Egli è evidente che, quando sia possibile, non converrà mai oltrepassare questo limite, se si vuole che la fune graviti bene sulla puleggia inferiore, senza pesar troppo sulla superiore.

La tensione S' non differisce, in generale, gran fatto da S, e specialmente se la pendenza non è esagerata. La loro differenza $S' - S$ diventa considerevole solo quando si abbiano parecchi tronchi di trasmissione, l'uno in seguito all'altro, tutti obliqui e separati da sole stazioni di sostegno. Quindi un altro merito delle trasmissioni combinate di Ziegler sopra le trasmissioni con puleggie di sostegno.

È finalmente degno di essere osservato il fatto, che la differenza fra le tensioni estreme $S'' - S'$ dipende unicamente dalla differenza di livello delle due stazioni, della quale la 114ma parte contiene tante unità, quanti sono i chilogrammi di cui consta questa differenza $S'' - S'$.

VIII.

REDAZIONE DI UN PROGETTO DI TRASMISSIONE E NORME PRATICHE PER LA COSTRUZIONE.

L'andamento che dovrà essere seguito dalla trasmissione è in generale uno de' dati. Quando non lo fosse, e che lo si dovesse determinare, l'ingegnere lo traccierà per modo che, soddisfatta la condizione della minima lunghezza, i diversi tronchi di essa non abbiano da avere pendenze eccedenti i limiti che la teoria ci ha insegnato a conoscere, ed in ogni caso che nessun tratto abbia da avere troppo piccola pendenza a scapito degli altri; che se alcun tratto dovrà essere più inclinato degli altri, abbia questo una minor lunghezza; che il maggior numero di tronchi possibile abbiano lunghezze uguali; che le distanze da stazione a stazione non siano nè troppo grandi, nè eccessivamente piccole; che le strade, i fiumi, i canali navigabili sieno attraversati a tale altezza da non impedire il transito de' veicoli e de' battelli, che la fune non venga ad impacciarsi in piantagioni, ed anche, talora, che essa si scosti il più che è possibile nella sua direzione dal piano verticale normale alla direzione dei venti dominanti. Farà in modo che le stazioni cadano a preferenza ne' punti più elevati del terreno, che le stazioni di diramazione si trovino il più vicino che è possibile (salvo circostanze speciali) al sito a cui la diramazione dovrà andar a finire, e che in ogni caso il terreno, su cui la stazione dev' essere stabilita, sia atto a darle un solido appoggio senza troppo costose fondazioni. Nè trascurerà di badare che la trasmissione sia per riuscire facile a percorrersi in tutta la sua lunghezza, sì per l'impianto come per la manutenzione, nè di fare sì che riescano il meno che possibile gravosi i diritti di passaggio sui fondi attraversati. In generale sarà conveniente di superare le differenze di livello piuttosto colle trasmissioni secondarie, che col tronco principale...

Ho detto che le distanze da stazione a stazione debbono essere comprese fra limiti. *Il limite inferiore, al di sotto del quale la fune per la sua non assoluta flessibilità mal si adagerebbe sulle puleggie e non produrrebbe col suo peso le volute tensioni, è*, come l'esperienza ha dimostrato, *fra 15 e 20 metri*. Il limite superiore è determinato da quella distanza per cui senza impraticabili altezze de' pilastri la fune striscerebbe sul terreno. Come vedesi questo limite varierà colle circostanze; si può però dire che, salvo in circostanze speciali, *la distanza di 150 metri non potrà essere superata*.

Determinato e tracciato sul terreno l'andamento della trasmissione, e fissati i punti ove hanno da cadere le stazioni, si fa lungo quest'asse una livellazione e si disegna di esso il profilo. I punti di stazione devono essere battuti nella livellazione. Se si dubita che l'asse tracciato possa non essere il più conveniente, e che possa essere utile deviarne alquanto in alcuni punti, si estenderà la livellazione un po' a dritta ed a sinistra dell'asse stesso, collo scopo di potere all'occorrenza redigere altri profili. La scala delle altezze si suole assumere in tali profili uguale al doppio fino al quintuplo di quella per le distanze orizzontali.

Si stabiliscono allora dietro all'esame del profilo, e colla conoscenza approssimativa delle diverse saette e dei raggi delle puleggie, le altezze delle varie stazioni, procurando di far sì che sieno ridotte le pendenze, che le funi passino a sufficiente altezza sulle strade, ecc. Queste altezze si portano in iscala sul disegno del profilo.

Avendosi con ciò le pendenze de' diversi tronchi, si può fare il calcolo della trasmissione nel modo qui sopra indicato, e questo calcolo ci darà le saette di tutti i tratti di fune, non che il luogo ove cadrà il vertice della curva corrispondente. È quindi possibile disegnare le curve descritte dai tratti inferiori pe' diversi tronchi. Finora i pratici hanno sempre considerato questa curva come un arco di parabola ordinaria, disegnandola con esattezza sufficente allo scopo col noto metodo delle tangenti. Essendo B e D i punti di appoggio della fune (fig. 18), si determina a questo scopo il vertice c della curva, coll'aiuto delle equazioni (34), (40), (41), e si tira l'orizzontale $B_1\, C\, D_1$ limitandola colle verticali $B\, B_1$, $D\, D_1$. Si dividono $B_1\, C$ e $D_1\, C$ per metà in C_1 e C_2 e si tirano le rette $B\, C_1$, $D\, C_2$: sono queste le tangenti estreme. Si divide $C\, C_1$ e $B\, C_1$ in un egual numero di parti uguali e i punti di divisione si uniscono due a due con rette, partendo da C per $C\, C_1$ e da C_1 per $C_1\, B$. L'inviluppo di queste rette dà la curva cercata pel tratto a sinistra di C. Lo stesso si farà per avere l'arco $C\, D$.

Facendo questa operazione sul disegno del profilo, o meglio su carta trasparente, che in seguito si potrà portare sul profilo medesimo, si può verificare se colle altezze che vi sono adottate pei pilastri e col valore di S che si è scelto la curva funicolare non tagli il profilo e se anzi non vi passi troppo vicino od ancora se le altezze de' pilastri non sieno eccessive. Spostando la carta trasparente in modo che gli estremi della curva, che vi è sopra disegnata, cadano sempre sulle verticali passanti pei centri delle due stazioni, si vedrà se con un cambiamento di altezza de' due pilastri ad un tempo sia possibile adottare lo stesso S. Se no, si proverà a cambiare l'altezza di un solo pilastro, od a cambiare S finchè si giunga ad avere soddisfatte le volute condizioni.

Quando le altezze dei pilastri sieno così definitivamente determinate, e le saette h_0 corrispondenti alla fune in riposo si sieno calcolate per tutti i tronchi, si potranno coll'applicazione della formola (22) calcolare le lunghezze di tutte le funi. Le lunghezze calcolate si aumenteranno alcun poco sia perchè sia possibile l'impiombatura, e sia per premunirsi contro gli effetti dell'inesattezza dei calcoli. Allacciate provvisoriamente le funi si pongono a sito, e misurandone la saetta si verifica se la lunghezza che loro si è data sia esattamente quella che conviene. Se no si accorcierà, o si allungherà la fune finchè la saetta sia la voluta. Finalmente si farà la definitiva impiombatura, e posta la fune in opera si verificherà ancora se la saetta sia quella che il calcolo ha dato.

La misura delle saette è un' operazione che si fa facilmente. Basta determinare colla (40) sul terreno il punto in cui cadrà la verticale passante pel vertice delle curve e, se questo punto non è stato battuto nella livellazione, determinarne la quota. Dalla differenza di livello tra questo punto ed il punto, in cui la fune si distacca dalla puleggia dell'una delle stazioni, si sottragga l'altezza, facilmente misurabile con un'asta graduata, della fune sul terreno nel detto punto, e nella differenza si avrà la saetta.

È una pratica commendevole di molti costruttori quella di piantare nel sito, ove cade il vertice della curva funicolare, un'asta graduata destinata a rimanervi perennemente. Sia che la trasmissione riposi, sia che essa cammini, su quell'asta si potrà in qualunque istante leggere la tensione della fune.

Se il punto del terreno sulla verticale del quale cade il vertice della curva è inaccessibile (come per esempio a Sciaffusa dove la fune attraversa il fiume), sarà necessario servirsi di un ecclimetro.

Per collocare la fune in opera, come per toglierla, si usa un'apposita taglia, alla quale la fune si può legare con forti cordicelle attorcigliate, col mezzo della quale si può molto comodamente portare la tensione della fune in riposo alla voluta misura, che si sarà segnata sopra un regolo graduato.

Per facilitare l'operazione l'ingegnere Ziegler si serve con molto vantaggio di un apparecchio improvvisato, dovuto ad Herland. Consiste esso in un ferro d'angolo ripiegato secondo un arco di spirale od anche secondo un arco di circolo, di raggio molto minore di quello della puleggia su cui la fune deve essere collocata. Lo si adatta alla puleggia nel modo indicato nella (fig. 19), fermandolo contro la gola con uncini di ferro. La (fig. 20) mostra con una sezione come sia fatta questa unione. Collocata la fune come mostra la (fig. 19), basterà far dare alla puleggia un mezzo giro, perchè la fune si porti a sito. Dopo ciò si toglierà il ferro d'angolo e l'operazione sarà finita.

IX.

FUNI TROPPO TESE.

Allorchè, posta la fune a sito, trovasi che essa prende durante il riposo una saetta troppo piccola, essa è troppo tesa, e quando la si porrà in movimento, il suo tratto motore potrà prendere una tale tensione da minacciare di rompersi. Detta S questa tensione tendente a produr la rottura, riferita al millimetro quadrato, Q la resistenza da vincersi dalla trasmissione supposta applicata tangenzialmente alla periferia della puleggia, q l'area della sezione della fune (esclusa la parte di canapa) in millimetri quadrati, h_0 la saetta che si è trovata per la fune in riposo, ed S_1 la tensione unitaria che nel far il calcolo si è prefisso di far sopportare alla fune agli estremi del tratto maggiormente teso, si può calcolare S con una di queste formole:

$$S = \frac{Q}{2\,q} + 0{,}00877\left(h_0 + \frac{A^2}{8\,h_0}\right) \qquad (46)$$
$$S = \frac{S_1}{4} + 0{,}00877\left(h_0 + \frac{A^2}{8\,h_0}\right)$$

Si trovano queste formole osservando che

$$0{,}00877\left(h_0 + \frac{A^2}{8\,h_0}\right)$$

è in virtù della formola (36) la tensione unitaria nel caso del riposo, e che, quando la fune debba muoversi vincendo una resistenza Q, la tensione del suo tratto movente dovrà crescere di $\frac{Q}{2}$ e di altrettanto dovrà diminuire quella del tratto condotto.

Quando il rapporto $\frac{h_0}{A}$ non è piccolissimo, una saetta h_0 un po' troppo piccola non dà una tensione S molto superiore ad S_1. Onde è che, in questi casi *nel porre in opera una fune nuova, la quale perciò è soggetta col tempo ad allungarsi, conviene sempre fare sì che la fune abbia una saetta* h_0 *un po' minore di quella che risulterebbe dalla formola (34). Allora però nel calcolare il diametro delle puleggie si farà* $S + s = 20^{\text{kil.}}$ *circa.*

X.

DISPOSIZIONI SPECIALI.

FUNI SOPRATESE, TRASMISSIONI CON GROSSE FUNI PER PICCOLE DISTANZE, TRASMISSIONI MOLTO INCLINATE, TRASMISSIONI CON PULEGGIE DI DIAMETRI DIVERSI, TRASMISSIONI CON PULEGGIE ORIZZONTALI.

Son da considerarsi in modo speciale i tre casi in cui: 1.° si ha una grande distanza tra le due puleggie principali e non è possibile, o non vuolsi porre fra di esse alcuna stazione; 2.° la distanza fra le due puleggie di forza è molto piccola; 3.° la differenza di livello da superarsi è molto considerevole.

Funi sopratese. — Nel primo caso se si calcolasse la fune colle regole ordinarie, essa assumerebbe nel tratto meno teso una tale saetta, da rendere necessaria od un' esagerata altezza dei pilastri, od uno scavo nel terreno. Si possono evitare l'una e l'altro coll'impiego di una così detta *fune sopratesa (straffes Treibseil* dei Tedeschi). Una fune sopratesa è una fune, la cui tensione iniziale è maggiore di quella strettamente necessaria per impedire che essa scivoli sulle puleggie, calcolata tuttavia in modo che per il suo tratto più teso la massima tensione unitaria sia quella stessa, a cui si assoggetterebbe una fune ordinaria.

Si indichino come al solito colle lettere $T, t\ S, \delta$ la tensione estrema del tratto maggiormente teso, la tensione estrema del tratto meno teso, la tensione unitaria per l' uno de' due tratti, ed il diametro dei fili per una fune calcolata colle regole ordinarie e destinata a vincere la resistenza Q applicata alla periferia delle pulegge; e si contassegnino coll'indice s le quantità analoghe corrispondenti ad una fune sopratesa destinata a vincere la medesima resistenza. Siasi fatto

$$T_s = mT, \tag{47}$$

essendo m un numero qualunque.

Per l'equilibrio della puleggia a cui è applicata la resistenza dev' essere (trascurando gli attriti):

$$t_s = T_s - Q = mT - Q,$$

ma $Q = T - t$, e $T = 2t$, dunque

$$t_s = (2m - 1)\,t \tag{48}$$

quindi anche:

$$\frac{t_s}{T_s} = \frac{2m - 1}{m}\,\frac{t}{T}$$

ossia, essendo $\frac{t}{T} = \frac{1}{2}$:

$$\frac{t_s}{T_s} = \frac{2m - 1}{2m}. \tag{49}$$

Se allora si fa $S_{1s} = S_1$ si ha:

$$S_{2s} = S_1 \frac{2m - 1}{2m}, \quad S_{0s} = S_1 \frac{4m - 1}{4m}. \tag{50}$$

Se il diametro δ dei fili è stato calcolato colla formola (32) si deve fare

$$\delta_s = \delta \sqrt{m} \tag{51}$$

e si deve fare

$$\delta_s = \delta \sqrt[3]{m} \tag{52}$$

quando δ sia stato calcolato colla formola (33).

Per la fune ordinaria si avrebbe $S_2 = \frac{S_1}{2}$ e quindi si ha $S_{2s} > S$, e sta appunto in ciò lo spirito del sistema delle funi sopratese.

Bisogna ben badare, che in una fune sopratesa i fili di ferro non hanno da sopportare una tensione unitaria maggiore che nella fune ordinaria trasmettendo lo stesso lavoro: proporzionalmente all'aumento di tensione si fa crescere infatti la sezione del filo; si usa, in altri termini, una fune più pesante per far ad essa sopportare una maggior tensione.

Questo comodo artifizio per diminuire l'altezza de' pilastri riesce tanto più vantaggioso quanto minore è la forza della trasmissione. Quando dal calcolo di una trasmissione ordinaria da farsi con una fune di 36 fili il diametro δ risulta molto piccolo, l'aumento di costo della fune, che sarebbe dovuto ad un piccolo aumento di δ, può riescire piccolissimo, ed in tale caso l'uso di una fune sopratesa riesce commendevolissimo. Si può anzi stabilire questa regola: *non si impieghi mai filo di ferro di diametro minore di un millimetro; la fune più sottile che conviene adoperare è quella di otto millimetri di diametro composta di 36 fili.*

Il restringere per tal modo i limiti della grandezza delle funi ne può anche facilitare la fabbricazione.

Trasmissioni per brevi distanze. — Il secondo caso su cui abbiam detto doverci fermare è quello in cui la distanza fra le due puleggie di forza è molto piccola. È in questo caso necessario dare alla fune una saetta molto grande, acciocchè:

1.° Essa meglio si adagi sulle puleggie.

2.° Non siavi il pericolo di un troppo considerevole aumento di tensione quando occorra di raccorciare la fune.

Si può calcolare una tale trasmissione nel modo ordinario, scegliendo solo per S_1 un valore molto piccolo; ma meglio così: a seconda della configurazione del terreno, dell'altezza che meglio conviene ai pilastri e di tutte le altre circostanze locali, si potrà determinare quale saetta sarebbe la più conveniente. Ebbene; si prenda questa saetta come un dato del problema; colla formola (36) si calcoli S_1, e sostituitolo ad S in (33) se ne deduca δ, e quindi R nel modo ordinario.

