Ora qui si presenta subito una osservazione importante. La div., la rot., il potenziale della somma di più vettori sono uguali [art.i 17, 27, 33] alle somme delle div., delle rot., dei potenziali dei singoli vettori. Perciò se poniamo

$$\delta = \delta' + \delta'' + \ldots, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}' + \mathbf{C}'' + \ldots, \quad V = V' + V'' + \ldots,$$

e se sappiamo trovare i valori $\mathbf{A}', \mathbf{A}'', \ldots$, che soddisfano alle equazioni:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}' = \delta', \quad \operatorname{rot}\mathbf{A}' = \mathbf{C}', \quad \mathbf{A}' = -\nabla V',$$
$$\operatorname{div}\mathbf{A}'' = \delta'', \quad \operatorname{rot}\mathbf{A}'' = \mathbf{C}'', \quad \mathbf{A}'' = -\nabla V'',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

possiamo dire subito che le equazioni (45) sono soddisfatte dal vettore

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}'' + \ldots$$

E questa osservazione ci permetterà di trattare molti dei casi complicati, che si presentano nelle applicazioni, come combinazioni di casi più semplici.

Qui ci conviene considerare dapprima alcune distribuzioni non circuitali [30], nelle quali cioè la rotazione $\mathbf{C}$ è nulla, e poi alcune distribuzioni circuitali.

38. *Distribuzioni non circuitali.* — Sia dato un campo, nel quale si sappia che $\mathbf{C} = 0$ in ogni punto, un campo a distribuzione non circuitale; e per ogni punto di esso sia data la divergenza δ. Il vettore $\mathbf{A}$ deve allora soddisfare alle equazioni differenziali

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \delta, \quad \operatorname{rot}\mathbf{A} = 0, \qquad (46)$$

ove δ è una data funzione delle coordinate. Noi vogliamo considerare alcune soluzioni di queste equazioni. A tale uopo cominceremo a supporre che il punto P, pel quale si vuole conoscere $\mathbf{A}$, si trovi in una regione ove sia $\delta = 0$, cominceremo cioè a supporre che sia $\delta = 0$ per tutto lo spazio all'interno di una certa superficie S (fig. 30) circondante il punto P. Ci sarà facile, in seguito, eliminare questa restrizione.

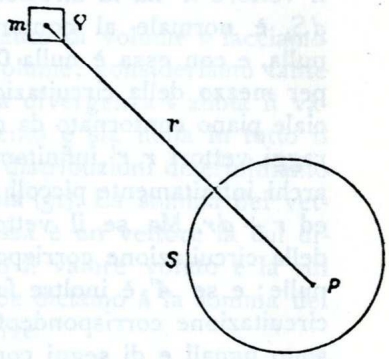

Fig. 30.

Immaginiamo il campo diviso in elementi di volume, e diciamo v il volume di uno di questi. Per definire poi la posizione del punto P rispetto a questo elemento, consideriamo come vettore il segmento di retta mP che congiunge un punto m dell'elemento al punto P; rappresentiamo con r il tensore di questo vettore, ossia la distanza mP, e con $\mathbf{r}$ il versore, ossia un vettore-unità preso nella direzione mP.

Diciamo δ il valore dato della divergenza del vettore $\mathbf{A}$ nel punto m, e, prima di considerare la distribuzione data, immaginiamo una distribuzione nella quale la rotazione sia nulla, e la divergenza abbia il valore dato δ soltanto nell'interno dell'elemento v, mentre fuori di questo essa è da per tutto uguale a zero. Se mai troveremo un vettore $\mathbf{A}'$ pel quale la divergenza abbia una tale distribuzione, se la stessa cosa faremo per tutti gli altri elementi di volume, e se sommeremo tutti i vettori $\mathbf{A}'$ che avremo trovati, avremo nella somma, in grazia della osservazione fatta all'articolo precedente 37], un vettore $\mathbf{A}$ il quale sodisfa alle equazioni (46) in tutto il campo.

Ora, tra i vettori $\mathbf{A}'$ che sodisfanno alla condizione rot $\mathbf{A}'=0$ vi hanno tutti quelli aventi la direzione $\mathbf{r}$ ed un tensore funzione della sola distanza r. Infatti se $\mathbf{A}'$ ha una rotazione $\mathbf{C}'$, questa si può scomporre in tre $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3$, la prima parallela e le altre due perpendicolari ad $\mathbf{r}$. La grandezza di $\mathbf{C}_1$ si calcola dividendo la circuitazione attorno ad un elemento superficiale dS_1 perpendicolare ad $\mathbf{r}$ per l'area dell'elemento medesimo. Ma se il vettore $\mathbf{A}'$ ha la direzione $\mathbf{r}$, esso in ogni punto del contorno dS_1 è normale al contorno stesso; quindi la circuitazione è nulla, e con essa è nulla $\mathbf{C}_1$. La componente $\mathbf{C}_2$ si può calcolare per mezzo della circuitazione attorno ad un elemento superficiale piano contornato da due porzioncelle uguali dr, dr' di due raggi vettori r, r' infinitamente vicini l'uno all'altro e da due archi infinitamente piccoli di due cerchi di centro m e di raggi r ed $r+dr$. Ma se il vettore $\mathbf{A}'$ ha la direzione r, le porzioni della circuitazione corrispondenti ai due archi di cerchio sono nulle; e se A' è inoltre funzione della sola r, le porzioni della circuitazione corrispondenti ai due lati radiali uguali dr, dr' sono uguali e di segni contrari. Quindi anche $\mathbf{C}_2$ è nulla. Similmente si dimostra che è nulla $\mathbf{C}_3$. Noi avremo adunque uno dei valori possibili di $\mathbf{A}'$ se porremo

$$\mathbf{A}' = \mathbf{r}\, A', \qquad (47)$$

e se determineremo il tensore A' funzione di r in modo che la divergenza abbia un valore uguale a δ dentro di v ed a zero fuori di v.

A quest'uopo basta osservare che l'integrale di div $\mathbf{A}' . dv$ esteso allo spazio limitato da una superficie chiusa circondante l'elemento di volume v si ridurrà qui a $v\delta$; e che quindi, pel teorema della divergenza (23), qualunque sia la superficie chiusa considerata, purchè essa circondi v, l'integrale del vettore $\mathbf{A}'$ preso su di essa sarà sempre uguale a $v\delta$. Applicando questa proposizione ad una superficie sferica di centro m e di raggio r, e ricordando che $\mathbf{A}'$ è normale a questa superficie e che A' ha uno stesso valore per tutti i punti di essa, si ha:

$$4\pi r^2 A' = v\delta, \quad \text{e quindi } A' = \frac{v\delta}{4\pi r^2}. \tag{48}$$

Ponendo

$$\frac{\delta}{4\pi} = \rho \quad \text{e} \quad v\rho = m, \tag{49}$$

il valore di A' si scrive più semplicemente così:

$$A' = \frac{v\rho}{r^2}, \quad \text{oppure } A' = \frac{m}{r^2}; \tag{50}$$

e portando questo valore nella (47) si ottiene

$$\mathbf{A}' = \mathbf{r}\frac{m}{r^2}. \tag{51}$$

Ciò che abbiamo fatto per l'elemento di volume v facciamo ora per tutti gli altri elementi di volume: consideriamo tante distribuzioni in ciascuna delle quali la divergenza δ abbia il valore dato solamente dentro all'elemento e sia nulla in tutto il rimanente spazio; per ciascuna di tali distribuzioni determiniamo pel punto P il vettore $\mathbf{A}'$ colla formola (51). La somma dei vettori $\mathbf{A}'$ sodisfa alle equazioni (46): essa è un vettore la cui divergenza ha in ogni punto del campo il valore voluto e la cui rotazione è nulla in tutto lo spazio. Se diciamo $\mathbf{A}$ la somma dei vettori $\mathbf{A}'$, la soluzione trovata si scrive

$$\mathbf{A} = \Sigma\, \mathbf{r}\frac{m}{r^2}; \tag{52}$$

e questa formola si traduce nel seguente enunciato: Il vettore $\mathbf{A}$ è il risultante di tanti vettori quanti sono gli elementi di vo-

lume, nei quali la divergenza è diversa da zero; ciascuno di questi vettori ha la direzione r della retta che congiunge il corrispondente elemento di volume al punto P considerato ed ha un valore inversamente proporzionale al quadrato della distanza del punto P dall'elemento di volume.

Il potenziale si trova facilmente. A tal fine consideriamo ancora dapprima un solo elemento di volume v situato in m ed il corrispondente vettore A′ nel punto P alla distanza r da m. Siccome le superficie equipotenziali sono normali al vettore, così la superficie equipotenziale passante per P è la superficie sferica di centro m e di raggio r, ed il potenziale V' del vettore A′ è funzione della sola variabile r. Per determinare questa funzione abbiamo l'equazione (44) nella quale dobbiamo scrivere A' in luogo di A, V' ed r in luogo di n. Abbiamo così: $A' = -\frac{dV'}{dr}$; e quindi, ricordando che $A' = \frac{m}{r^2}$,

$$\frac{dV'}{dr} = -\frac{m}{r^2}.$$

Di qui ricaviamo, rappresentando con cost. una costante arbitraria:

$$V' = \frac{m}{r} + \text{cost.} \tag{53}$$

Nel medesimo modo si calcolano i potenziali dovuti a tutti gli altri elementi di volume. Il potenziale V dovuto alla distribuzione data è la somma di tutti i V'; si ha quindi

$$V = \Sigma \frac{m}{r} + \text{cost.} \tag{54}$$

Se la divergenza ϑ è distribuita con continuità nello spazio, si ha da scrivere in luogo di una somma un integrale; si ha allora:

$$V = \int \frac{\vartheta \, dv}{r} + \text{cost.}, \tag{54'}$$

e l'integrazione si deve estendere a tutte le parti dello spazio nelle quali ϑ è diverso da zero.

Il potenziale V così determinato ha per ogni punto del campo un valore unico; esso è una funzione monodroma delle coordinate. Ciò noi sapevamo in precedenza, poichè avevamo già veduto che la rot A è nulla in tutto il campo.

In tutto ciò che precede abbiamo supposto che dentro ad una superficie chiusa S di dimensioni finite circondante il punto P fosse $\delta = 0$. Se ciò non è, bisogna aggiungere ai valori (52) e (54) o (54') trovati per $\mathbf{A}$ e per V un termine, che possiamo rappresentare rispettivamente con $\mathbf{A}_0$ e con V_0, dovuto alla parte del campo contenuto dentro della superficie S. Ma se la divergenza δ non è infinita in nessun punto della regione limitata dalla superficie S, è facile vedere che $\mathbf{A}_0$ e V_0 convergono verso zero quando la superficie S si riduce infinitamente piccola. Per dimostrare ciò, cominciamo ad osservare che anche facendo la superficie S infinitamente piccola, noi possiamo pur sempre immaginare che il volume da essa limitato sia scomposto in elementi, le dimensioni dei quali sieno infinitamente piccole a fronte delle distanze degli elementi stessi dal punto P: questa osservazione ci permette di far servire le espressioni or ora trovate per $\mathbf{A}$ e per V anche per calcolare $\mathbf{A}_0$ e V_0.

Ciò posto consideriamo $\mathbf{A}_0$. Questo vettore è il risultante $\Sigma \mathbf{r} \frac{m}{r^2}$ di tanti vettori $\mathbf{r} \frac{m}{r^2}$, che in generale non sono paralleli. Evidentemente il suo tensore A_0 è minore della somma dei tensori dei vettori componenti; quindi se col segno Σ si indica una somma estesa a tutto l'interno della superficie S, si ha

$$A_0 < \Sigma \frac{m}{r^2}.$$

Se immaginiamo dentro ad S una distribuzione continua e poniamo $m = \rho\, dv$, questa disuguaglianza si scrive

$$A_0 < \int \frac{\rho\, dv}{r^2}.$$

Se con ρ_0 si rappresenta il massimo valore assoluto di ρ dentro alla superficie S, si ha ancora con maggior ragione

$$A_0 < \rho_0 \int \frac{dv}{r^2}.$$

Ora possiamo supporre che S, la quale può essere una superficie qualunque, sia una superficie sferica di centro P e di raggio a; e come elemento di volume dv possiamo prendere il volume compreso tra due superficie sferiche descritte col centro in P e coi raggi r ed $r + dr$. Per tal modo abbiamo

$$dv = 4\pi r^2\, dr, \qquad \text{onde:} \quad \int \frac{dv}{r^2} = 4\pi \int_0^a dr = 4\pi a,$$

e quindi

$$A_0 < 4\pi\rho_0 a.$$

Ora, se si fa infinitamente piccolo il raggio a della sfera S, ρ_0 tende verso il valore di ρ in P, che è finito in causa della (49) perchè si è supposto che δ sia finita. Dunque, per la relazione precedente, anche A_0 si riduce infinitamente piccolo; e se la sfera si restringe fino a ridursi al punto P, A_0 si annulla.

La stessa cosa si può affermare, ed anche con maggior ragione, per V_0. Infatti se si suppone ancora che S sia una superficie sferica di centro P e di raggio a, se si scompone ancora questa sfera in elementi per mezzo di superficie sferiche concentriche e se si indica ancora con ρ_0 il massimo valore assoluto di ρ dentro la sfera, il valore assoluto di V_0 è minore di

$$\rho_0 \int \frac{dv}{r}, \quad \text{ossia di } \rho_0 \int_0^a 4\pi r\,dr, \quad \text{ossia di } 2\pi\rho_0 a^2,$$

e perciò esso si annulla con a.

Dopo questa osservazione noi siamo autorizzati ad adoperare le espressioni (52), (54), (54') anche quando il punto P considerato si trova in una regione ove δ è diverso da zero: quelle formole sono generali. Esse costituiscono una soluzione particolare delle equazioni differenziali (46).

Se in una regione dello spazio la distribuzione del vettore è solenoidale, cioè nelle (46) si ha $\delta = 0$, sarà in quella regione

$$m = 0, \qquad \rho = 0.$$

In ogni caso dalla soluzione particolare delle (46), che è fornita dalle formole (52), (54), (54'), si hanno altre soluzioni delle (46) sommando col vettore A da esse dato un altro vettore qualunque avente una distribuzione solenoidale (e non circuitale).

Con l'introduzione del nuovo simbolo ϱ definito dalla (49) $\frac{\delta}{4\pi} = \varrho$ l'equazione (41) o (41') diventa, riferendosi tanto ϱ quanto il potenziale V e le $x\,y\,z$ ad uno stesso punto dello spazio

$$\nabla^2 V = -4\pi\varrho \tag{55}$$

ossia

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\varrho \tag{55'}$$

(equazione di Poisson).

39. *Calcolo inverso della divergenza partendo dall'espressione trovata pel vettore.* — Nel precedente articolo abbiamo supposto che fosse data la divergenza δ in ogni punto del campo e che esistessero delle distribuzioni non circuitali corrispondenti; ed abbiamo trovato che una distribuzione non circuitale che dà luogo alla data distribuzione di δ si ha col porre

$$\mathsf{A} = \sum \mathsf{r} \frac{m}{r^2}, \qquad (52)$$

ove $m = \rho v = \frac{v\delta}{4\pi}$. È facile dimostrare la proposizione reciproca, dimostrare che se il vettore ha in ogni punto un valore esprimibile nella forma (52), se cioè A è il risultante di tanti vettori A', dei quali le direzioni sono quelle r delle rette congiungenti col punto considerato P altrettanti punti m determinati, e le grandezze sono inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze r del punto P dai punti medesimi, il flusso del vettore A uscente da una superficie chiusa qualunque dipende soltanto dalla somma Σm estesa ai soli punti situati all'interno della superficie medesima, ed è uguale a $4\pi\Sigma m$; donde poi si trarrà che la divergenza di A è uguale a δ.

