PARTE SECONDA

APPLICAZIONI

CAPO PRIMO.

Occhio.

53. *Descrizione della parte diottrica dell'organo della vista.* — La prima applicazione dell'esposta teoria vuol essere fatta all'occhio umano, la conoscenza del quale è necessaria per lo studio di qualunque istrumento ottico.

Noi considereremo l'occhio unicamente come un sistema diottrico, epperò non ci occuperemo che di quelle parti di quest' organo, le quali sotto a questo punto di vista hanno maggiore importanza. Ridotto a queste parti otticamente essenziali l'occhio è rappresentato in sezione orizzontale nella figura 20.

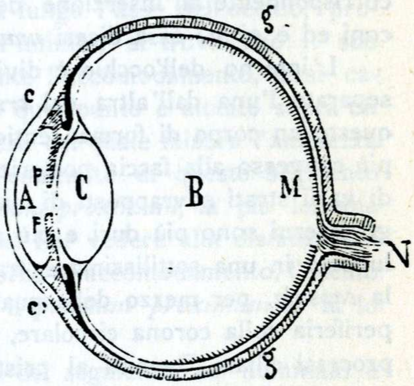

Fig. 20.

Tutta la parte diottrica dell'organo della vista è chiusa in un globo *gcc'g'*, la cui parete è sostenuta contro la pressione esterna da liquidi che lo riempiono completamente. Questa parete è formata di varii strati. Lo strato più grosso, che nella figura è ombreggiato, è costituito da una membrana resistente ed opaca, della *sclerotica*, che dà all'occhio la sua forma arrotondata. Soltanto nella parte anteriore, tra i punti *c* e *c'* essa è sostituita dalla *cornea trasparente*, membrana perfettamente diafana foggiata a calotta con un raggio di curvatura minore di quello della sclerotica, attraverso alla quale la luce penetra nell'occhio.

La sclerotica è tappezzata internamente da una membrana vascolare detta *coroide*, la quale è ricoperta da una materia nera simile al pigmento della pelle dei negri. Nella figura la coroide è rappresentata con una riga nera. Presso alla linea di unione tra la sclerotica e la cornea trasparente la membrana coroidea forma un grande numero di ripiegature radiali, che costituiscono quivi una specie di corona circolare, e che si denominano *processi ciliari.* Sopra la coroide si estende la *retina,* espansione del nervo ottico *N*, la quale riceve e trasmette al cervello la impressione della luce. La superficie di questa rete nervosa è formata da un gran numero di bastoncini, fra i quali sono disseminati altri bastoncini aventi un imbasamento rigonfiato, che si dicono *coni.* Questi non sono dovunque sparsi colla medesima frequenza. Sono numerosissimi nell'interno di una piccola macchia gialla che si trova in vicinanza dell'asse di figura medio delle superficie rifrangenti dell'occhio; questa macchia si dice *macula lutea,* il suo centro *M*: *fovea centralis.* Questa regione è la più sensibile; nelle parti della retina lontane da essa i coni sono man mano più rari e la sensibilità alla luce diminuisce gradatamente per scomparire affatto in vicinanza dell'origine dei processi ciliari, ove la retina si trasforma in una membrana priva affatto di estremità nervose. La regione corrispondente all'inserzione del nervo ottico manca pure di coni ed è *cieca:* essa dicesi *macchia di Mariotte.*

L'interno dell'occhio è diviso in due parti completamente separate l'una dall'altra dal *cristallino* o *lente cristallina* *C*. È questo un corpo di forma lenticolare a superficie convesse e più convesso alla faccia posteriore che all'anteriore. È formato di varii strati sovrapposti di materia trasparentissima, dei quali gli interni sono più duri e più rifrangenti. Il cristallino è avviluppato in una sottilissima e trasparentissima membrana detta la *capsula,* per mezzo della quale esso aderisce lungo la sua periferia colla corona circolare, che abbiamo detto formata dai processi ciliari. Davanti al cristallino esiste l'*iride,* diaframma opaco anulare avente in vicinanza del centro un'apertura circolare *p p*, detta *pupilla,* la quale, senza influenza alcuna della volontà, si restringe o si dilata secondochè l'occhio è colpito da una maggiore o una minore quantità di luce.

Delle due capacità *A* e *B*, nelle quali il cristallino divide l'occhio, l'anteriore *A* è ripiena di un liquido simile all'acqua e detto perciò *umore acqueo;* la posteriore *B* che forma la maggiore cavità dell'occhio, contiene il cosidetto *umore* o *corpo vitreo,* sostanza semifluida contenuta in una borsa membranosa sottilissima detta *membrana ialoidea*, che aderisce alla retina ed alla parte posteriore della capsula del cristallino.

Questo complesso di corpi trasparenti costituisce un sistema diottrico convergente, che dà degli oggetti esterni, che si guardano, una immagine rovesciata. Perchè la visione sia distinta quest'immagine deve dipingersi sulla retina, e perchè la sensazione sia la più netta possibile, l'immagine stessa deve trovarsi nella macula lutea. Se collo sguardo si fissa un punto, l'immagine di questo coincide colla fovea centralis.

54. *Accomodamenti, suoi limiti.* — La curvatura delle superficie del cristallino, che tra i mezzi diafani dell'occhio è il più rifrangente, può volontariamente modificarsi; ne risulta uno spostamento dei punti cardinali dell'occhio, tale che possano cadere sulla retina i punti coniugati di punti diversamente distanti quanto minore è quella curvatura. Così succede che un medesimo occhio possa vedere distintamente a distanze molto diverse. Questo modificarsi dell'occhio a seconda delle distanze degli oggetti guardati dicesi *accomodamento*.

La facoltà, che ha l'occhio di accomodarsi alle diverse distanze, è limitata. Se si immagina che il punto di incrociamento delle rette di incidenza si muova lungo l'asse dell'occhio, prolungato da ambe le parti fino all'infinito, si trova che il suo punto coniugato non può, mediante l'accomodamento, farsi cadere sulla retina, se non quando quel punto è situato sopra un determinato segmento, la lunghezza del quale misura l'ampiezza dell'accomodamento possibile. L'estremità di questo segmento più vicina all'occhio dicesi *punctum proximum*, la più lontana *punctum remotum* o *remotissimum*. Per vedere alla distanza del *punctum remotum* non occorre sforzo di accomodamento, l'occhio sta in riposo; fissando invece il *punctum proximum* si fa lo sforzo massimo.

La lunghezza e la posizione del segmento su nominato è diversa ne' diversi individui.

Il *punctum remotum* si considera come normalmente situato, quando è all'infinito, si ritiene cioè come normale quell'occhio, che, senza sforzo alcuno di accomodamento, fa convergere in un medesimo punto della retina i raggi, che prima dell'incidenza erano paralleli, quell'occhio, il cui secondo fuoco, nel riposo, è sulla retina. Gli occhi dotati di questa proprietà sono detti dal Donders: *emmetropici*, tutti gli altri, nei quali il *punctum remotum* è a distanza finita: *ametropici*.

Il *punctum remotum* può essere a distanza finita davanti o dietro all'occhio. Nel primo caso l'occhio è *brachimetropico*, nel secondo *ipermetropico*. Un occhio brachimetropico riceve sulla retina, senza sforzo di accomodamento, l'immagine di oggetti posti ad una distanza finita, determinata, e talora molto piccola; e siccome l'accomodamento può soltanto avvicinare all'occhio il punto, il cui coniugato è sulla retina, e non allontanarlo, così un tal occhio non può vedere distintamente al di là di quella distanza determinata, se non col sussidio di strumenti. In un occhio brachimetropico non si possono intersecare sulla retina i raggi rifratti, se i raggi incidenti non arrivano divergenti; il secondo fuoco, anche nel riposo è anteriore alla retina. Un occhio ipermetropico invece vede distintamente, senza bisogno di accomodamento, solo quando fra il punto luminoso e l'occhio è frapposto uno strumento atto a rendere convergenti i raggi partiti da quel punto; senza accomodamento esso non può vedere oggetti reali, ma soltanto immagini, che, se l'occhio non intercettasse la luce, andrebbero a formarsi al di là dell'occhio, a distanza tanto minore, quanto più l'occhio è ipermetropico; il secondo fuoco di un tale occhio, nel riposo, è situato dietro la retina.

Il *punctum proximum* è nell'occhio emmetropico normale ad una distanza di 20 a 30 centimetri, nell'occhio brachimetropico è ordinariamente più vicino, e nell' ipermetropico più lontano. L'intervallo fra i due punti, che limitano le distanze per le quali l'occhio è capace di accomodarsi, è adunque diversissimo ne' diversi individui; è infinito nell'occhio emmetropico, è formato di due tratti infiniti, l'uno anteriore e l'altro posteriore, nell'occhio ipermetropico, ed è finito e talora brevissimo, di pochi decimetri, nell'occhio brachimetropico. Non devesi credere però, che questa differenza nell'ampiezza dell'accomodamento dipenda da una differenza nella facoltà, che ha l'occhio, di spostare, modificandosi, i suoi punti cardinali; essa dipende da ciò, che ad un medesimo spostamento del punto luminoso corrisponde un grande spostamento del suo punto coniugato, se il punto luminoso è molto vicino, ed uno spostamento insensibile, se quello è lontanissimo. Se con una lente si corregge un occhio brachimetropico per modo che il suo punto rimoto vada all'infinito, il punto prossimo non va ad una distanza maggiore di quella che esso ha nell'occhio emmetropico normale.

In un medesimo individuo poi l'intervallo fra i due punti prossimo e rimoto varia colla età: col crescere di questa, quella diminuisce, il punto prossimo si allontana.

Quando si vogliono osservare oggetti di piccole dimensioni, essi si avvicinano naturalmente all'occhio quanto è possibile; così la loro immagine sulla retina riesce maggiore, e le loro parti minute si distinguono meglio. Egli è perciò che alla distanza del *punctum proximum* si era dato il nome meno proprio di *distanza della visione distinta*. Pell'occhio normale questa distanza è tale, che ad essa torna comodo tenere gli oggetti minuti, che si vogliono osservare: e questi, se sono artificiali, come i caratteri di stampa, come i tratti di un disegno, ecc., sogliono avere dimensioni convenienti per essere veduti senza fatica a quella distanza. Colui, pel quale il *punctum proximum* è ad una distanza notevolmente maggiore della normale distanza della visione distinta, non può veder bene e comodamente quegli oggetti, non può leggere o scrivere senza l'aiuto di lenti.

V'hanno adunque due casi, ove occorre munire l'occhio di lenti, quando un brachimetropico vuol vedere oggetti lontani e quando il *punctum proximum* è molto lontano e si hanno ad osservare oggetti minuti. Nel primo caso l'occhio si suol dire *miope*, nel secondo *presbite*. I miopi sono tutti brachimetropici; non sempre i presbiti sono ipermetropici. Un occhio emmetropico e normale diventa ordinariamente presbite nella vecchiaia.

55. *Occhio schematico. Determinazione dei suoi punti cardinali.* — Risulta dalla fatta descrizione e dal precedente cenno sulla funzione dell'occhio: 1° che questo è un sistema di un numero grandissimo di mezzi rifrangenti, quali sono la cornea trasparente, l'umor acqueo, i molti strati del cristallino e l'umor vitreo; 2° che alcune delle superficie di separazione di questi mezzi sono di forma variabile. Oltre a ciò si sa che queste superficie non sono sferiche, ma che soltanto si approssimano a superficie di rivoluzione, gli assi delle quali non coincidono perfettamente.

Ma pel nostro scopo e senza errori apprezzabili possiamo trascurare l'influenza della cornea trasparente, la quale è sottilissima ed ha un indice di rifrazione poco diverso da quello dell'umore acqueo, ed immaginare sostituito al cristallino vero, che è composto di molti strati, un corpo d'ugual forma, ma omogeneo e dotato di un indice di rifrazione conveniente; possiamo immaginare che tutte le superficie dividenti abbiano una forma invariabile e precisamente quella che avrebbero in un occhio normale disposto per vedere lontanissimo; possiamo considerare tutte queste superficie come sferiche, supporle centrate e ritenere che la retta dei centri coincida coll'asse di figura della prima superficie, cioè della cornea. Questa retta, che diremo *asse dell'occhio,* non passa pella *fovea centralis* ma vi si avvicina.

Così semplificato l'occhio è detto *schematico.* Esso non è altro che un sistema diottrico centrato con tre sole superficie, la superficie anteriore della cornea e le due del cristallino, le quali superficie separano quattro mezzi: l'aria, l'umor acqueo, il cristallino e l'umor vitreo. Ad un tale sistema si applica facilmente la teoria esposta nella prima parte di questo lavoro.

Per l'occhio schematico dato dal LISTING, e modificato poi dal WÜLLNER si hanno i seguenti dati:

Distanze fra le superficie.

Fra la 1ª e la 2ª superficie . . .	$3^{mm},78$
„ 2ª „ 3ª „	$4\ ,00$

Raggi di curvatura.

Della 1ª superficie	$+\ 7^{mm},8$
„ 2ª „	$+\ 9\ ,58$
„ 3ª „	$-\ 5\ ,87$

Indici di rifrazione.

