LEZIONI

DI

ELETTROTECNICA

LEZIONI

DI

ELETTROTECNICA

DETTATE

NEL R. MUSEO INDUSTRIALE ITALIANO IN TORINO

DA

GALILEO FERRARIS

e raccolte per cura della Famiglia e sotto gli auspici dell'A. E. I.

FONDAMENTI SCIENTIFICI DELL'ELETTROTECNICA

Quinta Edizione.

STEN

SOCIETÀ TIPOGRAFICO-EDITRICE NAZIONALE

(già: Roux e Viarengo, Marcello Capra, Angelo Panizza)

TORINO, 1928.

L. Ruzzi Botto Ferraris

(3372)

STEN (Azienda Grafica) - TORINO.

PREFAZIONE DELL' EDITORE

alla 1ª edizione

Galileo Ferraris ha consacrato alla scuola di Elettrotecnica da Lui creata nel R. Museo Industriale Italiano in Torino buona parte della sua mirabile attività scientifica, modificando ogni anno le sue lezioni, mantenendole sempre al corrente coi progressi rapidissimi che l'elettrotecnica ha fatto in quest'ultimo decennio, anzi contribuendo egli pure a questi progressi con l'esposizione di teorie nuove, limpide ed ardite. Egli aveva intenzione di pubblicare o un trattato di elettrotecnica, o una serie di monografie sulle materie insegnate nella scuola; aveva anzi dato un principio di attuazione al suo divisamento scrivendo una « *Teoria geometrica dei campi vettoriali...* » la quale doveva formare come il primo capitolo o l'introduzione al suo trattato. Da questo scritto (*) si scorge come l'opera, che egli aveva maturato nella sua mente con un piano veramente originale, sarebbe riuscita lavoro di capitale importanza così per la scienza come per la pratica tecnica.

Sventuratamente la morte prematura dell'illustre scienzato ha troncato il lavoro al suo inizio. Fra le sue carte non si è trovato che un primo abbozzo incompleto del trattato col titolo « *Riassunto di nozioni scientifiche che servono di fondamento allo studio dell'elettrotecnica* », abbozzo stato poi abbandonato e sostituito colla « *Teoria geometrica...* » sopracitata, e gli appunti delle sue Lezioni di elettrotecnica, i quali non contengono neppure uno svolgimento sommario della materia, ma sono una semplice indicazione dell'ordine con cui i varii argomenti dovevano essere svolti nella scuola.

Per non lasciar disperdere interamente il frutto del vasto e prezioso lavoro scientifico compiuto da Galileo Ferraris, l'*Associazione*

(*) Lo scritto, alcuni mesi dopo la morte di Galileo Ferraris, è stato presentato all'Accademia delle Scienze di Torino, con una breve prefazione del chiarissimo sig. Professore Corrado Segre, e pubblicato nel Tomo XLVII, anno 1897, delle *Memorie*.

Elettrotecnica Italiana ha pensato che convenisse pubblicarne almeno le lezioni, quali si potevano raccogliere dalle note prese dagli allievi più eletti che seguirono per anni e con amore intenso la limpida estrinsecazione e il mirabile sviluppo del pensiero scientifico del grande elettricista.

Le sorelle di Galileo Ferraris, assecondando il desiderio dell'A.E.I., hanno pregato l'Ing. LORENZO FERRARIS di assumersi l'incarico di raccogliere queste lezioni ed i Sigg. Ingegneri F. PESCETTO T. Colonnello del Genio, e G. B. MAFFIOTTI di prestargli l'aiuto del loro Consiglio e della loro esperienza. L'Ing. L. Ferraris era stato di Galileo Ferraris allievo distintissimo, e in ultimo suo assistente nella scuola e suo collaboratore: gli Ingegneri Pescetto e Maffiotti ebbero per molti anni dimestichezza scientifica intima ed affettuosissima col rimpianto Professore: tutti e tre sono quindi fra i più fedeli ed efficaci interpreti del pensiero di lui.