A quest'uopo cominciamo a considerare il caso in cui i punti m si riducono ad un solo (fig. 31). Supponiamo data una

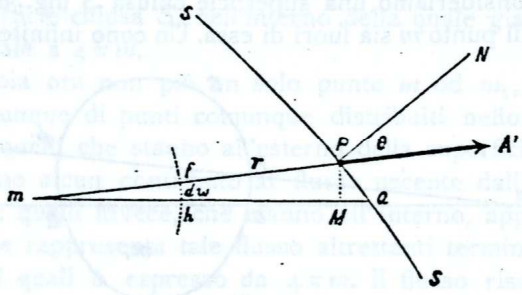

Fig. 31.

superficie $S\,S$ e consideriamo su questa un elemento $P\,Q$ di area $d\,S$; diciamo r la distanza $m\,P$ di questo elemento dal punto m, A' il vettore $P\,A'$ in P, e ϑ l'angolo della retta $m\,P\,A'$ con la normale positiva $P\,N$ alla superficie. Il flusso di A' attraverso all'elemento $P\,Q$ è $A' \cos\vartheta\, d\,S$, ossia, essendo $A' = \frac{m}{r^2}$,

$$m \frac{\cos\vartheta\, d\,S}{r^2}.$$

Ora immaginiamo col vertice in m un cono $m\,P\,Q$ circoscritto all'elemento superficiale $P\,Q$ e diciamo $d\,\omega$ la superficie della sezione $f\,h$ fatta in questo cono per mezzo di una superficie sferica di centro m e di raggio uguale ad *uno*; $d\,\omega$ è ciò che si denomina *angolo solido del cono* $m\,P\,Q$ od anche *superficie apparente* dell'elemento $P\,Q$ visto dal punto m. Se col centro in m e con raggio $m\,P = r$ descriviamo una superficie sferica, questa determina nel cono una sezione $P\,M$ di area $r^2\,d\,\omega$. Ma $P\,M$ si può anche considerare come la proiezione di $P\,Q$, ossia di $d\,S$, sul piano normale in P a $P\,m$, e quindi la sua superficie vale anche $\cos 0\,d\,S$; dunque abbiamo $r^2\,d\,\omega = \cos 0\,d\,S$, e quindi $\dfrac{\cos 0\,d\,S}{r^2} = d\,\omega$. Se portiamo questo valore nella espressione del flusso attraverso a $P\,Q$, questa si riduce a

$$m\,d\,\omega.$$

Questo valore è indipendente dalla distanza dell'elemento superficiale $P\,Q$ dal punto m, e dall'area di esso; dipende soltanto dall'angolo solido $d\,\omega$. Se, oltre all'elemento $P\,Q$, il medesimo cono di angolo solido $d\,\omega$ taglia sulla medesima superficie $S\,S$, o su altre superficie, altri elementi superficiali, i flussi attraverso a tali elementi, se presi nella medesima direzione, sono tutti uguali.

Ora consideriamo una superficie chiusa S (fig. 32), e supponiamo che il punto m sia fuori di essa. Un cono infinitesimo $m\,P\,Q$

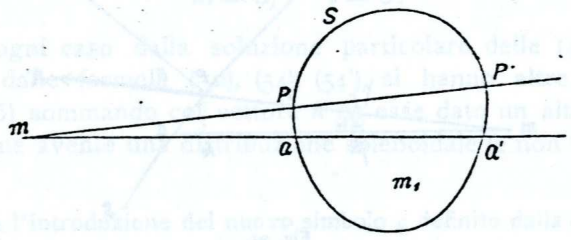

Fig. 32.

di vertice m, se taglia la superficie S, la taglia un numero pari di volte (nel caso più semplice, rappresentato in figura, la taglia due volte); ed attraverso alle successive sezioni $P\,Q$, $P'\,Q'$ ecc.... esso alternativamente entra nell'interno della superficie ed esce dalla medesima. I flussi del vettore $\mathbf{A}'$ attraverso alle successive sezioni $P\,Q$, $P'\,Q'$ ecc.... sono, rispetto alla superficie S, alter-

nativamente entranti ed uscenti; essi sono tutti uguali tra di loro quando si assume per tutti una medesima direzione positiva, ma se si prende come positiva la direzione uscente e come negativa la entrante in S, essi sono alternativamente negativi e positivi; sicchè se si sommano essi dànno una somma uguale a zero. La stessa cosa si deve dire per tutti i coni infinitamente sottili che si possono immaginare col vertice in m; e quindi si deve conchiudere che il flusso uscente dalla superficie chiusa S, rispetto alla quale il punto m è esterno, è uguale a zero.

Supponiamo invece che il punto m sia nell' interno della superficie S, che sia per esempio in m_1. In questo caso un cono infinitamente sottile di vertice m_1 o taglia la superficie S una sola volta, come nel caso semplice rappresentato in figura, o la taglia un numero impari di volte; il cono esce dalla superficie una volta di più che non entri; quindi nella somma de' flussi corrispondenti al cono medesimo rimane non eliso un flusso uscente. Se facciamo questa osservazione per tutti gli infiniti coni elementari che si possono immaginare col vertice in m_1, e se sommiamo i flussi uscenti che ad essi corrispondono, troviamo $m \int d\omega$. Ora la somma $\int d\omega$ degli angoli solidi di tutti i coni che hanno il vertice in un medesimo punto m_1 è uguale alla intiera superficie della sfera di raggio uno sulla quale essi vengono misurati; dunque il totale flusso uscente dalla superficie chiusa S, nell'interno della quale giace il punto m_1, è uguale a $4\pi m$.

Si abbia ora non più un solo punto m od m_1, ma un numero qualunque di punti comunque distribuiti nello spazio. Di tali punti quelli che stanno all'esterno della superficie chiusa S non portano alcun contributo al flusso uscente dalla superficie medesima; quelli invece, che stanno all' interno, apportano alla somma che rappresenta tale flusso altrettanti termini, uno qualunque dei quali è espresso da $4\pi m$. Il flusso risultante vale adunque $4\pi \Sigma m$.

Se introduciamo altri simboli, cioè poniamo (indicando con v un elemento di volume racchiudente il punto m):

$$m = \rho v \quad \text{e} \quad 4\pi\rho = \delta,$$

l'espressione del flusso ora trovata prende la forma $\Sigma v \delta$; e se δ è distribuita con continuità, $\int \delta \, dv$. Per un solo elemento di volume dv il flusso uscente è $\delta \, dv$. Dividendolo pel volume dv

dell'elemento otteniamo la divergenza; questa adunque è uguale a δ, o, se si vuole, a $4\pi\rho$.

40. *Forze newtoniane.* — Distribuzioni come quelle che siamo stati condotti a considerare si incontrano in parecchi casi nella meccanica e nella fisica. Fra questi casi poi hanno una importanza speciale quelli ove il vettore **A** è una forza. Se, come nelle distribuzioni ora studiate, la forza **A** è la risultante di forze **A'** con direzioni passanti per punti m determinati ed intensità funzioni delle sole distanze da questi punti, le forze si dicono *centrali*. Se poi l'intensità di ciascuna forza **A'** è inversamente proporzionale al quadrato della distanza r del punto su cui essa agisce dal corrispondente punto m, le forze si dicono *newtoniane*. Tale denominazione deriva dal fatto, che la legge della ragione inversa dei quadrati delle distanze è quella delle forze dovute alla gravitazione universale, scoperta da Newton.

Siccome, nel caso delle forze newtoniane, il vettore **A** si esprime in forma semplicissima per mezzo delle distanze r del punto considerato dai punti m, così è possibile, e può anche parere naturale, presentare e descrivere i fatti e parlare di essi come se alla esistenza dei punti m fosse dovuta l'esistenza delle forze **A'**, o, comunque, dei vettori **A'** medesimi, come se nei punti m risiedesse la *causa* de' vettori. Alludendo a tale causa si va talvolta più oltre: la si materializza, per così dire, col pensiero, e si dice che nei punti m esiste un *agente*; al quale poi, ne' diversi casi speciali che si presentano nella fisica, si dànno nomi diversi. E siccome, dato r, la grandezza della forza o più in generale del vettore **A'** dipende unicamente dalla grandezza m, siccome questa grandezza definisce, per così dire, il contributo del punto m nella produzione di **A**, così, dopo di avere introdotto il concetto di agente, si suole, e può presentarsi come naturale, considerare la grandezza m come la misura o la *quantità* dell'agente esistente nel corrispondente punto m. Allargando l'impiego di un concetto e di una locuzione resa famigliare dalla meccanica celeste, si dice anche, invece di quantità, *massa* di agente. La grandezza che noi abbiamo rappresentato colla lettera ρ, il valore della quale si ottiene dividendo m pel volume entro al quale questa esiste, la quale quindi rappresenta la m riferita all'unità di volume, dicesi allora naturalmente la *densità* dell'agente nel punto considerato.

La massa contenuta in un dato spazio, come sopra definita, è il flusso uscente dallo spazio medesimo diviso per 4π; come

questo flusso adunque essa può essere positiva o negativa; una massa negativa significa un flusso entrante. Così pure la densità; a meno del fattore 4π, essa è la divergenza del vettore nel punto considerato e può perciò, come questa, essere positiva o negativa; una densità negativa corrisponde ad una convergenza.

41. *Significato delle precedenti locuzioni ed estensione del loro impiego.* — Se in una questione di fisica si ha da considerare un campo di un vettore **A**, può presentarsi la questione di sapere dove veramente sia la sede de' fenomeni elementari, i quali dànno luogo alla esistenza del vettore. Nel caso particolare di una distribuzione centrale, come quella or ora considerata, può domandarsi se la causa dell' esistenza del vettore **A** stia nei punti stessi nei quali **A** esiste, o se risiede invece nei punti m che hanno col versore e col tensore di **A** una relazione così semplice. E la risposta a questa questione, qualora sia possibile, ha per la fisica una importanza fondamentale. Se infatti si ritiene che la causa del vettore stia ne' punti m, si è condotti a pensare a qualche cosa, ad una materia, o ad una condizione della materia esistente in tali punti, ad un *agente*, il quale esercita nei punti P, a distanza, azioni definibili per mezzo dei vettori **A'**. Se invece si ritiene che la causa immediata del vettore **A** stia nel punto P stesso in cui **A** viene osservato, non si hanno a considerare azioni a distanza, ma si è condotti a pensare ad un mezzo riempiente tutto lo spazio, ed a considerare **A** come la manifestazione di una condizione di tale mezzo, per esempio di una speciale deformazione di esso, deformazione la quale si trasmette da punto a punto con continuità, per passi infinitamente piccoli. Dalla scelta fra le due interpretazioni deriva poi naturalmente quella del modo più conveniente di descrivere il campo e di trattare le equazioni matematiche che a questo si riferiscono. Nel primo caso infatti, quando cioè si considera un agente situato ne' punti m ed esercitante azioni a distanza, le grandezze m e le ε, che figurano nelle nostre equazioni, hanno a considerarsi come le principali; risulta allora conforme alla natura delle cose prenderle come date ed esprimere in funzione di esse le altre grandezze, fra queste la **A**. Nel secondo caso invece, quando non si considerano azioni a distanza, la grandezza che si ha da trattare come principale, come fondamentale, è la **A** stessa; le altre, e fra queste le m, si presentano come secondarie.

Ma le considerazioni che noi abbiamo svolto negli articoli precedenti [37, 38, 39], le quali, essendo puramente geometriche, sono affatto generali, mettono in chiaro che a risolvere la cennata questione non basta avere dimostrato coll' esperimento l'esistenza del campo e la distribuzione newtoniana. Data l'esistenza del campo, la distribuzione in esso esistente si può descrivere in vari modi. Uno di questi consiste col dare direttamente il vettore **A** in funzione delle coordinate dei punti del campo: è il modo più diretto, è quello che noi abbiamo seguìto da principio e che abbiamo svolto negli articoli dal [12] al [36]. Un altro modo consiste nel dare in funzione delle coordinate non direttamente il vettore **A**, ma la div **A**, aggiungendo a tale dato altre condizioni sufficienti a definire completamente la distribuzione: è il secondo modo da noi seguìto, quello trattato negli articoli [37] e [38]. I due procedimenti si riducono a due scelte diverse delle quantità che in un medesimo sistema di equazioni si vogliono assumere come date e di quelle che si vogliono trattare come incognite: essi sono ugualmente legittimi e si equivalgono; scegliere l'uno o l'altro non significa risolvere alcuna questione fisica. La cennata questione fisica si può risolvere soltanto quando, oltre ai fatti che dimostrano la esistenza del campo e la distribuzione newtoniana, sieno dimostrati dalla esperienza altri fatti, per esempio fatti relativi alla influenza che può avere sul valore del vettore la natura de' corpi riempienti il campo, oppure fatti relativi al tempo ed al modo nel quale una variazione del vettore prodotto in una data regione si propaga alle altre parti dello spazio.

Dopo queste osservazioni, ed appunto in grazia di esse, noi possiamo adoperare, senza inconvenienti, le locuzioni sovra esposte, massa e densità, delle quali si suole fare un uso continuo nella trattazione delle forze newtoniane. Possiamo anche estendere l'uso di quelle locuzioni ai casi nei quali il vettore a distribuzione newtoniana non è una forza, possiamo adoperarle anche quando il vettore non ha nessuna interpretazione fisica e viene trattato come un semplice ente geometrico. Ma coll'atto stesso di estendere l'uso anche ai casi di pure considerazioni geometriche noi veniamo implicitamente a privare le sovra dette locuzioni, nel modo più assoluto, di qualunque interpretazione fisica; esse rimangono per noi semplici vocaboli utili per facilitare l'enunciazione a parole di relazioni matematiche importanti e frequenti.

§ 6.° Casi di discontinuità. Strati.

Una superficie di discontinuità è tale solo per la componente normale del vettore. — Definizione dello strato, ed espressione della sua densità. — Caso di una superficie in cui finisca il campo. Superficie corrispondenti. — Caso in cui le due componenti normali del vettore siano uguali e opposte. — Doppio strato. Potenziale di un doppio strato uniforme. — Discontinuità del potenziale e del vettore. — Il campo all'esterno di un doppio strato uniforme di data potenza dipende solo dal contorno. Determinazione del vettore.

42. *Una superficie di discontinuità è tale solo per la componente normale del vettore.* — In tutta la precedente trattazione abbiamo sempre supposto che il vettore fosse distribuito con continuità. Nel caso che qualche discontinuità si presentasse noi abbiamo una volta per sempre [13] convenuto di escluderla dal campo tagliando via da questo, per mezzo di opportune superficie, le regioni ove essa si presenta, oppure sostituendo col pensiero alla discontinuità una variazione rapidissima sì, ma continua. Ora, quando si tratta di distribuzioni non circuitali, le considerazioni dei vettori newtoniani e l'impiego del concetto di massa conducono ad un modo di presentare e di trattare i casi di discontinuità, il quale, nello stato attuale della scienza, ha una importanza speciale e notevole nella trattazione dei fenomeni elettrici e magnetici.

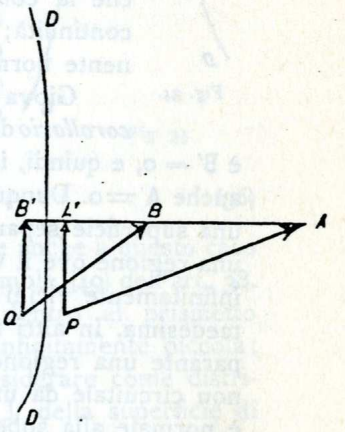

Fig. 33.

Si abbia una superficie $D\,D$ di discontinuità (fig. 33), si supponga cioè che tra due punti infinitamente vicini P e Q, uno sull'una e l'altro sull'altra faccia della superficie, il vettore presenti una differenza finita, che per esempio esso sia A, rappresentato da $P\,A$, in P, e B, rappresentato da $Q\,B$, in Q. I vettori A e B si possono scomporre in due, uno tangenziale, e l'altro normale alla superficie $D\,D$. Sieno, per esempio, $P\,A'$, $Q\,B'$ e si rappresentino con A', B', le componenti tangenziali, e sieno $A'\,A$, $B'\,B$ e si rappresentino con A'', B'' le componenti normali.

Dobbiamo cominciare ad osservare che se, come abbiamo supposto, la distribuzione non è circuitale, le componenti tangenziali A', B' non possono presentare tra loro alcuna differenza

finita; se la presentassero si avrebbe sulla superficie $D\,D$ rot **A** diverso da zero. Infatti in un piano qualunque normale alla superficie $D\,D$ immaginiamo (fig. 34) un rettangolo $p\,p$, $q\,q$ infinitesimo coi lati $p\,p$, $q\,q$ passanti pei punti P e Q e coi lati $p\,q$, $p\,q$ infinitamente piccoli a fronte di $p\,p$, $q\,q$. Diciamo s la lunghezza dei lati $p\,p$, $q\,q$ e rappresentiamo con a e con b le proiezioni di **A**, **B**, cioè di **A**′, **B**′, sui lati $p\,p$, $q\,q$. La circuitazione attorno al rettangolo, a meno della parte infinitamente piccola d'ordine superiore dovuta ai lati $p\,q$, $p\,q$, è uguale a $s\,(a - b)$. Acciocchè la rotazione sia zero, bisogna che tale circuitazione sia nulla qualunque sia il piano normale a $D\,D$ che si è scelto per tracciarvi sopra il rettangolo. Dunque per tutti i piani normali alla superficie $D\,D$ dev'essere $a = b$; e ciò vuol dire che dev'essere **A**′ = **B**′. Per conseguenza possiamo dire che la componente tangenziale non soffre alcuna discontinuità; la discontinuità esiste solo per la componente normale.