L'esperienza ha dimostrato che, quando la resistenza da vincersi non sia troppo grande, si può con questo artifizio applicare con vantaggio le funi metalliche a piccolissime distanze, quali sono quelle da 20 a 30 metri.

Trasmissioni molto inclinate. — Quando i centri delle due puleggie di una trasmissione semplice, o di due puleggie intermedie di una trasmissione inclinata, sono posti ad altezze molto differenti, una fune, che nel modo ordinario abbracciasse semplicemente le due puleggie, mentre farebbe sopportare tutto il suo peso dalla puleggia superiore e renderebbe necessario per la sua grande tensione al suo estremo più elevato un gran diametro dei fili ed un raggio forse impraticabile della puleggia, mal si aggiusterebbe attorno alla puleggia inferiore, la quale correrebbe rischio di girare a vuoto entro la fune.

Si possono togliere od almeno diminuire moltissimo siffatti inconvenienti quando sia possibile di collocare verticalmente sopra della puleggia inferiore o quasi, ed allo stesso livello o quasi della puleggia superiore, due puleggie di sostegno T, T (fig. 21), fra le quali e la puleggia superiore B i due tratti di fune possano disporsi e tendersi come in una trasmissione orizzontale. Egli è chiaro infatti che la tensione che la fune ha in B verrà per tal modo ad aversi in T; la si avrà quindi anche in A diminuita solo della resistenza d'attrito sui pulvinari delle puleggie di sostegno e del peso del breve tratto TA. Una tal trasmissione si calcolerà come una trasmissione orizzontale, senza che sia necessario tenere conto del tratto verticale.

Con l'applicazione di siffatto sistema è possibile lo stabilire una trasmissione combinata sopra un terreno avente una pendenza superiore a quella massima che conviene dare ad una trasmissione. Basterà a questo scopo stabilire le stazioni talmente tra loro vicine, che sia possibile in una qualunque di esse piazzare, oltre alla puleggia di ricambio A, due puleggie di sostegno C al livello della puleggia di ricambio della stazione immediatamente superiore, senza che ciò renda necessari sostegni troppo elevati e costosi. Si verrà così a stabilire un sistema che potrebbe dirsi a *scaliera*.

Con lo stesso artifizio, lievemente modificato, si potrebbe mandare il lavoro da un albero ad un altro posto verticalmente o quasi verticalmente su di esso (fig. 22). Si riduce la cosa a sostituire al tratto verticale TA della fig. 21 il tratto molto inclinato TB (fig. 22). Questa disposizione però ha poche applicazioni.

Trasmissioni con puleggie di diametri diversi. — In tutto quel che precede si è supposto che le due puleggie di forza fossero di uguale diametro. Ciò non vuol dire però che questa uguaglianza sia obbligatoria. Talvolta può anzi convenire l'uso di puleggie con diametri differenti. Il calcolo della grossezza della fune e del diametro della puleggia si farà allora per la puleggia minore, e ciò fondandosi sul principio, essenziale nella telodinamia, che *una sufficiente grandezza delle puleggie costituisce la principal parte della bontà di una trasmissione.*

Trasmissioni funicolari con puleggie orizzontali. — Non posso qui omettere di accennare ad una disposizione tutta diversa da quella di cui son venuto fin qui discorrendo. Si pensò da taluni di disporre la fune telodinamica in modo analogo a quello in cui son collocate le funi de' piani inclinati. Vale a dire che si disposero orizzontalmente le puleggie di forza sostenendo i due tratti della fune con puleggie verticali appena questi abbandonano le puleggie. I due tratti della fune vengono così ad essere disposti l'uno accanto all'altro e si appoggiano sopra numerose rotelle di sostegno. Dico sopra *numerose rotelle,* perchè quasi in tutti i progetti di trasmissioni siffatte, che si sono redatti fin qui, alle puleggie di sostegno sonosi sempre sostituite piccole rotelle (del diametro di 30 a 40 centimetri) vicinissime tra di loro, le quali fan sì che la fune si trovi distesa sensibilmente in linea retta.

Nasce da ciò che il peso della fune non potrà più produrre da sè la tensione; e quindi in questo sistema è necessario un apparecchio tenditore. Ne è un esempio il sistema di Agudio.

Vedesi come veramente non si possa una tal foggia di trasmissione annoverare fra le trasmissioni telodinamiche di Hirn propriamente dette, epperò mi basti avervi accennato. Non posso però non accennare ad un grandioso progetto di trasmissione, che nel 1867 l'ingegnere Vescovali ha pubblicato onde ricavare da una parte della caduta delle Marmore presso Terni la forza di 4500 cavalli e distribuirla nel piano di Terni e nella stessa città. Il sistema adottato è qui quello delle puleggie orizzontali, ma le rotelle sarebbero spaziate tra loro di 100 metri come nelle trasmissioni telodinamiche ordinarie. La forza dell'acqua sarebbe raccolta da due grandi turbine, sul cui albero sarebbero calettate due grandi puleggie a tripla gola. Una fune *di acciaio* le avvilupperebbe per tre giri e sostenuta di 100 in 100 metri da rotelle, poste su pilastri di muro alti sei metri, si svilupperebbe portandosi ad animare numerose diramazioni. Le diramazioni minori si farebbero non più per funi, ma per *acqua ad alta pressione* giusta il metodo antico. Il progetto è così redatto che tre di simili trasmissioni si potrebbero impiantare e dare alla pianura di Terni la forza di 12000 cavalli!

XI.

UN CENNO SULLA TRASMISSIONE DI SCIAFFUSA.

Se fra le innumerevoli trasmissioni di cui sono oramai coperti tutti i paesi industriali io scelgo come esempio quella di Sciaffusa, e se preferisco parlar di un'opera straniera piuttosto che di alcuna di quelle che già benemeriti nostri connazionali hanno stabilito nel nostro paese, egli è perchè niuna di esse è a mio avviso più di quella atta a dare una giusta idea della vastità delle applicazioni a cui la telodinamia è destinata. Sono 600 cavalli di forza che, tolti alle acque del Reno, vengono con circa 1500 metri di trasmissione portati in città e distribuiti a prezzo bassissimo agli industriali; il fiume è per ben quattro volte attraversato da quelle funi poderose, ed è sul fiume stesso che si elevano quelle maestose stazioni, da cui la forza si diparte per diramarsi in tutti i sensi e percorrere per tutti i versi le vie della popolosa città.

Se non temessi di allontanarmi troppo dal principale argomento di questo scritto, vorrei fermarmi alcunchè sulla storia di questa opera colossale e descrivere, almeno sommariamente, le difficili costruzioni che la sua esecuzione ha richieste, ed i metodi nuovissimi e stupendi con cui esse si condussero a compimento.

Non potendolo, mi accontenterò di ricordare come l'idea di applicare le funi metalliche all'utilizzazione delle forze de' fiumi, e particolarmente del Reno, appartenesse già all'Hirn stesso, che, mentre produceva la sua invenzione per la prima volta a Londra nel 1862, già immaginava di creare in vicinanza del Reno vaste manifatture, che ivi avrebbero potuto trovare grandissima forza a vilissimo prezzo; e come fin d'allora si trattasse di creare una *Società per l'utilizzazione della forza del Reno*, la quale, non riuscita, ricomparve poi per iniziativa di *H. Moser di Charlottenfels* sotto il nome di *Wasserwerks-Gesellschaft in Schaffhausen* (Società dei lavori idraulici di Sciaffusa). L'opera a cui intendeva questa società è ora compiuta, ed è compiuta per modo, che all'esposizione di Parigi bastò l'insegna del grande lavoro per procacciare all'ingegnere che costrusse le macchine e le trasmissioni, l'ingegnere Ziegler dell'officina Rieter di Winterthur, quello stesso di cui sì spesso già ci occorse discorrere, la medaglia d'oro.

Ricorderò come il progetto consistesse nell'attraversare il gran fiume con una diga onde creare una caduta destinata ad essere usufruita da turbine installate sullo stesso fiume, e come gli accurati studi del professore Zeuner di Zurigo, dell'ingegnere Zuppinger della casa Escher Wyss, seguiti poi da quelli dello stesso Ziegler, avessero dimostrato potersi colle progettate disposizioni ottenere una forza di 600 cavalli. La traversa avrebbe avuto così circa 200 metri di lunghezza ed avrebbe dovuto procurare una caduta di quattro metri ne' tempi di piena e di cinque durante le magre.

Il periodico *Schweizerische polytechnische Zeitschrift* [1] dà una dettagliata descrizione dei lavori. Ed io rimando a questo giornale od all'altro *Engineer* chi desiderasse minuti ragguagli sulla singolare diga di legno, di ferro e di ghisa e senza fondazioni, sull'ingegnoso ponte di servizio che fu usato nel suo impianto, sul canale di fuga, che, percorso un tratto sotto al letto del fiume coperto da una vòlta in muratura, fiancheggia poi il fiume stesso ora scoperto ed ora in galleria rivestita con ferro e con legno, e specialmente sull'edifizio delle turbine, e su questi motori, che costituiscono forse la parte più bella di tutta l'opera. Quello che io farò non sarà che una succinta descrizione della trasmissione propriamente detta, ed a questo scopo mi varrò delle figure della Tav. II.

La fig. 1 dà il piano generale della trasmissione e della parte della città che fiancheggia il fiume, la quale specialmente è ricca di stabilimenti industriali ed è appropriata al loro impianto.

Le fig. 2 e 3 danno l'una l'elevazione (verso a monte) e l'altra la pianta del primo tronco o tronco principale della trasmissione, di quel tronco cioè che riceve direttamente l'impulso del motore per portarlo sull'altra riva del fiume.

F (fig. 1) è l'edifizio delle turbine. Sono due robusti muri di pietra (fig. 2 e 3) diretti nel verso della corrente e fra i quali stanno le turbine. Queste sono in numero di tre, sono del sistema Jonval e sono doppie, cioè hanno due ordini di canaletti direttori e due ordini di palmette motrici. Un elegante sistema di colonne di ghisa le sostiene, ed un ingegnoso insieme di saracinesche ne regola il lavoro. I loro alberi portano superiormente ciascuno una gran ruota dentata conica del diametro di circa due metri, e queste tre ruote concorrono a dar moto ad un unico albero di ferro, orizzontale, che le sovrasta. Quest'albero, che si appoggia su cinque cuscinetti sostenuti da robuste travi di ferro, ha il diametro di 20 centimetri e porta una puleggia destinata a condurre un moderatore della velocità e due grandi puleggie di ghisa del diametro di $4^{m},50$, distanti tra loro di $1^{m},50$ e mosse da interposto apparecchio differenziale (Tav. I, fig. 9). Sono queste puleggie che danno moto a tutta la trasmissione.

[1] Band XII, Hefte 1, 2, 3, 5 e 6.

Su di esse si appoggiano due funi *J*, che camminando tra loro parallele vanno, attraversato alquanto obliquamente il fiume, ad avvolgersi attorno a due altre puleggie *K* identiche alle motrici. L'albero di queste due puleggie, mediante un ingranaggio conico, imprime un movimento ugualmente veloce all'albero di due altre puleggie poste in piani ad un di presso perpendicolari a quelli delle prime.

Un secondo pilastro K^1 sostiene due puleggie a doppia gola poste nei piani delle precedenti e che ne ricevono le funi. Altre due funi, che si avvolgono sulle ruote medesime, ma nelle altre gole, vanno similmente a mettere capo in una terza stazione K^2. Da questa alla K^3 succede il somigliante. K^3 è una stazione d'angolo ed ha perciò quattro ruote, due a due, sul medesimo albero, ed un ingranaggio conico le collega. Da questa stazione alla successiva K^4 si hanno ancora due funi, dalla K^4 all'ultima K^5 due funi sarebbero state superflue.

Da ciascuna di queste stazioni si dipartono le diramazioni. Queste son fatte ora con alberi, ora con funi minori a seconda della distanza. Vedesi come alcune di queste abbiano grandi lunghezze, e come dai pilastri K^3, K^4, K^5 se ne dipartano, fra le altre, tre, le quali riattraversano il fiume. Quella che si stacca dalla stazione K^2 percorre per una lunghezza superiore a 100^m una delle vie della città ed alimenta ben nove diramazioni secondarie.

Una delle turbine, oltrechè all'albero motore della trasmissione principale, di cui siamo venuti parlando, è destinata a dar moto ad un'altra puleggia posta in un piano perpendicolare a quelli delle due puleggie accoppiate principali, e questa puleggia comanderà una seconda fune *M M* (fig. 1, Tav. II) che si appoggierà su di una stazione d'angolo *H* a valle della traversa, e di qui attraverserà il fiume onde recarsi alle officine situate in quel sobborgo.

La forza attualmente affittata ammonta a ben 300 cavalli, e molti altri sono già impegnati al prezzo di 120 franchi per cavallo!

La società costruisce e mantiene le diramazioni fino al punto del confine della proprietà dell'utente più vicino alla stazione di diramazione; ed è su questo confine che viene data la forza pattuita. Tuttavia essa società farebbe anche contratti con coloro i quali volessero costrurre a proprie spese la trasmissione dalla più vicina stazione fino alla loro officina. In tale caso la forza pattuita è garantita dalla società alla stazione suddetta.

Ecco alcuni dati sulle diramazioni rappresentate nella fig. 1, Tav. II:

Dalla stazione K:	10 cavalli son condotti mediante	alberi alle due fabbriche I e II.
„ „	10 „ „ „	fune alla fabbrica III.
„ K^1:	15 „ „ „	alberi alla fabbrica IV.
„ K^2:	50 „ „ „	alberi a nove diversi utenti.
„ K^3:	20 „ „ „	fune alla fabbrica V e a diversi altri opifizi.
„ „	100 „ „ „	alberi a tre diverse fabbriche.
„ „	120 „ „ „	funi alla grande fabbrica di panni IX e X.

Sulla forza dei motori e de' tronchi principali della trasmissione, come sulle velocità e sulle proporzioni degli apparecchi, i dati principali sono i seguenti:

Caduta d'acqua nelle magre	Metri	4,80
„ „ nelle piene	„	3,60
Consumo d'acqua delle tre turbine nelle magre	Metri cubi	16,740
„ „ nelle piene	„	22,329
Diametro esterno delle turbine	Metri	2,85
Lavoro effettivo delle tre turbine unite	Cavalli	600
Effetto utile		0,70
Diametro delle puleggie principali della trasmissione	Metri	4,50
Diametro della fune principale J	„	0,0285
Numero dei fili in ciascuna fune	Numero	80
Saetta delle funi principali J (pel tratto motore)	Metri	1,80
Lavoro che ciascuna fune può trasmettere	Cavalli	540
Velocità della fune	Metri	18,9 per 1''

Le funi J trasmetteranno alla stazione K 540 cavalli.

Dalla stazione d'angolo K^3 al ponte sul Reno si trasmetteranno circa 200 cavalli.

La distanza fra le puleggie motrici e la stazione K è di $117^m,6$, quella dalla stazione K alla K^3 è di 450^m, e quella da K^2 al termine della trasmissione principale (vicino al ponte) è di altri 450^m. Cosicchè la totale lunghezza della trasmissione principale (non comprese cioè le diramazioni) è di metri 1017 circa.

Le due puleggie di ciascuna stazione, se si eccettuino quelle della prima stazione intermedia K, sono, come le puleggie motrici, accoppiate per mezzo di un ingranaggio differenziale.

La seconda trasmissione, che si è detto doversi stabilire a valle della diga, sarà della forza di 60 cavalli: la distanza fra la puleggia motrice e la stazione di angolo H (fig. 1, Tav. II) sarà di 180^m e tra questa stazione ed il motore vi sarà da centro a centro della puleggia una differenza di livello di circa nove metri. La puleggia motrice di questa trasmissione ha il diametro di $3^m,75$.

Benchè le turbine sieno destinate a dare un effetto utile di 600 cavalli, giusta il qual numero si sono calcolate le funi, il lavoro loro potrà essere portato a 750 cavalli. In questo caso però sarà prudente cambiare le funi.

Credo bene di far qui osservare la concordanza de' dati precedenti coi numeri che ci darebbero le formole generali che si sono sopra esposte.

