CAPO TERZO

STRUMENTI FORMATI CON LENTI.

78. *Classificazione.* — Uno strumento diottrico può essere *semplice* o *composto:* è semplice se i suoi effetti si possono praticamente ottenere con una sola lente di piccolo spessore: è composto nel caso contrario. Circa questa definizione si debbono notare due cose: 1° Benchè a questo sistema di lenti non telescopico sia equivalente una lente infinitamente sottile [73] tuttavia non tutti gli istrumenti non telescopici sono strumenti semplici, perchè non sempre quella lente infinitamente sottile è in condizioni tali, che i suoi effetti si possono ottenere praticamente con una lente di piccola grossezza posta al suo posto. 2° Uno strumento semplice può, come uno strumento composto, essere formato di parecchie lenti; ma mentre negli apparecchi composti l'impiego di più lenti è necessario per avere le immagini nella posizione voluta, negli apparecchi semplici tale impiego non ha altro scopo che quello di fare che queste immagini sieno nette ed acromatiche.

Degli strumenti semplici alcuni sono destinati a dare degli oggetti immagini reali, altri son fatti per essere posti fra l'occhio dell'osservatore e l'oggetto, e debbono produrre di questo una immagine virtuale in condizioni convenienti per essere osservata.

Gli strumenti composti sono tutti destinati ad essere applicati all'occhio e a dare immagini virtuali ingrandite di oggetti di grandezza apparente troppo piccola per poter essere osservata direttamente. Ma un oggetto può avere una piccola grandezza apparente, o perchè piccolo o perchè lontano: nel primo caso lo strumento composto, che serve ad aiutare la visione, è un *microscopio,* nel secondo caso è un *cannocchiale.*

SEZIONE PRIMA

Strumenti semplici.

§ 1.° *Strumenti semplici che danno immagini reali.*

79. *Camera oscura, apparecchi di proiezione, microscopio solare e microscopio foto-elettrico — Ingrandimento.* — Se un oggetto aA è collocato davanti ad una lente convergente (vedi numero 74 *a*), fig. 37) o ad un sistema convergente di lenti (vedi numero 77, *a*), fig. 44) ad una distanza dal primo piano principale maggiore della distanza focale, si forma di esso un' immagine bB reale e rovesciata situata al di là del secondo fuoco principale ad una distanza $F'b$ inversamente proporzionale alla distanza aF dell'oggetto dal primo fuoco, e di grandezza maggiore o minore dell'oggetto, secondochè aF è minore o maggiore della distanza focale. Gli strumenti destinati a produrre immagini reali sono tutti fondati su questo principio. I principali sono i seguenti.

a) La *camera oscura*. La parte diottrica di questo strumento, l'*obbiettivo*, è per lo più formata di due lenti *acromatiche*. Ciascuna di queste è un sistema di due lenti una convessa di *crown* e l'altra concava di *flint*, poste a contatto, e formanti insieme un sistema convergente, come quello descritto nell' articolo 77 *d*) (fig. 47). Le due lenti acromatiche poi sono disposte l' una rispetto all' altra come le due lenti del sistema studiato al numero 77 *a*) fig. 44), e formano un sistema convergente, i cui punti cardinali sono generalmente posti nell'ordine F, P', P, F'. Siffatta disposizione ha per oggetto di diminuire le aberrazioni, ed i motivi che la consigliano non possono essere studiati qui. L'obbiettivo è adattato ad una apertura praticata in una parete di uno spazio chiuso da tutte le altre parti, e quindi oscuro; e degli oggetti esterni, situati a distanza conveniente, dà immagini che si ricevono sopra un piano, sia per disegnarvele seguendone i contorni con una matita, sia perchè agiscano sopra una piastra impressionabile della fotografia. In questo ultimo caso, che è il più importante, lo spazio chiuso è costituito da una cassa parallelepipeda di legno, una delle pareti della quale porta al centro l' obbiettivo. La parete opposta è formata con una lastra di vetro smerigliato, sulla quale si vedono dipingersi le immagini, e che si può togliere a volontà onde collocare al suo posto il telaio portante la piastra impressionabile. Acciocchè anche variando fra certi limiti la distanza dell'oggetto, l'immagine si possa ricevere sempre sulla parete posteriore della camera oscura, è necessario che questa parete sia mobile e si possa avvicinare più o meno all'obbiettivo; perciò la cassa si suole fare di due parti, una delle quali è fissa, mentre l'altra può farsi penetrare più o meno dentro di essa. Oltre a ciò una delle due lenti acromatiche dell'obbiettivo può, mediante un rocchetto ed una dentiera, accostarsi all'altra od allontanarsi da essa, il che permette di far variare alquanto la posizione dei punti cardinali del sistema, ed imprimere così all'immagine reale, che deve formarsi sul fondo della cassa, piccoli spostamenti.

b) *Gli apparecchi di proiezione.* Danno questi una immagine ingrandita di piccoli oggetti trasparenti; come pitture su vetri, immagini fotografiche su collodio, ecc. Una lente convergente a corto fuoco riceve la luce del sole, o di un arco voltaico, o di una lampada Drummond, o di una lampada ordinaria e la concentra sull'oggetto che è collocato *rovesciato* in vicinanza del suo fuoco. La luce, che attraversa le diverse parti dell'oggetto in proporzione della loro trasparenza, è ricevuta da una seconda lente convergente o da un sistema convergente, il cui primo piano principale dista dall'oggetto di un tratto un po' maggiore della sua distanza focale. Questo sistema dà perciò una immagine *raddrizzata* dell'oggetto, la quale può rendersi visibile ad una adunanza numerosa, ricevendola sopra uno schermo bianco, che ne diffonda la luce in tutte le direzioni. La coincidenza del piano dell'immagine con quello dello schermo si ottiene spostando la lente per mezzo di un apposito rocchetto.

c) Il *microscopio solare* e il *microscopio foto-elettrico* non differiscono essenzialmente dagli apparecchi di proiezione. La luce solare, o quella di un arco voltaico, fissato da un regolatore, è da un sistema di due lenti convergenti raccolta sopra l'oggetto, il quale è situato fra due vetri. Il sistema diottrico destinato a proiettarne l'immagine è ordinariamente formato con tre lenti convergenti, e si può fare avanzare o retrocedere con un rocchetto e con una dentiera.

In tutti questi apparecchi dicesi *ingrandimento* il rapporto di similitudine tra l'immagine reale e l'oggetto, ossia (fig. 37 e 44) il rapporto $\frac{B\,b}{A\,a}$. A calcolarlo servono le formole [II''], [II'] del numero 61, le quali, se diciamo m l'ingrandimento, ci danno:

$$m = \frac{x'}{x}, \quad \text{oppure} \quad m = 1 - \frac{x'}{\varphi} = -\left(\frac{x'}{\varphi} - 1\right).$$

In queste formole le lettere x, x', φ hanno i soliti significati, ed hanno il segno voluto dalla solita convenzione. La prima di esse dice che l'ingrandimento è uguale al rapporto della distanza dell'immagine del secondo piano principale alla distanza dell'oggetto dal primo piano principale. La seconda dice che il valore assoluto dell'ingrandimento è uguale al rapporto tra la distanza dell'immagine dal secondo piano principale e la distanza focale del sistema diottrico, diminuito dell'unità. Il segno negativo, di cui è affetto il secondo membro di questa formola, ricorda che, rispetto all'oggetto, l'immagine è rovesciata.

Se x' è minore di x, m è minore dell'unità, l'immagine è minore dell'oggetto, e quello che noi abbiamo denominato ingrandimento è in realtà un impicciolimento. Questo succede quasi sempre nella camera oscura.

§ 2.° *Strumenti semplici che dànno immagini virtuali.*

80. *Microscopio semplice.* — Sono strumenti semplici destinati a dare immagini virtuali il *microscopio semplice* e gli *occhiali*.

Le lenti convergenti ed i sistemi convergenti di lenti possono servire a rendere distinta la visione di oggetti posti a piccolissima distanza dall'occhio, epperò a vedere con un grande angolo visuale, ingranditi gli oggetti minuti.

A quest'uopo l'oggetto deve collocarsi tra il primo fuoco ed il primo punto principale della lente. Sia (fig. 48) $a\,A$ l'oggetto, e sieno F, F', P, P', i due fuochi e i due punti principali del sistema; alla retta d'incidenza $A\,P$, passante pel primo punto principale, corrisponde la retta di emergenza $P'\,B$ ad essa parallela, e passante pel secondo punto principale; alle rette di incidenza $F\,A\,m$, $A\,n$, delle quali la prima passa per F e la seconda è parallela all'asse, corrispondono le rette di emergenza $m'\,m\,B$ ed $n'\,F'$, la prima parallela all'asse, e la seconda passante per F'. L'intersezione B di una di queste colla $P'\,B$ è il punto coniugato del punto A, e $b\,B$ è l'immagine dell'oggetto $a\,A$. Pel caso di una lente infinitamente sottile la costruzione è esposta all'art. 74, fig. 38. La immagine

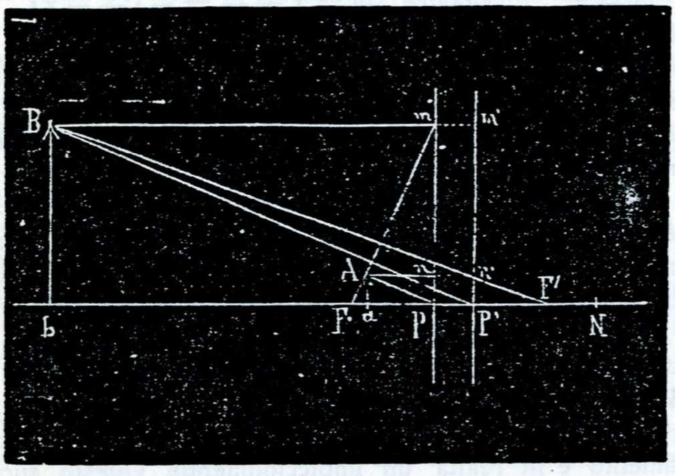

Fig. 48.

$b\,B$ è virtuale e diritta; la visione riesce netta se $b\,B$ si trova dall'occhio alla distanza pella quale l'occhio è accomodato.

Così adoperato un sistema convergente dicesi *microscopio semplice*. Quando questo strumento non è fatto con una lente sola, è per lo più costituito da due lenti disposte come è detto all'articolo 77 *a* (fig. 44), ed allora è conosciuto col nome francese *Doublet*.

81. *Ingrandimento del microscopio semplice.* — Il centro dell'occhio sia in N; se la visione è nitida, $N b$ è la distanza, per la quale l'occhio è accomodato. Diciamo δ questa distanza, e rappresentiamo con δ' la distanza della visione distinta dell'occhio stesso. Se l'osservatore guardasse l'oggetto $a\,A$ ad occhio nudo, lo vedrebbe colla grandezza apparente $\frac{a\,A}{\delta'}$; guardando attraverso allo strumento egli vede, invece dell'oggetto, l'immagine $B\,b$ colla grandezza apparente $\frac{B\,b}{\delta}$: il rapporto di questa seconda grandezza apparente alla prima è l'*ingrandimento* del microscopio semplice. Dicendolo m, abbiamo:

$$m = \frac{B\,b}{A\,a} \cdot \frac{\delta'}{\delta}.$$

Ora, se rappresentiamo con φ la distanza focale del sistema diottrico e con d la distanza $P'N$ del centro N dell'occhio dal secondo piano principale, noi abbiamo, applicando la seconda formola [II'] del numero 61, ed osservando che, pella nostra convenzione dei segni, la distanza $P'b$ è negativa:

$$\frac{Bb}{Aa} = 1 + \frac{bP'}{\varphi} = 1 + \frac{\delta - d}{\varphi}.$$

e quindi

$$m = \left(1 + \frac{\delta - d}{\varphi}\right)\frac{\delta'}{\delta}. \tag{1}$$

Questo valore di m dipende dai valori di d, di δ' e di δ.

1.° L'ingrandimento cresce col diminuire di d, ossia avvicinando l'occhio allo strumento. Il suo valore massimo corrisponde a $d = o$, ed è

$$M = \frac{\delta'}{\delta} + \frac{\delta'}{\varphi}.$$

2.° Rimanendo costante il rapporto $\frac{\delta'}{\delta}$, l'ingrandimento cresce con δ'.

3.° L'ingrandimento diminuisce crescendo δ se il centro dell'occhio si trova fra la lente ed il suo fuoco principale, cresce se il centro dell'occhio è al di là del fuoco.

La formola (1) infatti si può scrivere:

$$m = \frac{\delta'}{\varphi}\left(1 + \frac{\varphi - d}{\delta}\right),$$

e l'ultimo termine di questa espressione, il quale è positivo nel primo caso e negativo nel secondo, diminuisce col crescere di δ.

Per $\delta = \delta'$ è

$$m = 1 + \frac{\delta' - d}{\varphi} \tag{1'}$$

e per $\delta = \infty$, è invece

$$m = \frac{\delta'}{\varphi}. \tag{1''}$$

Entrambi questi valori di m crescono con δ': sono maggiori pe' presbiti che pei miopi.

Siccome quando si guardano oggetti vicini si accomoda per abitudine l'occhio al *punctum proximum*, così l'ipotesi, pella quale è valida la formola (1'), è quella che si verifica più spesso.

La formola (1'') dimostra, che quando l'occhio è accomodato per una distanza infinita, l'ingrandimento è indipendente da *d*.

Questa formola si può anche dimostrare direttamente. Infatti nell'ipotesi dell'occhio accomodato all'infinito i raggi partiti

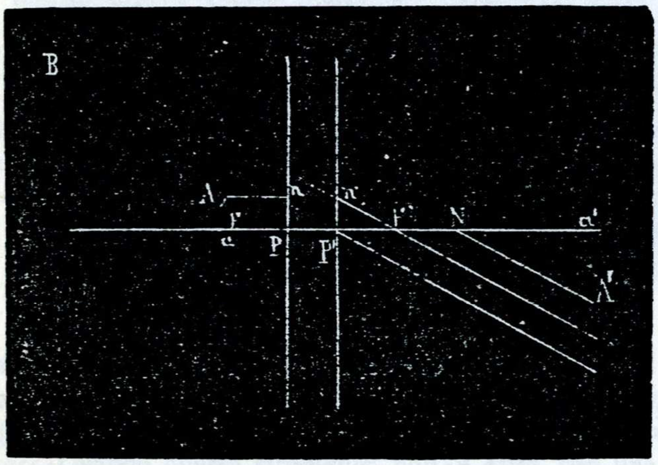

Fig. 49.

da un punto qualunque A dell'oggetto (fig. 49) debbono emergere paralleli dallo strumento, epperò l'oggetto dev' essere collocato nel piano focale AF. Nell'occhio si forma allora l'immagine del punto A nel punto d' intersezione della retina colla retta visuale NA' parallela ad AP, mentre quella del punto a si fa sulla retta visuale Na' parallela ad aP; l'oggetto è visto coll'angolo visuale APF, ossia $\frac{Aa}{\varphi}$. Ma ad occhio nudo l'oggetto si guarderebbe dalla distanza δ', e si vedrebbe coll'angolo visuale $\frac{Aa}{\delta'}$, dunque l'ingrandimento è $\frac{Aa}{\varphi} : \frac{Aa}{\delta'}$, ossia

$$m = \frac{\delta'}{\varphi}.$$

82. *Ingrandimento apparente.* — Bisogna distinguere l'ingrandimento del quale abbiamo parlato, che è quello che veramente misura l'attitudine del microscopio semplice ad aiutare

la visione dei piccoli oggetti, dall'*ingrandimento apparente,* che offrono le lenti quando si adoperano tenendole a distanza dall'occhio ed in modo che questo vegga lateralmente gli oggetti vicini a quello che si osserva, per esempio il tavolo che lo sostiene. In questo caso infatti l'osservatore, che non può dimenticare che l'oggetto si trova su questo tavolo, giudica essere alla medesima distanza l' immagine virtuale che egli vede; e siccome le grandezze lineari di oggetti situati alla medesima distanza dall'occhio sono proporzionali alle loro grandezze apparenti [56], così l'osservatore giudica la grandezza lineare dell'oggetto tante volte maggiore della vera quante volte la grandezza apparente dell' immagine virtuale contiene quella dell'oggetto. L' ingrandimento apparente è adunque uguale al rapporto della grandezza apparente dell'immagine alla grandezza apparente dell'oggetto. Dicendolo m_1 e ponendo $aP = h$, $PP' = \Delta$ (fig. 48), abbiamo:

$$m_1 = \frac{Bb}{Nb} : \frac{Aa}{Na} = \frac{Bb}{Aa}\,\frac{Na}{Nb}$$

Ma pella similitudine dei triangoli BbP', AaP, si ha

$$\frac{Bb}{Aa} = \frac{P'b}{Pa} = \frac{\delta - d}{h}$$

ed inoltre è

$$Na = d + \Delta + h\,, \quad Nb = \delta\,,$$

dunque:

$$m_1 = \frac{\delta - d}{h}\,\frac{d + \Delta + h}{\delta}$$

Ora dalla [I'] [61] si ha

$$h = \frac{\varphi\,(\delta - d)}{\delta - d + \varphi}\,;$$

sostituendo in m_1 ad h questo suo valore, ed operando facili riduzioni, si ottiene così:

$$m_1 = \frac{d\,(\delta - d - \Delta) + \varphi\,(\delta + \Delta) + \Delta\,\delta}{\varphi\,\delta}\,. \tag{3}$$

La somma $d + (\delta - d - \Delta)$ vale $\delta - \Delta$, e quindi non varia col variare di d. Ora si sa, che se la somma di due quantità è costante, il loro prodotto ha il valor massimo quando esse sono uguali tra di loro; dunque il massimo valore che possa assumere il prodotto $d\,(\delta - d - \Delta)$, è quello che corrisponde al valore di d che soddisfa alla equazione

$$d = \delta - d - \Delta,$$

ossia al valore

$$d = \frac{\delta - \Delta}{2}.$$

A questa distanza della lente dall'occhio corrisponde il massimo ingrandimento apparente.

Se la lente è sottile così che Δ sia trascurabile, si ha

$$d = \frac{\delta}{2},$$

ossia l'ingrandimento apparente è massimo quando, mentre la visione è nitida, la lente dista dall'occhio della metà della distanza per la quale l'occhio è accomodato.

Per lo più accadrà che l'osservatore accomodi inconsciamente l'occhio alla distanza Na, alla quale egli sa essere l'oggetto. Allora il massimo ingrandimento apparente si ha quando la lente sottile è a metà della distanza fra l'occhio e l'oggetto.

83. *Occhiali.* — Una lente collocata davanti ad un occhio forma con questo un sistema diottrico, i punti cardinali del quale variano col variare della posizione e della forma della lente. Con lenti appropriate si può fare sì che nel sistema composto cadano sulla retina le immagini coniugate di oggetti posti fuori dei limiti della visione distinta; si possono in altri termini, modificare questi limiti, e fare che un occhio presbite [54] possa vedere distintamente alla piccola distanza, alla quale torna comodo tenere i piccoli oggetti per osservarli minutamente, o che un occhio miope [54] vegga distintamente a grandi distanze. Le lenti adoperate a questo uso si dicono *occhiali.*

Nello studiare le proprietà degli occhiali possiamo considerare questi come fatti con lenti infinitamente sottili; sarà in ogni caso facile vedere [73] quali sieno le piccolissime modificazioni da farsi ai risultati, onde tener conto dello spessore, sempre molto piccolo, delle lenti.

Per assegnare la forma delle lenti confacienti alla visione distinta di un dato individuo, distinguiamo i due casi: egli è presbite od è miope.

Primo caso. — Occhiali pei presbiti. — Gli occhiali per un presbite debbono rendere possibile a questo, che ad occhio nudo non vede se non a distanze maggiori di una data δ_1 più grande della distanza normale della visione distinta, di vedere tuttavia distintamente un oggetto formato di parti minute, per esempio una pagina di un libro, tenendo questo oggetto alla distanza a cui torna comodo tenerlo, ed alla quale le parti minute che importa vedere appariscono con un angolo visuale sufficiente, distanza che pegli oggetti artificiali è appunto quella del *punctum proximum* dell'occhio normale, e che rappresenteremo con δ. Perciò la lente deve essere tale da dare di un punto posto alla distanza δ dall'occhio una immagine virtuale posta alla distanza δ_1. Supponendo le distanze δ e δ_1 misurate a partire dal primo punto nodale dell'occhio, oppure dal centro N dell'occhio ridotto (fig. 50), e dicendo inoltre d la distanza WN della lente dal punto nodale stesso, le distanze dei due punti coniugati or nominati dalla lente sono:

$$\delta - d \quad \text{e} \quad \delta_1 - d.$$

Dando a queste distanze il segno negativo, perchè sono misurate in verso contrario a quello della propagazione della luce, e sostituendole ad x e ad x' nella formola [I'] del numero 61 qui trascritta:

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\varphi}, \qquad [I']$$

abbiamo

$$-\frac{1}{\delta_1 - d} + \frac{1}{\delta - d} = \frac{1}{\varphi},$$

e di qui:

$$\varphi = \frac{(\delta_1 - d)(\delta - d)}{\delta_1 - \delta}. \qquad (1)$$

Pel presbite δ_1 è maggiore di δ, dunque, essendo sempre positivi i due fattori del numeratore, φ è positivo, e la lente deve essere convergente.

Se supponiamo che d sia di 25 millimetri, come è prossimamente nella pratica, e che la distanza normale δ sia di 25 centimetri, la (1) dà in millimetri:

$$\varphi = 225\,\frac{\delta_1 - 25}{\delta_1 - 250}.$$

Per l'occhio armato di una lente convergente diventa *punctum remotum* il punto coniugato, rispetto alla lente, al *punctum remotum* dell'occhio semplice. Se l'occhio semplice è emmetropico, il *punctum remotum* dell'occhio armato di lente coincide col fuoco anteriore di questo; se l'occhio semplice è ipermetropico, quel punto è più lontano, ma non è in generale, all'infinito. Gli occhi presbiti muniti di occhiali, diventano adunque, in generale, *brachimetropici*.

84. *Secondo caso. — Occhiali pei miopi* — Pel miope il *punctum remotum* è ad una distanza finita δ_1, talora molto piccola. Per correggere un occhio così conformato, e porlo nelle condizioni di un occhio emmetropico, bisogna collocargli dinanzi una lente atta a dare di un punto posto a distanza infinita una immagine virtuale alla distanza δ_1 dall'occhio: il secondo fuoco di questa lente deve coincidere col *punctum remotum* dell'occhio. Ciò richiede che la distanza focale φ della lente soddisfaccia all'equazione

$$\varphi = -(\delta_1 - d). \qquad (2)$$

Siccome $\delta_1 - d$ è sempre positiva, così φ è negativa, e la lente dev'essere divergente.