Fig. 34.

Giova notare subito, incidentalmente, un importante *corollario* di questa proposizione. Si supponga **B** = 0; allora è **B**′ = 0, e quindi, in grazia della proposizione ora dimostrata, è anche **A**′ = 0. Dunque **A** è allora normale alla superficie $D\,D$. Se una superficie separa un campo a distribuzione non circuitale da una regione ove il vettore è nullo, il vettore nei punti del campo infinitamente vicini a tale superficie è normale alla superficie medesima. In altri termini: in tutti i punti di una superficie separante una regione ove esiste un vettore con distribuzione non circuitale da una regione ove questo non esiste il vettore è normale alla superficie. La superficie è di livello e quindi [35] equipotenziale. Questa osservazione troverà applicazioni nello studio de' fenomeni elettrostatici.

43. *Definizione dello strato ed espressione della sua densità.* — Dopo la fatta osservazione, possiamo limitarci a considerare la componente del vettore normale alla superficie di discontinuità. Ciò è quanto dire che possiamo limitarci a considerare il caso, nel quale il vettore è normale alla superficie di discontinuità; tutti gli altri casi si dedurranno da questo componendo semplicemente col vettore considerato un altro vettore, il quale nei punti della superficie è tangente a questa e non presenta alcuna discontinuità.

Ciò posto, sia $D\,D$ (fig. 35) una superficie di discontinuità normale in ogni punto al vettore e sieno P e Q due punti in-

finitamente vicini situati su di una medesima normale $Q\,P\,N$, uno da una parte della superficie e l'altro dall'altra. Si scelga sulla normale una direzione $Q\,P\,N$ positiva, e si rappresentino con A_1 e con A_2 i tensori del vettore in P ed in Q intesi come positivi quando hanno la direzione $P\,N$ e come negativi quando hanno la direzione opposta.

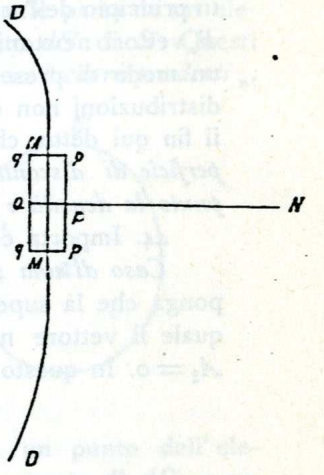

Fig. 35.

Prendiamo sulla superficie $D\,D$ un elemento $M\,M$ di area dS, e su questo, preso come sezione retta, costruiamo un prisma infinitamente piccolo, del quale le basi $p\,p$ e $q\,q$ contengano i punti P e Q. Dalla faccia $p\,p$ del prismetto esce un flusso $A_1\,dS$, mentre per la faccia $q\,q$ entra un flusso $A_2\,dS$: quindi si ha un flusso uscente dal prismetto uguale complessivamente a $(A_1 - A_2)\,dS$. Ora possiamo far uso anche in questo caso del concetto di massa, ed esprimere il fatto col dire che dentro del prismetto vi ha una massa dm definita dalla relazione:

$$4\pi\,dm = (A_1 - A_2)\,dS. \tag{56}$$

Con ciò noi non facciamo altro che estendere anche a questo caso la definizione di massa contenuta nelle formole (49) dell'art. 38.

La massa dm si ha da considerare dentro al prismetto anche quando l'altezza $P\,Q$ di questo è infinitamente piccola; ciò equivale a dire che essa si ha da considerare come distribuita sulla superficie dS dell'elemento $M\,M$ della superficie di discontinuità. Se le stesse considerazioni si fanno per gli altri elementi della superficie $D\,D$, si viene ad assegnare a ciascuno di essi una corrispondente massa, e così si viene ad immaginare una distribuzione di masse su tutta la superficie. Una superficie come quella considerata, sulla quale è distribuita con continuità una massa, si dice uno *strato*.

Se dividiamo dm per dS, otteniamo la massa distribuita sull'unità di superficie o riferita alla unità di superficie, e questa si dice: la *densità* dello strato, o la *densità superficiale*, o *di superficie*, o *sulla superficie*, in un punto dell'elemento dS. Se rappresentiamo con σ tale densità, questa risulta definita dalla formola

$$\sigma = \frac{dm}{dS}. \tag{57}$$

Se poi dividiamo i due membri della (56) per dS e vi introduciamo la notazione σ definita dalla (57), otteniamo:

$$4\pi\sigma = A_1 - A_2. \qquad (58)$$

Per tal modo risulta dimostrato ciò che abbiamo annunziato in principio dell'art. 42; risulta dimostrato come la considerazione di vettori newtoniani e l'impiego del concetto di massa offrano un modo di presentare e di trattare i casi di discontinuità nelle distribuzioni non circuitali. Risulta infatti, e con ciò riassumiamo il fin qui detto, che *in una distribuzione non circuitale una superficie di discontinuità equivale ad uno strato avente in ogni punto la densità* σ *data dalla formola* (58).

44. Importa considerare due casi particolari:

Caso di una superficie in cui finisca il campo. — Si supponga che la superficie DD separi il campo da uno spazio nel quale il vettore non esiste; si supponga per esempio che sia $A_2 = 0$. In questo caso la (58) dà

$$A_1 = 4\pi\sigma, \qquad \sigma = \frac{A_1}{4\pi}. \qquad (59)$$

Ciò fa vedere come l'esistenza di un campo non circuitale si possa interpretare per mezzo della finzione di masse distribuite sulle superficie che lo limitano; e le formole (59) mostrano come, dato il vettore in vicinanza della superficie, si possa calcolare la densità dello strato che si deve immaginare sulle superficie medesime, o viceversa come, data questa densità, si possa calcolare il vettore nelle vicinanze.

Poi devesi anche ricordare ciò che si è detto alla fine dell'articolo 42, che cioè quando A_2, ossia B, è uguale a zero, come qui si suppone, il vettore $\mathbf{A}$ è normale alla superficie DD, ossia il valore di A_1 ora calcolato non è soltanto una componente, ma è l'intiero tensore di $\mathbf{A}$. Se vogliamo, possiamo ciò ricordare scrivendo

$$\mathbf{A} = 4\pi\sigma\mathbf{n},$$

ove $\mathbf{n}$ rappresenta un vettore unità normale alla superficie. Ricordando la convenzione fatta pel segno di A_1, risulta anche che $\mathbf{A}$ è diretto dalla superficie DD verso il campo quando σ è positiva, dal campo verso la superficie DD quando σ è negativa.

Superficie corrispondenti. — In un campo a distribuzione non circuitale supponiamo che esistano due regioni Q, Q';

(fig. 36) limitate da due superficie S, S, nell'interno delle quali il vettore sia nullo, mentre all'esterno di esse ha valori diversi da zero. Supponiamo inoltre che fuori delle superficie S ed S' la distribuzione sia solenoidale. In questo campo consideriamo un tubo di flusso infinitamente sottile, il quale parta da un elemento dS di S e termini su di un elemento dS' di S'. Questi due elementi superficiali dS e dS' si dicono "*corrispondenti*".

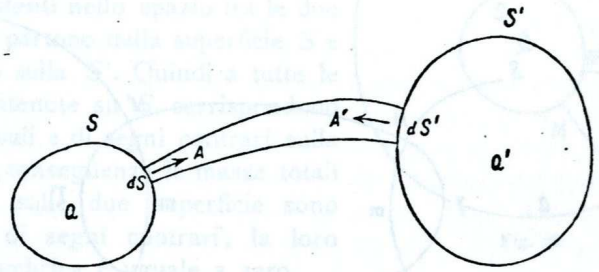

Fig. 36.

Se diciamo A il tensore del vettore in un punto dell'elemento dS, ed A quello del vettore in un punto di dS', e se, conformemente alla convenzione dei segni ora ricordata, li prendiamo come positivi quando sono diretti verso la regione ove A è diverso da zero, i flussi attraverso a dS ed a dS, presi nella direzione da dS verso dS' sono rispettivamente $A\,dS$ e $-A'\,dS'$. Per la proprietà solenoidale, che si è supposto esistere lungo tutto il tubo, questi due flussi sono uguali; quindi si ha $A\,dS = -A'\,dS'$. Ora la proposizione precedente, applicata ad A e ad A', dà

$$A = 4\pi\sigma \quad \text{ed} \quad A' = 4\pi\sigma';$$

dunque

$$\sigma\,dS = -\sigma'\,dS.$$

Se diciamo dm e dm' le masse esistenti sui due elementi dS e dS', questa uguaglianza si scrive più semplicemente

$$dm = -dm';$$

essa dice: *due elementi superficiali corrispondenti contengono masse uguali e di segni contrarii.*

Sia ora (fig. 37) $M\,M\,M'\,M'$ un tubo di flusso di dimensioni finite qualunque, il quale parta da una porzione $M\,M$ della superficie S e termini su di una porzione $M'\,M'$ della superficie S';

le due porzioni di superficie MM ed $M'M'$ si dicono *superficie corrispondenti*. Scomponendo il tubo $MMM'M'$ in tubi elementari infinitamente sottili, si possono scomporre le superficie MM ed MM' in elementi in modo che a ciascun elemento di MM sia corrispondente un elemento di $M'M'$. Ed applicando allora a tutte le coppie di elementi corrispondenti la proposizione ora dimostrata si trova che a ciascuna massa contenuta

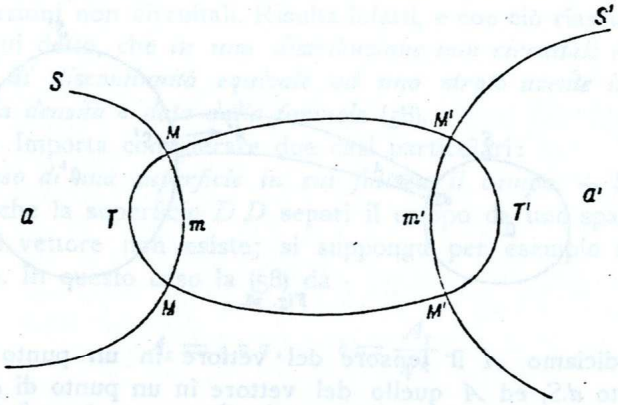

Fig 37.

su MM corrisponde una massa uguale e di segno contrario su $M'M'$. Dunque le due superficie corrispondenti contengono masse uguali e di segni contrari.

Ciò si può dimostrare direttamente e semplicemente così. Immaginiamo due superficie T, T', quali si vogliano, situate negli spazi Q e Q' ove il vettore è nullo ed aventi per contorni i contorni delle superficie corrispondenti MM, $M'M'$; formiamo per tal modo, con queste superficie T, T' e colla superficie laterale del tubo, una superficie chiusa $TMM'T'M'M$. Il flusso uscente da questa superficie chiusa è nullo, perchè il vettore è nullo nei punti delle superficie T, T' ed è tangente nei punti della superficie laterale del tubo. Ora, per la definizione data all'art. 40, il flusso uscente da una superficie chiusa, diviso per 4π, dà la massa esistente nell'interno della superficie stessa; dunque la massa contenuta nell'interno della superficie chiusa ora considerata è uguale a zero. Ma, poichè la distribuzione nello spazio tra S ed S' è solenoidale e perciò non v'hanno masse in tale spazio, la massa contenuta entro la superficie chiusa si riduce alla somma di quelle esistenti sulle superficie

di discontinuità MM, $M'M'$; se noi rappresentiamo tali masse con m, m', abbiamo adunque $m + m' = 0$, che è ciò che si voleva dimostrare.

Un caso particolare degno di nota è quello nel quale la superficie S circonda completamente la superficie S (fig. 38). In questo caso tutti i tubi di flusso esistenti nello spazio tra le due superficie partono dalla superficie S e terminano sulla S'. Quindi a tutte le masse contenute su S corrispondono masse uguali e di segni contrari sulla S', e per conseguenza le masse totali contenute sulle due superficie sono uguali e di segni contrari; la loro somma algebrica è uguale a zero.

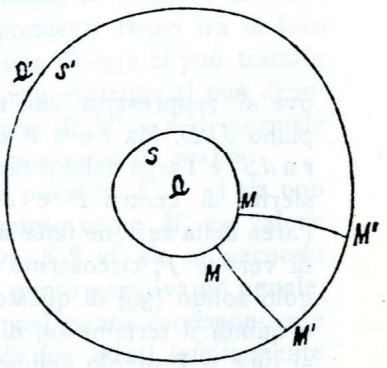

Fig. 38.

45. *Caso in cui le due componenti normali del vettore siano uguali e opposte.* — Si supponga $A_2 = -A_1$. Allora la (58) dà

$$A_1 = 2\pi\sigma. \qquad (60)$$

Questo caso si presenta quando dello strato si considera una porzione piana, di densità uniforme, oppure una porzione che come tale si possa trattare perchè infinitamente piccola, e si calcola la parte spettante a tale porzione nella somma (52).

In questo caso la (60) si può ricavare direttamente dalla (52). Si consideri infatti (fig. 39) un punto P, la cui distanza PO dal piano DD sia infinitamente piccola a fronte della distanza da un punto qualunque del contorno della porzione di strato considerata. Per semplice ragione di simmetria risulta chiaro che il vettore **A** espresso nella (52) dev'essere normale al piano DD e che la sua direzione si deve capovolgere quando il punto P passa da una faccia all'altra dello strato. Il suo tensore poi si ottiene sommando le componenti normali a DD dei termini $\mathbf{r}\frac{m}{r^2}$ della somma vettoriale (52). Ora uno di questi

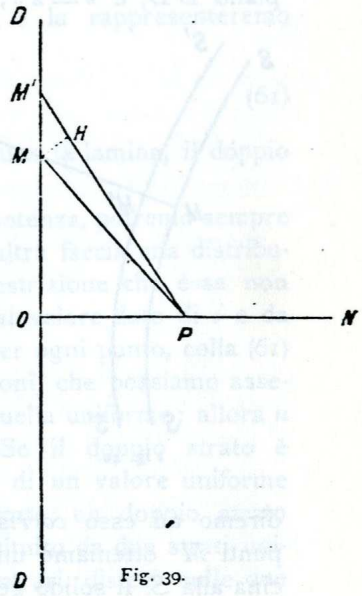

Fig. 39.

termini, quello corrispondente all'elemento MM', di area dS, è $\mathbf{r}\frac{\sigma\, dS}{r^2}$, e la sua componente normale è

$$\mathbf{r}\,\mathbf{n}\,\frac{\sigma\, dS}{r^2}, \qquad (a)$$

ove si rappresenti con $\mathbf{n}$ un vettore unità perpendicolare al piano DD. Ma $\mathbf{r}\,\mathbf{n}$ è il coseno dell'angolo OPM [7], e quindi $\mathbf{r}\,\mathbf{n}\,dS$ è l'area della proiezione MH di dS su di una superficie sferica di centro P e di raggio r, o, ciò che val lo stesso, l'area della sezione fatta su tale superficie sferica dal cono PMM' di vertice P, circoscritto all'elemento dS. Se si dice $d\omega$ l'angolo solido [39] di questo cono, si ha adunque $\mathbf{r}\,\mathbf{n}\,dS = r^2\, d\omega$, e quindi il termine (a) di A dovuto a dS si riduce a $\sigma\, d\omega$. Se si dice ω l'angolo solido del cono di vertice P avente per direttrice il contorno della porzione di strato considerata, si ha:

$$A = \sigma\,\omega. \qquad (b)$$

Se poi, come abbiamo supposto, P è infinitamente vicino al piano DD, è $\omega = 2\pi$; quindi si ritrova il valore (60).

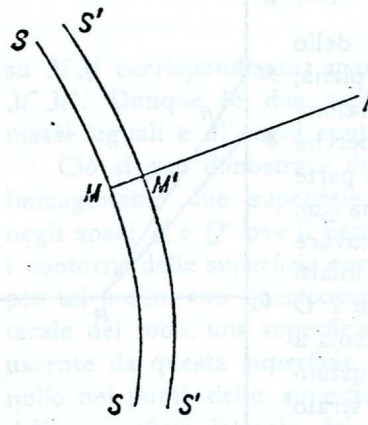

Fig. 40.

46. *Doppio strato.* — Un caso importante, che ci conviene ancora considerare, è quello di un doppio strato.

