ colle estremità della spirale secondaria del trasformatore. Invertendo le congiunzioni si invertiva il senso della rotazione; operando l'inversione del commutatore mentre il cilindro girava con grande velocità in un verso, lo si vedeva arrestarsi rapidamente, come se fosse stato stretto in un freno, e poi mettersi in rotazione nel verso opposto.

Fu applicato all'albero dell'apparecchio un piccolo freno dinamometrico equilibrato, collegato con una bilancia a sospensione inferiore, il quale servì a dare un'idea dell'ordine di grandezza del lavoro meccanico ottenibile e del modo di variare del medesimo. Qui sotto sono registrati i valori ottenuti. Nella prima colonna sono indicati i numeri di giri per minuto primo che l'albero compieva nelle successive esperienze; nella seconda colonna sono indicati i corrispondenti lavori meccanici misurati col freno ed espressi in watt.

GIRI IN 1'	WATT.	GIRI IN 1'	WATT.
262	1,32	722	2,55
400	2,12	770	2,40
546	2,65	772	2,04
653	2,77	900	0

L'intensità media della corrente primaria era di circa 9 ampère; le inversioni di essa erano 80 per 1'.

Vedesi che il lavoro cresce col crescere della velocità finchè questa non ha raggiunto il valore corrispondente a circa 650 giri al minuto; per tale velocità il lavoro è massimo; per velocità maggiori esso diminuisce con rapidità crescente, finchè per una velocità di 900 giri al minuto il lavoro utilizzabile si riduce a zero. Questa rapida decrescenza del lavoro utilizzabile è dovuta in gran parte all'imperfetto centramento della parte rotante: gli urti dovuti a questa causa danno luogo a perdite

di energia crescenti, al crescere della velocità, con progressione rapidissima. Portando in un disegno come ascisse i numeri di giri per minuto, e come ordinate i valori del lavoro misurato, e congiungendo con una linea i punti così ottenuti, si trova una linea, la quale da principio, e fino al punto corrispondente ad una velocità di circa 500 giri per minuto, si confonde sensibilmente con una retta passante per l'origine, ma in seguito si ripiega verso l'asse delle ascisse, verso il quale discende rapidissimamente. Questa forma della linea giustifica la spiegazione precedente. Senza gli effetti degli urti, dei quali abbiamo parlato, la linea dei lavori ottenuti andrebbe innalzandosi fino al punto corrispondente all'ascissa 1200 circa e discenderebbe poscia regolarmente per incontrare l'asse delle ascisse in vicinanza dell'ascissa 2400, che corrisponde alla velocità di rotazione del campo magnetico.

4. Le relazioni esistenti tra il momento della coppia che fa rotare il tamburo, il lavoro meccanico utilizzabile, l'energia che si trasforma in calore nel cilindro di rame e le velocità di rotazione del campo magnetico e del tamburo si possono stabilire facilmente se si suppone la macchina nelle condizioni ideali migliori, se cioè si suppone che i campi magnetici sinusoidali prodotti dalle due correnti alternative abbiano uguali intensità massime e presentino una differenza di fase corrispondente ad un quarto di periodo.

In questo caso il campo magnetico risultante ha una intensità invariabile e ruota attorno all'asse dell'apparecchio con una velocità angolare uniforme. Noi rappresenteremo questa velocità angolare del campo magnetico colla lettera Ω , e rappresenteremo invece con ω la velocità angolare del tamburo di rame; la velocità angolare del moto relativo del campo magnetico rispetto al tamburo sarà allora $\Omega - \omega$.

Se diciamo M il momento della coppia, colla quale il campo magnetico rotante agisce sulle correnti indotte nel tamburo di rame e tende a trascinare questo nella propria rotazione, possiamo esprimere subito il valore del lavoro meccanico prodotto dal motore e quello della energia che viene trasformata in calore nel tamburo in causa delle correnti in esso indotte. Rappresentando con H il lavoro meccanico prodotto dal motore in una unità di tempo, e intendendo che in esso sia compresa quella parte che è consumata dalle resistenze passive, abbiamo

$$H = M \omega. \quad (1)$$

Rappresentando invece con P l'energia che in ogni unità di tempo si trasforma in calore dentro al tamburo in causa delle correnti che vi sono prodotte per induzione dal campo magnetico rotante, abbiamo:

$$P = M(\Omega - \omega). \quad (2)$$

Quest'ultima relazione si dimostra osservando che l'energia trasformata in calore in causa delle correnti esistenti nel tamburo è uguale a quella che si spende per produrre le correnti medesime, e questa è uguale al lavoro necessario per mantenere il moto relativo, colla velocità $\Omega - \omega$, tra l'indotto ed il campo magnetico induttore.

Dalle formole (1) e (2) si ha per divisione

$$\frac{W}{P} = \frac{\omega}{\Omega - \omega}, \quad (3)$$

od anche

$$\frac{W}{W + P} = \frac{\omega}{\Omega}. \quad (4)$$

L'energia W , che si ottiene come lavoro meccanico o come forza viva, sta alla totale energia $W + P$, che si manifesta in parte come energia meccanica ed in parte come calore, come la velocità di rotazione del cilindro sta alla velocità di rotazione del campo magnetico.

Se, come abbiamo supposto nel calcolo precedente, il campo magnetico ha una intensità costante e gira con velocità uniforme, vi ha nel cilindro conduttore un sistema di correnti indotte, che conserva costantemente la stessa configurazione; questo sistema di correnti si sposta girando attorno all'asse dell'apparecchio, ma i fenomeni che in un elemento di tempo qualunque avvengono in un elemento qualunque del volume del cilindro, in un elemento di tempo successivo si riproducono esattamente in un altro elemento di volume. Il calore svolto dalle correnti nel cilindro è adunque lo stesso che si svolgerebbe se le correnti fossero costanti ed immobili. Ora in ogni elemento di volume la corrente è proporzionale ad $\frac{\Omega - \omega}{\rho}$, ove si rappresenti con ρ la resistenza specifica del metallo; quindi il calore

svolto è proporzionale a $\varphi \left(\frac{\Omega - \omega}{\varphi} \right)^2$, ossia a $\frac{(\Omega - \omega)^2}{\varphi}$. Dicendo adunque k una costante, possiamo porre

$$P = \frac{k}{\varphi} (\Omega - \omega)^2.$$

Portando questo valore nelle formole (1) e (2), otteniamo

$$W = \frac{k}{\varphi} (\Omega - \omega) \omega, \quad (1')$$

ed

$$M = \frac{k}{\varphi} (\Omega - \omega), \quad (2')$$

Data la durata del periodo della corrente alternativa adoperata, Ω ha un valore determinato e costante. Allora la (1') fa vedere che l'energia W , che si manifesta come lavoro meccanico, ha un valore massimo quando

$$\omega = \frac{\Omega}{2},$$

mentre la (2') dà per M un valore massimo quando

$$\omega = 0.$$

Quando l'energia meccanica W è massima, ossia quando è $\omega = \frac{\Omega}{2}$, la (3) dà

$$W = P:$$

l'energia che si manifesta come lavoro meccanico è allora uguale a quella che si manifesta come calore nel cilindro rotante.

5. Queste relazioni ed i risultati delle esperienze riferite più sopra confermano, ciò che era evidente *a priori*, che un apparecchio fondato sul principio di quello da noi studiato non potrebbe avere alcuna importanza industriale come motore; e quantunque sia possibile studiare le dimensioni di esso in modo da aumentarne notevolmente la potenza e migliorarne moltissimo il rendimento, sarebbe inutile entrare qui in alcuna considerazione su tale problema.

Io credo tuttavia che le esperienze che ho descritto possano presentare qualche interesse.

In primo luogo un piccolo apparecchio come il descritto può servire utilmente per esperienze nei corsi. Adoperato a tale uso, esso presenta il vantaggio di funzionare per mezzo di una coppia diretta sempre nel medesimo verso, per modo che anche con le sole forze elettrodinamiche, sempre assai deboli, si possono con esso accumulare in una grande massa, come è quella del cilindro di rame da noi adoperato, notevoli quantità di energia cinetica.

In secondo luogo, e ciò è più importante, un apparecchio analogo al descritto potrebbe servire come misuratore della elettricità somministrata in una distribuzione di energia elettrica fatta con correnti alternative. Bisognerebbe a quest'uopo disporre le cose in modo, che al movimento del tamburo si opponesse una resistenza proporzionale al quadrato della velocità. Siccome il momento della coppia motrice è proporzionale al quadrato della intensità media della corrente, così la velocità di regime dell'apparecchio risulterebbe proporzionale alla intensità media della corrente; ed il numero di giri compiuto dal tamburo in un dato tempo, numero che può essere indicato da un contatore, risulterebbe proporzionale alla quantità di elettricità trasmessa nel tempo medesimo. Naturalmente converrebbe allora disporre verticalmente l'asse dello strumento, onde ridurre al minimo le resistenze passive perturbatrici ed attenuare gli effetti delle imperfezioni del centramento.

6. Come già avevo fatto nelle esperienze col cilindretto sospeso, ho cercato di ripetere gli esperimenti, sostituendo al cilindro di rame un cilindro di ferro di uguali dimensioni e di peso poco diverso. Il risultato fu quasi completamente negativo: riuscii a stento a produrre una lentissima rotazione. La ragione di questo risultato sta nel fatto che col cilindro di ferro le spirali BB , $B'B'$ assumono un grande coefficiente di induzione propria, che rende necessario introdurre nel circuito secondario del trasformatore una grande resistenza onde ottenere la voluta differenza di fase tra le correnti. Ma con questa grande resistenza in circuito la intensità della corrente secondaria riesce piccolissima. Nè la debolezza della corrente si può compensare aumentando il numero delle spire nelle eliche BB , $B'B'$, perchè col numero delle spire cresce il coefficiente di induzione propria delle spirali medesime.

Provai pure, come già avevo fatto nelle esperienze col cilindretto di ferro massiccio, un cilindro formato con dischi situati in piani perpendicolari all'asse ed isolati con fogli di carta frapposti. Il risultato, in questo caso, fu assolutamente negativo.

Sperimentai ancora con un altro modello di motore, ove il tamburo girava su di un asse verticale ed occupava lo spazio esistente fra i poli, scavati a superficie cilindrica, di quattro elettromagneti affacciati due a due. Due di questi elettromagneti, affacciati l'uno all'altro, erano eccitati dalla corrente primaria e facevano le veci delle spirali $AA, A'A'$; gli altri due, anch'essi affacciati l'uno all'altro, erano attivati dalla corrente secondaria, e facevano le veci delle spirali $BB, B'B'$. L'apparecchio funzionò, in questo caso, meglio col cilindro di ferro che con quello di rame; ma gli effetti furono con esso molto minori di quelli ottenuti coll'apparecchio precedente. La ragione del fatto è quella stessa di cui abbiamo parlato testè.

Provai finalmente a sostituire al tamburo solido un conduttore liquido, una massa di mercurio. Per fare l'esperimento

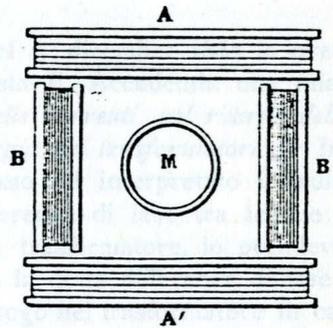


Fig. 4.

bastò la disposizione semplicissima seguente. Le spirali $AA, A'A'$ e $BB, B'B'$, tolte dal motore che aveva servito alle esperienze sovradescritte, vennero collocate in piani verticali, due a due paralleli tra di loro e perpendicolari agli altri due, in modo da costituire le quattro faccie di un prisma a base quadrata. Nella fig. 4 le quattro spirali sono vedute in proiezione orizzontale e sono segnate colle lettere A, A', B, B' . Le spirali furono collegate tra di loro e col generatore secondario come

lo erano nel motore: le A ed A' furono inserite nel circuito primario, le B , B' nel secondario insieme col reostato e col commutatore. Nello spazio circondato dalle quattro spirali si collocò un bicchiere M pieno di mercurio e si constatarono nel liquido le rotazioni prevedute. In causa della maggiore resistenza specifica le velocità acquistate dal mercurio furono, a parità delle altre circostanze, molto minori di quelle acquistate dal rame. La massima velocità ottenuta nel mercurio fu, con una corrente di 10 ampère, di circa 13 giri per minuto primo.