Mentre per effetto della lente divergente si allontana fino all'infinito il *punctum remotum*, si allontana necessariamente anche il *punctum proximum*. Se l'occhio è sano e giovane quel punto non oltrepasserà ordinariamente la distanza della visione distinta dall'occhio emmetropico normale [54]; ma se l'ampiezza dell'accomodamento, di cui l'occhio è capace, fosse minore della normale, potrebbe accadere che l'occhio armato di lente e reso emmetropico diventasse nel tempo stesso presbite.

V'hanno occhi brachimetropici nei quali la distanza δ_1 è così piccola, da obbligare l'osservatore ad avvicinare gli oggetti all'occhio in modo incomodo, ed allora egli adopera occhiali anche per osservare oggetti minuti e vicini, anche per leggere. Occhiali calcolati colla (2) possono, in generale, servire anche per questo caso, ma bastano e sono preferibili occhiali meno divergenti. L'uso di occhiali meno divergenti è necessario quando l'occhio non può rendersi emmetropico senza diventare presbite.

Se il miope volesse esaminare oggetti molto minuti, che per essere veduti con un angolo visuale sufficiente richiedessero di essere portati ad una distanza dall'occhio minore di quella del *punctum proximum*, occorrerebbe anche a lui una lente convergente; ma non è questo l'uso ordinario degli occhiali.

85. *Ingrandimento degli occhiali.* — Siano aA (fig. 50) un segmento di retta perpendicolare all'asse preso sull'oggetto che si guarda, e bB la sua immagine virtuale data dalla lente W.

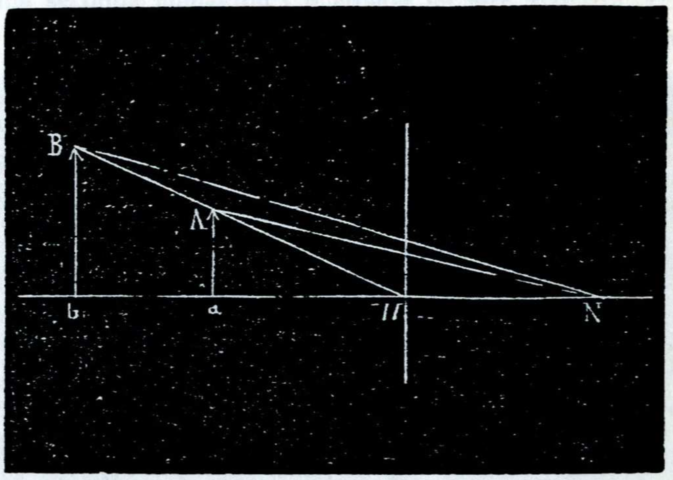

Fig. 50.

La grandezza apparente dell'oggetto, guardato ad occhio nudo dalla distanza aN sarebbe $\frac{Aa}{aN}$, ossia rappresentando ancora con δ la distanza aN normale della visione distinta, $\frac{Aa}{\delta}$; la grandezza apparente della sua immagine è invece $\frac{Bb}{bN}$ ossia, dicendo δ_1 la distanza bN, $\frac{Bb}{\delta_1}$. Siccome chi adopera gli occhiali ha ordinariamente una idea della vera distanza dell'oggetto guardato, così per le ragioni svolte all'articolo 82, egli è condotto ad attribuire all'oggetto una grandezza che sta alla grandezza vera come la seconda grandezza apparente sta alla prima. Gli occhiali adunque dànno un *ingrandimento apparente*. Dicendolo m, abbiamo:

$$m = \frac{bB}{aA}\frac{\delta}{\delta_1};$$

ma

$$\frac{bB}{aA} = \frac{Wb}{Wa} = \frac{\delta_1 - d}{\delta - d},$$

dunque

$$m = \frac{\delta_1 - d}{\delta - d} \frac{\delta}{\delta_1},$$

od anche

$$m = \frac{1 - \frac{d}{\delta_1}}{1 - \frac{d}{\delta}}.$$

Questa formola mostra che il valore di m è maggiore o minore dell' unità secondochè δ_1 è maggiore o minore di δ; dunque gli occhiali dei presbiti dànno un vero ingrandimento apparente, quelli dei miopi danno un apparente impicciolimento. In ogni caso m è tanto più diverso dall'unità, quanto più la distanza d della lente dall'occhio è grande.

SEZIONE SECONDA

Strumenti Composti.

§ 3° *Generalità sugli strumenti composti.*

86. *Struttura ed azione degli strumenti composti.* — Gli strumenti composti sono tutti formati di due sistemi ottici detti l'uno *obbiettivo*, l' altro *oculare*. Il primo è sempre convergente, e dà dell'oggetto, che si vuole osservare, una immagine reale, rovesciata; l'altro, che può essere convergente o divergente, serve ad osservare questa immagine, ed agisce come un microscopio semplice.

Le figure 51 e 52 mostrano la disposizione generale ed il modo generale d'agire degli strumenti composti. In entrambe le figure F_1, P_1, P_1' F_1', sono i punti cardinali dell'obbiettivo, F_2, P_2, P_2', F_2' i punti cardinali dell'oculare; ma nella prima l'oculare è supposto convergente, e nella seconda divergente; nella prima il punto F_2 è a sinistra di P_2 ed il punto F_2' è alla destra di P_2'; nella seconda F_2 è a destra ed F_2' a sinistra de' rispettivi punti principali.

L'oggetto $a\,A$ si colloca a sinistra di F_1, l'occhio alla destra dell'oculare. Dell'oggetto $a\,A$ l'obbiettivo dà un' immagine $b\,B$ reale e rovesciata [74], e le distanze dell'oggetto e delle lenti sono così regolate, che di questa immagine $b\,B$ l'oculare dia una seconda immagine $c\,C$ situata ad una distanza dall'occhio uguale a quella per la quale questo è accomodato.

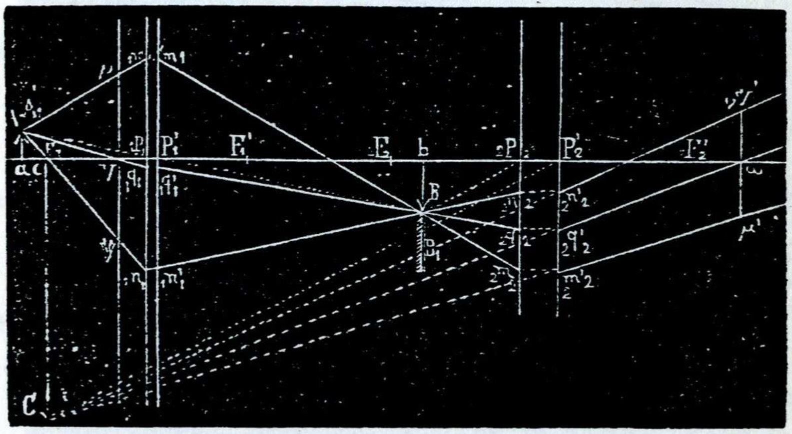

Fig. 51.

Se l'occhio è accomodato per una distanza finita anteriore, l'immagine $b\,B$ si deve trovare a destra di F_2. Allora l'oculare agisce come la lente considerata all'articolo 74, 1° *b*) se è convergente, o come la lente studiata all'articolo 74, 2° *b*) se è divergente, dà di $b\,B$ una immagine virtuale, diritta ed ingrandita $c\,C$. Questo è il caso supposto nelle figure 51 e 52, e si presenta sempre per gli occhi brachimetropici e spesso pegli emmetropici.

Se l'occhio è accomodato per una distanza infinita l'immagine $b\,B$ deve cadere nel piano focale passante per F_2. Allora i raggi partiti da un punto qualunque dell'oggetto $a\,A$ emergono paralleli; per esempio quelli partiti dal punto A emergono paralleli alla retta $B\,P_2$: C è all'infinito. Questo caso si verifica quando chi adopera l'istrumento ha l'occhio emmetropico e non fa alcuno sforzo di accomodamento: è il caso che, perchè conducente a costruzioni ed a formole più semplici, si considera come normale nello studio degli strumenti.

Se finalmente l'occhio è ipermetropico ed è accomodato per raggi convergenti, l'immagine bB deve cadere a sinistra del fuoco F_2. Allora l'oculare darebbe una immagine reale situata a destra dello strumento, dietro la testa dell'osservatore, se questa non intercettasse la luce; l'occhio ravvicina questa immagine e la fa cadere sulla retina. Questo caso è anormale ma si può presentare.

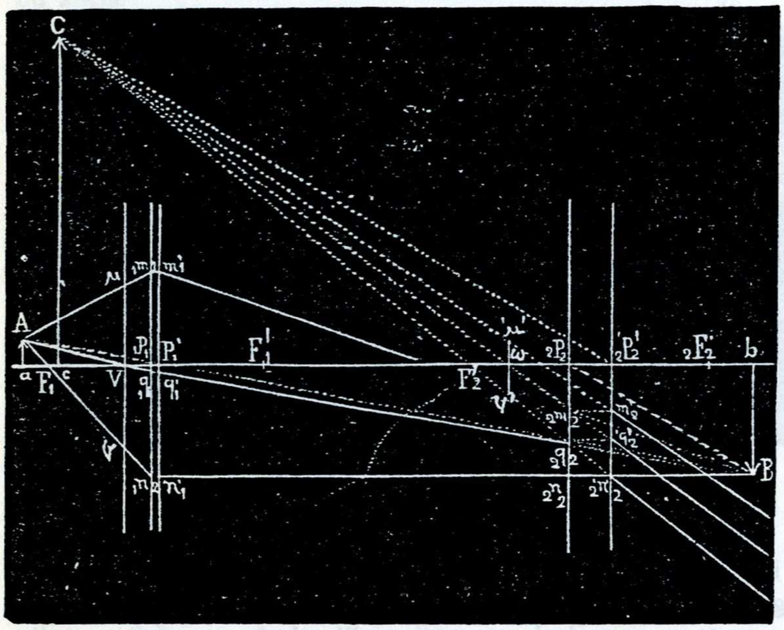

Fig. 52.

In ogni caso l'immagine del punto A, che si forma sulla retina, coincide col punto d'intersezione della retina con la retta che congiunge il centro dell'occhio al punto C. Vedesi facilmente che l'oggetto guardato attraverso allo strumento apparisce rovesciato o diritto secondochè l'oculare è convergente od è divergente.

87. *Ingrandimento.* — Gli strumenti composti hanno tutti per iscopo di permettere di vedere gli oggetti con un angolo visuale maggiore di quello, sotto cui apparirebbero, guardati ad occhio nudo. Il rapporto dell'angolo visuale, con cui si vede la retta cC, all'angolo visuale, sotto il quale apparirebbe la retta oA, guardata ad occhio nudo, dicesi l'*ingrandimento* dello strumento.

Diciamo m l'ingrandimento, δ la distanza per cui l'occhio è accomodato mentre si serve dello strumento, δ' la distanza dalla quale si guarderebbe l'oggetto ad occhio nudo, d la distanza del centro dell'occhio dal secondo piano principale P_2' dell'oculare, D il valore assoluto della distanza $a\,P_1$ dell'oggetto dal primo piano principale dell'obbiettivo; l'angolo visuale sotto cui si vede l'immagine $c\,C$ data dallo strumento è $\frac{c\,C}{\delta}$, e quello con cui l'oggetto $a\,A$ si vedrebbe ad occhio nudo è $\frac{a\,A}{\delta'}$; l'ingrandimento è

$$m = \frac{c\,C}{\delta} : \frac{a\,A}{\delta'},$$

ossia

$$m = \frac{c\,C}{a\,A}\,\frac{\delta'}{\delta}. \tag{1}$$

Possiamo scrivere anche

$$m = \frac{c\,C}{b\,B}\,\frac{b\,B}{a\,A}\,\frac{\delta'}{\delta}. \tag{1'}$$

Ora la prima delle formole [II'] del numero 61, applicata all'obbiettivo, coll'avvertenza di dare alla distanza D, misurata in verso opposto a quello della propagazione della luce, il segno negativo, dà

$$\frac{b\,B}{a\,A} = \frac{1}{1 - \frac{D}{\varphi_1}} = -\frac{\varphi_1}{D - \varphi_1}.$$

La seconda delle formole [II'] su citate, applicata all'oculare, coll'avvertenza di considerare come negativa la distanza $P_2'c$, dà similmente:

$$\frac{c\,C}{b\,B} = 1 + \frac{P_2'c}{\varphi_2} = 1 + \frac{\delta - d}{\varphi_2} = \frac{\varphi_2 + \delta - d}{\varphi_2}.$$

Colla sostituzione di questi valori, la [I'] diventa

$$m = -\frac{\varphi_1}{D - \varphi_1} \cdot \frac{\varphi_2 + \delta - d}{\varphi_2} \cdot \frac{\delta'}{\delta}. \tag{2}$$

Questa formola si può anche scrivere

$$m = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\frac{\delta'}{D-\varphi_1}\left(1+\frac{\varphi_2-d}{\delta}\right). \qquad (2')$$

Siccome l'oggetto è sempre situato a sinistra di F_1 [86], così la differenza $D - \varphi$ è sempre positiva; quindi è sempre positivo il fattore $\frac{\varphi_1}{D-\varphi_1}$. Siccome poi l'immagine $c\,C$ è sempre, rispetto al fuoco F_2', situata dalla parte, dalla quale, rispetto all'occhio, è situato il punto pel quale questo è accomodato, così $\varphi_2 + \delta - d$ ha sempre il segno di δ, ed il fattore $\frac{\varphi_2+\delta-d}{\varphi_2\,\delta}$ ha il segno φ_2. Dunque il valore di m è negativo se φ_2 è positivo, se cioè l'oculare è convergente, è positivo se φ_2 è negativo, se cioè l'oculare è divergente; ciò significa che lo strumento fa apparire l'oggetto rovesciato se l'oculare è convergente, diritto se l'oculare è divergente.

Alla medesima conclusione siamo stati condotti considerando le costruzioni grafiche, per mezzo delle quali si trova l'immagine $c\,C$ dell'oggetto $a\,A$ [86].

Facendo crescere fino all'infinito la distanza δ, per la quale l'occhio è accomodato, il valore (2') dell'ingrandimento si accosta al limite

$$m_1 = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\frac{\delta'}{D-\varphi_1}; \qquad (3)$$

e siccome si considera come normale la condizione di uno strumento quando questo è aggiustato per un occhio accomodato ad una distanza infinita [86], così il valore di m_1 dato dalla (3) si deve considerare come valore *normale* dell'ingrandimento. Esso è indipendente dalla distanza d dell'occhio dello strumento.

Negli strumenti con grande ingrandimento la distanza focale φ_2 è sempre molto piccola; e per lo più la frazione $\frac{\varphi_2-d}{\delta}$ è trascurabile a fronte dell'unità. In questa ipotesi si può, qualunque valore abbia δ, calcolare l'ingrandimento colla formola semplificata (3).

In quanto al valore di δ' da porsi nella formola, distinguiamo i due casi: o lo strumento è un microscopio od è un cannocchiale.

Nel primo caso l'oggetto per essere guardato ad occhio nudo si porta alla distanza del *punctum proximum*; δ' rappresenta adunque questa distanza. La (3) mostra che m_1 è proporzionale a δ'; l'ingrandimento del microscopio è maggiore pei presbiti che pei miopi.

Nel secondo caso l'oggetto non si può avvicinare: ad occhio nudo esso si guarderebbe dalla stessa distanza, da cui si guarda col cannocchiale, e siccome ordinariamente a fronte di tale distanza è trascurabile la lunghezza del cannocchiale, così si può porre nelle formole $\delta' = D$. Si ha allora

$$m = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\frac{D}{D-\varphi_1}\left(1 + \frac{\varphi_2 - d}{\delta}\right). \tag{4}$$

$$m_1 = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\frac{D}{D-\varphi_1} \tag{5}$$

E se, come d'ordinario, la distanza D dell'oggetto è grandissima, noi possiamo sostituire a $\dfrac{D}{D-\varphi_1}$ il limite, verso cui tende questo quoziente quando si fa crescere D fino all'infinito. Questo limite è $= 1$, dunque pei cannocchiali destinati ad osservare oggetti lontani:

$$m = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(1 + \frac{\varphi_2 - d}{\delta}\right). \tag{6}$$

$$m_1 = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}. \tag{7}$$

88. *Luogo dell'occhio o punto oculare.* — Sia V il vertice della prima superficie dell'obbiettivo, e sia $V\mu = V\nu$ il raggio del circolo che limita questa superficie, ossia la *semiapertura* dell'obbiettivo (fig. 51 e 52). Fra i raggi partiti da un punto qualunque A dell'oggetto consideriamo i tre AV, $A\mu$, $A\nu$, e di questi tracciamo la traiettoria attraverso il sistema diottrico; i raggi rifratti dall'obbiettivo sono rispettivamente $q_1' B q_2$, $m_1' B m_2$, $n_1' B n_2$, e le rette d'emergenza dallo strumento intiero sono $C q_2' \omega$, $C m_2' \mu'$, $C n_2' \nu'$. Dei raggi partiti dal punto A entrano nello strumento quelli compresi nel cono $A\mu\nu$, che ha per base la faccia anteriore dell'obbiettivo; emergendo dall'obbiettivo, questi raggi formano il cono $B m_1' n_1'$, ed emergendo dall'oculare, formano il cono $C m_2' n_2'$. L'asse del cono $A\mu\nu$ è AV,

quello del cono $B\, m_1'\; n_1'$ è $q_1'\, q_2$, e quello del cono emergente è $C q_2'\, \omega$, retta di emergenza corrispondente al raggio $A\, V$. Similmente i raggi partiti da un altro punto qualunque dell'oggetto formano, emergendo, un pennello, il cui asse è la retta di emergenza corrispondente al raggio incidente che passa per V. Gli assi di tutti i pennelli emergenti sono dunque rette di emergenza corrispondenti a raggi incidenti passanti tutti per un medesimo punto V, epperò si intersecano mutualmente in un medesimo punto, coniugato di V [26]. Questo punto è ω ove la retta $C q_2'$ interseca l'asse.

Ora affinchè l'occhio riceva dei raggi mandati dal punto A la massima parte possibile, conviene che il centro della pupilla sia collocato sopra la retta $C\omega$, asse del pennello emergente. Similmente per ricevere la massima parte della luce mandata da un altro punto dell'oggetto, il centro della pupilla deve collocarsi sull'asse del cono emergente corrispondente a quel punto. Dunque per ricevere la massima quantità di luce da tutti i punti dell'oggetto deve collocarsi il centro della pupilla nel punto ω, pel quale passano gli assi di tutti i pennelli emergenti. Per questo motivo Biot ha dato al punto ω, coniugato del vertice della faccia anteriore dell'obbiettivo, il nome di *luogo dell'occhio* o di *punto oculare*.

Per determinare la posizione del punto oculare basta disegnare per mezzo delle regole date al numero 60, la traiettoria attraverso il sistema di un raggio passante per V; oppure determinare, colle costruzioni insegnate nel medesimo articolo 60, il piano coniugato al piano $\mu\, V\, \nu$, oppure calcolare la posizione di questo piano coniugato per mezzo delle formole del numero 61. Se, come succede sempre nei cannocchiali, la distanza $V P$ è molto piccola a fronte della distanza $P_1'\, P_2$, si può semplificare il calcolo, ed ottenere tuttavia una approssimazione sufficiente, supponendo che V coincida con P_1. In tale ipotesi il punto coniugato con V rispetto all'obbiettivo coincide con P_1', e per avere ω non si ha che da cercare il punto coniugato a P_1' rispetto all'oculare. Detta d la distanza $P_2'\omega$ cercata, e Δ la distanza $P_1'\, P_2$ compresa fra il secondo piano principale dell'obbiettivo ed il primo piano principale dell'oculare, ed osservando che, giusta la convenzione dei segni, Δ deve considerarsi come negativa, si ha dalla (I') del numero 61:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\varphi_2},$$

da cui

$$d = \frac{\varphi_2 \Delta}{\Delta - \varphi_2}. \tag{8}$$

Siccome, se φ_2 è positivo, Δ è maggiore di φ_2, così questa formola ci dice che d è positivo o negativo se è positiva o negativa la distanza focale φ_2; se l'oculare è convergente, il punto oculare è a destra di P_2', se l'oculare è divergente il punto oculare è a sinistra di P_2'; nel primo caso quel punto è, per lo più, fuori dello strumento, nel secondo caso è, per lo più, nell'interno: lo è sempre quando l'oculare è formato con una sola lente.

89. *Anello oculare.* — Il piano perpendicolare all'asse nel punto oculare ω è coniugato al piano $\mu V \nu$ tangente alla prima superficie rifrangente dello strumento, i punti μ', ν' ove quel piano è intersecato dalle rette di emergenza $C m_2'$, $C n_2'$ corrispondenti alle rette d'incidenza $A\mu$, $A\nu$, sono coniugati ai punti μ e ν, ed il circolo descritto in quel piano col centro in ω e col raggio $\omega\mu'$ è l'immagine del circolo $\mu\nu$, che limita la prima faccia dell'obbiettivo. A tutti i raggi incidenti passanti entro il circolo $\mu\nu$ corrispondono perciò rette di emergenza passanti entro il circolo $\mu'\nu'$; tutti i raggi di luce, che entrano nello strumento, se emergono, emergono secondo rette intersecanti tutte il piano $\mu'\nu'$ in punti situati entro il circolo $\mu'\nu'$. Entro a questo circolo passano, come in un anello, tutti i pennelli emergenti, da qualunque punto essi sieno partiti. Perciò questo circolo fu denominato da Biot *circolo* od *anello oculare.*

Se il punto oculare è all'esterno dello strumento, si suole porre alquanto innanzi ad esso un diaframma portante nel centro un'apertura circolare di diametro maggiore del diametro dell'anello oculare; l'occhio deve collocarsi contro questo diaframma onde ricevere la massima quantità di luce. Se invece il punto oculare si trova nell'interno dello strumento, l'occhio si troverà in condizioni tanto migliori quanto più vicino esso si collocherà all'ultima superficie.