Essi hanno posto tutto il loro impegno perchè le « *Lezioni* » che ora vedono la luce rappresentassero esattamente, per quanto era possibile, nella sostanza e nella forma il corso professato negli ultimi anni di Galileo Ferraris, e si sono giovati perciò non solo degli appunti raccolti nella scuola dall'Ing. L. Ferraris, ma anche, ove era opportuno, della « *Teoria geometrica...* » e dell'abbozzo incompleto già citati.

Queste Lezioni, se anche non redatte secondo il piano che Galileo Ferraris aveva in mente, possono tuttavia portare un prezioso contributo all'elettrotecnica per il rigore scientifico dei ragionamenti, la semplicità dei metodi, l'elevatezza e la modernità dei concetti cui sono informate. Si confida quindi che esse saranno ben accolte dagli studiosi.

Il presente volume contiene soltanto la parte teorica o scientifica del corso; le applicazioni potranno formare oggetto di un secondo volume. Ma così com'è il primo volume forma un tutto a sè: lo studioso in possesso delle teorie che vi sono svolte si troverà in grado di leggere e intendere i libri tecnici dedicati alle applicazioni.

L'EDITORE.

AVVERTENZA.

Nel testo le formole sono richiamate mediante numeri fra parentesi rotonde ( ); gli articoli mediante numeri fra parentesi quadre [ ].

CAPITOLO I

PRELIMINARI — DEFINIZIONI E TEOREMI GENERALI SUI VETTORI

§ 1°

CAMPO DI UN VETTORE

1. – Quantità scalari e quantità vettoriali. — Le quantità che nello studio dei fenomeni fisici si presentano alle nostre considerazioni si dividono in due classi.

Appartengono alla prima classe le quantità, le quali possono essere completamente definite per mezzo di un semplice dato numerico, che esprime il rapporto fra la quantità considerata, ed un'altra quantità della stessa specie presa come unità: queste si dicono *quantità scalari* (dal verbo inglese *to scale*, che significa *pesare, misurare*, ecc.). Sono esempi di quantità scalari la lunghezza di una linea, il volume di un solido geometrico, la massa di un corpo materiale, la pressione idrostatica nell'interno di un fluido, la densità di un corpo, la temperatura in un punto dello spazio, ecc.

Appartengono alla seconda classe le quantità, le quali hanno non solo una grandezza, ma anche una direzione, e perciò non possono essere completamente definite se non per mezzo di tre dati, come ad esempio per mezzo della grandezza e di due angoli, o per mezzo delle tre componenti parallele a tre assi coordinati. Si dà il nome di *quantità vettoriali* o di *vettori* (dal latino *vehere* che significa *trasportare*) alle quantità di questa classe, perchè una qualunque di esse si può sempre rappresentare per mezzo dello spostamento di un punto fatto nella sua direzione e per un tratto proporzionale alla sua grandezza. Un segmento qualunque OA (fig. 1) ci dà la rappresentazione geometrica del vettore avente per direzione OA, e per valore numerico la lunghezza di OA, letta in una conveniente scala. Nella rappresentazione del vettore la scelta dell'origine O, dalla quale parte il segmento, è affatto arbitraria. Due vettori sono uguali quando essi hanno la stessa grandezza e la stessa direzione.

Fig. 1.

Esempi di quantità vettoriali sono: la forza che agisce su di un punto materiale, l'accelerazione che essa gli imprime, la velocità del movimento che il punto assume, lo spostamento che esso subisce.

2. – **Addizione e sottrazione di vettori.** — Dalla considerazione dello spostamento di un punto, quale rappresentazione di un vettore, risulta il significato della somma di due quantità vettoriali.

Se ad un punto si dà uno spostamento OA (fig. 2) e successivamente un altro spostamento AB, si può dire che in tal modo si sommano i due spostamenti OA, AB. L'effetto che si ottiene è di portare il punto da O in B, il che si può pure ottenere direttamente con lo spostamento OB. È quindi naturale il dire che OB è il vettore somma dei due vettori OA, AB.

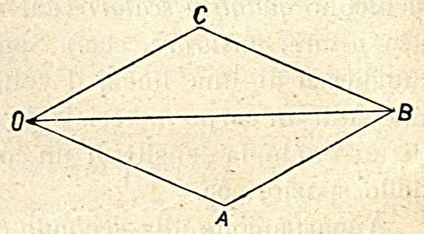

Fig. 2.