La formola (36) dà, ponendovi $A = 117^m,60$, $h = 1^m,80$:

$$S_1 = 8,438.$$

Siccome si hanno due funi, vi saranno $80 \times 2 = 160$ fili che sopporteranno questa tensione unitaria, e siccome per trasmettere la forza di 540 cavalli colla velocità di $18^m,9$ è necessario che i tratti di fune motori sopportino la tensione:

$$\frac{540 \times 2 \times 75}{18,9} = 4285^k,7,$$

il diametro δ dei fili dovrà essere dato dall'equazione:

$$8,438 \times 160 \times \frac{\pi \delta^2}{4} = 4285,70,$$

da cui

$$\delta = 1^{mm},99$$

od in numeri rotondi

$$\delta = 2^{mm},00.$$

Il diametro di $4^m,50$ dato per le puleggie è il diametro esterno, cioè non misurato dal centro della fune, ma compresi gli orli. Dunque volendo provare la formola (17) dobbiamo in essa porre

$$R = 2250^{mm} - 50 - 2\,d$$

(vedi la fig. 6), ossia

$$R = 2250 - 50 - 2 \times 28,5 = 2143.$$

Facendo poi

$$s = 18 - S_1 = 18 - 8,438 = 9,56$$

la (17) dà per lo stesso δ il valore:

$$\delta = 2,048.$$

L'accordo fra questi risultati supera ogni aspettazione.

La leggera differenza trovata fra i due valori di δ or calcolati proviene da un piccolo eccesso nel diametro delle puleggie, cosa commendevole.

Se si provasse a fare nella formola (9) $n = 10$, $i = 80$ si troverebbe $\frac{d}{\delta} = 14,35$ e quindi $\delta = 1^{mm},99$.

Avevamo detto a suo luogo come la velocità più conveniente e più usata in pratica era quella di 18^m, ora quella della trasmissione della *Wasserwerksgesellschaft* è di 18,9. Dunque anche in ciò l'accordo è perfetto.

Prima che io lasci questo argomento mi si permetta una osservazione. Una buona macchina a vapore consuma all'ora non meno di chilogrammi 1,50 di combustibile per ogni cavallo di forza. Ammettendo che la macchina lavori per 10 ore nel giorno, e che il combustibile costi lire 0,05 al chilogramma, questa macchina consumerà quindi in un anno e pel solo combustibile, non contando cioè le spese di manutenzione, lo stipendio del macchinista e l'interesse del prezzo di costo, lire 273,75.

Il prezzo del cavallo-vapore dato dalla *Wasserwerksgesellschaft* di Sciaffusa non è quindi neppure la metà di quello del combustibile consumato da una macchina per ogni cavallo!

Epperò quando si rifletta che le condizioni in cui la trasmissione di Sciaffusa venne stabilita erano immensamente peggiori di quelle che si presenterebbero a simili costruzioni nella pluralità de' casi presso di noi, non si può a meno di deplorare la mancanza di intraprendenza ne' nostri industriali, per cui mentre, a poca distanza dai loro opifizi, poderosi corsi d'acqua travolgono con sè enormi quantità di forza motrice, essi non sappiano procurarsene altrimenti che pagando agli stranieri, a gravissimo prezzo, il litantrace.

XII.

Conclusione: confronto delle trasmissioni telodinamiche colle trasmissioni ad aria compressa.

È un fatto, che ben sovente vedesi verificato nella storia delle invenzioni, questo, che i problemi, la cui soluzione più a lungo si è fatta desiderare, abbiano poi ad essere risolti contemporaneamente in più di un modo.

Anche le trasmissioni telodinamiche si sono trovate fin dalla infanzia a fronte di una rivale, l'*aria compressa*. Per buona sorte però le due invenzioni, piuttosto che come emule destinate a disputarsi il primato fino alla morte dell'una, sono, a mio avviso, da riguardarsi come sorelle destinate a dare unite una completa soluzione del problema alla quale ciascuna di per sè non sarebbe capace.

Ci basterà quel poco che siam venuti dicendo sulle trasmissioni funicolari, e quella vaga idea che sull'applicabilità dell'aria compressa ci han potuto dare i risultati dell'unica applicazione che di essa si è fatto fin ora, quella del Moncenisio, per renderci possibile un superficiale bensì, ma equo confronto fra i due sistemi.

Come promessa per l'avvenire, come metodo nuovo di cui si vede, che non fu ancora detta l'ultima parola, che, come ora è già capace di un'estesa applicazione, così può esserlo di un impiego ancor meno limitato, sol che si voglia sottoporlo in grande alla prova dell'esperienza, il metodo dell'aria compressa è di gran lunga più di quello delle funi metalliche atto a destare entusiasmo. Ma nella pratica applicazione si può dire senza esitazione che, se all'aria compressa saranno forse destinate le trasmissioni alle più grandi distanze e delle maggiori forze, le funi telodinamiche saranno sempre preferite nelle circostanze più ordinarie, quando cioè forze non grandissime debbano essere mandate a non grandissime distanze.

Ci basta per convincercene esaminare quali sieno e come variino nell'uno e nell'altro sistema le perdite di lavoro.

Nelle trasmissioni per funi la sola resistenza passiva degna di considerazione abbiamo veduto essere quella dell'attrito sui pulvinari. Ora si faccia astrazione dalle due puleggie estreme, nelle quali la pressione sui guancialini è obliqua alla verticale e dipende dalla saetta della fune, per tutte le altre stazioni la pressione producente attrito sarà molto prossima ad essere verticale ed uguale al peso della parte di fune che va dal punto di mezzo della distanza fra la stazione considerata e la precedente al punto di mezzo tra la stazione considerata e la seguente, più il peso della puleggia.

Si è detto come il peso di un metro di fune sia

$$\Pi = 0{,}007\, i\, \delta^2$$

e come si abbia tra il diametro δ dei fili, il loro numero i, la tensione unitaria S e la tensione totale T la relazione

$$\frac{i \pi \delta^2}{4} S = T,$$

epperò si ha dall'eliminazione di $i\,\delta^2$:

$$\frac{\pi \Pi}{4 \times 0{,}007} S = T.$$

Prendendo adunque $S = 6$, come si è detto farsi più generalmente, si avrà

$$\Pi = \frac{4 \times 0{,}007}{6 \pi} T = 0{,}00148\, T.$$

Per ogni chilogramma di tensione la fune dovrà adunque avere il peso di chilogrammi

$$0{,}001486$$

per metro lineare.

La media velocità delle funi essendo di 18 metri, e la tensione del tratto maggiormente teso dovendo, secondo quel che si disse, essere circa doppia di quella corrispondente al lavoro da trasmettersi, per ogni cavallo-vapore si dovrà avere la tensione

$$\frac{2 \times 75}{18} = 8{,}333\ldots$$

e quindi il peso di fune per ogni metro di lunghezza

$$8{,}333 \times 0{,}001486 = 0{,}012385,$$

e per ogni metro di lunghezza di trasmissione

$$2 \times 0{,}012385 = 0{,}024770.$$

Per tener conto della curvatura della fune porteremo questo numero a

$$0{,}025.$$

Meno facile è trovar modo di calcolare in generale e prossimamente il peso delle puleggie. Per arrivarvi in modo sufficientemente approssimato pel mio scopo, benchè grossolano, ho calcolato colla formola (19) il peso delle puleggie servienti per trasmissioni di forze diverse comprese fra 10 e 100 cavalli, che sono le più usuali, ed ho fatto la media di tali pesi. Questa media divisa per 55 mi ha dato un numero prossimo a 6. Sarà adunque 6 chilogrammi di peso di puleggia, che per ogni cavallo si dovrà avere. Siccome le puleggie si collocano alla distanza di 100^m circa l'una dall'altra, per ogni metro di trasmissione si avrà in puleggie e per ogni cavallo il peso di chilogrammi 0,06. Per tener conto in qualche modo delle puleggie estreme porteremo questo numero a $0^{kil.},1$.

Dunque in conclusione, per ogni metro di trasmissione e per ogni cavallo di forza si avrà una pressione producente attrito uguale prossimamente a $0^{kil.},125$. Supponendo il coefficiente d'attrito uguale a 0,1, ricordando che in generale il diametro de'pulvinari vale $\frac{1}{30}$ circa del diametro delle puleggie e ritenendo sempre che la velocità della fune sia di 18^m, avremo adunque che il lavoro consumato dall'attrito per ogni cavallo di forza e per ogni metro di trasmissione è in chilogrammetri

$$0{,}1 \times 0{,}125 \times \frac{18}{30} = 0{,}0075$$

al minuto secondo; ed in cavalli

$$\frac{0{,}0075}{75} = 0{,}0001.$$

Questo numero direbbe che per un chilometro di distanza la perdita di lavoro sarebbe del 10 per cento. Ma se si osservi:

1.° Che la velocità delle funi può portarsi fin a 30 metri.

2.° Che la loro tensione unitaria può duplicarsi portandola a 12 chilogrammi.

3.º Che il peso delle puleggie per ogni cavallo-vapore diminuisce grandemente per le trasmissioni di gran forza, si che per esempio per una trasmissione di 300 cavalli esso può ridursi a

$$\frac{1050}{300} = 3^k,5$$

(vedi il capitolo IV) e che finalmente l'attrito sui pulvinari è quasi sempre minore di 0,1, si vedrà facilmente che questa perdita in una trasmissione ben costrutta sarà in generale minore di quella calcolata.

Ed invero accurate esperienze fattesi ad Hombourg nel 1865, dove la forza di una turbina è trasmessa ad un chilometro di distanza ad un opifizio di filatura e tessitura, danno una perdita su questa distanza del 9 per cento della forza.

Veniamo alle trasmissioni coll'aria compressa. Nella primavera del 1857 si eseguirono alla Coscia presso S. Pier d'Arena le celebri esperienze sui compressori a colonna, che dovevano essere impiegati nel traforo delle Alpi. Da queste esperienze si potè dedurre con certezza che alla distanza di 6500^m per un tubo di $0^m,10$ di diametro, colla velocità di 5^m all'origine della condotta, ed una pressione di 6 atmosfere nel serbatoio, la perdita di pressione non fu che di un' atmosfera ed un terzo. Trattandosi qui di una condotta di gas in cui regna un' alta pressione, ci mancano i dati per calcolare quale sarebbe la perdita con altri diametri e con altre velocità. Se per una simile condotta valesse la formola stessa che dà la resistenza d'attrito nelle condotte di gas con piccole pressioni, se ne dedurrebbe che la perdita di pressione dovuta a questa resistenza diminuirebbe come crescono i diametri e come diminuiscono i quadrati della velocità. Quindi ad eguale pressione nel serbatoio e ad egual portata della condotta la perdita di pressione dovuta all'attrito varierebbe in ragione inversa delle quinte potenze de' diametri. Adunque nelle circostanze delle esperienze della Coscia, se, invece di aversi un tubo di 0,10 di diametro, se ne avesse avuto uno di 0,20, la perdita di pressione non sarebbe stata che $^1/_{32}$ di quella data dall'esperienza, cioè sarebbe stata di 0,041 di atmosfera sopra una distanza di 6500, che equivarrebbe circa al 0,6 per cento per ogni chilometro.

Questi numeri non hanno gran valore non essendo provata vera la formola, che vi ci condusse; ma sono tuttavia atti a dimostrare che questa perdita è affatto trascurabile od almeno può rendersi tale accrescendo convenientemente il diametro della condotta.

Ma v'ha nelle trasmissioni ad aria compressa una perdita di lavoro ben più considerevole. Nel comprimersi l'aria rapidamente, si riscalda; dimorando poscia qualche tempo nei serbatoi e lungo la condotta finirà per ritornare alla temperatura primitiva, che è quella dell'ambiente. Con questa temperatura l'aria arriva al termine della trasmissione e là dilatandosi produce il lavoro, a cui è destinata. Evidentemente questo lavoro sarà minore di quello che fu necessario per comprimerla, ed è la differenza di questi due lavori che costituisce la perdita a cui io voglio accennare.

Nell'ipotesi che la compressione e la successiva espansione del gas avvengano secondo curve adiabatiche, il calcolo dimostra che questa perdita di lavoro è, nel caso in cui la pressione dell'aria compressa sia di 6 atmosfere, uguale a 59 per cento del lavoro impiegato nel comprimerla.

La perdita effettiva sarà certamente minore di questo numero, perchè piuttosto che secondo una curva adiabatica pare verosimile che l'aria si debba comprimere secondo una curva prossima ad un'isotermica. Ciò non ostante si prevede che questa perdita sarà sempre considerevolissima e prossima a 0,50.

Riassumendo adunque, nelle trasmissioni con funi si ha una perdita prossimamente proporzionale alla distanza a cui si manda il lavoro ed eguale per un chilometro al 10 per cento o meno; nelle trasmissioni con aria compressa si ha invece una perdita costante di circa il 50 per cento, più una perdita proporzionale alla distanza, ma affatto trascurabile. Ne consegue che sotto l'aspetto del rendimento meccanico le trasmissioni con aria compressa non cominceranno ad essere preferibili a quelle funicolari che a quella distanza a cui la perdita variabile che ha luogo in queste diventa uguale a 0,70, cioè ad una distanza di più di cinque chilometri.

In tutto quel che precede abbiamo trascurata la considerazione che nelle trasmissioni ad aria compressa son necessarie due macchine, oltre il motore, l'una destinata a comprimere e l'altra destinata a ricevere l'impulso dell'aria, e queste due macchine avranno entrambe coefficienti di rendimento minori dell'unità.

Sotto a questo aspetto adunque le funi hanno il vantaggio sull'aria compressa, ma per altri riguardi ne sottostanno. Ed in primo luogo una condotta di aria si stabilisce dovunque, per colle e per piano, come una condotta di gas luce, come una condotta di acqua potabile. Per l'opposto una trasmissione telodinamica non si colloca con vantaggio che là dove non vi hanno forti pendenze. Sonvi anzi de' casi in cui il collocamento di una fune telodinamica riuscirebbe impossibile, od almeno ne sarebbe difficilissima la manutenzione. Questi svantaggi evidentemente crescono colle distanze, ed è questo il motivo per cui ho asserito che, se per le minori distanze sono preferibili le funi, per le maggiori può diventare più adatta l'aria compressa.

Ben più che il rendimento meccanico è degna di considerazione la spesa d'impianto. E su questo punto non credo che si possa pronunciare un sicuro giudizio finchè non si avranno applicazioni numerose e grandiose dell'aria compressa come si hanno delle funi metalliche.

Se volessimo dar fede all'ingegnere Vescovali, l'autore del progetto di Terni, su questo punto le trasmissioni telodinamiche avrebbero sull'aria compressa un incredibile vantaggio. Assicura difatti quest'ingegnere, che gli studi da lui fatti nella circostanza di questo grandioso progetto, ebbero per risultato, che una trasmissione per aria compressa avrebbe costato 10 volte più di quella per funi.

Abbiamo confrontato i due sistemi di trasmissione, supponendo che si dovesse semplicemente mandar la forza di un motore ad una grande distanza, ma in un unico punto; ma una trasmissione di movimento a grande distanza può avere un altro scopo: quello di raccogliere il lavoro di un motore unico, centrale per diramarlo e distribuirlo attraverso alle vie della città, alle case degli operai ed alle umili officine de' piccoli industriali.

Ed ecco in questo secondo scopo un problema tutto nuovo, la cui soluzione ci è resa possibile. La grande industria si sviluppò in questi ultimi tempi poderosamente a danno della industria domestica. L'economia della forza e della produzione tende ogni giorno a far sostituire alle piccole officine i grandi centri di lavoro, attorno ai quali la popolazione operaia è costretta ad aggrupparsi. Una tale organizzazione del lavoro ha destato in molti spiriti i più vivi timori; si deplora che la famiglia sia distrutta, che l'interesse individuale e le sue benefiche conseguenze scompaiono; che una centralizzazione invaditrice tenda a fare della popolazione manifatturiera un *immenso arruo-*

lamento. Per quanto questi timori possano parere esagerati, e benchè l'esperienza abbia ormai dimostrato che nella generalità dei casi la moderna organizzazione dell'industria possa avere, purchè ben diretta, un'influenza eminentemente moralizzatrice sulla classe operaia, sono tuttavia timori che debbono grandemente preoccupare chi non voglia dimenticare gli immensi benefici e la felicità di cui è sola fonte la famiglia.

