SOPRA UN

MOTORE ELETTRICO SINCRONO

A CORRENTE ALTERNATIVA

(Nota presentata alla R. Accademia delle Scienze di Torino, il 1.° aprile 1894. — Vol. XXIX degli Atti.)

In una Memoria recentemente accolta dalla Classe per la pubblicazione ne' volumi accademici [1] ho esposto un metodo per la trattazione dei vettori rotanti e dei vettori alternativi, ed ho dimostrato con alcuni esempi di applicazione come esso possa tornare utile nella interpretazione di molti fenomeni e nella esposizione in forma chiara ed affatto elementare delle proprietà fondamentali di molti apparecchi elettrotecnici.

In quella Memoria io mi sono limitato ad applicare il nuovo metodo allo studio de' principali motori elettrici a correnti alternative oggi in uso. Ma il metodo mette anche in evidenza la possibilità di nuove combinazioni; ed io credo di fare cosa non inutile accennando ad una di tali combinazioni, la quale è suscettibile di pratiche applicazioni.

Il metodo da me esposto nella Memoria ricordata si appoggia sopra le tre seguenti proposizioni:

1.° Un vettore alternativo sinusoidale di direzione fissa si può sempre considerare come risultante di due vettori uguali rotanti l'uno verso la destra e l'altro verso la sinistra colla medesima frequenza. La frequenza dei due vettori rotanti è uguale a quella del vettore alternativo e la grandezza costante

[1] *Un metodo per la trattazione dei vettori rotanti od alternati ed una applicazione di esso ai motori elettrici a correnti alternate.* Vedi a pag. 355 di questo volume.

comune di essi è uguale alla metà dell'ampiezza del vettore alternativo medesimo.

2.° Se sono dati due gruppi di vettori, e se in un dato istante sono: a la grandezza di uno qualunque dei vettori del primo gruppo, b quella di uno qualunque dei vettori del secondo gruppo, A il valore istantaneo del vettore risultante di tutti i vettori a, B quello del risultante dei vettori b, φ l'angolo compreso tra un vettore a ed un vettore b e Φ l'angolo di A con B si ha

$$\Sigma\, a\, b \cos\varphi = A\, B \cos\Phi,$$
$$\Sigma\, a\, b\, \mathrm{sen}\,\varphi = A\, B\, \mathrm{sen}\,\Phi.$$

3.° Siano a e b due vettori rotanti colle frequenze m ed n; si considerino queste frequenze come aventi il medesimo segno o come aventi segni opposti, secondochè le rotazioni avvengono nel medesimo verso od in versi opposti, e si rappresenti con φ l'angolo, funzione del tempo, che i due vettori fanno l'uno coll'altro. Allora, se $m = n$, i prodotti

$$a\, b \cos\varphi \quad \text{ed} \quad a\, b\, \mathrm{sen}\,\varphi,$$

hanno valori costanti; se m ed n non sono uguali, tali prodotti sono variabili ed il loro valore medio calcolato per un tempo uguale ad un multiplo di $\frac{1}{m-n}$, o per un tempo molto lungo a fronte di $\frac{1}{m-n}$, è uguale a zero, o piccolissimo.

Per mezzo di queste proposizioni ho presentato, nella citata Memoria, la teoria di un motore a corrente alternata sincrono ordinario nella seguente forma elementare. Il motore è semplicemente un ordinario alternatore; e se per semplicità noi lo supponiamo bipolare, esso si riduce a ciò: una armatura consistente in una spirale a spire parallele rotante in un campo magnetico. L'armatura è percorsa da una corrente elettrica alternativa di frequenza n ed il campo magnetico, prodotto da magneti eccitati con una corrente continua, è costante. La corrente alternativa dell'armatura equivale ad un magnete, il cui momento magnetico è rappresentabile con un vettore alternativo avente la direzione dell'asse della spirale ed una grandezza uguale al prodotto della superficie totale della spirale per la intensità della corrente in misura elettromagnetica assoluta. Questo vettore alternativo poi si può scomporre in due vettori rotanti, l'uno, *d*, a destra e l'altro, *s*, a sinistra, le frequenze de' quali, relativamente all'armatura considerata come fissa, sono rispettivamente $+n$ e $-n$. Se l'armatura ruota colla frequenza $+n$, i due vettori rotanti sovraddetti rotano nello spazio colle frequenze $n+n$ ed $n-n$; il primo ruota con una frequenza doppia di quella dell'armatura, ed il secondo rimane immobile in una direzione fissa, la quale fa un determinato angolo costante φ colla direzione del campo magnetico. Il momento della coppia esercitata dal campo magnetico fisso sul magnete rotante *d* ha un valore medio uguale a zero, ma quello della coppia esercitata su *s* ha un valore costante. Se si rappresenta con B il valore costante della induzione nel campo magnetico, il momento della coppia è

$$B\,s\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

La coppia tende a chiudere l'angolo φ: aiuta od osteggia il movimento secondochè la direzione fissa di *s*, che è quella dell'asse dell'armatura nel momento in cui la corrente in essa ha la massima intensità, si trova a sinistra oppure a destra della direzione di B. Nel primo caso l'apparecchio funziona come motore elettrico, nel secondo caso esso funziona come dinamo.

Ora consideriamo ancora lo stesso apparecchio, ma supponiamo che il campo magnetico, nel quale gira l'armatura, invece di essere costante, sia un campo alternativo di frequenza n uguale a quella della corrente dell'armatura medesima; supponiamo in altri termini che i magneti di campo sieno eccitati non più con una corrente continua, ma colla stessa corrente alternativa che si ha nell'armatura, o con un'altra corrente alternativa di uguale frequenza. Possiamo dimostrare facilmente che anche in questo caso si può far funzionare l'apparecchio come una dinamo, oppure come un motore sincrono, e che a tale uopo basta far rotare l'armatura con una velocità tale che essa faccia $2n$ giri al minuto secondo.

Infatti il campo magnetico alternativo equivale a due campi rotanti, l'uno, D, verso la destra, e l'altro, S, verso la sinistra colle frequenze $+n$ e $-n$. Ora imprimiamo all'armatura una rotazione, per esempio a destra, colla frequenza $2n$. Dei due magneti rotanti *d* ed *s*, ai quali l'armatura equivale, l'uno, il *d*, girerà allora nello spazio colla frequenza $2n+n=3n$; l'altro, l'*s*, girerà nel medesimo verso colla frequenza $2n-n=n$. Il valore medio dei momenti delle coppie esercitate su *d* da D e da S, e quello della coppia di S su s saranno nulli; ma lo stesso non sarà della coppia esercitata su s da D, poichè s e D gireranno entrambi a destra colla medesima frequenza e perciò conserveranno tra loro una distanza angolare φ costante. La coppia mutua avrà adunque un momento costante. Essa tenderà a chiudere l' angolo φ. L' apparecchio funzionerà come dinamo o come motore secondochè s precederà D, oppure lo seguirà.

Si ha così un motore sincrono a campo alternativo. La teoria di esso, che noi abbiamo esposto in forma elementare pel caso semplice di un apparecchio bipolare, si estende senza difficoltà al caso di un apparecchio multipolare.

Il motore, come tutti i motori sincroni, non comincia a funzionare se prima di caricarlo non gli si è impressa la velocità di regime; e questa nel caso attuale è uguale al doppio di quella colla quale il motore lavorerebbe quando il suo campo magnetico fosse eccitato con una corrente costante. Ma non è difficile immaginare artifizi atti ad avviare i motori analoghi a quelli già in uso per motori di altre specie. Così per esempio si può munire un motore a $4n$ poli di un commutatore mediante il quale, nel periodo di avviamento, si possa farlo funzionare come un motore bifase a soli $2n$ poli, facendo passare in $2n$ spirali una corrente di fase spostata rispetto a quella che passa per le altre $2n$ alternate colle prime. Per tal modo si può far acquistare all'armatura una velocità molto prossima a quella del sincronismo della macchina a $2n$ poli, che è appunto il doppio di quella del sincronismo per la macchina a $4n$ poli. Quando tale velocità è approssimativamente raggiunta, per mezzo del commutatore si inseriscono tutte le $4n$ spirali in serie, od in parallelo, od in gruppi, in un medesimo circuito, ed il motore prende a funzionare normalmente come sincrono nel modo che abbiamo spiegato. Per la produzione della corrente ausiliaria, di fase spostata, adoperata nel periodo di avviamento, si può adoperare l'artifizio impiegato dal Brown pei motori asincroni monofasi, od altri consimili artifizi noti.

TEORIA GEOMETRICA
DEI CAMPI VETTORIALI
COME INTRODUZIONE ALLO STUDIO
DELLA
ELETTRICITÀ, DEL MAGNETISMO, ECC.

AVVERTENZA

Lo scritto che qui si pubblica è stato trovato fra le carte di Galileo Ferraris, senza indicazione di titolo. Si sa però che esso avrebbe dovuto costituire come un primo capitolo di un trattato completo d'elettrotecnica, e che fu redatto sotto la forma attuale in questi ultimi anni (1894 e 1895). Da un manoscritto più antico, che si proponeva gli stessi fini, risulta [1] che la 1.ª Parte del trattato si sarebbe intitolata così: " Riassunto di nozioni scientifiche che servono di fondamento all'elettrotecnica ", ed il 1.° Capitolo di essa: " Preliminari. Definizioni e teoremi generali sui vettori e sui campi di forze ". Nella nuova redazione i campi di vettori sono trattati in modo più generale che in quella più antica. E poichè tanto i concetti da cui si parte, quanto i metodi con cui vengono svolti sono essenzialmente geometrici, i risultati che si ottengono possono applicarsi non solo all'elettrotecnica, ma a tutte quelle parti della Fisica in cui compaiono campi di grandezze vettoriali. La trattazione è elementare, per modo che può esser facilmente intesa da tutti; essa ha quelle doti di semplicità e lucidità di esposizione che erano tanto ammirate negli scritti e nelle lezioni dell'illustre Autore.

Com'è noto, delle trattazioni puramente matematiche dei campi vettoriali, svolte senza fissare in modo speciale la natura

[1] Debbo queste indicazioni al chiarissimo Ing. G. B. MAFFIOTTI.

fisica dei campi stessi, s' incontrano ripetutamente nella produzione scientifica di questi ultimi tempi. Dalle citazioni contenute nel presente lavoro, come pure da un raffronto diretto, appare che esso ha profittato specialmente, oltre che di un classico trattato del Maxwell, [1] di due opere più recenti di O. Heaviside [2] e di A. Föppl. [3] Ma se ciò va avvertito per ragion di giustizia, va pure aggiunto che questo lavoro ha un carattere proprio di originalità, sì nell'insieme che in vari particolari; per modo che la sua pubblicazione riuscirà certo utilissima a chiunque s'interessi di Fisica.

Quasi tutto il manoscritto era redatto in maniera adatta per la stampa, senza che nemmeno occorressero modificazioni sensibili di forma. Solo i primi due paragrafi non erano completamente svolti, avevano in qualche parte il carattere di sommari: essi vennero completati seguendo le precise indicazioni dell' Autore, e badando alle applicazioni che poi se ne fanno. Similmente in taluni passi del seguito venne inserita qualche aggiunta che l'A. stesso, con una parola segnata in margine al manoscritto, aveva indicato di volere: come il breve art. 33, la fine dell' art. 34 relativa alla operazione ∇^2, ecc. Poche e lievi altre aggiunte e modificazioni furon fatte perchè apparivano in modo non dubbio necessarie, od almeno molto utili: come, ad esempio, un' aggiunta relativa ai segni nel ragionamento dell'art. 27 che porta all'esistenza della *rotazione* di un dato vettore, la chiusa del medesimo articolo, quella dell'art. 38, ecc. — Si è messo al principio di ogni paragrafo un *indice* particolareggiato, che potrà servire a dare subito un' idea del contenuto.

Nelle citazioni i numeri d' ordine degli *articoli* si sono distinti, mettendoli fra [ ], da quelli delle *formole*, che stanno fra ( ).

Torino, marzo, 1897.

CORRADO SEGRE.

[1] *Treatise on Electricity and Magnetism* (London, 1873).

[2] *Electromagnetic Theory*, vol. I (London, 1893): v. specialmente il capo 3.° *The Elements of vectorial Algebra and Analysis.*

[3] *Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektricität* (Leipzig, 1894). — Il lettore potrà anche consultare utilmente la *Geometrie der Wirbelfelder* dello stesso Föppl comparsa solo ora (Leipzig, 1897).

CAPITOLO I.

PRIME NOZIONI. OPERAZIONI SUI VETTORI.

§ 1.° Definizioni e notazioni. Somma di vettori.

Grandezze scalari e grandezze vettoriali. — Addizione e sottrazione di vettori. — Vettori fondamentali.

1. *Grandezze scalari e grandezze vettoriali.* — Nella Fisica compaiono grandezze di varie *specie*.

Le grandezze di una medesima specie si misurano confrontandole con una di esse, fissata come *unità* di misura. Così esse vengono a rappresentarsi mediante i *numeri* che ne dànno la misura.

Le grandezze che si considerano come pienamente determinate da tale confronto o misura, senza richiesta di altri dati, si dicono *scalari*. Tali sono le masse, le temperature, ecc. Anche un numero qualunque, positivo o negativo, è uno scalare. Ogni altra grandezza scalare, quando sia fissata l'unità di misura, si può sostituire con un numero; il quale, a seconda della specie di grandezze di cui si tratta, sarà essenzialmente positivo, oppure potrà essere positivo o negativo.

Vi sono altre specie di grandezze, alle quali sono congiunte delle direzioni nello spazio. Esse diconsi *grandezze vettoriali* o *vettori*. Tali sono le velocità, le forze, ecc. In un senso più ristretto si chiama *vettore* l'operazione con la quale si trasporta un punto per un dato tratto in una data direzione. Una grandezza vettoriale si rappresenta geometricamente con un segmento di retta avente la stessa direzione e la stessa misura: cosicchè due segmenti paralleli, di egual lunghezza e direzione rappresentano un medesimo vettore. Come alla grandezza scalare si sostituisce nella trattazione matematica il *numero* che la misura, così al vettore sostituiamo il *segmento*.

La determinazione di un vettore si può far dipendere dai seguenti due elementi:

1.° La grandezza assoluta del vettore, prescindendo dalla direzione; è questa uno scalare che dicesi *tensore*.

2.° Un vettore che abbia per grandezza l'unità *(vettore-unità)*, e per direzione quella del vettore dato: esso vien chiamato *versore* di questo. — Vettori paralleli fra loro, cioè con una stessa direzione o con direzioni opposte, si possono assumere con uno stesso versore, purchè allora si considerino i tensori come suscettibili di segno positivo o negativo.

Notazioni. — Per designare grandezze vettoriali useremo lettere grasse, come $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots$; di regola le maiuscole pei vettori qualunque, le minuscole per vettori-unità. Le grandezze scalari si rappresenteranno con le lettere ordinarie A, $B, C, \ldots; a, b, c, \ldots; \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Di un vettore $\mathbf{A}$ si designeranno ordinariamente con la stessa lettera, in altri caratteri, il tensore ed il versore: sarà cioè

$$A = \text{tensore } \mathbf{A}, \qquad \mathbf{a} = \text{versore } \mathbf{A}.$$

2. *Addizione e sottrazione di vettori.* — Consideriamo vettori della medesima specie $\mathbf{A}, \mathbf{B} \ldots$

Si rappresentino (fig. 1) $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ mediante due segmenti disposti l'uno dopo l'altro come OP e PQ: il vettore $\mathbf{C}$ rappresentato dal segmento OQ dicesi *somma* di $\mathbf{A}, \mathbf{B}$; e si scrive

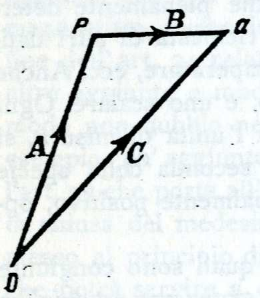

Fig. 1.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Dicesi pure che $\mathbf{B}$ è la *differenza* di $\mathbf{C}$ ed $\mathbf{A}$, e si scrive

$$\mathbf{B} = \mathbf{C} - \mathbf{A}.$$

Se i punti O e Q coincidono, il vettore $\mathbf{C}$ è nullo. Dunque, quando due vettori $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ hanno ugual grandezza ma direzioni opposte si può scrivere

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = 0,$$

ossia

$$\mathbf{B} = -\mathbf{A}.$$

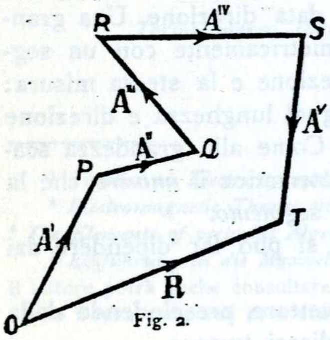

Fig. 2.

In generale, se i vettori $\mathbf{A}', \mathbf{A}''$, $\mathbf{A}''', \ldots$, in numero qualunque, si rappresentano (fig. 2) coi successivi lati $OP, PQ, QR, \ldots$ di una linea poligonale (diretti secondo un verso fissato su questa linea), il vettore $\mathbf{R}$ rappresentato dal segmento OT che chiude la poligonale si dirà *somma* (o *risultante*) di $\mathbf{A}', \mathbf{A}'', \mathbf{A}''', \ldots$, cioè

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}'' + \mathbf{A}''' + \ldots$$

Esso si può, infatti, ottenere costruendo prima il vettore $\mathbf{A}' + \mathbf{A}''$, cioè il segmento OQ; poi la somma di questo e di $\mathbf{A}'''$, cioè il segmento OR; e così via.