Aria	1
Umore acqueo.	1,3465
Cristallino	1,4545
Umore vitreo	1,3465

Con questi dati il sistema diottrico è completamente determinato.

La posizione dei suoi punti cardinali si potrebbe determinare graficamente con sufficiente esattezza portando sopra una retta posta a rappresentare l'asse dell'occhio le distanze ed i raggi di curvatura con una scala di 5 o 6 volte il vero, disegnando i piani tangenti alle superficie dividenti ed operando sulla figura così fatta come è detto all'articolo 42.

Volendo fare la medesima determinazione per mezzo del calcolo, possiamo operare come segue:

a) Per mezzo delle formole

$$f = -\frac{n\,r}{n' - n} \quad \text{ed} \quad f' = \frac{n'\,r}{n' - n}$$

dell'articolo 18 calcolare le posizioni dei fuochi dei tre sistemi semplici formati: 1° dall'aria e dall'umor acqueo separati dalla superficie della cornea; 2° dall'umor acqueo e dal corpo cristallino separati dalla faccia anteriore di questo; 3° dal cristallino e dall'umore vitreo separati dalla faccia posteriore del primo.

b) Per mezzo delle formole

$$F_1 F = \frac{f_1 f'_1}{D} \ (1), \qquad F'_2 F' = -\frac{f_2 f'_2}{D} \ (2),$$

$$f = \frac{f_1 f_2}{D} \ (3), \qquad f' = -\frac{f'_1 f'_2}{D} \ (4),$$

del numero 43 calcolare le posizioni dei punti cardinali del sistema composto col secondo e col terzo dei sistemi semplici dianzi nominati, formato cioè dall'umore acqueo, dal cristallino e dall'umor vitreo.

c) Colle medesime formole determinare i punti cardinali del sistema composto del sistema *b*) unito al primo dei tre sistemi semplici *a*). Questo sistema composto è l'occhio completo.

Ecco lo sviluppo del calcolo.

a) Sistemi di due soli mezzi:

1.° *Aria ed umore acqueo:*

$$\text{Prima distanza focale} = -\frac{7^{mm},8}{1,3465 - 1} = -22^{mm},5108 .$$

$$\text{Seconda} \quad " \quad " \quad = +\frac{1,3465 \times 7,8}{1,3645 - 1} = +30 \quad ,3108$$

Queste sono le distanze dei due fuochi dal vertice della cornea al quale riferiremo le posizioni di tutti i punti.

2° *Umor acqueo e cristallino:*

$$\text{Prima distanza focale} = -\frac{1{,}3465 \times 9{,}51}{1{,}4545 - 1{,}3465} = -118{,}5668$$

$$\text{Seconda} \quad " \quad " \quad = +\frac{1{,}4545 \times 9{,}51}{1{,}4545 - 1{,}3645} = +128{,}0767$$

Distanza del primo fuoco dal vertice della

cornea $= 3{,}78 - 118{,}5658 \quad . \quad . \quad . \quad = -114{,}7868$

Id. del secondo fuoco $= 3{,}78 + 128{,}0767 = +131{,}8567$

3.° *Cristallino ed umor vitreo:*

$$\text{Prima distanza focale} = -\frac{1{,}4545 \times (-5{,}87)}{1{,}3465 - 1{,}4545} = -79{,}0548$$

$$\text{Seconda} \quad " \quad " \quad = +\frac{1{,}3455 \times 5{,}87}{1{,}4545 - 1{,}3465} = +73{,}1848$$

Distanza del primo fuoco dal vertice della

cornea $= 3{,}78 + 4 - 79{,}0548 \quad . \quad . \quad . \quad = -71{,}2748$

Id. del secondo fuoco $= 7{,}78 + 73{,}1848 \; . \; = +80{,}9648$

b) Combinazione del secondo dei sistemi precedenti col 3.°, cioè sistema umor acqueo, cristallino, umor vitreo:

$$D = -71{,}2748 - 131{,}8567 = -203{,}1315$$

$$F_1 F = \frac{-118{,}5668 \times 128{,}0767}{-203{,}1315} = +74{,}7577$$

Distanza del primo fuoco dalla superficie della

cornea $= -114{,}7868 + 74{,}7577 \quad . \quad . \quad = -40.0291$

$$F'_2 F' = -\frac{-79{,}0548 \times 73{,}1848}{-203{,}1315} = -28{,}4820$$

Distanza del secondo fuoco dalla superficie

della cornea $= 80{,}9648 - 28{,}4820 \quad . \quad . \quad = +52.4828$

$$1.^a \text{ distanza focale} = \frac{-118{,}5668 \times (-79{,}0548)}{-203{,}1315} = -46{,}1438$$

$$2.^a \quad " \quad " \quad = -\frac{128{,}0767 \times 73{,}1848}{-203{,}1315} = +46{,}1438$$

c) Combinazione del sistema *b*) col 1° *a*), ossia occhio completo:

$$D = -40{,}0291 - 30{,}3108 = -70{,}3399$$

$$F_1 F = \frac{-22{,}5108 \times 30{,}3108}{-70{,}3399} = +9{,}7013$$

$$F'_2 F' = -\frac{(46{,}1438)^2}{70{,}3399} = -30{,}2709$$

$$1.^a \text{ distanza focale} = \frac{-22{,}5108 \times (-46{,}1438)}{-70{,}3399} = -14{,}7673$$

$$2.^a \quad „ \quad „ = -\frac{30{,}3108 \times 46{,}1438}{70{,}3399} = +19{,}8843$$

Coi quali risultati si calcolano finalmente le seguenti distanze dei punti cardinali dell'occhio dalla prima superficie della cornea:

1.° Fuoco: $-22{,}5108 + 9{,}7013$ . . . . $= -12^{mm},8095$
2.° Fuoco: $52{,}4828 - 30{,}2709$ . . . $= +22\ ,2119$
1.° Punto principale: $-12{,}8095 + 14{,}7673 = +1\ ,9578$
2.° Punto principale: $+22{,}2119 - 19{,}8843 = +2\ ,3276$
1.° Punto nodale: $-12{,}8095 + 19{,}8843$. $= +7\ ,0748$
2.° Punto nodale: $22{,}2119 - 14{,}7673$. $= +7\ ,4446$

La distanza fra i due punti principali e fra i due punti nodali è $= 0^{mm},3698$.

La figura 21 rappresenta nella scala doppia del vero la sezione orizzontate dell'occhio schematico e mostra la posizione dei punti cardinali: *F* ed *F'* sono i due fuochi, *P* e *P'* i due punti principali, *N* ed *N'* i due punti nodali [1].

[1] Due delle distanze che abbiamo trovato differiscono da quelle, alle quali, partendo dai medesimi dati, è arrivato il Wüllner. Questi e quanti scrissero dopo di lui dànno per le distanze del primo fuoco e del primo punto principale dalla superficie anteriore della cornea i valori di millim.

$$-12{,}836 \quad \text{e} \quad 1{,}931,$$

che differiscono di circa 0,027 millimetri da quelli che noi abbiamo trovato. Questa differenza è dovuta ad uno sbaglio di aritmetica fatto dal Wüllner; troviamo infatti nel suo trattato *Lehrbuch der Experimentalphysik*, secondo volume, terza edizione, Lipsia, 1871, a pag. 289, l'uguaglianza

$$\frac{7{,}8}{0{,}3465} = 22{,}22,$$

la quale vuole essere corretta scrivendo

$$\frac{7{,}8}{0{,}3465} = 22{,}5108.$$

Conoscendo questi punti, le regole esposte negli articoli 37 e 38 permettono di determinare l'immagine nell'occhio dei punti esterni vicini all'asse. Se si suppone il punto luminoso situato alla distanza pella quale l'occhio è *accomodato*, la costruzione della immagine riesce estremamente semplice: basta condurre dal punto luminoso la retta AN al primo punto nodale, e dal secondo punto nodale tirare la $N'B$ parallela ad AN; il punto B ove essa interseca la retina è il punto cercato.

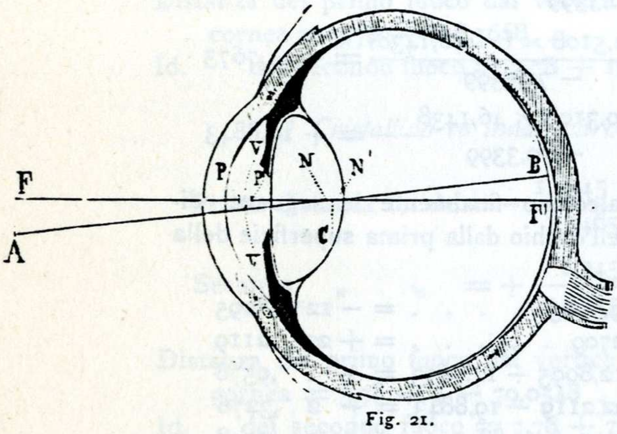

Fig. 21.

Quando si fissa un punto luminoso, si gira l'occhio finchè la retta $N'B$ passi per la *fovea centralis*, ossia finchè la retta che passa pel punto guardato e pel primo punto nodale dell'occhio diventi parallela alla retta che congiunge il secondo punto nodale colla *fovea centralis*.

56. *Occhio ridotto*. — Abbiamo veduto [40] come a qualunque sistema diottrico centrato, nel quale i mezzi estremi non abbiano il medesimo indice di rifrazione, si possa immaginare sostituito un sistema formato coi due soli mezzi estremi separati da una superficie sferica avente il vertice nel primo punto principale ed il centro di curvatura nel primo punto nodale. Un tale sistema di due soli mezzi dà per ogni raggio incidente o per ogni punto luminoso un raggio emergente od un punto coniugato, che, trasportato parallelamente all'asse di una quantità uguale alla distanza fra i due punti principali, viene a coincidere con quello che avrebbe dato il sistema complesso proposto. Possiamo applicare questo teorema all'occhio schematico. Perciò dobbiamo immaginare sostituita alle tre superficie dividenti dell'occhio una sola superficie sferica avente il vertice nel primo punto principale P (fig. 21) ed il centro nel primo punto nodale N, e supporre che questa superficie abbia alla sinistra aria ed a destra umore vitreo; allora non si ha che da trasportare parallelamente all'asse per un tratto uguale a PP' e immagini formate da questo semplice sistema per ottenere le

immagini che realmente si producono sulla retina o presso alla retina dell'occhio schematico.

Il tratto $PP' = NN'$ del quale bisogna così trasportare le immagini date dall'unica superficie immaginata in P, onde farle coincidere con quelle date dall'occhio, è piccolissimo, e giusta i calcoli sovraesposti supera di poco un terzo di millimetro. Questa considerazione ci conduce ad una ulteriore semplificazione dell'occhio. Questa semplificazione, proposta già dal Listing, consiste nel sostituire ai punti principali P e P' un unico punto, situato sul mezzo del segmento PP' ed ai due punti nodali N ed N' un unico punto C similmente situato nel punto di mezzo fra i medesimi. Il sistema diottrico si riduce così ad un sistema di due soli mezzi, aria ed umor vitreo, separati da una superficie sferica VV col centro in C. Le immagini somministrate da questa unica superficie differiscono da quelle fornite dall'occhio di quantità affatto trascurabili nel più gran numero delle applicazioni.

Questo sistema di due soli mezzi, che come istrumento diottrico può essere sostituito all'occhio, è stato denominato dal Listing: *occhio ridotto.* Nella figura 21 la superficie rifrangente dell'occhio ridotto è disegnata con un arco punteggiato VV: essa è situata $2^{mm},143$ dietro alla superficie anteriore della cornea. Il centro C di questa superficie è detto *centro o punto di incrociamento* dell'occhio; esso è situato a $7^{mm},260$ dietro della superficie anteriore della cornea e $0^{mm},520$ avanti alla superficie posteriore del cristallino.

Nell'occhio ridotto la determinazione dell'immagine di un dato punto luminoso è semplicissima: basta condurre la retta che congiunge il punto dato col centro C e prolungarla fino alla sua intersezione colla retina; il punto d'intersezione è l'immagine cercata. Un oggetto luminoso e la sua immagine sono omotetici rispetto al centro C; la grandezza dell'immagine sta a quella dell'oggetto come la distanza CF' sta alla distanza dell'oggetto dal centro C.

Quando si fissa un punto collo sguardo, la retta AC prolungata interseca la retina nella *fovea centralis*; per fissare un oggetto si gira l'occhio finchè questo succeda, vale a dire finchè la retta CB che unisce il centro C alla *fovea centralis*, prolungata, passi pel punto guardato. Perciò questa retta si dice *asse visuale* o *retta visuale.* Helmholtz ha dimostrato che la retta visuale non coincide con l'asse centrale dell'occhio, essendo la macula lutea B situata alquanto più verso la tempia che il fuoco F'.

Il piano della pupilla è, come vedesi nella figura 21, dietro alla superficie rifrangente dell'occhio ridotto; ma nelle applicazioni ci sarà comodo supporre la pupilla sulla superficie rifrangente stessa. Per diametro della pupilla intenderemo allora il diametro del circolo secondo cui la superficie rifrangente è intersecata dalla superficie conica che ha per vertice il punto C e per direttrice la periferia della vera pupilla.