D'altronde è un fatto che l'indefinita suddivisione del lavoro trae seco l'indefinita suddivisione delle industrie, e che la fabbricazione a domicilio, che essa rende possibile, fa già eccellenti prove in alcune manifatture, come la tessitura; Lione, la Svizzera, le provincie renane le devono in molta parte la loro prosperità in questo ramo d'industria. Si può dir di più; la fabbricazione a domicilio può in certi casi far concorrenza alla grande manifattura non ostante il maggior costo della forza; perchè la intensità e la durata del lavoro possono essere in casa maggiori che all'opificio; e perchè tutta la famiglia, in proporzione delle singole forze, può coadiuvare il capo nella esecuzione del proprio còmpito.

Ma a rendere possibile una tale discentralizzazione delle industrie era necessaria una di queste due cose: od una macchina più piccola e meno costosa della macchina a vapore, e tale da potersi impiantare in una privata abitazione, od un modo per mandare con poca spesa ai diversi utenti il lavoro di un unico motore. La macchina domestica non si è ancora trovata, essendosi mostrate inette allo scopo e le macchine a gas e le macchine ad aria calda; invece la trasmissione del movimento a distanza l'abbiamo nell'aria compressa e nelle funi metalliche.

Ma a quale dei due sistemi la preferenza? Se si possedesse una macchina di poco costo, di piccolo volume, di poco peso, di facile manutenzione, atta a ricevere l'impulso dell'aria compressa, non esiteremmo a dare a questa la preferenza. La facilità dell'impianto, la possibilità di diramare da ogni punto della condotta una condotta secondaria, la facoltà di far seguire alla trasmissione tutti gli andamenti, e non ultimo il non recare sconcio di sorta all'estetica delle città, nè incomodo ai passeggeri, sono pregi che mancano alle trasmissioni per funi, e la cui importanza è capitale.

Ma finchè il motore economico domestico ad aria compressa non è che un desiderio dobbiamo preferire le funi. Dove la forza motrice sia limitata, ed il sito sia adatto, queste hanno di già sull'aria compressa il grande vantaggio del maggior rendimento. [1]

E quest'applicazione della telodinamia venne immaginata fin sul nascere del sistema. Il signor Dollfus di Mulhouse, uno dei membri di quella famiglia il cui nome si trova sempre mischiato a tutti i progressi che l'industria fa in quei dipartimenti dell'Alsazia, che in fatto di intelligenza e di attività industriale sono alla testa della Francia, tradusse queste idee in un grandioso progetto. Le funi metalliche dipartendosi dal motore, e seguendo canali sotterranei, andrebbero a mettere in moto dei telai, distribuiti nelle case operaie, ed affidati alle donne, che non lavorano nell'opifizio. Questo sistema aumenta quindi il benessere della famiglia senza lederla, senza togliere i figli alle cure dirette della madre. Se è vero che il lavoro alla fabbrica conduce alla distruzione della famiglia, non è improbabile che nel progresso della telodinamia stia pure racchiuso il compimento di un progresso sociale.

La stupenda trasmissione di Sciaffusa, di cui ho fatto cenno, è il più grandioso esempio di questa applicazione.

Ma mentre tutti ormai i paesi industriali sono coperti da funi, in nessun luogo, tranne al Moncenisio, si applicò mai l'aria compressa. E ciò non par vero. Non par vero, che questo concetto così semplice, così bello, così nuovo, così fecondo di risultati non abbia fatto più sensazione. Nel 1867 soltanto venne enunciata l'idea di servirsi dell'aria compressa per diramare la forza di un motore centrale nei piccoli centri di fabbricazione a domicilio in Parigi, ma è l'unica volta che un progetto così vasto e serio si sia messo innanzi.

Neppure pare che gl'industriali abbiano gran che pensato a creare nuove forme di compressori e di macchine ricevitrici, come han pensato a modificare in mille modi le gole delle puleggie telodinamiche. Un primo ed unico abbozzo di macchina ricevitrice (all'infuori della maravigliosa perforatrice delle Alpi) fu visto all'esposizione universale di Parigi, e non è forse il migliore che si possa immaginare. Essa fu esposta dal signor Callès, costruttore belga, ed ha ricevuto da lui il nome di ruota *idroaerodinamica*.

---

[1] Si è già accennato come in Inghilterra abbia già da lungo tempo fatto buona prova la distribuzione della forza ad *acqua compressa*. Evidentemente però in questo sistema le perdite per attrito debbono essere ben considerevoli.

L'ultimo volume (1868) del *Portefeuille des machines* dell'Opperman ne dà il disegno e la descrizione.

Nel confronto che siamo venuti facendo tra i due sistemi di trasmissione, abbiamo sempre fatto astrazione da certi casi speciali in cui l'uno di essi può essere incomparabilmente più adatto che l'altro.

È in questo caso la trasmissione del Moncenisio. Quivi i compressori non mandano solamente aria alle perforatrici, ma la mandano agli operai, non mandano solo lavoro, ma mandano vita. L'idea di questa combinazione è sublime, e sarà eternamente invidiata all'Italia la gloria di averla concretizzata.

Fosse vero che essa sapesse anche trar partito colle trasmissioni telodinamiche di quelle risorse di cui la natura l'ha sì abbondevolmente arricchita, traducendo in atto il voto che un nostro deputato esprimeva profetizzando:

“Se ci mancano le caldaie tubolari, noi abbiamo invece il vapore, che i raggi del sole innalzano dalla superficie umida della terra, e che raccolto in grande abbondanza nelle cavità delle nostre montagne, ne sgorga in fonti perenni, come per dare una voce a cento valli romite, che l'industria deve un giorno popolare ed arricchire!„

TAV. I

Fig. 1.

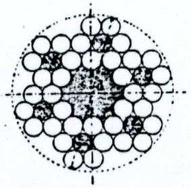


Fig. 2.

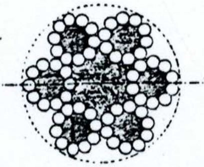


Fig. 3.

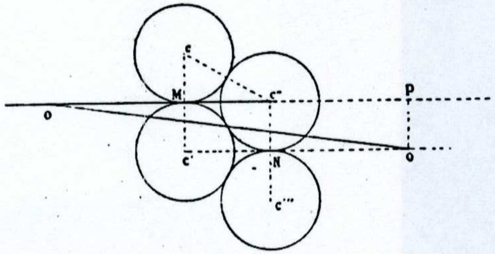


Fig. 4.

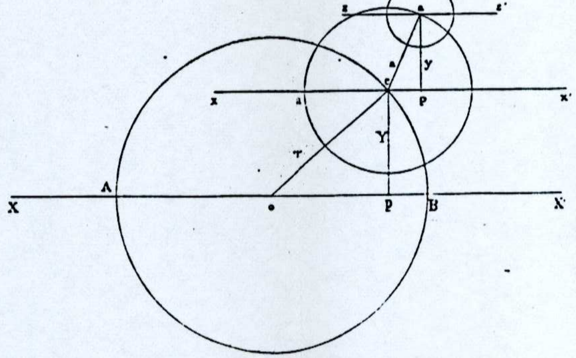


Fig. 5.

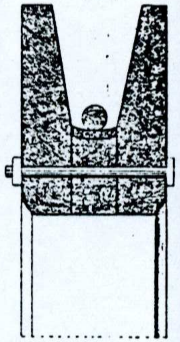


Fig. 6.

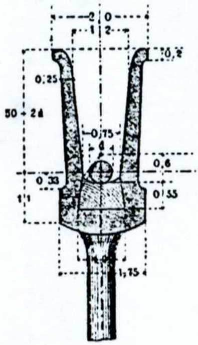


Fig. 7.

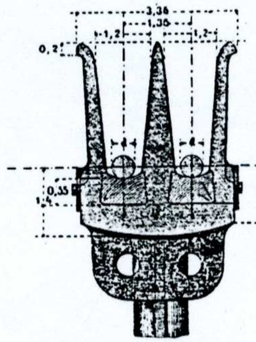


Fig. 8.

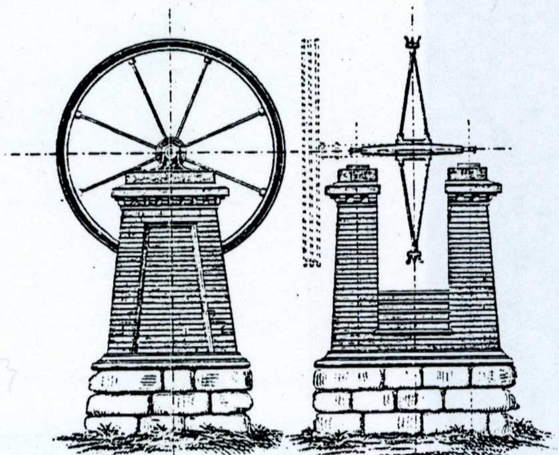


Fig. 9.
Scala di $\frac{1}{60}$

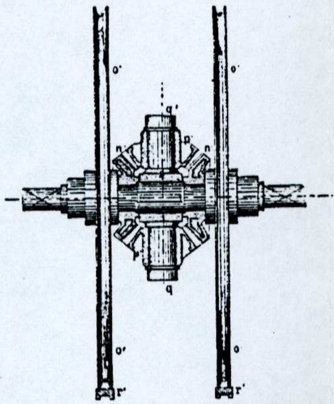


Fig. 10.

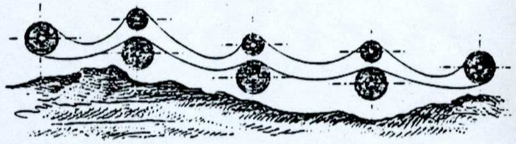


Fig. 11.

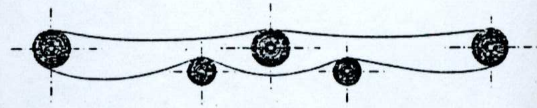


Fig. 12.

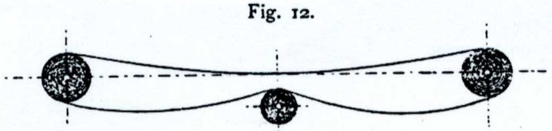


Fig. 13.

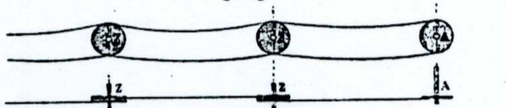


Fig. 14.

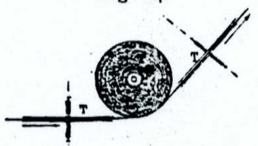


Fig. 15.

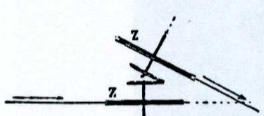


Fig. 16.

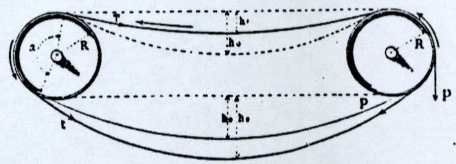


Fig. 17.

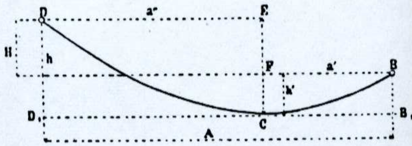


Fig. 18.

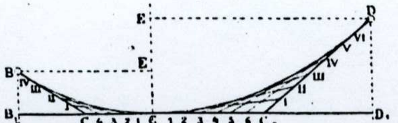


Fig. 19.

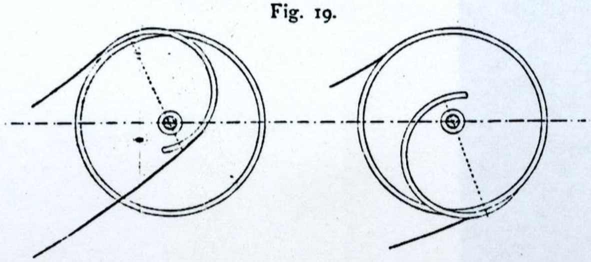


Fig. 20.

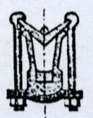


Fig. 21.

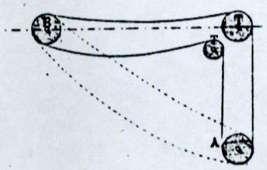
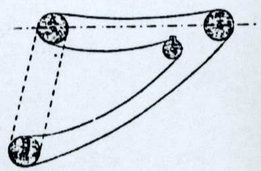
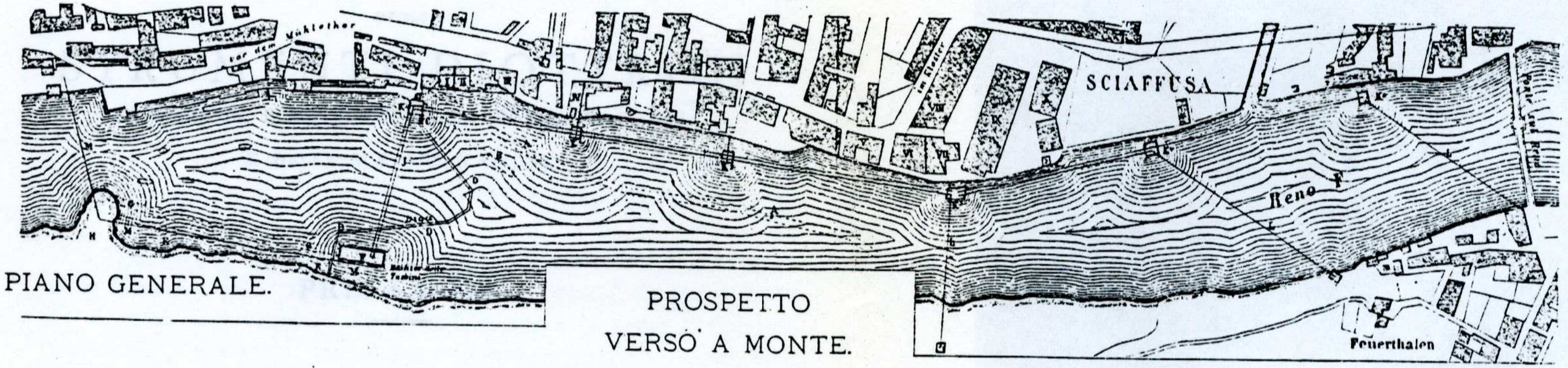


Fig. 22.



TAV. II

Fig. 1.



PIANO GENERALE.

PROSPETTO
VERSO A MONTE.

Fig. 2.

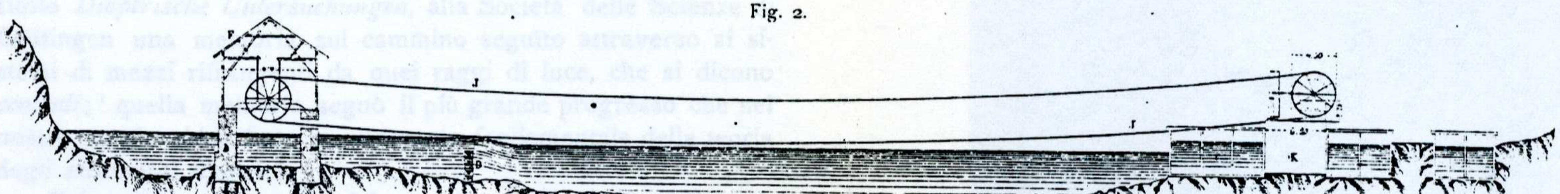
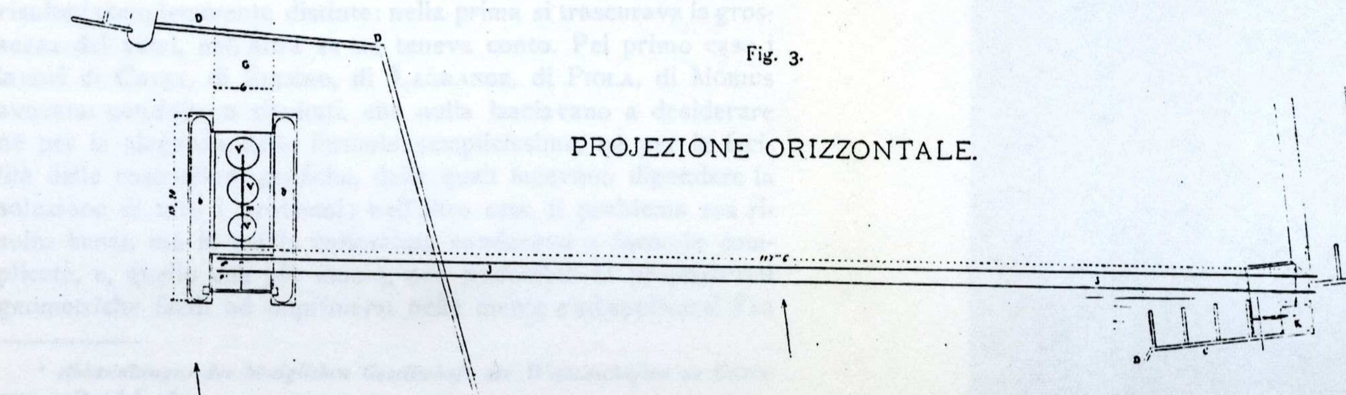


Fig. 3.