Proiettando (ortogonalmente) su una retta qualunque, oppure su un piano qualunque, si vede che la proiezione di $\mathbf{R}$ sarà la somma delle proiezioni di $\mathbf{A}', \mathbf{A}'', \mathbf{A}''', \ldots$; se la proiezione si fa su una retta, questa somma delle proiezioni si riduce ad una somma *algebrica*. Di qui si trae facilmente che, come un'ordinaria somma algebrica non dipende dall'ordine in cui la si effettua, così la somma di più vettori è indipendente dall'ordine nel quale i vettori si seguono.

Se più vettori sono paralleli, la loro somma è un vettore parallelo ad essi, che ha per grandezza la somma algebrica delle loro grandezze. In particolare se m vettori sono tutti uguali ad un vettore $\mathbf{A}$, la loro somma, che s'indicherà con $m\mathbf{A}$, avrà grandezza m-pla della grandezza di $\mathbf{A}$. Di qui si è condotti alla seguente definizione del *prodotto* di un vettore $\mathbf{A}$ per un numero qualunque m (intero o no, positivo o negativo), quindi anche per uno scalare qualunque: sarà cioè un vettore, la cui grandezza o tensore è il prodotto mA del tensore A di $\mathbf{A}$ per m, ed il cui versore è lo stesso che quello di $\mathbf{A}$. Come conseguenza di questa definizione, ogni vettore $\mathbf{A}$ si può riguardare come il prodotto del suo versore $\mathbf{a}$ pel suo tensore A, cioè

$$\mathbf{A} = A\,\mathbf{a}.$$

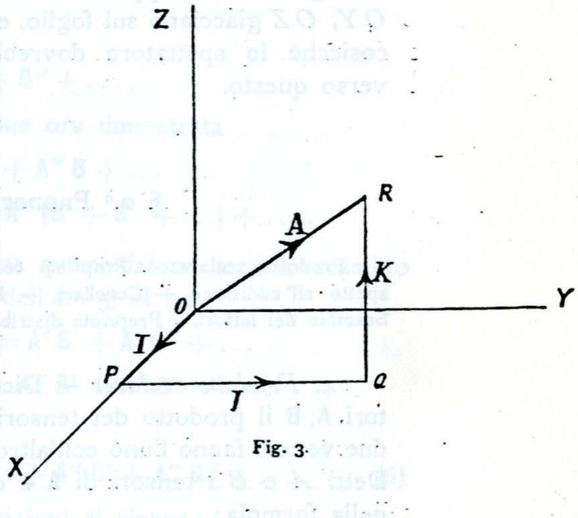

Fig. 3.

3. *Vettori fondamentali.* — Fissiamo tre direzioni qualunque non complanari, ad esempio quelle di tre assi ortogonali OX, OY, OZ, (fig. 3). Ogni vettore $\mathbf{A}$ si può considerare come la somma di tre vettori $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ aventi rispettivamente quelle direzioni (rappresentando, come in figura, $\mathbf{A}$ col segmento OR, saranno $\mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K}$ rappresentati rispettivamente da OP, PQ, QR):

$$\mathbf{A} = \mathbf{I} + \mathbf{J} + \mathbf{K}. \qquad (1)$$

Dicendo poi **i**, **j**, **k** tre vettori-unità diretti secondo le direzioni positive di quegli assi, si potrà scrivere [2]:

$$\mathbf{I} = A_1\,\mathbf{i}, \qquad \mathbf{J} = A_2\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{K} = A_3\,\mathbf{k},$$

e quindi

$$\mathbf{A} = A_1\,\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j} + A_3\,\mathbf{k}. \tag{2}$$

Qualunque vettore **A** si può così esprimere per mezzo di tre vettori-unità fissi, le cui direzioni si posson scegliere ortogonali fra loro. Questi vettori **i**, **j**, **k** si dicono *fondamentali*.

Noi fisseremo i tre vettori fondamentali **i j k** in modo che, presi in quest'ordine (o, ciò che è lo stesso, nell'ordine **j k i**, oppure **k i j**), costituiscano un sistema *destrorso*. S'intende con ciò che il vettore **i** ha la direzione nella quale bisognerebbe guardare perchè la rotazione (di un angolo retto) che porta **j** in **k** appaia fatta verso destra, cioè nel verso delle lancette di un orologio. Tale è appunto il caso della fig. 3, se s'imagina che OY, OZ giacciano sul foglio, ed OX stia sul davanti di questo: cosicchè lo spettatore dovrebbe guardare di dietro al foglio verso questo.

§ 2.° Prodotti di vettori.

Prodotto scalare. — Proprietà commutativa. — Proprietà distributiva, rispetto all'addizione. — Corollari. — Prodotto vettoriale o vettorprodotto. — Scambio dei fattori. — Proprietà distributiva, rispetto all'addizione. — Corollari.

4. *Prodotto scalare*. — Dicesi *prodotto scalare* di due vettori **A**, **B** il prodotto dei tensori e del coseno dell'angolo che i due vettori fanno l'uno coll'altro. Esso si rappresenta con **A B**. — Detti A e B i tensori di **A** e di **B**, la definizione si compendia nella formola:

$$\mathbf{A\,B} = A\,B\cos(\mathbf{A\,B}). \tag{3}$$

Osservando che $A\cos(\mathbf{A\,B})$ è la grandezza della proiezione di **A** sulla direzione di **B**, si può anche dire così: il prodotto scalare di **A** per **B** è il prodotto di B per la proiezione di **A** su di **B**.

5. *Proprietà commutativa*. — La definizione (3) dà

$$\mathbf{B\,A} = B\,A\cos(\mathbf{B\,A})\,;$$

e siccome $BA = AB$ e $\cos(\mathbf{B}\,\mathbf{A}) = \cos(\mathbf{A}\,\mathbf{B})$, così

$$\mathbf{B}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}\,\mathbf{B}. \tag{4}$$

Dunque il prodotto scalare di due vettori ha comune col prodotto di due quantità scalari questa proprietà, che *si può invertire l'ordine dei fattori* senza che muti il prodotto.

6. *Proprietà distributiva, rispetto all'addizione.* – Esso ha pure la *proprietà distributiva,* rispetto all'addizione.

È facile dimostrare in primo luogo che se

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}'' + \ldots$$

si ha

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{A}'\,\mathbf{B} + \mathbf{A}''\,\mathbf{B} + \ldots \tag{5}$$

A quest'uopo basta osservare che [4] $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ è il prodotto di B per la proiezione di $\mathbf{A}$ sulla direzione di $\mathbf{B}$; e che [2] questa proiezione è la somma delle proiezioni di $\mathbf{A}', \mathbf{A}'',\ldots$ sulla medesima direzione di $\mathbf{B}$. Ne deriva che $\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ è la somma dei prodotti di B per le proiezioni di $\mathbf{A}', \mathbf{A}'',\ldots$ su $\mathbf{B}$; ossia la somma dei prodotti $\mathbf{A}'\,\mathbf{B}$, $\mathbf{A}''\,\mathbf{B}\ldots$

Se ora anche

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \mathbf{B}'' + \ldots,$$

si ha, applicando la proposizione ora dimostrata

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\,\mathbf{B} &= \mathbf{A}'\,\mathbf{B} + \mathbf{A}''\,\mathbf{B} + \ldots \\ &= \mathbf{A}'(\mathbf{B}' + \mathbf{B}'' + \ldots) + \mathbf{A}''(\mathbf{B}' + \mathbf{B}'' + \ldots) + \ldots. \end{aligned}$$

Ma applicando ancora la stessa proposizione (con lo scambio dei fattori, permesso in causa dell'art 5) si ha

$$\mathbf{A}'(\mathbf{B}' + \mathbf{B}'' + \ldots) = \mathbf{A}'\,\mathbf{B}' + \mathbf{A}'\,\mathbf{B}'' + \ldots$$

$$\mathbf{A}''(\mathbf{B}' + \mathbf{B}'' + \ldots) = \mathbf{A}''\,\mathbf{B}' + \mathbf{A}''\,\mathbf{B}'' + \ldots,$$

ecc. Dunque

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{A}'\,\mathbf{B}' + \mathbf{A}'\,\mathbf{B}'' + \ldots + \mathbf{A}''\,\mathbf{B}' + \mathbf{A}''\,\mathbf{B}'' + \ldots \tag{6}$$

7. *Corollari.* – Dalle definizioni si ricava:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\,\mathbf{A} = A\,A\cos(0) = A^2, \tag{7}$$

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1,\ [1] \tag{8}$$

$$\mathbf{i}\,\mathbf{j} = \mathbf{j}\,\mathbf{k} = \mathbf{k}\,\mathbf{i} = 0, \tag{9}$$

[1] Nella teoria dei quaternioni di HAMILTON è invece $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$. Le definizioni da noi adottate, differenti da quelle di HAMILTON, sono le definizioni di cui si serve HEAVISIDE.

e dalla proposizione (6):

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = (A_1\,\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j} + A_3\,\mathbf{k})\,(B_1\,\mathbf{i} + B_2\,\mathbf{j} + B_3\,\mathbf{k})$$

$$= A_1\,B_1\,\mathbf{i}^2 + A_2\,B_2\,\mathbf{j}^2 + A_3\,B_3\,\mathbf{k}^2 + A_1\,B_2\,\mathbf{i}\,\mathbf{j} + A_1\,B_3\,\mathbf{i}\,\mathbf{k} + \ldots$$

$$\mathbf{A}\,\mathbf{B} = A_1\,B_1 + A_2\,B_2 + A_3\,B_3. \quad (10)$$

Ponendo $\mathbf{B} = \mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^2 = A^2_1 + A^2_2 + A^2_3. \quad (11)$$

Se $\mathbf{n}$ è un vettore-unità facente l'angolo θ con $\mathbf{A}$, la definizione di prodotto scalare dà:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{n} = A\cos\theta = \text{proiezione di } \mathbf{A} \text{ su } \mathbf{n}.$$

Se $\mathbf{n}$ e $\mathbf{m}$ sono due vettori-unità comprendenti un angolo θ, il loro prodotto scalare è:

$$\mathbf{n}\,\mathbf{m} = \cos\theta. \quad (12)$$

Ponendo $\mathbf{m}$ successivamente nei tre vettori fondamentali $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, questa relazione dà le tre seguenti:

$$\mathbf{n}\,\mathbf{i} = \cos(\mathbf{n}\,x), \quad \mathbf{n}\,\mathbf{j} = \cos(\mathbf{n}\,y), \quad \mathbf{n}\,\mathbf{k} = \cos(\mathbf{n}\,z).[1] \quad (13)$$

8. *Prodotto vettoriale o vettorprodotto.* — Dicesi prodotto vettoriale o vettorprodotto di due vettori $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ un terzo vettore $\mathbf{C}$ determinato nel seguente modo. Il suo tensore è

$$C = A\,B\,\mathrm{sen}\,(\mathbf{A}\,\mathbf{B}),$$

ossia è uguale all'area del parallelogrammo fatto su $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. La sua direzione (versore) è perpendicolare ad $\mathbf{A}, \mathbf{B}$; e propriamente è quella direzione normale al piano di $\mathbf{A}$ e di $\mathbf{B}$ che fa con $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ un sistema $\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C}$ destrorso [3]; cioè quella direzione nella quale bisognerebbe guardare per vedere $\mathbf{A}$ ruotare verso destra quando esso, descrivendo l'angolo $(\mathbf{A}\,\mathbf{B})$, venisse a portarsi su $\mathbf{B}$. Così se i vettori $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ s'immaginano giacenti nel foglio con le posizioni indicate dalla fig. 4, la direzione del loro vettorprodotto $\mathbf{C}$ è perpendicolare al piano e va dal davanti verso il dietro del foglio, ed il tensore $C =$ area $OPQR$.

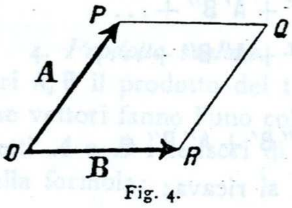

Fig. 4.

[1] Di qui si può dedurre la nota relazione

$$\cos(\mathbf{A}\,\mathbf{B}) = \cos(\mathbf{A}\,x)\cos(\mathbf{B}\,x) + \cos(\mathbf{A}\,y)\cos(\mathbf{B}\,y) + \cos(\mathbf{A}\,z)\cos(\mathbf{B}\,z).$$

Rappresentiamo il vettorprodotto $\mathbf{C}$ colla scrittura [1]

$$\mathbf{C} = \mathrm{V}\,\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,.$$

9. *Scambio dei fattori.* — Se s'inverte l'ordine dei due fattori $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ la direzione del vettorprodotto diventa, secondo la definizione, quella nella quale bisogna guardare perchè una rotazione di $\mathbf{B}$ verso $\mathbf{A}$ sia verso destra: cioè quella che nella fig. 4 viene dal dietro verso il davanti del foglio. Il tensore però rimane lo stesso, sempre uguale all'area del medesimo parallelogrammo. Dunque

$$\mathrm{V}\,\mathbf{A}\,\mathbf{B} = -\,\mathrm{V}\,\mathbf{B}\,\mathbf{A}\,. \tag{14}$$

10. *Proprietà distributiva rispetto all' addizione.* — S'immagini un piano perpendicolare a $\mathbf{B}$, e su di esso si proietti il vettore $\mathbf{A}$; la proiezione, che rappresenteremo con $\mathbf{a}$ (fig. 5), è un vettore giacente sulla retta comune a quel piano ed al piano di $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$. Il suo tensore è $a = A \operatorname{sen}(\mathbf{A}\,\mathbf{B})$, e moltiplicato per B dà $A\,B \operatorname{sen}(\mathbf{A}\,\mathbf{B})$, che è il tensore di $\mathbf{C} = \mathrm{V}\,\mathbf{A}\,\mathbf{B}$. Quanto alla direzione di $\mathbf{a}$, si osservi che $\mathbf{C}$, perpendicolare al piano di $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, è pure perpendicolare ad $\mathbf{a}$, e giace come questo vettore nel piano perpendicolare a $\mathbf{B}$; inoltre rispetto a $\mathbf{C}$ la rotazione che sovrappone la direzione di $\mathbf{a}$ a quella di $\mathbf{B}$ appare fatta nello stesso verso di quella che porta $\mathbf{A}$ in $\mathbf{B}$, e quindi [8] la terna $\mathbf{C}\,\mathbf{a}\,\mathbf{B}$ è destrorsa. Concludiamo che il vettore $\mathbf{a}$, moltiplicato per lo scalare B, e fatto girare attorno a $\mathbf{B}$ di un angolo retto verso sinistra (rispetto a chi guarda nella direzione $\mathbf{B}$) diventa uguale a $\mathbf{C}$, ossia al vettorprodotto $\mathrm{V}\,\mathbf{A}\,\mathbf{B}$.

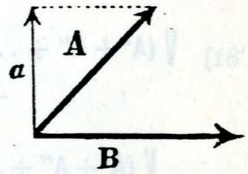

Fig. 5.

Da questa costruzione del vettorprodotto si trae facilmente che anche i prodotti vettoriali, come i prodotti scalari, godono della proprietà distributiva, rispetto alla somma. Sia dapprima:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}'' + \ldots$$

Si considerino i vettorprodotti $\mathrm{V}\,\mathbf{A}'\,\mathbf{B}$, $\mathrm{V}\,\mathbf{A}''\,\mathbf{B}, \ldots$ Salvo una rotazione intorno a $\mathbf{B}$, che è la stessa per tutti, ed una moltiplicazione per lo scalare B, essi sono rappresentati dalle proiezioni $\mathbf{a}'$, $\mathbf{a}'', \ldots$ di $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}'', \ldots$ su di un piano perpendicolare a $\mathbf{B}$.

[1] Introdotta da HAMILTON ed usata da HEAVISIDE e da FÖPPL, salvo lievi differenze.

La loro somma dunque, salvo sempre la suddetta rotazione e la moltiplicazione per B, è rappresentata dalla somma vettoriale $\mathbf{a}' + \mathbf{a}'' + \ldots$, cioè [2] dalla proiezione $\mathbf{a}$ di $\mathbf{A}$ sul piano perpendicolare a $\mathbf{B}$. Ora il vettore $\mathbf{a}$, con quella stessa rotazione intorno a $\mathbf{B}$ e moltiplicazione per B, ci dà pure $\bigvee \mathbf{A}\,\mathbf{B}$. Dunque

$$\bigvee (\mathrm{A}' + \mathrm{A}'' + \ldots)\,\mathrm{B} = \bigvee \mathrm{A}'\,\mathrm{B} + \bigvee \mathrm{A}''\,\mathrm{B} + \ldots$$

Similmente si dimostra, oppure si può dedurre dall'ultimo risultato e dalla proposizione (14), che

$$\bigvee \mathrm{A}\,(\mathrm{B}' + \mathrm{B}'' + \ldots) = \bigvee \mathrm{A}\,\mathrm{B}' + \bigvee \mathrm{A}\,\mathrm{B}'' + \ldots$$

Infine, applicando successivamente l'una e l'altra relazione, si ha

$$\bigvee (\mathrm{A}' + \mathrm{A}'' + \ldots)\,(\mathrm{B}' + \mathrm{B}'' + \ldots) = \bigvee \mathrm{A}'\,(\mathrm{B}' + \mathrm{B}'' + \ldots) + \\ + \bigvee \mathrm{A}''\,(\mathrm{B}' + \mathrm{B}'' + \ldots) + \ldots;$$

$$\left.\begin{aligned} \bigvee (\mathrm{A}' + \mathrm{A}'' + \ldots)\,(\mathrm{B}' + \mathrm{B}'' + \ldots) &= \bigvee \mathrm{A}'\mathrm{B}' + \bigvee \mathrm{A}'\mathrm{B}'' + \ldots \\ &+ \bigvee \mathrm{A}''\mathrm{B}' + \bigvee \mathrm{A}''\mathrm{B}'' + \ldots; \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

cioè la proprietà distributiva nel senso più generale. Nell'applicarla devesi badare nei singoli prodotti parziali all'ordine dei due fattori [9].