SUL METODO
DEI
TRE ELETTRODINAMOMETRI
PER LA MISURA
DELL'ENERGIA DISSIPATA PER ISTERESI
E PER CORRENTI DI FOUCAULT
IN UN TRASFORMATORE

(Nota presentata alla R. Accademia delle Scienze di Torino nell'adunanza del 22 novembre 1891. — Vol. XXVII degli Atti.)

Nella seduta del 4 dicembre 1887 io aveva l'onore di leggere davanti a questa R. Accademia una mia memoria "*Sulle differenze di fase delle correnti, sul ritardo dell'induzione e sulla dissipazione di energia nei trasformatori*".¹ In quella memoria, dopo di aver discusso ed interpretato i risultati di varie serie di misure sulle differenze di fase tra le due correnti, primaria e secondaria, di un trasformatore, io prendeva in esame le relazioni esistenti tra la detta differenza di fase e la dissipazione di energia che ha luogo nel trasformatore in causa delle correnti di Foucault e dell'isteresi. Arrivavo, tra le altre cose, ai seguenti risultati:

- 1.° La corrente secondaria presenta un ritardo di fase rispetto a quella che si avrebbe qualora non esistessero nè le correnti di Foucault, nè l'isteresi.
- 2.° Tale ritardo di fase è in relazione con una perdita, o-dissipazione di energia, che ha luogo nel trasformatore.
- 3.° Tra il ritardo di fase e la dissipazione di energia esiste una relazione semplice, la quale è sempre la stessa, qua-

¹ Vedi a pag. 261 di questo volume.

lunque sia la causa del ritardo e della dissipazione. Se adunque, come è il caso nel trasformatore, la dissipazione di energia è dovuta in parte alle correnti di Foucault ed in parte all'isteresi nel nucleo di ferro, il ritardo di fase rappresenta l'effetto complessivo di queste due cause.

4.° Se la differenza di fase tra le due correnti primaria e secondaria viene misurata per mezzo di tre elettrodinamometri, dei quali il primo abbia entrambe le spirali, la fissa e la mobile, nel circuito primario, il secondo le abbia entrambe nel circuito secondario, ed il terzo abbia una spirale nel primario e l'altra nel secondario, si deduce dai risultati precedenti che le letture fatte sui tre elettrodinamometri sono legate da relazioni semplicissime coll'energia dissipata, e quindi anche colla totale energia spesa nella spirale primaria, col coefficiente di rendimento del trasformatore, ecc.

Nella mia memoria dimostravo tali relazioni, le discutevo minutamente, ne deducevo una serie di conseguenze, e ne facevo l'applicazione ad una serie di casi sperimentali, nei quali, variando di volta in volta il nucleo di ferro del trasformatore, facevo variare fra limiti molto estesi il ritardo di fase e la dissipazione dell'energia. E cenni assai larghi di quel mio lavoro venivano pubblicati, oltrechè nelle principali riviste periodiche di elettrotecnica, nei trattati di Fleming¹ e di Kittler.²

Le relazioni da me dimostrate sono comprese nella formola seguente, o si derivano immediatamente da essa.

Se si rappresenta con P l'energia dissipata in i' complessivamente per le correnti di Foucault e per l'isteresi,

con Q la quantità di energia svolta nello stesso tempo, cioè in i' , nel circuito secondario,

con $\frac{\mu}{\lambda}$ il rapporto tra il coefficiente d'induzione mutua tra le due spirali primaria e secondaria ed il coefficiente di induzione propria della spirale secondaria,

con h_1, h_3, h_2 , le costanti dei tre elettrodinamometri, con α, β, γ le letture simultanee fatte sui medesimi e con a, b, c , le

¹ J. A. FLEMING, M. A., D. Sc. (Lond.) *The alternate current transformer in theory and practice* (London), Vol. I, pag. 305-324. (La formola (25') citata nel testo si trova riprodotta a pag. 319.)

² E. KITTLER, *Handbuch der Elektrotechnik*, Stuttgart, II Band. 1^o Hälfte, pag. 273-294. (La formola è a pag. 276, ed una parte della discussione è a pag. 292-294.)

tre letture ridotte ad una medesima costante, ossia:

$$a = \frac{\alpha}{h_1}, \quad b = \frac{\beta}{h_2}, \quad c = \frac{\gamma}{h_3},$$

si ha

$$\frac{P}{Q} = \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{c}{b} - \frac{\lambda}{\mu} \right). \quad (25')$$

L'aver io misurato le differenze di fase col metodo dei tre elettrodinometri senza sapere, e quindi senza accennare che esso era già stato indicato dal sig. Th. H. Blakesley, ² indusse questo elettricista a leggere nella *Physical Society* di Londra, il 10 marzo 1888, una nota, colla quale egli rivendicava a sè la priorità dell'idea di tale metodo di misura. E la sua nota fu riprodotta nel *Philosophical Magazine* ³ e poi in parecchie altre riviste.

La rivendicazione del Blakesley però si estendeva soltanto al metodo di misura delle differenze di fase da me ritrovato e prescelto, e non toccava, nè avrebbe potuto toccare, il corpo del mio lavoro, ossia la discussione dei risultati delle esperienze, lo studio delle relazioni tra le differenze di fase e la dissipazione di energia, la determinazione del coefficiente di rendimento del trasformatore, lo studio sperimentale degli effetti delle correnti di Foucault, ecc., risultati, relazioni, determinazioni, studi, che in gran parte sono appunto compendiate nella formola su esposta e nelle sue conseguenze.

Orbene, lo stesso Mr. Th. H. Blakesley, due mesi dopo di aver pubblicato la rivendicazione sovraccennata e di avere dimostrato con ciò di avere conoscenza del mio lavoro, leggeva nella stessa *Physical Society*, nella seduta del 12 maggio 1888, ⁴ una sua memoria col titolo: "On magnetic lag," nella quale, senza alcun accenno al mio precedente lavoro, ridimostrava le stesse cose e ripresentava le stesse formole.

¹ Formola segnata col n. (25') a pag. 289 di questo volume.

² *The Electrician*, 2 ottobre 1885. — Giova però qui notare che non risulta che il Blakesley avesse sperimentalmente fatto uso del metodo. Egli inoltre non suggerì l'uso di tre elettrodinometri se non nelle pubblicazioni posteriori alla mia.

³ Serie 5.^a, vol. XXV, pag. 295, aprile 1888.

⁴ Vedi: *Philosophical Magazine*, 5.^a serie, vol. XXVI, pag. 34 e seguenti.

Di ciò io non mossi accusa all'egregio collega, al quale allora poteva servire di giustificazione il fatto che la mia memoria originale era scritta in lingua italiana. Non gli mossi accusa nemmeno più tardi, quando, e per i riassunti della mia memoria che erano comparsi numerosi in inglese ed in altre lingue sulle riviste scientifiche, e per i larghi brani di essa pubblicati nei notissimi trattati del Fleming¹ e del Kittler,² la mia precedenza doveva essere venuta a sua cognizione. E non intendo di muovere accusa nemmeno adesso, perchè questioni personali come questa non interessano punto la scienza, ed hanno quindi agli occhi miei, anche quando mi toccano direttamente, una importanza affatto secondaria.

Ma in questi ultimi tempi il mio metodo per misurare l'energia dissipata, l'energia spesa nella spirale primaria ed il rendimento di un trasformatore ha ricevuto applicazioni sommamente importanti per opera del prof. Ayrton, di J. F. Taylor e di altri, e, ciò che più monta, il prof. Ayrton ed il sig. J. F. Taylor hanno pubblicato una memoria³ colla quale hanno dimostrato che la formola (25'), da essi attribuita al Blakesley, è vera anche quando le correnti non sono sinusoidali ed è perciò affatto generale. Dopo tale pubblicazione anche il metodo di misura dell'energia dissipata, che io adoperai pel primo, e tutte le deduzioni che ne feci nel lavoro sovracitato, acquistano maggiore generalità e maggiore importanza. E ciò mi impone il dovere di ricordare qui, come ora faccio, le suesposte date. Se ciò costituisce per me una rivendicazione di priorità, la rivendicazione però non è nè il movente, nè lo scopo di questa mia nota. Lo scopo è di informare l'Accademia di un fatto che interessa un lavoro da essa accolto e pubblicato ne' suoi volumi, e di porre in sodo che il valore di tale lavoro risulta notevolmente accresciuto dopo la pubblicazione di Ayrton e Taylor.

Per mettere ora in evidenza l'identità delle formole date dal Blakesley nella sua memoria del 12 maggio 1888 con quelle che si trovano nella mia memoria del 4 dicembre 1887, basta ricordare il significato delle lettere che in esse figurano.

¹ FLEMING, op. cit., pag. 319.

² KITTLER, op. cit., pag. 288-94.

³ *Proof of the generality of certain formula published for a special case by Mr. Blakesley.* By Prof. W. E. AYRTON, F. R. S., and J. F. TAYLOR, *Philosophical Magazine*, april 1891, pag. 354.

Blakesley denomina: ¹

- $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ le letture sui tre elettrodinamometri;
- A, B, C le costanti dei tre strumenti;
- r_1, r_2 le resistenze della spirale primaria e del circuito secondario;
- m, n, i numeri delle spire nelle due eliche primaria e secondaria;

e con queste notazioni dà le seguenti espressioni: ²

Potenza totale spesa fra i morsetti primari del trasformatore ³

$$= r_1 A \alpha_1 + r_2 \frac{m}{n} C \alpha_3;$$

potenza dissipata corrispondente al ritardo magnetico: ⁴

$$= r_2 \left\{ \frac{m}{n} C \alpha_3 - B \alpha_2 \right\}.$$

Se, come nella mia memoria, si rappresenta con P l'energia dissipata in i^2 per isteresi e per correnti di Foucault, energia corrispondente al ritardo di fase, e con Q quella svolta nel circuito secondario, si ha adunque:

$$P = r_2 \left\{ \frac{m}{n} C \alpha_3 - B \alpha_2 \right\},$$

$$Q = r_2 B \alpha_2,$$

donde

$$\frac{P}{Q} = \frac{m}{n} \frac{C \alpha_3}{B \alpha_2} - 1.$$

¹ Memoria citata: *Philosophical Magazine*, 5.^a serie, vol. XXVI, luglio 1888, pag. 35.

² Memoria citata, pag. 39.

³ *Total power.*

⁴ *Power involved with the magnetic lag.*

E se, adottando anche le altre notazioni della mia memoria, si pone

$$C z_2 = c, \quad B z_3 = b, \quad \frac{m}{n} = \frac{\mu}{\lambda},$$

questa formola diventa:

$$\frac{P}{Q} = \frac{\mu}{\lambda} \frac{c}{b} - 1 = \frac{\mu}{\lambda} \left(\frac{c}{b} - \frac{\lambda}{\mu} \right),$$

si riduce cioè alla (25') sovraricordata.

Ma in questi ultimi tempi il mio metodo per misurare l'energia dissipata in un circuito di un trasformatore ha ricevuto applicazioni non meno importanti di quelle che ha avute in altri e, nel mio memoria, il prof. Ayrton ed il sig. J. D. Taylor hanno pubblicato una memoria* nella quale hanno dimostrato che la formola (25') di Blakesley è vera anche quando le correnti non sono sinusoidali ed è perciò affatto generale. Dopo tale pubblicazione anche il metodo di misura dell'energia dissipata in un trasformatore è diventato un problema di interesse generale. Per questo motivo ho voluto ricordare in questa memoria il mio metodo per misurare l'energia dissipata in un trasformatore di priorità, la rivendicazione però non è né il presente, né lo scopo di questa mia nota. Lo scopo è di informare il pubblico di questo lavoro che interessa un lavoro da essa accettato e pubblicato nei suoi volumi, e di porre in sede che il valore di $\frac{P}{Q}$ risulta notevolmente accresciuto dopo la pubblicazione di Ayrton e Taylor.