Per calcolare il raggio del circolo oculare basta applicare le formole [II'] del numero 61 prima all'obbiettivo considerando come punto luminoso il punto μ, poi all'oculare considerando come punto luminoso il punto coniugato a μ rispetto all'obbiettivo, e come suo punto coniugato il punto μ'. Dicendo v la distanza VP_1, R la semiapertura $V\mu$ dell'obbiettivo, R_1

la distanza dall' asse del punto coniugato con μ rispetto all' obbiettivo, r il raggio del circolo oculare, e d, come sopra, la distanza $P_2' \omega$, ed osservando che la distanza v dev'essere presa col segno negativo, otteniamo dalla prima delle formole [II'], applicata all'obbiettivo:

$$\frac{R}{R_1} = 1 - \frac{v}{\varphi_1},$$

e dalla seconda, applicata all'oculare:

$$\frac{r}{R_1} = 1 - \frac{d}{\varphi_2};$$

e dividendo membro a membro la prima di queste due uguaglianze per la seconda:

$$\frac{R}{r} = \frac{\varphi_1 - v}{\varphi_2 - d} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1}. \qquad (9)$$

Per $v = o$ questa formola si riduce alla

$$\frac{R}{r} = \frac{\varphi_2}{\varphi_2 - d}, \qquad (9')$$

ponendo nella quale invece di d il suo valore (8), otteniamo

$$\frac{R}{r} = -\frac{\varphi_2}{\frac{\varphi_2^2}{\Delta}}, \qquad (9'')$$

od anche

$$\frac{R}{r} = \frac{\Delta}{d}. \qquad (9''')$$

Il segno (—) significa, che, quando d è positiva, il circolo oculare è un'immagine *rovesciata* della periferia della faccia anteriore dell'obbiettivo.

L' ultima formola si può dimostrare direttamente osservando che nell'ipotesi di $v = o$ i punti m_1' e μ' sono tra loro coniugati rispetto all' oculare, e che perciò, se si tirassero le rette $m_1' P_2$, $P_2' \mu'$, queste sarebbero parallele. Risulterebbero così i due triangoli simili $m_1' P_1' P_2$, $\mu' \omega P_2'$ i quali darebbero immediatamente la proporzione (9''').

90. *Relazione fra l'ingrandimento ed il rapporto del diametro dell'obbiettivo al diametro dell'anello oculare.* — Dobbiamo notare

una relazione che passa tra il rapporto $\frac{R}{r}$ e l'ingrandimento *m*. I punti A e C (fig. 51 e 52) sono tra loro coniugati, ed i punti V ed ω, μ e μ' lo sono pure; quindi le rette di emergenza $C\omega$, $C\mu'$ corrispondono alle rette di incidenza AV, $V\mu$. Agli angoli $VA\mu$, $\omega C\mu'$ possiamo adunque applicare il teorema dimostrato in generale al numero 33, ed espresso, pel caso delle lenti, dalle [III'] del numero 61; abbiamo così:

$$\frac{\text{angolo } VA\mu}{\text{angolo } \omega C\mu'} = \frac{cC}{aA}.$$

Ora dicendo a la distanza aV, abbiamo (13):

$$\text{angolo } VA\mu = \frac{V\mu}{aV} = \frac{R}{a};$$

dicendo δ la distanza $c\omega$ a cui l'occhio, che si serve dello strumento, è accomodato, abbiamo:

$$\text{angolo } \omega C\mu' = \frac{\omega\mu'}{c\omega} = \frac{r}{\delta};$$

e dicendo δ' la distanza, dalla quale si guarderebbe l'oggetto ad occhio nudo, ricaviamo dalla formola [I] del numero 87:

$$\frac{cC}{aA} = m\frac{\delta}{\delta'};$$

dunque, portando questi valori nella uguaglianza precedente:

$$\frac{R}{r} = m\frac{a}{\delta'}. \tag{10}$$

Pei cannocchiali si può ritenere $a = \delta'$, e la formola (10) dà:

$$\frac{R}{r} = m. \tag{10'}$$

Occupandoci dei cannocchiali in particolare, ritroveremo questa formola per altra via.

91. *Chiarezza.* — Abbiamo detto [58], che, per quello che si riferisce al nostro studio, si può assumere come misura della chiarezza della visione la quantità di luce che concorre in ogni unità

superficiale dell'immagine che formasi sulla retina: ossia il quoziente della quantità di luce divisa per la superficie della immagine. Ora quando un oggetto vien guardato attraverso ad uno strumento diottrico, questa quantità ha un valore generalmente diverso da quello che ha quando il medesimo oggetto viene guardato ad occhio nudo. Sia C il suo valore corrispondente alla visione ad occhio nudo, e C'' il suo valore corrispondente alla visione fatta per mezzo dello strumento; il rapporto $\frac{C'}{C}$ dicesi la *chiarezza dello strumento.* Importa che vediamo da quali elementi questa dipenda e fra quali limiti essa sia compresa.

A quest'uopo noi ci poniamo nelle condizioni più favorevoli: supponiamo che lo strumento sia così conformato, e che l'oggetto $a\ A$, per posizione e per grandezza, sia tale che: 1° il pennello dei raggi emergenti corrispondente ad uno qualunque dei punti dell'oggetto entri tutto intiero nella pupilla, se la sua sezione trasversale è minore dell' area di questa, o la pupilla sia tutta immersa nel pennello, se la sezione di questo è maggiore della sua superficie; 2° dei raggi mandati all'obbiettivo da uno qualunque dei punti dell'oggetto emergano almeno tutti quelli che possono entrare nella pupilla. Vedremo poi fra quali limiti queste condizioni sieno soddisfatte. Se la pupilla è collocata nel piano dell'anello oculare, la sezione dei fascetti emergenti fatta dal piano della pupilla è uguale al circolo oculare; invece se la pupilla è collocata altrove, quella sezione ed il circolo oculare possono differire. Ma la differenza è sempre piccolissima, e si annulla nel caso, che si considera come normale, dello strumento disposto per un occhio accomodato ad una distanza infinita; noi la possiamo trascurare. Ciò posto, distinguiamo due casi: l' anello oculare è minore od è maggiore della pupilla.

Nel primo caso tutta la luce, che entra nello strumento, entra nell'occhio. Supposto, come di solito, l'oggetto ridotto ad una porzione del piano $a\ A$ perpendicolare all'asse, e supposta uniforme la intensità luminosa della sua superficie, diciamo I questa intensità, e σ la superficie dell'oggetto; diciamo, come sopra, δ' la distanza dalla quale si guarderebbe l'oggetto ad occhio nudo, ed u la distanza $a\ V$ dalla faccia anteriore dell'obbiettivo, alla quale l'oggetto vien posto quando è guardato per mezzo dello strumento, e rappresentiamo con Ω la superficie della prima faccia dell'obbiettivo, con ω la superficie del circolo oculare, con p l'area della pupilla, e con s ed S le superficie delle immagini dell'oggetto, che si formano sulla retina rispettivamente quando questo è visto ad occhio nudo e quando è osservato attraverso allo strumento. La quantità di luce, che riceve la pupilla, quando si guarda ad occhio nudo, è $\frac{I\sigma p}{\delta'^2}$, e la chiarezza della visione è

$$C = \frac{I\sigma p}{\delta'^2 s};$$

quando invece si adopera l'istrumento, la quantità di luce ricevuta è tutta quella che cade sull'obbiettivo, cioè $\frac{I\sigma\Omega}{a^2}$, e la chiarezza della visione è

$$C' = \frac{I\sigma\Omega}{a^2 S}.$$

Detta adunque C la chiarezza dello strumento, è

$$C = \frac{C'}{C} = \frac{\Omega}{p}\left(\frac{\delta'}{a}\right)^2 \frac{s}{S}.$$

Si può anche scrivere:

$$C = \frac{\omega}{p} \cdot \frac{\Omega}{\omega}\left(\frac{\delta'}{a}\right)^2 \frac{s}{S}.$$

Ora, se, come di solito, diciamo m l'ingrandimento, abbiamo $\frac{s}{S} = \frac{1}{m^2}$; e se con R ed r rappresentiamo la semiapertura dell'obbiettivo ed il raggio del circolo oculare, abbiamo

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{R^2}{r^2},$$

e quindi ricordando la formola (10) del numero 90:

$$\frac{\Omega}{\omega}\left(\frac{\delta'}{a}\right)^2 = m^2, \qquad (10')$$

dunque, sostituendo

$$C = \frac{\omega}{p}: \qquad (11)$$

se il circolo oculare è minore della pupilla, la chiarezza della visione fatta per mezzo dello strumento sta a quella della visione ad occhio nudo come l'area del circolo oculare sta all'area della pupilla.

Se il circolo oculare è uguale alla pupilla, se $\omega = p$, è

$$C = 1, \qquad C' = C:$$

la chiarezza della visione per mezzo dello strumento è uguale a quella della visione ad occhio nudo.

Nel secondo caso, quando l'anello oculare è più grande che la pupilla, non tutto il pennello emergente entra nell'occhio. Noi possiamo allora immaginare la superficie del circolo oculare divisa in due parti per mezzo di una circonferenza concentrica di raggio uguale a quello della pupilla, ed immaginare similmente divisa la faccia anteriore dell'obbiettivo con una circonferenza della quale quella che divide il circolo oculare sia l'immagine. I raggi, che entrano nello strumento attraverso la parte centrale dell'obbiettivo, emergono attraverso la parte centrale dell'anello oculare ed entrano nell'occhio; i raggi, invece, che entrano attraverso alla porzione esterna dell'obbiettivo, emergono attraverso alla corona circolare esterna del circolo oculare e non entrano nella pupilla; i primi raggi concorrono alla visione, gli altri sono inattivi: si potrebbero sopprimere, coprendo la parte esterna dell'obbiettivo, senza che la chiarezza della visione venisse per questo alterata. Dunque la chiarezza dello strumento è uguale a quella che si avrebbe se l'anello oculare fosse uguale alla pupilla, cioè

$$C = 1.$$

Riassumendo diremo, che anche facendo astrazione dalla quantità di luce che rimane assorbita dai vetri, ed anche supponendo lo strumento così proporzionato che tutta la luce, che vi arriva dall'oggetto, emerga, la chiarezza della visione non può superare quella che si ha ad occhio nudo; e che, per raggiungere questo massimo, bisogna dare all'obbiettivo un'apertura non inferiore a quella che rende soddisfatta l'uguaglianza

$$\frac{\omega}{p} = 1. \tag{12}$$

Detto ρ il raggio della pupilla, e ricordata la formola (10), noi abbiamo, per determinare il valore R da darsi alla semiapertura della prima faccia dell'obbiettivo, l'equazione

$$\frac{R}{\rho} = m \frac{a}{\delta'}. \qquad (13)$$

Pei cannocchiali è $a = \delta'$, e l'equazione si riduce a

$$R = m \rho. \qquad (13')$$

92. *Campo. Caso dell' anello oculare esterno.* — Abbiamo posto a base del calcolo precedente l'ipotesi, che per tutti i punti dell'oggetto fossero soddisfatte le due condizioni:

1.° Che la pupilla lasciasse entrare nell'occhio tutto intiero il pennello dei raggi emergenti, oppure fosse tutta immersa in esso.

2.° Che dei raggi inviati dal punto considerato emergessero dallo strumento almeno tutti quelli che la pupilla può ricevere.

Se queste due condizioni non fossero verificate, la chiarezza sarebbe minore di quella, che abbiamo calcolato. Ora, acciocchè le due condizioni sieno verificate, è necessario che per nessuno dei punti A dell'oggetto $a\,A$ l'angolo $A\,P_1\,a$ superi un valore determinato ψ; esiste cioè una superficie conica avente per vertice il punto P_1, per asse l'asse del sistema e per angolo al vertice un angolo determinato 2ψ, la quale gode di questa proprietà, che tutti gli oggetti situati nel suo interno sono visti con una medesima chiarezza, uniforme e massima, colla chiarezza che abbiamo imparato a calcolare, e tutti gli oggetti situati esteriormente ad essa sono visti con una chiarezza minore. L'angolo al vertice 2ψ di questa superficie conica si dice il campo dello strumento. Per vedere come il campo sia determinato, ci occuperemo successivamente di due casi: supporremo prima, che l'anello oculare si trovi fuori dello strumento, e poi che si trovi dentro lo strumento. Al primo caso si riferisce la fig. 51, al secondo la 52.

Se l'anello oculare è fuori dello strumento e se nel suo centro si colloca il centro della pupilla, la prima condizione è soddisfatta, qualunque sia la posizione del punto luminoso; allora il campo è limitato soltanto dalla seconda.

Noi supporremo dapprima che il circolo oculare non sia maggiore della pupilla; in questa ipotesi i raggi che la pupilla può ricevere sono tutti quelli ricevuti dall'obbiettivo e la condizione di cui dobbiamo tener conto, si riduce a questa: che tutta la luce mandata dal punto luminoso all'obbiettivo emerga dall'oculare.

Consideriamo un punto A dell'oggetto (fig. 51), ed immaginiamo tracciati attraverso a tutto il sistema i cammini dei raggi estremi $A\mu$ ed $A\nu$; acciocchè tutta la luce mandata all'obbiettivo dal punto A emerga dall' oculare, è necessario che l'apertura di ciascuna lente sia tale che questa sia attraversata da entrambi i raggi. Quando si conosce la disposizione dell'apparecchio egli è adunque facile determinare le ampiezze minime che debbono avere le lenti acciocchè un dato punto A si veda colla chiarezza massima. Se le lenti, od alcune di esse, hanno precisamente l'ampiezza minima così determinata,

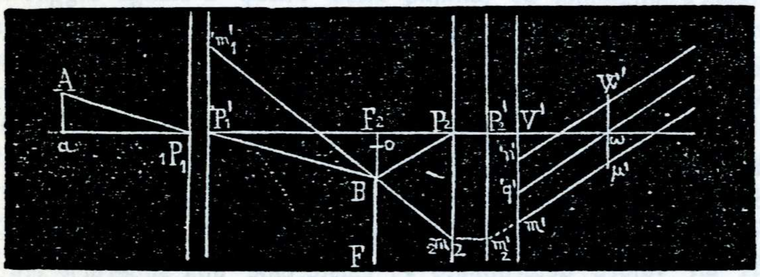

Fig. 53.

il punto A si trova al limite del campo, e l'angolo $A\,P_1\,a$ è quello che abbiamo denominato ⁝.

Viceversa, data l' ampiezza di una delle lenti dell' oculare, noi possiamo determinare: 1° l'ampiezza da darsi alle altre, acciocchè la superficie di quella venga tutta utilizzata; 2° il campo.

Supponiamo data l'apertura della faccia esterna dell'oculare, siano V' il vertice di questa faccia e $V'\,m'$ la sua semiapertura (fig. 53). Supponiamo inoltre, come conviene in queste ricerche, che lo strumento sia disposto per un occhio accomodato per una distanza infinita, cosicchè l' immagine fornita dall' obbiettivo sia nel piano focale $F_2\,F$ dell'oculare, ed i pennelli emergenti abbiano la forma di cilindretti aventi per direttrice la circonferenza dell'anello oculare $\mu'\,\nu'$. Tiriamo la retta $m'\mu'$, e pei punti ω e ν' le $q'\omega$, $n'\,\nu'$ parallele ad essa. Il fascetto cilindrico $m'\mu' n'\,\nu'$ è il più inclinato fra tutti quelli che emergono intieri dall' oculare; $q'\omega$ ne è l'asse, $m'\mu'$ il raggio estremo. Questo, prolungato da destra a sinistra attraverso a tutto il sistema, fino all'obbiettivo, determina, colle sue intersezioni, colle faccie delle lenti successive, le ampiezze minime, che queste debbono avere. Non possiamo fare questa determinazione senza che ci sia data la posizione delle lenti, ma conosciamo le costruzioni semplicissime, che bastano a farla in ogni caso.

Per determinare il campo, tiriamo $P_2 B$ parallela a $\mu' m'$, e pel punto B ove essa incontra il piano focale $F_2 F$ conduciamo $B P_1'$; l'angolo $F_2 \widehat{P'_1 B}$ è quello che noi abbiamo denominato ψ, il campo è $2 F_1 \widehat{P_1' B}$. Infatti, se la luce si propagasse da destra a sinistra, il pennello cilindrico $m' \mu' n' \nu'$ sarebbe trasformato dall'oculare in un pennello convergente in B e dall'obbiettivo in un pennello convergente nel punto coniugato di B che è sulla $P_1 A$ parallela alla $B P_1'$; dunque se la luce emana da questo punto dell'oggetto situato sulla $A P_1$, essa emerge formando il pennello cilindrico $m' \mu' n' \nu'$.

Quello che abbiamo fatto colla costruzione grafica si può fare, con uguale facilità, col calcolo. Abbiamo

$$\psi = B \widehat{P'_1 F_2} = \frac{F_2 B}{P_1' F_2} ;$$

ma i triangoli simili $F_2 P_2 B$, $V'' \omega q'$ ci danno

$$F_2 B = \frac{V'' q' \times F_2 P_2}{V'' \omega}$$

dunque

$$\psi = \frac{V'' q' \times F_2 P_2}{V'' \omega \times P'_1 F_2} .$$

Dicendo, come di solito, φ_2 la distanza focale dell' oculare, Δ la distanza $P_1' P_2$ del primo piano principale dell'oculare dal secondo piano principale dell'obbiettivo, d la distanza $P_2' \omega$ del punto oculare dal secondo piano principale dell'oculare, ed r il raggio dell'anello oculare; dicendo inoltre R' la semiapertura $V'' m'$ dell' ultima lente dell'oculare e v' la distanza $P_2' V''$ dell'ultima superficie dal piano principale P_2', ed osservando che

$$V'' q' = R' - r , \qquad V'' \omega = d - v' , \qquad P_1 F_2 = \Delta - \varphi_2 ,$$

la formola diventa

$$\psi = \frac{(R' - r)\,\varphi_2}{(d - v')\,(\Delta - \varphi_1)}. \tag{14}$$

Se, come al num. 87, diciamo D il valore assoluto della distanza dell'oggetto dal primo piano principale dell'obbiettivo, e se osserviamo, che il piano ove si trova l'oggetto è, rispetto all'obbiettivo, coniugato col piano $F_2\,B$, abbiamo della [I] del num. 61:

$$\frac{1}{\Delta - \varphi_2} = \frac{D - \varphi_1}{\varphi_1\,D};$$

e questo valore, portato nella (14), la trasforma nella

$$\psi = \frac{R' - r}{d - v'}\,\frac{D - \varphi_1}{D}\,\frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Ora la formola (3) del num. 87 dà

$$(D - \varphi_1)\,\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = -\,\frac{\delta'}{m_1},$$

dunque possiamo scrivere:

$$\psi = -\,\frac{R' - r}{d - v'}\,\frac{\delta'}{D}\cdot\frac{1}{m_1}. \tag{15}$$

In questa formola notevole la lettera δ' rappresenta, come al solito, la distanza dalla quale l'oggetto si guarderebbe ad occhio nudo. Il segno negativo deriva da ciò, che secondo le nostre convenzioni, l'ingrandimento m_1 si considera come negativo ogniqualvolta gli oggetti guardati collo strumento appariscono rovesciati. Potremmo fare la stessa convenzione riguardo a ψ, ed allora si toglierebbe il segno $(-)$ dal secondo membro.

Pei cannocchiali è $\delta' = D$ e quindi

$$\psi = -\,\frac{R' - r}{d - v'}\,\frac{1}{m_1}, \tag{15'}$$

od anche, in grazia della (7)

$$\psi = \frac{R' - r}{d - v}\,\frac{\varphi_2}{\varphi_1}. \tag{15''}$$

Nei microscopii D è sempre piccolissima, e δ' è la distanza della visione distinta; il rapporto $\frac{\delta'}{D}$ è perciò sempre grandissimo. In un microscopio adunque il campo è molto maggiore che in un cannocchiale d'uguale ingrandimento.

Le formole (14) e (15) mostrano che negli strumenti con punto oculare esterno il campo è proporzionale ad $R' - r$. Non bisogna credere però che aumentando l'apertura delle lenti si possa ottenere un campo grande quanto si vuole. Nella pratica bisogna escludere i raggi che non si approssimano alle condizioni dei raggi centrali. E perciò sono necessarie due condizioni: 1° L'angolo $q' \omega V'$, o, ciò che val lo stesso, il rapporto $\frac{R' - r}{d - v'}$ non deve essere troppo grande; si dà come regola che questo rapporto non debba superare il valore $\frac{1}{4}$; ma raramente, ed a ragione, questo limite si raggiunge nella pratica. 2° I raggi luminosi debbono attraversare le superficie dividenti in punti non troppo lontani dall'asse; si dà anche qui la regola, che il rapporto di R', massima distanza dall'asse che possa avere il punto d'intersezione del raggio colla faccia, al raggio di curvatura non debba superare il valore $\frac{1}{4}$.

A parità delle altre circostanze l'angolo ψ dato dalle formole (14) e (15) è tanto maggiore quanto minore è la distanza $d - v'$ del punto oculare dall'ultima superficie dello strumento. Due oculari, aventi la medesima distanza focale, dànno, col medesimo obbiettivo, il medesimo ingrandimento, ma per riguardo al campo possono essere diversamente buoni: dei due è preferibile quello, per cui $d - v'$ è minore. Ora il punto oculare ω, immagine del vertice dell'obbiettivo, è sempre al di là del secondo fuoco dell'oculare, ad una distanza determinata dalla posizione dell'obbiettivo e dalle distanze focali, dunque fra due oculari è, per riguardo al campo, preferibile quello il cui secondo fuoco è più vicino all'ultima superficie.

Nell'articolo 77 si sono esaminati due sistemi di due lenti, i quali vengono adoperati come oculari: i due sistemi rappresentati dalle figure 44 e 45. Ora basta l'ispezione di queste figure per dimostrare, come oculari così fatti sieno, a questo riguardo, preferibili ad una lente unica di uguale distanza focale. La disposizione, a cui si riferisce la fig. 45, detta *ocu-*

lare di Campani o negativo è, in ciò, migliore di quella della fig. 44, che si dice *oculare di Ramsden o positivo*. Per questa proprietà dell'oculare di Campani, si suol dare alla sua prima lente $P_1 P_1'$ il nome di *lente da campo*.

Per $d - v' = o$, quando cioè il punto oculare coincidesse col vertice dell'ultima superficie, le formole (14) e (15) darebbero $\frac{\iota}{\cdot} = \infty$. E veramente allora basterebbe che l'ultima superficie avesse, come ha sempre, un'apertura maggiore del diametro dell'anello oculare, perchè tutti i raggi che hanno attraversato le altre parti dello strumento, ne potessero emergere. Ma il campo riuscirebbe allora limitato dall'apertura della penultima lente, riguardo alla quale si dovrebbero fare, con piccole modificazioni, le costruzioni ed i calcoli, che noi abbiamo fatto per l'ultima.