57. *Apprezzamento della grandezza degli oggetti veduti.* — Il giudizio che noi facciamo degli oggetti guardati dipende dalle immagini che di questi si formano negli occhi; ed infatti, se, tolti gli oggetti, a questi vengono sostituite prospettive od immagini fornite da apparecchi ottici atti a dare nell'occhio le medesime immagini, noi crediamo di vedere realmente gli oggetti.

Per lo studio che faremo degli strumenti ottici occorre che vediamo brevemente e sotto il solo punto di vista diottrico: 1° come si giudichi della grandezza degli oggetti guardati; 2° da quali condizioni dipenda la chiarezza della visione.

L' apprezzamento della grandezza si fa per mezzo della grandezza dell' immagine formata sulla retina. Ora se l'oggetto è un semplice segmento di retta perpendicolare all'asse dell'occhio, o se di un oggetto qualunque si considera solo una dimensione, la grandezza dell' immagine sulla retina dipende solamente dall' angolo formato dalle due linee visuali condotte alle sue estremità. Questo angolo si dice *angolo visuale* od anche *grandezza apparente* dell'oggetto.

Ma la grandezza apparente dipende non solo dalla grandezza reale dell'oggetto, ma anche dalla distanza di questo dall'occhio; sostituendo all'angolo visuale la sua tangente, la grandezza apparente risulta uguale al quoziente della grandezza lineare reale divisa per la distanza. Dunque per giudicare della reale grandezza è necessario conoscere la distanza. Quando questa sia conosciuta, la valutazione necessaria si fa quasi senza avvertirlo e per semplice abitudine. Ma se le distanze sono soltanto arguite col senso pel grado maggiore o minore di convergenza degli assi dei due occhi, pella coscienza del leggero sforzo necessario all'accomodamento, o pell'effetto della prospettiva aerea, la quale fa sì, che la chiarezza degli oggetti diminuisce col crescere delle loro distanze, allora il giudizio diviene incerto.

Se poi le distanze degli oggetti sono affatto sconosciute il giudizio è spesso erroneo. Che in realtà l'apprezzamento della grandezza dipenda da un atto psichico talora complesso lo provano le frequenti illusioni che si presentano o naturalmente, come quando si osservano oggetti situati fuori degli stretti confini di quella parte di superficie terrestre alla quale abbiamo avvezzata la nostra vista, od oggetti di grandezza molto superiore a quelle alle quali siamo soliti; oppure anche artificialmente, come succede per effetto di fantasmagoria.

58. *Chiarezza della visione. Angolo visuale necessario per la visione.* — La chiarezza della visione dipende da un complesso di circostanze che non potremmo studiare qui. Ma facendo astrazione dall'influenza che ha sulla intensità della sensazione il colore della luce, dall'influenza dei colori e della chiarezza degli oggetti vicini a quelli che si guardano, e dalle condizioni fisiologiche dell'organo della vista, considerando cioè la chiarezza solamente in quanto essa dipende dalla grandezza e dalla distanza dell'oggetto guardato e dalla quantità di luce che esso manda nell'occhio, possiamo stabilire come cosa evidente che la chiarezza della visione è tanto maggiore quanto maggiore è la quantità di luce che concorre in ogni unità superficiale della immagine che dell'oggetto formasi sulla retina. — L'intensità della sensazione non è proporzionale alla quantità che abbiamo nominato; ma a parità delle altre circostanze cresce con questa, la quale si potrebbe dire: *Chiarezza fisica* della visione. È questa la sola che noi avremo bisogno di considerare, ed è questa che denomineremo *chiarezza.*

Segue da ciò la regola: per calcolare la chiarezza si divida la quantità totale di luce, che entra nell'occhio, per la superficie dell'immagine che essa forma sulla retina.

Se tra l'oggetto guardato e l'occhio non fosse frapposto alcun mezzo assorbente, la chiarezza sarebbe indipendente dalla distanza dell'oggetto. Si immagini infatti un oggetto luminoso, del quale ogni unità superficiale mandi alla distanza uno sopra la superficie uno, una quantità di luce uguale a I. Se la superficie di questo oggetto, la quale manda luce verso l'occhio, è S, se la distanza sua dalla pupilla è d, e se l'area della pupilla si rappresenta con ω, la quantità di luce che, emanata dall'oggetto, entra nell'occhio risulta espressa da

$$\frac{IS\omega}{d^2}$$

Se quindi è s la superficie dell'immagine dell'oggetto sulla retina la chiarezza è

$$C = \frac{I\,S\,\omega}{d^2\,s}\ .$$

Ma se, come accade sempre, l'oggetto è abbastanza lontano dall'occhio perchè con d si possa intendere rappresentata indifferentemente la distanza dalla pupilla o dal punto d' incrociamento dell'occhio, abbiamo [55]

$$\frac{S}{s} = \frac{d^2}{\delta^2}\ ,$$

ove δ è la distanza del centro dell'occhio dalla retina. Dunque abbiamo

$$C = \frac{I\,\omega}{\delta^2} = \text{costante}\ .$$

Ciò nonostante, ancorchè non esistessero fra l'occhio e l'oggetto luminoso mezzi assorbenti la luce, l'oggetto allontanato entro un certo limite, cesserebbe di essere visto; perchè un oggetto possa essere visto l'angolo visuale non deve essere inferiore ad un limite che dipende dallo splendore e dal colore dell'oggetto, dallo splendore e dal colore del fondo su cui l'oggetto si proietta, dalle condizioni dell'occhio. Per un occhio ordinario due punti appariscono ancora distinti quando sono visti sotto un angolo visuale di 1′, talchè la distanza delle loro immagini sulla retina sia di circa $0^{mm},0043$. Ma un oggetto convenientemente illuminato può ancora vedersi sotto un angolo di soli 30″, ed anche molto minore se esso proiettasi sopra un fondo oscuro; ed all'incontro un oggetto scuro su fondo chiaro poco illuminato, come per esempio, una parte di un disegno, richiede, per essere visto senza sforzo, un angolo visuale di oltre 2′.

CAPO SECONDO

Lenti e sistemi di lenti.

§ 1.° *Proprietà generali.*

59. *Definizione. Le distanze focali sono uguali in valore assoluto, ed i punti nodali coincidono coi punti principali.* — Dicesi *lente* un sistema centrato di tre soli mezzi, dei quali i due estremi sono identici; nel caso più ordinario i due mezzi estremi sono costituiti dall'aria ed il mezzo intermedio è vetro, od un altro corpo trasparente più rifrangente dell'aria.

I teoremi dimostrati agli articoli [34] e [35] danno subito che:

1.° Le due distanze focali di una lente sono sempre uguali in valore assoluto;

2.° I punti nodali di una lente coincidono coi punti principali.

Una lente è adunque definita da quattro soli punti cardinali F, P, F', P' (fig. 22) così disposti che sia $FP = P'F'$.

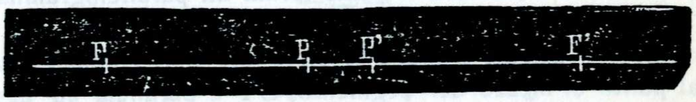

Fig 22.

Lo stesso deve dirsi in un sistema di lenti.

60. *Determinazione grafica dei raggi emergenti e dei punti coniugati.* — Le costruzioni date al numero 37 per un sistema qualunque si riducono pel caso speciale di una lente o di un sistema di lenti alle seguenti.

Problema I°. Data una lente o un sistema di lenti e data una retta di incidenza, trovare la corrispondente retta di emergenza.

Sia (fig. 23) RS la data retta di incidenza, e sia SS' parallela all'asse: la retta d'emergenza cercata passerà per S'. Per determinarla completamente si può operare in uno dei seguenti modi.

1.° Si tirino $R\,q\,q'$ parallela all'asse e $q'\,F'$ passante pel secondo fuoco, la retta cercata sarà $S'\,R'$ parallela a $q'\,F$.

2.° Si tiri $F\,p$ parallela ad $R\,S$ e $p\,p'\,Q'$ parallela all'asse, la retta cercata passerà per Q'.

3.° Si tiri $R\,P$: la retta cercata sarà la $S'\,R'$ parallela a questa.

4.° La retta cercata dovrà passare per Q' ove il secondo

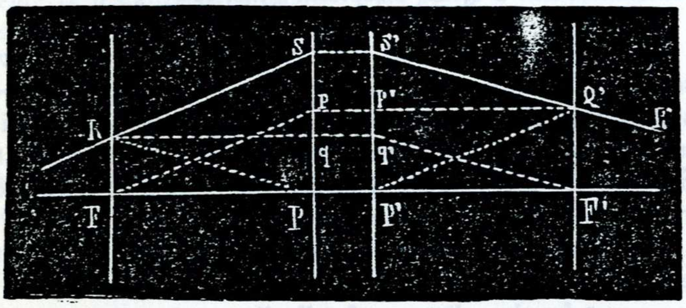

Fig. 23.

piano focale è intersecato dalla retta $P'\,Q'$ condotta per P' parallelamente alla retta data.

Osservazione. I due triangoli $R\,S\,P$, $Q'\,P'\,S'$ sono uguali. Se si trasporta il secondo di essi verso la sinistra finchè $S'\,P'$ coincida con $S\,P$, il loro insieme forma un parallelogramma di cui $S\,P$ è una diagonale; l'altra diagonale interseca questa nel suo punto di mezzo. Dunque la retta che congiunge il punto R al punto di mezzo del segmento $S\,P$ è parallela ed uguale a quella che congiunge il punto di mezzo del segmento $S'\,P'$ col punto Q'.

Problema 2°. Data una lente od un sistema di lenti, trovare un punto coniugato di un dato punto luminoso.

Sia A (fig. 24) il punto luminoso dato; tiro $A\,m\,m'$ parallela all'asse e per m' conduco $m'\,F'$; tiro similmente $A\,F\,n$ e per n conduco $n\,n'\,B$ parallela all'asse; il punto B ove questa interseca la $m'\,F'$ è il punto cercato.

Oppure conduco $A\,P$ e per P' tiro una parallela a questa retta; questa parallela interseca la $m'\,F'$ oppure la $n\,n'$ nel punto B cercato.

Osservazione. Se si immagina la parte $n'\,P'\,m'\,F'\,B$ della figura trasportata a sinistra finchè $n'\,P'\,m'$ venga a coincidere con $n\,P\,m$, la $P'\,B$ viene a coincidere col prolungamento di

A P. In seguito a questo trasporto due immagini coniugate riescono omotetiche rispetto al punto *P.*

61. *Formole. Distanza focale.* — Se si rappresenta con φ il valore della seconda distanza focale, quello della prima è $-\varphi$;

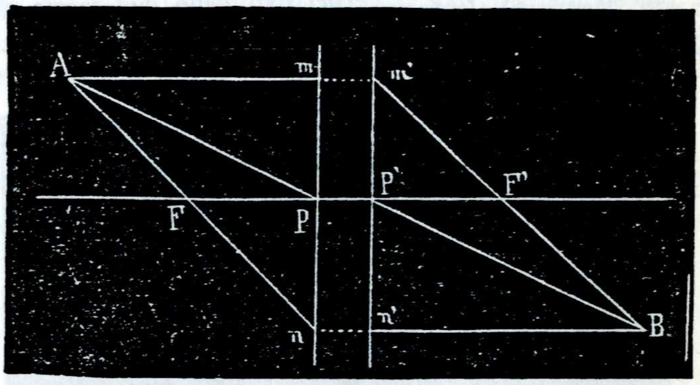

Fig. 24.

quindi pel caso delle lenti le formule [I'] [II''] [II'] e [III'] del numero 38 si riducono a:

$$\frac{1}{x'}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\varphi} \qquad [I']$$

$$\frac{y}{x}=\frac{y'}{x'} \qquad [II'']$$

$$\frac{y}{y'}=1+\frac{x}{\varphi}, \quad \frac{y'}{y}=1-\frac{x'}{\varphi} \qquad [II']$$

$$\frac{\omega}{\omega'}=\frac{y'}{y}=1-\frac{x'}{\varphi}, \quad \frac{\omega'}{\omega}=\frac{y}{y'}=1+\frac{x}{\varphi} \qquad [III']$$

La seconda distanza focale φ dicesi anche semplicemente *distanza focale della lente* o del sistema di lenti considerato.

§ 2.° *Determinazione dei punti cardinali. Diverse specie di lenti.*

62. *Formole che dànno la distanza focale e la posizione dei punti principali di una lente.* — Per far uso delle costruzioni e delle formole precedenti è necessario conoscere la posizione dei punti principali e la distanza focale φ della lente. Ora date le

curvature e la distanza delle due facce della lente, e dato l'indice di rifrazione della sostanza con cui essa è formata rispetto al mezzo ambiente, questi elementi si determinano facilmente col mezzo delle regole date al numero 43.