Per mettere ora in evidenza l'identità della formola di Blakesley nella sua memoria del 17 maggio 1888 con quelle che si trovano nella mia memoria del 4 dicembre 1887, basta ricordare il significato di $\frac{P}{Q}$ nelle due casi figurati.

* Kirchoff, op. cit. pag. 209.
 Proof of the generality of certain formulas for determining the energy dissipated in a transformer. By Prof. W. E. Ayrton, F. R. S., and J. D. Taylor.

UN METODO
PER LA
TRATTAZIONE DEI VETTORI ROTANTI
OD ALTERNATIVI
ED UNA APPLICAZIONE DI ESSO
AI
MOTORI ELETTRICI A CORRENTI ALTERNATE

(Memoria presentata alla R. Accademia delle Scienze di Torino
nell'adunanza del 3 dicembre 1893.)

Lo studio di alcuni apparecchi elettrotecnici moderni, e segnatamente quello di alcune specie di motori elettrici, porta a considerare grandezze alternative vettoriali. Per la trattazione di tali grandezze può giovare il ricorrere a qualche modo di rappresentazione grafica, il quale dia di esse non solo l'ampiezza e la fase, ma anche la direzione.

Io qui presento un metodo, che nella interpretazione e nella esposizione elementare di molti fenomeni può riuscire assai semplice e perspicuo. Per mostrare poi l'uso e l'utilità del nuovo metodo, lo applico ai campi magnetici ed espongo per mezzo di esso una teoria elementare de' principali motori elettrici a correnti alternative.

I.

VETTORI ROTANTI E VETTORI ALTERNATIVI.

1. DEFINIZIONE. — Denominiamo *vettore rotante* una grandezza vettoriale della quale il valore scalare è costante, mentre la direzione ruota attorno ad un asse con velocità uniforme.

Qui ci limitiamo a considerare vettori rotanti in un dato piano. In questo caso a definire un vettore rotante ci bastano i seguenti elementi: *la grandezza, il verso, la frequenza*, ossia il numero di giri fatti in una unità di tempo, e la *fase*, ossia la frazione di giro compiuta all'origine del tempo.

Data la frequenza, possiamo rappresentare il vettore rotante per mezzo di un segmento di retta od , od os (fig. 1) facendo semplicemente queste convenzioni: che la lunghezza del segmento rappresenti la grandezza del vettore, che la direzione di esso sia quella che ha il vettore nell'origine del tempo, e che la lettera d od s indichi il verso, *destro* o *sinistro*, della rotazione. Se oX è la retta a partire dalla quale si vogliono misurare gli angoli descritti dal vettore, l'angolo Xod od Xos è quello percorso dal vettore all'origine del tempo e si dice valore angolare della fase. Il rapporto

$\frac{Xod}{2\pi}$, oppure $\frac{Xos}{2\pi}$ è la fase.

Per nominare i vettori così rappresentati potremo servirci semplicemente delle lettere d ed s .

2. COMPOSIZIONE DI DUE VETTORI DI EGUALE FREQUENZA ROTANTI NEL MEDESIMO PIANO. — *Primo caso: Vettori rotanti nel medesimo verso.* — Si abbiano due vettori rotanti nel medesimo verso e colla medesima frequenza; e siano questi, per esempio, d e d' (fig. 2). In ogni istante la loro somma vettoriale, ossia

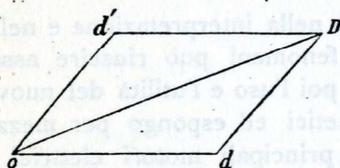


Fig. 2.

la loro risultante, è il vettore rappresentato dalla diagonale oD del parallelogrammo fatto su di essi, o, ciò che val lo stesso, dalla retta oD che chiude il triangolo odD od il triangolo $od'D$. Ora siccome d e d' girano nel medesimo verso e colla medesima velocità angolare, così l'angolo dod' rimane costante. Rimane quindi costante anche la diagonale oD . Essa intanto gira attorno ad o colla stessa velocità angolare delle componenti. Dunque la risultante di due vettori di uguale frequenza, rotanti nel medesimo piano e nel medesimo verso, è anch'essa un vettore rotante nel medesimo verso e colla stessa frequenza.

Se l'angolo dod' è uguale a due retti, se cioè le fasi di d e di d' differiscono di 180° , noi diciamo che d e d' hanno fasi

opposte. Se i due vettori componenti hanno grandezze uguali e fasi opposte, la loro risultante è nulla.

È inutile dire come dal caso di due soli vettori si passi al caso di un numero qualunque di vettori rotanti nel medesimo piano e nel medesimo verso, e come si dimostri che il vettore risultante è anch'esso un vettore rotante nel medesimo piano e nel medesimo verso, ed è rappresentato dalla retta che chiude il poligono fatto coi vettori componenti.

Secondo caso: Vettori rotanti in versi opposti. — Se (fig. 3) i due vettori componenti od , os rotano in versi opposti, l'angolo sod varia; quindi la diagonale oA varia inevitabilmente di grandezza. Essa intanto può variare, ed in generale varia, anche di direzione.

Ma si hanno a considerare due casi:

a) Il caso in cui le grandezze od ed os dei due vettori componenti sono uguali tra di loro;

b) Quello in cui tali grandezze sono disuguali.

3. a) CASO IN CUI I DUE VETTORI COMPONENTI HANNO GRANDEZZE UGUALI. — In questo caso la risultante ha una direzione fissa. Infatti la diagonale oA (fig. 3) è allora in ogni istante la bisettrice dell'angolo sod , e siccome od ed os ruotano colla stessa velocità angolare l'uno verso la destra e l'altro verso la sinistra, così essa rimane fissa nello spazio.

Varia invece il *valore* della risultante, il quale è legato all'angolo variabile Aod dalla relazione

$$oA = 2od \cos \widehat{Aod}.$$

Ponendo $oA = a$ e $2od = A$, rappresentando con n la frequenza, con t il tempo e con α il valore dell'angolo Aod per $t = 0$, questa relazione si scrive:

$$a = A \cos (2\pi nt + \alpha).$$

Una grandezza variante secondo questa legge è ciò che comunemente dicesi una grandezza *alternativa* od *alternante armonica* o *sinusoidale*. La costante A è l'*ampiezza*, n la *frequenza*, l'angolo α il *valore angolare della fase*, quando si prende come origine del tempo l'istante in cui a è massima.

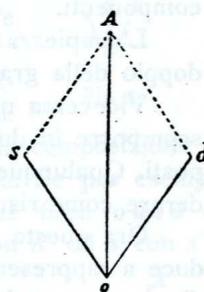


Fig. 3.

Noi dunque diciamo oA un *vettore alternativo*, e concludiamo: due vettori uguali, rotanti in un medesimo piano, colla stessa frequenza ed in versi opposti danno per risultante un vettore di direzione fissa, alternativo, della stessa frequenza. La direzione di questo vettore alternativo è quella della bisettrice dell'angolo che in un istante qualunque è compreso fra i due vettori componenti, e perciò anche quella della bisettrice dell'angolo che i due vettori componenti comprendono nell'istante in cui $t=0$, ossia quella dei due segmenti di rette coi quali si rappresentano, secondo la nostra convenzione, i due vettori componenti.

L'ampiezza del vettore alternativo risultante è uguale al doppio della grandezza di uno dei vettori componenti.

Viceversa un vettore alternativo sinusoidale si può sempre scomporre in due vettori rotanti di ugual valore e di versi opposti. Qualunque vettore alternativo sinusoidale si può considerare come risultante di due vettori rotanti nel modo detto.

Ora questo modo di considerare un vettore alternativo conduce a rappresentazioni grafiche semplicissime, atte ad indicare di un vettore alternativo la direzione fissa, l'ampiezza e la fase. L'artificio consiste nel rappresentare con un segmento di retta la direzione e l'ampiezza del vettore alternativo e con altri segmenti di rette i vettori rotanti di cui quello si compone. Disegnando tutti tre questi segmenti, si ha la rappresentazione

indicata nella fig. 4. In questa figura il segmento oa indica la direzione e dà l'ampiezza del vettore alternativo, mentre i segmenti od ed os rappresentano i vettori rotanti, destro e sinistro, in cui oa si può scomporre. L'angolo aod , od il suo uguale aos , rappresenta il valore angolare della fase. Ma siccome $oa=2os=2od$ ed è sulla bisettrice dell'angolo sod , così uno qualunque dei segmenti oa , os , od si può trovare quando sono dati gli altri due. Quindi si ha una rappresentazione completa anche disegnando solamente questi due. Per

tal modo possiamo rappresentare il vettore alternativo semplicemente con oad , o con oas , o con osd .

4. b) CASO IN CUI I DUE VETTORI COMPONENTI HANNO GRANDENZE DIVERSE. — Se i vettori rotanti componenti, od ed os (fig. 5), non sono uguali, è variabile non solo l'ampiezza, ma anche la direzione del vettore risultante. Col centro in o e con



Fig. 4.

un raggio uguale al più piccolo dei vettori componenti, uguale ad os nel caso della figura, si descriva l'arco di circolo sFd' . Si può considerare od come risultante di due vettori od' e $d'd$ rotanti nel medesimo verso. Ora i due vettori rotanti od' ed os danno per risultante un vettore alternativo oa di direzione

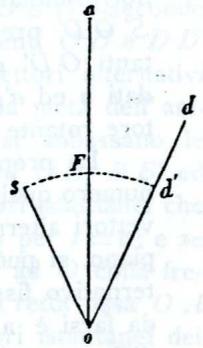


Fig. 5.

fissa bisettrice dell'angolo $\widehat{so d}$ e di ampiezza $oa = 2od' = 2os$. Dunque i due vettori rotanti od ed os di versi opposti e di valori diversi equivalgono ad un vettore alternativo oa di direzione fissa e ad un vettore rotante $d'd$.

5. COMPOSIZIONE DI DUE O PIÙ VETTORI ALTERNATIVI DI DIREZIONI FISSE. — Valendoci delle considerazioni precedenti possiamo ridurre la composizione di vettori alternativi a quella di vettori rotanti. Se per esempio abbiamo due vettori alternativi di direzione fissa $oas d$ ed $o'a's'd'$ (fig. 6), noi possiamo comporre d con d' ed s con s' e poi comporre insieme, nel modo ora indicato, le due risultanti. Per comporre d con d' tiriamo da un punto O un segmento OD uguale e parallelo a d , e da D un segmento

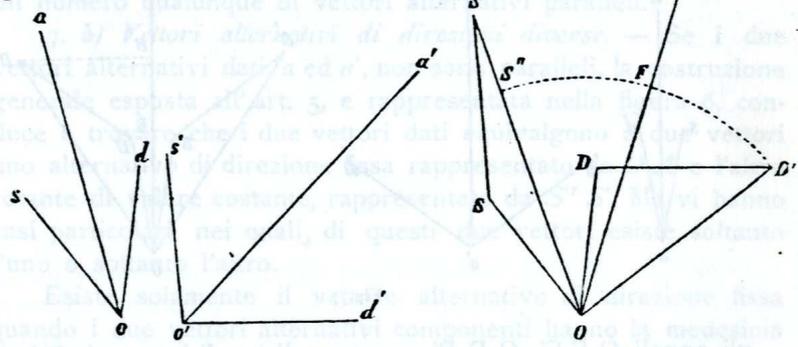


Fig. 6.