Il vettore OB si può anche considerare come la somma dei due vettori OC, CB rispettivamente eguali (nel senso vettoriale) ai vettori AB, OA. Quindi la somma dei due vettori è indipendente dall'ordine in cui si considerano.

La somma dei vettori, come si vede, è operazione identica alla composizione delle forze. OB si può dire indifferentemente *vettore somma* o *vettore risultante* dei due OA, AB che si possono chiamare *vettori componenti*.

Si possono quindi enunciare le proporzioni seguenti:

Vettore somma o risultante di due vettori dati è il vettore rappresentato dalla diagonale del parallelogramma, o dalla retta che chiude il triangolo, i cui lati sono uguali e paralleli ai vettori dati.

Vettore somma o risultante di più vettori è il vettore rappresentato dal segmento che chiude la poligonale, i cui lati sono paralleli ed uguali ai vettori dati presi in un ordine qualunque.

Il vettore somma è nullo quando la poligonale dei vettori componenti risulta chiusa.

Come caso particolare la somma dei due vettori OA, AB è nulla quando il punto B cade in O; quindi

$$OA + AO = 0, \qquad \text{ossia} \qquad OA = -AO.$$

Due vettori uguali, ma di direzione opposta, si devono intendere di segno contrario; la loro somma è nulla.

Partendo da tale considerazione si può pure parlare di *vettore differenza* di due altri vettori. Così per le proposizioni e definizioni viste si ha (fig. 3):

$$AB = AO + OB = OB + AO = OB - OA.$$

Il vettore AB si può quindi dire differenza dei due vettori OB, OA.

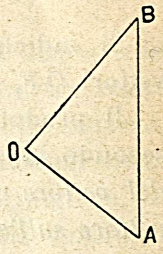

Fig. 3.

3. – Campo di un vettore. — Si dice *campo* di un vettore lo spazio entro il quale il vettore esiste, o dentro il quale lo si vuole considerare.

Un campo può abbracciare tutto lo spazio infinito, oppure può essere limitato da una o da più superficie chiuse.

Quando per ogni punto del campo si conosce il valore e la direzione del vettore in funzione delle coordinate del punto, si dice che è nota la *distribuzione del vettore.*

Nello studio della distribuzione di un vettore nel suo campo è utile considerare alcune grandezze scalari, che sono collegate col vettore stesso, e precisamente il *flusso del vettore attraverso ad una superficie,* e l'*integrale del vettore lungo una linea.*

4. – Flusso di un vettore attraverso ad una superficie. — Nel campo di un vettore si consideri nel punto O (fig. 4) un elemento superficiale AB di area dS; sia $N'N$ la normale all'elemento, sulla quale si scelga una direzione positiva, per es. ON. Il vettore in O sia rappresentato dal segmento OF e sia θ l'angolo che esso fa colla normale positiva. Si proietti OF sulla normale ON in OF'; i due vettori OF', $F'F$ rappresentano le componenti del vettore OF, normale e tangenziale all'elemento di superficie; il vettore OF si può considerare come somma di questi due.

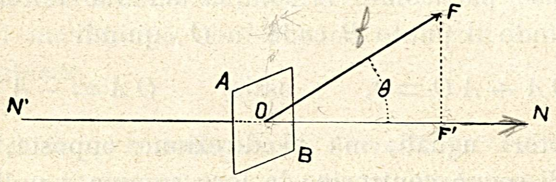

Fig. 4.

Si indichino con f, $f_n = f \cos\theta$ i valori numerici dei due vettori OF, OF'.

Il prodotto $f_n\, dS = f \cos\theta\, dS$ della componente del vettore secondo la normale positiva per l'area dell'elemento dicesi *flusso del vettore attraverso all'elemento superficiale*, od *integrale del vettore sull'elemento*.

Questo flusso è positivo o negativo secondo che l'angolo θ è acuto od ottuso. Il suo segno dipende perciò dalla scelta della direzione positiva sulla normale.