Sieno (fig. 25) V, V' i vertici dati delle due faccie di una lente, C e C' i due centri di curvatura delle m desime, $r = VC$ ed $r' = V'C'$ i due raggi di curvatura, n_1 l'indice di ri-

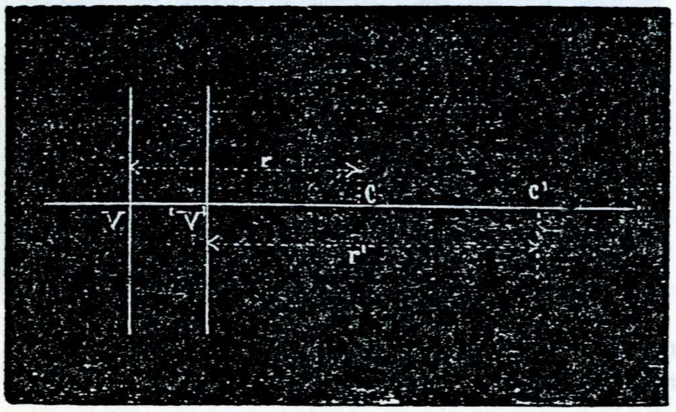

Fig. 25

frazione del mezzo compreso fra V e V', cioè del corpo della lente, n l'indice di rifrazione del mezzo unico che esiste a sinistra di V e a destra di V e $\mu = \frac{n_1}{n}$ l'indice di rifrazione della sostanza, di cui è fatta la lente, rispetto al mezzo ambiente. Diciamo Δ la distanza VV', cioè lo spessore della lente, e designiamo con f_1, f'_1 le distanze focali della prima superficie rifrangente, con f_2, f_2' quelle della seconda, con F_1, F_1' F_2, F_2' i fuochi rispettivi, e con φ, F, F', P, P' la distanza focale, i fuochi ed i punti principali della lente.

Abbiamo pei due sistemi semplici del primo e secondo e del secondo e terzo mezzo [18]

$$f_1 = -\frac{nr}{n_1 - n} = -\frac{r}{\mu - 1},$$

$$f_1' = -\frac{n_1 r}{n_1 - n} = +\frac{\mu r}{\mu - 1},$$

$$f_2 = -\frac{n_1 r'}{n - n_1} = +\frac{\mu r'}{\mu - 1},$$

$$f_2' = +\frac{n r'}{n - n_1} = -\frac{r'}{\mu - 1}.$$

Portando questi valori nelle formole (8'), (5'), e (7') del numero 44, e ritenendo che

$$f' = -f = \varphi,$$

e che i punti principali delle due superficie rifrangenti, che comprendono la lente, coincidono coi due vertici V e V', otteniamo:

$$\varphi = \frac{\mu r r'}{(\mu-1)^2\left[\Delta + \frac{\mu(r'-r)}{\mu-1}\right]}, \tag{1}$$

$$VP = -\frac{r\Delta}{(\mu-1)\left[\Delta + \frac{\mu(r'-r)}{\mu-1}\right]}, \tag{2}$$

$$V'P' = -\frac{r'\Delta}{(\mu-1)\left[\Delta + \frac{\mu(r'-r)}{\mu-1}\right]}. \tag{3}$$

Se si pone

$$\rho = r' - r + \frac{\mu-1}{\mu}\Delta,$$

queste formole si possono scrivere;

$$\varphi = \frac{1}{\mu-1}\frac{rr'}{\rho} \tag{1'}$$

$$VP = -\frac{1}{\mu}\frac{r}{\rho}\Delta \tag{2'}$$

$$V'P' = -\frac{1}{\mu}\frac{r'}{\rho}\Delta. \tag{3'}$$

Notiamo: 1° che VP e $V'P'$ hanno lo stesso segno od hanno segni contrari secondochè hanno lo stesso segno od han segni contrari i due raggi di curvatura r ed r'.

2.° Che

$$\frac{VP}{V'P'} = \frac{r}{r'}.$$

63. *Varie specie di lenti. Lenti biconvesse.* — Discutiamo le formole (1'), (2') e (3') e vediamo come i punti cardinali sieno situati nelle diverse specie di lenti.

1° Lenti biconvesse. Si dicono *biconvesse* le lenti, le cui faccie sono ambedue convesse. La fig. 26 mostra una sezione fatta in una di tali lenti da un piano passante per l'asse; V, V' sono i vertici, C, C' i centri di curvatura.

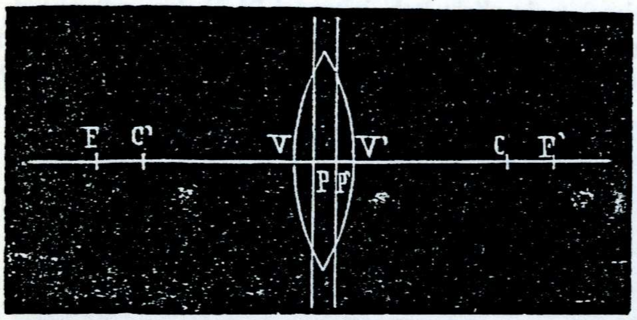

Fig. 26.

In una lente biconvessa $r = VC$ è positivo,

$$r' = -C'V'$$

è negativo, il prodotto rr' è negativo, la distanza focale

$$\varphi = \frac{1}{\mu - 1} \frac{rr'}{\rho}$$

è positiva o negativa secondochè $(\mu - 1)\,\rho$ è negativo o positivo. Dunque se si suppone $\mu > 1$ come è nelle lenti ordinarie, la lente è convergente ogniqualvolta ρ è negativo, cioè semprechè è soddisfatta la disuguaglianza:

$$\Delta < \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r'),$$

la quale, dicendo $-R'$ il valore negativo di r', si può scrivere:

$$\Delta < \frac{\mu}{\mu - 1}(r + R')$$

Se fosse per esempio $\mu = \frac{3}{2}$, quale è pel vetro ordinario, sarebbe $\frac{\mu}{\mu - 1} = 3$, e la lente sarebbe convergente sempre quando il suo spessore Δ fosse minore del triplo della somma aritmetica dei due raggi di curvatura. Questa condizione è sempre soddisfatta nelle ordinarie lenti che fan parte dei nostri istrumenti ottici.

Se fosse

$$\Delta = \frac{\mu}{\mu - 1}(r + R'),$$

sarebbe $\rho = \mp 0$, $\varphi = \infty$ e la lente non avrebbe punti cardinali; essa costituirebbe un sistema telescopico [46].

Se fosse

$$\Delta > \frac{\mu}{\mu - 1}(r + R'),$$

ρ sarebbe positivo e φ negativo: la lente sarebbe divergente.

Nel caso di ρ negativo, che è il più importante, VP è positivo, e $V'P'$ è negativo; P è alla destra di V e P' è alla sinistra di V'.

Come esempio consideriamo il caso in cui le curvature delle due faccie sono uguali, talchè $r' = -r$, e per fissare le idee supponiamo $\mu = \frac{3}{2}$, come è prossimamente pel vetro ordinario. Abbiamo in questo caso

$$\rho = -2r + \frac{\Delta}{3}$$

e quindi:

$$\varphi = \frac{1}{1 - \frac{1}{6}\frac{\Delta}{r}} \cdot r,$$

$$VP = -V'P' = \frac{1}{1 - \frac{1}{6} \cdot \frac{\Delta}{r}} \frac{\Delta}{3}.$$

Se, come spesso occorre, lo spessore Δ è piccolissimo a fronte del raggio di curvatura, si può ritenere approssimativamente

$$VP = -V'P' = \frac{\Delta}{3};$$

i due punti principali dividono allora lo spessore della lente in tre parti uguali.

Se $\Delta = 6r$, i punti principali vanno all' infinito. Per $\Delta > 6r$, nel qual caso la lente è divergente, VP è negativo e $V'P'$ è positivo.

Come caso particolare consideriamo una lente nella quale le due faccie sieno porzioni di una medesima sfera. Allora è $\Delta = 2r$, e le formole precedenti dànno:

$$\rho = \frac{3}{2} r \,, \qquad VP = V'P = r \,.$$

I punti principali coincidono col centro; la distanza dei fuochi dalla superficie della sfera rifrangente è

$$-r + \frac{3}{2} r = \frac{r}{2} \,.$$

64. *Lenti biconcave.* — Si dicono *biconcave* le lenti che hanno entrambe le faccie concave (fig. 27).

Per tali lenti $r = - CV$ è negativo, $r' = V'C$ è positivo, il prodotto $r r'$ è negativo ed il valore di ρ è positivo; da ciò

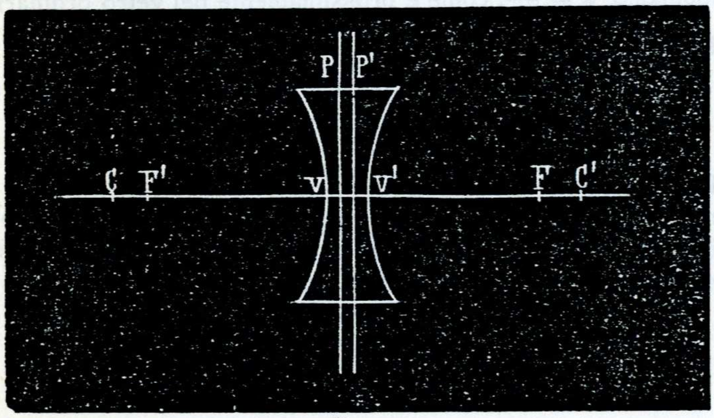

Fig. 27.

segue che il valore di φ dato dalla formola [I'] è sempre negativo, se, come supponiamo sempre, μ è maggiore dell'unità. Dunque le lenti biconcave fatte con una materia più rifrangente del mezzo ambiente sono sempre divergenti.

Essendo ρ positivo, le formole (2') e (3') dànno per VP e $V'P'$ valori di segno contrario ad r ed r'; dunque VP è positivo e $V'P'$ è negativo, il primo punto principale P è alla destra di V ed il secondo punto principale P' è alla sinistra del secondo vertice V'.

Come esempio supponiamo anche qui che sia

$$r = - r' \qquad \mu = \frac{3}{2};$$

otteniamo:

$$\varphi = - \frac{1}{1 + \frac{1}{6}\frac{\Delta}{r'}} r',$$

$$VP = V'P' = \frac{1}{1 + \frac{1}{6}\frac{\Delta}{r}} \frac{\Delta}{3}.$$

Se $\frac{\Delta}{r}$ è piccolo, come è frequentissimamente nella pratica, l'ultima formola dà prossimamente

$$VP = - V'P' = \frac{\Delta}{3};$$

i due punti principali determinano allora sulla retta VV', che misura lo spessore della lente, tre segmenti uguali.

Se si fa crescere Δ, i valori di VP e di $-V'P'$ diventano frazioni di mano in mano più piccole della terza parte $\frac{\Delta}{3}$ dello spessore. Qualunque valore abbia Δ il primo punto principale è sempre situato nel primo terzo VP dello spessore

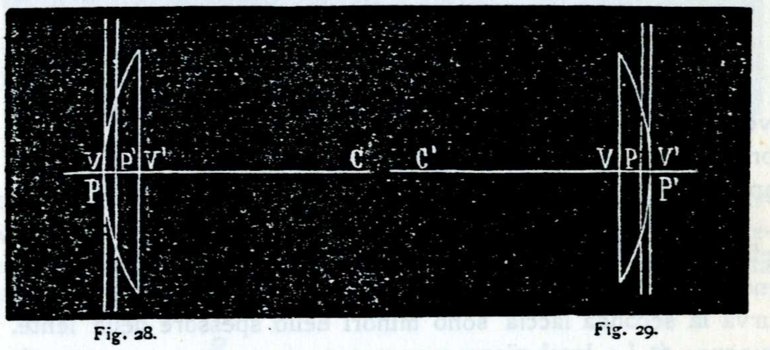

Fig. 28. Fig. 29.

(fig. 27) ed il secondo punto principale è sempre situato nell'ultimo terzo dello spessore medesimo.

Nella figura sono segnati anche i fuochi; la lente essendo divergente, il primo di essi è sempre a destra ed il secondo a sinistra.

65. *Lenti piano convesse.* — Se una delle faccie è piana e l'altra è convessa, la lente dicesi *piano-convessa.*

Possono darsi due casi: o r è positivo ed r' è infinito (figura 28), oppure è r infinito ed r' è negativo (fig. 29). Dividendo per r' il numeratore ed il denominatore delle espressioni (1), (2), (3), otteniamo:

$$\varphi = \frac{1}{\mu - 1} \frac{r}{1 - \frac{r}{r'} + \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{\Delta}{r'}},$$

$$VP = -\frac{1}{\mu} \frac{\frac{r}{r'}\Delta}{1 - \frac{r}{r'} + \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{\Delta}{r'}},$$

$$V'P' = -\frac{1}{\mu} \frac{\Delta}{1 - \frac{r}{r'} + \frac{\mu - 1}{\mu} \frac{\Delta}{r'}},$$

i quali valori per $r' = \infty$, come è nella lente di cui la figura 28 rappresenta una sezione, diventano:

$$\varphi = \frac{r}{\mu - 1}, \qquad VP = 0, \qquad V'P' = -\frac{\Delta}{\mu}.$$

Similmente se nei valori generali di φ, VP, $V'P'$ si dividono numeratori e denominatori per r, poi si suppone che r cresca fino all'infinito, i valori stessi si riducono a:

$$\varphi = \frac{R'}{\mu - 1}, \qquad VP = \frac{\Delta}{\mu}, \qquad V'P' = 0,$$

ove con R' si è rappresentato il valore assoluto $-r'$ del secondo raggio di curvatura. Queste formole valgono per la lente rappresentata nella figura 29.