11. *Corollari.* — Consideriamo tre vettori-unità $\mathbf{l}, \mathbf{r}, \mathbf{a}$, che, messi in quest'ordine, costituiscano un sistema destrorso; e supponiamo che $\mathbf{a}$ sia perpendicolare al piano di $\mathbf{l}$ e di $\mathbf{r}$ e che questi comprendano tra di loro un angolo uguale a θ. Le esposte definizioni, applicate a questi vettori-unità, dànno:

$$\bigvee \mathrm{l}\,\mathrm{r} = \mathrm{a}\,\mathrm{sen}\,\theta. \quad (16)$$

Se $\theta = 0$, questa dà:

$$\bigvee \mathrm{l}\,\mathrm{r} = 0, \quad (16')$$

e se $\theta = 90°$:

$$\bigvee \mathrm{l}\,\mathrm{r} = \mathrm{a}. \quad (16'')$$

Applicando queste relazioni ai tre vettori fondamentali $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, si hanno le seguenti relazioni importanti:

$$\left.\begin{aligned} &\vee\,\mathbf{i}\,\mathbf{i} = \vee\,\mathbf{j}\,\mathbf{j} = \vee\,\mathbf{k}\,\mathbf{k} = 0; \\ &\vee\,\mathbf{i}\,\mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \vee\,\mathbf{j}\,\mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \vee\,\mathbf{k}\,\mathbf{i} = \mathbf{j}. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Se poi si pone

$$\mathbf{A} = A_1\,\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j} + A_3\,\mathbf{k}, \qquad \mathbf{B} = B_1\,\mathbf{i} + B_2\,\mathbf{j} + B_3\,\mathbf{k},$$

e si svolge il prodotto $\vee\,\mathbf{A}\,\mathbf{B}$ per mezzo della proposizione [10], tenendo conto delle (17) e raccogliendo i termini in $\mathbf{i}$, in $\mathbf{j}$ ed in $\mathbf{k}$, si ha:

$$\vee\,\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \mathbf{i}\,(A_2 B_3 - A_3 B_2) + \mathbf{j}\,(A_3 B_1 - A_1 B_3) + \mathbf{k}\,(A_1 B_2 - A_2 B_1) \tag{18}$$

od anche

$$\vee\,\mathbf{A}\,\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}. \tag{18'}$$

CAPITOLO II.

CAMPO DI UN VETTORE.

§ 1.° Definizioni.

Campo. — Distribuzione. — Rappresentazione fisica del campo. — Linee di flusso e superficie di livello.

12. *Campo.* — Noi diciamo *campo* di un vettore lo spazio entro al quale il vettore esiste o dentro al quale lo si vuole considerare.

Un campo può abbracciare tutto lo spazio infinito, oppure può essere limitato da una o da più superficie chiuse.

Esso poi può essere *aciclico* o *ciclico*. Per le applicazioni a cui miriamo, importa ricordare il significato di questa distinzione. Noi diciamo che una regione è *aciclica* quando qualunque linea chiusa, in essa situata, può per mezzo di una graduale contrazione, ridursi ad un semplice punto senza mai cessare di essere chiusa e senza che una parte qualunque di essa esca mai dalla regione. Per esempio le due parti nelle quali una superficie sferica divide lo spazio indefinito, l'interno cioè e l'esterno della sfera, sono regioni acicliche; e così pure lo spazio compreso fra due superficie sferiche concentriche.

Diciamo invece che una regione è *ciclica* quando è possibile tracciare dentro di essa qualche linea chiusa tale che non si possa per mezzo di una graduale contrazione ridurre ad un semplice punto senza che essa si apra, o che una qualche parte di essa esca dalla regione. Per esempio sono cicliche le due parti dello spazio separate dalla superficie $P_1 Q_1$ $P_2 Q_2$ (fig. 6) di un toro o di un anello. Infatti nella regione interna si possono tracciare linee come PQ le quali non possono, rimanendo sempre chiuse, contrarsi in un punto senza uscire dalla superficie del toro; e similmente nella regione esterna si possono tracciare linee chiuse, come la RS, le quali non possono rimaner chiuse e nel tempo stesso contrarsi in un unico punto senza che qualche parte di esse entri nella regione interna.

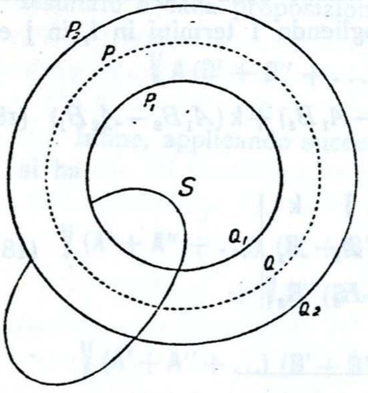

Fig. 6.

Notiamo che le linee PQ ed RS ora considerate, sono collocate l'una rispetto all'altra come due anelli consecutivi di una catena. È questa una disposizione della quale ci occorrerà spesso parlare; per indicarla diremo che le due linee sono l'una coll'altra *concatenate.*

Quando una linea chiusa si riduce ad un punto per mezzo di una graduale contrazione, come abbiamo immaginato, essa prende infinite forme e posizioni successive, l'una all'altra infinitamente vicine. Così essa genera una superficie continua della quale essa costituisce l'*intiero* contorno. Si possono adunque presentare altrimenti le precedenti definizioni, e dire: Una regione si dice aciclica quando per qualunque linea chiusa data dentro di essa si può condurre una superficie la quale sia intieramente situata nella regione e della quale la linea chiusa data costituisca l'*intiero* contorno.

Una regione ciclica come quella che abbiamo considerato, p. e. la regione interna di un toro, si trasforma in una regione aciclica se si fa in essa una sezione AB (fig. 7) e se le due faccie di questa si considerano come parti della superficie limitante la regione; se in altri termini si esclude dal campo lo spazio compreso tra due superficie infinitamente vicine ad AB in modo che il campo risulti limitato dalla superficie chiusa formata dalla superficie del toro e dalle due dette superficie infinitamente vicine. Dopo ciò una linea non si può più considerare come tutta contenuta nel campo se essa come la PQ della fig. 6 attraversa la sezione AB. Ora le linee chiuse che non attraversano la sezione AB come la pqr della fig. 7 possono tutte per contrazione ridursi a un punto senza aprirsi e senza uscire dal campo medesimo; tutte, come la pqr, possono costituire il contorno completo di superficie situate intieramente nel campo.

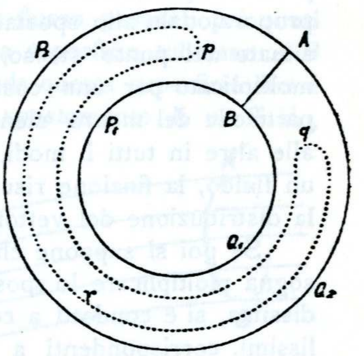

Fig. 7.

In casi meno semplici occorrono, invece di una semplice sezione AB, più sezioni; si hanno ciclosi di ordine superiore; ma sempre, con un conveniente numero di sezioni, è possibile trasformare una regione qualunque da ciclica in aciclica.

13. *Distribuzione. Rappresentazione fisica del campo.* — Nel campo di un vettore il tensore ed il versore di questo variano, in generale, da punto a punto, ma per ogni punto sono determinati. Il tensore dicesi anche *valore,* ed in alcuni casi *intensità* del campo nel punto considerato; il versore definisce la *direzione* del campo nel punto stesso. Si dice che è nota la *distribuzione* del vettore quando per ogni punto del campo si conosce il valore e la direzione di esso.

Se non faremo osservazione in contrario, noi riterremo sempre che nel campo considerato la distribuzione non presenti alcuna discontinuità. In tutti i casi potremo sempre fare sì che questa condizione sia soddisfatta, limitando il campo considerato per mezzo di superficie, le quali escludono da esso le regioni ove si presentano discontinuità; od anche sostituendo col pensiero ad una variazione discontinua una variazione rapida sì, ma continua. Nelle considerazioni di fisica quest'ultimo modo di considerare le rapide variazioni corrisponde spesso alla realtà fisica delle cose meglio del concetto puramente matematico della discontinuità.

Per rappresentarci nella mente la distribuzione del vettore, giova in molti casi ricorrere ad una finzione, colla quale si materializza il campo e lo si rende, per così dire, tangibile. Si immagina che il campo sia ripieno di una materia, o come si suol dire, di un *mezzo* costituito da punti materiali, che questi punti si spostino e che in ogni punto del campo il vettore sia proporzionale allo spostamento del punto materiale inizialmente situato nel punto stesso, sia cioè uguale a tale spostamento moltiplicato per una costante scalare. Se si immagina che le particelle del mezzo sieno libere di spostarsi le une rispetto alle altre in tutti i modi, se cioè si immagina che il corpo sia un fluido, la finzione risulta possibile e legittima, qualunque sia la distribuzione del vettore che si vuol considerare.

Se poi si suppone che la costante scalare per la quale bisogna moltiplicare lo spostamento per avere il vettore sia grandissima, si è condotti a considerare soltanto spostamenti piccolissimi, corrispondenti a deformazioni piccolissime del mezzo. In questo modo la continuità nella distribuzione del vettore corrisponde alla continuità nella deformazione di un corpo; e la rappresentazione del campo riesce singolarmente chiara ed istruttiva.

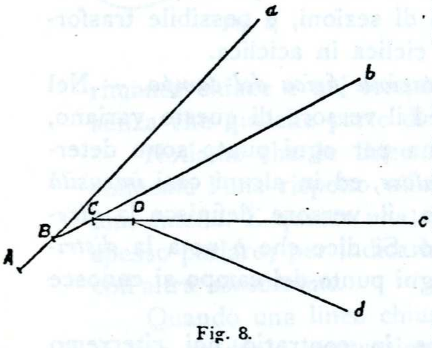

Fig. 8.

14. *Linee di flusso e superficie di livello.* — Questa è una rappresentazione fisica del campo, la quale può giovare in molti casi ad aiutare il pensiero, e dalla quale sono derivate alcune locuzioni che dovremo stabilire.

Per descrivere un campo in modo che si veda chiaramente come in esso vari il vettore da punto a punto giovano rappresentazioni geometriche, e per arrivare a queste giova considerare nel campo le *linee di flusso* e le *superficie di livello.*

Linea di flusso dicesi una linea tangente in ogni suo punto al vettore ivi esistente. In un punto A del campo il vettore abbia la direzione $A\,a$ (fig. 8). Si prenda su $A\,a$ un punto B infinitamente vicino ad A, e sia $B\,b$ la direzione che in esso ha il vettore. Sia similmente C un punto preso su Bb e Cc la direzione del vettore nel medesimo, e così via. La linea poligonale $A\,B\,C\ldots$ ha per limite una curva tangente al vettore in ogni suo punto: una linea di flusso. Nella rappresentazione fisica per mezzo di un fluido una linea di flusso è una linea della quale tutti i punti si spostano lungo la linea stessa. Questa interpretazione dà ragione della denominazione.

Per ogni punto del campo si può far passare una linea di flusso.

Il luogo geometrico delle linee di flusso passanti pei punti di una linea chiusa $A\,B$ (fig. 9) è una superficie tubulare $A\,B\,A'\,B'\ldots$ Il solido geometrico limitato da questa superficie dicesi un *tubo di flusso*. Nella ipotesi dello spostamento di un fluido, tutto il fluido che prima dello spostamento era in un tubo di flusso, dopo dello spostamento è ancora dentro di esso, esso si muove lungo il tubo, fluisce in esso; quindi il nome.

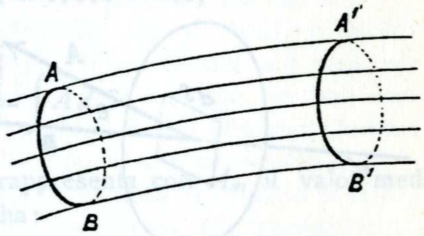

Fig. 9.

Superficie di livello dicesi una superficie la quale sia normale in ogni suo punto al vettore ivi esistente. Si dimostra facilmente per via analitica che: quando la distribuzione del vettore soddisfa una certa condizione, esistono infinite superficie di livello, sì che per ogni punto del campo se ne può far passare una.

Supposto ciò, si può per mezzo di linee di flusso e di superficie di livello convenientemente scelte e rappresentate in un disegno od in un modello fare un reticolato che dia un'idea della distribuzione del vettore. Come un tale reticolato serva a mostrare in un colpo d'occhio il modo nel quale da punto a punto varia la direzione del vettore è evidente senz'altro. Noi vedremo fra poco come in alcuni casi importanti, mediante opportune convenzioni ed una conveniente scelta delle linee e delle superficie rappresentate, esso possa anche indicare il modo di variare della grandezza del vettore.

§ 2.° Integrale su di una superficie. Divergenza.

Flusso attraverso ad un elemento di superficie; flusso attraverso ad una superficie finita. — Flusso attraverso ad una superficie chiusa. — Divergenza. — Espressione analitica della divergenza. — Teorema della divergenza. — Distribuzione solenoidale. — Tubi unità. Rappresentazione del campo con un modello. — Variazione del vettore lungo un tubo di flusso sottilissimo.

15. *Flusso attraverso ad un elemento di superficie.* — Nel campo del vettore **A** si consideri un elemento di superficie piana di area dS (fig. 10); sulla normale al piano di questo elemento si scelga una direzione positiva, e si rappresenti con **n** un vettore unità avente tale direzione. Dicesi *flusso* del vettore **A** attraverso all'elemento piano dS nella direzione **n** il prodotto scalare **A n** dS. Rappresentandolo con $d\varphi$, si ha:

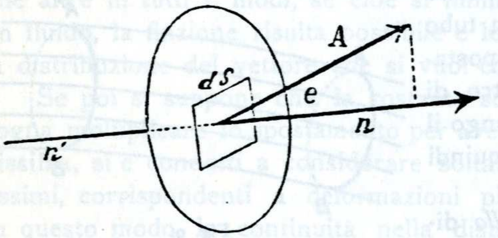

Fig. 10.

$$d\varphi = \mathbf{A}\,\mathbf{n}\,dS. \qquad (19)$$

Il prodotto scalare **A n** è [7] la proiezione del vettore **A** sulla normale all'elemento, cioè la componente del vettore presa nella direzione della normale positiva. Se rappresentiamo con A_n questa componente, possiamo anche scrivere:

$$d\varphi = A_n\,dS; \qquad (19')$$

e se diciamo θ l'angolo di **A** colla normale positiva **n**:

$$d\varphi = A \cos\theta\,dS. \qquad (19'')$$

Il flusso $d\varphi$ è una quantità scalare, la quale cambia di segno quando si inverte la direzione scelta per la normale positiva. Se $d\varphi'$ è il flusso nella direzione **n'**, si ha $d\varphi' = -d\varphi$.

Se il vettore **A** è la somma di più altri **A'**, **A''**, ..., se cioè $\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}'' + \ldots$, si ha per la proprietà distributiva dei prodotti scalari:

$$\mathbf{A}\,\mathbf{n}\,dS = \mathbf{A}'\,\mathbf{n}\,dS + \mathbf{A}''\,\mathbf{n}\,dS + \ldots,$$

il che vuol dire che il flusso della somma di più vettori è uguale alla somma dei flussi dei vettori componenti.

Flusso attraverso ad una superficie finita. — Dicesi flusso attraverso ad una superficie S (fig. 10) la somma dei flussi attraverso agli elementi di essa. Rappresentandolo con φ, abbiamo dalle (19) (19') (19''):

$$\varphi = \int_S \mathbf{A}\,\mathbf{n}\, d\,S = \int_S A_n\, d\,S = \int_S A \cos\theta\, d\,S. \qquad (20)$$

L'indice S posto al piede del segno d'integrazione serve a ricordare che l'integrazione si deve estendere a tutta la superficie S.