Consideriamo ora una superficie finita limitata da un contorno qualunque SS, e immaginiamola divisa in tanti elementi superficiali.

Dicesi *flusso attraverso alla superficie* SS la somma dei flussi attraverso gli elementi di essa. Rappresentandolo con φ, si ha

$$\varphi = \int_S f_n\, dS = \int_S f \cos\theta\, dS.$$

L'indice S posto al piede del segno d'integrazione serve a ricordare che l'integrazione dev'essere estesa a tutta la superficie SS. Come per il flusso elementare, così per il flusso attraverso ad una superficie finita, il segno dipende dalla scelta della direzione positiva sulla normale.

Supponendo che in ogni punto del campo esistano due o più vettori della stessa specie, possiamo attraverso ad ogni elemento superficiale, e quindi attraverso ad una superficie finita qualunque, considerare il flusso dei singoli vettori, e il flusso del vettore risultante. Siccome in ogni punto del campo la componente del vettore risultante, in una direzione qualunque, è la somma algebrica delle componenti dei vettori componenti, prese nella stessa direzione, così per ogni elemento superficiale, e quindi anche per una superficie finita qualunque, il flusso del vettore risultante di più vettori attraverso ad una superficie qualunque è la somma algebrica dei flussi dei singoli vettori componenti attraverso alla stessa superficie.

I flussi si sommano algebricamente e non vettorialmente: essi sono grandezze scalari e non vettoriali.

5. – Flusso di un vettore attraverso ad una superficie chiusa. — In una superficie chiusa possiamo scegliere come direzione positiva della normale quella interna o quella esterna. Nel primo caso il flusso può essere denominato *entrante* nella superficie, nel secondo caso flusso *uscente* dalla superficie. Si può anche dire nel primo caso: flusso uscente dallo spazio, o dalla regione o dal volume contornato dalla superficie chiusa; e nel secondo caso: flusso entrante nello spazio, nella regione o nel volume medesimo. Poichè invertendo la direzione della normale si cambia il segno del flusso, ne segue che il flusso entrante in una superficie è uguale e di segno contrario al flusso uscente dalla stessa superficie.

Immaginiamo che il volume V limitato dalla superficie chiusa S sia in un modo qualunque diviso in un certo numero di parti v. Noi possiamo considerare il flusso uscente dal volume totale V, e quelli uscenti dalle singole parti v di tale volume. È facile vedere che, se dentro alla superficie S la distribuzione del vettore non presenta discontinuità, la somma dei flussi uscenti dai volumi parziali v è uguale al flusso uscente dall'intiero volume V. Per ciò dimostrare basta considerare due qualunque delle parti v, le quali siano contigue l'una all'altra, per es. le parti p e q (fig. 5) le quali combaciano con la faccia comune $a\,b\,c\,d$. Il flusso che attraversa la superficie $a\,b\,c\,d$ esce da uno dei due volumi p e q ed entra nell'altro; esso è una parte positiva del flusso uscente dal primo ed una parte positiva del flusso entrante nel secondo, ossia una parte negativa del flusso uscente dal secondo; perciò nella somma dei flussi uscenti da p e da q esso dà due termini eguali e di segni contrari, i quali si elidono. Rimangono non elisi solamente i flussi attraverso a quelle faccie dei v, le quali fanno parte della superficie S; e la somma di questi flussi costituisce appunto il flusso uscente da S.

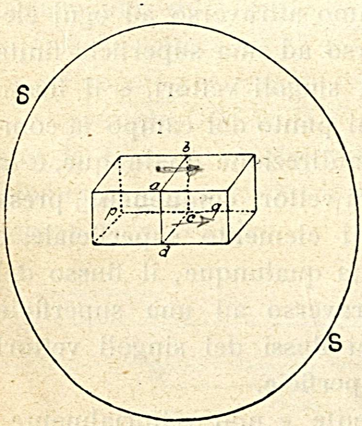

Fig. 5.

Lo stesso evidentemente si può dire dei flussi entranti.