Immaginiamoci data una superficie S (fig. 40). Da ciascun punto M di questa eleviamo la normale e portiamo su di essa, in una direzione MN scelta come positiva, una lunghezza infinitamente piccola $MM' = n$, costante oppure variabile con una legge qualunque, ma senza discontinuità. Otteniamo così per ciascun punto M di S un punto M', che diremo ad esso *corrispondente*, e come luogo geometrico dei punti M' otteniamo una seconda superficie S infinitamente vicina alla S. Il solido geometrico limitato dalle superficie S ed S' è una *lamina* infinitamente sottile, e le due superficie si dicono le faccie di essa; la superficie $S'S'$, che sta dalla parte della normale positiva, è la faccia positiva; la SS, che sta dalla parte

della normale negativa, è la faccia negativa. In grazia della condizione espressa, che n, quando non sia costante, non presenti nella sua variazione alcuna discontinuità, le normali alle due faccie in due punti M ed M' corrispondenti fanno tra di loro un angolo infinitamente piccolo, ciascuna di esse si può trattare come una normale comune alle due faccie, ciascuna si può denominare *normale alla lamina*. La porzione $MM' = n$ di normale compresa dentro la lamina si dice la *grossezza di questa*.

Ora immaginiamo che sulla faccia positiva $S'S'$ vi sia uno strato, la cui densità abbia in ogni punto come M' un valore positivo σ, e che sulla faccia negativa SS vi sia un secondo strato, del quale la densità sia in ogni punto negativa ed uguale, in valore assoluto, a quella che vi è nel punto corrispondente del primo strato; in questo sistema di due strati infinitamente vicini, di densità uguali e di segni contrari, noi abbiamo ciò che si dice un *doppio strato*. La grossezza n della lamina si dice anche grossezza del doppio strato; il prodotto della grossezza per la densità σ dello strato positivo si dice *potenza* del doppio strato, od anche potenza della lamina. Noi supporremo che la potenza abbia un valore finito, e la rappresenteremo con i; scriveremo cioè:

$$i = n\sigma. \tag{61}$$

Se la potenza i ha lo stesso valore su tutta la lamina, il doppio strato si dice *uniforme*.

Data per ogni punto della lamina la potenza, potremo sempre assegnare alla densità σ sull'una o sull'altra faccia una distribuzione qualunque, arbitraria, colla sola restrizione che essa non deve presentare alcuna discontinuità: dal valore dato di i e da quello assegnato a σ potremo dedurre, per ogni punto, colla (61) la grossezza n. Fra le infinite distribuzioni, che possiamo assegnare a σ, possiamo sempre scegliere quella uniforme; allora n risulta direttamente proporzionale a i. Se il doppio strato è uniforme, se cioè i è costante, la scelta di un valore uniforme di σ trae seco la conseguenza $n =$ costante: un doppio strato uniforme si può sempre immaginare costituito da due strati uniformi, di densità uguali e di segni contrari, distesi sulle due faccie di una lamina di grossezza uniforme.

Potenziale di un doppio strato uniforme. — Dato un doppio strato SS, $S'S'$, uniforme, di potenza i (fig. 41), proponiamoci di calcolare colla formola (54) dell'art. 38, ossia colla

$V = \Sigma \frac{m}{r}$ a meno di una costante, il potenziale che esso produce in un punto qualunque P. A quest'uopo consideriamo della lamina un elemento prismatico $MQ\,M'Q'$ avente per basi un elemento MQ della faccia SS ed il corrispondente elemento $M'Q'$ della faccia $S'S'$; diciamo poi dS la superficie delle basi, n ed $\mathbf{n}$ il tensore ed il versore dell'elemento di normale MM', r ed $\mathbf{r}$ il tensore ed il versore della congiungente

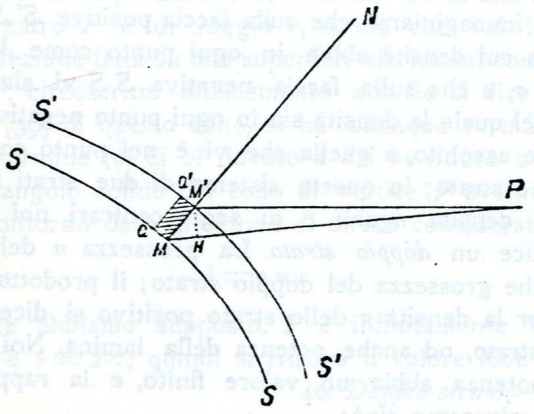

Fig. 41.

$M'P$, σ e $-\sigma$ le densità sugli elementi $M'Q'$ ed MQ. L'elemento prismatico apporta alla somma $\Sigma \frac{m}{r}$ due termini, corrispondenti alle masse $\sigma\,dS$ e $-\sigma\,dS$ esistenti sulle basi $M'Q'$ ed MQ. La prima di queste masse si può ritenere concentrata in M' alla distanza r da P; essa quindi dà il termine $\frac{\sigma\,dS}{r}$. L'altra massa si può ritenere concentrata in M, ad una distanza da P uguale a PM. Ora se col centro in P e con un arco di circolo $M'H$ di raggio r si taglia PM in H, si ha: $PM = PH + HM = r + HM$, o ancora, poichè a meno di un infinitesimo di ordine superiore, HM è la proiezione di $\mathbf{n}\,n$ su PM, e poichè la direzione di PM differisce infinitamente poco da quella di $\mathbf{r}$, $PM = r + \mathbf{r}\,\mathbf{n}\,n$. Dunque il termine corrispondente alla massa $-\sigma\,dS$ è: $-\frac{\sigma\,dS}{r + \mathbf{r}\,\mathbf{n}\,n}$. La somma dei due termini dovuti all'elemento $M'Q'\,MQ$ è per conseguenza: $\sigma\,dS\frac{\mathbf{r}\,\mathbf{n}\,n}{r^2 + \mathbf{r}\,\mathbf{n}\,r\,n}$. Ma

nel denominatore il termine $\mathbf{r}\,\mathbf{n}\,r\,n$, che è infinitamente piccolo, scompare a fronte del termine finito r^2; dunque il potenziale in P dovuto all'elemento di lamina considerato è

$$\sigma\, dS \frac{\mathbf{r}\,\mathbf{n}\,n}{r^2}, \quad \text{ossia } i\,\frac{\mathbf{r}\,\mathbf{n}\,dS}{r^2}.$$

Ora si è dimostrato nell'articolo precedente [45], che se si rappresenta con $d\omega$ l'angolo solido del cono di vertice P e di base dS, si ha $\mathbf{r}\,\mathbf{n}\,dS = r^2\,d\omega$; dunque l'espressione trovata si può ridurre alla forma più semplice

$$i\,d\omega. \tag{62}$$

Questa è la parte del potenziale dovuta all'elemento dS. Il potenziale dovuto alla lamina intiera è la somma di quelli dovuti agli elementi; esso è adunque uguale al prodotto della costante i per la somma delle superficie apparenti $d\omega$. Se rappresentiamo questa somma, ossia la superficie apparente della intiera lamina vista dal punto P, colla lettera ω, il potenziale in P risulta espresso, a meno di una costante arbitraria, dalla formola

$$V = i\,\omega. \tag{63}$$

Siccome per arrivare a questa formola abbiamo posto $\mathbf{r}\,\mathbf{n}\,dS = r^2\,d\omega$, così si deve ricordare che $d\omega$ vuol essere preso come positivo o come negativo secondochè è positivo o negativo $\mathbf{r}\,\mathbf{n}$. E siccome $\mathbf{r}\,\mathbf{n}$ è il coseno dell'angolo compreso tra la normale positiva $\mathbf{n}$ e la retta $\mathbf{r}\,r$ condotta dall'elemento dS al punto P[7], così $d\omega$ vuol essere preso come positivo o come negativo secondo che l'elemento di superficie dS visto dal punto P appartiene alla faccia positiva oppure appartiene alla faccia negativa della lamina. Per conseguenza nel calcolare l'angolo solido ω, che figura nella (63) bisogna distinguere le parti della lamina delle quali da P si vede la faccia positiva da quelle delle quali da P si vede la faccia negativa, computare le grandezze apparenti delle prime come positive e quelle delle altre come negative, e fare la somma algebrica. Così, per esempio, nel caso della fig. 42 si deve prendere come positivo

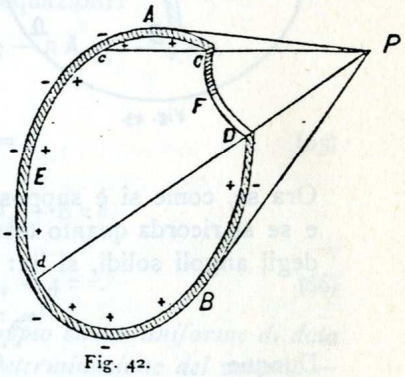

Fig. 42.

tutto l'angolo solido del cono PAB tangente alla lamina, dentro al quale si vede da P la parte AEB della faccia positiva; da esso poi si deve sottrarre l'angolo solido corrispondente allo spazio compreso fra i due coni PAB e PCD, perchè in questo spazio si vede da P la porzione anulare AC, BD della faccia negativa. Ciò che rimane è l'angolo solido del cono PCD che ha per direttrice il contorno CFD della lamina. Questo esempio mette in chiaro una regola semplicissima per trovare in ogni caso, senza bisogno di sottrazioni, il valore ed il segno di ω: l'angolo solido ω, del quale si ha da far uso nella formola (63), è quello del cono di vertice P, che ha per direttrice il contorno della lamina. Il segno di ω è quello della faccia che si vede dentro a questo cono.

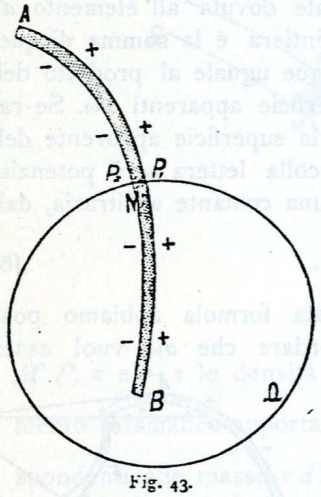

Fig. 43.

47. *Discontinuità del potenziale e del vettore.* — Su di una normale ad una lamina AB (fig. 43) di potenza i consideriamo due punti P_1 e P_2 infinitamente vicini, l'uno P_1, dalla parte della faccia positiva e l'altro, P_2, dalla parte della faccia negativa. Se diciamo ω_1 ed ω_2 gli angoli solidi coi quali la lamina è veduta dai due punti, e V_1, V_2 i corrispondenti potenziali, abbiamo:

$$V_1 = i\omega_1 \quad \text{e} \quad V_2 = i\omega_2,$$

e quindi

$$V_1 - V_2 = i(\omega_1 - \omega_2).$$

Ora se, come si è supposto, P_1 e P_2 sono infinitamente vicini, e se si ricorda quanto testè è stato detto relativamente al segno degli angoli solidi, si ha:

$$\omega_2 = -(4\pi - \omega_1).$$

Dunque

$$V_1 - V_2 = 4\pi i. \tag{64}$$

Questa differenza di potenziale si ha quando si passa da una faccia all'altra della lamina, qualunque, del resto, sia la via che si percorre; essa ha sempre il medesimo valore, sia che per andare da P_1 a P_2 si percorra una linea $P_1 Q P_2$, la quale

giri fuori del contorno AB, sia che si segua il cammino più breve $P_1 M P_2$ attraverso alla lamina. Se partendo da P_1, si percorre l'intiera linea chiusa $P_1 Q P_2 M P_1$, si ritrova in P_1, all'arrivo, il medesimo potenziale che si aveva alla partenza.

Se, come stiamo osservando, nell'interno della lamina, la quale ha una grossezza n infinitamente piccola, si ha da una faccia all'altra una differenza di potenziale finita $4\pi i$, dobbiamo dire che dentro della lamina il vettore è infinitamente grande. La sua componente normale alla lamina si ottiene infatti dividendo la differenza di potenziale $4\pi i$ per n, ed ha perciò il valore $4\pi \frac{i}{n}$, ossia $4\pi\sigma$, che è infinito come σ [46]. Siccome la componente tangenziale, che non soffre discontinuità [42], è finita all'interno come all'esterno, così, a meno di un angolo infinitamente piccolo, il vettore nell'interno della lamina è normale a questa. La sua direzione è quella che va dal potenziale più grande al più piccolo; esso va adunque dalla faccia positiva verso la negativa; è la direzione della normale negativa.

Allo stesso risultato conduce direttamente l'applicazione della relazione (58). Detto infatti $\mathbf{A}_1$ il vettore in P_1, $\mathbf{A}_2$ quello in P_2, $\mathbf{A}_0$ quello nell'interno della lamina e $\mathbf{n}$ un vettore unità nella direzione della normale positiva, la formola (58), applicata successivamente allo strato positivo di densità σ ed a quello negativo di densità $-\sigma$, dà le due equazioni:

$$\mathbf{n}\,\mathbf{A}_1 - \mathbf{n}\,\mathbf{A}_0 = 4\pi\sigma, \qquad \mathbf{n}\,\mathbf{A}_0 - \mathbf{n}\,\mathbf{A}_2 = -4\pi\sigma,$$

le quali, sommate, dànno:

$$\mathbf{n}\,\mathbf{A}_1 - \mathbf{n}\,\mathbf{A}_2 = 0, \tag{65}$$

e sottratte

$$\mathbf{n}\,\mathbf{A}_1 + \mathbf{n}\,\mathbf{A}_2 = 2\,\mathbf{n}\,\mathbf{A}_0 + 8\pi\sigma.$$

Quindi

$$\mathbf{n}\,\mathbf{A}_1 = \mathbf{n}\,\mathbf{A}_2 = \mathbf{n}\,\mathbf{A}_0 + 4\pi\sigma. \tag{66}$$

48. *Il campo all'esterno di un doppio strato uniforme di data potenza dipende solo dal contorno. Determinazione del vettore.* — L'angolo solido ω, che figura nella formola (63) è, come abbiamo veduto, quello del cono di vertice P avente per direttrice il contorno della lamina; esso adunque non dipende dalla forma della superficie della lamina; dipende unicamente dal contorno di essa. Dunque, data la potenza i del doppio strato, il potenziale V in un punto esterno qualunque è indipendente dalla

forma delle superficie del doppio strato, dipende solamente dal contorno. Un' altra lamina di ugual potenza, limitata dal medesimo contorno, qualunque del resto sia la sua forma, alla sola condizione che il punto P non sia nel suo interno, produrrebbe in P il medesimo potenziale. Tutte le infinite lamine di ugual potenza i che si possono immaginare col medesimo contorno produrrebbero, coll' esclusione del solo spazio da ciascuna di esse occupato, esattamente un medesimo campo. Per conseguenza il vettore **A** deve potersi determinare, quando semplicemente sieno date la potenza e la linea di contorno della lamina. Noi possiamo, in modo molto semplice, arrivare ad esprimere **A** con una somma vettoriale, della quale i singoli termini corrispondono uno ad uno ai singoli elementi del contorno, in modo che ciascuno di essi rappresenta il contributo di uno di questi elementi. Per arrivare a ciò noi ragioniamo nel modo seguente.

Per trovare la componente A_s del vettore **A** in una data direzione **s**, dobbiamo [34] ricorrere alla relazione (38); ossia

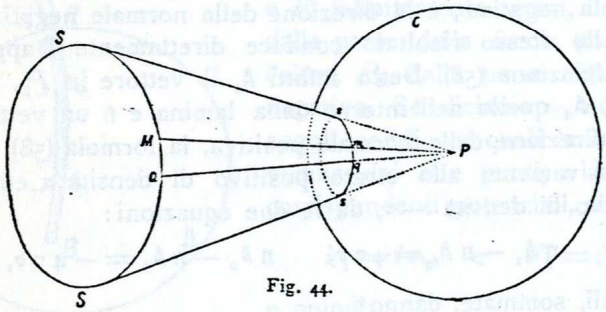

Fig. 44.

dobbiamo immaginare di spostare il punto P in tale direzione per un tratto infinitamente piccolo ds, vedere quale sia la diminuzione di V dovuta a tale spostamento, e dividere questa diminuzione per ds. Ma siccome lo spostamento di P, di cui qui si tratta, è lo spostamento relativo alla lamina, così possiamo anche modificare il procedimento in questo modo: immaginare che il punto P rimanga immobile e che vengono invece spostati tutti i punti della lamina per un tratto uguale a ds nella direzione opposta, ossia per un tratto $-ds$ nella direzione **s**. Nel caso nostro V è uguale a $i\omega$; dobbiamo adunque trovare la diminuzione della superficie apparente ω, dovuta allo spostamento $-ds$ della lamina, dividere tale diminuzione per ds e moltiplicarla per i. Ora (fig. 44) la superficie apparente ω della

lamina SS è l'area della sezione ss fatta col cono PSS dalla superficie sferica C di centro P e di raggio uno; e la variazione che questa superficie subisce in causa dello spostamento di SS è uguale alla somma algebrica delle superficie generate sulla sfera C da tutti gli elementi del contorno ss. A ciascuno di questi elementi corrisponde una parte della variazione di ω, e a ciascuna di queste corrisponde una parte di $\mathbf{A}$. Dunque il vettore $\mathbf{A}$ si può considerare come una somma di tanti termini quanti sono gli elementi MQ del contorno, corrispondenti ciascuno ad uno di questi elementi. Tali termini saranno altrettanti vettori infinitamente piccoli, e noi rappresenteremo uno qualunque di questi con $\mathbf{A}'$.