Se la superficie S è una porzione di una superficie di livello, si ha

$$\mathbf{A}\,\mathbf{n} = A_n = A\cos\theta = A,$$

e quindi

$$\varphi = \int_S A\, d\,S.$$

In questo caso, se si rappresenta con A_m il valor medio di A sulla superficie S, si ha:

$$A_m = \frac{1}{S}\int_S A\, d\,S = \frac{\varphi}{S}.$$

Se poi la distribuzione è tale, o la superficie S è talmente piccola, che su di essa A sia o si possa ritenere come costante, si ha esattamente o per approssimazione $A_m = A$, e quindi:

$$A = \frac{\varphi}{S}.$$

In questo caso si può ricavare il valore del vettore dal valore del flusso attraverso ad una porzione S di una superficie di livello; basta a quest'uopo dividere il flusso per la superficie.

Se S è una parte della superficie laterale di un tubo di flusso, θ è un angolo retto, e quindi $\mathbf{A}\,\mathbf{n} = A_n = A\cos\theta = 0$; quindi $\varphi = 0$.

Nella rappresentazione fisica del campo fatta per mezzo della finzione di un fluido che riempie il campo e che in esso si sposta [13], il flusso prende un significato che ne giustifica il nome. Se infatti si suppone che il vettore $\mathbf{A}$ rappresenti lo spostamento di una particella del fluido, $A_n\, d\,S$ rappresenta il volume di fluido che ha attraversato l'elemento dS, ed il flusso φ rappresenta il volume di fluido che ha attraversato l'intera superficie S.

Se l'elemento dS appartiene ad una superficie di livello, se cioè $\mathbf{n}$ è tangente ad una linea di flusso, il volume di fluido che ha attraversato la superficie dell'elemento è $A\,dS$. Quindi il tensore A rappresenta il volume di fluido che passa a traverso di una unità superficiale presa su di una superficie di livello; il volume di fluido che passa a traverso di un elemento di questa superficie, riferito all'unità superficiale. A questo volume si dà il nome di *spostamento* nel punto del campo considerato.

Qui noi abbiamo supposto che il vettore $\mathbf{A}$ rappresenti lo spazio percorso da una particella del mezzo. Se supponiamo che esso sia semplicemente proporzionale a tale spazio, che cioè esso sia uguale a tale spazio, moltiplicato per una costante scalare, troviamo che il flusso φ rappresenta il volume di fluido passato attraverso alla superficie moltiplicato per la medesima costante scalare. Il tensore A è in questo caso semplicemente proporzionale allo spostamento dianzi definito. Se supponiamo che il movimento del mezzo si compia nel tempo infinitesimo τ, e se diamo alla costante scalare ora considerata il valore $\frac{1}{\tau}$, il vettore $\mathbf{A}$ rappresenta la velocità del movimento, ed il flusso φ rappresenta la quantità di fluido che passa attraverso alla superficie in una unità di tempo.

16. *Flusso attraverso ad una superficie chiusa.* — È importante il caso nel quale S è una superficia chiusa. In questo caso se $\mathbf{n}$ è sulla normale esterna, φ si può denominare il flusso *uscente* dalla superficie; se $\mathbf{n}$ è sulla normale interna, si può denominare flusso *entrante* nella superficie. Si può anche dire nel primo caso: flusso uscente dallo spazio, o dalla regione, o dal volume, contornato dalla superficie S, e nel secondo caso: flusso entrante nello spazio, nella regione o nel volume medesimo.

Immaginiamo che il volume V racchiuso nella superficie chiusa S sia in un modo qualunque diviso in un certo numero di parti v. Noi possiamo considerare il flusso uscente dal volume totale V e quelli uscenti dalle singole parti v di tale volume. È facile vedere che se dentro alla superficie S la distribuzione del vettore non presenta discontinuità, la somma dei flussi uscenti dai volumi parziali v è uguale al flusso uscente dall'intiero volume V. Per dimostrare ciò basta considerare due qualunque delle parti v le quali siano contigue l'una all'altra, per esempio le parti p e q (fig. 11), le quali combaciano colla faccia comune $abcd$. Il flusso che attraversa la superficie $abcd$ (quando sulla normale di questa si scelga un verso positivo) esce da uno dei due volumi p e q ed entra nell'altro; esso è una parte positiva del flusso uscente dal primo ed una parte positiva del flusso entrante nel secondo, ossia una parte negativa del flusso uscente dal secondo; per ciò nella somma dei flussi uscenti da p e da q esso dà due termini uguali e di segni contrari, i quali si elidono. Rimangono non elisi solamente i flussi attraverso a quelle faccie dei v le quali fanno parte della superficie S; e la somma di questi flussi costituisce appunto il flusso uscente da S.

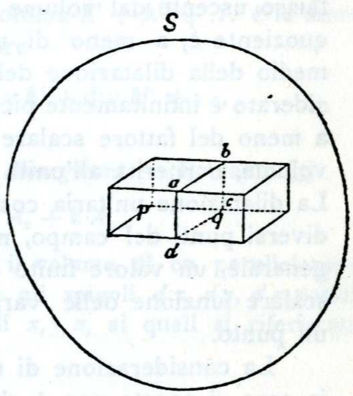

Fig. 11.

Lo stesso evidentemente si può dire dei flussi entranti.

17. *Divergenza.* — La proposizione precedente sussiste qualunque siano le grandezze ed il numero delle porzioni nelle quali il volume V è stato diviso; essa rimane vera anche quando esse siano infinitamente piccole. E per tal modo il calcolo del flusso uscente da una superficie chiusa qualunque si può ridurre a quello di una somma di flussi uscenti da elementi di volume. Importa adunque fermare l'attenzione sul flusso uscente da un volume infinitesimo per chiarirne il significato e per vedere come esso dipenda dal volume medesimo.

A quest'uopo torna utile ricorrere alla rappresentazione fisica [13] per mezzo della finzione di un fluido riempiente il campo. Se si fa tale finzione, il flusso uscente da una superficie chiusa è proporzionale al volume di fluido che nell'atto dello spostamento esce dalla superficie medesima. Nelle applicazioni, alle quali miriamo, converrà spesso supporre che il fluido abbia un volume invariabile come se fosse un liquido incompressibile tenuto a temperatura costante. Allora noi dovremo immaginare che nella regione limitata dalla superficie chiusa considerata v'abbia una sorgente la quale somministri un volume di fluido uguale a quello uscito dalla superficie stessa. Per le considerazioni attuali è invece più semplice e più chiaro immaginare che l'uscita del fluido dalla superficie sia dovuta ad una dilatazione del fluido e in questo modo il flusso uscente dalla superficie dà, a meno di un fattore scalare costante, la misura della dilatazione.

Consideriamo la cosa in quest' ultimo modo e dividiamo il flusso uscente dal volume considerato pel volume medesimo; il quoziente è, a meno di un fattore scalare costante, il valore medio della dilatazione dell' unità di volume; se il volume considerato è infinitamente piccolo, il quoziente rappresenta, sempre a meno del fattore scalare costante, la dilatazione dell' unità di volume, o riferita all'unità di volume, nell'elemento considerato. La dilatazione unitaria così calcolata è in generale diversa nei diversi punti del campo, ma in ogni singolo punto essa ha, in generale, un valore finito e determinato; essa è una grandezza scalare funzione delle variabili che definiscono la posizione di un punto.

La considerazione di un fluido che riempie il campo e che in esso si sposta non è che una finzione; ma, come notammo, tale finzione è sempre possibile e legittima, qualunque del resto sia la natura del vettore di cui si tratta. Perciò le conclusioni precedenti si possono estendere a tutti i casi. Per noi intanto l'esempio trattato, benchè non necessario, ha servito a mettere in chiaro su un caso tangibile il fatto che se si divide il flusso uscente da una superficie chiusa pel volume in questa racchiuso, il quoziente tende, col diminuire di tale volume, verso un limite finito e determinato; esso inoltre ha servito a mostrare l'utilità che può esservi di considerare un tale limite.

Se diciamo $d v$ un elemento di volume e $d \varphi$ il flusso del vettore **A** uscente da esso, il limite ora considerato si rappresenta con $\frac{d \varphi}{d v}$. Esso è una grandezza scalare funzione delle variabili colle quali si definisce la posizione del punto di cui si tratta. Maxwell, il quale adoperando l'analisi de' quaternioni di Hamilton era stato più naturalmente condotto a considerare il flusso entrante, aveva proposto di dare il nome di *convergenza* del vettore **A** alla grandezza $-\frac{d \varphi}{d v}$; Heaviside, imitando questa proposta, denominò la grandezza $\frac{d \varphi}{d v}$, che noi consideriamo, *divergenza* del vettore **A**. Questa locuzione che, senza alludere ad alcuna interpretazione fisica del campo, ricorda chiaramente il significato geometrico della grandezza di cui si tratta, è convenientissima. La divergenza di **A** si rappresenta colla scrittura: div **A**. La sua definizione sta nella formola:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{d\varphi}{dv}. \qquad (21)$$

Poichè [15] il flusso della somma $\mathbf{A}' + \mathbf{A}'' + \ldots$ è la somma dei flussi di $\mathbf{A}', \mathbf{A}'' \ldots$, si ha pure

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}' + \mathbf{A}'' \ldots) = \operatorname{div} \mathbf{A}' + \operatorname{div} \mathbf{A}'' + \ldots.$$

18. *Espressione analitica della divergenza.* — Poniamo [3]

$$\mathbf{A} = \mathbf{i}\, A_1 + \mathbf{j}\, A_2 + \mathbf{k}\, A_3,$$

e supponiamo che dv sia (fig. 12) il volume di un parallelepipedo $a\,b\,c\,d\,a'\,b'\,c'\,d'$ infinitesimo avente gli spigoli dx, dy, dz paralleli ai tre assi di coordinate ortogonali x, y, z, ai quali si riferiscono i

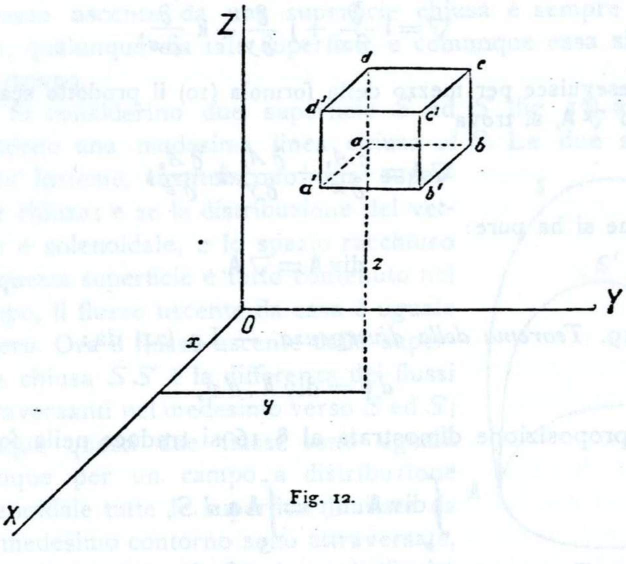

Fig. 12.

vettori fondamentali **i**, **j**, **k**. Attraverso alla faccia $a\,b\,c\,d$ perpendicolare all'asse OX entra nel parallelepipedo un flusso uguale ad $A_1\, dy\, dz$; ed attraverso alla faccia opposta $a'\,b'\,c'\,d'$ esce dal parallelepipedo un flusso uguale ad

$$\left(A_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x}\, dx\right) dy\, dz;$$

quindi in tutto, nella direzione OX esce un flusso uguale alla differenza dei due, cioè

$$\frac{\partial A_1}{\partial x}\, dx\, dy\, dz, \text{ ossia } \frac{\partial A_1}{\partial x}\, dv.$$

Similmente nelle direzioni OY ed OZ escono i flussi

$$\frac{\partial A_2}{\partial y}\, dv, \qquad \frac{\partial A_3}{\partial z}\, dv.$$

Perciò il flusso totale uscente dalla superficie del parallelepipedo è

$$d\varphi = \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dv,$$

e la (21) dà:

$$\operatorname{div} \mathsf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}. \tag{21'}$$

Se si pone simbolicamente:

$$\nabla = \mathsf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathsf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathsf{k}\frac{\partial}{\partial z}, \tag{22}$$

e si eseguisce per mezzo della formola (10) il prodotto scalare simbolico $\nabla \mathsf{A}$, si trova

$$\nabla \mathsf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z};$$

dunque si ha pure:

$$\operatorname{div} \mathsf{A} = \nabla \mathsf{A}. \tag{21''}$$

19. *Teorema della divergenza.* — La (21) dà:

$$d\varphi = \operatorname{div} \mathsf{A} . dv,$$

e la proposizione dimostrata al § 16 si traduce nella formola

$$\int_v \operatorname{div} \mathsf{A} . dv = \int_S \mathsf{A}\, \mathsf{n}\, dS, \tag{23}$$

ove cogli indici v ed S messi al piede dei segni $\int$ si vuole ricordare che il primo integrale è esteso a tutto il volume racchiuso dentro alla superficie S ed il secondo è esteso a tutta questa superficie.

Sotto questa forma la proposizione viene detta: *teorema della divergenza.* Essa dice che se nell'interno di una superficie chiusa la distribuzione del vettore non presenta discontinuità, l'integrale della divergenza esteso a tutto il volume limitato da tale superficie è uguale all'integrale del vettore esteso a tutta la superficie e calcolato prendendo come positiva la normale esterna. In altri termini: *l'integrale della divergenza estesa a tutta una regione, nella quale la distribuzione non presenta discontinuità, è uguale al flusso uscente dalla regione medesima.*

20. *Distribuzione solenoidale.* — Se in tutti punti di una regione la divergenza è uguale a zero, la distribuzione del vettore dicesi *solenoidale*.

La condizione perchè la distribuzione sia solenoidale si esprime analiticamente colla equazione:

$$\nabla \mathbf{A} = 0. \tag{24}$$

Pel teorema della divergenza [19] la definizione equivale a quest'altra: Un vettore ha una distribuzione solenoidale quando il flusso uscente da una superficie chiusa è sempre uguale a zero, qualunque sia tale superficie e comunque essa sia situata nel campo.

Si considerino due superficie S ed S' (fig. 13) aventi per contorno una medesima linea chiusa AB. Le due superficie, prese insieme, costituiscono una superficie chiusa; e se la distribuzione del vettore è solenoidale, e lo spazio racchiuso da questa superficie è tutto contenuto nel campo, il flusso uscente da essa è uguale a zero. Ora il flusso uscente dalla superficie chiusa SS' è la differenza dei flussi attraversanti nel medesimo verso S ed S'; dunque questi due flussi sono uguali. Dunque per un campo a distribuzione solenoidale tutte le superficie limitate da un medesimo contorno sono attraversate, in un dato verso, da flussi uguali (finchè gli spazi che esse racchiudono sono completamente contenuti nel campo). In altri termini il flusso attraverso ad una superficie avente per contorno una linea chiusa AB è perfettamente determinato quando è data questa linea, dipende soltanto da questa linea. Esso si può denominare il flusso passante dentro alla linea AB, od abbracciato da questa, o con questa concatenato.

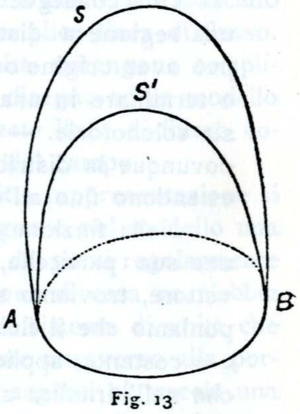

Fig. 13

In un campo a distribuzione solenoidale si consideri un tubo di flusso, e lo si tagli per mezzo di due superficie qualunque AB, $A'B'$ (fig. 14). Risulta così una superficie chiusa $ABB'A'$, e poichè la distribuzione del vettore è solenoidale, per definizione il flusso totale uscente da questa superficie è uguale a zero. Ma il flusso uscente dalla superficie laterale del tubo è per sè stesso uguale a zero [15] dunque è uguale a zero anche la somma dei flussi uscenti attraverso alle due sezioni AB, $A'B'$. Se diciamo φ e φ' questi due flussi, abbiamo

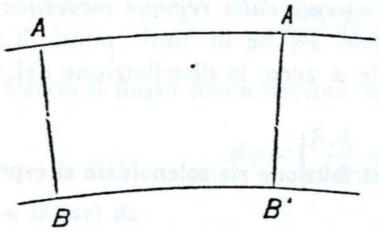

Fig. 14.

$$\varphi + \varphi' = o, \text{ ossia } \varphi = -\varphi'.$$

L'avere i due flussi segni contrari significa che se uno di essi esce dallo spazio $ABB'A'$, l'altro vi entra, vale a dire che i due flussi hanno la medesima direzione. Essi poi sono numericamente uguali. Ora le sezioni AB, $A'B'$ sono scelte in modo qualunque; dunque concludiamo che attraverso a tutte le sezioni del tubo il flusso ha un medesimo valore ed un medesimo verso: *lungo un tubo di flusso il flusso è costante.*

Una conseguenza di questa proprietà è che nell'interno di una regione a distribuzione solenoidale nessun tubo di flusso può aver origine o termine; nessuna linea di flusso può nascere o terminare in una parte del campo nella quale la distribuzione sia solenoidale. — Se il campo abbraccia tutto lo spazio, e se dovunque la distribuzione è solenoidale, le linee di flusso o si estendono fino all'infinito o sono linee chiuse.

Nella finzione di un fluido tale che lo spazio percorso da una sua particella, oppure la velocità di questa rappresenti il vettore, troviamo sempre una distribuzione solenoidale se supponiamo che il fluido abbia un volume invariabile. L'equazione $\varphi =$ costante, applicata alle sezioni di un canale è l'equazione che nell'idraulica si dice " della continuità „; l'equazione:

$$\nabla \mathsf{A} = o,$$

è l'equazione della continuità nel caso più generale.