6. – Divergenza. — Se consideriamo nel campo di un vettore uno spazio di volume v, e indichiamo con φ il flusso del vettore uscente dalla superficie che lo racchiude, il quoziente $\frac{\varphi}{v}$ dà il valore medio del flusso uscente dall'unità di volume. Supponendo che v tenda a zero in un determinato punto, anche φ tende a zero, ma il loro rapporto può tendere ad un limite finito $\frac{d\,\varphi}{d\,v}$, che è una grandezza scalare funzione delle variabili colle quali si definisce la posizione del punto di cui si tratta.

Maxwell, il quale adoperando l'analisi dei quaternioni di Hamilton, era stato più naturalmente condotto a considerare il flusso entrante, aveva proposto di dare il nome di *convergenza* del vettore alla grandezza $-\frac{d\,\varphi}{d\,v}$; Heaviside, imitando questa proposta, denominò la grandezza $+\frac{d\varphi}{d\,v}$, che noi qui consideriamo, *divergenza* del vettore. Questa locuzione sarà quella che noi adotteremo.

Espressione analitica della divergenza. — In un punto M (fig. 6) di coordinate x, y, z siano X, Y, Z le componenti del vettore secondo i tre assi, le quali noi supporremo funzioni continue delle coordinate. Calcoliamo il flusso uscente dalla superficie del parallelepipedo elementare $MABC$, di lati dx, dy, dz.

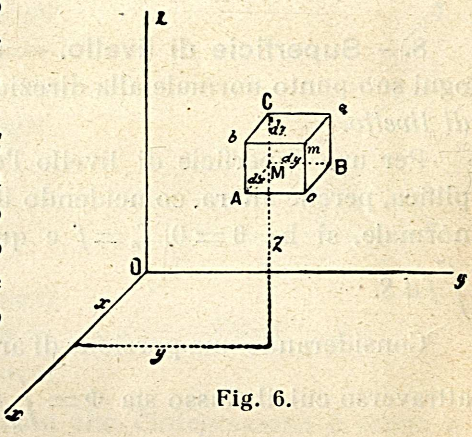

Fig. 6.

Attraverso alla faccia $MBaC$ perpendicolare all'asse Ox entra nel parallelepipedo un flusso eguale a $X dy\, dz$; ed attraverso alla faccia opposta $mb\, Ac$ esce dal parallelepipedo un flusso eguale a

$$\left(X + \frac{\partial X}{\partial x} dx\right) dy\, dz;$$

quindi in tutto, nella direzione Ox, esce un flusso eguale alla differenza dei due, cioè

$$\frac{\partial X}{\partial x} dx\, dy\, dz, \qquad \text{ossia} \qquad \frac{\partial X}{\partial x} dv.$$

Similmente nelle direzioni Oy ed Oz escono i flussi

$$\frac{\partial Y}{\partial y} dv, \qquad \frac{\partial Z}{\partial z} dv.$$

Perciò il flusso totale uscente dalla superficie del parallelepipedo è

$$d\varphi = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dv,$$

e quindi la divergenza del vettore è:

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}. \tag{1}$$

La convergenza ha questo stesso valore col segno cambiato.

7. – Distribuzione solenoidale. — Quando in ogni punto di una regione la divergenza è nulla, si dice che ivi il vettore ha *distribuzione solenoidale.*

Ma se è nulla la divergenza, cioè se è nullo il flusso uscente da ogni elemento di volume, è pure nullo il flusso uscente da una superficie chiusa qualunque [5]. Quindi la definizione data equivale a quest'altra: un vettore ha distribuzione solenoidale quando il flusso uscente da una superficie chiusa è sempre eguale a zero qualunque sia tale superficie e comunque essa sia situata nel campo.

8. – **Superficie di livello.** — Una superficie la quale sia in ogni suo punto normale alla direzione del vettore dicesi *superficie di livello.*

Per una superficie di livello l'espressione del flusso si semplifica, perchè allora, coincidendo il vettore colla sua componente normale, si ha $\theta = 0$, $f_n = f$ e quindi il flusso è espresso da $\int f\,d\,S.$

Considerando una porzione di area S d'una superficie di livello, attraverso cui il flusso sia $\Phi = \int_S f\,d\,S$, diremo *valore medio* del vettore sulla porzione S di superficie di livello il valore f_m di un vettore costante in ogni punto e normale alla superficie, il quale produca attraverso ad S lo stesso flusso prodotto dal vettore effettivo che si considera.