Noi dobbiamo vedere come si trovi uno qualunque dei vettori elementari $\mathbf{A}'$; ed a quest'uopo dobbiamo prendere a considerare uno qualunque degli elementi del contorno SS e vedere quale sia la superficie generata sulla sfera dal corrispondente elemento del contorno ss.

Sia MQ l'elemento scelto. Esso corrisponde ad un elemento mq del contorno ss e questo è l'intersezione della superficie sferica C coll'elemento PMQ della superficie conica, compreso tra le generatrici PM, PQ. Trascurando grandezze infinitamente piccole di ordine superiore, possiamo trattare la faccetta PMQ del cono come piana e sostituire alla superficie sferica C il suo piano tangente in m; e per tal modo il cómpito nostro si riduce a considerare l'intersezione mq del piano PMQ col piano perpendicolare in m a MP ed a trovare l'area generata da questa intersezione quando, rimanendo fissi questo piano perpendicolare ed il punto P, l'elemento di retta MQ subisce lo spostamento $-ds$ e trae seco la faccetta PMQ. Per maggiore chiarezza noi ridisegneremo nella fig. 45 la faccetta

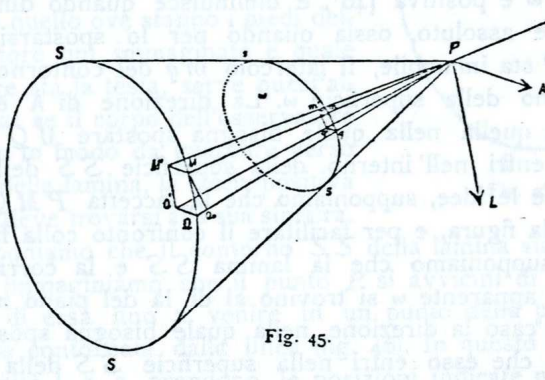

Fig. 45.

mobile PMQ e l'inserzione mq di essa col piano perpendicolare in m ad MP; e servendoci di questa figura cercheremo di determinare prima la direzione, o versore, — e poi la grandezza, o tensore del vettore **A'** in questione.

Quanto alla direzione, noi osserviamo subito che, se lo spostamento ds si facesse nel piano della faccetta PMQ, l'area generata da mq nel piano perpendicolare in m alla faccetta medesima sarebbe uguale a zero. Ciò vuol dire che **A'** non ha alcuna componente nel piano PMQ; ciò vuol dire, in altri termini, che **A'** è *perpendicolare a questo piano.* Rimane ora a vedere con quale ramo della normale esso coincida.

A tal fine basta ricordare che la direzione del vettore è quella nella quale il potenziale diminuisce [35'], e che perciò la direzione di **A'** è quella nella quale, tenendo immobile MQ, bisogna spostare P, per fare sì che la superficie ω diminuisca; ossia è opposta a quella, nella quale, tenendo immobile P, bisogna spostare MQ perchè ω diminuisca. Ora supponiamo che la faccia della lamina veduta dal punto P sia la positiva; in tale caso ω è positiva [46'], e diminuisce quando diminuisce il suo valore assoluto, ossia quando per lo spostarsi di MQ, mentre P sta immobile, il latercolo mq del contorno ss entra nell' interno della superficie ω. La direzione di **A'** è adunque opposta a quella nella quale bisogna spostare MQ per far sì che esso entri nell' interno della superficie SS della lamina. Per fissare le idee, supponiamo che la faccetta PMQ sia nel piano della figura, e per facilitare il confronto colla figura precedente supponiamo che la lamina SS e la corrispondente superficie apparente ω si trovino al di là del piano medesimo; in questo caso la direzione, nella quale bisogna spostare MQ per far sì che esso entri nella superficie SS della lamina, è quella che va verso il di dietro del piano della figura; la direzione di **A'** è adunque quella che viene dal piano della figura verso il davanti. Per esprimere questo risultato in termini precisi e generali, diciamo **r** e rappresentiamo sulla figura con PR un vettore-unità nella direzione MP della retta che va da un punto M dell'elemento MQ al punto P considerato; diciamo **l** e rappresentiamo con PL un vettore-unità avente la direzione MQ, che è quella di una circolazione verso destra [3] sul contorno della lamina attorno alla normale positiva, ossia quella del movimento delle lancette di un orologio per un osservatore che guardi la faccia negativa della lamina; diciamo finalmente **a**

e rappresentiamo in PA un vettore-unità nella direzione di **A'**, ossia il versore di **A'**; con queste denominazioni noi possiamo dire: *il vettore* **a** *è perpendicolare al piano dei vettori* **l** *ed* **r**, *ed i tre vettori, presi nell'ordine* **l r a**, *costituiscono un sistema destrorso.* Questo enunciato, giova ricordarlo, significa che chi, guardando nella direzione **a**, voglia far girare **l** (di un angolo retto) in modo da farlo venire a coincidere con **r**, lo deve far girare verso destra, nel verso in cui si muovono le lancette di un orologio.

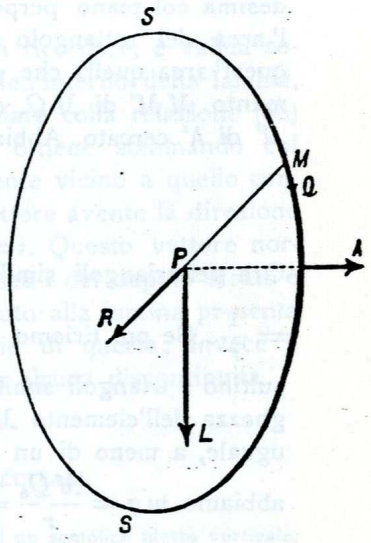

Fig. 46.

Nelle applicazioni che si fanno di questo teorema nella trattazione delle correnti elettriche si pone talvolta la regola ora enunciata sotto altre forme, una delle quali è questa: **A'** è diretto verso la sinistra di un osservatore il quale, stando disteso sul latercolo MQ coi piedi in M e colla testa in Q, guardi il punto P. Per trovare quale dei punti M, Q sia quello ove stanno i piedi dell'osservatore qui immaginato e quale quello ove sta la testa, serve quest'altra regola: se il corpo dell'osservatore si orienta in modo da guardare verso l'interno della lamina, la faccia positiva di questa deve trovarsi alla sua sinistra.

Supponiamo che il contorno SS della lamina sia una linea piana, e immaginiamo che il punto P si avvicini di più in più al piano di essa fino a venire in un punto della porzione di tale piano contornata dalla linea (fig. 46). In questo caso i tre vettori-unità **l**, **r**, **a** prendono le posizioni indicate nella figura. I due primi, **l** ed **r**, giacciono nel piano della linea SS; il terzo, **a**, risulta allora perpendicolare al piano medesimo ed è diretto nel verso della normale positiva della lamina. Allora la regola per trovare la direzione di **A'** si può mettere anche sotto questa forma: il vettore **A'** ha la direzione nella quale si avanzerebbe, parallelamente al suo asse, una vite ordinaria destrorsa che fosse fatta girare nel verso di **l**.

Con ciò abbiamo determinato il versore di **A'**: ora dobbiamo determinare il tensore. A quest'uopo osserviamo che spostare il punto P infinitamente poco nella direzione **a**, la quale sappiamo essere perpendicolare alla faccetta PMQ (fig. 45), equi-

vale a far rotare per un angolo infinitamente piccolo la faccetta PMQ attorno al latercolo MQ; e che perciò, se vogliamo immaginare che il punto P stia immobile e che invece si muova MQ, dobbiamo figurarci che la faccetta ruoti in senso opposto, di un uguale angolo, attorno alla retta PL parallela ad MQ e venga nella posizione $PM'Q'$. In questo movimento della faccetta l'elemento di retta mq, intersezione della faccetta medesima col piano perpendicolare in m, genera su questo piano l'area del rettangolo $mqq'm'$, ossia l'area $mq \times mm'$; ed è quest'area quella che, moltiplicata per i e divisa per lo spostamento MM' di MQ, dà come quoziente il valore del tensore A' di $\mathbf{A}'$ cercato. Abbiamo adunque

$$A' = i\,\frac{mq\ mm'}{MM'}.$$

Ora pei triangoli simili PMM', Pmm' abbiamo $\frac{mm'}{MM'} = \frac{mP}{MP} = \frac{1}{r}$. Se poi tiriamo MQ_0 parallela ad mq, in modo che risultino i triangoli simili Pmq, PMQ_0, e se diciamo l la lunghezza dell'elemento MQ e ϑ l'angolo LPR, uguale a QMP, uguale, a meno di un infinitesimo, al supplemento di Q_0QM, abbiamo $mq = \frac{MQ_0}{r} = \frac{l \operatorname{sen}\vartheta}{r}$. Dunque concludiamo:

$$A = \frac{il \operatorname{sen}\vartheta}{r^2}. \tag{67}$$

Ora che abbiamo versore e tensore, possiamo scrivere l'espressione del vettore $\mathbf{A}'$; ci basta moltiplicare ambi i membri della (67) pel vettore-unità $\mathbf{a}$. Così abbiamo:

$$\mathbf{A}' = A'\,\mathbf{a} = \frac{il}{r^2}\,\mathbf{a} \operatorname{sen}\vartheta.$$

Ora sappiamo che il vettore-unità $\mathbf{a}$ è perpendicolare al piano dei vettori-unità $\mathbf{l}$, $\mathbf{r}$ e che questi comprendono tra di loro l'angolo ϑ; possiamo servirci della relazione (16) dell'art. 11, e scrivere

$$\mathbf{a} \operatorname{sen}\vartheta = \mathbf{V}\,\mathbf{l}\,\mathbf{r}.$$

Dunque abbiamo

$$\mathbf{A}' = \frac{il}{r^2}\,\mathbf{V}\,\mathbf{l}\,\mathbf{r}. \tag{68}$$

Questo è il vettore infinitamente piccolo dovuto ad un elemento $l\mathrm{l}$ del contorno; per avere ora il vettore dovuto alla lamina, non abbiamo che da sommare i vettori A' dovuti a tutti gli elementi del contorno. Rappresentando con Σ una somma estesa a tutti gli elementi del contorno abbiamo

$$\mathrm{A} = i\Sigma \frac{l}{r^2} \mathrm{V} l r. \qquad (69)$$

Questa espressione però, giova ben ricordare, è valida solamente pei punti esterni alla lamina. Nell'interno della lamina, tra i due strati, il vettore si deve calcolare colla relazione (66) dell'articolo precedente [47]; esso si ottiene sommando col vettore esistente in un punto infinitamente vicino a quello considerato, ma esterno alla lamina, un vettore avente la direzione della normale negativa ed il tensore $4\pi\sigma$. Questo vettore normale è infinitamente grande se la potenza i del doppio strato è finita. La distribuzione del vettore dovuto alla lamina presenta una discontinuità su ciascuna superficie di questa; invece il vettore calcolato colla (69) non presenta alcuna discontinuità.

§ 7.° Distribuzioni circuitali.

Riduzione del problema. — Campo dovuto ad un semplice filetto vorticale. — Campo dovuto ad un sistema qualunque di filetti vorticali. — Solenoide. — Solenoide cilindrico. — Altro modo di trattare il caso del solenoide. — Superficie vorticali.

49. *Riduzione del problema.* — L'espressione (52), trovata all'art. 38 e discussa ne' due ultimi paragrafi non è che una soluzione particolare delle equazioni differenziali (46). Come notammo alla fine del detto articolo, altre soluzioni delle equazioni (46) si hanno aggiungendo semplicemente al vettore espresso colla (52) un altro vettore qualunque a distribuzione solenoidale e non circuitale. E se trattiamo questo vettore aggiunto come arbitrario, otteniamo senz'altro la soluzione generale delle equazioni (46), che comprende tutti i casi di distribuzioni non circuitali.

Ora dobbiamo ritornare alle equazioni più generali (45) [art. 37] e considerare i casi che finora abbiamo escluso, i casi nei quali la rotazione C non è nulla in tutto il campo, i casi di distribuzioni *circuitali*.

In grazia della osservazione fatta nell'art. 37, noi potremo, nel fare ciò, supporre che sia div **A** = o in tutto il campo, e limitarci così a considerare i vettori che sodisfanno alle equazioni

$$\text{div}\,\mathbf{A} = 0, \qquad \text{rot}\,\mathbf{A} = \mathbf{C}, \tag{70}$$

ove **C** ha in ogni punto del campo un valore dato. Nel caso più generale delle equazioni (45), ove tanto div **A** quando rot **A** sono diversi da zero, il vettore **A** sarà sempre la somma di uno di quelli che sodisfanno alle equazioni (70), che ora ci accingiamo a trattare, con uno di quelli che sodisfanno alle equazioni (46) già trattate.

Per trovare poi il vettore **A** che sodisfa alle equazioni (70) ci basta saper risolvere quest'altro problema: trovare un vettore **A'** tale che rot **A'** abbia un valore dato dentro ad una data parte del campo e sia uguale a zero in tutto il rimanente spazio. Se infatti si divide il campo in tante parti, in ciascuna delle quali la rotazione abbia un valore **C**, se si trova per ciascuna un vettore **A'** tale che sia rot **A'** = **C** dentro di essa e rot **A'** = o fuori di essa, e se, finalmente, si fa la somma $\mathbf{A} = \Sigma\,\mathbf{A}'$ di tutti i vettori **A'** così trovati, questa somma sodisfa alle equazioni (70). Il procedimento è analogo a quello che abbiamo adoperato nel § 5.° per le distribuzioni non circuitali.

Ora si è dimostrato [28] che la rotazione **C** ha sempre una distribuzione solenoidale; e da ciò si è dedotto che i tubi di flusso di questo vettore **C**, che abbiamo anche denominato *tubi vorticali*, e quando sono infinitamente sottili *filetti vorticali*, o hanno i capi sulle superficie limitanti il campo, o sono chiusi su sè stessi in forma di anelli. Lungo ciascuno di questi tubi, o filetti, il flusso di **C** è costante. Quindi fra le varie maniere di dividere il campo in parti od in elementi, per applicare il sovraesposto procedimento, si presenta da sè naturalmente, come la più acconcia, la divisione in tubi od in filetti vorticali. Se adottiamo questo modo di divisione, il nostro problema si riduce a questo: Supposto che esista nel campo un unico filetto vorticale SS (fig. 47), determinare la distribuzione di un vettore **A'** tale che rot **A'** sia uguale a zero in tutto lo spazio esterno al filetto, ed abbia invece un valore dato in ogni punto dell'interno o della superficie del filetto medesimo. Siccome si sa che il vettore **C** ha in ogni punto della superficie o dell'interno del filetto una direzione tangenziale, e siccome si sa che il suo tensore è inversamente proporzionale alla sezione retta

del filetto [22], così, invece di dare **C** per ogni punto del filetto vorticale, basta dare il valore costante del flusso; e siccome il flusso di **C** lungo il filetto è uguale [28] alla circuitazione di **A'** lungo una linea chiusa qualunque PQ concatenata col filetto medesimo, così il problema si presenta ancora sotto questa forma: Dato un filetto vorticale SS, unico nel campo, determinare un vettore **A'** tale che la circuitazione di esso su di una linea chiusa qualunque sia uguale a zero se questa non è concatenata col filetto SS ed abbia invece un valore diverso da zero, e dato, se è concatenata.