Deduciamo da ciò: 1° che se μ è maggiore di uno come pelle lenti ordinarie, φ è sempre positiva; 2° che $V'P'$ pella lente la cui prima faccia è curva, e VP per quella di cui è curva la seconda faccia sono minori dello spessore della lente. Dunque: 1° Le lenti piano-convesse sono sempre convergenti; 2° Uno dei punti principali coincide sempre col vertice della faccia convessa, e l'altro si trova sempre nell'interno del corpo della lente.

Se per esempio supponiamo $\mu = \frac{3}{2}$, abbiamo pella lente della figura 28

$$\varphi = 2r, \qquad VP = 0, \qquad V'P' = -\frac{2}{3}\Delta;$$

e pella lente della fig. 29:

$$\varphi = 2R', \qquad VP = \frac{2}{3}\Delta, \qquad V'P' = 0.$$

In ogni caso la distanza fra i due punti principali è uguale ad un terzo di Δ come è approssimativamente pelle lenti biconvesse o biconcave di piccolo spessore.

66. *Lenti piano-concave.* — Nelle lenti che si dicono piano-concave una faccia è piana e l' altra è concava come nelle figure 30 e 31. Le formole relative a queste si deducono da quelle

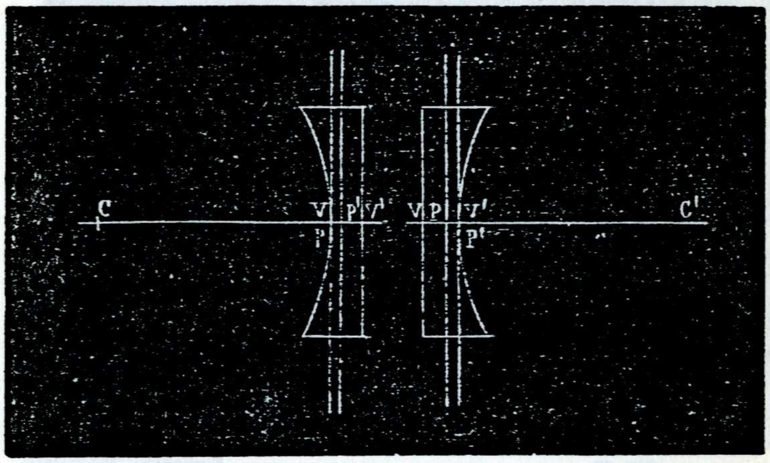

Fig. 30. Fig. 31.

delle lenti piano-convesse, osservando solo che i raggi di curvatura hanno segni contrarii. Pella prima lente (fig. 30) metteremo adunque $-R$ in luogo di r nelle formole della lente della fig. 28, ed otterremo:

$$\varphi = -\frac{R}{\mu - 1}, \qquad VP = 0, \qquad V'P' = -\frac{\Delta}{\mu}.$$

Pella lente della fig. 31 metteremo nelle formole dell' articolo precedente r' in luogo di $-R'$, od otterremo:

$$\varphi = -\frac{r'}{\mu - 1}, \qquad VP = \frac{\Delta}{\mu}, \qquad V'P' = 0.$$

queste formole mostrano

1°. Che le lenti piano-concave sono sempre divergenti;

2° Che uno dei punti principali cade nel vertice della faccia curva e l'altro giace nell'interno della lente alla distanza $\frac{\Delta}{\mu}$ dalla faccia piana, come pelle lenti piano-convesse.

67. *Lenti concavo-convesse o menischi.* — Per ultimo consideriamo il caso in cui una delle faccie è concava e l'altra è convessa (figure 32 e 33). Quando questo succede la lente dicesi *concavo-convessa* od anche *menisco.*

Pei menischi r ed r' hanno lo stesso segno, e quindi il prodotto $r r'$ è positivo, e φ ha il segno di ρ. Dunque un meni-

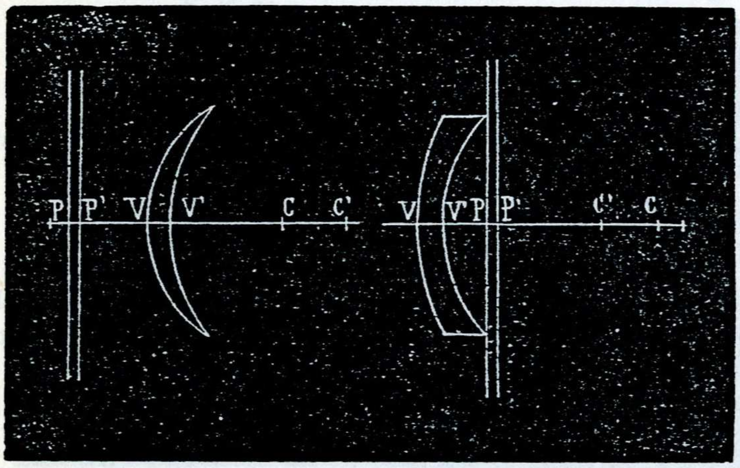

Fig. 32 Fig. 33

sco è convergente o divergente secondochè μ è positivo o negativo: è convergente se è soddisfatta la disuguaglianza

$$\Delta > \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r'),$$

ed è divergente se è soddisfatta la disuguaglianza

$$\Delta < \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r').$$

Distinguiamo tre casi:

Primo caso (fig. 32). Il valore assoluto del raggio di curvatura della faccia concava sia maggiore di quello del raggio di curvatura della faccia convessa. In questo caso la differenza $r - r'$ è negativa. Infatti se r ed r' sono entrambi positivi, la faccia convessa è la prima ed il raggio maggiore è r'; se i due raggi sono negativi ed uguali rispettivamente a $-R$ ed a $-R'$, la faccia convessa è la seconda, R è maggiore di R' e la differenza

$$r - r' = R' - R$$

è negativa. Siccome adunque Δ è una grandezza essenzialmente positiva, così è sempre soddisfatta la disuguaglianza

$$\Delta > \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r'),$$

e la lente è sempre convergente.

Secondo caso. — I due raggi di curvatura sieno uguali. Allora $r - r' = 0$; epperò anche qui è sempre

$$\Delta > \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r'),$$

e la lente è sempre convergente.

Terzo caso. — Il raggio di curvatura della faccia convessa sia, in valore assoluto, più grande di quello della faccia concava. In questo caso la lente può essere divergente o telescopica o convergente, a seconda del valore di Δ. Allora infatti la differenza $r - r'$ è positiva, e quindi è sempre possibile scegliere un valore dello spessore Δ, tale che sia soddisfatta la disuguaglianza

$$\Delta < \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r'),$$

o l'uguaglianza

$$\Delta = \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r'),$$

o la disuguaglianza

$$\Delta > \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r').$$

Per $\mu = \frac{3}{2}$ la lente è divergente, telescopica o convergente secondochè è

$$\Delta < 3(r - r'), \qquad \Delta = 3(r - r'), \qquad \Delta > 3(r - r').$$

Per le lenti di piccola grossezza, quali sono quelle che fanno parte dei nostri istrumenti ottici, la prima disuguaglianza è ordinariamente verificata: perciò nella pratica le lenti di questa specie sono divergenti.

Come esempio di lente concavo-convessa studiamo una lente a faccie concentriche. Se supponiamo r ed r' positivi, abbiamo in questo caso $\Delta = r - r'$, e se supponiamo $\mu > 1$ come è pelle lenti pratiche, abbiamo $\frac{\mu}{\mu - 1} > 1$. Dunque

$$\Delta < \frac{\mu}{\mu - 1}(r - r'),$$

e la lente è divergente. Per una tale lente abbiamo

$$\rho = -\Delta \cdot \frac{\mu - 1}{\mu}\Delta.$$

ossia

$$\rho = -\frac{\Delta}{\mu};$$

e quindi

$$\varphi = -\frac{\mu}{\mu - 1}\frac{rr'}{r - r'},$$

la quale formola si può anche scrivere

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\mu - 1}{\mu}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right).$$

La distanza focale così calcolata va all'infinito quando lo spessore $r - r'$ diminuisce fino a zero.

Pei menischi le distanze VP, $V'P'$ dei punti principali dai vertici delle faccie, date dalle formole (2') e (3'), hanno sempre il medesimo segno, cioè i due punti principali sono sempre situati entrambi dalla parte della convessità o dalla parte della concavità della rispettiva superficie della lente. Queste distanze poi hanno il segno dei raggi r ed r' od hanno il segno contrario secondochè φ è negativo o positivo; dunque i due punti principali sono situati dalla parte della convessità se la lente è convergente (fig. 32), e sono situati dalla parte della concavità se la lente è divergente (fig. 33).

Pel vetro a faccie concentriche, poc'anzi considerato come esempio, si ha

$$VP = r, \qquad V'P' = r',$$

e quindi i due punti principali coincidono col comune centro di curvatura delle due superficie.

68 *Determinazione grafica dei punti cardinali di una lente. Centro ottico.* — I punti cardinali di una lente si possono pure determinare graficamente. Basta a questo scopo determinare colla regola del numero 4 la retta di emergenza corrispondente ad una retta di incidenza parallela all'asse e la retta di incidenza corrispondente ad una retta di emergenza parallela all'asse; quella taglierà l'asse nel secondo fuoco e la retta di incidenza

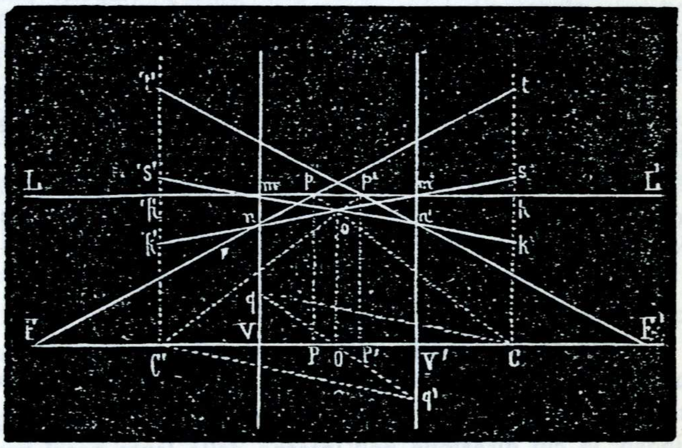

Fig. 34.

in un punto del secondo piano principale, questa taglierà l'asse nel primo fuoco e la retta di emergenza in un punto del primo piano principale.

Abbiasi per esempio una lente biconvessa (fig. 34); V, V' sieno i vertici, C, C' i centri di curvatura.

Io tiro la retta LL' parallela all'asse, e la considero come una retta d'incidenza; prendo sulla perpendicolare Ch condotta all'asse pel centro C il segmento

$$Ck \ \frac{1}{\mu} Ch,$$

tiro $s' m n' k$ e questa è la retta con cui coincide il raggio dopo la prima rifrazione; prendo $c' t' = \mu\, c' s'$, tiro $t' n F'$ e questa è la retta di emergenza: F' è il secondo fuoco, p' è un punto del secondo piano principale, P' sua proiezione sull'asse è il secondo punto principale. Nella stessa maniera trovo la retta di incidenza $F n p t$ che corrisponde alla $L L'$ considerata come retta di emergenza, e questa determina il primo fuoco F ed il primo punto principale P.

Ma è più comoda, e in questo caso più esatta la costruzione esposta, pel caso generale, al numero 44. Ragioneremo così: I punti p e p' ove la retta $L L'$ interseca i due piani principali che noi vogliamo determinare, sono tra loro coniugati ed hanno perciò un medesimo punto coniugato nel mezzo, che costituisce il corpo della lente. Questo punto, coniugato a p rispetto alla prima faccia della lente ed a p rispetto alla seconda, deve trovarsi ad un tempo sulla $m n'$, raggio rifratto dalla prima faccia, corrispondente al raggio incidente $L m$, e sul raggio $n m'$, che, rispetto alla seconda faccia, corrisponde ad $m' L'$. Esso è adunque in o, ove le rette $m n'$ ed $n m'$ si intersecano. Ma in un sistema di due soli mezzi due punti coniugati sono sempre in linea retta col centro di curvatura della superficie dividente [8 e 9], dunque le rette $C o$ e $C' o$ tagliano la retta $L L'$ nei punti p e p' cercati.

Avuti i punti p e p', le rette $p n$ e $p' n'$ determinano i due fuochi F ed F'.

Il punto O, piede della perpendicolare abbassata dal punto o sull'asse, è coniugato con P rispetto alla prima e con P' rispetto alla seconda superficie rifrangente. Perciò ad ogni raggio luminoso, la cui direzione nell'interno della lente passi per O, corrisponde una retta di incidenza passante per P ed una retta di emergenza passante per P'; e siccome P e P' sono punti nodali [59], così O è il punto nel quale si intersecano le direzioni che hanno nell'interno della lente tutti quei raggi di luce pei quali le rette di emergenza sono parallele alle rette di incidenza, ossia quei raggi di luce che attraversano la lente senza esserne deviati.