PROJEZIONE ORIZZONTALE.

LE PROPRIETÀ CARDINALI

DEGLI

STRUMENTI DIOTTRICI

ESPOSIZIONE ELEMENTARE DELLA TEORIA DI GAUSS

E DELLE SUE APPLICAZIONI.

PREFAZIONE

Nella seduta del 10 dicembre 1840, GAUSS presentava, col titolo *Dioptrische Untersuchungen*, alla Società delle Scienze di Göttingen una memoria sul cammino seguito attraverso ai sistemi di mezzi rifrangenti da quei raggi di luce, che si dicono *centrali*; [1] quella memoria segnò il più grande progresso che nel nostro secolo abbia fatto questa parte fondamentale della teoria degli strumenti diottrici.

Prima d'allora lo studio del cammino dei raggi centrali attraverso alle lenti dovevasi dividere in due parti pella natura dei risultati completamente distinte: nella prima si trascurava la grossezza dei vetri, nell'altra se ne teneva conto. Pel primo caso i lavori di COTES, di EULERO, di LAGRANGE, di PIOLA, di MÖBIUS avevano condotto a risultati, che nulla lasciavano a desiderare nè per la eleganza delle formole semplicissime, nè per la facilità delle costruzioni grafiche, dalle quali facevano dipendere la soluzione di tutti i problemi; nell'altro caso il problema era risolto bensì, ma la teoria conosciuta conduceva a formole complicate, e, quello che più monta, non traducibili in proposizioni geometriche facili ad imprimersi nella mente e ad applicarsi. Fra

[1] *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen — Band* I, 1843.
Carl Friederich Gauss Werke, fünfter Band — Göttingen, 1867, pag. 243.

i due partiti, quello di ricorrere alle formole esatte, ma intralciate, ove figuravano le grossezze delle lenti, e quello di accontentarsi di risultati solamente approssimati, ma ottenuti con formole e con costruzioni semplici ed eleganti, egli era naturale che il secondo fosse più comunemente seguìto, sopratutto dagli autori di libri didattici di fisica generale e di geodesia. L'ipotesi, che gli spessori si potessero trascurare, era divenuta così abituale, da essere per lo più sottintesa, anche quando non era ammessibile. La notevole differenza di comodità e di evidenza geometrica, per cui si distinguevano le due parti della teoria, differenza che, se non giustificava sempre, almeno spiegava questo modo di procedere degli autori, fu tolta dal lavoro di GAUSS.

Posta la questione ne' termini più generali, immaginato il sistema diottrico come formato da un numero qualunque di corpi trasparenti separati l'uno dall'altro da porzioni di superficie sferiche aventi i centri sopra una medesima linea retta, il sommo matematico tedesco dimostrò, che sulla retta dei centri, sull'asse del sistema, esistono in generale quattro punti per mezzo dei quali la determinazione del raggio emergente, che corrisponde ad un dato raggio incidente, o del punto coniugato ad un punto dato si fa con costruzioni semplicissime o con formole identiche a quelle, che già si possedevano pei casi elementari di una sola superficie rifrangente o di una lente infinitamente sottile. Dei quattro punti due erano già conosciuti col nome di *fuochi*, gli altri due furono denominati da GAUSS: *punti principali.* [1]

Nei lavori anteriori si avevano sempre avuti in mira strumenti formati da lenti, ai quali la luce arriva attraverso all'aria, e dai quali emerge di nuovo nell'aria. Il lavoro di GAUSS tolse anche questa limitazione: nel sistema diottrico generalissimo, del quale si occupa quella memoria, il primo mezzo, quello attraverso a cui giunge la luce, e l'ultimo mezzo, quello nel quale

[1] I *piani principali,* ossia i piani perpendicolari all' asse condotti pei punti principali, erano stati avvertiti già dal MÖBIUS nello scritto: *Kurze Darstellung der Haupteigenschaften eines Sistemes von Linsengläsern,* inserto nel giornale di *Crelle,* vol. 5.°, 1830. Quivi sono notate le principali proprietà di quei piani forse più esplicitamente che non nel lavoro di GAUSS; ma non è riconosciuta la loro utilità nella determinazione dei raggi rifratti, alla quale principalmente essi debbono la loro importanza. Oltre a ciò devesi notare, che il caso considerato dal MÖBIUS è molto meno generale di quello studiato da GAUSS: è quello di un sistema di lenti infinitamente sottili, lambite dall'aria da tutte le parti.

si propaga la luce dopo di avere attraversata l'ultima superficie dividente, sono corpi qualunque, e possono avere indici di rifrazione diversi. La nuova teoria si applica adunque non solo agli strumenti diottrici artificiali, ma anche allo strumento naturale, all'organo della vista, della funzione del quale si solevano dianzi dare spiegazioni affatto incomplete ed inesatte.

La memoria del GAUSS fu presto seguita da altre che la completarono e la perfezionarono. Sopra tutti meritano menzione i lavori di LISTING, [1] il quale, avendo in mira principalmente l'applicazione della teoria all'occhio umano, aggiunse alle due coppie di punti, dalle quali GAUSS faceva dipendere la soluzione di tutti i problemi, ai fuochi ed ai punti principali, una terza coppia di punti, dipendenti bensì dai primi, ma non meno utili: i *Knotenpunkte* o *punti nodali.* [2]

Pareva che la teoria, resa così facile e perfetta, avrebbe dovuto divulgarsi ed introdursi nelle scuole, specialmente dopo la nitida esposizione, che ne diede il LISTING, [3] e dopo la pubblicazione della traduzione francese della memoria originale di GAUSS. [4] E veramente i risultati suoi avrebbero potuto fornire materia per sostituire ne' libri didattici di fisica e di geodesia una esposizione esatta e chiara delle proprietà degli strumenti diottrici a quella, che, data tuttavia per vezzo, e talora malamente, non solo somministra approssimazioni grossolane, ma, come osserva il GAUSS, dà persino ai concetti fondamentali un carattere di indeterminazione e di incertezza, che ripugna ad una mente avvezza al rigore della geometria.

---

[1] LISTING, *Beitrag zur physiologischen Optik, Göttingen,* 1845.

Mathematische Discussion des Ganges der Lichtstrahlen im Auge, articolo inserto nell'*Handwörterbuch der Physiologie,* ecc., di WAGNER, vol. IV, 1853.

[2] La scoperta dei punti nodali è più spesso attribuita al MÖBIUS. Ma, come osserva il prof. CASORATI nei cenni storici, che precedono la sua pregevole memoria sulle proprietà cardinali dei cannocchiali, nel lavoro di MÖBIUS del 1830, ove si considerano soltanto sistemi di lenti, i punti nodali non potevano apparire distinti dai principali; e nel lavoro *Entwickelung der Lehre von dioptrischen Bildern mit Hülfe der Collineations-Verwandschaft* inserto nei *Berichte über die Verhandlungen* della Società delle scienze di Lipsia (vol. VII, 1855), non si fa cenno di quei punti. Invece nei lavori di LISTING succitati non solo la esistenza, ma le proprietà e l'uso dei punti nodali sono chiaramente indicate.

Notiamo ancora col CASORATI, come l'esistenza dei punti nodali fosse stata notata dal BIOT, il quale però non ne fece alcuna applicazione.

[3] *Handwörterbuch der Physiologie,* vol. IV, 1853, su citato.

[4] *Annales de chimie et de physique,* tom. XXXIII, 1851.

Così non fu, ed ancora oggidì, 36 anni dopo la pubblicazione della memoria di Gauss, i trattati più estesi e più diffusi di fisica e di geodesia o non accennano punto alla nuova teoria, o non ne dànno che quel tanto, che si applica direttamente alle lenti ed all'occhio, togliendole così quel carattere di generalità, che ne costituisce una delle doti più preziose.

La spiegazione di questo fatto devesi cercare sopratutto nella forma analitica, senza dubbio altamente elegante e concisa, ma anche molto astratta, nella quale Gauss ha risolto il problema. Per divulgare la nuova teoria si potevano tentare due vie.

La prima via era quella di far precedere alla dimostrazione analitica una semplice enunciazione dei teoremi e delle regole, cosicchè se ne potessero servire anche i non avvezzi ai metodi astratti della analisi. Questo ripiego, che non obbligava a rinunziare alle formole generali, che la sola analisi può dare, dalle quali la posizione dei punti cardinali di un sistema qualunque è legata ai suoi elementi fisici e geometrici, fu adottato dall'Helmholtz nella non completa, ma chiarissima esposizione, che diede del metodo di Gauss nel suo classico trattato di ottica fisiologica, [1] e recentemente dal Prof. Casorati nella seconda parte del pregevole suo libro: *Alcuni strumenti topografici a riflessione e le proprietà cardinali dei cannocchiali anche non centrati.* [2]

L'altra via consisteva nel trovare quelle dimostrazioni geometriche elementari, delle quali i risultati della teoria gaussiana, semplici e geometrici quali sono, non potevano non essere suscettibili; e fu tentata dal Maxwell, [3] dal Neumann, [4] dal Gavarret, [5] dal Martin, [6] e dal Reusch. [7] I lavori di questi autori, e

[1] *Physiologische Optik* formante il primo volume della *Allgemeine Encyclopädie der Physik* del Karsten. Leipzig, Leopold Voss, 1856.

[2] In questo lavoro la teoria è esposta col metodo di Gauss, ma è completata e perfezionata. Completata colla considerazione del caso di sistemi non perfettamente centrati; migliorata coll'introduzione dell'uso dei determinanti, in grazia dei quali molte deduzioni riescono più dirette e più chiare. Milano, tip. Bernardoni, 1872.

[3] Maxwell, *On the General Laws of optical Instruments*, memoria inserta nel vol. II (1858) del *Quarterly journal of pure and applied mathematics.*

[4] Neumann, *Die Haupt- und Brenn-punkte eines Linsensystemes,* Leipzig, 1866 (Teubner).

[5] Gavarret, *Des images par réflection et par réfraction,* memoria inserta nella *Revue des cours scientifiques.* Parigi, 1866.

[6] Martin, *Interprétation géométrique et continuation de la théorie des lentilles de Gauss,* memoria inserta negli *Annales de Chimie et de Physique*, 4.ª serie, vol. X, 1867.

[7] Reusch, *Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems.* Lipsia, 1870 (Teubner).

sopra tutti quello del Neumann, notevole per facilità e per chiarezza, se non si diffusero quanto avrebbero meritato, valsero almenò a dimostrare, che se la teoria geometrica non può somministrare le formole generalissime su nominate, le quali del resto pelle applicazioni non sono necessarie, ha per compenso il merito di illuminare mentre convince, di mostrare allo studioso, passo per passo, le relazioni geometriche, nelle quali risiede la ragione immediata dei fatti.

Parve a me, che, se nell'insegnamento speciale ed elevato, diretto a persone avvezze ai metodi dell'analisi, le dimostrazioni algebriche somiglianti a quella di Gauss saranno sempre le migliori, a volgarizzare la nuova teoria, a rendere possibile la sua introduzione nei corsi elementari di fisica generale o di topografia, la esposizione geometrica costituisse l'unico mezzo efficace. Convinto perciò che questo mezzo meritasse di essere ritentato, mi vi provai, ed osai sperare di potermi avvicinare allo scopo più che non si sia fatto fin qui.

Due cose mi parvero necessarie: dare della teoria una esposizione possibilmente completa, e discendere poi dalle considerazioni generali ai casi concreti, che si presentano nello studio degli strumenti effettivi. A mio avviso l'opuscolo del Reusch sarebbe riuscito più utile, se le applicazioni, che vi si contengono numerose, benchè slegate e troppo grafiche, vi fossero precedute da una teoria veramente generale; e le memorie del Gavarret e del Martin, e l'aureo opuscolo del Neumann avrebbero giovato assai più a diffondere la nuova teoria, se non abbandonassero lo studioso troppo lontano dai casi pratici, all'esame dei quali mirano i trattati di fisica, se fosse minore il lavoro, che essi lasciano all'insegnante, che, partendo dalla teoria astratta in essi esposta, deve guidare gli allievi alla conoscenza degli strumenti.

Perciò composi il mio lavoro di due parti.

Nella prima parte sono esposte le proprietà cardinali [1] dei sistemi diottrici in generale. Il metodo adottato ha, se non mi illudo, sopra quelli seguiti nei lavori su citati i pregi di un maggior rigore e di una maggiore uniformità. Nulla perdendo nella facilità, ma solo accostandosi, più che non si sia fatto dagli altri,

[1] La locuzione *proprietà cardinali*, adoperata a significare quelle proprietà che si riferiscono ai raggi centrali di luce omogenea, fu proposta dal prof. Casorati nell'opera citata.

alle considerazioni geometriche, dalle quali il Gauss ricavò le equazioni del raggio rifratto, si dimostrano l'esistenza e le proprietà dei piani coniugati, dei piani focali e dei piani principali, senza il bisogno di limitare lo studio ai soli raggi che giacciono coll'asse in un medesimo piano. Le stesse considerazioni conducono ad un teorema sul rapporto dell'angolo di due raggi incidenti all'angolo dei corrispondenti raggi emergenti, dal quale scaturiscono l'esistenza dei punti nodali, e le proprietà delle due distanze focali, di avere sempre segni contrari, e di stare l'una all'altra come l'indice di rifrazione del primo mezzo sta all'indice di rifrazione dell'ultimo mezzo. Ora tra i libri, ove la teoria di Gauss è esposta con metodo geometrico elementare, solo quello del Neumann, ch'io sappia, dà di queste proprietà singolarmente importanti una dimostrazione generale; ma la dà ricorrendo alle coordinate cartesiane, ad escludere le quali mirava appunto il lavoro. Oltre alle formole tra le distanze focali e le distanze dei punti coniugati dai piani principali e dall'asse, le quali servono alla soluzione di tutti i problemi, sono date le costruzioni grafiche, che servono al medesimo scopo, costruzioni, che, come mostrò il Prof. Reusch, si possono rendere comode ed esattissime col mezzo di figure schematiche fatte con due scale. Anche le formole, colle quali si determinano i punti cardinali di un sistema formato con due sistemi diottrici dati, sono esposte insieme alle costruzioni grafiche conducenti al medesimo scopo, la dimostrazione delle quali costituisce uno dei meriti principali dell'opuscolo del Reusch. Sono finalmente studiati i sistemi privi di punti cardinali; i sistemi telescopici, ai quali non accennano i lavori elementari, se si eccettua quello del Reusch, ove, per la natura stessa del metodo grafico seguìto, le dimostrazioni non possono essere generali.

Nella seconda parte sono fatte le applicazioni all'occhio, alle lenti ed ai sistemi di lenti che si adoperano più spesso nella composizione degli strumenti, e finalmente agli strumenti. Benchè le modificazioni, che l'impiego dei nuovi metodi introduce nella teoria elementare degli strumenti ottici, non sieno grandi, sembrommi tuttavia, che anche quest'ultima parte, sopratutto per ciò che riguarda gl'istrumenti composti, meritasse di essere trattata con qualche sviluppo. Forse è possibile, anche nell'insegnamento elementare, presentare questa teoria meno incompleta di quello che si sia fatto fin qui; ed io spero, che non tornerà inutile trovare nel § 3° del terzo capo una teoria degli strumenti composti, ove le nozioni relative all'ingrandimento, all'anello oculare, alla chiarezza, al campo sono date in modo generale ed espresse da formole, in parte nuove, le quali si applicano a tutti gli strumenti, ai microscopi come ai cannocchiali, mediante opportune ipotesi sui valori delle grandezze, che vi figurano.