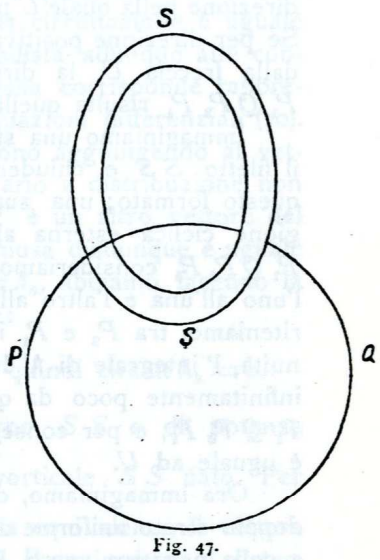

Fig. 47.

È questo il problema del quale ora ci occuperemo.

50. *Campo dovuto ad un semplice filetto vorticale.* — Al campo del vettore **A'**, che sodisfa alla condizione ora detta, possiamo dare il nome di *campo dovuto al filetto vorticale* detto. Noi qui ci proponiamo di determinarlo.

Il tubo vorticale infinitamente sottile dato può essere rientrante in sè stesso in forma di anello, come nella fig. 47, oppure avere i capi sulle superficie limitanti il campo [28]. Noi, per fissare le idee, ragioneremo sul primo caso; ma risulterà chiaro che quanto stiamo per dire si applicherà intieramente, senz'altro, anche al secondo.

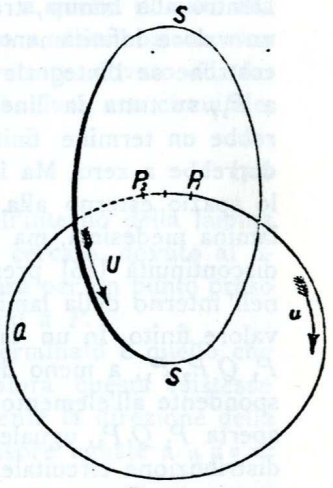

Fig. 48.

Ciò posto, rappresentiamo in SS (fig. 48), con una semplice linea, il tubo infinitamente sottile o filetto vorticale dato e diciamo U il flusso, pure dato, del vettore **C** attraverso ad una sezione qualunque di esso. La condizione a cui il vettore **A'** dovrà sodisfare, è semplicemente questa: che la circuitazione su di una linea chiusa qualunque $P_1 Q P_2 P_1$ concatenata colla SS sia uguale ad U [28], mentre quella su di una linea chiusa non concatenata con SS è uguale

a zero. In quanto al verso del flusso U e della circuitazione si ha a ricordare che questa si deve fare verso la destra rispetto alla direzione nella quale U passa dentro alla linea chiusa $P_1 Q P_2 P_1$. Se per direzione positiva del flusso U si assume quella indicata dalla freccia U, la direzione positiva della circuitazione su $P_1 Q P_2 P_1$ risulta quella indicata dalla freccia u.

Immaginiamo una superficie qualunque avente per contorno il filetto $S S$ e chiudente intieramente il vano dell'anello da questo formato; una superficie, cioè, la quale, tagliando la regione ciclica esterna all'anello, la renda aciclica. Sulla linea $P_1 Q P_2 P_1$ consideriamo due punti P_1 e P_2 infinitamente vicini l'uno all'una e l'altro all'altra faccia di tale superficie. Se, come riteniamo, tra P_2 e P_1 il campo non presenta alcuna discontinuità, l'integrale di $\mathbf{A}'$ lungo la linea aperta $P_1 Q P_2$ differisce infinitamente poco da quello preso sulla intiera linea chiusa $P_1 Q P_2 P_1$, e per conseguenza, a meno di un infinitesimo, esso è uguale ad U.

Ora immaginiamo, disposto sulla superficie considerata, un doppio strato uniforme di potenza i colla faccia positiva verso P_1 e colla negativa verso P_2. Tra le due faccie di esso abbiamo per la (64) una differenza di potenziale $4\pi i$, e ciò vuol dire che l'integrale del vettore sulla linea aperta $P_1 Q P_2$ ha il valore $4\pi i$. Dentro alla lamina, tra i due strati, da P_2 a P_1, il vettore ha un valore infinitamente grande ed è diretto da P_1 verso P_2 [46], così che se l'integrale sovra detto si estendesse oltre a P_2, fino a P_1, su tutta la linea chiusa, al valore di esso si aggiungerebbe un termine finito negativo, uguale a $-4\pi i$, che lo ridurrebbe a zero. Ma immaginiamoci un campo il quale in tutto lo spazio esterno alla lamina sia identico a quello dovuto alla lamina medesima, ma che non presenti sulle faccie di questa le discontinuità [46] presentate da quest'ultimo, così che anche nell'interno della lamina, tra i due strati, il vettore abbia un valore finito. In un tale campo l'integrale sulla linea chiusa $P_1 Q P_2 P_1$, a meno di un termine infinitamente piccolo corrispondente all'elemento $P_2 P_1$, è uguale a quello fatto sulla linea aperta $P_1 Q P_2$, uguale a $4\pi i$. In tale campo adunque si ha una distribuzione circuitale, per la quale il tubo infinitamente sottile $S S$ è un filetto vorticale. E se alla potenza i della lamina attribuiamo un valore tale che sia

$$4\pi i = U, \tag{71}$$

la circuitazione su di una linea chiusa qualunque $P_1 Q P_2 P_1$ concatenata col filetto risulta uguale a quella data, U. Su di una linea non concatenata col filetto la circuitazione è uguale a zero. La distribuzione immaginata sodisfa adunque alle condizioni imposte: il vettore $\mathbf{A}'$ che ad essa corrisponde rappresenta una soluzione particolare delle equazioni differenziali (70).

Tutte le altre soluzioni si ottengono aggiungendo al vettore $\mathbf{A}'$ così ottenuto un vettore arbitrario a distribuzione non circuitale (e solenoidale). Se infatti $\mathbf{A}''$ è un altro vettore del quale la circuitazione su di una linea chiusa qualunque è uguale a quella di $\mathbf{A}'$, e se poniamo $\mathbf{A}'' - \mathbf{A}' = \mathbf{A}_0$, abbiamo, facendo la circuitazione su di una linea qualunque:

$$\text{Circuit } \mathbf{A}'' - \text{circuit } \mathbf{A}' = \text{circuit } \mathbf{A}_0 ; \text{ e quindi circuit } \mathbf{A}_0 = 0.$$

La lamina immaginata di contorno $S S$ e di potenza $i = \frac{U}{4\pi}$, dicesi *equivalente* al filetto vorticale $S S$ dato. Per mezzo della considerazione della lamina equivalente, il vettore dovuto al filetto vorticale, in un punto P qualunque, si determina nel modo seguente:

1.° Se il punto considerato è esterno alla lamina, il vettore dovuto al filetto è senz'altro uguale a quello dovuto alla lamina, sommato con un vettore arbitrario a distribuzione non circuitale. Se con $\mathbf{A}'_1$ si rappresenta il vettore dovuto alla lamina e con $\mathbf{A}_0$ un vettore arbitrario a distribuzione non circuitale, si ha

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}'_1 + \mathbf{A}_0 . \qquad (72)$$

2.° Se il punto P considerato è nell'interno della lamina equivalente al filetto vorticale, il vettore cercato, dovuto al filetto, è uguale a quello calcolato come sopra per un punto preso all'esterno della lamina infinitamente vicino a P.

La differenza tra il vettore cosi determinato e quello che si avrebbe nell'interno della lamina, qualora questa esistesse effettivamente, è uguale ad un vettore avente la direzione della normale positiva della lamina ed un tensore uguale a $4\pi\sigma = 4\pi\frac{i}{n} = \frac{U}{n}$. Colle notazioni usate nella (72), si ha dunque per un punto interno alla lamina:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}'_1 + \frac{U}{n}\mathbf{n} + \mathbf{A}_0 . \qquad (72')$$

Le formole e le osservazioni dell'art. 48 del paragrafo precedente conducono ad una espressione di A', la quale è valevole per tutti i casi, tanto per un punto interno quanto per un punto esterno. Nel cennato articolo si è infatti trovato che il vettore dovuto ad una lamina è per un punto esterno:

$$i\Sigma\frac{l}{r^2}\mathsf{V}\mathsf{l}\mathsf{r}, \qquad (a)$$

e per un punto interno [47]:

$$i\Sigma\frac{l}{r^2}\mathsf{V}\mathsf{l}\mathsf{r}-4\pi\sigma\mathsf{n},$$

ossia, colle notazioni attuali:

$$i\Sigma\frac{l}{r^2}\mathsf{V}\mathsf{l}\mathsf{r}-\frac{U}{n}\mathsf{n}. \qquad (b)$$

Portando i valori (a) e (b) rispettivamente nella (72) e nella (72') si trova *per tutti i casi:*

$$\mathsf{A}'=i\Sigma\frac{l}{r^2}\mathsf{V}\mathsf{l}\mathsf{r}+\mathsf{A}_0. \qquad (72'')$$

Questa espressione presenta A' come una somma di tanti termini quanti sono gli elementi del filetto vorticale; ad un elemento di lunghezza l e di direzione l, la posizione del quale rispetto al punto P sia definita dal vettore $r\,\mathsf{r}$, corrisponde nella somma il termine $\frac{1}{r^2}\mathsf{V}\,il\mathsf{l}.\mathsf{r}$. Per esprimere questo risultato si può fare così:

1.° Definire l'elemento di filetto vorticale come un vettore il cui versore è l ed il cui tensore è il prodotto della potenza i per la lunghezza l.

2.° Dire che l'elemento $il\mathsf{l}$ produce nel punto P, situato alla distanza r nella direzione r, un vettore uguale a $\frac{1}{r^2}\mathsf{V}\,il\mathsf{l}.\mathsf{r}$.

È questo un modo di dire, del quale si fa uso in alcune considerazioni di fisica, e propriamente in quelle relative alle correnti elettriche. Esso allude alla finzione che nell'elemento del filetto abbia sede la causa del corrispondente vettore. Ma su questa finzione si hanno a ripetere le cose dette nell'art. 41 relativamente a quella con la quale si localizza la causa dei

vettori a distribuzione non circuitale e si materializza la divergenza del vettore coi concetti di massa e di densità. Per giustificarla come ipotesi fisica non bastano le esperienze dimostranti la esistenza e la distribuzione del vettore.

51. *Campo dovuto ad un sistema qualunque di filetti vorticali.* — Se sono dati più tubi vorticali, si può determinare, come sopra, per ciascuno di essi il vettore $\mathbf{A}'$. La somma $\mathbf{A}$ di questi è un vettore il quale sodisfa alla condizione di avere una circuitazione nulla su tutte le linee chiuse non concatenate con alcuno dei tubi vorticali dati e di avere invece una circuitazione uguale a ΣU su di una linea qualunque concatenata con alcuni dei filetti. Il vettore $\mathbf{A}$ così calcolato rappresenta la soluzione generale delle equazioni (70).

Se poi si somma questa soluzione con una di quelle relative ai casi più sopra studiati di distribuzioni non circuitali, si ha la soluzione più generale delle equazioni (45).

L'osservazione fatta alla fine dell'articolo precedente [50] ci permette di riassumere in un enunciato molto semplice, e comodo per le applicazioni, quanto nel presente paragrafo e nei due precedenti è stato detto intorno alla risoluzione delle equazioni generali (45). Eccolo:

Si immaginino le masse, che per ogni elemento di volume corrispondono ai dati valori di div $\mathbf{A}$, e quelle costituenti i doppi strati equivalenti a tutti i filetti vorticali dati. Tutte queste masse formano un sistema complessivo al quale corrisponde per ogni punto P un vettore che si può calcolare colla legge Newtoniana espressa nella formola (52). Si dica $\mathbf{A}_1$ il vettore newtoniano così calcolato, calcolato cioè colla (52), e si rappresenti con $\mathbf{A}_0$ un vettore arbitrario pel quale sia da per tutto $\operatorname{div}\mathbf{A}_0 = 0$ e $\operatorname{rot}\mathbf{A}_0 = 0$, un vettore cioè a distribuzione solenoidale e non circuitale. Con ciò si può subito trovare per ogni punto P il vettore $\mathbf{A}$ che sodisfa alle equazioni (45), e precisamente così: Se il punto P non è nell'interno di nessuna delle lamine immaginate come equivalenti ai filetti vorticali, si ha:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 ; \tag{73}$$

Se invece il punto P sta nell'interno di qualcuna delle lamine immaginate, il vettore $\mathbf{A}$ si ottiene aggiungendo ad $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0$ un terzo vettore, un vettore il cui tensore è $4\pi\sigma = 4\pi\frac{i}{n} = \frac{U}{n}$, e la cui direzione è quella della normale positiva della lamina

nel punto P. Detto $\mathbf{n}$ un vettore unità avente la direzione della ora detta normale positiva, il terzo vettore, che bisogna aggiungere ad $\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0$ si può esprimere con

$$4\pi\sigma\mathbf{n} = 4\pi\frac{i}{n}\mathbf{n} = \frac{U}{n}\mathbf{n};$$

quindi si ha

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 + 4\pi\sigma\mathbf{n} \\ &= \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 + 4\pi\frac{i}{n}\mathbf{n} \\ &= \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 + \frac{U}{n}\mathbf{n}. \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

52. *Solenoide.* — Faremo una applicazione di questa proposizione al caso semplice ed importante nel quale i filetti verticali dati sono tutti uguali, hanno la forma di anelli piani e sono in grande numero, regolarmente distribuiti coi loro centri di figura a distanze uguali su di una linea data e coi loro piani normali a questa. Se si suppongono i filetti vicinissimi l'uno all'altro, in modo che essi coprano una superficie tubolare, il sistema si dice *solenoide*. La linea su cui stanno i centri di figura degli anelli vorticali dicesi *asse*, le superficie piane contornate dal primo e dall'ultimo anello si dicono *le basi* del solenoide.

Per applicare al solenoide la proposizione dimostrata nell'articolo precedente, dobbiamo sostituire col pensiero ai singoli anelli vorticali le lamine equivalenti. A queste lamine, del resto, possiamo assegnare quella forma e quella grossezza che più ci aggrada, colla sola condizione che ciascuna di esse abbia per contorno il filetto vorticale corrispondente ed abbia una potenza i data dalla relazione $4\pi i = U$. Immaginiamo che le lamine abbiano faccie piane ed assegniamo alle medesime grossezze tali, che ciascuna faccia di ognuna di esse combaci esattamente con una faccia della lamina contigua. Per tale modo le lamine riempiono completamente il solido geometrico avente per superficie la superficie tubolare e le basi del solenoide. Se per fissare le idee rappresentiamo nella fig. 49 una sezione fatta nel solenoide con una superficie passante per l'asse SN, e se supponiamo che AB, CD sieno le sezioni delle due basi ed AC, BD quelle della superficie tubolare, le lamine infinitamente sottili equivalenti agli anelli vorticali risultano rappre-

sentate in $a\,b\,c\,d$, $c\,d\,e\,f$, ecc...., e riempiono, prese insieme, tutto il solido geometrico $A\,B\,C\,D$. Se, come abbiamo supposto, i filetti vorticali, tutti uguali, corrispondono ad uguali valori di U, le lamine ad essi equivalenti hanno tutte una uguale potenza i. Se poi, come abbiamo pure supposto, le distanze, da centro a centro, fra gli anelli vorticali successivi sono tutte uguali, risultano uguali le grossezze $o\,p$, $p\,q$, ...; e se il raggio

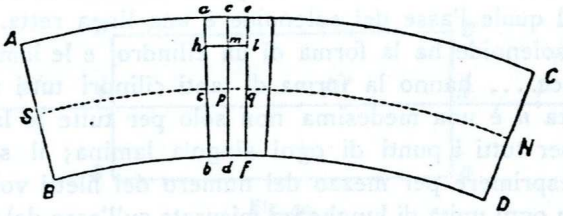

Fig. 49.

di curvatura dell'asse $S\,N$ non varia con discontinuità, risultano uguali, a meno di infinitesimi di ordine superiore, anche le grossezze $h\,m$, $m\,l$ di due lamine contigue, qualunque sia il punto m della faccia comune, in corrispondenza del quale queste grossezze si misurano. Perciò in un punto qualunque m del piano $c\,d$, col quale coincidono la faccia positiva di una lamina qualunque $a\,b\,c\,d$ e quella negativa della lamina contigua $c\,d\,e\,f$, le densità dei due strati distribuiti sulle faccie medesime sono uguali e di segni contrari; su ogni elemento della superficie colla quale i due strati coincidono vi hanno due masse uguali e di segni contrari, la somma delle quali è uguale a zero; nella somma (52) i termini corrispondenti a tali masse si elidono mutuamente; possiamo dire che i due strati si elidono. Rimangono non elisi soltanto lo strato negativo della prima lamina e quello positivo dell'ultima; e noi, dando alla parola *equivalenza* il senso dianzi stabilito, possiamo dire che questi due strati equivalgono al solenoide. Concludiamo adunque che il vettore $\mathbf{A}_1$ figurante nelle formole (73) e (74) è semplicemente quello dovuto a due strati di masse uguali e di segni opposti distribuiti sulle due basi del solenoide; esso si calcola colla formola (52) mettendo in questa al posto di m, per ogni elemento superficiale dS, il valore $\sigma\,dS$ ossia $\frac{i}{u}\,dS$ della massa su questo distribuita.