Dunque f_m è definito dalle equazioni:

$$f_m\,S = \int_S f\,d\,S$$

$$f_m = \frac{\Phi}{S}\,. \tag{2}$$

Se la superficie S tende a zero in un dato punto, f_m tende verso il valore f che il vettore ha in tale punto.

Da ciò risulta come, dato il flusso Φ, si possa avere un valore approssimativo f_m del vettore in un punto; valore che sarà tanto più prossimo al valore esatto f, quanto più piccola sarà la superficie considerata attorno al punto.

9. – **Integrale di un vettore lungo una linea.** — Sia $A\,M\,B$ (fig. 7) una linea qualunque tracciata nel campo di un vettore, e si scelga su di essa una direzione positiva, per es. la $A\,B$; sia poi $M\,F = f$ il vettore in un punto M della linea, $M\,M' = d\,s$ un elemento della stessa linea preso a partire da M nel verso

positivo, ed ε l'angolo formato da f con $d\,s$. La componente tangenziale del vettore, cioè la proiezione di f sulla tangente $M\,T$ è $f_s = f \cos\varepsilon$. Si faccia il prodotto $f_s\,d\,s$; lo stesso si faccia per tutti gli elementi della linea $A\,B$; si sommino tutte le quantità scalari infinitamente piccole così ottenute, si faccia cioè l'integrale

$$\int_{AB} f_s\,d\,s = \int_{AB} f \cos\varepsilon\,d\,s\,;$$

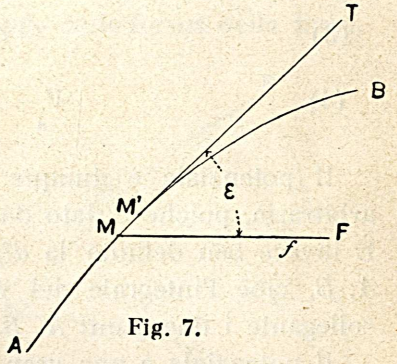

Fig. 7.

questo si dice l'*integrale* (o *flusso*) *del vettore f lungo* (o *sopra*) *la linea* $A\,B$. Coll'indice $A\,B$ posto al piede del segno $\int$ noi ricordiamo che l'integrazione è estesa a tutta la linea $A\,B$ e di più che è fatta nel verso $A\,B$. E quindi

$$\int_{AB} f_s\,d\,s = -\int_{BA} f_s\,d\,s\,.$$

In modo analogo a ciò che si è visto pei flussi attraverso a superficie, risulta che l'integrale lungo una linea qualunque del vettore risultante di più vettori è la somma algebrica degli integrali dei singoli vettori componenti lungo la stessa linea.

Gli integrali dei vettori lungo le linee si sommano algebricamente e non vettorialmente; essi sono grandezze scalari e non vettoriali.

10. – Potenziale. — In generale il valore dell'integrale del vettore lungo una linea dipende dalla forma della linea. Ma può avvenire che la distribuzione del vettore sia tale che l'integrale di esso lungo una linea qualunque tracciata nel campo dipenda soltanto dalla posizione dei punti estremi; allora l'integrale è lo stesso per tutte le linee comprese fra gli stessi estremi; ossia ancora l'integrale lungo una linea chiusa qualunque è nullo. Tale caso ha per noi una speciale importanza.

Perchè esso si verifichi è necessario e sufficiente che la funzione da integrarsi $f_s\,d\,s$ sia il differenziale esatto di una funzione delle coordinate. Se questa condizione è soddisfatta, indicando con V una funzione delle coordinate, che chiameremo *potenziale,* si può porre

$$-dV = f_s\, ds\,; \tag{3}$$

$$V_A - V_B = \int_{AB} f_s\, ds\,. \tag{4}$$

Il potenziale è dunque definito a meno di una costante arbitraria, poichè è dato dalla integrazione di un differenziale. È invece ben definita la *differenza di potenziale fra due punti* A, B, cioè l'integrale del vettore lungo una linea qualunque collegante i due punti A, B.