La definizione data pel campo e le costruzioni e le formole proposte per determinarlo differiscono da quelle che si dànno comunemente. Si suole intendere per *campo* l'angolo al vertice della superficie conica, che ha il vertice nel primo punto principale dell'obbiettivo (nel vertice dell'obbiettivo, se questo si considera come infinitamente sottile) e che limita la parte di oggetto visibile simultaneamente per mezzo dello strumento; quando questa definizione non è data esplicitamente, è per lo più sottintesa, e ad essa si riferiscono i procedimenti sperimentali, che si insegnano per determinare il campo. Invece per determinare il campo teoricamente, lo si considera uguale al doppio dell'angolo, che fa coll'asse il più inclinato dei raggi principali, che possono emergere dallo strumento, e si riduce il problema alla determinazione della traiettoria di questo raggio e delle intersezioni sue colle singole lenti. Ora il più delle volte quella definizione e questo modo di calcolo non si corrispondono; negli strumenti ben fatti il diaframma limita lo spazio visibile, e lo riduce, se è possibile, a quella parte, che apparisce con chiarezza uniforme e massima; e invece i punti, ai quali corrispondono i raggi principali più inclinati fra tutti quelli, che potrebbero emergere dall'oculare se non esistesse il diaframma, si vedrebbero con chiarezza uguale a circa la metà della chiarezza centrale. In questo lavoro si è tolta questa contraddizione mediante una definizione ed un modo di calcolo, che, quando lo strumento è uno di quelli, nei quali si formano immagini reali, ed ha un diaframma ben proporzionato, corrispondono esattamente al significato, che la parola *campo* ha nel linguaggio comune. Il campo è definito: l'angolo al vertice del cono, che ha il vertice nel primo punto principale dell'obbiettivo, e che limita la porzione di oggetto simultaneamente visibile *con chiarezza uniforme* e massima; le costruzioni e le formole, che servono a determinarlo, corrispondono a questa definizione. Le formole differiscono da quelle, alle quali condurrebbe il metodo ordinario, basato sulla considerazione dei soli raggi principali, in ciò, che in esse figura il raggio dell'anello oculare e quindi l'apertura dell'obbiettivo; ed è da notarsi, che la differenza scompare quando si supponga nullo il raggio dell'anello oculare, quando cioè l'apertura dell'obbiettivo si consideri come infinitamente piccola. Le formole ordinarie sono adunque un caso particolare delle nostre. Negli strumenti, ove non si formano immagini reali, è talvolta impossibile ridurre con diaframmi lo spazio visibile a quella parte, che apparisce con chiarezza uniforme, ed allora la nostra definizione cessa di corrispondere al significato ordinario della parola; ma le formole, alle quali conduce, dànno luogo ad utili considerazioni sulla influenza, che l'apertura dell'obbiettivo ha sulla chiarezza colla quale appariscono attraverso allo strumento le diverse parti dell'oggetto.

Dopo la teoria generale lo studio speciale dei microscopi e dei cannocchiali si riduce ad una descrizione più particolareggiata della disposizione delle lenti ed alla discussione per casi speciali di formole già dimostrate. Benchè non entrasse nel piano di questo lavoro l'esame dei particolari di costruzione, e dell'uso pratico degli apparecchi, tuttavia come corollari della teoria ed anche come mezzo di mostrarne l'importanza, credetti utili su ciò alcuni brevissimi cenni.

Si sarebbe potuto dare alla trattazione una maggiore generalità, facendo che essa comprendesse anche i casi nei quali si avessero insieme alle superficie rifrangenti, alcune superficie riflettenti, insieme alle lenti alcuni specchi. La cosa era facile e si riduceva ad osservare, che le costruzioni e le formole del primo capo della parte prima si applicano agli specchi sferici ponendovi la condizione $n' = n$, purchè si convenga di considerare la distanza di un punto dallo specchio come positiva o come negativa, secondochè la luce si propaga, o si suppone propagarsi, dallo specchio verso il punto, oppure dal punto verso lo specchio. Io non lo feci, temendo di aumentare con ciò le difficoltà che già io temeva presentare l'applicazione della convenzione dei segni, e di dare alla esposizione un carattere di astrazione forse soverchio in un lavoro come questo; il quale raggiungerà tanto meglio lo scopo, che io mi sono prefisso nel pubblicarlo, quanto più sarà giudicato facile ed elementare.

Torino, dicembre 1876.

PARTE PRIMA

PROPRIETÀ CARDINALI DEI SISTEMI DIOTTRICI IN GENERALE

Preliminari.

1. *Definizioni.* — Noi diciamo *sistema centrato di mezzi rifrangenti* o *sistema diottrico centrato* una serie di corpi trasparenti $M, M_1, M_2 \dots M'$ (fig. 1) separati l'uno dall'altro da superficie sferiche $Vm, Vm_1 \dots V'm'$ aventi i centri $C, C_1, C_2 \dots C'$ sopra una medesima linea retta XX; diciamo *superficie dividenti* le superficie sferiche di separazione fra i successivi mezzi

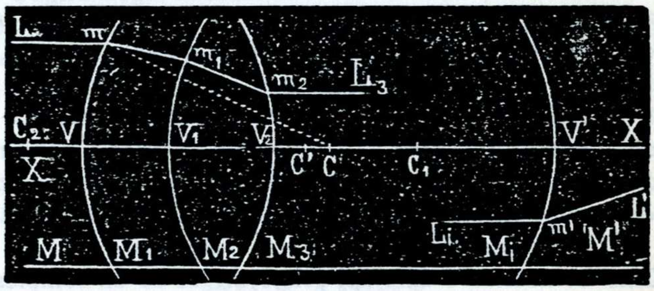


Fig. 1.

trasparenti, *asse centrale* o semplicemente *asse* del sistema, la retta che contiene i centri di tutte le superficie dividenti; *vertici* i punti d'intersezione fra queste e l'asse.

Un raggio luminoso, che attraversi il sistema, percorre una linea spezzata, $L\,m\,m_1\,m_2\,L_3 \dots L_i\,m'\,L'$. Il primo tratto $L\,m$ di questa spezzata, quello che la luce percorre nel primo mezzo prima di incontrare la prima superficie dividente, dicesi *raggio incidente;* gli altri $m\,m_1$, $m_1\,m_2$, $m_2\,L_3 \dots L_i\,m'$, $m'\,L'$ si dicono *raggi rifratti* nei mezzi $M_1, M_2, M_3 \dots M_i, M'$. Il raggio rifratto nell'ultimo mezzo, cioè il tratto $m'\,L'$, dicesi anche *raggio emergente.*

Un sistema qualunque composto di più di due mezzi può concepirsi formato dall'unione di altri sistemi composti di un numero minore di mezzi rinfrangenti. Così per esempio il sistema rappresentato nella fig. 1 può dirsi formato di due sistemi composti, il primo dai mezzi M, M_1, ed il secondo dai mezzi $M_1, M_2, M_3 \ldots M_i\ M'$; oppure composti, il primo coi mezzi M, M_1, M_2, ed il secondo coi mezzi $M_2, M_3, M_4 \ldots M'$, ecc. Ed in modo analogo lo stesso sistema può scomporsi col pensiero in tre o più sistemi minori.

Per uno qualunque di questi sistemi minori è raggio incidente il raggio rifratto nel suo primo mezzo, e raggio emergente il raggio rifratto nell'ultimo suo mezzo. Il raggio emergente dell'uno è raggio incidente pel sistema successivo.

Siccome pello studio che intraprendiamo converrà considerare non solo i tratti di cammino effettivamente percorsi dalla luce nei mezzi successivi, ma le rette indefinite di cui fanno parte codesti tratti, così giova dare un nome anche a queste rette. Diremo *retta d'incidenza* la retta indefinita su cui giace il raggio incidente, *retta di rifrazione* in uno qualunque dei mezzi dati la retta indefinita sulla quale è situato il raggio rifratto in quel mezzo, e *retta d'emergenza* quella a cui appartiene il raggio emergente. [1]

2. *Proposizione del problema da risolversi, ipotesi dei raggi centrali, proprietà cardinali.* — Un sistema diottrico è determinato quando sono date le posizioni dei vertici ed i centri di curvatura delle superficie dividenti, e gli indici di rifrazione assoluti $n, n_1, n_2 \ldots n_i, n'$ dei mezzi che lo costituiscono.

Dato un sistema e dato nel primo mezzo M un complesso di raggi luminosi incidenti, si domanda di determinare il complesso di raggi emergenti nel quale questo sarà trasformato per azione del sistema.

Noi ci proponiamo di risolvere questo problema solo nella ipotesi che la luce sia omogenea, e solo nel caso in cui sieno verificate le due condizioni seguenti:

1° Che nel suo cammino attraverso il sistema uno qualunque dei raggi dati, per esempio $L\,m\,m_1\,m_2\,L_3 \ldots L_i\,m'\,L'$ (fig. 1), incontri le successive superficie dividenti in punti come m tali che il raggio Cm, condotto dal centro di curvatura della super-

[1] Le locuzioni retta di incidenza e retta di emergenza furono adoperate credo per la prima volta, dal prof. CASORATI (op. cit.).

ficie a questo punto, faccia coll'asse del sistema un angolo talmente piccolo, che si possano trascurare le potenze del suo seno superiori alla prima. In questo caso il seno e la tangente dell'angolo stesso si potranno ritenere uguali alla lunghezza dell'arco di raggio uno chiudente l'angolo, il coseno eguale ad uno, il seno-verso uguale a zero.

2° Che angoli dello stesso ordine di piccolezza sieno fatti coll'asse del sistema da un tratto qualunque di ciascuno dei raggi considerati.

Quando queste due condizioni sono verificate i raggi si dicono *centrali*.

Le proprietà dei sistemi diottrici relative ai raggi centrali si dicono proprietà *cardinali*. Esse si riscontrano solo per approssimazione nei sistemi diottrici pratici, e le divergenze tra il caso concreto ed il caso ideale di raggi centrali dànno luogo alle così dette *aberrazioni di sfericità*. Ma siccome in ogni buon apparecchio si cerca sempre di rendere minime queste aberrazioni, così le proprietà cardinali bastano a studiare il modo generale d'agire degli strumenti.

Per ricercare queste proprietà cominceremo a considerare il caso semplice in cui sono dati due soli mezzi, epperò una sola superficie dividente; passeremo in seguito al caso generale.

CAPO PRIMO

SISTEMI DI DUE SOLI MEZZI

3. *Definizioni.* — Trattandosi di una sola superficie dividente, bisogna supporre che tutti i punti di incidenza sieno situati sopra una calotta di piccolissima ampiezza. Si dirà allora *asse* il diametro della sfera perpendicolare al circolo di base della calotta, *vertice* il punto d'intersezione della calotta coll'asse.

4. *Regola per determinare il raggio rifratto corispondente ad un raggio incidente dato.* — Sia V (fig. 2) il vertice e C il centro di una superficie sferica di raggio $VC = r$, secondo la quale combacino due corpi trasparenti aventi gli indici assoluti di rifrazione n ed n', e sia μ il punto d'incidenza di un raggio cen-

trale di luce situato sulla retta d'incidenza $L\mu L$. Si conduca pel centro C il piano $\Omega\,\Omega$ perpendicolare all'asse e e sia Ch l'intersezione di questo piano col piano d'incidenza $C\mu L$. Per la legge fondamentale della rifrazione semplice il raggio rifratto $\mu L'$ dovrà giacere nel piano d'incidenza $C\mu L$, epperò incontrare la

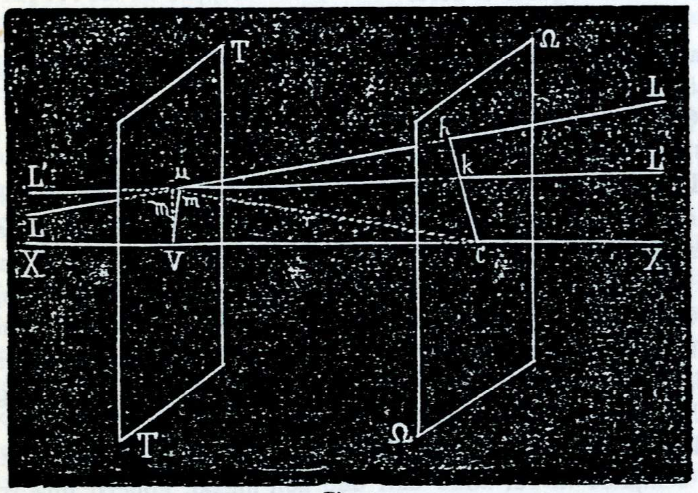


Fig. 2.

retta Ch in un punto k; la sua direzione poi in questo piano dovrà essere determinata mediante la formola

$$\frac{\operatorname{sen} C\mu h}{\operatorname{sen} C\mu k} = \frac{n'}{n}. \qquad (1)$$

Ora dal triangolo $C\mu h$ si ha

$$\frac{\operatorname{sen} C\mu h}{\operatorname{sen} \mu h C} = \frac{Ch}{C\mu} = \frac{Ch}{r},$$

ossia

$$\operatorname{sen} C\mu h = \frac{Ch}{r} \operatorname{sen} \mu h C,$$

e dal triangolo $C\mu k$ si ha similmente

$$\operatorname{sen} C\mu k = \frac{Ck}{r} \operatorname{sen} \mu k C.$$

Portando questi valori nella formola (1), questa dà

$$\frac{C\,h}{C\,k}\,\frac{\text{sen}\,\mu\,h\,C}{\text{sen}\,\mu\,k\,C}=\frac{n'}{n}.$$

Quest'equazione, che è esatta qualunque sieno i valori degli angoli d'incidenza e di rifrazione e qualunque sia l'angolo $V\,C\,\mu$, si può semplificare nel caso di raggi centrali. In questo caso infatti gli angoli $\mu\,h\,C$, $\mu\,k\,C$ differiscono dall'angolo retto di quantità dell'ordine di piccolezza degli angoli di incidenza e di rifrazione, e quindi i loro seni, come i coseni di questi, si possono ritenere come uguali all'unità. Stando adunque nell'ordine di approssimazione, al quale abbiamo convenuto di limitarci [2], abbiamo

$$\frac{C\,h}{C\,k}=\frac{n'}{n}.$$

Quindi per costrurre il raggio rifratto corrispondente ad un dato raggio incidente abbiamo la seguente

Regola: Si unisca al centro di curvatura C il punto h ove la retta d'incidenza data interseca il piano $\Omega\,\Omega$ condotto pel centro perpendicolarmente all'asse, e si segni su questa retta il punto k, la cui distanza da C stia a $C\,h$ come l'indice di rifrazione del primo mezzo sta a quello del secondo mezzo; la retta $L'\,\mu\,k\,L'$, che congiunge questo punto col punto di incidenza, è la retta d'emergenza.

5. *Se la retta d'incidenza passa pel centro di curvatura, la retta d'emergenza coincide con essa.* — Applicata ad una retta d'incidenza che passi pel centro, la regola mostra che la retta di rifrazione coincide in questo caso colla retta di incidenza, cosa, del resto, evidente di per sè.

6. *Se la retta d'incidenza e l'asse sono in un medesimo piano, è in questo piano anche la retta d'emergenza.* — Risulta pure dall'esposta costruzione che, se la retta di incidenza $L\,L$ e l'asse $X\,X$ sono in un medesimo piano, è in questo piano anche la retta d'emergenza $L'\,L'$. Sono infatti in questo piano due dei suoi punti μ e k.

7. *Nella determinazione del raggio rifratto si può sostituire alla superficie dividente il suo piano tangente.* — Pel vertice V si conduca il piano $T\,T$ tangente alla superficie rifrangente (fig. 2), epperò perpendicolare all'asse, e sia m il punto d'intersezione

della retta $L L$ con questo piano. La distanza $m \mu$ è dell'ordine di piccolezza del seno verso dell'angolo $V C \nu$, e perciò stando nei limiti di approssimazione nei quali ci siamo posti [2], si può senza errore sensibile sostituire alla retta μk la retta $m k$ e considerare questa come retta di emergenza.

Così faremo per l'avvenire, e per abbreviare il discorso diremo punto d'incidenza il punto m ove una retta d'incidenza data incontra il piano tangente alla superficie rifrangente.

8. *Ad un fascio di rette d'incidenza passanti tutte per un punto corrisponde un fascio di rette d'emergenza passanti tutte per un punto.* — Immaginiamo ora non più una sola retta d'incidenza, ma un fascio o pennello di quante si vogliano rette d'incidenza, le quali passino tutte per un medesimo punto.