In tutto ciò si è supposto che l'anello oculare non fosse maggiore della pupilla; ma è facile estendere le cose dette anche al caso contrario. Infatti in questo caso, acciocchè un punto luminoso A sia visto colla chiarezza massima, è necessario e sufficiente che emerga quella parte mediana del pennello di raggi, la quale ha per base la pupilla. Tutte le cose dette fin qui si possono adunque ripetere pel caso attuale, soltanto supponendo che nella fig. 53 $\mu' \nu'$ rappresenti il diametro della pupilla e che nelle formole la lettera r rappresenti il raggio della pupilla.

93. *Campo nel caso dell' anello oculare interno.* — Rimane da considerarsi il caso, in cui il punto oculare è situato nell'interno dello strumento. In questo caso, che si presenta negli strumenti con oculare divergente, non è possibile collocare la pupilla nel piano dell' anello oculare. Ne nasce, che di due pennelli uguali, che entrambi emergano intieri dall'oculare, possono tuttavia entrare nella pupilla porzioni diverse, e che quando alle lenti sieno date aperture sufficienti, il campo è limitato dalla grandezza e dalla posizione della pupilla.

Supponiamo dapprima che il circolo oculare sia minore della pupilla. Sieno (fig. 54) $F_2 F$ il primo piano focale dell'oculare divergente, $\mu' \omega \nu'$ l'anello oculare, p il centro della pupilla, e $p \pi$ il raggio di questa. Supponiamo poi, anche qui, che lo strumento sia disposto per un occhio accomodato ad una distanza infinita, talchè l'immagine data dall'obbiettivo si faccia nel piano $F_2 F$ ed i pennelli emergenti sieno cilindri di base $\mu' \nu'$. Tiriamo $\nu' \pi$; questa è la direzione del più inclinato fra i pennelli emergenti che entrano intieri nella pupilla; essa è il raggio estremo e la ωq ad essa parallela è l'asse di quel pennello, che entrerebbe nell'occhio rasentando l'iride nel punto π. Tiriamo $P_2 B$ parallela a $\nu' \pi$; il punto B, ove questa retta interseca il piano focale $F_2 F$, è il punto dell'immagine obbiettiva al quale corrisponde il fascetto emergente estremo. Tiriamo finalmente $B P_1'$ e $P_1 A$ ad essa parallela; il punto

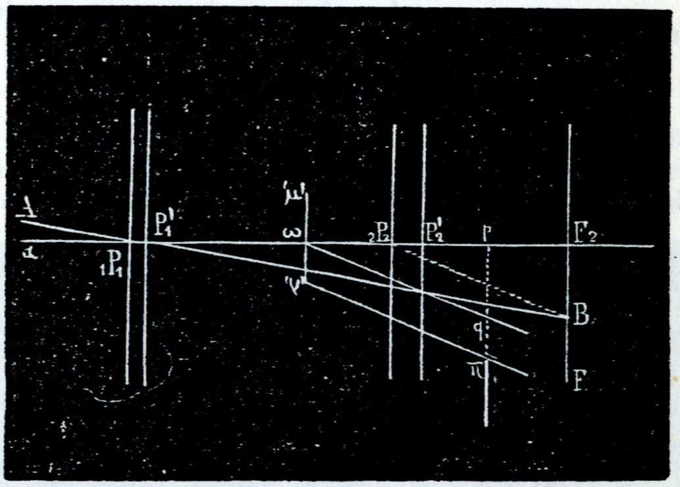

Fig. 54.

dell'oggetto coniugato al punto B è su quest'ultima retta. Dunque l'angolo $A P_1 a$ od il suo uguale $F_2 P_1'B$, è la metà del campo.

Abbiamo, dicendo $2\psi'$ il campo,

$$\psi' = \frac{F_2 B}{P_1' F_2},$$

e, pei triangoli simili $F_2 P_2 B$, $p \omega q$

$$F_2 B = \frac{p q \times P_2 F_2}{\omega p},$$

dunque

$$\psi' = \frac{p q \times P_2 F_2}{P_1' F_2 \times \omega p}.$$

Diciamo Δ la distanza $P_1' P_2$, d_1 il valore assoluto $(-d)$ della distanza $P_2' \omega$, h la distanza $P_2' p$ della pupilla dal piano principale P_2', e ρ il raggio $p\pi$ della pupilla; inoltre rappresentiamo con φ_2 la distanza focale negativa dell'oculare, poniamo cioè, per aver riguardo alla convenzione dei segni, $P_2\,F_2 = -\varphi_2$; abbiamo:

$$p\,q = \rho - r\,, \qquad P_2\,F_2 = -\varphi_2\,, \qquad P'_1\,F_2 = \Delta - \varphi_2$$

ed

$$\omega\,p = d_1 + h\,.$$

Quindi, sostituendo

$$\psi' = -\frac{\rho - r}{\Delta - \varphi_2}\,\frac{\varphi_2}{d_1 + h}\,. \qquad (16)$$

Sia ora il circolo oculare maggiore della pupilla, sia $r > \rho$. Vedesi dalla figura 55, che il pennello emergente comincia a non

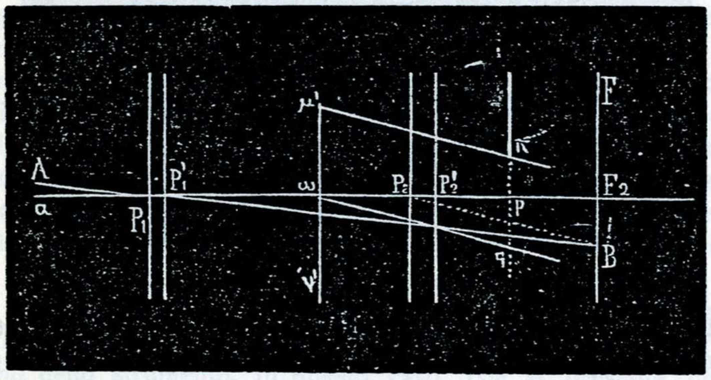

Fig. 55.

investire più tutta la pupilla quando la sua direzione è quella della retta $\mu'\pi$. Per avere il campo, tireremo adunque $P_2\,B$ parallela a $\mu'\pi$, e congiungeremo B con P_1': dicendo $2\,\psi''$ il campo sarà

$$\psi = F_2\,P_1'\,B.$$

Perciò avremo, come sopra,

$$\psi'' = \frac{F_2\,B}{P_1\,F_2}\,,$$

e, in grazia dei triangoli simili $P_2\,F_2\,B$, $\omega\,p\,q$,

$$F_2\,B = \frac{p\,q \times P_2\,F_2}{\omega\,p}\,,$$

dunque

$$\psi'' = \frac{p\,q \times P_2 F_2}{P'_1 F_2 \times \omega\, p},$$

Quindi adottando le notazioni usate poc'anzi, ed osservando che

$$p\,q = r - \rho,$$

abbiamo

$$\psi' = -\frac{r - \rho}{\Delta - \varphi_2}\,\frac{\varphi_2}{d_1 + h} \tag{17}$$

Se anche qui denominiamo D il valore assoluto della distanza dell'oggetto dal primo piano principale dell'obbiettivo, e se osserviamo che, in grazia della [1'] del num. 61, è

$$\frac{1}{\Delta - \varphi_2} = \frac{D - \varphi_1}{\varphi_1 D},$$

e che in grazia della (3) del num. 87, è

$$(D - \varphi_1)\,\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = -\frac{\delta'}{m_1},$$

possiamo porre le formole (16) e (17) sotto la forma seguente:

$$\psi' = \frac{\rho - r}{d_1 + h}\,\frac{\delta'}{D}\,\frac{1}{m_1}, \tag{18}$$

$$\psi'' = \frac{r - \rho}{d_1 + h}\,\frac{\delta'}{D}\,\frac{1}{m_1}. \tag{19}$$

Oggidì gli oculari divergenti si adoperano esclusivamente pei cannocchiali; per questi è $\delta' = D$, dunque

$$\psi' = \frac{\rho - r}{d_1 + h}\,\frac{1}{m_1}, \tag{18'}$$

$$\psi'' = \frac{r - \rho}{d_1 + h}\,\frac{1}{m_1}. \tag{19'}$$

I valori di ψ' e di ψ'', dati dalla formola (16) e (17) oppure dalle (18) e (19), crescono col diminuire di h; il campo è tanto maggiore quanto più si approssima l'occhio allo strumento.

Per $r = \rho$ tutti questi valori si annullano: quando l'anello oculare è uguale alla pupilla il campo è nullo. Ciò significa, che in quel caso la chiarezza con cui si vedono gli elementi dell'oggetto situati fuori dell'asse dello strumento è minore di quella con cui apparisce l'elemento situato sull'asse, comunque piccola sia la distanza degli elementi medesimi dall'asse. In altri termini, se si immagina che l'oggetto sia un piano indefinito normale all'asse, ugualmente rischiarato in tutti i suoi punti, questo piano guardato coll'apparecchio apparirà più chiaro nel punto situato sull'asse che in tutti gli altri suoi punti; la chiarezza andrà diminuendo gradatamente all'ingiro del punto d'intersezione del piano coll'asse, senza che intorno a questo punto vi esista un circolo di diametro apprezzabile, entro al quale la chiarezza sia uniforme.

Ora possiamo farci un'idea esatta dell'influenza che ha l'apertura dell'obbiettivo sulla chiarezza della visione fatta per mezzo di strumenti con oculare divergente. Immaginiamo che l'apertura dell'obbiettivo, piccolissima in principio, vada crescendo gradatamente. La chiarezza sarà in principio piccolissima, ma essendo anche piccolo r, vi sarà attorno all'asse una porzione dell'oggetto che apparirà con chiarezza uniforme. Crescendo l'apertura dell'obbiettivo, crescerà la chiarezza nel centro della porzione di oggetto veduta, ma diminuirà il raggio del circolo di chiarezza uniforme. Questo raggio si ridurrà a zero quando l'anello oculare sarà diventato uguale alla pupilla: allora la diminuzione della chiarezza comincerà fin dal centro a manifestarsi. Ma allora appunto si sarà, al centro, raggiunta la chiarezza massima [91]; se dopo si seguita ad aumentare la grandezza dell'obbiettivo, la chiarezza nella parte mediana non crescerà più, ma seguiterà a crescere quella delle parti circostanti, e riapparirà intanto il circolo di chiarezza uniforme, il campo, il quale crescerà in seguito indefinitamente.

Quando fosse data la posizione delle diverse lenti si determinerebbero facilmente le aperture che queste debbono avere acciocchè il raggio estremo $\nu' \pi$ oppure $\mu' \pi$ (fig. 54 e 55) possa emergere dall'oculare. Nella pratica però si dà spesso agli oculari divergenti un'apertura eccedente di molto quella che verrebbe così determinata. Allora, spostando l'occhio in faccia all'ultima lente si possono vedere colla chiarezza massima oggetti situati fuori del campo teorico: si può spostare il campo.

94. *Diaframma, reticolo, asse ottico.* — Il campo, quale noi lo abbiamo definito, non è tutta quella porzione dello spazio,

che si può vedere attraverso allo strumento, ma solo quella parte che si vede con chiarezza uniforme. Se si lascia che tutta la luce entrata nello strumento attraverso all'obbiettivo emerga dall'oculare, si vedono attorno alla parte centrale dell'oggetto rischiarata uniformemente anche altre parti di mano in mano men chiare; la chiarezza dal valor massimo che ha entro il campo, passa a zero per gradi insensibili. Se, per fissare le idee, l'oggetto guardato è un piano indefinito $a\,A$ (fig. 51 e 53), e se le lenti sono così tagliate, che $A\,P_1\,a$ sia la metà del campo, si vede con una chiarezza uniforme la parte del piano limitata dalla circonferenza che ha il centro in a ed il raggio $a\,A$, e con chiarezza decrescente la parte esterna a questo circolo.

Negli strumenti nei quali si forma un'immagine reale, questa degradazione della chiarezza si evita collocando nel piano dell'immagine una lastra opaca, annerita, portante nel mezzo un'apertura circolare uguale all'immagine del circolo $a\,A$, di cui abbiamo parlato. Un punto A_1 del piano $a\,A$ situato fuori del circolo $a\,A$ (fig. 51) avrebbe per immagine un punto B_1 più lontano dall'asse che il punto B, fuori dell'apertura, nella parte opaca della lastra; e siccome tutti i raggi che lo strumento riceve dal punto A_1 passano per B_1, così tutti quei raggi vengono intercettati. Chi guarda collo strumento il piano $a\,A$ vede il circolo $a\,A$, uniformemente rischiarato, proiettato sopra di un fondo buio, chiuso come in una cornice nera con contorno nitido. La lastra traforata con cui si ottiene questo effetto, dicesi il diaframma. [1]

[1] Nei libri di diottrica si suole definire e determinare il campo altrimenti che da noi. Si suole supporre tacitamente che l' obbiettivo sia costituito da un'unica lente infinitamente sottile, od almeno che il vertice della sua faccia anteriore coincida col primo punto principale, e, denominato raggio principale quello che passa pel vertice dell'obbiettivo, definire il campo: il doppio dell'angolo che fa coll'asse il più inclinato dei raggi principali, che possono emergere dallo strumento. Per non iscostarci da questa definizione e nel tempo stesso far a meno dell'ipotesi, non sempre ammessibile, che il vertice della faccia anteriore dell'obbiettivo coincida col primo punto principale, noi avremmo dovuto dire: il campo è il doppio del massimo valore che può darsi all'angolo AP_1a (fig. 51), senza che il raggio principale $AVq'_2\omega$ cessi di emergere dallo strumento.

Adottata questa definizione, la determinazione delle aperture da darsi alle lenti, acciocchè il campo abbia un dato valore, doppio dell'angolo AP_1a si farebbe semplicemente determinando, graficamente o col calcolo, la traiettoria del raggio principale $AP_1q'\omega$ (fig. 53), e vedendo in quali punti questa inter-

Per determinare con una costruzione semplicissima il diametro dell'apertura del diaframma, si può osservare che il punto B è sulla $m_1' m_2$. Se lo strumento è così fatto che i punti m_1' ed m_2 non sieno discosti dai contorni delle lenti rispettive, si può dire che l'apertura del diaframma è prossimamente uguale alla sezione fatta dal piano focale $F_2 B$ nel cono interno circoscritto all'obbiettivo ed alla prima lente dell'oculare.

Quando lo strumento è destinato a far parte di apparecchi, di misura esso dev' essere uno di quelli nei quali si forma un'immagine reale. Allora si munisce il diaframma di un reti-

sechi le lenti successive. E viceversa, data l'apertura di una delle lenti dell'oculare, per esempio l'apertura $V'q' = R'$ dell' ultima, si determinerebbero le aperture da darsi a tutte le altre, ed il campo, tirando $q'\omega$ e determinando, graficamente o col calcolo, la traiettoria del raggio principale, che emerge secondo questa retta.

Egli è chiaro, che se si desse al diaframma un' apertura F_2B (fig. 53) capace di permettere la visione di tutti i punti dell'oggetto compresi nel campo così determinato, i punti più lontani dall'asse fra quelli che con lo strumento si possono simultaneamente vedere, i punti dei quali i coniugati sono situati, come B, sul contorno del diaframma, si vedrebbero con una chiarezza pressapoco uguale alla metà della chiarezza massima centrale, giacchè del pennello $n'v'm'\mu'$ corrispondente ad uno qualunque, B, di essi non emergerebbe che circa una metà dall'ultima superficie, che, come ora si suppone, è limitata dal circolo di raggio $V'q'$. Ora, almeno per gli strumenti con immagini reali, i costruttori cercano di proporzionare i diaframmi così, che la parte dello spazio visibile con lo strumento apparisca con una chiarezza uniforme; dunque la nostra definizione del campo può, per uno strumento con immagine reale ben costrutto, sostituirsi con questa: dicesi campo l'angolo al vertice del cono che limita la parte di spazio simultaneamente visibile attraverso lo strumento. Invece, adottando il modo ordinario di determinare il campo, questa definizione, che pure si dà in molti libri, non corrisponde a ciò che poi si calcola o si determina colle costruzioni.

Secondo la definizione ordinaria l'apertura dell'obbiettivo non influisce sul campo, il quale dipende soltanto dalla disposizione e dalle aperture delle lenti dell'oculare; secondo la nostra definizione, invece, influisce; nelle formole (14), (15'), (15'), (15''), (16), (17'), (18), (19), (18'), (19') figura il raggio r dell'anello oculare, il quale dipende dall'apertura dell'obbiettivo.

Ma è da notarsi che negli strumenti con anello oculare esterno, di grande ingrandimento, r è ordinariamente piccolo a fronte di R', e l'influenza del diametro dell'obbiettivo è poco sensibile.

In ogni caso la nostra definizione coinciderebbe con quella ordinaria, quando il diametro dell'obbiettivo si supponesse infinitamente piccolo. Allora infatti, i punti m' ed n' sarebbero infinitamente prossimi al punto q'. Le nostre formole su citate si ridurrebbero a quelle, alle quali ci condurrebbe l'ordinario modo di determinare il campo, qualora vi ponessimo $r = 0$.

colo, che può avere disposizioni diverse, a seconda degli usi a cui lo strumento è destinato, ma che nella più grande parte dei casi è formato semplicemente da due fili di ragno tesi attraverso l'apertura del diaframma secondo due diametri ortogonali. Chi ha l'occhio all'oculare vede, insieme all'immagine dell'oggetto guardato, i due fili, e vede coincidere coll'incrocicchio *o* di questi (fig. 53) l'immagine di quel punto, ove l'oggetto è incontrato dalla parallela condotta per P_1 alla retta $o\,P_1'$. La retta indefinita $o\,P_1'$, che in generale non coincide coll'asse centrale, ma che rimane fissa finchè non varia la posizione del reticolo rispetto all'obbiettivo, dicesi l'*asse ottico* dello strumento.

Negli strumenti con oculare divergente, nei quali non si forma immagine reale dell'oggetto, non è possibile collocare un reticolo, ma si possono sempre intercettare con diaframmi situati tra l'obbiettivo e l'oculare i raggi partiti da punti situati fuori del campo. Spesso il campo è piccolissimo; allora coi diaframmi non si toglie, ma solo si diminuisce la differenza di chiarezza fra la parte centrale e la parte periferica della porzione veduta dell'oggetto.

§ 4° *Microscopio.*

95. *Disposizione generale del sistema diottrico, e suo modo d'agire. — Obbiettivo oculare.* — Un obbiettivo di cortissima distanza focale ed un oculare convergente collocati così, che la distanza tra il secondo piano principale del primo ed il primo piano principale del secondo sia notevolmente maggiore della somma delle due distanze focali, costituiscono un microscopio. Se all'obbiettivo ed all'oculare si immaginano sostituite le lenti infinitamente sottili equivalenti [73], lo strumento può rappresentarsi con una figura somigliante alla fig. 56; in questa W_1 e W_2 sono le due lenti ideali, F_1 ed F_1' sono i fuochi della prima, F_2 ed F_2' sono i fuochi della seconda. La luce, come di solito, si suppone propagarsi da sinistra a destra.

Per osservare per mezzo di uno strumento un oggetto, si colloca questo in $a\,A$ davanti all'obbiettivo e fuori del segmento $W_1\,F_1$, cosicchè l'obbiettivo ne dia una immagine reale e capovolta $b\,B$; poi, posto l'occhio all'oculare, si fa variare la distanza $a\,F_1$, e con questa la posizione dell'immagine $b\,B$, finchè il piano $c\,C$, che, rispetto all'oculare, è coniugato col piano $b\,B$, si trovi alla distanza, per la quale l'occhio è accomodato. L'oculare funziona, rispetto all'immagine $b\,B$, come un microscopio semplice, e la fa vedere ingrandita; d'altra parte, facendo la distanza $W_1\,b$ notevolmente maggiore della distanza $W\,a$, si può far sì che $b\,B$ risulti notevolmente maggiore del-

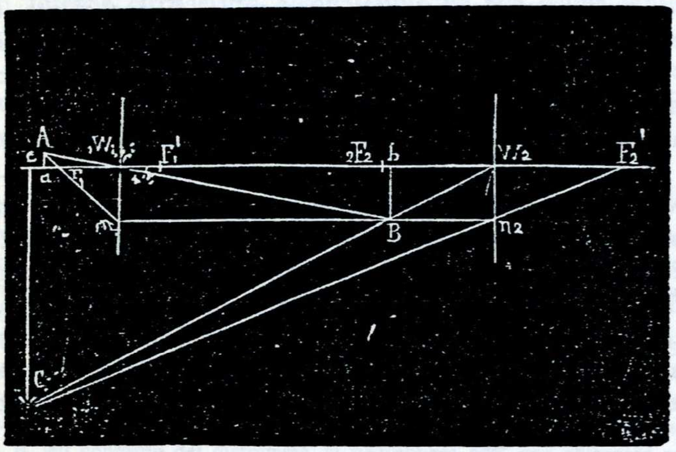

Fig. 56.

l'oggetto $a\,A$; egli è perciò che lo strumento composto può dare ingrandimenti che con un microscopio semplice non si potrebbero ottenere senza andare incontro ad aberrazioni enormi.

L'ingrandimento è tanto maggiore quanto è maggiore la distanza $W_1\,b$, quanto è maggiore la distanza dell'oculare dall'obbiettivo, quanto maggiore è la lunghezza dello strumento. Tuttavia non converrebbe aumentare questa lunghezza oltre ad un certo limite: ed il perchè è facile a capirsi. S'immagini che l'oggetto, partendo da una grande distanza, venga man mano avvicinandosi al fuoco anteriore F_1 dell'obbiettivo; la sua immagine andrà allontanandosi man mano dal secondo fuoco F_1', ma in principio lentamente, in seguito sempre più rapidamente: quando l'oggetto è vicinissimo al fuoco F_1 a piccolissimi spostamenti del medesimo corrispondono spostamenti grandissimi dell'immagine. Segue da ciò, che quando l'oggetto, che non ha mai uno spessore nullo, si collocasse vicinissimo al fuoco per portare a grande distanza la sua immagine, non se ne potrebbero vedere con una sola posizione dello strumento se non i punti situati in una sezione piana perpendicolare all'asse. È adunque preferibile limitare la lunghezza dello strumento e diminuire la distanza focale dell'obbiettivo.