Con ciò le formole (73) e (74) dell'articolo precedente dànno subito il vettore $\mathbf{A}$ in un punto qualunque del campo.

I segni dei due strati, che si hanno ad immaginare sulle due basi del solenoide, si deducono dalla osservazione fatta nell'art. 50 relativamente alla lamina equivalente ad un semplice filetto vorticale. Se relativamente alla direzione SN il flusso U nei filetti vorticali ha la direzione destra, lo strato positivo devesi immaginare sulla base CD del solenoide e quello negativo sulla AB.

53. *Solenoide cilindrico.* — Importa considerare il caso semplice nel quale l'asse del solenoide è una linea retta. In questo caso il solenoide ha la forma di un cilindro, e le lamine $abcd$, $cdef$, ecc.... hanno la forma di tanti cilindri tutti uguali. La grossezza n è una medesima non solo per tutte le lamine, ma anche per tutti i punti di ogni singola lamina; il suo valore si può esprimere per mezzo del numero dei filetti vorticali esistenti su ogni unità di lunghezza misurata sull'asse del solenoide. Detto N_1 questo numero, abbiamo infatti

$$N_1 n = 1, \text{ e quindi } \frac{1}{n} = N_1 .$$

Portando questo valore di $\frac{1}{n}$ nelle formole (73) e (74), queste diventano

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 \qquad (73')$$

e

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 + 4\pi i N_1 \mathbf{n}$$
$$= \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 + U N_1 \mathbf{n}. \qquad (74')$$

In queste formole, giova ricordarlo, la lettera $\mathbf{n}$ rappresenta un vettore-unità parallelo all'asse del solenoide nella direzione rispetto alla quale il flusso U ne' filetti vorticali ha il verso destro. Per un osservatore che fosse disteso su uno dei filetti vorticali in modo da ricevere il flusso U coi piedi e di emetterlo dalla testa, e che guardasse verso l'interno del solenoide, $\mathbf{n}$ sarebbe diretto verso la sinistra.

Essendo costante n, è costante anche la densità $\sigma = \frac{i}{n}$; i due strati, che si hanno da immaginare sulle due basi del solenoide, sono adunque uniformi.

Dopo ciò, se ci limitiamo a considerare il caso nel quale il punto P (fig. 50) giace sull'asse del solenoide, possiamo calcolare subito il vettore $\mathbf{A}_1$ in modo semplicissimo. Esso è la som-

ma dei due dovuti rispettivamente allo strato positivo CD ed allo strato negativo AB. Ora è evidente, per semplice ragione di simmetria, che questi sono entrambi paralleli all'asse: dunque anche $\mathbf{A}_1$ è parallelo all'asse, e così noi abbiamo senz'altro il suo versore. Quanto al tensore, questo è uguale alla somma algebrica di quelli dei vettori dovuti ai due strati, e questi noi sappiamo calcolare nel modo già indicato nell'art. 45. Se di-

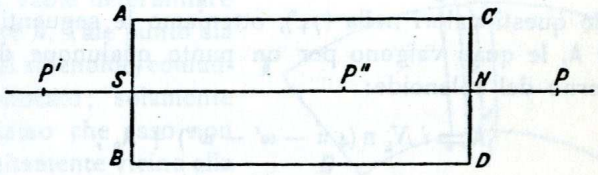

Fig. 50.

ciamo ω_1 ed ω_2 gli angoli solidi dei coni di vertice P e di basi CD ed AB, se rappresentiamo con σ il valore assoluto della densità dei due strati e se prendiamo come positiva la direzione $\mathbf{n}$, ossia la SN, sappiamo che i tensori dei vettori dovuti ai due strati sono rispettivamente (vedi la formola (*b*) dell'art. 45):

$$+\sigma\omega_1 \quad \text{e} \quad -\sigma\omega_2,$$

ove ω_1 ed ω_2 si debbono prendere come positivi o come negativi secondochè P è a destra od a sinistra del corrispondente strato. Quindi il tensore di $\mathbf{A}_1$ è $\sigma(\omega_1 - \omega_2)$. E siccome $\sigma = \frac{i}{n} = iN_1 = \frac{UN_1}{4\pi}$, così abbiamo

$$A_1 = iN_1(\omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{4\pi} UN_1(\omega_1 - \omega_2), \tag{75}$$

e quindi

$$\mathbf{A}_1 = iN_1\,\mathbf{n}(\omega_1 - \omega_2) = \frac{1}{4\pi} UN_1\,\mathbf{n}(\omega_1 - \omega_2). \tag{76}$$

Se P è fuori del solenoide, a destra di CD, ω_1 ed ω_2 sono entrambi positivi ed ω_1 è maggiore di ω_2; quindi A_1 è positivo, $\mathbf{A}_1$ è diretto verso destra, ha la direzione $\mathbf{n}$. Se P è fuori del solenoide, verso sinistra, per esempio in P', ω_1 ed ω_2 sono entrambi negativi ed ω_1 ha un valore numerico minore di ω_2; quindi A_1 risulta ancora positivo, $\mathbf{A}_1$ ha ancora la direzione positiva $\mathbf{R}$, la direzione verso destra. Ma se invece il punto P

è dentro al solenoide, per esempio in P', ω_1 è negativo ed ω_2 è positivo; quindi $\omega_1 - \omega_2$ è negativo, A_1 è negativo, $\mathbf{A}_1$ è diretto nel verso opposto ad $\mathbf{n}$, verso sinistra.

In quest'ultimo caso, se rappresentiamo con ω' e con ω'' i valori assoluti di ω_1 e di ω_2, possiamo scrivere

$$\mathbf{A}_1 = -iN_1\,\mathbf{n}(\omega' + \omega') = -\frac{1}{4\pi}UN_1\,\mathbf{n}(\omega' + \omega'). \qquad (77)$$

Portando questi valori nella (74'), otteniamo le seguenti espressioni di $\mathbf{A}$, le quali valgono per un punto qualunque dell'asse nell'interno del solenoide:

$$\mathbf{A} = iN_1\,\mathbf{n}(4\pi - \omega' - \omega'') + \mathbf{A}_0,$$

$$= UN_1\,\mathbf{n}\left(1 - \frac{\omega' + \omega''}{4\pi}\right) + \mathbf{A}_0. \qquad (77')$$

Se al vettore arbitrario solenoidale e non circuitale $\mathbf{A}_0$ diamo il valore zero, il vettore $\mathbf{A}$ espresso dalla (77') risulta parallelo all'asse del solenoide ed ha il tensore

$$A = iN_1(4\pi - \omega' - \omega'') = UN_1\left(1 - \frac{\omega' + \omega''}{4\pi}\right). \qquad (78)$$

Se il solenoide ha una piccola sezione trasversale ed è molto lungo, e se il punto P considerato è molto lontano dalle basi, $\omega' + \omega''$ risulta piccolo. Al limite, per un solenoide di sezione finita e di lunghezza infinitamente grande, oppure di lunghezza finita e di sezione infinitamente piccola, la somma degli angoli solidi $\omega' + \omega''$ diventa infinitamente piccola. Allora si ha semplicemente:

$$A = 4\pi iN_1 = UN_1. \qquad (79)$$

Il medesimo valore si trova per un punto dell'asse di un solenoide, l'asse del quale formi una linea chiusa, o, come si suol dire, per un punto dell'asse di un *solenoide chiuso*.

54. *Altro modo di trattare il caso del solenoide.* — Quello che abbiamo svolto è uno dei modi di applicare al caso del solenoide la proposizione generale dell'art. 51. Ma siccome alle lamine equivalenti ai filetti vorticali si possono assegnare forme arbitrarie, così la stessa proposizione si può applicare in infinite maniere diverse. Fra queste, se si vuole, si può scegliere in modo che il punto P considerato, qualunque esso sia, non venga

a trovarsi nell'interno di alcuna delle lamine immaginate; e per tal modo si può sempre, qualunque sia il punto P, calcolare il vettore **A** colla semplice formola (73) [51], senza bisogno di ricorrere alla (74). È utile che noi qui indichiamo uno dei procedimenti possibili.

Sia ancora $A\,B\,C\,D$ (fig. 51) la sezione del solenoide fatta con una superficie passante per l'asse, e sia P il punto pel quale si vuole determinare il vettore **A**. Tale punto sia dentro al solenoide, comunque collocato; solamente supponiamo che esso non sia infinitamente vicino alla superficie.

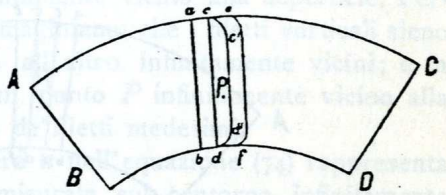

Fig. 51.

Noi possiamo ancora, esattamente come abbiamo fatto dianzi, immaginare le lamine piane riempienti tutto il volume del solenoide; ma poi, per fare sì che il punto P non si trovi nell'interno di alcuna di esse, possiamo immaginare che la lamina $c\,d\,e\,f$, nella quale il punto P verrebbe a cadere, venga leggermente deformata, immaginare per esempio che essa venga incurvata presso il contorno, come è indicato nella fig. 51, in modo che la parte mediana $c'\,d'$, pur rimanendo piana e normale all'asse, si trovi spostata di un tratto infinitamente piccolo, per esempio verso la destra. Lo spazio necessario per lo immaginato spostamento infinitamente piccolo della lamina $c\,d\,e\,f$ si può ottenere mediante spostamenti infinitamente piccoli delle lamine che stanno a destra della lamina stessa; lo si può, per esempio, ripartire fra tutte col diminuire infinitamente poco la loro grossezza.

Se, come abbiamo supposto, il punto P non è infinitamente vicino alla superficie del solenoide, possiamo anche, senza dar luogo ad alcuna variazione finita del vettore, spostare infinitamente poco non solamente la parte mediana, ma anche il contorno della lamina $c\,d\,e\,f$; e così, se lo preferiamo, possiamo conservare alla lamina la sua forma piana, e semplicemente spostare la lamina stessa verso la destra in $c'\,d'\,e\,f$, come è indicato nella fig. 52. Il posto necessario per lo spostamento si può ottenere, come si è detto, ripartendo lo spostamento medesimo fra le grossezze di tutte le lamine situate da una medesima parte del punto P. Se poi il numero delle lamine è infinitamente grande, possiamo anche fare una cosa più semplice:

sopprimere la lamina $c\,d\,e\,f$, nella quale si trova il punto P, e lasciare al loro posto tutte le altre.

Con uno qualunque di questi artifizi noi possiamo fare sì che il punto P venga a trovarsi non più dentro alla lamina $c\,d\,e\,f$, ma in una fessura infinitamente sottile tra la faccia negativa $c'\,d'$ di questa lamina e la faccia positiva $c\,d$ della lamina $a\,b\,c\,d$ che la precede. Ma il sistema di masse che così si è condotti a

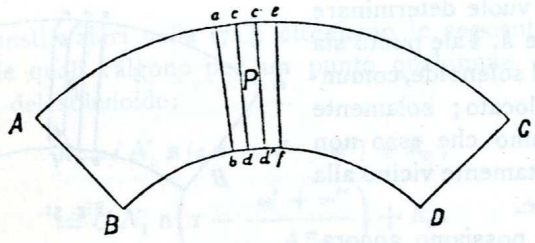

Fig. 52.

considerare come equivalente al solenoide non è più quello di prima. Prima si avevano solamente due strati di masse uguali e di segni contrari distribuiti sulle due basi $A\,B$ e $C\,D$ del solenoide; attualmente, invece, si hanno oltre a questi due strati altri due strati, uno positivo e l'altro negativo, sulle faccie $c\,d$ e $c'\,d'$ fra le quali è compreso il punto P. Questi due strati, che prima si elidevano mutuamente, adesso, dopo lo spostamento, non si elidono più. Perciò il vettore rappresentato con $\mathbf{A}_1$ nella formola (73) non è più semplicemente quello dovuto ai due strati $A\,B$ e $C\,D$, al quale si riferiscono le espressioni (76) e (77) dell'articolo precedente; esso invece è uguale alla somma di questo con un altro vettore, col vettore dovuto ai due strati $c\,d$ e $c'\,d'$.

Ora tanto lo strato positivo $c\,d$, quanto il negativo $c'\,d'$, producono nel punto infinitamente vicino P un vettore che sappiamo calcolare colla (*b*) dell'art. 45, un vettore avente la direzione della normale positiva $\mathbf{n}$ ed un tensore uguale a $2\pi\sigma$. Dunque il vettore, che si deve sommare con quello dovuto alle due basi, è $4\pi\sigma\mathbf{n}$, ossia $\frac{4\pi i}{n}\mathbf{n}$. Perciò se invece di dare alla lettera $\mathbf{A}_1$ il significato che essa ha nelle formole generali (73) e (74) noi le attribuiamo il significato che essa ha preso nel caso speciale trattato negli articoli 52 e 53, se cioè rappresentiamo con $\mathbf{A}_1$ il vettore dovuto alle due basi, noi ricadiamo sui

risultati ai quali siamo giunti per altra via negli articoli 52 e 53 medesimi.

55. *Superficie vorticali.* — Le sovra esposte conclusioni sono valide sempre quando la grossezza delle lamine sia infinitamente piccola a fronte della distanza del punto P dalla superficie del solenoide. Se si suppone che le lamine sieno infinitamente sottili, tali conclusioni si hanno a ritenere valide anche quando il punto P sia infinitamente vicino alla superficie. Fermiamoci su questo caso: immaginiamo che i filetti vorticali sieno infinitamente sottili e l'uno all'altro infinitamente vicini; e in tale ipotesi consideriamo un punto P infinitamente vicino alla superficie luogo geometrico de' filetti medesimi.

In questo caso la lettera n nell'equazione (74) rappresenta la grossezza della lamina misurata sul contorno, infinitamente vicino al punto P; quindi $\frac{1}{n}$ rappresenta il numero dei filetti vorticali che si trovano su di una unità di lunghezza normale ai filetti medesimi, presa sulla superficie del solenoide, infinitamente vicino al punto P; ed $\frac{U}{n}$ rappresenta la somma dei flussi del vettore $\mathbf{C}$ che si hanno nei filetti vorticali medesimi. Noi possiamo denominare la superficie del solenoide, la quale è luogo geometrico dei filetti vorticali, *superficie vorticale*. In ogni punto di tale superficie il vettore $\mathbf{C}$, che rappresenta la rotazione di $\mathbf{A}$, è tangente alla superficie medesima; fuori della superficie, da una parte o dall'altra di essa a distanza finita, $\mathbf{C}$ non esiste. Se da un punto della superficie vorticale infinitamente vicino a P si traccia sulla superficie una linea normale in ogni suo punto al vettore $\mathbf{C}$, n è un elemento di tale linea ed U è il flusso di $\mathbf{C}$ che lo attraversa; $\frac{U}{n}$ è il flusso attraversante l'unità di lunghezza.

Se rappresentiamo questo flusso $\frac{U}{n}$ con la semplice lettera U_1 e portiamo questa notazione nella equazione (74) dell'art. 51, questa diventa:

$$\mathbf{A} = U_1 \mathbf{n} + \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0.$$

Ivi $\mathbf{A}_1$ ed $\mathbf{A}_0$ stanno, come dianzi, a rappresentare rispettivamente il vettore dovuto alle basi del solenoide ed un vettore arbitrario a distribuzione solenoidale e non circuitale.