DD' uguale e parallelo a d' ; troviamo così la risultante OD' . Per comporre similmente s con s' , tiriamo OS ed SS' rispettivamente uguali e paralleli ad s e ad s' e tiriamo OS' . Dopo ciò noi possiamo dire che il sistema dei due vettori alternativi a ed a' dati è equivalente al sistema dei due vettori rotanti OD'

ed OS' . Ora ai due vettori rotanti OD' ed OS' possiamo applicare la costruzione precedente: se OD' è il minore dei due, noi prendiamo $OS'' = OD'$ e sulla bisettrice OF dell'angolo $S'OD'$ prendiamo $OA = 2OD' = 2OS''$. I due vettori rotanti OD' ed OS' , e quindi anche i due vettori alternativi dati a ed a' , equivalgono al vettore alternativo OA ed al vettore rotante $S'S'$.

La proposizione si può estendere senz'altro al caso di un numero qualunque di vettori alternativi: qualsivoglia sistema di vettori alternativi di uguale frequenza, situati in un medesimo piano, si può ridurre ad un sistema semplice di un vettore alternativo fisso combinato con un vettore rotante. L'operazione da farsi è ancora quella indicata nella fig. 6, con questa sola differenza, che in luogo dei triangoli ODD' , $OS'S'$ si hanno a fare i poligoni di tutte le componenti d e di tutte le componenti s dei vettori dati.

Importa applicare la proposizione a casi particolari.

6. CASI PARTICOLARI:

a) *Vettori alternativi aventi la medesima direzione.* — Se a' è parallelo ad a (fig. 7),

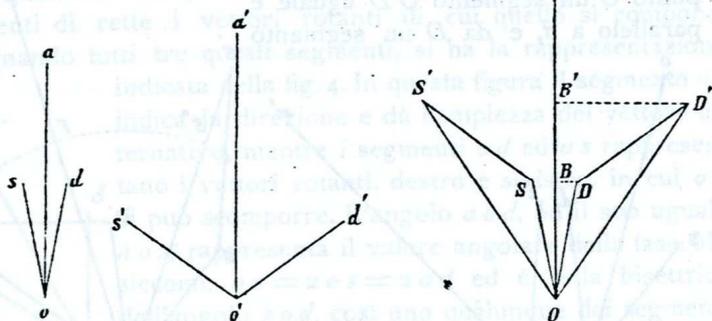


Fig. 7.

gli angoli OSS' , ODD' sono uguali tra di loro, quindi i triangoli OSS' , ODD' sono uguali, e per conseguenza $OS' = OD'$. Inoltre la bisettrice OA dell'angolo $S'OD'$ è anche bisettrice degli angoli SOD ed $S'S$, DD' , ed è perciò parallela alle oa ed $o'a'$. Dunque la risultante OA dei due vettori alternativi paralleli a ed a' è anch'essa un vettore alternativo fisso ed è parallela ai componenti.

Per trovare questa risultante non è necessario eseguire tutta la costruzione indicata nella fig. 7: basta evidentemente fare una metà di essa, per esempio la parte ODD' . Secondo l'interpretazione finora data alla figura, i segmenti OD e DD' rappresentano la metà delle ampiezze dei vettori alternativi componenti, ed il segmento OD' rappresenta la metà dell'ampiezza del vettore alternativo risultante. Se si abbassano le perpendicolari DB , $D'B'$ su OA , le proiezioni OB , $B'B'$ ed OB' rappresentano similmente le metà dei valori istantanei che i due vettori componenti ed il risultante hanno per $t=0$; e se si suppone che la figura ODD' giri attorno ad O colla frequenza n , le proiezioni di OD , DD' , OD' sulla retta fissa OA rappresentano in ogni istante le metà dei valori istantanei dei vettori medesimi. Ma noi possiamo ora rappresentare con OD e con DD' non le metà, ma le intiere ampiezze dei vettori componenti; e con ciò abbiamo subito in OD' la rappresentazione dell'ampiezza della risultante e nelle proiezioni su OA le rappresentazioni dei valori istantanei delle grandezze dei tre vettori considerati. Così noi ritroviamo la nota e solita costruzione di cui si fa uso nello studio delle grandezze alternative. Essa è un caso particolare della costruzione più generale da noi indicata.

Le fatte considerazioni si estendono senz'altro al caso di un numero qualunque di vettori alternativi paralleli.

7. b) *Vettori alternativi di direzioni diverse.* — Se i due vettori alternativi dati, a ed a' , non sono paralleli, la costruzione generale esposta all'art. 5, e rappresentata nella figura 6, conduce a trovare che i due vettori dati equivalgono a due vettori uno alternativo di direzione fissa rappresentato da OA e l'altro rotante di valore costante, rappresentato da $S'S'$. Ma vi hanno casi particolari nei quali, di questi due vettori esiste soltanto l'uno o soltanto l'altro.

Esiste solamente il vettore alternativo di direzione fissa quando i due vettori alternativi componenti hanno la medesima fase.

In questo caso infatti gli angoli OSS' , ODD' (fig. 8) sono uguali entrambi al supplemento dell'angolo aoa' e perciò sono uguali tra di loro. Quindi i triangoli SOS' , OOD' sono uguali l'uno all'altro, e per conseguenza si ha $OS' = OD'$. Dunque si hanno a comporre due vettori rotanti OD' ed OS' uguali e di versi opposti, i quali, come si è dimostrato [3],

danno per risultante un semplice vettore alternativo di direzione fissa.

Questa risultante è rappresentata dal segmento OA uguale a $2OS'$ ed a $2OD'$ e giacente sulla bisettrice OF dell'angolo $S'OD'$. La sua fase ha il valore angolare $S'OA = \frac{1}{2} S'OD'$
 $= \frac{1}{2} sod = \frac{1}{2} s'o'd'$: essa è uguale alla fase dei vettori alternativi componenti.

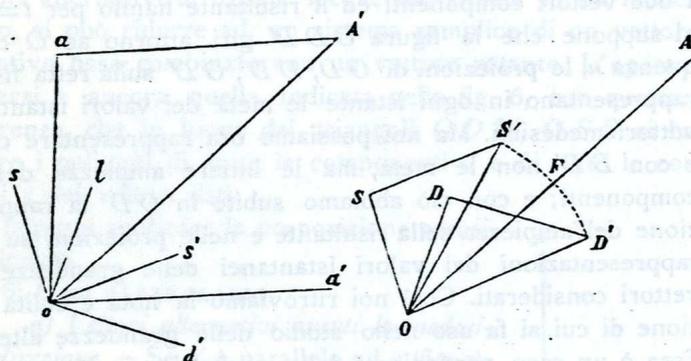


Fig. 8.

Se si tira aa' uguale e parallela ad oa' e se si tira oA' , si ha il triangolo oaa' , il quale è simile al triangolo OSs' perchè l'angolo a è uguale all'angolo S ed i lati oa , aa' sono uguali al doppio dei lati OS , Ss' . Dunque si ha $oA' = 2OS' = OA$. Inoltre dalle eguaglianze

$$\widehat{aoA'} = \widehat{SOS'}, \quad \widehat{S'OA} = \frac{1}{2} \widehat{S'OD'} = \frac{1}{2} \widehat{sod} = \widehat{soa}$$

si deduce $soA' = sOA$; il che significa che oA' è parallelo ad OA . Per conseguenza oA' è uguale e parallelo al vettore risultante OA . Diremo adunque: Due vettori alternativi di uguale fase si compongono in un unico vettore alternativo di uguale fase, del quale l'ampiezza e la direzione sono rappresentate dalla diagonale del parallelogrammo fatto sulle rette che rappresentano per ampiezza e per direzione i due vettori componenti.

8. La composizione di due vettori alternativi dà invece come risultante un semplice vettore rotante quando l'uno o

l'altro dei vettori rotanti OD' , OS' (fig. 6, art. 5) è uguale a zero.

Questo caso si verificà quando os ed $o's'$ (fig. 6), oppure od ed $o'd'$ hanno grandezze uguali e direzioni opposte; allora infatti il punto S' , oppure il punto D' coincide con O .

La condizione $os = o's'$, oppure $od = o'd'$, implica quella che sia $oa = o'a'$, ossia che le ampiezze dei due vettori alternativi dati sieno fra di loro uguali.

La condizione poi, che os ed $o's'$, oppure od ed $o'd'$ abbiano direzioni opposte, implica una relazione tra le direzioni dei due vettori alternativi oa ed $o'a'$ e le fasi dei medesimi. È facile vedere quale sia questa relazione. Supponiamo infatti (fig. 9) che sia od' opposto ad od , diciamo α l'angolo aoa' tra le direzioni dei due vettori alternativi componenti, e rappresentiamo con φ e con φ' i valori angolari oad , $a'o'd'$ delle fasi dei vettori medesimi; abbiamo:

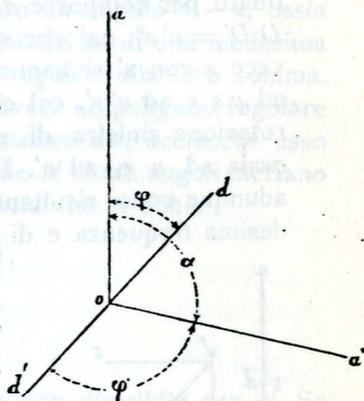


Fig. 9.

$$\alpha + \varphi' - \varphi = \pi, \text{ ossia } \varphi' - \varphi = \pi - \alpha.$$

Dunque due vettori alternativi di direzioni fisse danno per risultante un semplice vettore rotante quando hanno ampiezze uguali e presentano una differenza di fase, il valore angolare della quale è uguale al supplemento dell'angolo compreso fra le loro direzioni.

9. *Esempi.* — Come primo esempio consideriamo il caso di due vettori alternativi, mutuamente perpendicolari oa , $o'a'$ (fig. 10).

Il teorema dice che acciocchè essi si compongano in un semplice vettore rotante dev'essere in primo luogo $o'a' = oa$. In secondo luogo deve essere $\varphi' - \varphi = \pi - \alpha$ e quindi, essendo $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

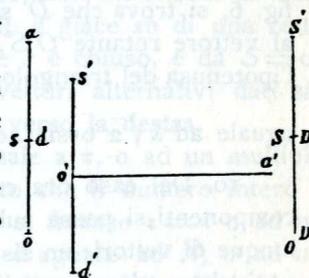


Fig. 10.

$$\varphi' - \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Se per esempio prendiamo $\varphi = 0$, ossia: angolo $a o d = 0$, dev'essere $\varphi' = \frac{\pi}{2}$, ossia angolo $a' o' d' = \frac{\pi}{2}$.

Ora che veramente, date queste condizioni, i due vettori a ed a' producano come risultante un vettore rotante, si riconosce subito applicando ad essi la costruzione dell'art. 5, fig. 6. Infatti per comporre d con d' si deve tirare $OD = od$ e poi $DD' = o'd'$, col che si ricade sul punto O ; per comporre invece s con s' si hanno a tirare OS ed SS' uguali e paralleli ad os e ad $o's'$, col che si trova la risultante OS' , che è una rotazione sinistra di grandezza uguale ad $s + s'$, ossia a $2s$, ossia ad a e ad a' . I due vettori alternativi dati producono adunque come risultante un semplice vettore rotante della medesima frequenza e di grandezza uguale alle loro ampiezze.

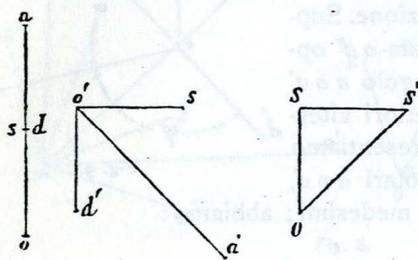


Fig. 11.

Come secondo esempio consideriamo il caso di due vettori alternativi uguali oa ed $o'a'$ (fig. 11), le direzioni dei quali comprendono un angolo $\alpha = \frac{3}{4}\pi$.