L'obbiettivo è sempre un sistema di due o tre piccole lenti acromatiche. Ciascuna di queste lenti è un sistema di due, l'una convergente di *crown*, l'altra divergente di *flint* poste a contatto ed operanti come il sistema studiato al numero 77 *(d)* (fig. 47). Le due o tre lenti acromatiche poi sono collocate l'una vicino all'altra per modo, che tra una qualunque di esse ed il sistema delle altre sussistano le condizioni studiate al numero 77 *(a)*. Così il sistema è equivalente ad una lente convergente di piccolissima distanza focale. Nella pratica le distanze fra le lenti si regolano sperimentalmente. L'oculare è quasi sempre quello di Campani o negativo, ed è costituito da due lenti convergenti disposte come quelle che si sono studiate al numero 77 *(b)*. Lo scopo, per cui nel microscopio, come nella maggior parte degli strumenti, si usano oculari ed obbiettivi formati con parecchie lenti, è di rendere nette le immagini, benchè queste siano date da raggi non centrali di luce non omogenea; è cioè di rendere minime le aberrazioni, e le condizioni che a quest'uopo debbono soddisfarsi, non possono essere esaminate qui. Possiamo tuttavia intravedere come l'uso di tali sistemi composti permetta di ottenere, senza aumentare le aberrazioni, un campo ed una chiarezza maggiore di quelli che si avrebbero con lenti semplici: quanto al campo si ricordino le considerazioni fatte al numero 92 circa gli oculari composti; quanto alla chiarezza si facciano le medesime osservazioni circa gli obbiettivi.

Nella fig. 57 sono indicate le posizioni delle lenti, e sono segnati i piani principali ed i fuochi dell'obbiettivo e dell'oculare composti. L'obbiettivo si è supposto, per semplicità, formato di due sole lenti acromatiche L_1 e L_1', e i piani principali ed i fuochi di questo sistema, che si saranno determinati preventivamente col calcolo o con costruzioni [77 *a*], sono supposti in P_1, P_1', F_1, F_1'. L'oculare è formato dalle due lenti convergenti L_2, L_2', ed i suoi punti cardinali, determinati nel modo che fu detto al numero 77 *b*, supponiamo essere P_2, P_2', F_2. F_2'. La figura mostra le costruzioni colle quali si determina il punto C coniugato di un punto A dell'oggetto. Per A si è condotta la $A\,P_1$ e per P_1' la $P_1'\,B$ parallela alla prima; poi si è condotta $A\,F_1\,n_1$, e nel punto n_1 si è tirata la

$n_1\, n_1'\, n_2'\, B$ parallela all'asse; l'intersezione B di questa con la $P_1'\, B$ è il punto coniugato ad A rispetto all'obbiettivo; $B\, b$ è l'immagine di $A\, a$. Per B si è condotta la $B\, P_2$ e per P_2' la $P_2'\, C$ parallela ad essa; poi si è condotta la $B\, n_2'$ parallela all'asse e per n_2' la $F_2'\, n_2'\, C$; questa interseca la $P_2'\, C$ nel punto

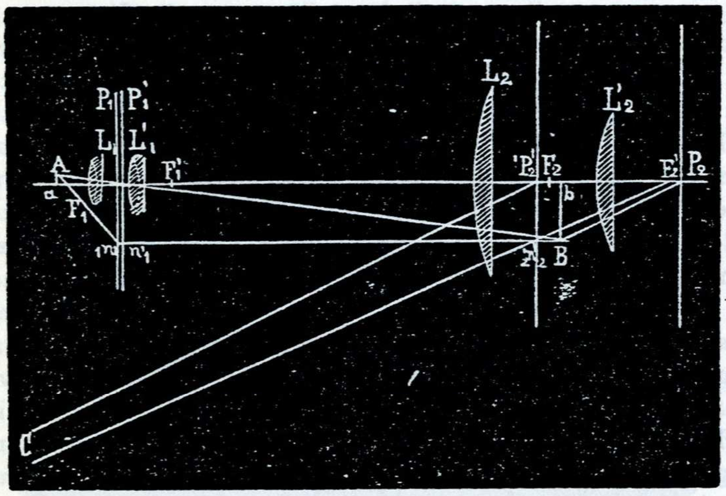

Fig. 57.

C coniugato con B rispetto all'oculare. Se b è alla destra di F_2, il punto C è a sinistra, e lo strumento è disposto per un occhio accomodato ad una distanza finita; se b coincide con F_2 il punto C va all'infinito, e lo strumento è nella disposizione conveniente per un occhio accomodato ad una distanza infinita; se finalmente b è a sinistra di F_2 il punto C è a destra, e non può essere veduto se non da un occhio ipermetropico.

96. *Punti cardinali del microscopio, lente infinitamente sottile equivalente allo strumento.* — Si può domandare come sieno situati i punti cardinali dell'intiero strumento, e quale sia la lente infinitamente sottile equivalente a questo.

A determinare i punti cardinali servono le formole (6''), (7''), (8'') del numero 75, qui trascritte:

$$\varphi = \frac{\varphi_1\, \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}, \tag{6''}$$

$$P_1\, P = \frac{\varphi_1\, \Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}, \tag{7''}$$

$$P_2'\, P' = - \frac{\varphi_2\, \Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}. \tag{8''}$$

In queste formole φ è la distanza focale dell'intero sistema, φ_1 e φ_2 sono le distanze focali dei due sistemi componenti, Δ è la distanza compresa tra il secondo piano principale del primo di questi sistemi ed il primo piano principale del secondo, $P_1 P$ e $P_2' P'$ sono le distanze del primo e del secondo punto principale del sistema complesso rispettivamente dal primo punto principale del primo sistema componente e dal secondo punto principale del secondo; per tutte queste distanze vale la solita regola dei segni. Ora nel caso attuale φ_1, φ_2 e Δ sono tutte positive, epperò sono positivi i prodotti φ_1, φ_2, $\varphi_1 \Delta$, $\varphi_2 \Delta$; ma $\varphi_1 + \varphi_2$, è minore di Δ, epperò il denominatore comune alle tre espressioni (6''), (7') ed (8'') è negativo. Dunque;

1.° φ è negativo: il sistema è divergente.

2.° $P_1 P$ è negativo: il primo punto principale è a sinistra di P_1, e siccome $\dfrac{\Delta}{\Delta - \varphi_1 - \varphi_2}$ è maggiore dell'unità, così il primo punto principale è fuori dello strumento, più lontano che il fuoco F_1 dell'obbiettivo.

3.° $P_2' P'$ è positivo e maggiore di φ_2: il secondo punto principale è fuori dello strumento al di là del secondo fuoco dell'oculare.

Alle stesse conclusioni ci conduce la costruzione grafica indicata al numero 76. Immaginiamo, per non complicare inutilmente la figura, che all'obbiettivo ed all'oculare sieno sostituite le lenti infinitamente sottili equivalenti; W_1 e W_2 sieno i vertici di queste, F_1, F_1' ed F_2, F_2' i loro fuochi (fig. 58). Per determinare i punti cardinali del sistema, noi conduciamo ad una distanza arbitraria una retta $L\,L'$ parallela all'asse, e la consideriamo prima come una retta di incidenza, poi come una retta di emergenza. Nella prima ipotesi le corrisponde, nell'intervallo fra le due lenti, la retta $m_1\, F_1'\, n_2$; nella seconda ipotesi la retta $m_2\, F_2\, n_1$; queste due rette si intersecano in O. Ora noi sappiamo che il punto O è coniugato, rispetto all'obbiettivo, al punto ove la retta $L\,L'$ inserseca il primo piano principale del sistema composto, e, rispetto all'oculare, al punto d'intersezione della retta $L\,L'$ col secondo piano principale. Dunque questi punti d'intersezione della $L\,L'$ coi due piani principali debbono trovarsi sulle rette $O\,W_1$ e $O\,W_2$: essi sono i punti p e p' ove queste due rette tagliano la $L\,L'$. I piedi P e P' delle perpendicolari abbassate sull'asse dai due punti p e p' sono i due punti principali. La retta d'incidenza corrispondente alla retta di emergenza $L\,L'$ deve passare per n_1 e per p punto coniugato di p'; è adunque $p\,n_1$. Similmente la retta di emergenza corrispondente alla retta di incidenza $L\,L'$ à $n_2\,p'$. I punti F ed F', ove queste due rette intersecano l'asse, sono i fuochi del sistema.

La lente infinitamente sottile equivalente al microscopio [73] ha il vertice in P, il primo fuoco in F, ed il secondo fuoco in F'', ad una distanza da P uguale in grandezza ed in segno alla $P'\,F'$.

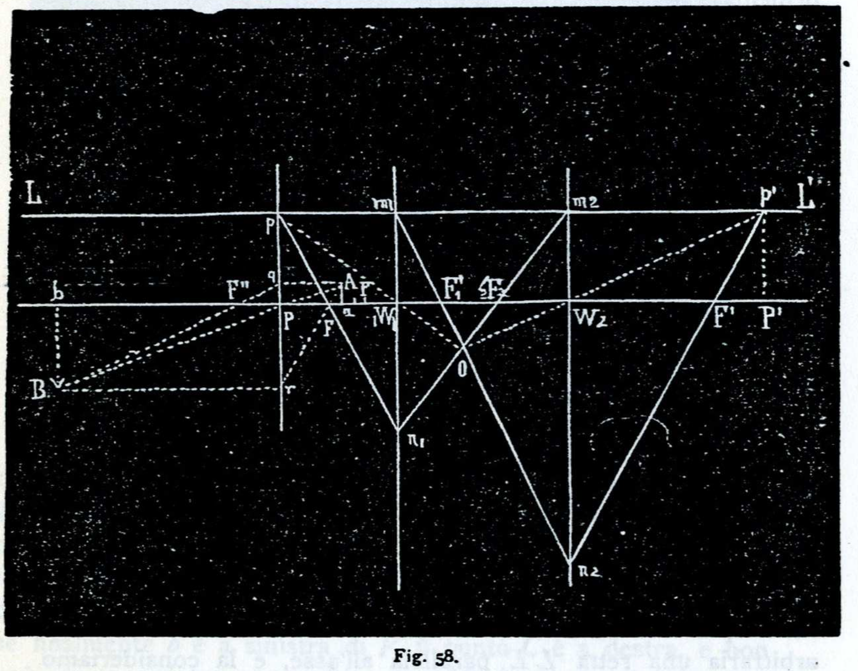

Fig. 58.

Essa è una lente che renderebbe paralleli i raggi incidenti convergenti in F, e che trasformerebbe un fascio di raggi incidenti paralleli all'asse in un fascio di raggi divergenti dal punto F'': è una lente divergente. Il suo modo di agire è quello che abbiamo studiato all'articolo 74, 2°, *b*), è quello di un oculare divergente: se un sistema di raggi incidenti provenienti da un altro apparecchio tende a formare una immagine reale $a\,A$ al di là del primo fuoco F, la lente produce una immagine virtuale e capovolta $b\,B$ tanto più lontana e tanto più grande quanto più il punto a è vicino al fuoco F.

Vedesi che una lente posta nelle condizioni della lente equivalente al microscopio servirebbe a far vedere ingrandite le immagini che tendono a formarsi dietro di essa, ma non potrebbe servire ad osservare oggetti reali quali sono quelli, alla osservazione dei quali è destinato il microscopio. Abbiamo in questo esempio una conferma di ciò che si disse circa la distinzione degli strumenti diottrici in semplici ed in composti: gli strumenti semplici come i composti possono essere formati da parecchie lenti, ma gli effetti loro si possono ottenere anche con una lente sola; negli strumenti composti ciò non è possibile.

97. *Ingrandimento.* — L'ingrandimento è dato dalle formole (2') e (3) del numero 87: se D è la distanza dell'oggetto dal primo piano principale dell'obbiettivo, se d è la distanza del punto oculare dal secondo piano principale dell'oculare, e se δ' è la distanza del *punctum proximum* dall'occhio, l'ingrandimento è

$$m = -\frac{\varphi_1}{D-\varphi_1}\,\frac{\delta'}{\varphi'}\left(1 + \frac{\varphi_2 - d}{\delta}\right), \qquad (2')$$

se lo strumento è disposto per un occhio accomodato alla distanza δ, ed è invece

$$m_1 = -\frac{\varphi_1}{D-\varphi_1}\,\frac{\delta'}{\varphi_2}, \qquad (3)$$

se lo strumento è disposto per un occhio accomodato per una distanza infinita.

Siccome chi guarda con un microscopio sa che l'oggetto è vicino, ed accomoda inconsciamente l'occhio pel *punctum proximum*, così il valore più probabile dell'ingradimento è quello che si ricava dalla (2) ponendovi $\delta = \delta'$, ossia

$$m = -\frac{\varphi_1}{D-\varphi_2}\,\frac{\delta'}{\varphi_2}\left(1 + \frac{\varphi_2 - d}{\delta'}\right).$$

Tuttavia, siccome nei microscopi composti $\varphi_2 - d$ è sempre piccolissima, così si può usare per tutti i casi la formola più semplice (3), e ricavarne numeri molto prossimi al vero.

La formola (3) si trasforma in un'altra di più comodo impiego, se vi eliminiamo la distanza D, la quale non si può misurare direttamente. A quest'uopo osserviamo che quando lo strumento è adattato per un occhio accomodato ad una distanza infinita, come suppone la formola (3), l'immagine data dall'obbiettivo è nel piano focale dell'oculare, e quindi si trova alla distanza $\Delta - \varphi_2$ dal secondo piano principale dell'obbiettivo. Dunque, pella formola [I'] del numero 61, è

$$\frac{1}{\Delta - \varphi_2} + \frac{1}{D} = \frac{1}{\varphi_1}$$

e quindi

$$\frac{\varphi_1}{D - \varphi_1} = \frac{\Delta - \varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1}.$$

Colla sostituzione di questo valore la (3) diventa

$$m_1 = - \frac{\Delta - \varphi_1 - \varphi_2}{\varphi_1 \varphi_2} \delta' . \qquad (4)$$

Ci conduce direttamente a questa formola la considerazione della lente infinitamente sottile equivalente al microscopio. In-

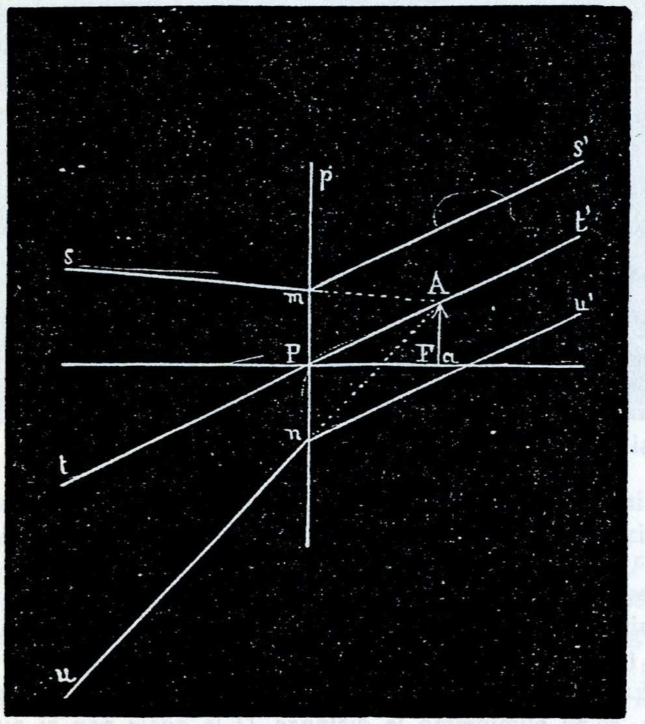

Fig. 59.

fatti, se l'occhio è accomodato all'infinito, l'oggetto $a\,A$ deve trovarsi nel primo piano focale F della lente fittizia Pp, (fig. 59). Allora ad un fascio $s\,t\,u$ di raggi passanti per A corrisponde un fascio emergente cilindrico $s' t' u'$, facente coll'asse l'angolo $A P a$, ossia $\frac{aA}{\varphi}$. Questo è l'angolo visuale con cui l'oggetto si vede attraverso alla lente; ma ad occhio nudo esso si guarderebbe dalla distanza δ' ed apparirebbe coll'angolo visuale $\frac{aA}{\delta'}$, dunque l'ingrandimento è

$$m_1 = \frac{a\Delta}{\varphi} : \frac{a\Delta}{\delta'} = \frac{\delta'}{\varphi}.$$

Mettasi in luogo di φ il suo valore (6″) e quest'espressione di m_1 si trasforma nella (4).

98. *Anello oculare.* — La posizione e la grandezza del circolo oculare si possono determinare col procedimento generale indicato negli articoli 88 e 89; ma più comodamente col mezzo dei punti cardinali dell'intero strumento. Se infatti colle formole (6″), (7″), (8″), oppure con una costruzione si sono determinati i punti P e P' e la distanza focale φ, riesce determinata e si può considerare come data la distanza del vertice della prima faccia dell'obbiettivo dal punto P; e similmente il punto oculare riescirà determinato quando si conoscerà la sua distanza dal punto P': diciamo x ed x' queste due distanze. Siccome il vertice della prima superficie ed il punto oculare sono coniugati, sussiste tra le due distanze x ed x' la relazione [I′] del N. 61;

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\varphi},$$

la quale determina x'. Aggiungendo ad x' la distanza $P_2' P'$ del secondo punto principale dal secondo punto principale dell'oculare, si ha la distanza del punto oculare dal secondo punto principale dell'oculare, distanza che negli articoli 88 ed 89 noi abbiamo designato con d. Siccome poi l'anello oculare e la faccia anteriore dell'obbiettivo sono immagini coniugate, sussistono tra i loro raggi R ed r le relazioni che, secondo le [II″] e [II′] [61], sussistono tra y ed y'; perciò abbiamo

$$\frac{R}{r} = \frac{x}{x'}$$

oppure

$$\frac{R}{r} = 1 + \frac{x}{\varphi}.$$

Supponiamo per un momento che il vertice della faccia esterna dell'obbiettivo coincida col primo piano principale di questo; in questa ipotesi x rappresenta la distanza del primo piano principale dell'obbiettivo dal primo piano principale dell'intiero strumento, ed ha il valore $-P_1 P$, ossia, in grazia della (7'')

$$x = \frac{\varphi_1 \Delta}{\Delta - \varphi_1 - \varphi_2}.$$

Quindi ricordando la (6''):

$$\frac{x}{\vartheta} = -\frac{\Delta}{\varphi_2},$$

e sostituendo nell'ultima espressione di $\frac{R}{r}$:

$$\frac{R}{r} = -\left(\frac{\Delta}{\varphi_2} - 1\right) = -\frac{\Delta - \varphi_2}{\varphi_2}. \qquad (9'')$$

Ricadiamo così sulla formola approssimata (9'') che abbiamo trovato per altra via nel paragrafo precedente [89].

99. *Chiarezza e campo. — Osservazione sulla chiarezza —* Quando si abbiano i valori di m, di d e di r le formole (11) e (15) dei numeri 91 e 92 dànno subito la chiarezza ed il campo.

Ora, relativamente alla chiarezza, l'ultima espressione (9'') del valore di $\frac{R}{r}$ dà luogo ad una osservazione importante. Il numeratore della frazione $\frac{\Delta - \varphi_2}{\varphi_2}$ è la distanza del fuoco dell'oculare dal secondo piano principale dell'obbiettivo, la distanza $P_1' F_2$ (fig. 57); il denominatore invece è la distanza focale dell'oculare, la distanza $F_2 P_2$ (fig. 57); la prima è sempre molto grande a fronte della seconda. Dunque il raggio r del circolo oculare è, nella ipotesi attuale, piccolissimo rispetto al raggio della faccia anteriore della prima lente obbiettiva. Se, per esempio, Δ fosse di 21 centimetri e φ_2 fosse di 1 centimetro, sarebbe

$$\frac{R}{r} = -20:$$

il raggio del circolo oculare sarebbe appena un ventesimo di quello della faccia anteriore dell'obbiettivo.

Nella realtà il vertice della prima superficie non coincide con P_1, ed il valore assoluto di $\frac{x}{\varphi}$ è minore di quello or ora calcolato; il calcolo precedente basta tuttavia a far capire come nel più gran numero dei casi il circolo oculare sia nei microscopi notevolmente minore della prima superficie dell'obbiettivo.

Ora nei microscopi l'apertura dell'obbiettivo è limitata dalla necessità di escludere i raggi non centrali, pei quali non sussistono le proprietà cardinali, sulle quali si appoggia la costruzione dell'apparecchio. Si ritiene come limite il valore di R dato dalla

$$4R = a:$$

l'obbiettivo dei microscopi ha quasi sempre un diametro minore di quello della pupilla. Dunque il circolo oculare è ordinariamente piccolissimo a fronte della pupilla.

Il valore della chiarezza dato dalla formola (11) del N. 91,

$$C = \frac{\omega}{p},$$

sarà dunque, in generale, piccolissimo. Nell'esempio poc'anzi considerato, anche supponendo che la prima lente obbiettiva abbia il diametro della pupilla, il che nella realtà non sarà, troveremmo

$$C = \frac{1}{400}$$

100. *Disposizione pratica dei microscopii.* — Queste considerazioni dimostrano come condizione essenziale pell'uso del microscopio debba essere una buona illuminazione dell'oggetto; le altre condizioni si riducono a queste, che il sistema diottrico si possa comodamente portare alla distanza conveniente dall'oggetto ed adattare alla vista dell'osservatore, e che l'apparecchio sia munito dei pezzi di ricambio e dei mezzi di misura che possono occorrere nelle applicazioni a cui esso è destinato. Le disposizioni adottate dai costruttori sono diverse, ma, se non si ha riguardo che alle cose essenziali, si riducono tutte alla seguente.

Lo strumento si compone di due parti essenziali: il sistema diottrico ed il *porta-oggetti*. Il sistema diottrico è formato dall'obbiettivo e dall'oculare adattati alle estremità di un tubo; il porta-oggetti è una piattaforma sulla quale gli oggetti, chiusi fra due vetri, o semplicemente appiccicati ad un vetro, vengono fermati mediante due regoli a molla. L'asse del tubo che porta le lenti, e che, quanto praticamente è possibile, è prossimo all'asse centrale del sistema diottrico, è l'asse dello strumento; esso è perpendicolare alla faccia superiore della piattaforma del porta-oggetti. L'asse è per lo più verticale, ma ne' migliori strumenti si può inclinare a piacimento per comodo dell'osservatore. In alcuni apparecchi il tubo è formato di due parti unite ad angolo retto, e porta nel gomito un prisma a riflessione totale, che riflette nella direzione della seconda parte del tubo i raggi che vi arrivano parallelamente all'asse della prima; in questo caso la parte del tubo, la quale porta l'obbiettivo, è verticale e la piattaforma del porta-oggetti è fissa in posizione orizzontale.