Questa osservazione somministra un modo di determinare il punto O con molta precisione, e quindi di controllare la costruzione del punto o che serve alla determinazione grafica dei punti cardinali. Si tirino pei centri C e C' due raggi di curvatura qualunque $C q$ e $C' q'$ tra loro paralleli: la retta $q q'$ taglia l'asse nel punto O. Infatti la retta $q q$ fa colle normali $C q$, $C' q'$ angoli uguali, epperò un raggio di luce che dopo la prima rifrazione coincida con $q q'$, dopo la seconda rifrazione emerge parallelo al cammino d'incidenza.

Il punto O che siamo stati condotti a considerare, al quale si era attribuita un' importanza maggiore di quella ch' esso ha in realtà, ha ricevuto il nome di *centro ottico.* Esso è nel corpo della lente se i due raggi di curvatura hanno segni contrarii, è fuori se hanno lo stesso segno; se i due raggi sono uguali in grandezza ed in segno, esso è all'infinito.

§ 3° *Lenti infinitamente sottili.*

69. *Definizione. — Valore della distanza focale. — Casi in cui la lente è convergente e casi in cui è divergente.* — Se si immagina che lo spessore di una lente vada diminuendo fino ad annullarsi, i punti cardinali della lente vanno accostandosi a posizioni limiti, che si determinano facendo $\Delta = 0$ nelle formole (1), (2), (3) del § precedente. La lente ideale che ha i punti cardinali in queste posizioni limiti è quella che noi diciamo *lente infinitamente sottile.*

Per $\Delta = 0$ la formola (1) dà pella distanza focale di una lente infinitamente sottile il valore:

$$\varphi = \frac{1}{\mu - 1} \frac{r r'}{r' - r},$$

che si può scivere:

$$\frac{1}{\varphi} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right). \qquad (1'')$$

È facile vedere che, se r ed r' hanno segni contrarii, il valore di φ dato da queste espressioni è positivo se r è positivo ed r' è negativo, ed è negativo nel caso contrario; che se r ed r' sono tutti e due positivi, φ è positivo se r' è maggiore di r, e che se r ed r' sono entrambi negativi, φ è positivo solo quando è $r > r'$. Dunque fra le lenti infinitamente sottili sono convergenti le biconvesse, le piano-convesse e quelle concavo-convesse nelle quali il raggio di curvatura della faccia concava è maggiore del raggio di curvatura della faccia convessa; sono invece divergenti le biconcave, le piano-concave e quei menischi nei quali il raggio di curvatura della faccia concava è minore di quello della faccia convessa.

70. *Figura schematica pello studio grafico degli effetti di una lente infinitamente sottile.* — Le formole [2] e [3] del paragrafo precedente dànno per $\Delta = 0$:

$$VP = 0. \qquad V'P' = 0.$$

Dunque i punti principali di una lente infinitamente sottile coincidono col punto, nel quale s'intendono riuniti i vertici delle due faccie della lente.

Una lente infinitamente sottile riesce così determinata mediante soli tre punti: il punto W (fig. 35) col quale coinci-

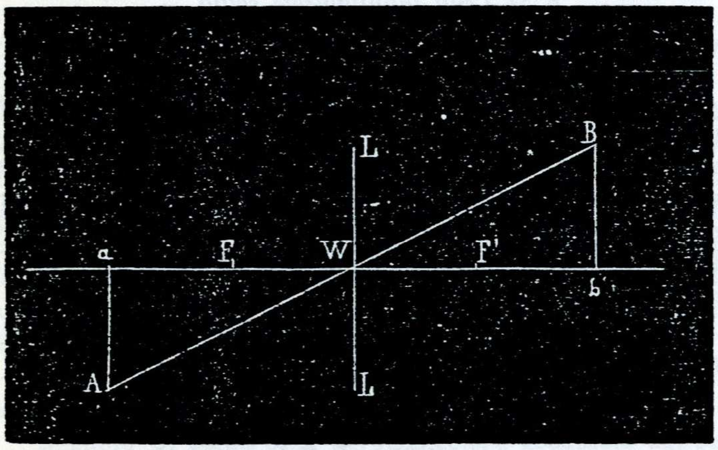

Fig. 35.

dono i vertici delle sue faccie e due punti F ed F' da parti opposte ed equidistanti dal punto W, i quali sono i due fuochi della lente. La lente è convergente, se, come nella figura, andando nel verso secondo cui si propaga la luce, questi tre punti si seguono coll'ordine F, W, F'; è divergente se i tre punti si seguono coll'ordine F', W, F.

Se manteniamo la convenzione fatta al numero 11 di sostituire nelle rappresentazioni grafiche alle vere figure rappresentanti la reale disposizione dei punti e delle linee figure alterate, nelle quali tutte le distanze dall'asse sieno moltiplicate per un numero grandissimo, noi dobbiamo rappresentare le due faccie della lente con un'unica retta $L\,W\,L$ perpendicolare all'asse. Questa retta, la quale rappresenta ad un tempo le due faccie della lente ed i due piani principali, diremo per brevità *lente;* denomineremo *vertice* il punto W dove la lente è intersecata dall'asse.

71. *Assi secondarii.* — *Due immagini coniugate sono prospettive rispetto al vertice della lente.* — Siccome pelle lenti i punti principali sono anche punti nodali [59], così per una lente infinitamente sottile, nella quale i due punti principali coincidono in W (fig. 35), ad ogni raggio incidente $A\,W$ passante per W corrisponde un raggio emergente $W\,B$ situato sul suo prolungamento. In altri termini:

In una lente infinitamente sottile ogni retta di incidenza passante pel vertice coincide colla corrispondente retta di emergenza.

Se $A\,W$ è un raggio emanato da un punto luminoso A, il suo raggio rifratto corrispondente $W\,B$ passerà pel punto B coniugato di A; dunque in una lente infinitamente sottile due punti coniugati sono sempre sopra di una medesima retta passante pel vertice. In grazia di questa proprietà la retta $A\,W$, che congiunge un punto A al vertice W della lente, dicesi *asse secondario* corrispondente a quel punto.

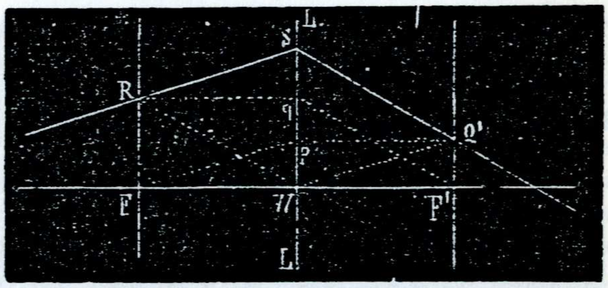

Fig. 36.

Dati due piani coniugati *a* A e *b* B, e data nel primo di essi una figura, od una immagine, l'immagine coniugata riesce determinata dalle intersezioni degli assi secondarii dei punti A della prima col secondo piano coniugato. Due immagini coniugate sono prospettive rispetto al vertice della lente.

72. *Determinazione grafica della retta d'emergenza corrispondente ad una retta d'incidenza data, o del punto coniugato con un punto dato.* — Queste considerazioni semplificano alquanto, pelle lenti infinitamente sottili, le costruzioni date al numero 60, onde trovare il raggio emergente che corrisponde ad un raggio incidente dato, oppure il punto coniugato ad un punto dato.

Le costruzioni, che possono servire a determinare il raggio emergente $S\,Q'$ che corrisponde ad un dato raggio incidente $R\,S$ (fig. 36), sono le seguenti.

1.° Tiro Rq parallela all'asse ed SQ' parallela alla qF' che unisce q al secondo fuoco.

2.° Conduco Fp parallela ad RS, poi pQ' parallela all'asse, e congiungo S con Q'.

3.° Tiro SQ' parallela alla RW.

4.° Tiro WQ' parallela ad RS, e congiungo S con Q'. È da osservarsi che il quadrilatero $RSQ'W$ è un parallelogrammo, del quale SW è una diagonale. L'altra diagonale è la retta RQ' non segnata in figura. Siccome le due diagonali si tagliano per metà, così si potrebbe trovare Q' tirando la retta che unisce R al punto di mezzo WS, e prolungandola fino al secondo piano focale.

Per trovare il punto B coniugato ad un punto dato A (figura 37), tiro Am parallela all'asse e congiungo mF'; tiro similmente AFn ed nB parallela all'asse; le due rette mF' ed nB si intersecano nel punto B cercato. Oppure tiro l'asse secondario AW, il quale interseca la retta mF', oppure la nB, nel punto B, che è il punto cercato.

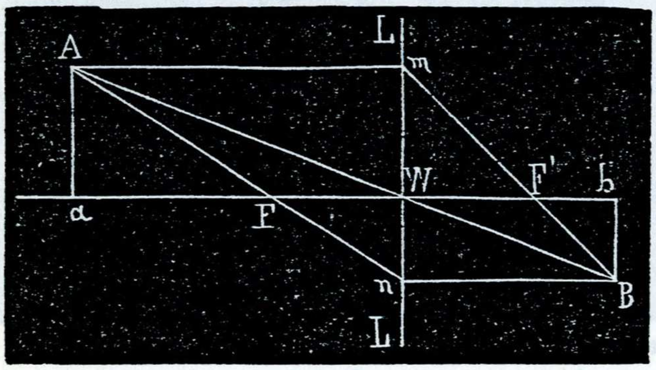

Fig. 37.

73. *Qualunque sistema di lenti è equivalente ad una lente infinitamente sottile; qualunque sistema diottrico è equivalente ad un sistema di due soli mezzi oppure ad una lente infinitamente sottile.* — Se si confrontano queste costruzioni con quelle esposte al numero 60 relative alle lenti di grossezza finita o ad un sistema qualunque di lenti, si vede come qualunque problema sulle lenti si possa ridurre al caso più semplice di una lente infinitamente sottile. Si dicano infatti P, P', F, F', i punti cardinali della lente o del sistema di lenti dato; si immagini una

lente infinitamente sottile, che abbia il vertice nel primo punto principale P e la cui distanza focale sia uguale a quella del sistema dato, talchè il suo primo fuoco coincida con F ed il secondo disti da F' di un tratto uguale a $P' P$. Se allora sarà proposto di trovare i raggi emergenti corrispondenti a dati raggi incidenti od i punti coniugati a punti dati, si determineranno questi raggi o questi punti, quali sarebbero se invece del sistema reale esistesse la lente infinitamente sottile immaginata; le rette ed i punti così determinati si trasporteranno parallelamente all'asse per un tratto uguale alla distanza $P P'$, e si avranno così le rette ed i punti cercati.

È appena necessario osservare come questo artifizio sia applicabile a qualunque sistema diottrico nel quale i due mezzi estremi abbiano il medesimo indice di rifrazione.

Queste considerazioni, unite a quelle esposte nel numero 40, dimostrano la seguente proposizione generale:

A qualunque sistema diottrico centrato corrisponde un sistema semplice di due soli mezzi separati da un'unica superficie oppure una lente infinitamente sottile, il quale sistema semplice o la quale lente dànno immagini che, trasportate parallelamente all' asse per una distanza uguale a quella dei punti principali, vengono a coincidere colle immagini somministrate dal sistema diottrico dato. Il sistema semplice, che così si può sostituire al sistema dato, è un'unica superficie rifrangente od è una lente infinitamente sottile, secondo che nel sistema dato i due mezzi estremi non hanno, od hanno il medesimo indice di rifrazione.

Per brevità diremo questo sistema di due soli mezzi o questa lente sottile: equivalente al sistema dato.

74. *Modo di agire delle lenti infinitamente sottili in alcuni casi importanti per le applicazioni.* — Ci serviremo di questa semplificazione nello studio degli istrumenti diottrici formati con lenti. Importa perciò che vediamo fin d'ora come sieno situate le immagini date dalle lenti infinitamente sottili per alcune posizioni tipiche dell'oggetto luminoso, le quali occorrono più spesso nelle applicazioni.

1.° Lenti convergenti. — *a* Se un oggetto luminoso $a\,A$ (fig. 37) od una immagine reale somministrata da altro sistema diottrico trovasi ad una distanza dalla lente maggiore della distanza focale $W F$, la sua immagine coniugata $b\,B$ cade a destra di F' ed è reale e rovesciata. Quanto più il punto a è lontano da W, tanto più l'immagine coniugata $b\,B$ s'avvicina al punto F e tanto più è piccola. Se l'oggetto va all' infinito la sua immagine coincide col punto F e le sue dimensioni si annullano. Se $Wa = 2\,WF$ è $Wb = 2\,WF$ ed $aA = bB$; le due immagini coniugate hanno allora la medesima grandezza.