In questo caso la condizione espressa dal teorema dimostrato è che si abbia

$$\varphi' - \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Se per esempio: $\varphi = \widehat{a o d} = 0$, dev'essere $\varphi' = \widehat{a' o' d'} = \frac{\pi}{4}$.

E veramente, se si applica a questo caso la costruzione della fig. 6, si trova che D' si confonde con O . La risultante si riduce al vettore rotante OS' . La sua grandezza è rappresentata dall'ipotenusa del triangolo rettangolo isoscele $OS'S'$; essa è perciò uguale ad $s\sqrt{2}$ ossia ad $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

10. Dal caso ora considerato di due soli vettori alternativi componenti si passa subito al caso generale di un numero qualunque di vettori: un sistema qualunque di vettori alternativi può equivalere ad un semplice vettore rotante. La condizione necessaria perchè ciò avvenga è semplicemente questa; che il poligono delle componenti d oppure quello delle componenti s sia chiuso.

Un caso particolare importante è quello nel quale i vettori componenti sono uguali e fanno gli uni cogli altri angoli uguali. Siano dati in un piano N vettori alternativi uguali, ciascuno dei quali faccia col precedente un angolo α , che non sia nè π , nè un multiplo di π , ed abbia rispetto al medesimo una precedenza di fase di valore angolare uguale anch'essa ad α . Allora ciascuno dei vettori rotanti s fa col precedente un angolo $\alpha - \alpha$, ossia zero: il poligono delle s ha tutti i suoi lati su di una medesima retta, la risultante S di tutte le s è uguale alla loro somma, ossia $S = Ns$. Il poligono delle d è invece un poligono regolare del quale gli angoli esterni hanno il valore 2α ; acciocchè esso sia chiuso, è necessario e sufficiente che N di tali angoli facciano un multiplo di quattro angoli retti, ossia che si abbia

$$2\alpha N = 2k\pi,$$

od

$$\alpha = \frac{k\pi}{N},$$

ove k è un numero intero qualunque non divisibile per N . Se è soddisfatta questa condizione, gli N vettori rotanti d hanno una risultante nulla; e ciò vuol dire che gli N vettori alternativi dati hanno per risultante il semplice vettore rotante S . Se diciamo a l'ampiezza comune dei vettori alternativi dati, il valore del vettore rotante risulta

$$S = Ns = \frac{N}{2}a.$$

Se invece di supporre, come abbiamo fatto, che ciascuno dei vettori dati abbia una precedenza di fase α rispetto a quello che lo precede, avessimo supposto che esso abbia un ritardo di fase, avremmo trovato che il poligono delle d giace su di una retta e dà $D = nd$, e che il poligono delle s è chiuso, e dà $S = 0$; in questo caso la risultante degli N vettori alternativi dati sarebbe un semplice vettore D rotante verso la destra.

Abbiamo escluso il caso di α uguale a π , o ad un multiplo di π , e per conseguenza abbiamo detto che il numero intero k non deve essere divisibile per N . Se si facesse $\alpha = \pi$ o ad un multiplo di π , ossia se si prendesse k uguale ad N , o ad un multiplo di N , gli angoli esterni del poligono delle d sarebbero uguali a 2π o ad un multiplo di 2π , ed il poligono si ridurrebbe, come quello delle s , ad una linea retta. Allora si avrebbero due

vettori rotanti S e D uguali entrambi ad $\frac{N}{2}a$ e di versi opposti, i quali darebbero come risultante un vettore alternativo di direzione fissa e di ampiezza uguale ad Na . Ciò è quanto si sapeva di già, perchè supporre $\alpha = \pi$ o multiplo di π equivale a supporre che i vettori alternativi dati siano tra di loro paralleli.

I casi che più comunemente si hanno a considerare nello studio dei motori elettrici sono quelli ove $k=2$, quelli cioè ove i vettori alternativi considerati sono regolarmente distribuiti, a distanze angolari uguali, tutt'attorno ad un asse. Fra questi casi poi merita una menzione speciale quello ove $N=3$. Allora le distanze angolari tra i vettori dati ed i valori angolari delle loro differenze di fase sono uguali a $\frac{2}{3}\pi$, ossia sono di 120° . Il vettore rotante, che risulta dalla composizione dei tre vettori alternativi, ha il valore $\frac{3}{2}a$, ossia è uguale ad una volta e mezzo l'ampiezza di ciascuno dei vettori componenti.

11. Ciò che precede riguarda la composizione, ossia la somma de' vettori da noi considerati. Per le applicazioni alle quali miriamo conviene aggiungere qualche considerazione sui prodotti $ab \cos \varphi$, $ab \sin \varphi$ delle ampiezze a e b di due vettori pel coseno e pel seno dell'angolo φ compreso fra le direzioni dei medesimi, prodotti dei quali il primo è lo scalare col segno cambiato, ed il secondo è il tensore del vettore del prodotto dei due vettori.

In primo luogo conviene ricordare questa proposizione: se sono dati due gruppi di vettori, e se in un dato istante sono: a la grandezza di uno qualunque dei vettori del primo gruppo, b quella di uno qualunque dei vettori del secondo gruppo, A il valore istantaneo del vettore risultante di tutti i vettori a , B quello del risultante dei vettori b , φ l'angolo compreso tra un vettore a ed un vettore b , e Φ l'angolo di A con B , si ha

$$\sum ab \cos \varphi = AB \cos \Phi,$$

e

$$\sum ab \sin \varphi = AB \sin \Phi.$$

Per dimostrare la prima di queste uguaglianze, del resto notissime, basta osservare che se si dice Ψ l'angolo tra A ed uno dei vettori b , si ha:

$$b \sum a \cos \varphi = b A \cos \Psi,$$

quindi

$$\sum a b \cos \varphi = \sum b A \cos \Psi = A \sum b \cos \Psi.$$

Ma $\sum b \cos \Psi = B \cos \Phi$, dunque

$$\sum a b \cos \varphi = A B \cos \Phi.$$

La seconda eguaglianza, ossia la $\sum a b \sin \varphi = A B \sin \Phi$, si dimostra in modo analogo.

12. In secondo luogo conviene vedere quali sieno i valori medi dei prodotti $a b \cos \varphi$ ed $a b \sin \varphi$ quando i vettori $a b$ sono delle specie di cui noi qui ci occupiamo, quando cioè essi sono vettori rotanti o vettori alternativi. E qui si hanno più casi.

1.° Caso. — Se i due vettori a e b sono vettori rotanti nel medesimo piano, colla medesima frequenza e nel medesimo verso, l'angolo φ compreso fra i medesimi rimane costante: esso è uguale al valore angolare della differenza di fase de' due vettori. Siccome, per la definizione di vettore rotante da noi adottata, anche a e b sono costanti, così i prodotti $a b \cos \varphi$, $a b \sin \varphi$ sono indipendenti dal tempo.

2.° Caso. — Se a e b sono ancora vettori rotanti in un medesimo piano, ma con frequenze diverse n ed m , l'angolo φ compreso fra di essi passa in ogni unità di tempo $n - m$ volte da 0 a 2π , ossia varia tra 0 e 2π nel tempo $\frac{1}{n - m}$. Il valore medio di $\cos \varphi$ è di $\sin \varphi$ durante tale tempo è uguale a zero, ed è perciò uguale a zero anche il valore medio dei prodotti considerati.

3.° Caso. — Un caso particolare compreso in quello ora considerato è quello di due vettori rotanti in versi opposti: se sono n ed m le frequenze dei due vettori rotanti, l'angolo φ varia tra 0 e 2π nel tempo $\frac{1}{n + m}$, e durante questo tempo i valori medi di $a b \cos \varphi$, e di $a b \sin \varphi$ sono uguali a zero.

4.° Caso. — Un altro caso particolare è quello in cui a è un vettore rotante e b un vettore fisso di grandezza costante. Questo caso si riduce ai precedenti facendo semplicemente $m = 0$. Anche in questo caso i medi prodotti sono uguali a zero.

5.° Caso. — Se a è un vettore alternativo di direzione fissa e b è un vettore rotante, possiamo immaginare a scomposto in due vettori uguali rotanti in versi opposti, d ed s , e

valendoci del teorema ricordato all'articolo precedente (II), porre:

$$ab \cos \varphi = db \cos \delta + sb \cos \tau,$$

$$ab \sin \varphi = db \sin \delta + sb \sin \tau,$$

ove δ e τ rappresentano gli angoli che nell'istante considerato b fa con d e con s . Così siamo ricondotti ai casi precedenti.

Se a e b hanno frequenze diverse, tanto i prodotti $db \cos \delta$, $db \sin \delta$ quanto i prodotti $sb \cos \tau$, $sb \sin \tau$ hanno valori medi uguali a zero; quindi sono uguali a zero anche i medi di $ab \cos \varphi$, e di $ab \sin \varphi$.

Se a e b hanno una medesima frequenza, solamente i prodotti $db \cos \delta$, $db \sin \delta$, oppure solamente $sb \sin \tau$, $sb \cos \tau$ sono nulli; gli altri due sono diversi da zero e sono costanti. Se, per esempio, b è un vettore rotante verso destra i prodotti $sb \cos \tau$, $sb \sin \tau$ hanno un valore medio uguale a zero, ed i prodotti $db \cos \delta$, $db \sin \delta$ sono costanti. Si ha perciò semplicemente:

$$\text{medio di } ab \cos \varphi = db \cos \delta,$$

$$\text{medio di } ab \sin \varphi = db \sin \delta.$$

Se si rappresenta con A l'ampiezza del vettore alternativo, si ha $d = \frac{A}{2}$, e quindi

$$\text{medio di } ab \cos \varphi = \frac{1}{2} Ab \cos \delta,$$

$$\text{medio di } ab \sin \varphi = \frac{1}{2} Ab \sin \delta.$$

Se si prende come origine del tempo l'istante in cui a ha il valore massimo A , l'angolo δ , che figura in queste espressioni, è il valore angolare della differenza di fase tra a e b .

6.° Caso. — Se finalmente a e b sono due vettori alternativi di uguale frequenza, noi consideriamo il primo come risultante di due vettori rotanti d ed s ed il secondo come risultante di due altri vettori rotanti d' ed s' . In grazia della proposizione dimostrata all'art. II, i prodotti $ab \cos \varphi$, $ab \sin \varphi$ sono in ogni istante uguali alla somma di quelli che si hanno colle combinazioni dd' , ds' , sd' , ss' . Ma, in grazia di ciò che si è detto dianzi trattando il caso 3.°, i valori medi dei prodotti corri-

spondenti alla seconda ed alla terza combinazione sono uguali a zero; dunque, se diciamo δ l'angolo costante tra d e d' e σ l'angolo costante tra s ed s' , abbiamo:

$$\text{medio di } ab \cos \varphi = d d' \cos \delta + s s' \cos \sigma,$$

$$\text{medio di } ab \sin \varphi = d d' \sin \delta + s s' \sin \sigma.$$

Se diciamo A e B le ampiezze dei due vettori alternativi dati, e se notiamo che

$$d = s = \frac{A}{2}, \quad \text{e} \quad d' = s' = \frac{B}{2},$$

possiamo scrivere anche:

$$\text{medio } ab \cos \varphi = \frac{AB}{4} (\cos \delta + \cos \sigma),$$

e

$$\text{medio } ab \sin \varphi = \frac{AB}{4} (\sin \delta + \sin \sigma).$$

Se poi, dicendo α e β le fasi di a e b , notiamo che

$$\delta = \varphi + \beta - \alpha, \quad \text{e} \quad \sigma = \varphi - \beta + \alpha,$$

possiamo scrivere ancora:

$$\text{medio } ab \cos \varphi = \frac{AB}{2} \cos \varphi \cdot \cos (\beta - \alpha),$$

$$\text{medio } ab \sin \varphi = \frac{AB}{2} \sin \varphi \cdot \cos (\beta - \alpha),$$

II.

APPLICAZIONE AI CAMPI MAGNETICI

ED AI MOTORI ELETTRICI A CORRENTI ALTERNATE.