Sieno come prima (fig. 3) V il vertice e C il centro della superficie sferica rifrangente; sieno $T T$ il piano tangente a questa

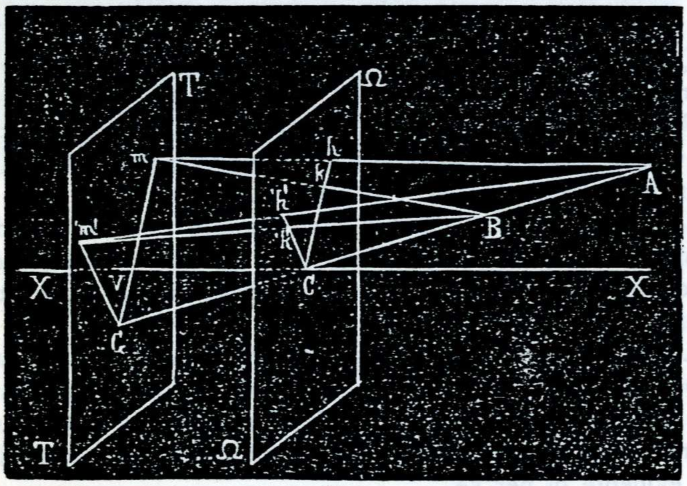


Fig. 3.

in V ed $\Omega \Omega$ il piano condotto pel centro C perpendicolarmente all'asse $X X$, e sia dato un fascio di rette d'incidenza $m A$, $m' A$... passanti tutte per un medesimo punto A. Si tiri la retta $G C A$ e si consideri una qualunque delle rette d'incidenza date, per esempio la $m A$. Per avere il raggio rifratto corrispondente a questa retta, bisogna, giusta la regola [4], prendere sulla $C h$, intersezione del piano $m A C$ col piano $\Omega \Omega$, il segmento $C k$ tale che sia

$$\frac{C h}{C k} = \frac{n'}{n},$$

e tirare $m\,k$. Questa retta essendo contenuta nel piano $m\,A\,C$ intersecherà $G\,C\,A$; sia B il punto d'intersezione. Dico che per B passano anche le rette d'emergenza corrispondenti alle altre rette del fascio incidente dato; che, per esempio, passa per B anche il raggio rifratto corrispondente alla retta d'incidenza $m'\,A$.

Infatti si tiri $m'\,B$. Risultano le due piramidi $A\,G\,m\,m'$, $B\,G\,m\,m'$, le quali hanno la base comune $G\,m\,m'$ nel piano $T\,T$ e sono tagliate dal piano $\Omega\,\Omega$ secondo le figure $C\,h\,h'$, $C\,k\,k'$. Il piano $m\,k$ essendo parallelo alla base, le dette figure sono simili alla base stessa, epperò sono simili tra di loro, talchè si ha

$$\frac{C\,h'}{C\,k'} = \frac{C\,h}{C\,k} = \frac{n'}{n}.$$

Dunque la retta $m'\,B$ determina sulla $C\,h'$ il segmento $C\,k'$ tale che è

$$\frac{C\,h'}{Ck} = \frac{n'}{n},$$

epperò per la regola [4] essa è la retta di emergenza corrispondente alla $m'\,A$.

Siccome lo stesso può dirsi della retta che congiunge il punto B col punto di incidenza di un altro raggio qualunque, così riesce dimostrato il seguente

Teorema. A qualunque fascio di rette di incidenza passanti tutte per un medesimo punto A corrisponde un fascio di rette di emergenza passanti tutte per un medesimo punto B situato sulla retta che congiunge il punto A col centro di curvatura della superficie rifrangente.

È evidente che il teorema sussiste anche quando il punto A od il punto B sono infinitamente lontani, ossia quando le rette incidenti o le emergenti sono parallele alla $G\,C\,A$. Allora infatti una delle figure $C\,h\,h'$, $C\,k\,k'$ è uguale alla $G\,m\,m'$, e perciò l'altra le è simile perchè simile alla $G\,m\,m'$.

9. *Punti coniugati.* — Egli è evidente che, se la luce si propagasse in verso opposto a quello dianzi supposto e passasse dal secondo mezzo al primo, ad un fascio di rette di incidenza passanti tutte pel punto B corrisponderebbe un fascio di rette di emergenza passanti tutte pel punto A.

Due punti che come A e B godano della proprietà, che a tutte le rette d'incidenza passanti per l'uno corrispondano rette di emergenza passanti per l'altro, diconsi *punti coniugati.*

Due punti coniugati sono sempre su di una medesima retta passante pel centro [8], epperò giaciono sempre in un medesimo piano passante per l'asse.

10. *Allo studio ulteriore bastano considerazioni di geometria piana.* — Avendo dimostrato che sempre i raggi emanati da un unico punto concorrono, dopo la rifrazione, in un altro punto coniugato col primo, o direttamente o coi loro prolungamenti [8], ed avendo veduto che in ogni caso i due punti coniugati giacciono coll'asse in un medesimo piano [9], noi possiamo oramai, senza punto restringere la generalità ed il rigore della trattazione, limitare le nostre considerazioni ai raggi giacenti in quel piano.

Per noi adunque il piano tangente alla superficie rifrangente nel suo vertice sarà sostituito dalla retta $T\,T$ (fig. 4) sua inter-

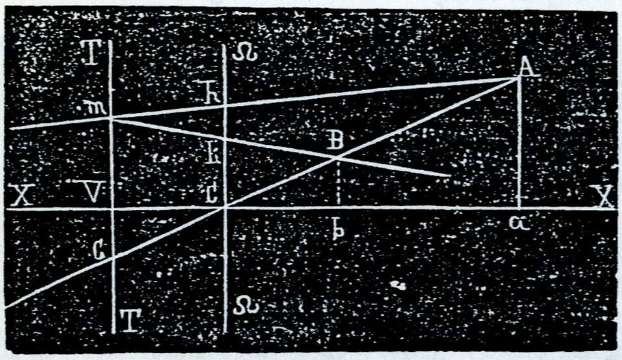


Fig. 4.

sezione col piano della figura; la retta condotta pel centro C perpendicolarmente all'asse $X\,X$ rappresenterà il piano normale all'asse condotto pel centro, ed una retta qualunque $a\,A$ perpendicolare all'asse potrà rappresentare un piano perpendicolare in a coll'asse medesimo. Quando la generalità degli enunciati lo richiederà, noi potremo scambiare la parola piano colla parola retta, e dire: piano $T\,T$, piano $\Omega\,\Omega$, piano $a\,A$, ecc.

Per trovare sulla nostra figura il punto coniugato ad un punto dato A, dobbiamo segnare una retta d'incidenza $m\,A$, che passi per A, prendere

$$C\,k = \frac{n}{n'}\,C\,h\,,$$

e condurre la $m\,k$, che sarà la retta di emergenza corrispondente alla $m\,A$, e che taglierà la $G\,A\,C$ nel punto cercato B.

11. *Figure schematiche per la soluzione grafica dei problemi.* — Una figura come la figura 4, della quale ci siamo serviti per appoggiare il discorso, non potrebbe rappresentare le vere posizioni dei punti luminosi e dei raggi di luce; perchè ciò fosse sarebbe necessario [2] che i punti A, B, m, h, k fossero tutti infinitamente vicini all'asse, e che le rette $m\,A$, $m\,B$, $G\,A$ facessero coll'asse e tra loro angoli piccolissimi. Ora su tale figura non sarebbe possibile alcuna operazione grafica. Ma possiamo evitare questa difficoltà considerando la figura non come la vera rappresentazione dei punti e dei raggi luminosi, ma come una figura alterata, e dedotta dalla vera, lasciando invariate le dimensioni parallele all'asse e moltiplicando le distanze di tutti i punti dall'asse per un numero g costante e grandissimo. Data una figura così alterata, se ne può reciprocamente dedurre la vera dividendo le distanze di tutti i punti pel numero g. Si sa dalla geometria che in due figure così dedotte l'una dall'altra a linee rette corrispondono linee rette, ed a rette parallele corrispondono rette parallele.

Sulla figura alterata qualunque retta $m\,A$, comunque inclinata sull'asse, può rappresentare una retta d'incidenza centrale, ed è evidente che, operando su di essa nel modo detto nel numero precedente, la retta $m\,B$, che si ottiene, rappresenta la corrispondente retta di emergenza. Ogni punto A può similmente rappresentare un punto luminoso, ed allora il punto B, ottenuto come si disse, rappresenta il suo coniugato.

Con questa convenzione la costruzione ora indicata e tutte quelle, che si esporranno nel corso di questo scritto, potranno realmente servire alla soluzione grafica dei problemi. Per la esattezza delle costruzioni converrà anzi scegliere i punti di incidenza alquanto lontani dall'asse, acciocchè gli angoli non riescano troppo acuti.

Noi potremo per brevità, e senza pericolo di incorrere in errori, designare le linee ed i punti della figura alterata coi nomi stessi dei punti e delle linee corrispondenti della figura reale. Così, per esempio, $m\,A$ si dirà una retta d'incidenza, $m\,B$ una retta d'emergenza, $C\,m$ un raggio della superficie sferica dividente, m un punto di incidenza, A, B due punti coniugati.

12. *Relazioni fra le distanze dei punti coniugati dalla superficie dividente e dall'asse.* — Le due coppie di triangoli simili $A\,G\,m$, $A\,C\,h$ e $B\,G\,m$, $B\,G\,k$ (fig. 4) dànno:

$$\frac{C\,A}{G\,A} = \frac{C\,h}{G\,m} \quad \text{e} \quad \frac{C\,B}{G\,B} = \frac{C\,k}{G\,m};$$

donde, essendo

$$\frac{C\,h}{C\,k} = \frac{n'}{n},$$

ricavasi

$$\frac{C\,B}{G\,B} = \frac{n}{n'}\frac{C\,A}{G\,A}.$$

Se ora dai punti A e B si abbassano le perpendicolari $A\,a$, $B\,b$ sull'asse $X\,X$, risultano i triangoli simili $A\,C\,a$, $B\,C\,b$, $G\,C\,V$, dai quali si ha

$$\frac{C\,A}{G\,A} = \frac{C\,a}{V\,a}, \quad \frac{C\,B}{G\,B} = \frac{C\,b}{V\,b},$$

i quali valori, portati nell'eguaglianza precedente, dànno

$$\frac{C\,b}{V\,b} = \frac{n}{n'}\frac{C\,a}{V\,a}. \tag{1}$$

Inoltre i due triangoli simili $A\,C\,a$, $B\,C\,b$ dànno

$$\frac{A\,a}{B\,b} = \frac{C\,a}{C\,b}. \tag{2}$$

Le eguaglianze (1) e (2) determinano la posizione del punto B, quando sia data quella di A, o viceversa.

Noi rappresenteremo le distanze $V\,a$ e $V\,b$ dei punti A e B dal piano $T\,T$ colle lettere x ed x', le distanze $a\,A$, $b\,B$ degli stessi punti dall'asse $X\,X$ con y ed y', ed il raggio di curvatura della superficie dividente con r; e converremo di considerare le x, x', r come positive quando, come nella figura 4, i punti A, B, C si trovano rispetto al piano $T\,T$, dalla parte verso cui si propaga la luce, e come negative nel caso contrario; converremo similmente di considerare le y, y' come positive o come negative, secondochè i punti A e B si trovano da una banda o dall'altra dell'asse $X\,X$.

Con queste notazioni abbiamo

$$C\,a = x - r, \qquad C\,b = x' - r,$$

e le formole (1) e (2) si possono scrivere

$$\frac{x' - r}{x'} = \frac{n}{n'}\,\frac{x - r}{x}$$

ed

$$\frac{y}{y'} = \frac{x - r}{x' - r}$$

ossia

$$\frac{n'}{x'} - \frac{n}{x} = \frac{n' - n}{r} \qquad [I]$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{n'}{n}\,\frac{x}{x'} = 1 + \frac{n' - n}{n\,r}\,x. \qquad [II]$$

13. *Relazione tra l'angolo di due rette di emergenza e l'angolo delle corrispondenti rette di incidenza.* — Alle relazioni [I] e [II], che legano tra loro le distanze x, x' ed y, y', dalle quali è determinata la posizione dei due punti coniugati A e B, possiamo aggiungerne una ugualmente semplice, che lega l'angolo $s\,A\,\sigma$ (fig. 5), fatto da due rette di incidenza qualunque $m\,s$, $n\,\sigma$ pas-

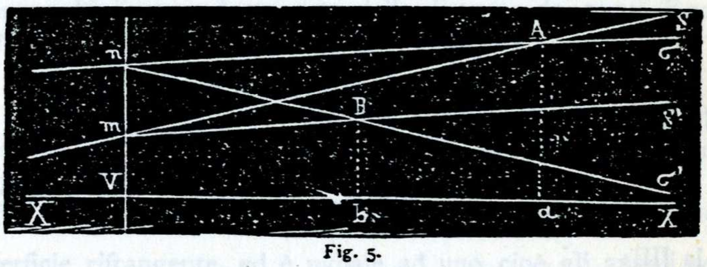


Fig. 5.

santi per A, all'angolo $s'\,B\,\sigma'$ delle corrispondenti rette di emergenza passanti per B.

Noi stabiliremo che lati dei detti angoli sieno quelle parti delle rette d'incidenza o d'emergenza, che, rispetto ai vertici A e B stanno dalla banda verso cui si propaga la luce, e converremo di considerare i due angoli come aventi il medesimo segno, o come aventi segni contrari, secondochè il lato $B\sigma'$ rispetto al lato $B\,s'$, ed il lato $A\,\sigma$ rispetto al lato $A\,s$ stanno dalla medesima banda oppure da bande opposte.

Ciò posto, si ha dai triangoli $A\,m\,n$, $B\,m\,n$

$$\text{sen}\, s\,A\,\sigma = \frac{m\,n}{m\,A}\,\text{sen}\,A\,n\,m\,, \quad \text{sen}\, s'\,B\,\sigma' = \frac{m\,n}{m\,B}\,\text{sen}\,B\,n\,m\,,$$

ossia, essendo

$$m\,A = \frac{V a}{\text{sen}\,A\,m\,n} = \frac{x}{\text{sen}\,A\,m\,n}\,,$$

ed

$$m\,B = \frac{V b}{\text{sen}\,B\,m\,n} = \frac{x'}{\text{sen}\,B\,m\,n}\,,$$

$$\text{sen}\, s\,A\,\sigma = \frac{m\,n}{x}\,\text{sen}\,A\,m\,n\;\text{sen}\,A\,n\,m\,,$$

$$\text{sen}\, s'\,B\,\sigma' = \frac{m\,n}{x'}\,\text{sen}\,B\,m\,n\;\text{sen}\,B\,n\,m\,.$$

Le quali uguaglianze, osservando che gli angoli $A\,m\,n$, $A\,n\,m$, $B\,m\,n$, $B\,n\,m$ differiscono dall'angolo retto così poco da potersi ritenere i loro seni come uguali ad uno, e che gli angoli $s\,A\,\sigma$ e $s'\,B\,\sigma'$ si possono scambiare co' loro seni [2], si possono scrivere semplicemente:

$$\text{angolo}\; s\,A\,\sigma = \frac{m\,n}{x}\,, \quad \text{angolo}\; s'\,B\,\sigma' = \frac{m\,n}{x'}\,.$$

Di qui, dicendo ω ed ω' i due angoli,

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{x'}{x} \tag{3}$$

o per la [II]:

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n}\,\frac{y'}{y}\,. \qquad \text{[III]}$$

14. *Piani coniugati.* — La formola (1) ci dice che il valore di x' non dipende da quello di y, ma semplicemente da quello di x. Ora il valore di x è lo stesso per tutti i punti del piano condotto per a perpendicolarmente all'asse, dunque

Teorema. Tutti i punti di un piano qualunque perpendicolare all'asse hanno i loro coniugati in un altro piano perpendilare all'asse.

Due piani che godano di questa proprietà, che a ciascun punto dell'uno sia coniugato un punto dell'altro, diconsi *piani coniugati*.

15. *Il rapporto delle distanze di due punti coniugati dall'asse dipende soltanto dalla posizione dei piani coniugati nei quali i due punti sono situati.* — La formola [II] ci dice, che il rapporto $\frac{y'}{y}$ delle distanze di due punti coniugati dall'asse è indipendente dal valore assoluto di queste distanze, ma dipende solamente dalla posizione dei piani coniugati, nei quali i due punti sono situati.