Il porta-oggetti è fisso, e per regolare la distanza dell'oggetto dall'obbiettivo si sposta il sistema diottrico. A quest'uopo il tubo che porta le lenti è scorrevole in una guida e può innalzarsi od abbassarsi per mezzo di una dentiera e di un rocchetto. Negli strumenti migliori oltre alla dentiera ed al rocchetto, con cui si imprime un movimento rapido a tutto il sistema diottrico, v'ha una vite a passo molto serrato, colla quale si può far camminare lentissimamente l'oculare fino a tanto che la visione riesca distinta. Nei buoni strumenti anche il porta-oggetti è munito di viti; una di queste serve a trasportare lentamente la piattaforma nel suo piano in un senso, l'altra serve a trasportarla nel senso perpendicolare al primo. Con ciò si può condurre l'oggetto nel campo del sistema diottrico.

Bisogna illuminare fortemente l'oggetto. A quest' uopo la piattaforma del porta-oggetti ha nella sua parte mediana, là dove passa l'asse dello strumento, una apertura circolare. Uno specchio concavo, mobile in tutti i sensi, sta al disotto, e si può disporre così, che esso riceva la luce dalle nubi o di una lampada, o di un vetro smerigliato fortemente illuminato e la concentri, secondo l'asse dello strumento, attraverso al foro nominato, sopra gli oggetti che si vogliono osservare. Gli oggetti che si osservano col microscopio sono sempre molto sottili e quasi sempre sono trasparenti; quando non lo fossero si illuminerebbero dal di sopra mediante una lente convergente.

101. *Determinazione sperimentale dell'ingrandimento.* — Quando si adopera il microscopio in ricerche scientifiche è spesso necessario conoscerne l'ingrandimento. Per determinare questo

mediante l'esperienza occorrono un *micrometro* ed una *camera chiara*. Il micrometro è una lastrina di vetro sulla quale sono tracciate divisioni metriche piccolissime, per esempio, centesimi di millimetro. La camera chiara può essere formata con un semplice specchietto piano portante nel mezzo un piccolissimo foro, o più semplicemente ancora con una lastrina di vetro piana e trasparente.

Sia SM l'asse del miscoscopio (fig. 60); in M, sul porta-oggetti, si colloca il micrometro, in S lo specchietto traforato o la lastrina trasparente inclinata di 45° sull'asse SM, in L un regolo diviso in millimetri od in mezzi millimetri, in O, quanto possibile vicino ad S, l'occhio. L'immagine ingrandita del micrometro M, che applicando l'occhio direttamente all'oculare del microscopio apparirebbe in $M' M'$, riflessa da S, apparirà in $M'' M''$, e regolando lo strumento si potrà fare sì che apparisca sovrapposta al regolo L, che si vedrà attraverso al foro dello specchio o per trasparenza attraverso la lastrina di vetro. Si cercheranno allora i tratti che coincidono, e si troverà per esempio che n divisioni dell'immagine ingrandita del micrometro corrispondono ad n_1 millimetri misurati sul regolo. Ciò significa che la lunghezza di n centesimi di millimetro, ingrandita m volte dal microscopio, diventa uguale ad n_1 millimetri; dunque

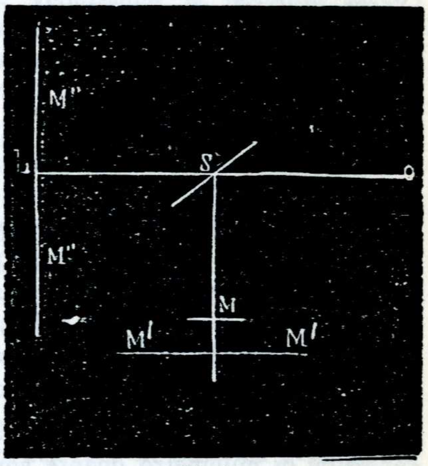

Fig. 60.

$$\frac{n}{100} m = n_1 . \quad \text{donde} \quad m = \frac{100\, n_1}{n}$$

In molti microscopi v'è modo di collocare un micrometro sul diaframma, nel piano focale dell'oculare. Allora, se si posseggono due micrometri, si può misurare l'ingrandimento dell'obbiettivo. Basta a quest'uopo collocare uno dei due micrometri sul porta-oggetti e l'altro sul diaframma. Guardando allora attraverso l'oculare, si vedranno sovrapposte le immagini dei due micrometri; ma una di esse è ingrandita soltanto dall' oculare, e l'altra invece anche dall'obbiettivo. Si cerchino i tratti che coincidono, e si vedrà, per esempio, che n' tratti del micrometro situato sul porta-oggetti corrispondono ad n_1' tratti di quello situato sul diaframma. Ciò significa che la lunghezza di n' centesimi di millimetro moltiplicata per l'ingrandimento m' dell' obbiettivo diventa uguale ad n_1' centesimi di millimetro; dunque

$$n' m' = n_1', \qquad \text{donde} \quad m' = \frac{n_1'}{n'}.$$

Conoscendo l'ingrandimento di tutto il microscopio e l'ingrandimento m' dell' obbiettivo, se ne dedurrà quello m'' dell'oculare dividendo l'uno per l'altro:

$$m'' = \frac{m}{m'}.$$

Per misurare la grandezza di un oggetto microscopico, lo si pone sul porta-oggetti e lo si paragona col micrometro situato nel piano focale dell'oculare; se esso occupa n' divisioni, la sua grandezza reale è di $\dfrac{n'}{m'}$ centesimi di millimetro. Oppure si colloca l'oggetto sopra il micrometro e si pone il tutto sopra il porta-oggetti, allora la grandezza dell'oggetto è di tanti centesimi di millimetro quante sono le divisioni del micrometro che esso ricopre.

§ 5° *Cannocchiali.*

102. *Differenze tra un microscopio e un cannocchiale.* — I microscopii servono a permettere la visione di oggetti che alla distanza del *punctum proximum* non avrebbero una grandezza apparente sufficiente per essere veduti; i cannocchiali servono invece a rendere possibile od a facilitare la visione di oggetti, che, guardati ad occhio nudo, avrebbero una grandezza apparente troppo piccola, perchè lontani. Le due classi di strumenti si trovano perciò, rispetto agli oggetti che si debbono osservare, in condizioni affatto diverse, e nella loro costruzione e nelle proprietà loro debbono esistere differenze essenziali.

Nei microscopii l'oggetto si colloca vicinissimo al primo fuoco dell'obbiettivo e la sua immagine si forma molto al di là del secondo fuoco; è questa una condizione per avere un grande ingrandimento. E siccome l'immagine data dall'obbiettivo deve cadere in vicinanza del primo piano focale dell'oculare, così la distanza Δ fra il secondo piano principale dell'obbiettivo ed il primo piano principale dell'oculare dev'essere *notevolmente* maggiore della somma $\varphi_1 + \varphi_2$ delle distanze focali dell'obbiettivo e dell'oculare. Nei cannocchiali invece l'oggetto è lontanissimo dal fuoco anteriore dell'obbiettivo, e la sua immagine è vicinissima al secondo fuoco; quindi in vicinanza di questo fuoco deve trovarsi il primo fuoco dell'oculare, e la distanza Δ dev'essere prossimamente uguale alla somma $\varphi_1 + \varphi_2$.

Nei microscopii si aumenta l'ingrandimento facendo piccola φ_1 [95]: l'obbettivo ha una distanza focale cortissima, molto minore di quella dell'oculare. Nei cannocchiali invece l'immagine fornita dall'obbiettivo è tanto più grande quanto più è grande la distanza focale di questo: l'obbiettivo ha una distanza focale molto maggiore di quella dell'oculare.

Nei microscopii l'apertura dell'obbiettivo è molto limitata: è limitata dalla necessità di ammettere nello strumento soltanto i raggi che si approssimano alle condizioni dei raggi centrali; quest'apertura è molto minore di quella delle lenti dell'oculare. Nei cannocchiali invece, ove la distanza dell'oggetto ed i raggi di curvatura delle facce dell'obbiettivo sono molto grandi, si possono ammettere raggi incidenti in punti molto lontani dall'asse senza che le aberrazioni che ne risultano superino quelle che si possono correggere mediante una scelta conveniente dei raggi di curvatura; l'apertura dell'obbiettivo è limitata soltanto dalle difficoltà di costruzione, e siccome per la chiarezza si richiede che quell'apertura sia grande, così essa è sempre notevolmente maggiore di quella delle lenti dell'oculare.

Nel microscopio gli oggetti, che si vogliono osservare, si possono a piacimento avvicinare all'obbiettivo, e l'osservatore può sempre trovare quella distanza a cui corrisponde, per lui, la visione distinta; l'adattamento dello strumento alla vista si fa trasportando il sistema diottrico tutto intiero: lo strumento è *a vetri fissi*. Nei cannocchiali invece la posizione dell'immagine obbiettiva è determinata dalla posizione dell'oggetto, all'osservatore non è dato spostarla: per poterla vedere coll'oculare questi deve potere spostare l'oculare rispetto all'obbiettivo finchè cada nel piano dell'immagine il punto che, rispetto all'oculare, è coniugato con quello per cui l'occhio suo è accomodato. Un cannocchiale deve adunque essere uno strumento *a vetri mobili*: il tubo che contiene le lenti deve essere formato di due parti, l'una delle quali, la più grande, porti ad una estremità l'obbiettivo, e l'altra, più piccola e più breve, porti l'oculare e possa farsi avanzare entro l'altra più o meno secondo il bisogno. Per un medesimo osservatore la distanza tra l'obbiettivo e l'oculare dovrà variare ogni qualvolta varierà la distanza dell'oggetto osservato; per un medesimo oggetto quella distanza dovrà variare a seconda delle condizioni dell'occhio dell'osservatore.

103. *Un cannocchiale non ha punti cardinali fissi. Questi punti mancano quando lo strumento è aggiustato per oggetti lontanissimi e per un occhio accomodato per una distanza infinita. Questa è la condizione che si considera come normale.* — Un microscopio è equivalente ad una lente fittizia infinitamente sottile ben determinata, i punti cardinali della quale si possono determinare quando è data la disposizione dello strumento e non variano nè mutando le condizioni dell'occhio, nè mutando l'oggetto, che si osserva: quella lente può servire a studiare tutte le proprietà dello strumento [96]. In un cannocchiale ciò non è possibile: i punti cardinali o non esistono, o, se esistono, sono, pel medesimo strumento, soggetti a variazioni enormi. Supponiamo, per fissare le idee, che l'oculare sia convergente, e consideriamo come infinita la distanza dell'oggetto; l'immagine obbiettiva cadrà nel fuoco dell'obbiettivo. Allora l'osservatore, se ha l'occhio accomodato per una distanza finita, porterà il primo fuoco dell'oculare innanzi al secondo fuoco dell'obbiettivo, darà alla distanza Δ un valore minore della somma $\varphi_1 + \varphi_2$ delle due distanze focali. Seguirà da ciò, che il denominatore $\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta$ delle formole

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 - \varphi_2 - \Delta},$$

$$P_1 P = \frac{\varphi_1 \Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta},$$

$$P_2 P' = -\frac{\varphi_2 \Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta},$$

[75] sarà positivo; e siccome i numeratori $\varphi_1 \varphi_2$, $\varphi_1 \Delta$, $\varphi_2 \Delta$ sono pure positivi, φ sarà positiva, $P_1 P$ positiva, $P_2' P'$ negativa, il sistema sarà convergente ed avrà il primo piano principale fuori dello strumento dalla parte dell'oculare, ed il secondo piano principale fuori dello strumento dalla parte dell'obbiettivo. Siccome in ogni caso Δ differirà pochissimo dalla somma $\varphi_1 + \varphi_2$, così la distanza focale della lente equivalente al sistema sarà grandissima, e la lente medesima sarà lontanissima dal cannocchiale. Se l'osservatore ha l'occhio ipermetropico ed accomodato per raggi convergenti, esso disporrà il sistema così che il primo fuoco dell'oculare stia dietro al secondo fuoco dell'obbiettivo, che cioè sia

$$\Delta > \varphi_1 + \varphi_2.$$

Allora il denominatore delle espressioni precedenti sarà negativo, e la lente equivalente al sistema sarà una lente divergente a lunghissimo fuoco e lontanissima. Se finalmente l'occhio è emmetropico ed a riposo, se cioè è accomodato all'infinito, il primo fuoco dell'oculare si fa coincidere col secondo fuoco dell'obbiettivo; così è

$$\Delta = \varphi_1 + \varphi_2$$

ed i valori di φ, di $P_1 P$ e di $P_2' P'$ diventano infiniti: i punti cardinali vanno all'infinito, ed il sistema non ha lente sottile equivalente, è telescopico.

Quest'ultima è, come si osservò al num. 86, la condizione che si considera come *normale*. Da ciò la denominazione di sistemi telescopici, che noi abbiamo dato ai sistemi privi di punti cardinali.

104. *Obbiettivo.* — L'obbiettivo dei cannocchiali è ordinariamente una lente acromatica di lunga distanza focale: è un sistema disposto come quello che noi abbiamo studiato al num. 77 *d*) e disegnato nella fig. 47. La prima lente è convergente ed è di *crown*, la seconda è divergente ed è di *flint*. Le curvature delle faccie dei due vetri sono, con norme che non potrebbero essere studiate qui, valutate per modo da rendere minime le aberrazioni di sfericità, e da sovrapporre, per quanto è possibile, le immagini dell'oggetto corrispondenti ai diversi colori. Per raggiungere meno incompletamente questi due scopi pei grandi cannocchiali astronomici si fanno anche obbiettivi composti con tre vetri.

Gli oculari sono diversi, ed a seconda delle loro disposizioni si distinguono diverse specie di cannocchiali. Noi distingueremo i cannocchiali con oculare convergente, ed i cannocchiali con oculare divergente.

105. *Cannocchiali con oculare convergente — Oculare negativo o di Huyghens o di Campani, oculare positivo o di Ramsden — Modo di rendere l'asse ottico del cannocchiale parallelo all'asse del tubo.* — I cannocchiali con oculare convergente si dicono comunemente astronomici. Essi fanno apparire gli oggetti capovolti [86].

V' hanno due tipi di oculari convergenti; l'oculare negativo o di Huyghens o di Campani, e l'oculare positivo o di Ramsden L'oculare di Campani è un sistema di due lenti disposte come è detto all'articolo 77 *b*) e rapportato nella fig. 45: è quello stesso che si adopera quasi sempre ne' microscopi [95]. Esso ha sugli altri il merito di dare a parità di circostanze un campo maggiore [92], epperò si preferisce in tutti gli strumenti privi di reticolo. Se il cannocchiale dovesse avere un reticolo, l' oculare negativo obbligherebbe a porlo nell' interno dell'oculare, nel tubo scorrevole, e ciò recherebbe seco un inconveniente di cui diremo fra poco.

L' oculare positivo o di Ramsden è formato di due lenti convergenti composte come quelle della fig. 44, ed agisce come è detto all' articolo 77 *a*). Esso è un vero microscopio semplice. Il suo primo piano focale, in vicinanza del quale deve essere collocata l' immagine, che si vuole osservare, è esterno al sistema, ed il reticolo, che deve essere situato nel piano di quell' immagine, può essere indipendente dal tubo che contiene l' oculare. Perciò in tutti i cannocchiali annessi ad istrumenti scientifici, nei quali è necessario il reticolo, si usa esclusivamente l'oculare positivo.

L'apparecchio allora si dispone così. Un breve tubo porta le due lenti, un altro tubo di lunghezza maggiore porta il diaframma col reticolo. Il primo di questi tubi, l' oculare propriamente detto, entra a sfregamento nell' altro, e l'osservatore può, facendolo avanzare più o meno, portarlo a quella distanza dal reticolo, che a lui conviene per vedere distintamente i fili. Il sistema dei due tubi a sua volta può, con una dentiera ed un rocchetto, od altrimenti, farsi avanzare più o meno dentro al tubo maggiore che porta l'obbiettivo; e con questo movimento di insieme l' osservatore può portare il reticolo nel piano ove l'obbiettivo forma l'immagine reale dell'oggetto osservato. Se col movimento del solo oculare egli avrà preventivamente portato l'oculare alla distanza del reticolo, per la quale i fili sono visti nitidamente, egli vedrà allora distintamente anche l'oggetto: le due immagini, quella dell'oggetto e quella del reticolo, gli appariranno sovrapposte.

Spostando il reticolo si sposta ordinariamente anche l'asse ottico [94] dello strumento. Perciò, a rigore di termini, questo non si può considerare come una retta fissa rispetto al tubo del cannocchiale, se non quando i diversi oggetti, coi quali si collima, sono tutti ad una medesima distanza. Altrimenti ad ogni osservazione si dovrebbe spostare l'oculare, coll'oculare il reticolo, e col reticolo l'asse ottico.

Quindi la necessità, ne' cannocchiali annessi agli strumenti geodetici, di procurare che l'asse ottico sia quanto è possibile prossimo ad essere parallelo all'asse di figura del tubo. Per ottenere questo parallelismo, quando si riconosca non esistere, bisogna spostare nel suo piano il reticolo. Perciò questo non è fissato in modo invariabile al tubo che lo porta, ma è semplicemente tenuto fra le punte di quattro viti, che attraversano la parete del tubo alle estremità di due diametri della sezione di questo mutuamente perpendicolari, girando le quali si possono imprimere al diaframma piccoli movimenti nel suo piano in due direzioni ortogonali. Del modo di riconoscere nei diversi casi della pratica se il parallelismo esista, e di ottenerlo quando non esista, dicono diffusamente tutti i libri di geodesia: qui basterà ricordare il metodo in termini generali. V'hanno due casi:

1° Il cannocchiale è sostenuto da colletti entro i quali esso può rotare attorno all'asse di figura del tubo. È il caso

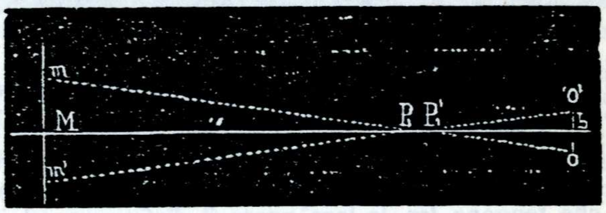

Fig. 61.

dei livelli. Allora si pone a distanza un'asta graduata, una stadia, una mira verticale *M* (fig. 61), e, tenendo il cannocchiale prossimamente orizzontale, ed avendo cura a che due delle viti del reticolo sieno nel piano verticale, si collima con un punto m dell' asta: cioè si fa che l' immagine del punto m coincida coll' incrocicchio o dei fili del reticolo. Se P_1 e P_1' sono i punti principali dell'obbiettivo, l'asse ottico ha così la posizione $P_1' o$ parallela ad $m P_1$. Ciò fatto, si gira il cannocchiale intorno all'asse $M b$ del suo tubo L'incrocicchio dei fili del reticolo viene in o', l' asse ottico in $P_1' o'$, ed il punto, la cui immagine coincide coll' incrocicchio dei fili, diventa m' ove la mira è intersecata dalla $P_1 m'$ condotta dal primo punto principale P_1 parallelamente alla $o' P_1'$. Si segna allora sulla mira il punto M equidistante dai due m ed m', e tenendo l' occhio al cannocchiale, si sposta il reticolo nel suo piano e nella direzione $o' o$ finchè l' incrocicchio dei fili venga a coincidere coll' immagine del punto M. La stessa correzione si fa nel piano delle altre due viti, cioè nel piano perpendicolare al piano $o' P_1' o$.

2° Il cannocchiale è solidario con un' asse orizzontale attorno al quale può girare, ed un circolo verticale graduato, un circolo zenitale, segna gli angoli descritti; l' insieme poi del

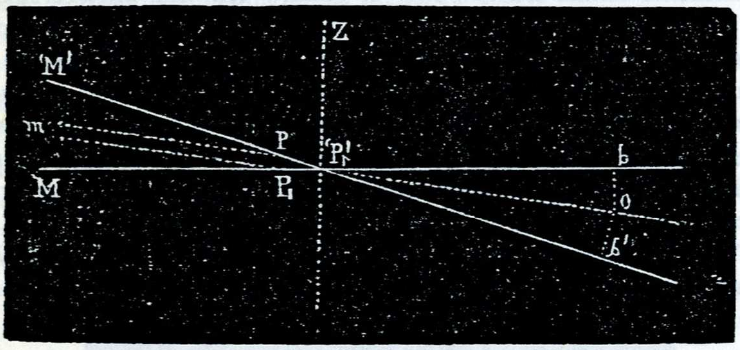

Fig. 62.

cannocchiale, dei sostegni del suo asse e del circolo graduato è girevole attorno ad un asse verticale, ed un altro circolo graduato, un circolo orizzontale, azimutale, misura gli angoli descritti. È questo il caso degli strumenti goniometrici. Delle quattro viti, che tengono fra le loro punte il diaframma ed il reticolo, due sono prossimamente in un piano verticale, e due in un piano orizzontale (quando non fossero collocate così, si ridurrebbero ad esserlo girando un anello esterno in cui le viti sono infisse); colle due prime e col circolo zenitale si fa la correzione nel piano verticale, colle due altre e col circolo azimutale si fa la correzione nel piano orizzontale. Per fare la prima di queste correzioni si diriga il cannocchiale ad un punto lontano m, e si faccia coincidere l'immagine di questo coll'incrocicchio o dei fili (fig 62): l'asse ottico avrà la posizione $P_1' o$ e l'asse di figura del tubo sarà, per esempio, in $M b$. Si legga ciò che il nonio segna sul circolo zenitale: l'angolo letto non sarà in generale quello dell'asse $M b$ del tubo colla verticale $P_1' Z$, ma ne differirà di una quantità costante. Ciò fatto, si faccia fare allo strumento un mezzo giro intorno all'asse verticale, in modo da portare verso di sè l'obbiettivo del cannocchiale, poi si faccia girare il cannocchiale attorno all'asse orizzontale, in modo da dirigere l'obbiettivo di nuovo verso il punto m, e si faccia coincidere l'immagine di questo punto coll'incrocicchio dei fili. L'asse ottico avrà ripreso la posizione primitiva $P_1' o$, ma l'asse di figura del tubo sarà venuto in $M' b'$. Si legga di nuovo l'angolo segnato sul circolo verticale: se la retta $M b$ coincidesse con $P_1' o$, il nuovo angolo sarebbe il supplemento del primo: non coincidendo $M b$ con $P_1' o$, si troverà che il secondo angolo differisce dal supplemento del primo, ed egli è evidente che la differenza è uguale all'angolo $M P_1' M'$. Si divida per metà questa differenza e si faccia rotare il cannocchiale di un angolo uguale a questa metà, cosicchè la $P_1' M'$ diventi parallela alla Pm. Allora, ponendo l'occhio all'oculare, si sposterà il reticolo finchè l'immagine del punto m coincida coll'incrocicchio dei fili. La seconda correzione si fa in modo simile adoperando invece del circolo verticale, il circolo orizzontale.