Il potenziale è una grandezza scalare.

Se si scelgono coordinate ortogonali si ha

$$f_s\, ds = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz\,;$$

le condizioni perchè tale trinomio sia un differenziale esatto si riducono alle tre equazioni:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{d y} = 0\,;$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0\,;$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0\,.$$

Quando queste siano soddisfatte, il potenziale e la differenza di potenziale fra due punti sono determinate dalle relazioni:

$$-dV = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz\,; \tag{3}$$

$$V_A - V_B = \int_{AB} (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz)\,. \tag{4}$$

Possiamo chiarire meglio il concetto di potenziale che è per noi di somma importanza.

Sia il campo di un dato vettore, nel quale sia soddisfatta la detta condizione, nel quale cioè l'integrale lungo una linea qualunque dipenda esclusivamente dalla posizione dei suoi punti estremi.

Scegliamo nel campo, ad arbitrio, un punto C (fig. 8): con una linea qualunque MC congiungiamo con esso un altro punto M, e rappresentiamo con V l'integrale preso da M verso C lungo questa linea. Il valore di V non dipende dalla forma della linea, ma dipende solo dalla posizione di C e di M, e se il punto C è ritenuto fisso dipende solo dalla posizione di M; il valore di V è una funzione di quelle sole variabili colle quali viene definita la posizione del punto M. Siano V_A, V_B i valori di V nei punti A e B; l'integrale preso da A verso B lungo la linea AMB qualunque congiungente A con B si può esprimere per mezzo di questi due valori. Infatti l'integrale lungo la linea AMB è uguale a quello preso su qualunque altra linea partente da A e terminante in B: è uguale perciò a quello preso lungo la linea ACB. Ora l'integrale su AC vale V_A, e quello su CB vale $-V_B$, dunque

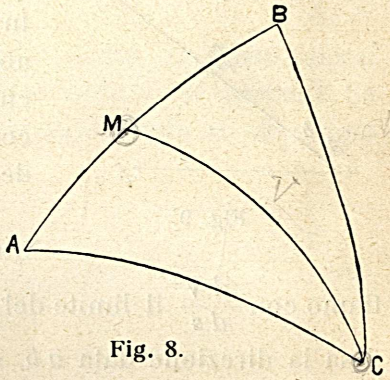

Fig. 8.

$$\int_{AB} f_s\, ds = V_A - V_B :$$

l'integrale del vettore, preso da A a B lungo una linea qualunque congiungente questi punti, è eguale alla differenza tra i valori in A ed in B della funzione V, che abbiamo chiamata potenziale.

Risulta anche di qui che il potenziale in un punto è definito a meno di parametri costanti, che dipendono dalla scelta del punto fisso C, e corrispondono alla costante di integrazione; è invece ben definita la differenza di potenziale fra due punti.

11. – Determinazione del vettore per mezzo del potenziale. — Quando sia dato in ogni punto il valore del potenziale in funzione delle coordinate, risulta anche determinata la distribuzione del vettore.

Per chiarire questa proprietà del campo, consideriamo, invece della linea di lunghezza finita $A\,B$ trattata nel numero precedente, un semplice elemento $a\,b$ (fig. 9); prendiamo $a\,b$ come direzione positiva, e rappresentiamo la lunghezza $a\,b$ dell'elemento con $d\,s$. Invece dell'integrale dianzi considerato, abbiamo ora un semplice elemento, che possiamo indicare con $f_s\,d\,s$, se con f_s rappresentiamo la proiezione del vettore f sulla direzione $a\,b$.

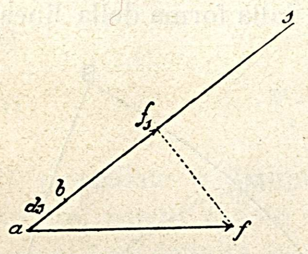

Fig. 9.