Un campo a distribuzione solenoidale si può dividere in tante porzioni, finite, od infinitesime, tubolari, in ciascuna delle quali il flusso del vettore è costante, come sarebbe quello della velocità di un fluido a volume invariabile che la riempisse. Ciò spiega la locuzione: solenoidale.[1]

21. *Tubi unità.* — Quando il flusso attraverso alle sezioni di un tubo di flusso è uguale a quello che nel sistema di misure adottato si prende per unità, il tubo dicesi *tubo unità*.

Un tubo di flusso qualunque si può sempre scomporre in tubi unità; esso si può sempre considerare come un fascio di tali tubi. — Tutto il campo, se solenoidale, si può dividere in tubi unità. Il flusso attraverso ad una superficie qualunque tracciata nel campo è uguale al numero di tubi unità che attraversano tale superficie; il flusso passante dentro ad una linea chiusa è uguale al numero di tubi unità abbracciati da questa.

Egli è dalla considerazione dei tubi unità e della composizione del campo ora descritta, che si deriva un modo di rappresentare un campo a distribuzione solenoidale, del quale si fa uso di continuo nella elettrologia e nel quale trovano la loro spiegazione alcune locuzioni di uso frequentissimo.

Ecco in che cosa tale rappresentazione consiste. Si immagini il campo scomposto, come sovra si disse, in tubi unità; e poi, come per renderli visibili, si finga che questi tubi si contraggano trasversalmente, si assottiglino, in modo da distaccarsi gli uni dagli altri; si immagini anzi che la contrazione proceda tanto che i tubi unità si riducano infinitamente sottili e che ciascuno di essi venga a confondersi con una semplice linea di flusso. Così a rappresentare i primitivi tubi unità rimangono semplicemente altrettante linee di flusso. — Un disegno od un modello nel quale sieno disegnate o costrutte queste linee di flusso costituisce la rappresentazione o la mappa del campo.

Per eseguire materialmente la descritta rappresentazione si può procedere così: si traccia nel disegno o nel modello una superficie di livello. Su questa si segnano dei punti regolarmente distribuiti, in modo che su ciascuna porzione di essa ve n'abbia un numero uguale a quello, dal quale, nel sistema di unità che si sarà scelto, è espresso il flusso passante attraverso alla porzione medesima. Per ciascuno dei punti segnati si traccia una linea di flusso. — La condizione ora espressa, colla quale sono stati distribuiti i punti sulla superficie di livello scelta nella descritta operazione, si troverà verificata, in grazia della proprietà solenoidale, anche pei punti nei quali le linee di flusso tracciate incontrano tutte le altre superficie di livello.

[1] Dal greco σωλήν = canale, tubo.

Dato un disegno od un modello così costrutto, se si vuole conoscere il flusso a traverso di una superficie qualunque, basta contare le linee di flusso passanti attraverso ad essa, o ciò che val lo stesso, dentro al contorno di essa.

Tutte le superficie limitate da un medesimo contorno sono attraversate da un ugual numero di linee, da un ugual flusso (sempre che lo spazio racchiuso fra due di quelle superficie sia tutto contenuto nel campo).

Se si divide il numero di linee passanti attraverso ad una superficie per l' area di questa, si ha [15] il valor medio della componente normale del vettore.

Se la porzione di superficie è abbastanza piccola perchè la distribuzione dei punti su di essa sia uniforme, la detta divisione dà subito il valore della componente normale. Se la superficie è piana e appartiene ad una superficie di livello, si ottiene addirittura il *vettore*. In altri termini il valore del vettore è uguale al numero di linee attraversanti l' unità di superficie presa su di una superficie di livello.

In questo modo la rappresentazione del campo fatta per mezzo di linee di flusso basta a dare non solo la direzione ma anche il valore, non solo il versore ma anche il tensore del vettore in ogni punto. Là dove le linee sono più fitte, il vettore è più grande; là dove sono più rade, esso è più piccolo.

La rappresentazione si può rendere più completa per mezzo del disegno o della costruzione di un certo numero di superficie di livello. — Ma del modo di scegliere queste superficie si dirà più sotto.

22. *Variazione del vettore lungo un tubo di flusso sottilissimo.* — Il legame che passa fra l' accostarsi o scostarsi delle linee di flusso e la variazione del vettore nei diversi punti si può porre in evidenza, più direttamente, anche in questo modo. Immaginiamo nel campo a distribuzione solenoidale un tubo di flusso infinitamente sottile (fig. 15), e consideriamo due sue sezioni rette a, a' qualunque, le aree delle quali sieno dS e dS'. Diciamo A, A' i tensori del vettore nei punti di a, a'. I flussi attraverso a queste due sezioni sono $A\,dS$, $A'\,dS'$, e siccome questi sono uguali, così si ha $A\,dS = A'\,dS'$, $\dfrac{A'}{A} = \dfrac{dS}{dS'}$; ossia: lungo un tubo di flusso infinitamente sottile il vettore varia

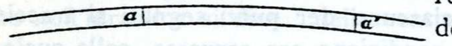

Fig. 15.

nella ragione inversa dell'area della sezione trasversale. Se il tubo va allargandosi il vettore va diminuendo di valore e viceversa. Siccome ciò si può ripetere per tutti i tubi infinitesimi immaginabili, così concludiamo che là ove le linee divergono il vettore va diminuendo, e là dove convergono il vettore va aumentando.

Se $dS = dS'$, si ha anche $A = A'$; se i tubi di flusso hanno sezioni costanti, il vettore ha, lungo ciascun tubo, un valore costante.

§ 3.° Integrale lungo una linea. Circuitazione.

Definizione dell'integrale lungo una linea. — Integrale su di una linea chiusa: circuitazione. — La circuitazione intorno ad una superficie è la somma delle circuitazioni intorno alle parti. — Circuitazione intorno ad un elemento superficiale, in un caso particolare. — Esistenza e definizione del vettore *rotazione*. — Teorema della circuitazione. — Espressione analitica della rotazione.

23. *Definizione.* — Sia PMQ (fig. 16) una linea qualunque tracciata nel campo di un vettore e si scelga su di essa una direzione positiva, p. e. la PQ: sia poi $\mathbf{A}$ il vettore in un punto M della linea, e ds un elemento MN della linea stessa, preso a partire da M nel verso positivo. L'elemento ds è anch'esso un vettore; si faccia il prodotto scalare $\mathbf{A}\,ds$. Lo stesso si faccia per tutti gli elementi della linea PQ e si sommino tutte le quantità scalari infinitamente piccole così ottenute, si faccia cioè l'integrale

$$\int_{PQ} \mathbf{A}\,ds;$$

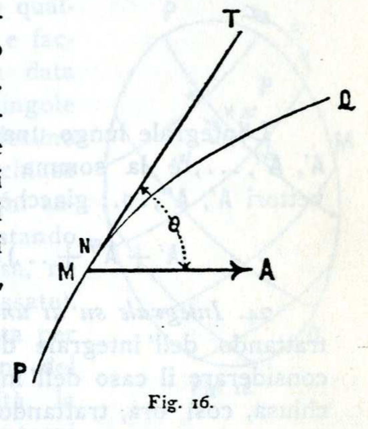

Fig. 16.

questo si dice *l'integrale del vettore* $\mathbf{A}$ *lungo (o sulla) linea* PQ. Coll'indice PQ messo al piede del segno $\int$, noi ricordiamo che l'integrazione è fatta nel verso PQ, che cioè PQ è il verso scelto come positivo.

Se rappresentiamo con A il tensore di $\mathbf{A}$ e con ds quello di ds, e se diciamo θ l'angolo TMA che il vettore $\mathbf{A}$ fa colla tangente in M alla linea PQ (ove sulla tangente si prenda come verso positivo quello che concorda col verso positivo della linea), l'integrale si scrive anche

$$\int_{PQ} A \cos\theta \, . \, ds,$$

Possiamo ancora rappresentare con A_s, la proiezione $A \cos\theta$ di A sulla tangente MT; e scrivere

$$\int_{PQ} A_s \, ds.$$

Il prodotto $\mathbf{A}\,d\mathbf{s}$ cambia di segno se si prende come direzione positiva, invece della PQ, la QP; lo stesso avviene adunque dell'integrale; si ha perciò

$$\int_{QP} \mathbf{A}\,d\mathbf{s} = -\int_{PQ} \mathbf{A}\,d\mathbf{s}.$$

Se la linea PQ è una linea di flusso, si ha $\theta = 0$, $\mathbf{A}\,d\mathbf{s} = A\,ds$, e l'integrale si scrive semplicemente:

$$\int_{PQ} A\,ds$$

L'integrale lungo una linea PQ della somma di più vettori $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$,..., è la somma degl' integrali lungo PQ dei singoli vettori $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$,..: giacchè si ha [6]

$$(\mathbf{A}' + \mathbf{A}'' + ..)\,d\mathbf{s} = \mathbf{A}'\,d\mathbf{s} + \mathbf{A}''\,d\mathbf{s} + ...$$

24. *Integrale su di una linea chiusa: circuitazione.* — Come, trattando dell' integrale di superficie, si è trovato importante considerare il caso dell' integrale esteso a tutta una superficie chiusa, così ora, trattando dell' integrale su di una linea, è importante considerare il caso nel quale l'integrazione è estesa su tutta una linea chiusa $PMQmP$ (fig. 17). Quando il vettore considerato è la velocità di un fluido, l'operazione di integrare su tutta una linea chiusa e il risultato di essa erano stati denominati da W. Thomson (Lord Kelvin) *circolazione* sulla linea medesima; e questa denominazione è stata talvolta adoperata anche nel caso in cui il vettore non è una velocità. Tuttavia

in questo caso più generale pare più conveniente adottare una locuzione, la quale, pur ricordando che si tratta di una operazione ciclica, non sia già adoperata nel linguaggio ordinario con un significato troppo speciale. Perciò noi adopereremo la locuzione proposta da Heaviside, e denomineremo l'integrazione e l'integrale su di una linea chiusa: *circuitazione*.

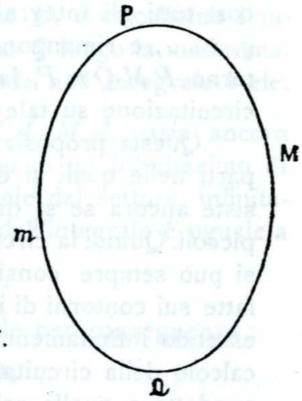

Fig. 17.

Su di una data linea chiusa la circuitazione si può fare in due versi. I due risultati hanno grandezze uguali e segni opposti.

25. *La circuitazione intorno ad una superficie è la somma delle circuitazioni intorno alle parti.* — Supponiamo che la regione considerata sia ciclica, o che sia stata resa tale per mezzo di convenienti sezioni [12]. Allora per la linea chiusa considerata $PMQmP$ (fig. 18) si può far passare una superficie della quale la linea stessa costituisce l'intiero contorno. Immaginiamo tracciata una tale superficie. Supponiamo poi che questa sia, in un modo qualunque, scomposta in un numero qualsiasi di parti, come p, q, r, ecc.; e facciamo le circuitazioni sulla linea data $PMQmP$ e sui contorni delle singole parti p, q, r, ecc., sempre nel medesimo verso u rispetto alle superficie racchiuse (cioè in modo, ad esempio, che ogni superficie sia sempre a destra di chi, stando da una banda determinata di essa, ne percorre il contorno nel verso fissato). Se sulla superficie che s'è tracciata per la linea $PMQmP$ la distribuzione del vettore non presenta discontinuità, la somma delle circuitazioni sui contorni delle porzioni di superficie p, q, r... è uguale alla circuitazione sulla linea $PMQmP$.

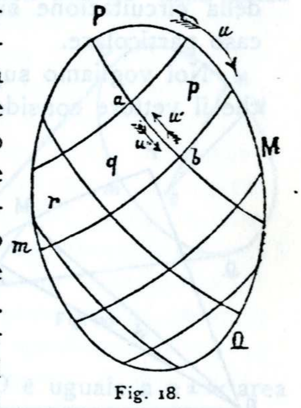

Fig. 18.

Infatti consideriamo la linea ab di separazione tra p e q. L'integrale del vettore lungo questa linea figura due volte nella somma delle circuitazioni, una volta come parte della circuitazione sul contorno di p ed una volta come parte di quella sul contorno di q. Ma la prima volta esso è fatto nel verso $b\,a$ e la seconda nel verso $a\,b$. Perciò esso dà luogo a due termini uguali e di segni contrari, che nella somma si elidono. Si elidono così tutti gli integrali sulle linee di separazione tra le parti p, q, $r\ldots$, e rimangono solamente quelli fatti sulle parti del contorno $P\,M\,Q\,m\,P$, la somma dei quali costituisce appunto la circuitazione su tale contorno.

Questa proposizione vale qualunque sia il numero delle parti nelle quali si è divisa la superficie considerata. Essa sussiste ancora se si divide la superficie in elementi infinitamente piccoli. Quindi la circuitazione su di una linea qualunque $PMQmP$ si può sempre considerare come la somma delle circuitazioni fatte sui contorni di infiniti elementi superficiali. Questi elementi, essendo infinitamente piccoli, si possono trattare come piani. Il calcolo della circuitazione su di una linea qualunque è così ricondotto a quello relativo ad un elemento piano.

26. *Circuitazione intorno ad un elemento superficiale, in un caso particolare.* — Per chiarire il concetto importante di circuitazione attorno ad un elemento piano e per dare ragione di alcune denominazioni che si avranno a stabilire, giova, prima di procedere oltre, vedere quale sia il valore ed il significato della circuitazione su di una linea piana in un semplicissimo caso particolare.

Noi vogliamo supporre, come abbiamo già fatto altra volta, che il vettore considerato sia, per ogni punto del campo, proporzionale allo spostamento di un punto materiale inizialmente situato in quel punto, ed appartenente ad un corpo il quale riempia il campo e in esso si sposti infinitamente poco. Ciò noi possiamo sempre fare qualunque sia la distribuzione del vettore; ma qui noi vogliamo supporre che il corpo mobile si muova come un sistema rigido, e che il suo movimento sia semplicemente uno spostamento angolare di ampiezza infinitamente piccola α, attorno ad un asse O perpendicolare al piano della figura (fig. 19). Vogliamo poi considerare come vettore in un punto M dapprima addirittura lo spostamento infinitamente piccolo $M\,A$

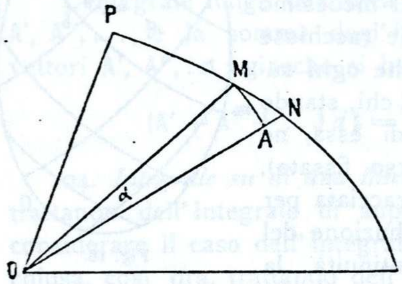

Fig. 19.

che in causa della rotazione attorno ad O subisce il punto del sistema rigido che prima della rotazione medesima era in M.

Diamoci una linea piana qualunque PMQ situata nel piano della figura, che è perpendicolare all'asse O, e calcoliamo l' integrale del vettore MA preso da P verso Q lungo la medesima. All' elemento MN della linea corrisponde nell' integrale l' elemento $MA\ (MN.\cos\widehat{AMN})$, ossia $MA.MA$, ossia ancora $\alpha.OM.MA$. Ma $OM.MA$ è a meno di un infinitesimo di ordine superiore il doppio della superficie del settore infinitamente piccolo OMN, dunque l'elemento dell'integrale è uguale a

$$2\alpha \times \text{area } OMN.$$

L'integrale lungo l'arco finito PMQ vale per conseguenza:

$$2\alpha \times \text{area } OPMQ.$$

Se l' integrazione fosse fatta nel verso opposto l' integrale avrebbe questo stesso valore col segno contrario.

Se la linea, lungo la quale si fa l' integrazione, è chiusa, l'integrale è uguale a 2α moltiplicato per l'area contornata dalla linea, e ciò qualunque sia la posizione dell' asse di rotazione. Se infatti l' asse cade in O (fig. 20), nell' interno della linea chiusa, le aree OMN debbono prendersi tutte col medesimo segno e la loro somma dà l'area totale contornata. Se l' asse ha la traccia O' fuori della linea chiusa, si hanno a tirare le tangenti $O'P$, $O'Q$, ecc. alla curva, la quale risulta così divisa in parti dai punti di contatto P, Q, ecc.: ad es., nella fig. 20, in due parti PMQ, PmQ. L'integrale lungo la parte PMQ è uguale a $2\alpha \times$ area $O'PMQ$; quello lungo l'arco QmP è uguale a $-2\alpha \times$ area $O'PmQ$; l'integrale totale, ossia la circuitazione, è quindi uguale a

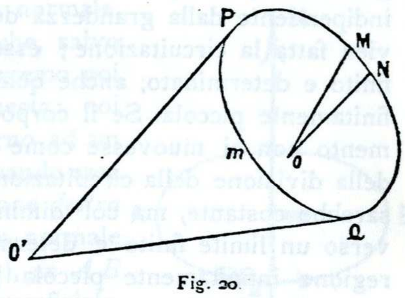

Fig. 20.

$$2\alpha\,(\text{area } O'PMQ - \text{area } O'PmQ),$$

ossia ancora a $2\alpha \times$ area $PMQmP$. In tutti i casi adunque la circuitazione è uguale al doppio dello spostamento angolare moltiplicato per la superficie contornata.