Negli istrumenti astronomici gli oggetti guardati sono sempre così lontani da potersi considerare come all'infinito. Allora le loro immagini cadono sempre rigorosamente nel piano focale dell'obbiettivo, e basta aver posto il reticolo in quel piano una volta per tutte. In queste condizioni si possono fare lunghe serie di osservazioni senza spostare più altro che l'oculare; l'asse ottico è veramente fisso, solidario col tubo, che forma il corpo del cannocchiale. E questo è il merito principale dell'oculare positivo: coll'oculare di Campani l'asse ottico sarebbe mobile anche in questo caso, e se non fosse fatta con perfezione la correzione di cui abbiamo parlato, si sposterebbe coll'oculare ogni qualvolta cambiano le condizioni dell'occhio.

106. *Cannocchiali con oculare divergente – Cannocchiale di Galileo.* — I cannocchiali con oculare divergente fanno apparire

gli oggetti nella loro vera posizione, diritti. Appartengono a questa specie il cannocchiale di Galileo ed il cannocchiale terrestre o lunga-vista.

L'oculare di Galileo è una semplice lente divergente, una lente biconcava [64], posta così che il suo primo fuoco cada in vicinanza del secondo fuoco dell'obbiettivo. L'oculare agisce come la lente sottile studiata al N. 74, 2° *b*) (fig. 41), e l'intero strumento opera come è indicato nella fig. 63. In questa figura

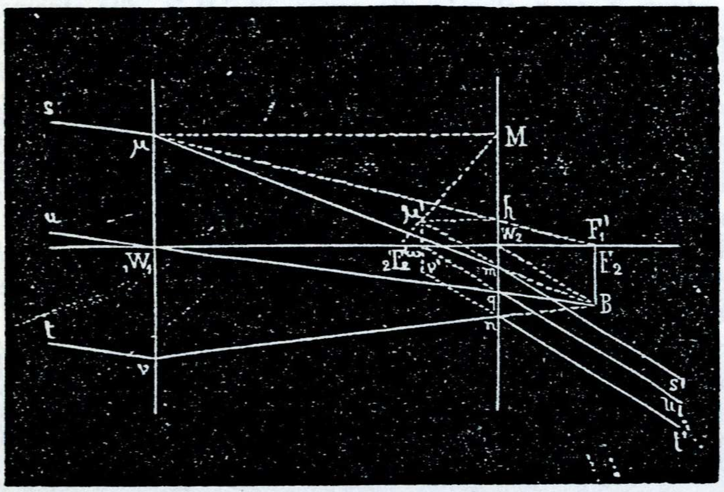

Fig. 63.

si sono supposte, per semplicità, sostituite all'obbiettivo ed all'oculare le lenti infinitamente sottili equivalenti; W_1 è l'obbiettivo, W_2 è l'oculare, $\mu\,\nu$ è l'apertura dell'obbiettivo, $\frac{F_1'}{F_2}$ è il punto ove coincidono, nella condizione normale dello strumento, il secondo fuoco dell'obbiettivo ed il primo fuoco dell'oculare ed F_2' è il secondo fuoco dell'oculare. Le rette s, u, t sono tre rette di incidenza appartenenti ad un fascio cilindrico obliquo, e la figura mostra come si determinino le rette di emergenza corrispondenti: si prolunga la $u W_1$ fino in B ove essa interseca il piano focale $F_1'\ B$, e B è il punto ove convergono tutti i raggi del fascio dopo di avere attraversato l'obbiettivo: le rette di emergenza dell'obbiettivo corrispondenti alle s e t sono adunque μB e νB; e le rette d'emergenza dallo strumento sono $m\,s'$, $q\,u'$, $n\,t'$ parallele alla $W_2\ B$.

Il punto ω ove la retta d'emergenza $q\,u'$ interseca l'asse è il punto oculare, il piano $\mu'\,\omega\,\nu'$ è il piano del circolo oculare, μ' e ν' ove questo piano è intersecato dalle rette d'emergenza s' e t sono i punti coniugati a μ ed a ν, e quindi $\mu'\,\nu'$ è il diametro dell'anello oculare. Per determinare la posizione e la grandezza di questo circolo con una costruzione apposita e più esatta, basta tirare $\mu\,M$ parallela all'asse e congiungere M con F_2'. L'intersezione μ' di questa retta colla $\mu\,W_2$ è il punto coniugato con μ. Si può anche condurre la retta $\mu\,F_2$ e pel punto h ove questa interseca il piano della lente W_2 tirare $h\,\mu'$ parallela all'asse: l'intersezione di questa retta colla $M\,F_2'$ è ancora l'immagine del punto μ. Avuto μ', si abbasserà la perpendicolare $\mu'\,\omega$ sull'asse, e si avrà il punto oculare.

Nel cannocchiale di Galileo non si forma immagine reale, epperò non si può usare reticolo. Il circolo oculare è nell'interno dello strumento e quindi il campo è dato dalle formole (18') e (19') del § 3°.

107. *Cannocchiale terrestre.* — Invece di adoperare come oculare un microscopio semplice, come si fa nel cannocchiale astronomico con oculare positivo, si può adoperare un microscopio composto. Essendo il microscopio composto un sistema divergente [96], si ha così un'oculare divergente fatto con lenti convergenti: tale è l'oculare del cannocchiale terrestre o lunga-vista.

Ma in luogo dell'obbiettivo a cortissimo fuoco, che si ha nei veri microscopii, si ha qui un sistema di due lenti disposte come quelle della figura 46, il quale agisce come è detto nell'articolo 77 *c*). Il sistema di queste due lenti equivale ad una lente unica convergente; ma il suo secondo piano principale è di un buon tratto innanzi del primo, ed i punti cardinali si seguono nell'ordine $P'\,F\,F'\,P$. L'importanza di questa osservazione è evidente: se (fig. 46) si ponesse nel piano P una lente di lunghezza focale uguale a quella del sistema, essa darebbe dell'oggetto $a\,A$, che qui è l'immagine data dall'obbiettivo, una immagine uguale a quella $b\,B$ data dal sistema, ma situata a destra di questa ad una distanza uguale a $P'\,P$. Di altrettanto dovrebbe portarsi più a destra l'oculare del microscopio, col quale l'immagine $b\,B$ dev'essere osservata: il cannocchiale dovrebbe essere più lungo. L'adoperare per rendere divergente l'oculare, ossia per raddrizzare le immagini, due lenti invece di una sola ha dunque per effetto di raccorciare lo strumento.

Nella figura 64 sono segnate le posizioni dei punti cardinali $P_1'\ F_1\ F_1'\ P_1$ del sistema di cui abbiamo parlato o, come suol dirsi, delle due lenti di raddrizzamento, e le posizioni dei punti cardinali $P_2'\ F_2\ F_2'\ P_2$ di un oculare di Campani, che insieme a quello completa il microscopio che serve da oculare nel cannocchiale terrestre. Per mezzo di questi punti la costruzione studiata nel N. 76 ci fa conoscere la posizione dei punti car-

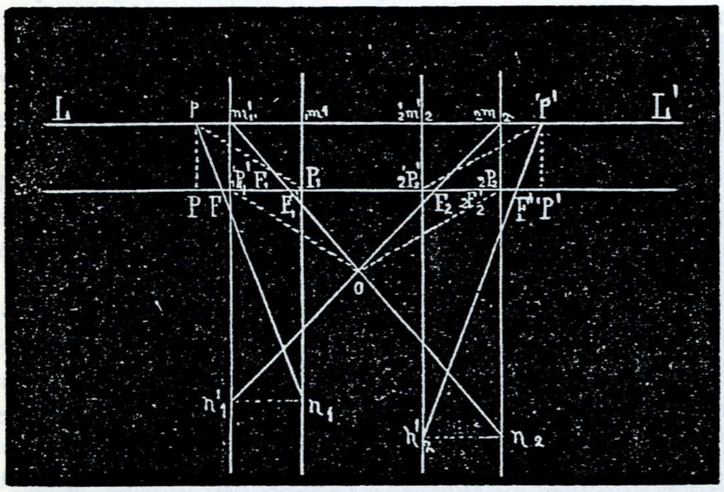

Fig. 64.

dinali dell'oculare completo. A quest'uopo si tiri $L\,L'$ parallela all'asse: questa, considerata come retta d'incidenza, dà luogo, rispetto al primo sistema, alla retta d'emergenza $m_1'\ F_1'\ n_2$, e considerata come retta d'emergenza, corrisponde, rispetto al secondo sistema, alla retta d'incidenza $m_2\ F_2\ n_1'$. Le due rette $m_1'\,n_2$, $m_2\,n_1'$ si tagliano in o, punto coniugato, rispetto ai due sistemi, coi due punti ove $L\,L'$ interseca i due piani principali cercati. Perciò se si tirano $o\,P_1'$ ed $o\,P_2$, e per P_1 e P_2' le $P_1\,p$, $P_2'\,p'$ ad esse parallele, si hanno in p e p', ove queste tagliano la $L\,L'$, due punti dei due piani principali. P e P' sono adunque i due punti principali. Per avere i fuochi tiro $n_1'\,n_1$ ed $n_2\,n_2'$ e conduco le rette $p\,n_1$ e $p'\,n_2'$. I punti F ed F', ove queste intersecano l'asse, sono i due fuochi del sistema complesso. Vedesi che nell'intiero oculare i punti cardinali stanno nell'ordine $P\ F\ F'\ P'$, e che perciò l'oculare è divergente. Vedesi inoltre, se si ha riguardo alla posizione dei punti cardinali dei due sistemi componenti rispetto alle lenti, che tutti quattro i punti cardinali del sistema stanno fuori del tratto di tubo occupato dalle quattro lenti; i due primi P, F stanno a sinistra, davanti alla prima lente, i due altri P', F' stanno a destra fuori dello strumento.

Alle stesse conclusioni ci condurrebbero le formole (6''), (5''), (7''), del N. 75 quando noi ripetessimo qui quanto al N. 96 abbiamo detto circa il microscopio.

La figura 65 dà la disposizione del cannocchiale completo: $\mu W_1 \nu$ è l'obbiettivo, supposto per semplicità infinitamente sot-

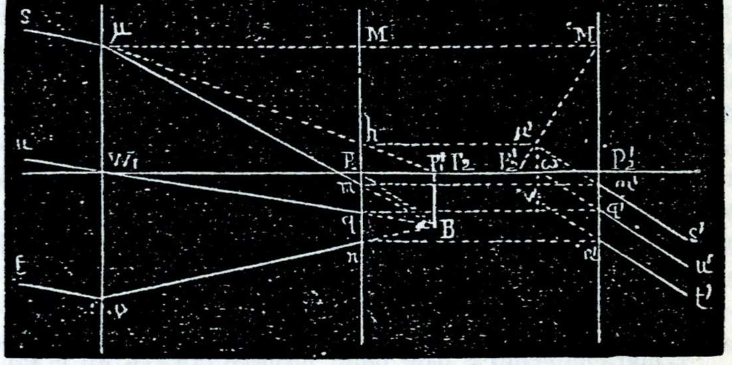

Fig. 65.

tile, $P_2\, F_2\, F_2'\, P_2'$ sono i punti cardinali dell'oculare; con F_2 coincide il secondo fuoco F_1' dell'obbiettivo. Le rette s, u, t, sono tre raggi incidenti paralleli attraversando l'obbiettivo, essi si trasformano in tre raggi convergenti nel punto B ove la $u W_1$ prolungata interseca il piano focale $F_1'\, B$ dell'obbiettivo. Le tre rette $\mu\, B$, $W_1\, B$, $\nu\, B$ tagliano il primo piano principale P_2 dell'oculare nei punti m, q, n, coi quali sono coniugati, rispetto all'oculare, i punti m', q', n', che si ottengono tirando per m, q, n tre parallele all'asse. I tre raggi emergono adunque secondo le rette $m'\, s'$, $q'\, u'\, n'\, t'$ condotte dai punti m', q', n' parallelamente alla $P_2\, B$. L'intersezione della retta $q'\, u'$ coll'asse darebbe il punto oculare, e quelle delle rette $m'\, s'$, $n'\, t'$ col piano oculare determinerebbero il diametro del circolo oculare. Per determinare la posizione e la grandezza di questo circolo con una costruzione apposita possiamo tirare la retta $\mu\, M\, M'$ parallela all'asse ed unire M' con F_2'; tirare poi la $\mu\, F_2$ e pel punto h, ove essa interseca il piano principale P_2, tirare una parallela all'asse; il punto μ' ove quest'ultima retta taglia la $M\ F_2'$ è il punto coniugato con μ; $\mu'\omega$ è il raggio del circolo oculare, ω è il luogo dell'occhio.

Vedesi con questa costruzione, che il punto oculare è compreso fra i due punti F_2' e P_2': ora questi sono esterni allo strumento, dunque anche *l'anello oculare si troverà fuori del cannocchiale.*

È questa la principale differenza che passa tra il cannocchiale terrestre fatto con lenti convergenti ed il cannocchiale di Galileo. Essendo esterno l'anello oculare, il campo si dovrà calcolare colle formole (15') e (15'') del § 3°.

Nel cannocchiale terrestre si hanno due immagini reali: una in F_1' e l'altra nel piano coniugato col piano F_1' rispetto al sistema delle due lenti di raddrizzamento e della lente di campo: ma non si usano mai reticoli.

108. *Ingrandimento.* — Le proprietà dei cannocchiali sono un caso particolare di quelle studiate nel § 3° per gli strumenti composti in generale, e le formole generali dimostrate in quel paragrafo si applicano ai cannocchiali ponendovi semplicemente

$$\delta' = D = a\ .$$

L'ingrandimento è dato dalle formole (4), (5), (6) e (7) del N. 87. Detta D la distanza dell'oggetto dal primo piano principale dell'obbiettivo, l'ingrandimento è

$$m = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\frac{D}{D-\varphi_1}\left(1+\frac{\varphi_2-d}{\delta}\right), \tag{4}$$

se il cannocchiale è disposto per un occhio accomodato per la distanza δ, ed è

$$m = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\frac{D}{D-\varphi_1}, \tag{5}$$

se l'occhio è accomodato per una distanza infinita. Se si considera come infinita la distanza D dell'oggetto, al fattore $\dfrac{D}{D-\varphi_1}$ si può sostituire l'unità, e l'ingrandimento diventa nei due casi:

$$m = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\left(1+\frac{\varphi_2-d}{\delta}\right), \tag{6}$$

oppure

$$m_1 = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}. \tag{7}$$

Le condizioni dello strumento, per le quali vale l'ultima formola, sono quelle che si considerano come normali [103]; siccome, per altra parte, in tutti i casi $\frac{D}{D-\varphi_1}$ è molto prossimo all'unità, ed il valore di $\frac{\varphi_2 - d}{\delta}$ è piccolissimo, così si può ritenere la formola (7) come valida in tutti i casi. Essa ci dice, che l'ingrandimento di un cannocchiale è uguale e di segno contrario al rapporto tra la distanza focale dell'obbiettivo e la distanza focale dell'oculare. Se l'ingrandimento così calcolato è positivo, gli oggetti guardati per mezzo del cannocchiale appariscono nella loro vera posizione, diritti; se l'ingrandimento risulta negativo, gli oggetti guardati col cannocchiale appariscono capovolti.

Potevamo prevedere questo teorema. Infatti, se l'oggetto è all'infinito, i raggi partiti da uno qualunque de' suoi punti arrivano allo strumento paralleli, e se lo strumento è aggiustato per un occhio accomodato ad una distanza infinita, quei raggi emergono paralleli; il cannocchiale, in queste condizioni, è un sistema telescopico [46]. Ma si è dimostrato al N. 50, che se due fascetti cilindrici di raggi luminosi facenti tra di loro un angolo ω vengono ad attraversare un sistema telescopico, essi emergono da questo sistema formando tra di loro un angolo ω', che sta ad ω in un rapporto costante. Si è dimostrato inoltre, che se il sistema telescopico è decomponibile in due sistemi non telescopici, dei quali il primo abbia per prima distanza focale la lunghezza f_1, ed il secondo abbia per seconda distanza focale la lunghezza f_2', il valore costante m del rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$ vale $\frac{f_1}{f_2'}$. Nel caso nostro il sistema è composto dell'obbiettivo e dell'oculare; pel primo è $f_1 = -\varphi_1$ e pel secondo è $f_2' = \varphi_2$; dunque

$$\frac{\omega'}{\omega} = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}. \tag{7'}$$

Ora è facile vedere che il rapporto $\frac{\omega'}{\omega}$, che nel N. 50 abbiamo denominato ingrandimento angolare del sistema telescopico, è, nel caso nostro, l'ingrandimento del cannocchiale anche dando alla parola il significato voluto dalla definizione del N. 87. Immaginiamo infatti che l'oggetto guardato sia un segmento di retta normale all'asse; e diciamo a e b le sue estremità. I punti a e b mandano all'obbiettivo due fascetti cilindrici di raggi, i quali fanno tra di loro un angolo ω; e se nel sito occupato dal vertice dell'obbiettivo si collocasse il punto nodale anteriore dell'occhio, si formerebbero sulla retina le immagini di a e di b nei punti, ove questa è intersecata dalle parallele ai due fascetti condotte dal secondo punto nodale: l'angolo visuale con cui apparirebbe l'oggetto $a\,b$, sarebbe quello compreso fra queste due rette, sarebbe ω. Quando invece l'oggetto è guardato col cannocchiale, si producono le immagini dei due punti a e b, nei punti dove la retina è incontrata dalle rette condotte dal secondo punto nodale dell'occhio parallelamente ai due cilindri emergenti, i quali fanno tra di loro l'angolo ω': l'angolo visuale con cui apparisce l'oggetto $a\,b$ è ω'. Ma [87] il rapporto dell'angolo visuale, con cui un oggetto apparisce quando è guardato per mezzo dello strumento, all'angolo visuale con cui apparirebbe, guardato ad occhio nudo, è ciò che dicesi ingrandimento, dunque $\dfrac{\omega'}{\omega}$ è l'ingrandimento del cannocchiale, e la formola (7') è identica alla (7).

109. *Luogo dell'occhio.* — Il luogo dell'occhio ci è dato dalla formola (8) del N. 88:

$$d = \frac{\varphi_2\,\Delta}{\Delta - \varphi_2},$$

nella quale d è la distanza del punto oculare dal secondo piano principale dell'oculare, e Δ è la distanza tra il secondo piano principale dell'obbiettivo ed il primo piano principale dell'oculare. Nel caso del cannocchiale aggiustato telescopicamente è $\Delta - \varphi_2 = \varphi_1$, e quindi possiamo anche scrivere:

$$d = \Delta\,\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \quad \text{od anche} \quad d = -\frac{\Delta}{m_1}.$$

110. *Anello oculare. — Sua relazione coll'ingrandimento. — Regola di Lagrange.* — Il raggio dell'anello oculare è dato in generale dalla formola (10) del N. 90, la quale nel caso nostro si riduce alla

$$\frac{R}{r} = m, \qquad (10')$$

e ci dice, che il rapporto del diametro dell'obbiettivo al diametro dell'anello oculare è uguale all'ingrandimento del cannocchiale.

Questa formola è vera comunque sia aggiustato il cannocchiale. Quando lo strumento è aggiustato per un occhio accomodato ad una distanza infinita essa diventa un caso particolare di una formola generale che noi abbiamo dimostrato pei sistemi telescopici. Abbiamo dimostrato [48] che in qualunque sistema telescopico l'ingrandimento lineare è costante, e che, se il sistema è decomponibile in due non telescopici, dei quali il primo abbia la seconda distanza focale f'_1, ed il secondo abbia la prima distanza focale f_2, il valore costante dell'ingrandimento lineare è:

$$l = \frac{f_2}{f'_1}.$$

Nel nostro caso è $f_2 = -\varphi_2$, $f'_1 = \varphi_1$, dunque

$$l = -\frac{\varphi_2}{\varphi_1} = \frac{1}{m_1},$$

come d'altronde si è dimostrato al N. 51 pei sistemi telescopici nei quali il primo e l'ultimo mezzo hanno il medesimo indice di rifrazione. Ora per ingrandimento lineare l noi intendiamo il rapporto della lunghezza di un segmento di retta preso sull'immagine alla lunghezza del segmento corrispondente preso sull'oggetto (supposto piano); considerando come oggetto la faccia anteriore dell'obbiettivo e come immagine il circolo oculare, abbiamo quindi

$$l = \frac{r}{R},$$

dunque sostituendo nell'ultima formola,

$$\frac{R}{r} = m_1.$$

Pei sistemi telescopici in generale si è dimostrato [49] che l'ingrandimento lineare del sistema è uguale al rapporto del diametro di un fascio cilindrico di raggi emergenti al diametro del corrispondente fascio cilindrico di raggi incidenti. Possiamo applicare questo teorema ad un cannocchiale aggiustato telescopicamente, e dire: l'ingrandimento lineare del cannocchiale è uguale al rapporto del diametro di un fascetto cilindrico di raggi emergenti al diametro del corrispondente fascio incidente. Siccome poi l'ingrandimento angolare è, in questo caso, uguale al valor reciproco dell'ingrandimento lineare, così possiamo dire ancora che l'ingrandimento di un cannocchiale è uguale al rapporto del diametro di un pennello cilindrico incidente al diametro del corrispondente pennello cilindrico emergente.

Questo teorema generale dovuto a LAGRANGE è evidentemente contenuto nel teorema precedente.

111. *Chiarezza.* — Noi sappiamo [91] che la chiarezza di uno strumento ottico cresce col crescere del diametro dell'obbiettivo fintantochè l'anello oculare è minore della pupilla, e che prende un valor massimo, che non varia più col crescere del diametro dell'obbiettivo, quando l'anello oculare ha raggiunto la grandezza della pupilla. A questo valore della grandezza dell'anello oculare corrisponde un valore R del raggio della prima faccia dell'obbiettivo, che, detto ρ il raggio della pupilla, è determinato dall'equazione (13') del N. 91:

$$R = m\,\rho.$$

Quando difficoltà di costruzione od altre circostanze non lo impediscano, si dovrà dare alla semiapertura dell'obbiettivo un valore non inferiore a quello dato da questa formola: il diametro che deve darsi all'obbiettivo è proporzionale all'ingrandimento.