13. Possiamo applicare le considerazioni generali sovraesposte al caso speciale in cui i vettori considerati sono forze magnetiche.

In questo caso le proposizioni degli articoli 8, 9 e 10 mostrano subito come per mezzo di due, o di più campi magnetici alternativi di direzioni fisse si possa produrre un campo magnetico rotante; esse mostrano perciò come un campo magnetico rotante si possa produrre per mezzo di due o più correnti alternative di fasi diverse; esse comprendono, in altre parole, il principio fondamentale dei motori elettrici a correnti alternative polifasi.

Viceversa la proposizione dell'art. 3 mostra come un campo magnetico alternativo, od un flusso d'induzione alternativo si possa sempre considerare come risultante di due, o di più campi, o di due o più flussi di valore costante, rotanti gli uni verso destra e gli altri verso sinistra. Ora questo modo di considerare un campo magnetico od un flusso d'induzione alternativo può tornare molto utile nello studio delle correnti indotte in conduttori posti nel campo magnetico e delle forze che questo esercita sulle medesime; può per conseguenza tornare utile nello studio de' fenomeni fondamentali in molti apparecchi elettrici, e specialmente nei motori elettrici per correnti alternative. Per dare un esempio di applicazione noi prenderemo qui a trattare di questi ultimi.

14. MOTORI SINCRONI. — Consideriamo dapprima una armatura costituita da un'unica spirale, della quale le spire sieno in piani perpendicolari ad un asse comune oa (fig. 12), e supponiamo che essa possa rotare nel piano della figura, attorno ad un asse o , in un campo magnetico, ove l'induzione magnetica abbia il valore uniforme B e la direzione costante oB . Se tale spirale è percorsa da una corrente elettrica, essa equivale ad un magnete di asse oa , il momento magnetico del quale si ottiene moltiplicando la somma delle superficie delle spire per la intensità della corrente in misura elettromagnetica assoluta.

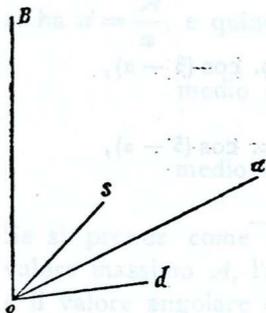


Fig. 12.

Noi possiamo rappresentare questo magnete, e quindi anche la spirale percorsa dalla corrente, per mezzo di un vettore avente la direzione oa ed una grandezza uguale al momento magnetico sovraddetto. Se la corrente è alternativa colla frequenza n , anche il vettore è alternativo colla medesima frequenza, e noi lo possiamo rappresentare, secondo il nostro metodo, in $oas d$. Il

fare uso di questa rappresentazione equivale a sostituire al magnete alternativo oa due magneti rotanti, i momenti magnetici dei quali sono rappresentati da od e da os . Dicendo A l'ampiezza oa e d ed s le grandezze dei due vettori rotanti od , os , si ha $d = s = \frac{A}{2}$.

Ciò posto, consideriamo le forze esercitate sulla spirale dal campo magnetico in cui essa è collocata. Queste forze si riducono ad una coppia, il cui momento è $B \cdot a \sin \widehat{Boa}$, e, pel teorema ricordato all'art. 11, è uguale alla somma

$$Bd \sin \delta + Bs \sin \sigma,$$

ove con δ e con σ si rappresentano, come più sopra, gli angoli che nell'istante considerato fanno con oB i due vettori rotanti destro e sinistro d ed s .

Se la spirale è in riposo, i vettori d ed s rotano con la medesima frequenza n l'uno verso destra e l'altro verso sinistra, e, per ciò che si è detto all'articolo 12 (4.º caso), i valori medi dei prodotti $Bd \sin \delta$ e $Bs \sin \sigma$ sono uguali a zero. È quindi uguale a zero il medio valore del momento della coppia considerata.

Se si fa rotare la spirale attorno all'asse o con una frequenza m , gira con essa il vettore oa , ed i due vettori od ed os prendono a girare con velocità angolari uguali alle somme algebriche di quelle ch'essi hanno relativamente all'armatura e di quella che hanno comune con questa. Se per esempio l'armatura ruota verso la destra, il vettore rotante d gira nello spazio con la frequenza $n + m$, ed il vettore s gira colla frequenza $n - m$. Però finchè m è diverso da n i valori medi dei momenti delle coppie sono ancora uguali a zero.

Ma se $m = n$, la frequenza di d diventa uguale a $2n$ e quella di s si riduce a zero. La corrente dell'armatura equivale allora a due magneti di momento magnetico costante, uno dei quali, d , ruota nel verso dell'armatura con una frequenza doppia, e l'altro, s , sta fisso nello spazio. La direzione fissa di quest'ultimo è quella per cui passa l'asse oa della spirale rotante nel momento in cui in essa la corrente alternativa ha l'intensità massima. Tale direzione fa con oB un angolo determinato che rappresenteremo con ζ . In questo caso il momento della coppia agente sull'armatura non ha più un valore medio uguale a zero:

allora infatti è uguale a zero soltanto il momento medio della coppia agente su od , ossia il valore medio del prodotto $Bd \sin \zeta$; mentre il momento della coppia agente su os ha il valore costante

$$Bs \sin \zeta,$$

ossia

$$\frac{1}{2} AB \sin \zeta.$$

Questa coppia tende a chiudere l'angolo soB . Se tale angolo è, come in figura, a destra di oB , ossia dalla parte verso cui l'armatura ruota, la coppia si oppone al movimento, obbliga a spendere un lavoro; l'apparecchio funziona come una dinamo. Se invece l'angolo Bos giace a sinistra di oB , ossia dalla parte opposta al movimento, la coppia agisce nel verso della rotazione, essa fa un lavoro; l'apparecchio funziona come motore elettrico; esso è, nella forma più semplice, un motore sincrono.

La coppia motrice di questo motore varia tra 0 ed $\frac{1}{2} AB$ quando ζ varia tra 0 e $\frac{\pi}{2}$. Per valori di ζ minori di $\frac{\pi}{2}$ il funzionamento del motore è stabile. Se infatti si aumenta la coppia resistente, l'armatura si attarda alquanto, cresce l'angolo ζ e cresce con esso il momento della coppia motrice. Se invece si diminuisce la coppia resistente, l'armatura accenna per un momento ad accelerarsi, diminuisce così l'angolo ζ e con esso diminuisce la coppia motrice.

15. MOTORI ASINCRONI. — *Armatura chiusa posta in un campo magnetico rotante.* — Consideriamo in secondo luogo una armatura formata di N spire, o di N spirali elementari, chiuse su sè stesse in corto circuito e disposte regolarmente ad uguali distanze angolari, in altrettanti piani diametrali, tutt'attorno all'asse di rotazione. Diciamo S la superficie, r la resistenza ed L il coefficiente di autoinduzione di una delle spirali. Immaginiamo poi che l'armatura si trovi in un campo magnetico rotante, nel quale l'induzione magnetica, costante ed uniforme, abbia il valore B e ruoti *relativamente alla armatura* con una frequenza u .

Nella spirale elementare colla normale della quale l'induzione B fa, alla fine del tempo t , un angolo α , passa in tale

istante un flusso d'induzione $B S \cos \alpha$; quindi, per la variazione di α dovuta alla rotazione di B rispetto all'armatura, si ha nella spirale una forza elettromotrice

$$2 \pi u B S \sin \alpha.$$

Questa forza elettromotrice produce nella spirale elementare una corrente di intensità i data dalla formola

$$i = \frac{2 \pi u}{\rho} B S \sin (\alpha - \varphi),$$

ove φ è il valore angolare del ritardo di fase della corrente rispetto alla forza elettromotrice, dato dalla relazione

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{2 \pi u L}{r},$$

e ρ è la resistenza apparente della spirale, ossia

$$\rho = \sqrt{r^2 + 4 \pi^2 u^2 L^2}.$$

Tale corrente equivale ad una lamina magnetica, il cui momento magnetico è uguale ad $i S$, ossia a

$$\frac{2 \pi u}{\rho} B S^2 \sin (\alpha - \varphi),$$

e si può rappresentare con un vettore avente la direzione della normale al piano della spirale, o, come possiamo dire concisamente, la direzione α .

Ora se si proietta questo vettore prima sulla retta che fa con B l'angolo φ , e poi sulla perpendicolare ad essa, si ha rispettivamente

$$\frac{2 \pi u}{\rho} B S^2 \sin (\alpha - \varphi) \cos (\alpha - \varphi), \quad \text{e} \quad \frac{2 \pi u}{\rho} B S^2 \sin^2 (\alpha - \varphi);$$

e se si calcolano i valori medi di queste proiezioni per α compreso tra 0 e 2π , si trova che questi valori medi sono rispettivamente zero e $\frac{1}{2} \frac{2 \pi u B S^2}{\rho}$. Dunque le N spirali equivalgono in complesso ad un magnete di momento magnetico

$$A = \frac{N}{2} \frac{2 \pi u}{\rho} B S^2,$$

l'asse del quale fa con la direzione di B l'angolo costante $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Tale magnete segue B nella rotazione, stando costantemente indietro, alla distanza angolare $\varphi + \frac{\pi}{2}$. Se nella fig. 13 si suppone che il campo magnetico ruoti *relativamente all'armatura* nella direzione della freccia u , e se OX è perpendicolare alla direzione OB della induzione magnetica, la direzione del magnete equivalente alla armatura è la OA , la quale fa con OX l'angolo $XOA = \varphi$.

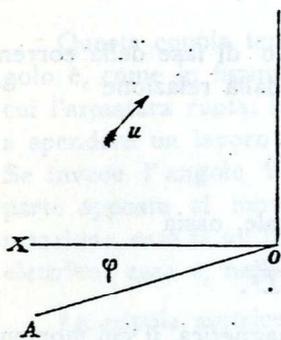


Fig. 13.

16. MOTORI A CAMPO ROTANTE. — Un'armatura come quella che abbiamo ora considerato, collocata in un campo magnetico rotante prodotto per mezzo di un sistema di correnti polifasi, costituisce un motore a campo rotante.

La coppia motrice è quella che il campo magnetico eserciterebbe se al posto dell'armatura vi fosse il magnete equivalente dianzi considerato. Il momento di essa è adunque (figura 13)

$AB \sin AOB$; dicendolo K e ponendo per A il valore trovato nell'articolo precedente, si ha:

$$K = \frac{N}{2} B^2 S^2 \frac{2\pi u \cos \varphi}{\varphi}$$

Ricordando che $\cos \varphi = \frac{r}{\varphi}$, si può scrivere anche

$$K = \frac{N}{2} B^2 S^2 r \frac{2\pi u}{\varphi^2},$$

ossia

$$K = \pi N B^2 S^2 \frac{r u}{r^2 + 4\pi^2 u^2 L^2}. \quad (1)$$

In questa espressione la lettera u rappresenta la frequenza del *moto relativo* di rotazione del campo magnetico rispetto all'armatura. La formola dà la relazione tra la coppia di rotazione K e la frequenza u ; ed è facile vedere quale sia l'andamento della linea, nella quale la formola si traduce quando si prende u come ascissa e K come ordinata.

La (1) si può scrivere

$$K = \frac{\pi N B^2 S^2 r}{\frac{r^2}{u} + 4 \pi^2 u L^2},$$

onde appare che K cambia di segno senza cambiare di valore quando si cambia u in $-u$, ha il valore zero per $u=0$ e per $u=\pm\infty$, ed ha un valore numerico massimo quando i due termini del denominatore, il prodotto dei quali è costante, sono uguali tra di loro, ossia quando

$$u = \pm \frac{1}{2} \frac{r}{\pi L}.$$

Perciò la linea $C_1 C_2$ (fig. 14) i punti della quale hanno per ascisse i valori di u e per ordinate i corrispondenti valori di

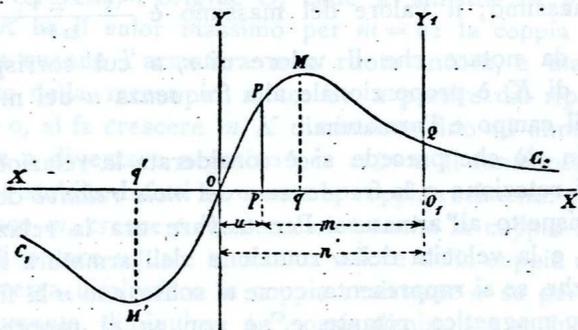


Fig. 14.