Questo è il vettore in un punto P infinitamente vicino alla superficie vorticale nell'interno del solenoide. In un punto P' infinitamente vicino a P, ma dall'altra parte della superficie vorticale, all'esterno del solenoide, il vettore ha un altro valore $\mathbf{A}'$, e precisamente

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0.$$

I valori di $\mathbf{A}_1$ e di $\mathbf{A}_0$ che figurano nella espressione di $\mathbf{A}'$ differiscono infinitamente poco da quelli che figurano in $\mathbf{A}$; fra i due vettori in P ed in P' vi ha adunque la differenza

$$\mathbf{A} - \mathbf{A}' = U_1 \mathbf{n}.$$

Supponiamo che U_1 abbia un valore finito; allora questa equazione ci dice che i vettori $\mathbf{A}$ ed $\mathbf{A}'$ nei due punti infinitamente vicini P e P' presentano tra di loro una differenza finita: la superficie vorticale è allora una superficie di discontinuità. La differenza tra $\mathbf{A}$ ed $\mathbf{A}'$ è un vettore $U_1 \mathbf{n}$ il cui versore $\mathbf{n}$ è tangente alla superficie vorticale; dunque la discontinuità che qui si presenta è nella componente tangenziale. Si ricorderà che all'art. 42 abbiamo veduto come nelle distribuzioni non circuitali la discontinuità su di una superficie si possa presentare soltanto per la componente del vettore normale alla superficie medesima. Ora qui troviamo che nelle distribuzioni solenoidali e circuitali la discontinuità che si può presentare su di una superficie riguarda soltanto l'altra componente del vettore, la componente tangenziale. Sono superficie di discontinuità per la componente normale le superficie contenenti strati di masse, sono superficie di discontinuità per la componente tangenziale le superficie vorticali. Combinando le cose dette nell'art. 42 con quelle svolte nel presente articolo si possono trattare tutti i casi di discontinuità che si possono presentare.

§ 8.° Sui due modi di definire e di trattare il campo di un vettore.

56. *Riassunto dei due modi di definire e trattare un campo vettoriale e confronto tra essi.* — In grazia delle osservazioni fatte nell'art. 37, i risultati esposti nei tre ultimi paragrafi (5.°, 6.° e 7.°) comprendono tutti i casi di distribuzione che si possono presentare. Ora, nel chiudere l'esposizione di tali risultati, è utile richia-

mare e riassumere alcune osservazioni fatte negli articoli 41 e 50 intorno all'impiego di alcuni concetti e di alcune locuzioni ed intorno ai modi di presentare, di definire e di trattare il campo di un vettore che risultano da tale impiego.

Nel caso delle distribuzioni non circuitali (§§ 5.° e 6.°) abbiamo trovato [38] che il vettore $\mathbf{A}$ in un punto qualunque P si può esprimere, a meno di un termine a distribuzione solenoidale, colla somma (52) di tanti vettori $\mathbf{A}'$ quanti sono gli elementi di volume v nei quali la divergenza ha un valore δ diverso da zero, e che ciascuno di questi vettori è espresso da $\mathbf{r}\frac{m}{r^2}$, ove m è il prodotto $\frac{v\,\delta}{4\,n}$ ed $r\,\mathbf{r}$ è il vettore che definisce la posizione del punto P rispetto all'elemento v di volume. Volendo esprimere questo risultato a parole, in forma semplice, ci fece comodo dare un nome alla grandezza m; e noi abbiamo adoperato il nome *massa*. Ci fece comodo inoltre indicare nella somma $\mathbf{A} = \Sigma\,\mathbf{r}\frac{m}{r^2}$ il termine $\mathbf{A}'$ dipendente da una qualunque delle masse m; e noi abbiamo detto $\mathbf{A}'$: il vettore in P *dovuto* alla massa m, o *prodotto* dalla massa m. Questo modo di parlare, il quale torna comodo ed utile quando il campo viene definito col dare i valori della divergenza, così che il vettore si abbia a determinare per mezzo di questa, si può considerare come l'espressione di una finzione, secondo la quale si suppone che negli spazi ove esistono le m risieda la causa del campo; o, se si vuole, come l'espressione di una rappresentazione fisica del campo, nella quale si materializza la divergenza o la massa in ogni punto, considerandola come un agente. E nelle considerazioni di fisica questa finzione e questa rappresentazione si possono presentare come una interpretazione od una ipotesi fisica, secondo la quale le masse hanno una esistenza fisica e sono la causa di grandezze vettoriali che in grazia di esse esistono a distanza, con direzioni e con valori calcolabili colla legge newtoniana.

Similmente nelle distribuzioni circuitali abbiamo trovato [art.i 50 e 51] che il vettore $\mathbf{A}$ in un punto qualunque P si può esprimere, a meno di un vettore a distribuzione non circuitale, come una somma di tanti vettori $\mathbf{A}'$ quanti sono gli elementi dei filetti vorticali esistenti nel campo. Ad un elemento di lunghezza l e di direzione $\mathbf{l}$, attorno al quale la circuitazione sia $U = 4\,\pi\,i$, e rispetto al quale la posizione del punto P sia de-

finita dal vettore $r\,\mathbf{r}$, corrisponde nella somma un vettore $\mathbf{A}'$ dato dalla formola

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{r^2} \mathbf{V} i l \mathbf{r}.$$

Volendo esprimere questo risultato a parole, in forma semplice, e volendo indicare che il termine $\mathbf{A}'$ della somma vettoriale $\mathbf{A}$ corrisponde ad un determinato elemento $i\,l$ di un dato filetto vorticale, ci fece comodo dire che il vettore $\mathbf{A}'$ *è dovuto* al cennato elemento, od *è prodotto* dal medesimo. Questo modo di parlare, il quale riesce comodo e naturale quando sono dati i filetti vorticali e si vuole determinare il vettore per mezzo di essi, si può presentare come la espressione di una finzione, secondo la quale si ripone nell' elemento del filetto vorticale la causa del vettore $\mathbf{A}'$. E nelle questioni di fisica questa finzione può anche trasformarsi in una interpretazione fisica dei fatti, o in una ipotesi, secondo la quale si materializza l' elemento di filetto e gli si attribuisce la proprietà di produrre a distanza, nel punto definito dal vettore $r\,\mathbf{r}$, un vettore $\mathbf{A}'$ avente il versore $\mathbf{V} i l \mathbf{r}$ ed il tensore $\frac{i\,l}{r^2}$.

Combinando le due finzioni, quella delle masse agenti a distanza secondo la legge newtoniana, e quella dei filetti vorticali agenti pure a distanza secondo la legge sovraindicata, si possono definire e descrivere tutti i campi, qualunque sia in essi la distribuzione. E se si tratta di questioni fisiche, si fa in questo modo una rappresentazione del campo, nella quale si attribuisce una esistenza fisica alle masse ed ai filetti vorticali occupanti nello spazio determinate regioni, mentre tutto lo spazio rimanente si considera semplicemente come spazio geometrico, ove la grandezza vettoriale studiata esiste come prodotta *a distanza* dalle masse e dai filetti.

Di fronte a questo sta un altro modo di considerare un campo, un modo che, se nelle interpretazioni fisiche cominciò ad essere adoperato molto più tardi del precedente, a noi invece, qui, in questa nostra trattazione geometrica, si è presentato pel primo, e come il più diretto ed il più naturale. Tale modo è quello che abbiamo esposto nell'art. 13 e sul quale dopo d'allora siamo tornati più volte, segnatamente negli articoli 14, 15, 17 e 20. Esso è derivato direttamente dal concetto stesso di vet-

tore. Un vettore [1] è l'operazione colla quale si trasporta un punto per un dato tratto in una data direzione. Quando adunque si definisce per mezzo di un vettore la grandezza vettoriale esistente in un campo, si immagina, con ciò stesso, in ogni punto del campo un punto mobile, un punto che si sposta nella direzione e per un tratto, che si dicono, rispettivamente, *direzione* e *grandezza del vettore.*

Noi nell'art. 13, per fare una rappresentazione fisica, tangibile, del campo, non abbiamo fatto altro che sostituire col pensiero ai punti mobili geometrici altrettanti punti materiali; e così siamo stati, senz'altro, condotti alla finzione di un mezzo, per esempio di un fluido, che si sposta nello spazio. Invece di materializzare, con una finzione della mente, la divergenza e la rotazione del vettore, noi abbiamo materializzato il vettore stesso. Nell' art. 13 si è veduto come a qualunque campo si possa applicare questa finzione. All'art. 15 poi si è dimostrato che in una tale rappresentazione fisica il flusso attraverso ad una superficie è proporzionale al volume di fluido che nel movimento ha attraversato la superficie medesima, e che perciò il tensore del vettore rappresenta, a meno di un fattore scalare costante, il volume che è passato attraverso ad un' unità di superficie presa su di una superficie di livello, e a tale volume si è anche dato un nome, il nome di *spostamento.* E finalmente all' art. 20 si è notato che quando si fa uso di tale finzione si trova una distribuzione solenoidale se si immagina che il fluido abbia un volume invariabile.

Fra i due modi di definire e di trattare il campo di un vettore ora ricordati, quale è il migliore? Quello nel quale si dànno le masse ed i filetti vorticali e si considera il vettore come prodotto a distanza da quelle e da questi, oppure quello ove si dà direttamente il vettore in ogni punto e si considerano le masse ed i filetti vorticali semplicemente come enti geometrici corrispondenti alla divergenza ed alla rotazione del vettore dato? Quello ove per fare una rappresentazione fisica, tangibile, del campo si materializzano, per così dire, col pensiero le masse ed i filetti vorticali, per trattare poi tutto il rimanente spazio semplicemente come spazio geometrico, ove la grandezza vettoriale considerata esiste in virtù di una azione a distanza; oppure quello nel quale si materializza col pensiero tutto quanto lo spazio e si trattano le masse ed i filetti vorticali semplicemente come effetti della distribuzione del vettore?

La risposta a questa domanda è già stata data. Se si considera il vettore come un semplice ente geometrico, entrambi i metodi, entrambe le finzioni, sono ugualmente legittime; esse non possono avere altro scopo che quello di aiutare la mente fissando le idee su cose tangibili; fra di esse si può scegliere colla scorta del solo criterio della comodità che esse possono presentare. E a questo riguardo si è già notato [41, 50] che fissare l'attenzione sulle masse e sugli elementi dei filetti verticali e dedurre da quelle e da questi, colle formole (52) [38] e (72'') [50], il vettore equivale semplicemente a considerare come date la div **A** e la rot **A**, e come incognito **A**; mentre fissare direttamente l'attenzione sullo spostamento corrisponde a trattare **A** come dato e div **A** e rot **A** come incognite.

Se poi si considera il vettore come rappresentante una grandezza vettoriale fisica, le considerazioni dell'art. 41 ci hanno fatto vedere che, a decidere quale delle due maniere di trattare il campo meglio corrisponda alla natura fisica dei fenomeni, non bastano i fatti sperimentali dimostranti l'esistenza della grandezza vettoriale in questione e la legge della sua distribuzione. A decidere ciò occorrono altri fatti sperimentali, per esempio fatti indicanti una influenza dei mezzi materiali riempienti il campo sulla grandezza del vettore, o fatti relativi al modo secondo cui si propagano nello spazio e nel tempo le variazioni della grandezza vettoriale considerata. Finchè non si possono fare intervenire nello studio fatti della natura di quelli ora accennati, la scelta fra le due maniere si può fare ad arbitrio, col solo criterio della comodità e della chiarezza relativa.

Ora intorno a questo criterio si può dire qualche cosa fin d'ora; ed anche rimanendo nelle attuali nostre considerazioni generali, si può notare come la finzione dello spostamento, indipendentemente dai fatti fisici sovraccennati, i quali la potranno imporre come la meglio corrispondente al complesso dei fenomeni, possa spesso stare innanzi all'altra per la perspicuità e per la semplicità delle interpretazioni alle quali conduce.

Prima di tutto si può osservare che essa non è solamente la più diretta, ma è anche la più semplice. Infatti con essa ciò che si crea colla immaginazione è una cosa sola: un corpo, o mezzo, riempiente tutto lo spazio. E intorno alle proprietà di questo mezzo non si inventa nulla; unicamente si ritiene che lo spostamento di esso sia proporzionale al vettore. Invece coll'altra finzione si introducono colla immaginazione due enti di-

stinti, uno scalare ed uno vettoriale, la massa e l'elemento di filetto vorticale, e a questi due enti si hanno ad attribuire, per spiegare i fatti sperimentali, speciali proprietà, prima fra le quali quella di agire a distanza secondo le leggi espresse dalla formola (52) dell'art. 38 e dalla (72'') dell'art. 50.

In secondo luogo si può notare con quanta maggiore semplicità e naturalezza la finzione dello spostamento permetta di presentare i casi di discontinuità, che nel § 6.° ci hanno condotti alla considerazione degli *strati*. In tutti i casi che si incontrano nella fisica gli strati si presentano sempre e soltanto sulle superficie di separazione tra due parti dello spazio occupate da materie diverse; le superficie di discontinuità pel vettore sono anche superficie di discontinuità per qualche proprietà fisica della materia riempiente lo spazio. È adunque molto più naturale pensare direttamente alla differenza tra i valori del vettore ne' due spazi separati dalla superficie, che non pensare ad uno strato di un agente immaginato disteso sulla superficie medesima col solo scopo di considerarlo poi come la causa di tale differenza. Il modo più semplice di interpretare e di presentare la discontinuità è di immaginare che questa non si verifichi già nello sopstamento, ma si verifichi invece semplicemente nel valore del fattore pel quale bisogna moltiplicare lo spostamento per calcolare il vettore; di immaginare cioè che lo spostamento abbia luogo in tutto lo spazio, senza discontinuità, ma che il vettore corrispondente ad un medesimo valore dello spostamento sia diverso nei diversi mezzi e varii perciò bruscamente quando si passa da una parte all'altra della superficie secondo la quale due mezzi combaciano.

Nelle trattazioni fisiche questo modo di presentare la cosa conduce a considerare due vettori distinti: il vettore **A** del quale si tratta, e pel quale si considerano superficie di discontinuità, ed uno spostamento **B** al quale **A** è dovuto.

I fatti allora si interpretano supponendo lo spostamento **B** distribuito senza discontinuità in tutto lo spazio, e ritenendo che l'esistenza di un dato spostamento **B** dia luogo ad un vettore **A** il cui valore è diverso ne' diversi mezzi. Uno dei casi più importanti che si presentano nello studio delle questioni fisiche è quello ove il vettore **A** è una forza. In tale caso il complesso de' fatti ci condurrà a considerare la forza come dovuta ad una speciale deformazione di un mezzo, come le forze in un corpo elastico sono dovute e legate alle deformazioni di questo; e la

deformazione si potrà nei casi che noi avremo a studiare, definire e rappresentare per mezzo di uno spostamento **B**.

Nel caso semplice di mezzi isotropi si potrà ritenere che **A** e **B** abbiano il medesimo versore e si potrà quindi porre $\mathbf{A} = \varepsilon \mathbf{B}$ ove ε è un fattore scalare. Questo fattore però sarà diverso pe' diversi mezzi, diverso perciò sulle due faccie della superficie di separazione tra due mezzi diversi. Se si dicono ε ed ε_1 i valori di ε nei due mezzi in due punti infinitamente vicini, la (58) dell'art. 43 dà

$$4\pi\sigma = (\varepsilon - \varepsilon_1) B_n .$$

Se la superficie considerata è una di quelle che limitano il campo, così che al di là di essa il vettore sia nullo, si ha semplicemente da porre $\varepsilon_1 = 0$ ed allora questa formola dà

$$\varepsilon B_n = A_n = 4\pi\sigma ,$$

che è la (59) del citato art. 43.

Il teorema delle superficie corrispondenti [44] scaturisce direttamente dalla considerazione che se la distribuzione è solenoidale, il mezzo, nel quale ha luogo lo spostamento, si ha a supporre di volume invariabile. E qui spicca la differenza di semplicità tra la finzione dello spostamento e quella delle masse di agente. Infatti si supponga dato lo strato di masse esistente sopra una delle due superficie corrispondenti. Se si fa uso della finzione dello spostamento di un fluido, o, più in generale, di un mezzo di volume invariabile, riempiente il campo, si ricorda subito, senza bisogno di altri dati, o di altre ipotesi, che anche sull'altra superficie si ha uno strato, e precisamente uno strato di uguale massa e di segno contrario. Se invece si fa uso del concetto di masse esercitanti azioni newtoniane, bisogna spiegare l'esistenza di questo secondo strato per mezzo di una nuova ipotesi: attribuendo cioè all'agente ed ai corpi, in cui questo è pensato, proprietà tali che la presenza di uno strato su una delle superficie abbia a provocare la formazione di un altro strato, uguale e di segno contrario, sull'altra superficie.

Il caso di un doppio strato si riduce, secondo il concetto dello spostamento, a quello di una lamina infinitamente sottile, nello interno della quale la costante ε ha un valore diverso da quello che essa ha all'esterno, mentre quest'ultimo è lo stesso da entrambe le parti.

FINE DEL VOLUME I.