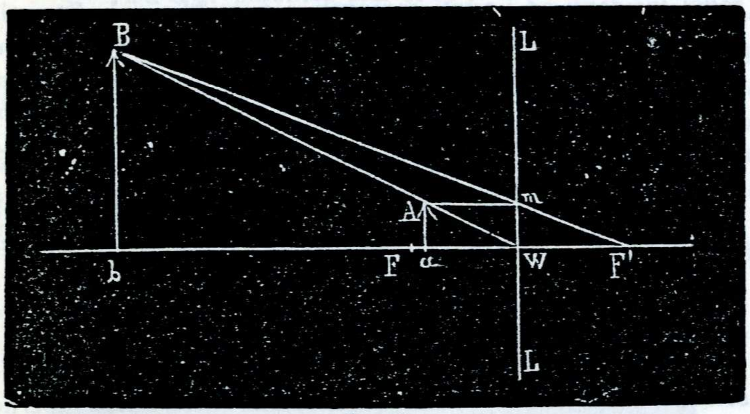

Fig. 38.

Per tutte le distanze Wa maggiori di $2\,WF$ l'immagine bB è più piccola dell'oggetto aA; per tutte le distanze Wa comprese tra WF e $2\,WF$ l'immagine è più grande dell'oggetto. In questo modo agiscono le lenti delle camere oscure e degli apparecchi di proiezione, e le lenti obbiettive dei microscopi e dei cannocchiali.

b) Se un oggetto od un'immagine reale data da altro sistema diottrico giace tra la lente W ed il primo fuoco F, per esempio in aA (fig. 38), la sua immagine coniugata bB è

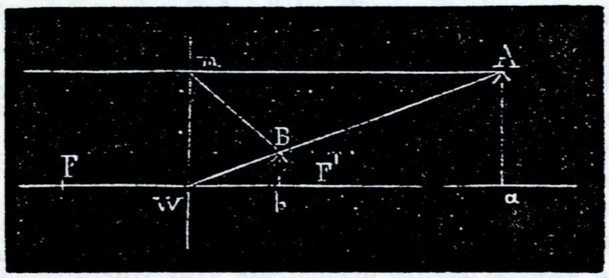

Fig. 39.

virtuale, diritta ed ingrandita; essa è tanto più lontana e tanto più grande quanto più l'oggetto aA è vicino al fuoco F. Ad un occhio, che guardi l'oggetto attraverso la lente, i raggi arrivano come se partissero dai singoli punti dell'immagine $B\ b$. Così funzionano i microscopi semplici e gli oculari convergenti de' microscopi composti e dei cannocchiali.

c) Supponiamo che a sinistra della lente W esista un apparecchio diottrico tale che se non esistesse la lente W desse di un dato oggetto un' immagine reale $a\ A$ (fig. 39); la esistenza della lente W a sinistra di questa immagine fa sì che

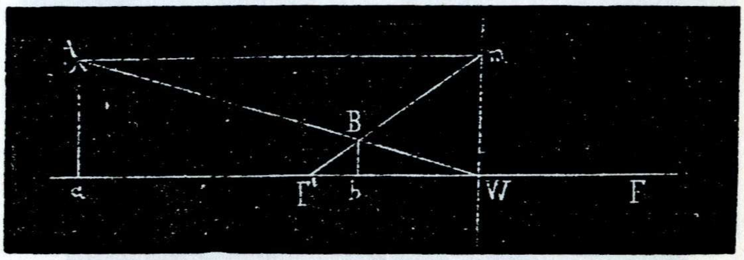

Fig. 40.

invece della immagine $a\ A$ stessa se ne formi un'altra $b\ B$ ad essa coniugata, diritta ed impicciolita. Così opera la lente di campo del così detto oculare di Campani.

2.° Lenti divergenti. — *a)* Se l' oggetto $a\ A$ (fig. 40) è a sinistra della lente (supposto sempre che la luce si propaghi da sinistra verso destra), la sua immagine coniugata è in $b\ B$,

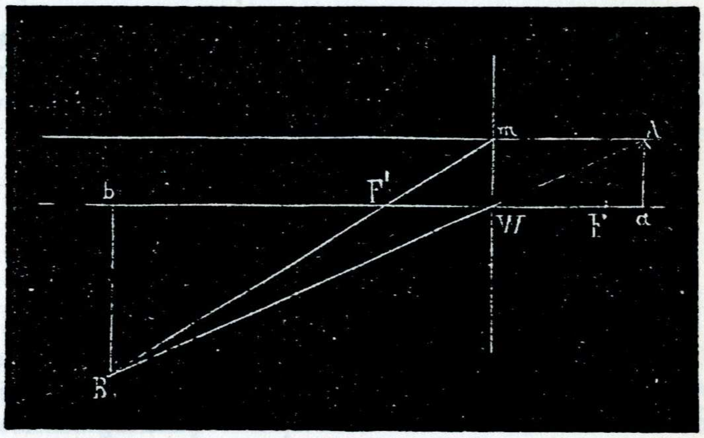

Fig. 41.

ravvicinata, diritta ed impicciolita. Così agiscono le lenti degli occhiali divergenti pei miopi.

b) Supponiamo che un sistema diottrico dia di un dato oggetto un'immagine reale $a\ A$ (fig. 41). Se a sinistra di questa, cioè tra essa ed il sistema diottrico, frapponiamo la lente divergente W in modo che il suo primo fuoco F sia a sinistra di a, essa ci dà una immagine virtuale di $b\,B$ rovesciata rispetto alla $a\,A$ e situata a sinistra di F'. Così opera l'oculare del cannocchiale di GALILEO.

c) Se ancora invece di lasciare che l'immagine reale $a\,A$ si formi, si ricevono i raggi sopra una lente divergente

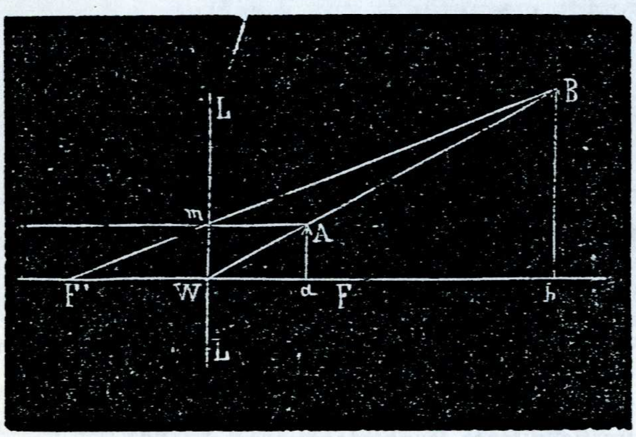

Fig. 42.

W (fig. 42), ma in modo che il primo fuoco F sia a destra di a, si ottiene una immagine reale $b\,B$ più distante dalla lente e più grande di $a\,A$. In simile maniera agisce in un obbiettivo acromatico la lente di *flint*.

§ 4° *Sistemi di due lenti.*

75. *Formole per la determinazione dei punti cardinali di un sistema di due lenti.* — Prima di studiare gli strumenti ottici formati con lenti è utile che ci occupiamo delle combinazioni di due lenti.

Siano date due lenti aventi l'asse comune (fig. 43); P_1, P_1' ed F_1' sieno i punti principali ed il secondo fuoco della prima; P_2, P_2', F_2 i due punti principali ed il primo fuoco della seconda; si chiamino φ_1 e φ_2 le distanze focali delle due lenti, e si rappresenti con Δ la distanza $P_1' P_2$ tra il secondo piano principale della prima lente ed il primo piano principale della seconda. Con questi dati si possono trovare per mezzo del cal-

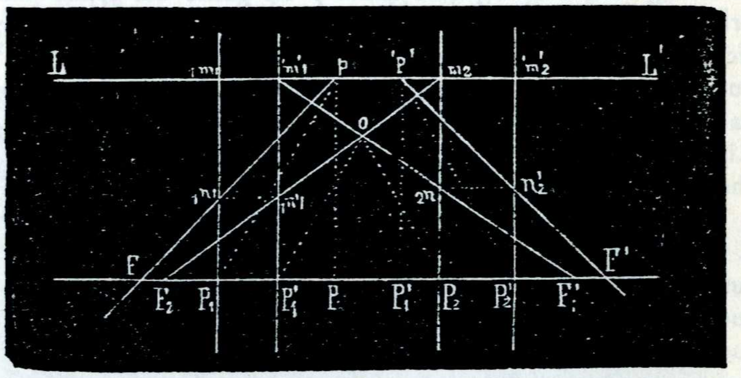

Fig. 43

colo o mediante costruzioni grafiche la distanza focale φ del sistema ed i suoi punti principali P e P'.

A fare col calcolo questa determinazione servono le formole (6'), (5'), (7') del numero 44. Facendo in queste formole

$$f' = -f = \varphi, \quad f_1' = -f_1 = \varphi_1, \quad f_2' = -f_2 = \varphi_2,$$

otteniamo

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}, \tag{6''}$$

$$P_1 P = \frac{\varphi_1 \Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}, \tag{5''}$$

$$P_2 P' = -\frac{\varphi_2 \Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}. \tag{7''}$$

e queste formole risolvono il problema.

76. *Soluzione grafica del medesimo problema.* — Per trovare i punti cardinali del sistema considerato per mezzo di una costruzione grafica potremmo servirci della regola generale [42], basterebbe tirare una retta $L\,L'$ parallela all'asse (fig. 43), e, considerandola come una retta di incidenza, determinare la corrispondente retta di emergenza; se questa è $p'n_2'$, il punto F', ove essa interseca l'asse, è il secondo fuoco, ed il punto p', ove essa interseca la retta $L\,L'$ è un punto del secondo piano

principale $p' P'$, il quale è incontrato dall'asse nel secondo punto principale P'. Similmente se supponiamo essere $n_1 p$ la retta di incidenza corrispondente alla $L L'$ considerata come retta di emergenza, F è il primo fuoco p un punto del primo piano principale e P il primo punto principale. Ma è più conveniente ricorrere anche qui alla costruzione studiata al numero 44, la quale fa dipendere la determinazione dei due piani principali da quella del loro coniugato nel mezzo frapposto ai due sistemi. Ripeteremo pel caso speciale che ora ci occupa i ragionamenti, che nel numero 44 ci hanno condotti a quella costruzione.

A quest'uopo immaginiamo i due punti p e p' ove la retta $L L'$ interseca i due piani principali del sistema; questi due punti sono tra loro coniugati, epperò nel mezzo frapposto alle due lenti essi hanno il medesimo punto coniugato. Dico che questo punto coniugato ai due punti p e p' è il punto o ove si intersecano le due rette $m_1' F_1'$ ed $m_2 F_2$. Infatti, come coniugato del punto p rispetto alla prima lente, quel punto deve trovarsi sulla $m_1' F_1'$, la quale rispetto alla prima lente, è la retta di emergenza corrispondente alla retta d'incidenza $L p$ passante per p. Similmente, come coniugato di p' rispetto alla seconda lente, quel punto deve giacere sulla retta $F_2 m_2$, che è la retta d'incidenza corrispondente alla retta di emergenza $p' L'$ che passa per p'. Dovendosi trovare ad un tempo sulle due rette $m_1' F_1'$ ed $F_2 m_2$, quel punto coincide colla loro intersezione o.

In virtù di questa proposizione i punti p e p' e quindi i punti P e P' si determinano in modo semplicissimo per mezzo del punto o. Infatti le due rette $o P_1'$, $p P_1$ debbono essere parallele, quali rette coniugate passanti pei due punti nodali: e similmente debbono essere parallele le due rette $o P_2$ e $p' P_2'$. Abbiamo dunque la regola:

Per determinare i due punti principali del sistema delle due lenti $P_1 P_1' F_1'$ e $F_2 P_2 P_2'$, tirate una retta indefinita $L L'$ parallela all'asse e le rette $m_1' F_1'$, $m_2 F_2$ le quali si intersecano in un punto o; conducete le rette $P_1 p$ e $P_2' p'$ parallele alle $o P_1'$ ed $o P_2$, ed i punti p e p', ove esse intersecano la $L L'$, appartengono ai due piani principali.

Ottenuti in questo modo i piani principali possono determinarsi immediatamente anche i fuochi. Tirisi infatti $n_1' n_1$ parallela all'asse; i punti n_1 ed n_1' sono coniugati rispetto alla prima lente. Dunque la retta $p n_1$ corrisponde alla $o n_1'$ rispetto alla prima lente ed alla $p' L'$ rispetto all'intiero sistema, e quindi interseca l'asse nel primo fuoco F. Si ottiene analogamente il secondo fuoco tirando $n_2\, n_2'$ parallela all' asse e conducendo poi $p'\, n_2'\, F'$.