Se il vettore considerato non è lo stesso spostamento infinitesimo, come dianzi abbiamo supposto, ma è proporzionale ad esso, se cioè è lo spostamento moltiplicato o diviso per una costante scalare, il valore della circuitazione è quello dianzi trovato, moltiplicato o diviso per la medesima costante scalare. In particolare possiamo supporre che il vettore sia la velocità lineare nel punto M considerato dovuta alla rotazione del sistema rigido. Allora esso è uguale allo spostamento infinitamente piccolo del punto M, diviso pel tempo infinitamente piccolo τ nel quale questo si compie. Perciò la circuitazione è uguale a $2\frac{\alpha}{\tau} \times$ area contornata. Ma $\frac{\alpha}{\tau}$ è la velocità angolare della rotazione; dunque concludiamo che la circuitazione della velocità lineare è uguale al doppio del prodotto della velocità angolare per la superficie intorno alla quale la circuitazione è fatta.

Se si divide il valore della circuitazione dello spostamento lineare per la superficie attorno alla quale questa è presa (per la superficie circuitata), si ha come risultato il doppio del valore dello spostamento angolare. Se similmente si divide per la superficie stessa il valore della circuitazione della velocità lineare, si ottiene come risultato il doppio del valore della velocità angolare. E qui importa notare che il risultato della divisione è indipendente dalla grandezza della superficie attorno alla quale vien fatta la circuitazione; esso rimane lo stesso, ed è perciò finito e determinato, anche quando tale superficie si prenda infinitamente piccola. Se il corpo del quale si considera il movimento non si muovesse come un sistema rigido, il quoziente della divisione della circuitazione per la superficie circuitata non sarebbe costante, ma col diminuire della superficie tenderebbe verso un limite finito e determinato, il quale avrebbe per una regione infinitamente piccola presa attorno ad un punto del campo un significato analogo a quello che abbiamo spiegato. E ancora più in generale, qualunque sia il vettore considerato, noi potremmo sempre rappresentarci nella mente la sua distribuzione per mezzo della finzione che esso sia proporzionale allo spostamento delle particelle di un fluido riempiente il campo, e così potremmo estendere a tutti i casi l'interpretazione ora esposta.

27. *Esistenza e definizione del vettore rotazione.* — Ma anche senza che noi ci dilunghiamo su questa generalizzazione, l'esempio ora trattato è importante per questo, che esso mette in

chiaro, in un caso tangibile, la possibilità che il quoziente della circuitazione attorno ad un elemento di superficie piana per l'area di questo elemento tenda, col diminuire di questa, verso un limite finito e determinato, e l'utilità di considerare questo limite.

Fermiamoci su di esso. In un punto dato m nel campo di un vettore **A**, distribuito con continuità nello spazio, immaginiamo un elemento di superficie piana di area dS, la cui normale N abbia una direzione fissa e data; diciamo dK la circuitazione, infinitamente piccola, del vettore **A** sul contorno dell'elemento, e poniamo

$$C_n = \frac{dK}{dS}. \tag{25}$$

C_n è una quantità scalare, il valore della quale dipende non solo dalla porzione del punto considerato, ma anche dalla direzione, data e costante, della normale N dell'elemento piano dS, non che dal verso in cui vien fatta la circuitazione sul contorno. Ma si può dimostrare che C_n è la projezione sulla normale N di un vettore **C**, il quale per ogni punto del campo è perfettamente determinato in grandezza ed in direzione.

Per ciò occorre anzi tutto fissare un verso positivo per la circuitazione attorno ad un elemento piano, pel quale sia già data la direzione positiva dalla normale. La scelta che noi facciamo, e che, salvo osservazioni in contrario, riterremo poi sempre come sottintesa, è questa: noi prendiamo la circuitazione attorno ad un elemento piano come positiva quando essa è fatta nel verso di una rotazione *destra* attorno alla parte positiva della normale all'elemento piano. Così (fig. 21), se AB è il contorno di un elemento superficiale, e se mN è il ramo scelto come positivo della normale MN al piano dell'elemento, la circuitazione su AB viene presa come positiva quando è fatta nel verso della freccia u, nel verso cioè, nel quale bisognerebbe far girare una vite destrorsa ordinaria per farla avanzare nella direzione mN, nel verso, possiamo dire ancora, del movimento delle lancette di un orologio guardato nella direzione mN.

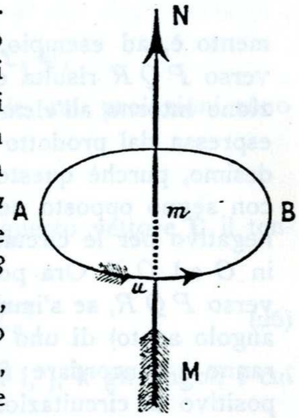

Fig. 21.

Venendo ora a dimostrare la proposizione enunciata, immaginiamo condotti per un punto O (fig. 22), infinitamente vicino al punto m considerato, tre piani ortogonali, i quali s'intersechino secondo tre assi OX, OY, OZ, e taglino secondo le rette QR, RP, PQ il piano normale in m ad mN. Risultano così l'elemento piano PQR normale ad mN, e le sue proiezioni OQR, ORP, OPQ su quei tre piani ortogonali. Per ciascuno dei quattro elementi piani il quoziente della circuitazione, fatta nel verso positivo, per la superficie ha un valore determinato: noi rappresentiamo quello che esso ha per l'elemento piano normale in m ad N, come sopra s'è detto, con C_n, e quelli che esso ha per gli elementi piani normali in O ad OX, OY, OZ (assunte queste come direzioni positive delle normali) con C_1, C_2, C_3. Diciamo dS la superficie dell'elemento piano PQR: allora se il verso positivo per la circuitazione attorno a questo elemento è, ad esempio, PQR, la circuitazione stessa in questo verso PQR risulta espressa dal prodotto $C_n\,dS$. La circuitazione intorno all'elemento piano OQR, nel verso OQR, sarà espressa dal prodotto di C_1 per la superficie dell'elemento medesimo, purchè questo prodotto si prenda col proprio segno o con segno opposto secondo che il verso OQR è positivo o negativo per le circuitazioni attorno agli elementi piani normali in O ad OX. Ora poichè il verso OQR è la proiezione del verso PQR, se s'immagina fatto il ribaltamento (rotazione di un angolo acuto) di uno dei due piani sull'altro, i due versi verranno a concordare fra loro: e però il verso OQR è verso positivo di circuitazione, come PQR, oppure no, secondo che con quel ribaltamento le direzioni positive mN, OX delle normali a quegli elementi vengono a coincidere oppure diventano opposte; ciò secondo che dapprima l'angolo (nx) di quelle direzioni positive era acuto oppure ottuso. D'altra parte la superficie dell'elemento piano OQR projezione dell'elemento PQR è espressa dal prodotto $dS \,.\cos(nx)$ preso col proprio segno o

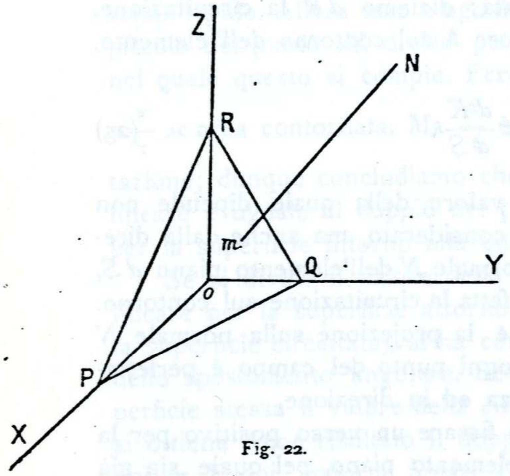

Fig. 22.

col segno opposto secondo che l'angolo $(n\,x)$ è acuto od ottuso. Dunque in ogni caso la circuitazione intorno all'elemento piano OQR sarà esprèssa dal prodotto $C_1 \cos(n\,x)\,d\,S$. Similmente, indicando con $(n\,y)$, $(n\,z)$ gli angoli della direzione $m\,N$ con le direzioni $O\,Y$, $O\,Z$, le circuitazioni intorno agli elementi piani $O\,R\,P$, $O\,P\,Q$ risultano espresse dai prodotti $C_2 \cos(n\,y)\,d\,S$, $C_3 \cos(n\,z)\,d\,S$. Ora i tre elementi piani $O\,Q\,R$, $O\,R\,P$, $O\,P\,Q$ formano, presi insieme, una superficie avente per contorno la linea $P\,Q\,R$; e quindi, pel teorema [25] la somma delle circuitazioni attorno ad essi deve essere uguale alla circuitazione sul contorno $P\,Q\,R$, che è quanto dire alla circuitazione attorno all'elemento $P\,Q\,R$. Quindi abbiamo

$$C_n\,d\,S = C_1 \cos(n\,x)\,d\,S + C_2 \cos(n\,y)\,d\,S + C_3 \cos(n\,z)\,d\,S,$$

donde

$$C_n = C_1 \cos(n\,x) + C_2 \cos(n\,y) + C_3 \cos(n\,z).$$

Se rappresentiamo con $\mathbf{n}$ un vettore-unità nella direzione della normale $m\,N$, e con $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ i tre vettori fondamentali secondo i tre assi $O\,X$, $O\,Y$, $O\,Z$, abbiamo per le (13)

$$\cos(n\,x) = \mathbf{n}\,\mathbf{i},\ \cos(n\,y) = \mathbf{n}\,\mathbf{j},\ \cos(n\,z) = \mathbf{n}\,\mathbf{k},$$

e quindi possiamo anche scrivere:

$$C_n = \mathbf{n}\,(C_1\,\mathbf{i} + C_2\,\mathbf{j} + C_3\,\mathbf{k});$$

e se rappresentiamo con $\mathbf{C}$ il vettore, le cui proiezioni sono C_1, C_2, C_3:

$$C_n = \mathbf{n}\,\mathbf{C}.$$

Ciò è quanto si voleva dimostrare. Di questo vettore $\mathbf{C}$ il tensore C è dato dalla relazione

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}, \tag{26}$$

ed il versore fa coi vettori fondamentali $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ gli angoli i cui coseni sono:

$$\frac{C_1}{C},\ \frac{C_2}{C},\ \frac{C_3}{C}. \tag{27}$$

Al vettore $\mathbf{C}$, il quale ha in molte applicazioni, e segnatamente nella trattazione dei fenomeni elettromagnetici, un'importanza grandissima, è utile poter dare un nome. Maxwell, aveva proposto,[1] benchè con qualche esitanza, il nome di *rotazione*. Tale locuzione si spiega e si presenta come naturale se si pensa alla rappresentazione idrodinamica del campo fatta per mezzo della finzione di un fluido che si sposta; se infatti si suppone che il vettore **A** in un punto del campo rappresenti la velocità lineare nel punto medesimo, il vettore **C** rappresenta il doppio della velocità angolare. Heaviside, invece, ha avuto in mira direttamente il significato geometrico di **C**, ed ha adottato il nome *curl*, che in inglese significa: riccio, ricciolo, anello, arricciatura, ecc. In tutti i suoi scritti, senz' alcuna esitazione, egli ha fatto uso corrente di questo nome. Ed anzi, scrivendo $\mathbf{C} = \mathrm{curl}\,\mathbf{A}$, egli ha introdotto l' uso di considerare la parola *curl* non solo come il nome del vettore **C**, ma anche come il simbolo dell'operazione per mezzo della quale dal vettore **A** si passa al vettore **C**. In questo senso la parola e la scrittura hanno cominciato ad essere adoperate anche da alcuni altri autori. Tra le due proposte noi qui preferiamo la prima. L' essere derivata dalla finzione del fluido, con cui si materializza il campo, lungi dal dar luogo ad obbiezioni contro di essa, è qui una ragione di preferenza, perchè dalla medesima finzione si possono derivare in modo naturale anche i nomi usati per altri enti geometrici collegati col vettore **A**, come sono le linee di flusso, i tubi di flusso, ecc. E ciò ha un'importanza speciale per una trattazione elementare come la nostra, destinata a servire come preambolo allo studio di cose tecniche, perchè lo scopo di essa richiede che le deduzioni vi sieno svolte preferibilmente in forma sintetica, col minimo apparato di simboli algebrici, e con enunciati, per quanto possibile, semplici e perspicui.

Noi denomineremo perciò il vettore **C**: *rotazione* nel punto considerato, e scriveremo:

$$\mathbf{C} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}.$$

La parola *rot,* mentre ricorderà il nome dato a **C**, indicherà eziandio l' operazione per mezzo della quale dal vettore **A** si passa al vettore **C**.

Se in una regione dello spazio sono definiti più vettori **A**', **A**'',..., si ha

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{A}' + \mathbf{A}'' + \ldots) = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}' + \mathrm{rot}\,\mathbf{A}'' + \ldots \tag{28}$$

[1] *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Vol. I, art. 25.

In fatti la circuitazione del vettore $\mathbf{A}' + \mathbf{A}'' + \ldots$ intorno ad un elemento di superficie dS è [23] la somma delle circuitazioni intorno a dS dei vettori $\mathbf{A}', \mathbf{A}'', \ldots$; ed i quozienti di tutte le nominate circuitazioni per dS dànno, come s'è visto, le proiezioni sulla retta $\mathbf{n}$, normale a dS, dei vettori indicati nei due membri della (28). Tenendo conto dell'arbitrarietà di dS e quindi anche di $\mathbf{n}$, si conchiude la (28).

28. *Teorema della circuitazione.* — Il vettore $\mathbf{C}$ ha nel campo una determinata distribuzione; ed a questa possiamo applicare, senz'altro, tutte le nozioni che abbiamo esposto per la distribuzione di un vettore in generale. Così possiamo considerare per $\mathbf{C}$ i flussi, le linee di flusso, i tubi di flusso.

Il flusso di $\mathbf{C}$ attraverso ad un elemento di superficie dS è $C_n\, dS$. Ora la formola (25) che definisce C_n dà subito

$$C_n\, dS = dK,$$

e dice che tale flusso è uguale alla circuitazione dK del vettore $\mathbf{A}$ attorno all'elemento dS.

Il flusso di $\mathbf{C}$ attraverso ad una superficie finita qualunque è adunque uguale alla somma delle circuitazioni di $\mathbf{A}$ attorno agli elementi di questa; e se, come supponiamo sempre, sulla superficie la distribuzione di $\mathbf{A}$ non presenta discontinuità, tale somma è uguale alla circuitazione di $\mathbf{A}$ sul contorno della superficie medesima [25]. Quindi la proposizione: *l'integrale di un vettore lungo una linea chiusa è uguale all'integrale della sua rotazione su di una superficie qualunque avente tale linea per contorno.* Oppure: *la circuitazione di un vettore presa sul contorno di una superficie è uguale al flusso attraverso a questa superficie della rotazione del vettore medesimo.*

A questa proposizione, che spesso dovremo ricordare, daremo il nome di: *teorema della circuitazione.*

Se si rappresenta con ds un elemento della linea chiusa s e lo si tratta come un vettore, se poi si rappresenta con dS un elemento della superficie contornata da s e con $\mathbf{n}$ un vettore-unità normale a dS, la proposizione ora enunciata si traduce nell'uguaglianza

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \,.\, \mathbf{n}\, dS = \int_s \mathbf{A}\, ds. \tag{29}$$

Se si considera una seconda superficie limitata dal medesimo contorno, il flusso del vettore $\mathbf{C}$ attraverso a questa è ancora uguale alla circuitazione di **A** sul contorno; esso perciò è uguale al flusso di **C** attraverso alla prima superficie. Il flusso di **C** ha dunque un medesimo valore attraverso a tutte le superficie aventi un contorno comune.

Due qualunque di queste superficie, prese insieme, costituiscono una superficie chiusa; e dei flussi che le attraversano uno *entra* nello spazio limitato da questa e l'altro *esce* dallo spazio medesimo. Se si considerano come flussi uscenti, uno di questi flussi è negativo mentre l'altro è positivo; la loro somma algebrica è perciò uguale a zero. Data nel campo una superficie chiusa qualunque S (fig. 23), si può sempre immaginare tracciata su di essa una linea chiusa AB, che la divida in due parti M, N aventi la linea AB stessa per contorno comune. I flussi uscenti da S attraverso a queste due parti sono uguali e di segni contrari e dànno una somma uguale a zero. Dunque il flusso del vettore **C** uscente da una superficie chiusa qualunque è sempre uguale a zero: *la distribuzione del vettore* **C** *è solenoidale.*

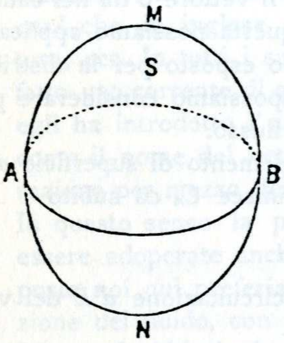

Fig. 23.

Questa proposizione importante si traduce nella formola:

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = 0, \qquad \text{oppure:} \qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0.$$

Le linee di flusso del vettore **C** si possono convenientemente denominare: linee *vorticali*. La rappresentazione idrodinamica del campo, la quale giustifica il nome di rotazione dato a **C**, suggerisce e giustifica anche quest'altra denominazione. Così pure i tubi di flusso del vettore **C** si possono denominare *tubi vorticali*, o semplicemente *vorticoidi*. Se infinitamente sottili, essi si dicono anche *filetti vorticali*.