K , si compone di due rami omotetici rispetto all'origine O , passa per l'origine, è assintotica da entrambe le parti all'asse delle ascisse e presenta due punti M, M' d'ordinata numericamente massima, i quali corrispondono alle ascisse $+\frac{1}{2} \frac{r}{\pi L}$ e $-\frac{1}{2} \frac{r}{\pi L}$. Il valore del massimo è $\frac{\pi N B^2 S^2}{2} \frac{u}{r}$.

L'origine O è un punto d'inflessione, e nelle sue vicinanze la linea si confonde con una linea retta, la pendenza della quale è $\frac{\pi N^2 B^2 S^2}{r}$. Le ascisse dei punti massimo e minimo M ed M' e la lunghezza del tratto, che praticamente si confonde con una

retta, crescono col diminuire di $\frac{L}{r}$; al limite, per $\frac{L}{r} = 0$, i punti M ed M' andrebbero all'infinito e la linea si trasformerebbe in una retta passante per O colla pendenza $\frac{\pi N B^2 S^2}{r}$.

Dato il valore di u , e ritenuto costante L , la coppia K varia colla resistenza r . La legge della variazione apparisce chiara se si mette l'espressione di K sotto la forma

$$K = \frac{\pi N B^2 S^2 u}{r + \frac{4 \pi^2 u^2 L^2}{r}}$$

Per $r=0$ e per $r=\infty$, K si annulla; per $r = \frac{4 \pi^2 u^2 L^2}{r}$, ossia per

$$r = 2 \pi u L,$$

esso è massimo; il valore del massimo è $\frac{\pi N B^2 S^2 u}{2 r}$, come sopra. È da notare che il valore di r , a cui corrisponde il massimo di K , è proporzionale alla frequenza u del moto relativo tra il campo e l'armatura.

17. In ciò che precede si è considerata la relazione tra la coppia di rotazione e la frequenza u del *moto relativo* del campo rotante rispetto all'armatura. Per trovare ora la relazione tra la coppia e la velocità della rotazione dell'armatura basta osservare, che, se si rappresenta, come al solito, con n la frequenza del campo magnetico rotante, e se con m si rappresenta la frequenza della rotazione dell'armatura, ossia il numero di giri che l'armatura fa in t'' , si ha

$$u = n - m.$$

Portando questo valore nella (1) si ha

$$K = \pi N B^2 S^2 \frac{r(n-m)}{r^2 + 4 \pi^2 L^2 (n-m)^2}, \quad (2)$$

la quale dà la relazione cercata.

La curva in cui si traduce questa formola, quando si prende come ordinata la coppia K e come ascissa la frequenza m della rotazione dell'armatura, si può dedurre subito dalla curva $C_1 O C_2$ della fig. 14; anzi è la stessa curva riferita soltanto ad altri

assi di coordinate. Si porti infatti su $O X'$ una lunghezza $O O_1 = n$, e sia p il piede dell'ordinata di un punto qualunque P della curva $C_1 C_2$; si ha $O_1 p = O O_1 - O p = n - u = m$. Dunque se si prende il punto O_1 come origine delle coordinate, la retta $O_1 Y_1$ parallela ad $O Y$ come asse delle ordinate e la $O_1 O X$, diretta da destra verso sinistra, come parte positiva dell'asse delle ascisse, la linea $C_1 M' O P M Q C_2$ è senz'altro quella i punti della quale hanno per coordinate i valori di m e di K .

La curva mette in evidenza le principali proprietà del motore. Bisogna distinguere due casi: il caso di $n \leq \frac{1}{2\pi} \frac{r}{L}$ e quello di $n > \frac{1}{2\pi} \frac{r}{L}$.

Nel primo caso, quando $n \leq \frac{1}{2\pi} \frac{r}{L}$, quando cioè $2\pi n L \leq r$, si ha $O O_1 \leq O q$, l'origine O_1 cade a sinistra di q , od in q . Allora K ha il valor massimo per $m = 0$: la coppia motrice è massima quando l'armatura non ruota ancora, è massima nel momento della messa in moto. Se a partire dal riposo, ossia da $m = 0$, si fa crescere m , K diminuisce fino ad annullarsi per $m = n$ e a diventare negativo per $m > n$. Il funzionamento del motore è stabile. Infatti se cresce la coppia resistente e se perciò diminuisce m , cresce $p P$, cresce cioè anche la coppia motrice K fino a diventare uguale al nuovo valore della coppia resistente. Se viceversa diminuisce la coppia resistente e se perciò la velocità aumenta, diminuisce $p P$, ossia diminuisce anche la coppia motrice K fino a ristabilire l'equilibrio.

Nel secondo caso, quando $n > \frac{1}{2\pi} \frac{r}{L}$, ossia quando $2\pi n L > r$, si ha $O O_1 > O q$; l'origine O_1 cade a destra di q . Allora per $m = 0$ la coppia motrice K ha un valore $O_1 Q$ minore del massimo $q M$. Se si fa crescere m a partire dal valor zero, K comincia a crescere e raggiunge il valore massimo $q M$ quando $m = O_1 q = O_1 O - O q = n - \frac{r}{2\pi L}$. Dopo di ciò, se m cresce ancora, K diminuisce fino ad annullarsi per $m = n$ ed a diventare negativo per $m > n$. Il funzionamento del motore è stabile per $m > O_1 q$, ossia per $m > n - \frac{r}{2\pi L}$, perchè allora, come nel caso precedente, un aumento della coppia resistente,

provocando una diminuzione di m , dà luogo ad una diminuzione di K , per cui si ristabilisce l'equilibrio. Ma per $m \leq n - \frac{r}{2\pi L}$ il funzionamento del motore è instabile. Se infatti per un aumento della coppia resistente si verifica una diminuzione di m , questa diminuzione dà luogo ad una diminuzione della coppia motrice K e quindi ad una ulteriore diminuzione di m ; e questo effetto si riproduce e si moltiplica fino a tanto che il motore si riduce al riposo.

In tutti i casi K si riduce a zero per $m = n$ e diventa negativo per $m > n$. Ciò vuol dire che in ogni caso non si può far girare l'armatura con una frequenza superiore a quella delle correnti, se non per mezzo di una coppia motrice applicata dall'esterno all'albero, se non colla spesa di un lavoro. La coppia a ciò necessaria ha il momento massimo $q' M'$ quando

$$m = O_1 O + O q' = O_1 O + O q = n + \frac{r}{2\pi L}.$$

Nel secondo caso or ora considerato, quando cioè $2\pi n L > r$, può accadere (e accade comunemente quando n è grande) che il valore $O_1 Q$ di K corrispondente ad $m = 0$ sia insufficiente per l'avviamento del motore. Allora si può aiutare l'avviamento inserendo nel circuito dell'armatura una resistenza non induttiva, facendo cioè crescere r senza aumentare L . Infatti il valore K_0 di K che la formola (2) dà per $m = 0$, valore che si può scrivere:

$$K_0 = \pi N B^2 S^2 \frac{n}{r + \frac{4\pi^2 n^2 L^2}{r}},$$

è massimo per $r = 2\pi n L$; e perciò, finchè r è minore di $2\pi n L$, esso cresce col crescere di r . L'efficacia di questo artificio per accrescere K_0 nel momento della messa in marcia è tanto maggiore quanto più è grande la frequenza n delle correnti adoperate; ed è precisamente nel caso di grandi frequenze che esso può essere necessario. Il motore può avviarsi da sè, senza speciali provvedimenti, ed ha un funzionamento più stabile quando la frequenza n è piccola.

18. ARMATURA CHIUSA POSTA IN UN CAMPO MAGNETICO ALTERNATIVO. MOTORI ASINCRONI MONOFASI. — Si immagini ora che la stessa armatura già considerata all'art. 15 sia collocata, non

più in un campo magnetico rotante, ma in un campo magnetico alternativo di direzione fissa; ciò che allora ha da accadere si può facilmente dedurre dalle cose or ora dette.

Il campo magnetico alternativo equivale a due campi rotanti in direzioni opposte; similmente le correnti indotte nell'armatura equivalgono a due magneti rotanti in direzioni opposte; sull'armatura agisce adunque una coppia uguale alla risultante di quelle esercitate dai due campi sui due magneti rotanti. Ma per le cose dette all'art. 12, caso 3.º, i valori medi delle coppie prodotte da ciascuno dei campi sul magnete rotante nel verso opposto sono uguali a zero, dunque il valore medio del momento della coppia risultante totale agente sull'armatura è semplicemente uguale alla differenza tra quello della coppia che il campo rotante verso destra esercita sul magnete rotante verso destra, e quello della coppia che il campo rotante a sinistra produce sul magnete rotante verso sinistra. Detti K_1 e K_2 i momenti di queste due coppie, e detto K il momento della coppia risultante agente sull'armatura, preso come positivo quando la coppia è diretta verso la destra, si ha

$$K = K_1 - K_2. \quad (3)$$

Le coppie K_1 e K_2 si calcolano colla formola (1) del § 16. Si deve a quest'uopo ritenere che B rappresenti il valore della induzione magnetica in ciascuno dei due campi rotanti in cui si è scomposto il campo alternativo dato, si deve cioè ritenere che il valore massimo dell'induzione magnetica in quest'ultimo sia rappresentato con $2B$. Si devono poi sostituire nella formola, alla frequenza n del moto relativo, successivamente i valori u_1 ed u_2 corrispondenti ai moti che i due campi rotanti hanno *relativamente all'armatura*. Ora se si suppone che l'armatura ruoti *verso destra* con una frequenza m , e se si rappresenta con n la frequenza del campo magnetico alternativo, si ha

$$u_1 = n - m, \quad u_2 = n + m;$$

dunque

$$K_1 = \pi N B^2 S^2 \frac{r(n-m)}{r^2 + 4\pi^2 L^2 (n-m)^2}, \quad (4)$$

$$K_2 = \pi N B^2 S^2 \frac{r(n+m)}{r^2 + 4\pi^2 L^2 (n+m)^2}, \quad (5)$$

e quindi

$$K = \pi N B^2 S^2 r \left[\frac{n-m}{r^2 + 4\pi^2 L^2 (n-m)^2} - \frac{n+m}{r^2 + 4\pi^2 L^2 (n+m)^2} \right]. \quad (6)$$

Le linee che rappresentano le relazioni tra K_1 , K_2 , K e la frequenza m della rotazione dell'armatura, si possono ricavare subito dalla $C_1 O C_2$ che nella fig. 14 rappresenta l'equazione (1).

La $C_1 O C_2$ è riprodotta e segnata colle stesse lettere nella fig. 15, ove, come nella 14, il punto O è l'origine delle u ed il punto O_1 , alla distanza $O O_1 = n$ da O , è l'origine delle m .

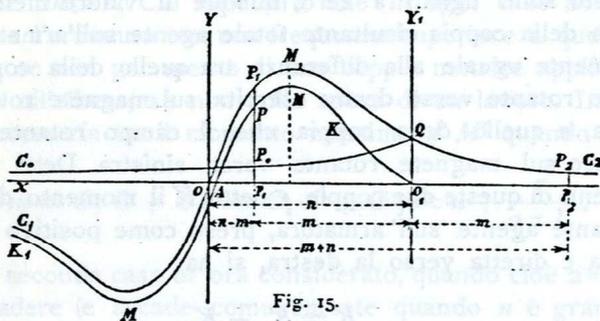


Fig. 15.