77. *Applicazione ad alcune combinazioni, di cui si fa uso negli ordinari strumenti diottrici.* — Ci serviremo di questa co-

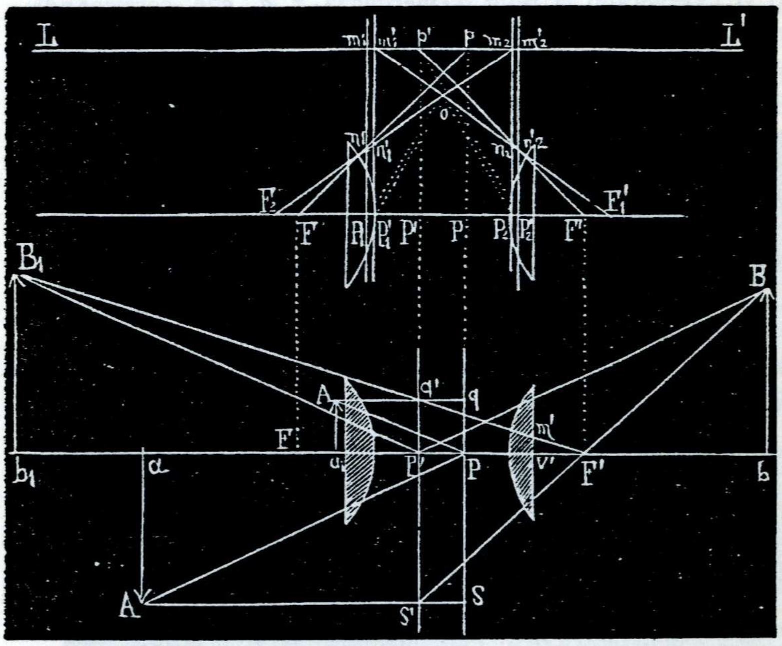

Fig. 44.

struzione per istudiare le proprietà di alcune combinazioni di due lenti, delle quali si fa uso negli ordinari istrumenti ottici.

a) Abbiasi in primo luogo un sistema di due lenti convergenti, per esempio di due lenti piano-convesse (fig. 44), così collocate, che i due fuochi F_2 ed F_1' cadano fuori del tratto $P_1'\, P_2$. La costruzione segnata nella parte superiore della figura identica a quella indicata nel numero precedente, dimostra che il sistema è convergente (come già si sapeva pella formola (6'') dell' articolo (75), che i fuochi cadono all' esterno e che i punti principali sono situati fra le due lenti. È poi evidente che invece di essere disposti nell'ordine $F\, P'\, P\, F$ i punti cardinali potrebbero riescire disposti anche nell'ordine $F\, P\, P'\, F'$.

La parte inferiore della figura 44, ove sono disegnati i piani principali ed i fuochi senza le costruzioni che hanno servito a determinarli, mostra come agisca il sistema. Se un oggetto od un'immagine reale data da un altro sistema ottico è situata in a_1 A_1 tra il primo fuoco F ed il primo punto principale P, il sistema ne dà una immagine virtuale b_1 B_1 diritta ed ingrandita come una lente infinitamente sottile nel caso *b*) [74]. In B_1 infatti si intersecano la retta d'emergenza $F' q'$ che corrisponde alla retta di incidenza A_1 q parallela all'asse, e la retta $P' B_1$ parallela ad A_1 P_1 che è la retta di emergenza corrispondente a quest'ultima. In questo modo agiscono i microscopi semplici

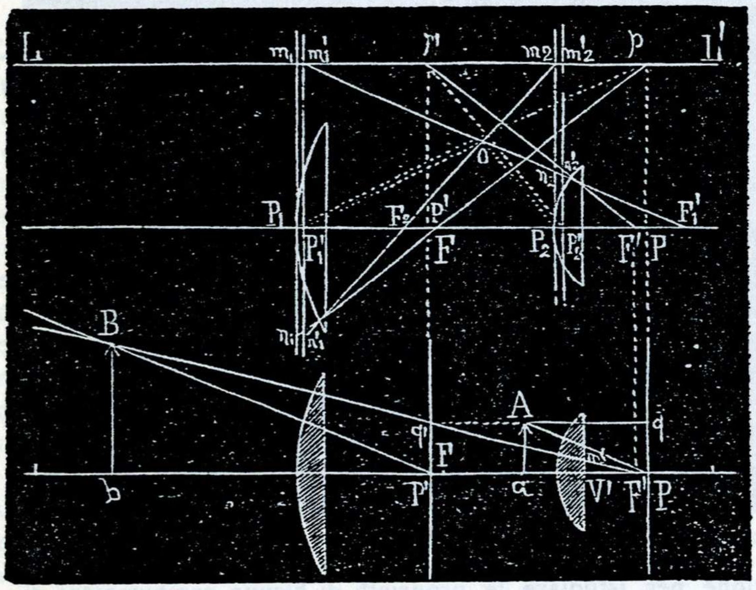

Fig. 45.

formati con due lenti, i quali si dicono *doublets*, e gli oculari di *Ramsden* o *positivi* che si adoperano nei cannocchiali astronomici e nei microscopi.

Se invece l'oggetto o l'immagine reale è in a A più lontano dal sistema che il fuoco F, la sua immagine è in $b\,B$ ed è reale e rovesciata (lenti infinitamente sottili, caso *a*), numero 74): perchè in B si intersecano la $P' B$ parallela ad $A\,P$ e la $s' B$ secondo cui emerge il raggio $A\,s$ parallelo all'asse. In questo modo agiscono gli obbiettivi delle camere oscure e le lenti degli apparecchi di proiezione.

b) Si abbiano ancora due lenti convergenti (fig. 45), ma queste sieno così disposte, che il primo fuoco F_2 della seconda lente cada sul segmento $P_1' P_2$ e che il secondo fuoco F_1' della prima lente sia fuori di questo segmento ad una piccola distanza da P_2'. La parte superiore della figura mostra le costruzioni colle quali si possono determinare i punti cardinali del sistema: dal punto o, ove si intersecano le rette $m_1' F_1'$ ed $m_2 F_2$, si sono tirate le rette $o P_1'$ ed $o P_2$, ed ai punti P_1 e P_2' si sono condotte a queste le parallele $P_1 p$, $P_2' p'$, le quali determinano colle loro intersezioni p e p' colla retta $L L'$ le posizioni dei due piani principali; si condussero poi le rette $n_1 n_1'$, $n_2 n_2'$ parallele all' asse, e finalmente le rette $p n_1$ e $p' n_2'$, che colle loro intersezioni coll' asse determinano i due fuochi F ed F'. I punti cardinali sono dunque disposti nell'ordine $P' F F' P$ e di essi i due primi sono nell' interno del sistema ed i due altri fuori di esso.

Nella parte inferiore della figura, ove sono segnati i punti cardinali senza le linee che hanno servito a determinarli, suppongasi che la retta $A a$ rappresenti una immagine reale di un oggetto data da altro sistema ottico, immagine che esisterebbe in questa posizione se il sistema che consideriamo non esistesse. Per trovare l' immagine coniugata prodotta dal sistema basta tirare la retta $A P$ e per P' condurre la $P' B$ ad essa parallela, poi tirare $q A q'$ parallela all'asse e segnare la $F' q'$; il punto B ove $F' q'$ interseca la $P' B$ è il punto coniugato di A, e la retta $B b$ perpendicolare all' asse è l' immagine della $A a$. Dunque la immagine, che se non esistesse il sistema tenderebbe a formarsi in $a A$ tra il fuoco F ed il punto principale P, è dal sistema trasformata nella immagine $B b$ virtuale, diritta ed ingrandita (lenti infinitamente sottili, caso *b*), numero 74). Così agiscono le lenti dell'oculare di Campani o *negativo* che si adopera nei microscopi e nei cannocchiali.

c) Si abbiano due lenti convergenti (fig. 46) così disposte che il primo fuoco F_2 della seconda coincida o sia vicinissimo al secondo punto principale P_1' della prima, mentre il secondo fuoco F_1' di questa cada sul segmento $P_1' P_2$ alquanto avanti di P_2. La costruzione indicata nella parte superiore della figura fa vedere che in questo caso il primo punto principale P si trova vicinissimo a quello P_2 della seconda lente, ed il secondo punto principale P' giace a sinistra ed a sensibile distanza dal punto P_1, che il secondo fuoco è nell'interno del sistema poco innanzi ad F_1' e che il primo fuoco F coincide o quasi col primo punto principale della prima lente. I punti cardinali si succedono qui nell'ordine $P' F F' P$, e solo il primo di questi punti è situato fuori del sistema.

Vedesi dalla parte inferiore della figura come di un oggetto o di un'immagine reale $a\,A$ posta davanti del piano P' il sistema dia una immagine reale capovolta $B\,b$. Il punto B è otte-

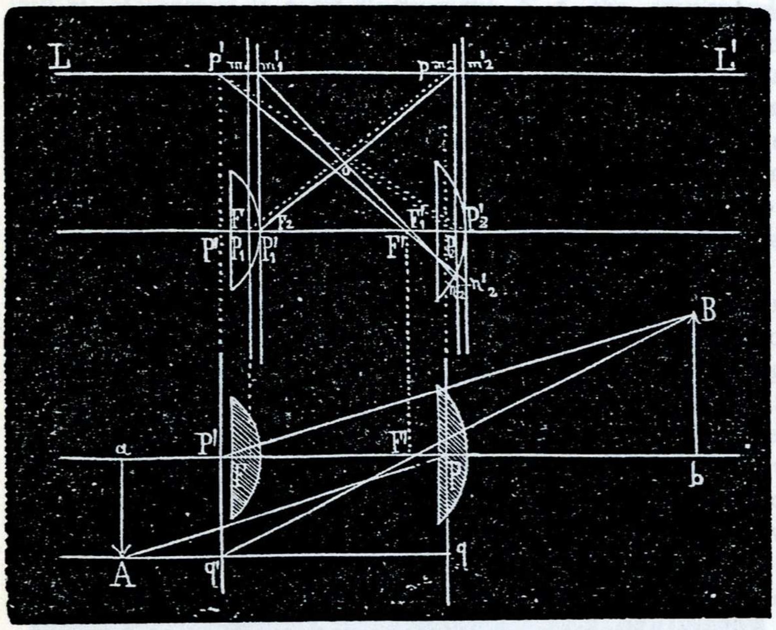

Fig. 46.

nuto tirando $P' B$ parallela alla $A\,P$, tirando $A\,q\,q'$ parallela all'asse, congiungendo q' con F' e prolungando $q'\,F$ fino all'incontro con $P' B$. Questa è la disposizione e l'azione delle due lenti che nel cannocchiale terrestre servono a raddrizzare l'immagine.

d) La prima lente sia convergente, per esempio biconvessa (fig. 47), la seconda sia divergente, per esempio pianoconcava, e sieno le due lenti così poste, che il primo fuoco F_2 della seconda lente sia a destra del secondo fuoco F_1' della prima. Questo succede in particolare quando, come in figura, la distanza focale della lente divergente è maggiore in valore assoluto di quello della lente convergente e le due lenti sono molto vicine. La parte superiore della figura mostra come si determinino i punti cardinali: i due punti principali P, P' sono a sinistra del sistema e tra loro vicini, il secondo fuoco F è a destra; il primo fuoco, non disegnato nella figura, sarebbe a sinistra ad una distanza uguale a $P' F'$. Il sistema opera adunque come un'unica lente convergente. Un punto A situato a sinistra ad una distanza da P maggiore della distanza focale $P' F'$ (vedi

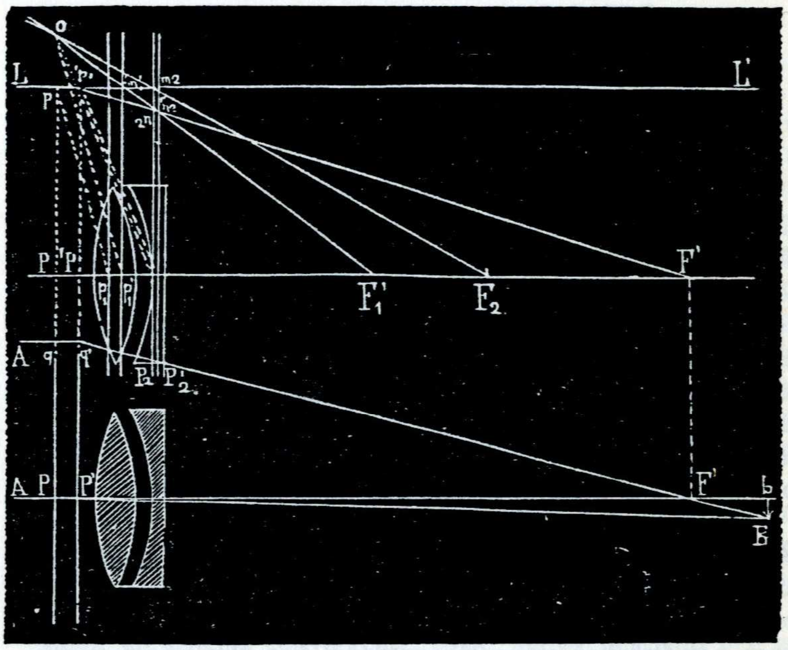

Fig. 47.

la parte inferiore della figura) ha per coniugato il punto B posto a destra di F' ove si intersecano la $P' B$ parallela ad $A P$ e la $q' F$ condotta pel punto q' ove la $A q$ parallela all'asse interseca il secondo piano principale: un oggetto situato alla medesima distanza avrebbe un' immagine $b B$ reale e rovesciata. Così operano gli obbiettivi dei cannocchiali, i quali onde togliere la colorazione delle immagini, si fanno, in generale, con due lenti di vetri diversi poste a contatto.