Dal fatto che la distribuzione della rotazione è solenoidale consegue [20] che il flusso di **C** lungo un tubo vorticale è costante. Quindi nell'interno di una regione ove il vettore **A** sia distribuito senza discontinuità, come sempre supponiamo che sia [13], nessun tubo, nessun filetto, nessuna linea vorticale può avere origine o termine. Una linea vorticale o incontra almeno in due punti la superficie o le superficie limitanti il campo considerato, o è una linea chiusa; un tubo vorticale o è tagliato almeno due volte dalle superficie limitanti il campo, od è rientrante in sè stesso come un anello od un toro. Da ciò consegue che la parte del campo esterna al tubo è sempre una regione ciclica. Più in generale, se si vuole tagliare e limitare il campo con una superficie, la quale escluda da esso intieramente alcune linee vorticali, ciò che rimane del campo costituisce sempre una regione ciclica. Avremo fra poco occasione di ricordare quest' osservazione.

La distribuzione del vettore **C** si può rappresentare materialmente, in disegno od in modello, nel modo che si è esposto in generale per un vettore qualunque a distribuzione solenoidale [20]. Alludendo a questo modo di rappresentazione, nel quale ciascuna linea di flusso sta a rappresentare un tubo-unità, noi potremo qualche volta sostituire alla locuzione: " flusso del vettore **C** passante dentro ad una data linea chiusa ", la locuzione: " numero di linee vorticali passanti dentro alla linea chiusa medesima ", o con questa " concatenate ". E per tal modo potremo enunciare il teorema della circuitazione anche così: *La circuitazione su di una data linea chiusa è uguale al numero delle linee vorticali concatenate con questa.*

29. *Espressione analitica della rotazione.* — La forma sintetica nella quale abbiamo qui sopra presentato il concetto di rotazione, e colla quale abbiamo studiate alcune sue proprietà è quella che meglio conviene allo scopo di questa trattazione; e per le applicazioni alle quali miriamo le nozioni sovraesposte basteranno completamente. Tuttavia per facilitare i confronti colle trattazioni analitiche ed anche per mettere in chiaro alcune relazioni notevoli, è utile che, come abbiamo dato all'art. 18 l'espressione analitica della divergenza, così diamo qui l'espressione analitica della rotazione.

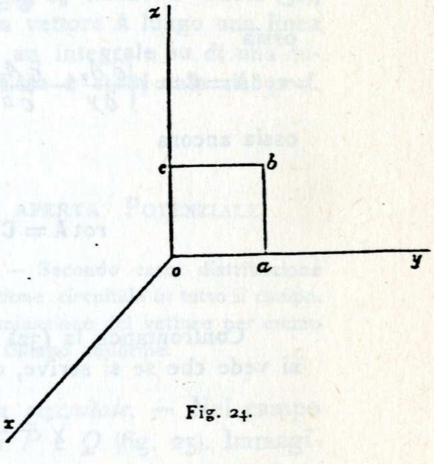

Fig. 24.

A quest'uopo basta trovare le tre componenti C_1, C_2, C_3 della rotazione **C** parallele a tre assi di coordinate ox, oy, oz (fig. 24) secondo i quali sono scelti i vettori fondamentali **i**, **j**, **k**. Ora per trovare C_1 basta calcolare la circuitazione del vettore **A** attorno ad un elemento superficiale perpendicolare ad ox, e dividerla per l'area dell'elemento medesimo. Se supponiamo, per semplicità, che il punto considerato sia o, possiamo scegliere per fare questo calcolo l'elemento $o\,a\,b\,c$ situato nel piano $y\,o\,z$ ed avente la forma di un rettangolo di lati $o\,a = dy$ ed $o\,c = dz$. Se rappresentiamo con A_2, A_3 le componenti parallele ad oy e ad oz del vettore $\mathbf{A}$ in o, la circuitazione attorno a tale rettangolo, presa nel verso $o\,a\,b\,c\,o$ è:

$$A_2\,dy + \left(A_3 + \frac{\partial A_3}{\partial y}dy\right)dz - \left(A_2 + \frac{\partial A_2}{\partial z}dz\right)dy - A_3\,dz,$$

ossia, riducendo,

$$\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)dy\,dz.$$

Quindi dividendo per l'area $dy\,dz$ dell'elemento superficiale:

$$C_1 = \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}.$$

In modo analogo si trovano le componenti C_2, C_3; i valori a cui si arriva sono quelli che si ricavano da quello di C_1 per mezzo di una permutazione circolare degli indici 1, 2, 3, e delle lettere x, y, z, sono cioè:

$$C_2 = \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \tag{30'}$$

$$C_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}. \tag{30''}$$

Avuti C_1, C_2, C_3, si ha

$$\mathbf{C} = \mathbf{i}\,C_1 + \mathbf{j}\,C_2 + \mathbf{k}\,C_3, \tag{31}$$

ossia

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{C} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right), \tag{32}$$

ossia ancora

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}. \tag{32'}$$

Confrontando la (32) o la (32′) colla (18) o colla (18′) (art 11), si vede che se si scrive, come nell'art. 18,

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

e se, trattando ∇ come un vettore, si fa il vettorprodotto $|\nabla\mathbf{A}$, si trovano appunto espressioni identiche ai secondi membri delle (32), (32′). Si può adunque scrivere simbolicamente

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = |\nabla\mathbf{A}. \tag{32''}$$

Se si ricorda la formola (21″) dell'art. 18, ossia la

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A},$$

si può riassumere dicendo che l'operatore vettoriale ∇, applicato ad un vettore $\mathbf{A}$ come moltiplicatore in un prodotto scalare, dà la divergenza di $\mathbf{A}$; ed applicato come moltiplicatore in un prodotto vettoriale dà la rotazione di $\mathbf{A}$. Le due operazioni importantissime *div* e *rot* si possono così fare per mezzo di un medesimo operatore ∇.[1]

Dai valori (30), (30′), (30″) di C_1, C_2, C_3 si ricava subito:

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial C_2}{\partial y} + \frac{\partial C_3}{\partial z} = 0. \tag{33}$$

ossia [18]

$$\nabla \mathbf{C} = 0,$$

che è la condizione della distribuzione solenoidale.

Se si dicono l, m, n i coseni degli angoli della normale $\mathbf{n}$ alla superficie S coi tre assi delle coordinate e si rappresenta con ds il tensore di $d\mathbf{s}$, elemento della linea contorno di S, l'equazione (29) compendiante il teorema della circuitazione si scrive:

$$\iint (l C_1 + m C_2 + n C_3)\, dS = \int \left(A_1 \frac{\partial x}{\partial s} + A_2 \frac{\partial y}{\partial s} + A_3 \frac{\partial z}{\partial s} \right) ds. \tag{34}$$

Questa equazione, nella quale C_1, C_2, C_3 hanno i valori (30), (30′), (30″), mostra come l'integrale di un vettore $\mathbf{A}$ lungo una linea chiusa si possa esprimere per mezzo di un integrale su di una superficie avente tale linea per contorno. Essa è stata data dal prof. Stokes nel 1854.

§ 4.° Integrale lungo una linea aperta. Potenziale.

Primo caso: distribuzione non circuitale. — Secondo caso: distribuzione parzialmente circuitale. — Terzo caso: distribuzione circuitale in tutto il campo. — Potenziale di una somma di vettori. — Determinazione del vettore per mezzo del potenziale. — Superficie equipotenziali. — Campo uniforme.

30. *Primo caso: distribuzione non circuitale.* — Nel campo del vettore $\mathbf{A}$ consideriamo due punti P e Q (fig. 25). Immagi-

[1] L'operatore vettoriale ∇ fu introdotto da Hamilton. Nel metodo dei quaternioni di Hamilton l'eleganza, che l'impiego dell'operatore ∇ conferisce alla analisi vettoriale, risulta anche maggiore perchè in tale metodo le grandezze che noi denominiamo prodotto scalare e vettorprodotto figurano, a meno del segno, come le due parti di un unico ente, che è il quaternione prodotto di due vettori.

niamo poi due linee qualunque PJQ, PjQ, le quali partano entrambe da P e terminino in Q; e rappresentiamo con J e con j i valori dell'integrale del vettore **A** preso da P verso Q rispettivamente sull'una e sull'altra linea.

Le due linee, prese insieme, formano una linea chiusa sulla quale la circuitazione, presa nel verso $PJQjP$, è $J-j$. Se, come sempre, supponiamo che la regione considerata sia aciclica, o che sia stata resa tale per mezzo di opportune sezioni [12], sussiste il teorema della circuitazione [28]. In virtù di questo teorema la circuitazione $J-j$ è uguale al flusso della rotazione **C** passante dentro al contorno $PJQjP$, o, come possiamo anche dire, al numero delle linee vorticali concatenate col contorno medesimo. Se diciamo U questo numero, o questo flusso, se cioè rappresentiamo con U l'integrale $\int C_n \, dS$ esteso a tutta una superficie contornata dalla linea $PJQjP$, abbiamo

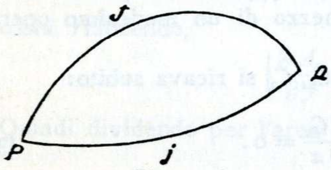

Fig. 25.

$$J - j = U. \tag{35}$$

Ora qui importa distinguere tre casi: e per ciò distingueremo le regioni nelle quali **C** è uguale a zero da quelle in cui **C** non è nullo dovunque, dicendo che nelle prime la distribuzione del vettore **A** è *non circuitale* e nelle seconde è *circuitale.* [1]

Primo caso: La rotazione **C** *è nulla in tutti i punti della regione considerata: ossia la distribuzione del vettore* **A** *nella regione considerata è non circuitale.*

In questo caso, qualunque sieno le linee PJQ, PjQ, è sempre $U=0$; quindi sempre $J=j$. L'integrale del vettore **A** preso da P a Q ha un medesimo valore su tutte le linee congiungenti questi due punti; esso non dipende dalla scelta della linea su cui è calcolato, dipende unicamente dalla posizione dei punti P e Q, nei quali la linea principia e termina.

Scegliamo nel campo, ad arbitrio, un punto O (fig. 26); mediante una linea qualunque MO congiungiamo con esso un altro punto M, e rappresentiamo con V l'integrale preso da M verso O lungo questa linea. Il valore di V non dipende dalla forma della linea, ma dipende solo dalla posizione di O e di M,

[1] La locuzione: *circuitale* è stata introdotta da W. THOMSON (*Mathematical and physical papers.* Vol. III, pag. 451) ed è adoperata da HEAVISIDE.

e se il punto O è ritenuto fisso, dipende solo dalla posizione di M: il valore di V è una funzione di quelle sole variabili colle quali viene definita la posizione del punto M. Sieno V_p e V_q i valori di V nei punti P e Q; l'integrale J, preso da P verso Q lungo una linea PMQ qualunque congiungente P con Q, si può esprimere per mezzo di questi due valori. Infatti l'integrale lungo la linea PMQ è uguale a quello preso su qualunque altra linea partente da P e terminante in Q; è uguale perciò a quello preso lungo la linea POQ. Ora l'integrale su PO vale V_p, e quello su OQ vale $-V_q$, dunque

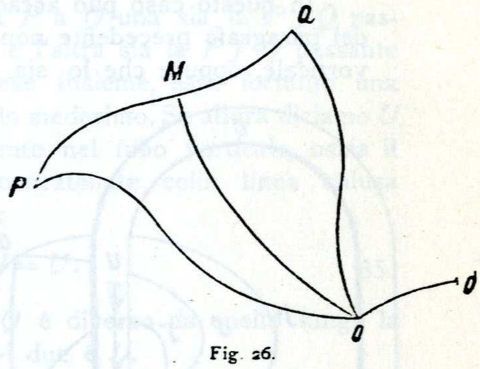

Fig. 26.

$$J = V_p - V_q : \quad (36)$$

l'integrale J del vettore $\mathbf{A}$, preso da P a Q lungo una linea qualunque congiungente questi punti, è uguale alla differenza tra i valori in P ed in Q della funzione V.

La grandezza scalare V, funzione delle variabili che definiscono la posizione di un punto M, dicesi *potenziale* del vettore $\mathbf{A}$ in tale punto.

Dato il valore V_p del potenziale in un punto P, si ha quello nel punto Q dalla relazione $V_q = V_p - J$. Se il punto Q coincide con P, se cioè la linea PMQ è chiusa, J rappresenta la circuitazione su tale linea, ed è perciò uguale a zero. Quindi allora $V_q = V_p$. Possiamo esprimere questo fatto dicendo che se, partendo da un punto P qualunque del campo e percorrendo una linea chiusa qualunque, si ritorna al punto stesso, si ritrova al ritorno lo stesso valore del potenziale che si aveva alla partenza. In altri termini: il potenziale V ha per ogni singolo punto del campo un unico valore; esso è una funzione *monodroma* delle coordinate.

Qui però importa notare che il valore della funzione V dipende dalla scelta arbitraria del punto O. Se invece del punto O si scegliesse un altro punto O', il potenziale in un punto qualunque M risulterebbe aumentato o diminuito di una quantità uguale all'integrale del vettore $\mathbf{A}$ lungo una linea OO'; risulterebbe cioè accresciuto o diminuito di una costante dipendente dalla scelta arbitraria di O'. Perciò il potenziale V contiene una costante arbitraria. È questa una conseguenza dell'essere il potenziale definito da un integrale.

31. *Secondo caso: Esistono nel campo alcune, e soltanto alcune, regioni, ove la rotazione* **C** *è diversa da zero: nelle quali cioè la distribuzione del vettore* **A** *è circuitale.*

In questo caso può accadere che la linea chiusa $PJQjP$ del paragrafo precedente non sia concatenata con alcuna linea vorticale, oppure che lo sia. Supponiamo, per esempio, che il toro CC' (fig. 27) rappresenti un tubo vorticale e che fuori di esso non esistano altre linee vorticali; può accadere che le due linee condotte da P a Q passino tutte due fuori dell'anello, come le J, j, o tutte due dentro dell'anello, come le J', j', nei quali casi la linea chiusa da esse formata non è concatenata coll'anello; oppure può accadere che delle due linee l'una passi fuori dell'anello, come la J, e l'altra passi dentro, come la J', nel qual caso esse formano una linea chiusa $PJ'QJP$ concatenata coll'anello medesimo. Possiamo anche distinguere i due casi dicendo che nel primo una delle due linee si può far venire a coincidere coll'altra per mezzo di uno spostamento e di una deformazione graduale, senza che per questo essa debba tagliare il tubo vorticale, mentre nel secondo ciò non sarebbe possibile.

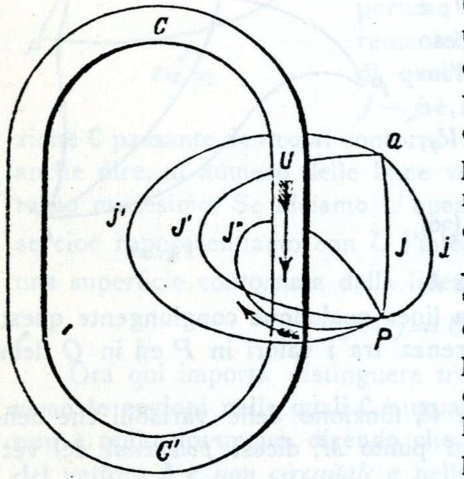

Fig. 27.

Supponiamo dapprima che si verifichi la prima ipotesi, che cioè le due linee condotte da P a Q sieno le J, j, oppure J', j', così che esse non formino una linea chiusa concatenata col tubo vorticale. Allora abbiamo ancora, come dianzi, $U=0$, e quindi $J=j$; l'integrale da P a Q è ancora indipendente dalla linea percorsa. Se diciamo J il valore dell'integrale per tutte le linee che vanno da P a Q passando all'esterno dell'anello vorticale, come le PJQ, PjQ, possiamo ancora, come dianzi, scrivere

$$J = V_p - V_q. \tag{36}$$

E similmente, se diciamo J' il valore dell'integrale preso su una linea qualunque che vada da P a Q passando dentro dell'anello, come la $PJ'Q$ o la $PJ'Q$, possiamo scrivere

$$J' = V_p - V'_q. \qquad (36')$$

Ma supponiamo ora che si verifichi la seconda ipotesi, che cioè delle due linee condotte da P a Q una sia la PJQ passante fuori dell'anello verticale e l'altra sia la $PJ'Q$ passante dentro dell'anello, così che, prese insieme, esse formino una linea chiusa concatenata coll'anello medesimo. Se allora diciamo U il flusso della rotazione **C** esistente nel tubo vorticale, ossia il numero delle linee vorticali concatenate colla linea chiusa $PJ'QJP$, abbiamo per la (35):

$$J' - J = U. \qquad (35')$$

L'integrale lungo la linea $PJ'Q$ è diverso da quello lungo la linea PJQ, e la differenza fra i due è U.