Si prenda (fig. 15) $O_1 p_1 = O_1 p_2 = m$, e si tirino le corrispondenti ordinate $p_1 P_1$ e $p_2 P_2$; si ha subito:

$$O p_1 = O O_1 - p_1 O_1 = n - m \text{ ed } O p_2 = O O_1 + O_1 p_2 = n + m.$$

Dunque le ordinate $p_1 P_1$ e $p_2 P_2$ rappresentano rispettivamente K_1 e K_2 . Per avere K basta sottrarre $p_2 P_2$ da $p_1 P_1$. Se si prende su $p_1 P_1$ il segmento $P_1 P = p_2 P_2$, il rimanente segmento $p_1 P$ rappresenta K , ed il punto P è un punto della curva che dà K in funzione di m , riferita agli assi coordinati $O_1 X$ ed $O_1 Y_1$.

Quale debba essere l'andamento della linea K si vede anche più chiaramente se si disegna in $Q P_0 C_0$ la linea simmetrica, rispetto all'asse $O_1 Y_1$, alla porzione $Q P_2 C_2$ della $C_1 O C_2$. Allora il valore di K corrispondente al valore $O_1 p_1$ di m risulta rappresentato dal segmento $P_0 P_1$ compreso fra le due linee $Q P_1 C_1$ e $Q P_0 C_0$. A questo segmento è uguale, per la linea K , l'ordinata $p_1 P$ corrispondente all'ascissa $m = O_1 p_1$.

L'esame della curva K mette in chiaro le principali proprietà del motore. Il momento K della coppia agente sull'armatura è nullo quando $m = 0$, ossia quando l'armatura è in riposo;

ma se questa gira, subito K prende valori diversi da zero, e se la frequenza m della rotazione non supera il valore rappresentato in figura con $O_1 A$, esso è positivo, ossia la coppia ha il verso stesso della rotazione, è una coppia motrice. Se, partendo dal riposo, l'armatura prende velocità crescenti, la coppia, nulla da principio, va crescendo anch'essa fino ad un massimo, raggiunto il quale, se m seguita a crescere, essa diminuisce rapidamente, e si riduce di nuovo a zero quando m raggiunge un determinato valore $O_1 A$ alquanto inferiore ad n . Per i valori di m maggiori di $O_1 A$ la coppia K diventa e rimane sempre negativa, ossia essa è opposta alla rotazione, è una coppia resistente.

Il tratto discendente MM' della curva corrisponde ad un funzionamento stabile del motore. Infatti se, mentre l'armatura gira colla frequenza $m = O_1 p_1$ e colla coppia motrice $p_1 P$, la coppia resistente viene ad aumentare alquanto e diventa maggiore di $p_1 P$, la velocità dell'armatura diminuisce, $O_1 p_1$ diminuisce, e cresce la coppia motrice $p_1 P$ fino a ristabilire l'equilibrio. Se similmente la coppia resistente viene a diminuire, l'armatura si accelera, p_1 si sposta verso sinistra e la coppia motrice $p_1 P$ diminuisce anch'essa.

Invece il funzionamento non è stabile pel tratto ascendente $O_1 M$ della linea, ossia per valori di m minori di quello a cui corrisponde il massimo della coppia motrice. Allora infatti una diminuzione di velocità dovuta ad un eccesso della coppia resistente sulla coppia motrice provoca una diminuzione di quest'ultima e quindi una ulteriore diminuzione di velocità, la quale si moltiplica e si continua fino a che l'armatura si ferma completamente.

Il tratto discendente della linea K , pel quale si ha un funzionamento stabile, ha una pendenza di poco inferiore a quella della vicina linea $C_1 O C_2$, e la pendenza di questa nel punto O (§ 16) è uguale a $\frac{\pi N B^2 S^2}{r}$. Similmente il punto massimo della linea K dista assai poco da quello della linea $C_1 O C_2$, l'ascissa del quale è $n - \frac{1}{2} \frac{r}{L}$ (§ 16). Dunque se è piccola la resistenza r , il tratto utile della linea K ha una grande pendenza, e, se non è piccolissima l'induttanza L , i valori di m ad esso corrispondenti sono compresi fra limiti l'uno all'altro molto vicini. Ciò accade appunto spesso nella pratica: il motore è bensì asincrono, ma i limiti fra i quali la velocità può variare compatibilmente colla stabilità del funzionamento sono spesso molto ristretti.

La linea QP_1OC_1 (fig. 15) è quella che rappresenterebbe la relazione tra la coppia motrice e la velocità quando l'armatura, invece di essere collocata in un campo alternativo ove l'induzione magnetica ha il valore massimo $2B$, fosse collocata in un semplice campo magnetico rotante, ove l'induzione avesse il valore costante B . Perciò la fig. 15 mette in chiaro le analogie e le differenze che esistono tra le proprietà di un motore asincrono a campo alternativo e quelle di un motore a campo rotante.

Se n non è molto piccolo, e se la resistenza r dell'armatura è, come di solito, assai piccola, le due linee QP_1OC_1 e O_1KPAK_1 corrono vicinissime l'una all'altra per tutti i valori di m superiori a quelli pei quali i motori cominciano ad avere un funzionamento stabile. Dunque per tutte le velocità compatibili con un funzionamento stabile il motore monofase si comporta approssimativamente come il motore a campo rotante; solamente la coppia motrice è in esso alcun poco più piccola e si annulla per un valore di m alcun poco minore di n . Le due linee si scostano invece notevolmente l'una dall'altra nelle parti corrispondenti alle velocità minori; e la differenza caratteristica che da ciò deriva è che per $m = 0$ il momento della coppia motrice, che nel motore a campo rotante può avere un valore O_1Q anche notevole, è nullo nel motore monofase: il motore a campo rotante può avviarsi da sè, il monofase non lo può.

L'espressione (6) della coppia motrice di un motore monofase si può trovare facilmente anche senza ricorrere al nostro metodo di trattazione de' vettori alternativi; essa fu infatti dimostrata dal Dr. J. Sahulka direttamente con procedimento puramente algebrico,¹ ed è notissima. Ma l'esservi arrivati col nostro metodo giova alla intelligenza delle ragioni fisiche dei fatti, e mette in evidenza le relazioni che esistono tra un motore a campo alternativo ed uno a campo rotante. Un motore a campo alternativo si presenta come un motore a campo rotante differenziale; le sue proprietà si derivano direttamente da quelle dei motori a campo rotante.

19. Inoltre varie considerazioni si presentano, le quali sarebbero meno ovvie colla trattazione analitica ordinaria.

¹ J. SAHULKA, *Theorie der Thomson'schen (Brown'schen) Motoren für gewöhnlichen Wechselstrom*. "Elektrotechnische Zeitschrift", — Berlin, 7 Juli 1893, pag. 391.

Una di queste si riferisce alla natura delle correnti nell'armatura ed alle reazioni di esse sull'induttore. Le correnti dell'armatura equivalgono, come abbiamo dimostrato, a due magneti rotanti in versi opposti. I vettori che rappresentano questi magneti girano nello spazio con velocità angolari uguali e precisamente colla frequenza n del campo magnetico alternativo; essi adunque (§ 4, b) equivalgono al sistema di un vettore rotante e di un vettore alternativo. Ciò vuol dire che le correnti indotte nell'armatura producono nello spazio un flusso di induzione magnetica, il quale si può considerare come risultante dalla sovrapposizione di due flussi, uno di valore costante e di direzione rotante e l'altro di valore alternativo e di direzione fissa. Consideriamo l'uno dopo l'altro questi due flussi.

Flusso rotante. — Il flusso rotante è proporzionale alla differenza tra i valori assoluti dei vettori che rappresentano i due magneti rotanti equivalenti alle correnti dell'armatura (§ 4, b). Perciò esso è proporzionale ad

$$y_1 - y_2,$$

ove con y_1 e con y_2 si rappresentino i valori assoluti, corrispondenti ad

$$u = n - m \quad \text{e ad} \quad u = n + m,$$

della funzione y di u data dalla formola

$$y = \frac{u}{\sqrt{r^2 + 4\pi^2 u^2 L^2}}.$$

Per farsi un'idea del modo di variare di esso in funzione di m

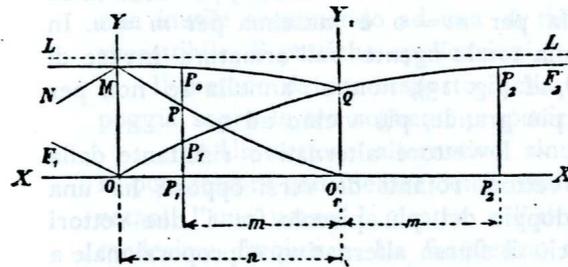


Fig. 16.

basta considerare l'andamento di y . Ora y ha valori assoluti uguali per u e per $-u$, è uguale a zero per $u = 0$, cresce col crescere di u e per $u = \pm \infty$ tende asintoticamente verso il valore limite $\frac{I}{2\pi L}$. Se a-

dunque (fig. 16) si prendono come ascisse i valori di u e come ordinate i valori assoluti di y , e se si prende come origine il punto O e come direzione positiva dell'asse delle u la OX , si trova la linea $F_1 O F_2$ che

ha per assintoto la retta LL parallela all'asse delle ascisse. Per trovare $y_1 - y_2$ si prendono $OO_1 = n$ ed $O_1 p_1 = O_1 p_2 = m$; risultano $O p_1 = n - m$, $O p_2 = n + m$, quindi le ordinate $p_1 P_1$ e $p_2 P_2$ rappresentano y_1 ed y_2 e si ha subito $y_1 - y_2 = p_1 P_1 - p_2 P_2 = -(p_2 P_2 - p_1 P_1)$.

Il modo di variare di questa differenza apparisce chiaro se si disegna in QP_0M la linea simmetrica rispetto ad $O_1 Y_1$ alla $QP_2 F_2$. Allora si ha $y_1 - y_2 = -P_1 P_0$. Si può, se si vuole, prendere questa lunghezza come ordinata, e così si trova, che prendendo come origine il punto O_1 , come asse delle ordinate la retta $O_1 Y_1$ e come direzione positiva dell'asse delle ascisse la $O_1 X$, $y_1 - y_2$ è rappresentata in funzione di m dalla curva $O_1 PMN$.

Il segno $(-)$ del valore trovato derivante dall'essere $p_2 P_2 > p_1 P_1$ dice che il flusso considerato ruota verso la sinistra, ossia in direzione opposta al movimento dell'armatura. Ora questo flusso che ruota verso la sinistra, produce nel metallo della parte fissa della macchina correnti indotte sulle quali poi esso esercita forze tendenti a trascinarle nella propria rotazione, verso la sinistra. Dunque viceversa le correnti indotte nella parte fissa della macchina sollecitano l'armatura a girare verso la destra, nel verso cioè nel quale essa già si muove. Quindi risulta che il flusso rotante dovuto alle correnti nell'armatura provoca correnti indotte, le quali aiutano la rotazione e danno luogo ad una coppia, che si aggiunge alla coppia principale di cui si è parlato nell'articolo precedente.

Il valore della coppia dovuta alle correnti indotte varia col variare di m e cresce col crescere dell'ordinata $p_1 P$ della linea $O_1 MN$. Essa è nulla per $m = 0$ e massima per $m = n$. In grazia di essa la coppia totale agente sull'armatura invece di annullarsi per $m = O_1 A$ (fig. 15), non si annulla se non per un valore alcun poco più grande, più vicino ad n .

Flusso alternativo. — Il vettore alternativo risultante dalla composizione di due vettori rotanti di versi opposti ha una ampiezza uguale al doppio del più piccolo fra i due vettori componenti (§ 4). Perciò il flusso alternativo è proporzionale a

$$\frac{n - m}{\sqrt{r^2 + 4\pi^2 L^2 (n - m)^2}}$$

Esso può essere nullo solamente per $m = n$.