16. *Lo stesso è del rapporto dell'angolo di due rette d'emergenza all'angolo delle corrispondenti rette d'incidenza. Relazione fra questo rapporto e quello nominato nel numero precedente.* — E finalmente la formola [III] ci insegna che il rapporto dell'angolo di due qualunque rette di incidenza incrociantisi in un punto *A* all'angolo delle due corrispondenti rette d'emergenza incrociantisi nel punto *B* coniugato di *A* dipende solo dalla posizione dei piani coniugati, sui quali giacciono *A* e *B*, e non dalla posizione di questi punti in quei piani. Questo rapporto costante per una data coppia di piani coniugati è uguale al rapporto dell'indice di rifrazione del secondo mezzo a quello del primo moltiplicato pel rapporto delle distanze dei punti *B* ed *A* dall'asse.

Siccome per $x = o$ la [II] dà $\frac{y}{y'} = 1$, e per $x = r$ la [I] dà $x' = x = r$, e quindi la [II] dà $\frac{y'}{y} = \frac{n}{n'}$, così il rapporto degli angoli dianzi nominati è uguale a $\frac{n'}{n}$ se il punto *A* cade sulla superficie rifrangente, ed è uguale ad uno, cioè gli angoli sono uguali, se il punto luminoso cade sul piano perpendicolare all'asse nel centro di curvatura della superficie rifrangente, nel qual piano cade allora anche il punto coniugato *B*.

17. *Fuochi coniugati, piani focali, fuochi principali.* — Siccome due punti coniugati sono sempre in linea retta col centro [9], così i due punti, in cui una retta qualunque passante pel centro incontra due piani coniugati, sono coniugati.

In particolare i due punti, nei quali due piani coniugati intersecano l'asse, sono coniugati e diconsi *fuochi coniugati*.

Se di due piani coniugati uno è infinitamente lontano, l'altro dicesi *piano focale*. V'hanno due piani focali; a rette d'incidenza passanti per un punto dell'uno corrispondono rette di emergenza tra loro parallele, a rette d'incidenza parallele corrispondono rette di emergenza incrociantisi in un medesimo punto dell'altro. Quello dicesi *primo* piano focale, questo: *secondo* piano focale.

I punti dove i piani focali intersecano l'asse del sistema si dicono *fuochi principali* o semplicemente *fuochi*. Vi hanno due fuochi, che si dicono *primo* e *secondo*, come i piani focali a cui appartengono. Tutte le rette di incidenza, che passano pel primo fuoco, dànno luogo a rette d'emergenza parallele all'asse; tutte le rette di incidenza parallele all'asse dànno luogo a rette di emergenza passanti tutte pel secondo fuoco.

18. *Distanze focali, loro valore, sistemi convergenti e sistemi divergenti.* — Le distanze dei fuochi principali dal vertice della superficie rifrangente si denominano *distanze focali principali* o semplicemente *distanze focali*. Il loro valore è dato dalla formola [I] quando in essa si ponga successivamente $x' = \infty$ ed $x = \infty$; rappresentandole con f ed f', si ha così:

$$f = -\frac{n\,r}{n' - n}, \qquad f' = \frac{n'\,r}{n' - n}. \qquad \text{[IV]}$$

Queste espressioni mostrano che le due distanze focali hanno sempre segni contrari, e che perciò i fuochi principali si trovano sempre, rispetto al vertice, uno da una parte e l'altro dall'altra, uno nel primo mezzo e l'altro nel secondo mezzo.

Se $n' - n$ ed r hanno lo stesso segno, se cioè il centro di curvatura della superficie dividente è nel mezzo più rifrangente, la prima distanza focale f è negativa e la seconda f' è positiva, il primo fuoco giace nel primo mezzo, il secondo nel secondo. In questo caso un fascio di raggi incidenti paralleli si trasforma sempre in un fascio di raggi rifratti convergenti. Perciò dicesi che il sistema di due mezzi dato è *convergente*.

Se invece $n' - n$ ed r hanno segni contrari, se cioè il centro della superficie dividente si trova nel mezzo meno rifrangente, f è positivo ed f' è negativo. Un fascio di raggi incidenti paralleli si trasforma allora in un fascio di raggi rifratti divergenti, epperò il sistema dicesi *divergente*.

19. *Relazioni fra le due distanze focali.* — Dalle espressioni (IV) ricavasi

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}, \qquad f + f' = r;$$

dunque:

1° Il valore assoluto della prima distanza focale sta a quello della seconda come l'indice di rifrazione del primo mezzo sta a quello del secondo mezzo.

2° Il punto di mezzo del raggio di curvatura è pure punto di mezzo fra i due fuochi principali, vale a dire che la distanza tra il centro ed il secondo fuoco è uguale, in valore assoluto, alla distanza fra il primo fuoco ed il vertice.

20. *Determinazione grafica dei fuochi.* — I fuochi si possono determinare graficamente applicando la regola (4) successivamente ad una retta d'emergenza parallela all'asse.

A questo scopo (fig. 6) si tiri una retta qualunque $L\,L$ pa-

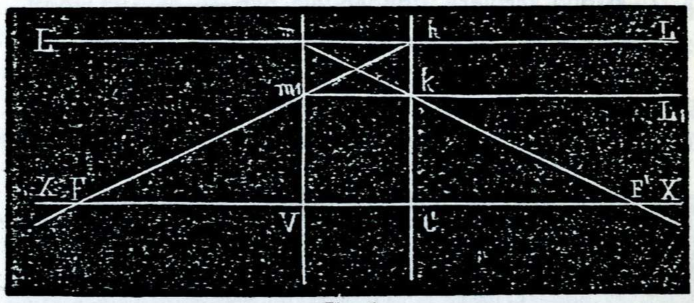


Fig. 6.

rallela all'asse, e la si consideri come una retta d'incidenza; prendendo

$$C\,k = \frac{n}{n'}\,C\,h$$

e tirando $m\,k$, si ha la corrispondente retta di emergenza, la quale taglia l'asse $X\,X$ nel punto F', che è il secondo fuoco. Si tiri similmente la m, $k\,L_1$ parallela all'asse, e la si consideri come una retta d'emergenza; per avere la corrispondente retta di incidenza, si prenda

$$C\,h = \frac{n'}{n}\,C\,k\,,$$

e si tiri $h m_1$; il punto F, ove questa interseca l'asse è il primo fuoco. La costruzione per trovare i due fuochi si riduce adunque a scegliere su Ch un segmento qualunque Ch, prendere

$$Ck = \frac{n}{n'}\, Ch,$$

prendere poi $Vm = Ch$ e $Vm_1 = Ck$ e tirare le rette $m\,k\,F$ ed $h\,m_1\,F$.

Da questa costruzione scaturiscono immediatamente le relazioni [IV] e le due

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}, \qquad f + f' = r.$$

21. — *Formule relative ai sistemi di due soli mezzi.* — Introducendo le distanze focali f ed f' nelle formole [I], [II], [III], possiamo dare a queste altre forme, che ci saranno utili.

La [I] si può scrivere, dividendola per $\dfrac{n'-n}{r}$,

$$\frac{1}{x'}\,\frac{n'r}{n'-n} - \frac{1}{x}\,\frac{nr}{n'-n} = 1,$$

ossia, avuto riguardo alle [IV],

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1. \qquad \text{[I']}$$

La [II] si può scrivere, in grazia delle [IV],

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y}{y'} = 1 - \dfrac{x}{f} \\ \text{oppure} \\ \dfrac{y'}{y} = 1 - \dfrac{x'}{f'} \end{array}\right\}, \qquad \text{[II']}$$

ciascuna delle quali formole dà, avuto riguardo alla [I'],

$$f\,\frac{y}{x} + f'\,\frac{y'}{x'} = 0 \qquad \text{[II'']}$$

La [III] può scriversi, in grazia delle [II'],

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n}\left(1 - \frac{x'}{f'}\right), \qquad \text{[III']}$$

od anche, essendo $f' = -\frac{n'}{n} f$ [19],

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{x' - f'}{f}, \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{x - f}{f'}. \qquad \text{[III'']}$$

Per ultimo le [II'], moltiplicate tra loro membro a membro, somministrano la relazione rimarchevole

$$(x - f)(x' - f') = f f'. \qquad \text{[V]}$$

22. *Soluzione grafica dei problemi che si possono proporre sui sistemi di due soli mezzi.* — La conoscenza delle due distanze focali basta a definire un sistema di due mezzi rifrangenti, e le formole precedenti permettono di risolvere con questi due soli dati tutte le questioni, che si possono proporre sopra un tale sistema. Vediamo ora come le questioni stesse si possano cogli stessi dati risolvere graficamente.

È chiaro che tutti i problemi si possono ridurre ai seguenti:

Problema 1°. Dati i due fuochi di un sistema di due mezzi ed una retta di incidenza, trovare la corrispondente retta di emergenza.

Sieno (fig. 7) F, F' i fuochi, V il vertice, C il centro di curvatura della superficie dividente, e sia $R\,S$ la retta di incidenza

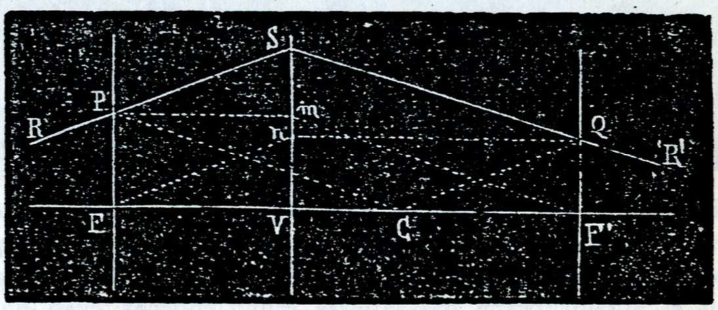


Fig. 7.

data. La retta di emergenza cercata passerà per S; per determinarla completamente possiamo operare in più maniere:

1.° Pel punto P, ove la $R\,S$ incontra il primo piano focale, si tiri $P\,m$ parallela all'asse; la retta di emergenza corrispondente a questa sarà parallela alla cercata [17]; ma essa passa per F' [17], è cioè $m\,F'$, dunque la retta cercata è $S\,R'$ condotta per S parallelamente ad $m\,F'$.

2.° La retta Fn parallela ad RS deve dar luogo ad una retta di emergenza, che incontra il secondo piano focale nel punto stesso ove lo incontra la retta cercata. Ma la retta di emergenza corrispondente alla Fn, che passa pel primo fuoco, è nQ parallela all'asse [17], dunque la retta cercata è SQ.

3.° La retta di emergenza cercata deve essere parallela a quella corrispondente alla retta d'incidenza PC. Ma il raggio PC passa non deviato [5], dunque SR' parallela a PC è la retta cercata.

4.° La retta di emergenza corrispondente ad una parallela ad RS condotta per C deve intersecare la retta cercata in un punto del secondo piano focale. Ma un raggio, che coincidesse con la detta parallela, passerebbe non deviato; dunque se si tira CQ parallela ad RS, e se nel punto Q, ove questa incontra il secondo piano focale, si conduce la SQ, questa è la retta cercata.

Notiamo che la figura $PSQC$ è un parallelogrammo.

Problema 2°. Trovare il punto coniugato ad un punto dato.

Sieno (fig. 8_a e 8_b) V il vertice e C il centro di curvatura della superficie dividente, F il primo ed F' il secondo fuoco, e

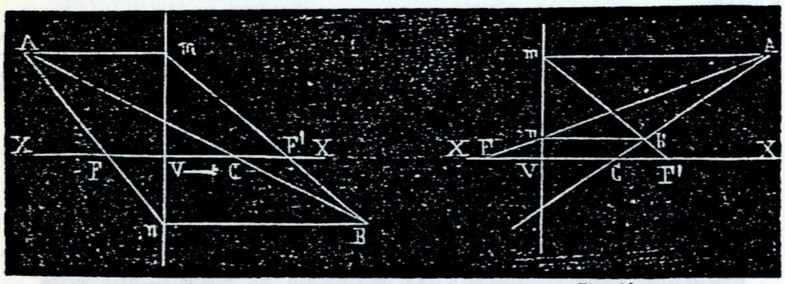


Fig. 8a. Fig. 8b.

sia A il punto dato. Per A si immaginino due rette di incidenza Am, An, la prima parallela all'asse e l'altra passante pel primo fuoco F; le rette di emergenza corrispondenti saranno mF' passante per F' ed nB parallela all'asse [17]. Il loro punto di intersezione B è il coniugato di A. Se la costruzione è ben fatta, la retta AB taglia l'asse nel centro C [8].

È da osservarsi come da questa costruzione si ricavino immediatamente le equazioni [I'] e [II'] dianzi trovate. Si ha infatti dai triangoli Amn, FVn (fig. 8_a).

$$\frac{FV}{Am} = \frac{nV}{nm},$$

ossia

$$\frac{FV}{Am} = \frac{nV}{nV + Vm},$$

ossia ancora, essendo $FV = -f$, $Am = -x$, $nV = -y'$, $Vm = y$,

$$\frac{f}{x} = \frac{y'}{y' - y}. \tag{1}$$

Similmente ricavasi dai triangoli Bnm, $F'Vm$:

$$\frac{f'}{x'} = \frac{y}{y - y'}. \tag{2}$$

Da queste relazioni si ottiene per addizione:

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1.$$

Se poi si moltiplica la (1) per y e la (2) per y', e si sommano membro a membro, si ricava:

$$f\frac{y}{x} + f'\frac{y'}{x'} = 0.$$

23. *Immagini, immagini coniugate, immagini reali o virtuali. Due immagini coniugate sono sempre prospettive.* — Dati due piani coniugati, e sopra uno di essi un complesso qualunque di punti formanti una figura, i punti loro coniugati formeranno sull'altro piano coniugato un'altra figura. Un occhio che ricevesse i raggi luminosi, che, emanati dai punti della prima figura, hanno attraversato la superficie dividente, li riceverebbe colle direzioni che avrebbero se fossero emanati dai punti della seconda figura, e riceverebbe quindi la impressione stessa che riceverebbe se i punti della seconda figura emettessero effettivamente la luce. Perciò questa seconda figura dicesi *immagine* della prima. Siccome reciprocamente, se la luce attraversasse il sistema nel verso opposto, passando dal secondo mezzo al primo, alle rette di incidenza incrociantisi in un punto della seconda figura corrisponderebbero rette di emergenza incrociantisi nel punto corrispondente della prima, così questa può anche dirsi immagine dell'altra. Le due figure si dicono perciò anche *immagini coniugate*.

La prima delle due immagini considerate dicesi *reale* o *virtuale* secondochè è situata nel primo o nel secondo mezzo; la seconda dicesi reale o virtuale secondochè è situata nel secondo mezzo oppure nel primo.

Due punti corrispondenti presi sopra due immagini coniugate giacciono sempre sopra una medesima retta passante pel centro [8]; dunque due immagini coniugate sono sempre prospettive.

Quando uno dei piani coniugati è all'infinito, e quindi l'altro è un piano focale, la proposizione sussiste in questo senso, che la retta, che congiunge un punto qualunque del primo piano focale col centro, è parallela alle rette di emergenza corrispondenti alle rette di incidenza passanti per quel punto, e che similmente la retta, che congiunge il centro ad un punto qualunque del secondo piano focale, è parallela alle rette di incidenza, le cui rette di rifrazione concorrono in quel punto.

La verità di questa asserzione risulta dalle considerazioni fatte ai numeri [8] e [9]. Basta d'altronde considerare, che la retta passante pel centro può riguardarsi come appartenente al fascio delle rette parallele d'incidenza o di emergenza, e che un raggio incidente, che coincida con essa, passa non deviato [5].

24. *Caso in cui la superficie dividente è piana.* — Quando la superficie rifrangente è piana è $r = \infty$, e le formole [IV] dànno $f = f' = \infty$. Allora ad un fascio di raggi incidenti paralleli corrisponde un fascio di raggi emergenti pure paralleli, come d'altronde è noto.

In questo caso perdono ogni valore le formole [I'], [II''] e [V]. Le [I'], [II], [III] poi dànno:

$$\frac{x}{x'} = \frac{n}{n'}, \quad \frac{y}{y'} = 1, \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{n'}{n},$$

e dimostrano:

1° Che le distanze x ed x' hanno sempre il medesimo segno, e sono proporzionali agli indici di rifrazione del primo e del secondo mezzo;

2° che le grandezze di due immagini coniugate sono sempre uguali;

3° che il rapporto dell'angolo di due raggi incidenti all'angolo dei raggi emergenti, che loro corrispondono, è costante ed uguale al rapporto dell'indice di rifrazione del secondo mezzo a quello del primo.