Supponendo, per esempio, che la pupilla abbia il raggio di 2 millimetri, noi troviamo coll' ultima formola, che pei valori dell'ingrandimento

10, 20, 50, 100, 200,

il diametro dell'obbiettivo dovrebbe essere di

4, 8, 20, 40, 80,

centimetri.

La difficoltà di costruire obbiettivi di grande diametro rende impossibile di ottenere la massima chiarezza negli strumenti di grande ingrandimento, e limita perciò anche l'ingrandimento praticamente ottenibile. Bisogna però fare una osservazione circa i cannocchiali destinati a ricerche astronomiche. Siccome le stelle fisse non appariscono sensibilmente ingrandite dal cannocchiale, così il solo effetto di questo è di aumentare nel rapporto di R^2 a ρ^2 la quantità di luce mandata nell' occhio. Per altra parte lo splendore generale del cielo diminuisce nel rapporto di r^2 a ρ^2; e per questo duplice motivo la stella appare più brillante. Quindi è che bisogna adoperare ingrandimenti molto grandi quando si vogliano scoprire stelle piccole, ed ingrandimenti moderati quando si vogliano osservare corpi di sensibile grandezza apparente.

112. *Campo.* — Il campo di un cannocchiale è dato senz'altro dalle formole (15') (15'') del N. 92, oppure dalle (18') e (19') del N. 93. Se l'anello oculare è esterno, la metà del campo è

$$\Psi = -\frac{R' - r}{d - v'}\frac{1}{m_1}, \quad \text{oppure } \Psi = \frac{R' - r}{d - v'}\frac{\varphi_2}{\varphi_1},$$

e se l'anello oculare è interno, è

$$\Psi' = \frac{\rho - r}{d_1 + h}\frac{1}{m_1}.$$

quando il circolo oculare è minore della pupilla, e

$$\Psi'' = \frac{r - \rho}{d_1 + h}\frac{1}{m_1},$$

quando il circolo oculare è maggiore della pupilla.

113. *Misura sperimentale dell'ingrandimento. — Metodi diretti.* — Per misurare sperimentalmente l'ingrandimento di un cannocchiale si hanno parecchi procedimenti. Di questi alcuni sono diretti: in essi si paragonano o si misurano direttamente l'angolo di due pennelli incidenti e l'angolo dei corrispondenti pennelli emergenti; altri sono indiretti: con questi si misurano grandezze legate all'ingrandimento dalle formole su esposte, per mezzo delle quali l'ingrandimento si può calcolare.

Fra i metodi diretti il più semplice consiste nel guardare un oggetto con un occhio attraverso al cannocchiale e coll'altro occhio direttamente; con qualche esercizio si riesce a vedere sovrapposte le due immagini: quella ingrandita data dal cannocchiale sulla retina di un occhio e quella più piccola che si forma sulla retina dell'occhio con cui si guarda fuori del cannocchiale. Se si sa valutare quante volte una dimensione dell'immagine minore sembri contenuta nella dimensione omologa dell'immagine ingrandita, si ha in questo numero l'ingrandimento. Questa valutazione del rapporto delle due immagini si può fare con una certa approssimazione se l'oggetto guardato è un piano diviso in parti uguali, come, per esempio, un tetto di cui le tegole formano delle striscie di uguale larghezza, il bugnato di un edifizio, una inferriata, o meglio una scala appositamente divisa in larghi tratti. Se n divisioni viste col cannocchiale coprono n' divisioni viste ad occhio nudo, l'ingrandimento è

$$m = \frac{n'}{n}.$$

Invece di confrontare le grandezze apparenti di un medesimo oggetto visto col cannocchiale e visto ad occhio nudo, si possono paragonare le distanze, alle quali due oggetti uguali debbono essere collocati acciocchè la grandezza apparente dell'uno, guardato col cannocchiale, sia uguale alla grandezza apparente dell'altro, guardato ad occhio nudo. Si può operare così. Segnare sopra due cartoni due circoli bianchi in campo nero, uguali e del diametro di 20 a 30 centimetri; portarne uno ad una distanza di 50 a 100 metri onde guardarlo col cannocchiale, e far portare l'altro ad una tale distanza, che, visto ad occhio nudo apparisca uguale al primo. L'uguaglianza delle due grandezze apparenti si accerta sia sovrapponendo le due immagini col dirigere convenientemente l'asse dell'occhio con cui si guarda liberamente, sia facendole venire a contatto. Quando l'uguaglianza apparente è ottenuta, non si ha che da misurare la distanza del disco guardato ad occhio nudo, e dividere per questa la distanza del disco che si guarda per mezzo del cannocchiale; il rapporto è uguale all'ingrandimento.

Il paragone delle grandezze apparenti si può fare con maggiore precisione e con molto maggiore comodità frapponendo tra l'oggetto ed il cannocchiale una lente, che rendendo paralleli i raggi partiti da uno qualunque dei punti dell'oggetto, permetta di osservare questo da una piccola distanza col cannocchiale disposto per guardare lontanissimo. Il Waltenhofen opera così. Egli applica con cera all'obbiettivo una lente sottile di lunga distanza focale, colloca davanti al cannocchiale così modificato, nel piano focale anteriore della lente su nominata, un regolo graduato così, che le divisioni sieno nitidamente visibili da chi sta in vicinanza del cannocchiale, ed aggiusta il cannocchiale in modo da vedere per mezzo suo distintamente il regolo. Siccome la lente applicata all'obbiettivo trasforma in pennelli cilindrici i pennelli luminosi divergenti partiti dai punti del regolo, così il cannocchiale si trova allora aggiustato per vedere all'infinito. Così disposte le cose, il Waltenhofen guarda il regolo con un occhio liberamente e coll'altro attraverso il cannocchiale: dal numero delle divisioni del regolo visto ad occhio nudo, contenute in una divisione dell'immagine ingrandita dal cannocchiale, egli deduce l'ingrandimento del cannocchiale. Il modo è facile ad intendersi. Sieno φ la distanza focale della lente applicata all'obbiettivo, l la lunghezza del cannocchiale, n il numero di divisioni suddetto, k la lunghezza di una divisione del regolo. L'angolo dei due pennelli cilindrici, nei quali la lente aggiunta trasforma i fascetti partiti dalle due estremità di un tratto della scala, è $\frac{k}{\varphi}$, e quindi, se m rappresenta l'ingrandimento, l'angolo con cui i due pennelli emergono dall'oculare è $m\frac{k}{\varphi}$. Ma quest'angolo è uguale a quello sotto cui appariscono, ad occhio nudo, n divisioni del regolo, angolo che vale $\frac{n\,k}{\varphi+l}$, dunque

$$m\,\frac{k}{\varphi}=\frac{n\,k}{\varphi+l},$$

donde

$$m=\frac{n\,\varphi}{\varphi+l}.$$

I metodi precedenti obbligano l'operatore a guardare contemporaneamente co' due occhi posti in condizioni diverse, a sovrapporre le due immagini ed a paragonarle. Ora questo confronto, che, con qualche esercizio, si riesce a fare con sufficiente approssimazione quando le due immagini non hanno grandezze molto diverse, quando l'ingrandimento è piccolo, riesce difficilissimo ed incerto quando l'immagine vista per mezzo del cannocchiale supera di molto l'altra, quando l'ingrandimento è considerevole. Allora si dovrebbero contare molte divisioni, e ciò richiederebbe un tempo lungo, durante il quale è impossibile che l'occhio non si stanchi e non si sposti. L'inconveniente si può togliere adoperando, come si fa pel microscopio, una camera chiara. Come si è detto parlando della misura dell'ingrandimento del microscopio [101], può servire da camera chiara una semplice lastrina piana di vetro. Si dirige orizzontalmente il cannocchiale ad un oggetto diviso in parti uguali, la cui distanza dall'obbiettivo sia conosciuta, ad un'asta divisa appositamente, se si vuole operare con esattezza. Si pone allora contro all'oculare una lastrina di vetro trasparente, e la si tiene inclinata di 45 gradi all'asse del cannocchiale, in modo che ponendo l'occhio al di sopra, e guardando dall'alto in basso si riceva riflessa dalla lastrina, la luce che emerge dal cannocchiale, e si veda nel tempo stesso, per trasparenza, un foglio di carta collocato su di un tavola verticalmente sotto all'oculare. Così si vede l'immagine ingrandita dell'asta graduata, o di quell'oggetto qualunque al quale è diretto il cannocchiale, proiettata sul foglio di carta, e con una matita vi si può disegnare. Si misura la lunghezza di una divisione della scala sul disegno così ottenuto, e la si divide per la distanza dell'occhio dal foglio di carta: il quoziente è la grandezza apparente di una divisione vista col cannocchiale. Si divide similmente la lunghezza effettiva di una divisione della scala pella distanza di questa dall'obbiettivo, ed il quoziente è la grandezza apparente di una divisione guardata ad occhio nudo. Il rapporto tra il primo quoziente ed il secondo è l'ingrandimento.

I procedimenti che abbiamo descritto sono altrettanti artifizii per misurare senza bisogno di goniometri il rapporto tra l'angolo di due cilindretti lucidi emergenti e l'angolo de' corrispondenti cilindretti incidenti. Ma egli è molto più esatto e, nelle misure fatte con iscopo scientifico, di gran lunga preferibile misurare direttamente quei due angoli per mezzo di un teodolite. Gauss che fu il primo a misurare in questo modo l'ingrandimento dei cannocchiali, operava così. Egli volgeva l'oculare del cannocchiale verso due punti lontani così scelti, che guardando col cannocchiale capovolto, coll'occhio applicato all'obbiettivo, essi si vedessero entrambi senza spostare lo strumento. La distanza angolare dei due punti visti in questo modo riesciva impicciolita tanto, quanto dal cannocchiale adoperato nel modo ordinario sarebbe stata ingrandita. Così disposto il cannocchiale, Gauss collocava in faccia all'obbiettivo un teodolite, e dirigeva il cannocchiale di questo prima in modo che coincidesse col crocicchio del reticolo l'immagine di uno dei due punti, e poi in modo da far coincidere coll'incrocicchio dei fili l'immagine dell'altro punto. L'angolo per cui il cannocchiale del teodolite rotava passando dalla prima posizione alla seconda era uguale a quello con cui emergevano dall'obbiettivo del cannocchiale soggetto alla esperienza i cilindretti lucidi partiti dai due punti. Collimando poi direttamente coi punti stessi, egli misurava l'angolo dei due cilindretti incidenti nell'oculare: e quest'angolo diviso pel primo dava l'ingrandimento cercato.

Il Porro ha modificato il metodo Gauss in ciò, che invece di volgere ai due punti l'oculare e misurare l'angolo impicciolito dei cilindretti lucidi emergenti dall'obbiettivo, egli volgeva ai due punti l'obbiettivo del cannocchiale studiato, e con un goniometro misurava l'angolo ingrandito dei cilindretti emergenti dall'oculare. Così operando si perde in chiarezza perchè gli oggetti guardati sono ingranditi due volte, dal cannocchiale soggetto all'esperienza e dal cannocchiale del teodolite; ma si guadagna in esattezza, perchè l'angolo da misurarsi essendo maggiore, l'errore relativo della misura riesce minore.

Quando il reticolo del cannocchiale sottoposto all'esperienza contenesse fili di nota distanza angolare, basterebbe collimare col cannocchiale del goniometro successivamente questi fili. Dividendo l'angolo misurato per la distanza angolare dei fili, si avrebbe l'ingrandimento.

114. *Metodi indiretti. — Dinametri.* — I metodi indiretti per la misura dell'ingrandimento si riducono sostanzialmente a due.

Il primo, il più ovvio, consiste nel misurare separatamente la lunghezza focale φ_1 dell'obbiettivo e la distanza focale φ_2 dell'oculare [108], e nel calcolare poi l'ingrandimento per mezzo della formola (7):

$$m_1 = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2}.$$

La distanza focale φ_1 dell'obbiettivo, sempre assai grande, si può misurare con molta precisione e comodamente collocando quest'obbiettivo in faccia all'obbiettivo di un altro cannocchiale preventivamente accomodato per guardare a grandissima distanza, e cercando in quale posizione deve collocarsi uno scritto od un minuto disegno onde vederlo attraverso al cannocchiale ed all'obbiettivo soggetto all'esperimento. Il piano ove è collocato lo scritto quando la visione è distinta è il piano focale cercato. I punti principali dell'obbiettivo stesso sono per lo più in una posizione nota e poco distanti dai vertici delle faccie esterne, quindi conoscendo la posizione del fuoco, si ha con sufficiente approssimazione la distanza focale. Ma meno facile e per lo più incerta è la determinazione della distanza focale dell'oculare, epperò il metodo di cui si tratta non può condurre a risultati prossimi al vero se non con un'operazione laboriosa e delicata.

L'altro metodo indiretto per la misura dell'ingrandimento dei cannocchiali consiste nel determinare il rapporto del diametro dell'obbiettivo al diametro del circolo oculare. Questo rapporto, uguale a quello dei raggi $\frac{R}{r}$, è uguale all'ingrandimento [110]. Nel misurare il diametro dell'obbiettivo non v'ha difficoltà; a misurare il diametro dell'anello oculare servono piccoli apparecchi appositi ai quali si è dato il nome di *dinametri*.

Il dinametro più semplice è quello di Ramsden, il quale serve quando il circolo oculare è situato fuori del cannocchiale. Esso è costituito da tre piccoli tubi scorrevoli l'uno dentro all'altro. Il primo di questi tubi è aperto da ambe le parti e si può fermare all'oculare del cannocchiale per mezzo di tre viti; il secondo è chiuso all'estremità rivolta verso l'oculare da una lamina di mica sulla quale è inciso un micrometro; il terzo porta una lente convergente di corto fuoco, la quale serve come microscopio semplice per vedere distintamente il micrometro. Per servirsi di questo apparecchio, si volge il cannocchiale ad una superficie uniformemente illuminata od alla luce diffusa del cielo, si sposta la lente del dinametro facendo avanzare od estraendo il tubo che la porta, finchè ponendovi l'occhio si vedano nitidamente i tratti del micrometro, e finalmente facendo avanzare o retrocedere il sistema del micrometro e della lente del dinametro, si porta il micrometro a quella distanza dall'oculare, per la quale il diametro del circolo illuminato, che il fascio de' raggi emergenti dall'oculare disegna sul micrometro, è minimo. Questo circolo di diametro minimo è l'immagine della faccia anteriore dell'obbiettivo, è l'anello oculare. Si contano le divisioni del micrometro che esso ricopre, e se ne ha il diametro; si divide per questo diametro quello della faccia anteriore dell'obbiettivo, e si ha nel quoziente l'ingrandimento cercato.

Il dinametro di Ramsden non si può adoperare quando l'anello oculare è situato nell'interno dello strumento; è esente da questo inconveniente il *dinametro a doppia immagine* di Dollond. Questo dinametro è formato di due lenti convergenti, che operano insieme come l'obbiettivo e l'oculare di un microscopic composto di piccolo ingrandimento: la prima dà una immagine del circolo oculare, la seconda serve come microscopio semplice per osservare questa immagine. Ma la lente anteriore, quella che funziona come obbiettivo, è divisa in due parti secondo un diametro, e le due semilenti si spostano parallelamente al diametro comune, per spazi uguali l'una in un senso e l'altra nell'altro, quando si gira una vite micrometrica di cui l'apparecchio è munito. La vite micrometrica porta una testa graduata per mezzo della quale si misura con molta esattezza la distanza dei centri delle due semilenti. L'apparecchio viene applicato al tubo dell'oculare del cannocchiale, su cui si esperimenta, in modo tale che possa farsi avanzare e retrocedere finchè il disco luminoso, immagine della prima superficie dell'obbiettivo sia visto colla maggiore nitidezza possibile. Quando ciò è ottenuto, lo strumento è preparato per la misura. Si gira allora la vite micrometrica. Tosto si vedono comparire, in luogo dell'unico disco, due dischi in massima parte sovrapposti, i centri dei quali vanno allontanandosi l'uno dall'altro di mano in mano che si allontanano i centri delle due semilenti. Si seguita a girare la vite finchè i due dischi sieno diventati tangenti l'uno all'altro. Dopo di ciò si legge sulla testa della vite micrometrica il numero dei giri e la frazione di giro per cui la vite si è fatta rotare, e da questo numero, che è proporzionale allo spostamento reciproco delle due semilenti, si deduce col calcolo il diametro dell'anello oculare.

È facile vedere come il diametro del circolo oculare e la distanza reciproca che hanno i centri delle due semilenti quando

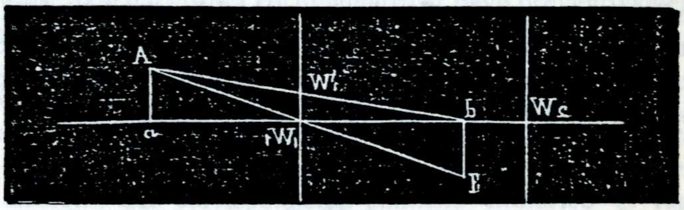

Fig. 66.

i due dischi lucidi appariscono tangenti, sieno tra loro collegati. Immaginiamo, per semplicità, che le lenti, di cui si compone l'apparecchio, sieno infinitamente sottili, e supponiamo che in W_1 (fig. 66) sia la lente divisa ed in W_2 la lente oculare del dinametro. Sieno a il punto oculare, e bB il piano coniugato al piano dell'anello oculare rispetto alla lente W_1. Questo piano dovrà essere, rispetto all'oculare W_2, coniugato con quello per cui è accomodato l'occhio dell'osservatore; se quest'occhio è emmetropico ed accomodato ad una distanza infinita, il piano bB deve coincidere col piano focale della lente W_2; se l'occhio non è accomodato all'infinito, quel piano avrà una posizione diversa, ma in ogni caso determinata e ad un dipresso costante per ciascun osservatore. Sia finalmente aA il raggio dell'anello oculare. Quando i vertici delle due semilenti coincidono nel punto W_1, queste costituiscono una lente sola e dànno del circolo oculare una immagine unica, che noi sappiamo determinare: il suo centro è in b ed il suo punto coniugato con A è in B, ove la retta AW_1 interseca il piano bB. Quando invece i vertici delle due semilenti non coincidono, ciascuna di esse dà del circolo aA una propria immagine e, supposto che i vertici delle due semilenti si sieno mossi nel piano della figura per spazii uguali l'uno da una parte e l'altro dall'altra dell'asse, le due immagini diventano tangenti nel punto b quando, rispetto ad una delle semilenti, il punto b è diventato coniugato di A, quando cioè i punti A e b si trovano in linea retta colla nuova posizione W_1' del vertice di questa semilente. I due triangoli simili aAB, $W_1W_1'b$ dànno

$$aA = W_1W'_1 \frac{ab}{W_1b},$$

e quindi, se, come di solito, diciamo r il raggio dell'anello oculare, e se osserviamo che lo spostamento W_1W_1' di una delle semilenti è proporzionale al numero n delle divisioni della testa graduata della vite micrometrica, che misurano l'angolo di cui questa si è fatta rotare, e che perciò, detto k un coefficiente costante, si può porre $W_1W_1' = kn$, abbiamo:

$$r = k\frac{ab}{W_1b}.n.$$

Finchè l'apparecchio è adoperato da un medesimo osservatore, non varia la posizione del piano bB ove deve trovarsi l'immagine dell'anello oculare acciocchè la visione riesca distinta; rimangono quindi costanti le distanze ab e W_1b, ed il coefficiente $k \frac{a\,b}{W_1\,b}$. L'osservatore può determinare una volta per sempre il valore di questo coefficiente guardando per mezzo del dinametro una scala divisa in parti minute, e contando il numero n di divisioni per cui la testa della vite si deve far girare acciocchè le due immagini di una determinata porzione della scala vengano a trovarsi consecutive.

Si eviterebbe il bisogno di fare questa esperienza, e la determinazione del coefficiente di n si potrebbe eseguire una volta per tutte dal costruttore dell'apparecchio, quando si collocasse in un piano bB, fisso rispetto all'obbiettivo W_1, un reticolo, e si collocasse la lente oculare W_2 in un tubo scorrevole per mezzo del quale ciascun osservatore, prima di adoperare il dinametro, potesse collocare la lente W_2 nella posizione per cui egli vede nitidamente i fili.

Il metodo di misura fondato sull'uso del dinametro suppone che tutta la superficie dell'obbiettivo del cannocchiale sia efficace, cioè che i raggi, che partono dai vari suoi punti, possano attraversare l'intero strumento senza essere intercettati lungo il cammino. Ora i diaframmi che si collocano nell'interno del cannocchiale possono arrestare i raggi entrati nello strumento attraverso alla parte periferica dell'obbiettivo, e ridurre l'immagine di questo ad una sola porzione. Per riconoscere se questa circostanza sussista, si restringe l'apertura dell'obbiettivo per mezzo di cappelletti anulari, che ne ricoprono porzioni successivamente più grandi, e si osserva se la grandezza dell'anello oculare diminuisca in proporzione. Quando ciò non avvenga, si deve conchiudere che la parte periferica dell'obbiettivo è inattiva, e per fare la misura col dinametro si deve preventivamente restringere con un cappelletto di grandezza conveniente la parte libera dell'obbiettivo.

Nell'articolo 110 si è osservato che l'ingrandimento di un cannocchiale in condizione telescopica è uguale al rapporto che passa tra il diametro di un pennello cilindrico di raggi incidenti ed il diametro del corrispondente pennello cilindrico di raggi emergenti. Lagrange, al quale è dovuto questo teorema, aveva notato come di questo si potesse fare il fondamento di un metodo per la misura dell'ingrandimento. Questo metodo, simile a quello or ora descritto, avrebbe sopra questo il merito di permettere di misurare il diametro del fascio emergente ad una distanza qualunque dall'anello oculare, e quindi di adoperare il dinametro di Ramsden anche pei cannocchiali ove il circolo oculare è situato dentro lo strumento; ma presenta per contro l'inconveniente di obbligare a trasformare preventivamente in un fascio di raggi paralleli la luce che cade sull'obbiettivo. Quando questa condizione, non comoda ad ottenersi, non sussistesse, si sarebbe costretti a cercare nel fascio emergente la sezione minima, ed il metodo si ridurrebbe a quello di Ramsden e di Dollond.