Portando nella (35') i valori (36) e (36') abbiamo

$$V_q - V'_q = U.$$

Possiamo adunque riassumere dicendo: anche nel caso che stiamo considerando vi ha un potenziale V funzione delle coordinate; ma per un medesimo punto, per esempio pel punto Q, questo ha più valori dipendenti dal cammino seguito per arrivare al punto stesso.

Se, come caso particolare, supponiamo che il punto Q, che è un punto qualunque, coincida col punto di partenza P, abbiamo $V_q = V_p$ e $V'_q = V_p - U$. In altri termini: se, partendo da un punto qualunque P, si percorre nel campo una linea chiusa e si ritorna in P, si ritrova in P all'arrivo il medesimo valore del potenziale che vi si aveva alla partenza quando la linea chiusa percorsa non è concatenata con linee vorticali; ma si trova invece un valore diverso quando la linea chiusa percorsa è concatenata con linee vorticali, come la $PJ''P$. La differenza tra il valore del potenziale che si aveva in P alla partenza e quello che si trova al ritorno è uguale ad U, ossia al numero delle linee vorticali concatenate colla linea chiusa percorsa. Se, come si è supposto, si percorre la linea chiusa $PJ''P$ in quel verso che è segnato nella figura, il valore finale del potenziale in P è uguale al valore iniziale *meno* U; se si percorre quella linea chiusa in senso inverso, il valore finale sarebbe uguale all'iniziale *più* U. Se sulla medesima linea $PJ''P$ o su altre linee qualunque partenti da P e terminanti in P si facessero non uno solo, ma N giri attorno al tubo vorticale C, si troverebbe tra il potenziale di arrivo e quello di partenza una differenza uguale a $\pm NU$. Detta adunque V_0 una funzione delle coordinate di P, il potenziale V in un punto P qualunque del campo si può esprimere con

$$V = V_0 \pm NU: \tag{37}$$

il potenziale è una funzione polidroma, ed U è la costante ciclica.

Se per mezzo di una acconcia superficie escludiamo dal campo i tubi vorticali e ci limitiamo a considerare la parte di campo che rimane, noi rientriamo nel *primo caso* già trattato al paragrafo precedente [30]. Ma per applicare le conclusioni allora trovate dobbiamo osservare che la parte di campo che ora siamo condotti a considerare è ciclica, e che dobbiamo ridurla ad essere aciclica per mezzo di qualche acconcia sezione. Per fissare le idee riferiamoci ancora all'esame precedente, nel

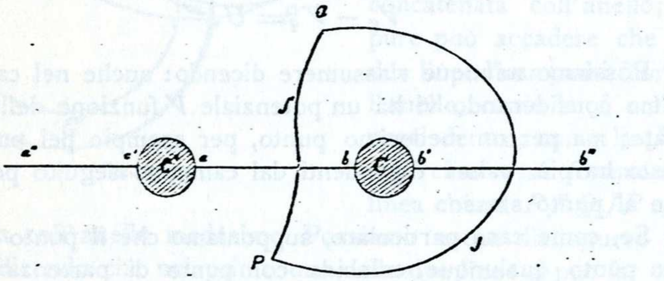

Fig. 28.

quale le linee vorticali sono tutte contenute dentro ad un toro, e per rendere più chiara la figura rappresentiamo non più una prospettiva come dianzi, ma una sezione del toro: per esempio supponiamo che il piano della fig. 28 determini nel toro le due sezioni, C, C'. Per rendere aciclico il campo, dobbiamo allora chiudere il toro medesimo con una superficie ab in modo che non si possa condurre più alcuna linea come $PJ'Q$ passante dentro di esso; oppure, se vogliamo poter passare in $PJ'Q$, dobbiamo tagliare lo spazio esterno con una superficie $a'a''$, $b'b''$, la quale impedisca di passare da P a Q con una linea come la PJQ. Soltanto dopo di avere in questo modo reso aciclico il campo si può dire che esiste un potenziale V avente per ogni punto un unico valore.

32. *Terzo caso: In ogni punto del campo la rotazione* **C** *è diversa da zero: ossia in tutto il campo la distribuzione del vettore* **A** *è circuitale.*

In questo caso la linea $PJQjP$ (fig. 25) è sempre concatenata con linee vorticali; e quindi l' integrale J è sempre diverso da j, qualunque sieno le due linee PJQ, PjQ. Se si fa variare per spostamenti graduali infinitamente piccoli la linea, sulla quale si fa l' integrazione, il valore J dell' integrale preso da P fino a Q subisce anch'esso variazioni infinitamente piccole. Dati i punti P e Q, l'integrale non ha più nè un valore determinato, nè una serie di valori equidifferenti, ma può avere infiniti valori succedentisi con continuità. In questo caso l'integrale non è determinato se non è completamente data la linea d' integrazione; non vi ha dunque più luogo a parlare di potenziale.

Osservazione. La condizione rot $\mathbf{A} = 0$ si traduce [29] nelle tre equazioni

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} = 0.$$

Ora sono appunto queste, espresse nella forma solita, le condizioni necessarie acciocchè il trinomio

$$A_1\, dx + A_2\, dy + A_3\, dz$$

sia il differenziale totale esatto di una funzione di x, y, z.

33. *Potenziale di una somma di vettori.* — Supponiamo che in una regione dello spazio sian definiti più vettori $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$,.... Detto $d\mathbf{s}$ un elemento di una linea MO (fig. 26) si ha [23],

$$\int_{MO} (\mathbf{A}' + \mathbf{A}'' + \ldots)\, d\mathbf{s} = \int_{MO} \mathbf{A}'\, d\mathbf{s} + \int_{MO} \mathbf{A}''\, d\mathbf{s} + \ldots$$

Se in quella regione sono nulle le rotazioni di $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$,...., per la proposizione (28) è pure nulla la rotazione di $\mathbf{A}' + \mathbf{A}'' + \ldots.$ Tenendo fisso il punto O e lasciando variare il punto M gl'integrali scritti definiscono [30] il potenziale in M del vettore $\mathbf{A}' + \mathbf{A}'' + \ldots$, e dei vettori $\mathbf{A}'$, $\mathbf{A}''$,.... Dunque: il potenziale di una somma di vettori è uguale alla somma dei potenziali dei singoli vettori.

34. *Determinazione del vettore per mezzo del potenziale.* — Il potenziale è una grandezza scalare, il cui valore in ogni punto è determinato, a meno di una costante arbitraria, quando è data la distribuzione del vettore. Viceversa, dato il potenziale in funzione delle coordinate, il vettore risulta anch'esso determinato in ogni punto.

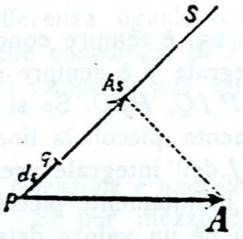

Fig. 29.

Per chiarire questa cosa, consideriamo, invece della linea di lunghezza finita PQ trattata nei paragrafi precedenti, un semplice elemento pq (fig. 29); prendiamo pq come direzione positiva, definendola, se vogliamo, con un vettore-unità $\mathbf{s}$, e rappresentiamo la lunghezza pq dell' elemento con ds. Invece dell'integrale J dianzi considerato [30] abbiamo ora un semplice elemento; e se rappresentiamo con A_s la proiezione del vettore $\mathbf{A}$ su $\mathbf{s}$, ossia il prodotto scalare $\mathbf{A}\,\mathbf{s}$, questo elemento è

$$A_s\, ds.$$

Se, d'altra parte, colla notazione solita del calcolo differenziale rappresentiamo con $\frac{\partial V}{\partial s}$ il limite del rapporto $\frac{V_q - V_p}{pq}$ quando, tenendo fissa la direzione data $\mathbf{s}$, si fa diminuire pq fino a zero, possiamo scrivere $V_p - V_q = -\frac{\partial V}{\partial s}\, ds$. Con ciò l'equazione (36), che è la definizione del potenziale, si riduce nel caso ora considerato a

$$A_s\, ds = -\frac{\partial V}{\partial s}\, ds.$$

Quindi:

$$A_s = -\frac{\partial V}{\partial s}. \tag{38}$$

Supponiamo che il vettore-unità $\mathbf{s}$ coincida successivamente coi tre vettori fondamentali $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, e poniamo per conseguenza, successivamente dx, dy, dz al posto di ds. Otteniamo così le tre componenti A_1, A_2, A_3 di $\mathbf{A}$; esse sono:

$$A_1 = -\frac{\partial V}{\partial x},\; A_2 = -\frac{\partial V}{\partial y},\; A_3 = -\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{39}$$

Così abbiamo:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{i}\frac{\partial V}{\partial x} - \mathbf{j}\frac{\partial V}{\partial y} - \mathbf{k}\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{40}$$

Se, come già altre volte, poniamo simbolicamente

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

e trattiamo questo simbolo ∇ come quello di un vettore, possiamo scrivere la (40) anche così:

$$\mathbf{A} = -\nabla V. \tag{40'}$$

Non è inutile riassumere qui gli effetti dell'operatore ∇. Applicato ad una quantità scalare V, funzione delle coordinate, esso dà, come or ora abbiamo veduto, a meno del segno, il vettore $\mathbf{A}$, di cui V è il potenziale; applicato ad un vettore $\mathbf{A}$ alla maniera di un moltiplicatore in un prodotto scalare, dà la div $\mathbf{A}$ [18]; applicato al medesimo vettore alla maniera di un moltiplicatore in un vettorprodotto dà la rot $\mathbf{A}$ [29].

Se V è il potenziale del vettore $\mathbf{A}$, applicando due volte l'operatore ∇ ed indicando con ∇^2 l'operazione che ne risulta, si ha per la (40')

$$\nabla^2 V = \nabla(\nabla V) = -\nabla \mathbf{A}$$

ossia

$$\nabla^2 V = -\operatorname{div} \mathbf{A}. \tag{41}$$

Il 1.° membro di questa relazione si può scrivere in modo più esplicito così:

$$\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 V = \left(\mathbf{i}^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \cdots + 2\,\mathbf{j}\,\mathbf{k}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial x} + \cdots\right) V$$

ossia, per le (8) e (9):

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{42}$$

Dunque la (41) equivale a

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\operatorname{div} \mathbf{A}. \tag{41'}$$

In particolare, se in una regione dello spazio la distribuzione del vettore $\mathbf{A}$ è solenoidale [20], il potenziale V verifica l'equazione (di Laplace)

$$\nabla^2 V = 0, \tag{43'}$$

ossia

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \tag{43'}$$

35. *Superficie equipotenziali.* — L'equazione $V =$ costante rappresenta una superficie. Tale superficie, in tutti i punti della quale il potenziale ha un medesimo valore, dicesi *equipotenziale*. Dando alla costante diversi valori si hanno le equazioni di infinite superficie equipotenziali; per ogni punto del campo se ne può far passare una.

Se il versore **s** dianzi considerato [34] si prende tangente alla superficie equipotenziale passante pel punto p considerato, il punto q giace anch'esso sulla medesima superficie, e quindi si ha $\frac{\partial V}{\partial s} = 0$. Perciò la (38) dà $A_s = 0$. La proiezione A_s di **A** è nulla per tutte le direzioni **s** prese nel piano tangente alla superficie di livello; dunque **A** è perpendicolare a tale piano; in ogni punto di una superficie equipotenziale il vettore è normale alla superficie medesima: *le superficie equipotenziali sono superficie di livello* [14].

Se **s** si prende sulla normale **n** alla superficie di livello passante pel punto considerato, A_s è lo stesso tensore A di **A**. Quindi rappresentando con dn il valore scalare di un elemento di lunghezza preso sulla normale, abbiamo

$$A = -\frac{dV}{dn}. \tag{44}$$

Il valore di A risulta positivo se **n** si prende nella direzione nella quale V diminuisce.

Rappresentazione del campo per mezzo di superficie equipotenziali. — Nell'art. 21 si è fatto vedere come per mezzo di un disegno o di un modello di linee di flusso convenientemente scelte si possa fare una rappresentazione della distribuzione del vettore. Ora possiamo vedere come una rappresentazione ugualmente chiara ed istruttiva si possa ottenere per mezzo di un disegno o di un modello di superficie equipotenziali.

Che un disegno od un modello, dove sieno rappresentate parecchie superficie di livello sufficientemente vicine le une alle altre, possa far vedere in un colpo d'occhio quale sia in ogni punto la direzione del vettore, è evidente. Tale direzione infatti è normale alla superficie equipotenziale passante pel punto considerato. Se questo si trova sopra una delle superficie materialmente rappresentate nel disegno o nel modello, la direzione risulta direttamente determinata; se esso non giace su di una delle superficie materialmente rappresentate, ma si trova fra due di queste, è facile immaginare per approssimazione, colla scorta delle superficie vicine, la superficie di livello che vi si potrebbe far passare, e vedere quindi quale sia approssimativamente la direzione della normale a questa superficie. Ma scegliendo convenientemente le superficie di livello da rappresentarsi si può fare di più: si può far sì che il disegno od il modello indichi approssimativamente, non solo la direzione, ma anche il valore del vettore. Basta a quest'uopo che le superficie disegnate, o costrutte, corrispondano a potenziali equidifferenti, e che sieno abbastanza vicine perchè le porzioni di linee di flusso comprese fra due superficie equipotenziali consecutive si possano praticamente, ad occhio, confondere con segmenti di rette. Diciamo Δn uno di questi segmenti e ΔV la differenza costante fra i potenziali su due superficie di livello consecutive; il quoziente $\frac{\Delta V}{\Delta n}$ ha per limite $\frac{dV}{dn}$; quindi esso, se, come si è supposto, Δn è piccolo, rappresenta un valore approssimativo di $\frac{dV}{dn}$. Ora $\frac{dV}{dn}$ è appunto, a meno del segno, il valore di A. Basta adunque che sia data la differenza ΔV costante scelta nella costruzione del disegno o del modello, per potere determinare in ogni punto del campo il valore di A mediante la semplice misura di una lunghezza Δn. L'avere scelto, nel fare il disegno od il modello, superficie corrispondenti a potenziali equidifferenti non solamente è utile per ridurre ad uno solo, a ΔV, i dati necessari per fare nel modo detto il calcolo di A, ma è anche utile per fare sì che il disegno od il modello indichi in un colpo d'occhio la distribuzione del vettore nel campo. Infatti, se ΔV è costante, la relazione approssimativa $A = -\frac{\Delta V}{\Delta n}$ dice che approssimativamente A è inversamente proporzionale a Δn; là dove Δn è piccolo, dove le superficie equipotenziali disegnate o costrutte sono vicine le une alle altre, il vettore ha un valore grande; là dove Δn è grande, dove le superficie equipotenziali sono lontane le une dalle altre, il vettore ha un valore piccolo.

Una rappresentazione più completa si ha se si combina un disegno od un modello di superficie equipotenziali, fatto come ora si è detto, con quello di un sistema di linee di flusso fatto come è stato esposto all'art. 21. Si ottiene così un reticolato nelle maglie del quale l'occhio è guidato e trova colla massima facilità gli elementi per le valutazioni approssimative delle quali si è parlato.

36. *Campo uniforme.* — Merita un cenno speciale il caso di un campo nel quale tutte le linee di flusso sono rette parallele. È facile vedere che in un tale campo il vettore ha un medesimo valore in tutti i punti. Infatti:

1.° Tutti i tubi di flusso sono a sezione costante, e perciò, in virtù della proposizione dimostrata all'art. 22, il vettore ha un medesimo valore in tutti i punti di una medesima linea di flusso.

2.° Le superficie equipotenziali, che sono normali alle linee di flusso, sono in questo caso altrettanti piani tutti paralleli tra di loro. Perciò la distanza dn fra due superficie equipotenziali, tra le quali la differenza di potenziale è dV, è la stessa su tutta la estensione di esse; e quindi il vettore $-\dfrac{dV}{dn}$ [35] ha un medesimo valore in tutti i punti di una superficie di livello qualunque. Per conseguenza il vettore è lo stesso in tutti i punti del campo. Un campo come quello di cui abbiamo parlato, nel quale il vettore ha una medesima direzione ed una medesima grandezza in tutti i punti, si dice *uniforme*.

§ 5.° Distribuzioni non circuitali. Forze newtoniane. Vettori newtoniani.

Riduzione dei problemi relativi alla determinazione di un campo. — Distribuzioni non circuitali: espressione del vettore e del potenziale per mezzo della divergenza. — Calcolo inverso della divergenza partendo dall'espressione trovata pel vettore. — Forze newtoniane. — Significato delle precedenti locuzioni ed estensione del loro impiego.

37. *Riduzione dei problemi relativi alla determinazione di un campo.* — Data la distribuzione di un vettore $\mathbf{A}$, noi sappiamo determinare per ogni punto del campo due altre grandezze con esso collegate: una scalare, la div $\mathbf{A}$; l'altra vettoriale, la rot $\mathbf{A}$. Inoltre, quando la rot $\mathbf{A}$ è uguale a zero sappiamo che esiste, e possiamo determinare per ogni punto, un'altra grandezza scalare importante, il potenziale V.

Viceversa, possiamo risalire da queste grandezze al vettore $\mathbf{A}$. Il problema si riduce a ricavare $\mathbf{A}$ da un sistema di equazioni differenziali comprese nelle seguenti

$$\text{div. } \mathbf{A} = \delta, \qquad \text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{C}, \qquad \mathbf{A} = -\nabla V, \tag{45}$$

ove δ, $\mathbf{C}$, V sono date funzioni delle coordinate.