Se d'altra parte colla notazione solita del calcolo differenziale rappresentiamo con $\frac{d\,V}{d\,s}$ il limite del rapporto $\frac{V_b - V_a}{a\,b}$ quando, tenendo fissa la direzione data $a\,b$, si fa diminuire $a\,b$ sino a zero, possiamo scrivere

$$V_a - V_b = -\frac{d\,V}{d\,s}\,d\,s.$$

Con ciò l'equazione (4), che è la definizione del potenziale, si riduce nel caso ora considerato a

$$f_s\,d\,s = -\frac{d\,V}{d\,s}\,d\,s.$$

Quindi:

$$f_s = -\frac{d\,V}{d\,s}. \tag{5}$$

Il segno meno indica che la direzione positiva del vettore è quella in cui il potenziale diminuisce.

Consideriamo due casi speciali importanti:

1° L'elemento $d\,s$ sia preso su una superficie di livello, cioè sopra una superficie normale al vettore; la componente di esso secondo $d\,s$ è nulla, $f_s = 0$, e quindi $\frac{d\,V}{d\,s} = 0$. Ciò vale per ogni punto di una superficie di livello, per la quale si ha perciò

$$V = \text{costante}.$$

Quindi una superficie di livello è una superficie *equipotenziale.*

2° Se si prende l'elemento ds sulla normale n alla superficie di livello passante per il punto considerato, e lo rappresentiamo con dn, è: $f_s = f$, e perciò:

$$f = -\frac{dV}{dn}. \tag{5'}$$

12. – Linee e tubi di flusso. — *Linea di flusso* dicesi una linea tangente in ogni suo punto al vettore ivi esistente. Se il vettore ha distribuzione continua, per ogni punto di un campo passa una ed una sola linea di flusso.

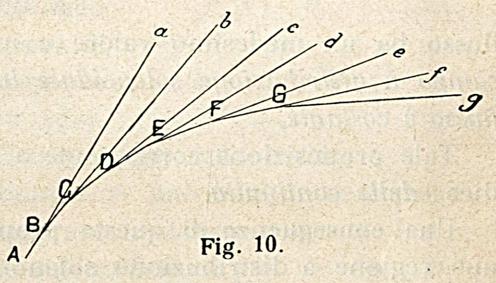

Fig. 10.

Si consideri di fatti nel campo un punto A (fig. 10), e sia Aa la direzione del vettore. Si prenda su Aa un punto B infinitamente vicino ad A, e sia Bb la direzione che in esso ha il vettore. Sia similmente C un punto preso su Bb infinitamente vicino a B, e Cc la direzione del vettore nel medesimo, e così via. La linea poligonale $ABC.....$ ha per limite una curva tangente al vettore in ogni suo punto: essa è la linea di flusso passante per il punto A.

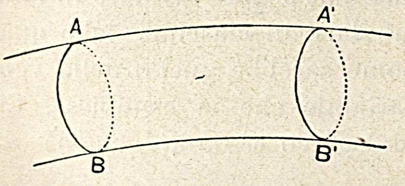

Fig. 11.

Il luogo geometrico delle linee di flusso passanti per i punti d'una linea chiusa AB (fig. 11) è una superficie tubolare $ABA'B'$. Il solido geometrico contornato da questa superficie dicesi *tubo di flusso;* la superficie stessa dicesi *superficie del tubo di flusso.*

Siccome il vettore è in ogni punto tangente alla superficie di un tubo, così il flusso di un vettore attraverso ad una porzione di superficie di tubo di flusso è nullo.

Consideriamo in un campo a distribuzione solenoidale un tubo di flusso limitato da due sezioni qualunque AB, $A'B'$ (fig. 12). La superficie del tubo e le due sezioni formano una superficie chiusa attraverso cui, per la solenoidalità, il flusso uscente è nullo. Ora attraverso alla superficie del tubo non esce alcun flusso; e quindi attraverso alle sezioni $A\,B\;A'\,B'$ avremo due flussi numericamente uguali e di segno contrario.

Se uno di essi esce dallo spazio $A\,B\;A'\,B'$, l'altro vi entra; ciò significa che i due flussi hanno la medesima direzione. Ora le sezioni $A\,B\;A'\,B'$ sono scelte in modo qualunque; dunque concludiamo che attraverso a tutte le sezioni del tubo il flusso ha un medesimo valore e un medesimo verso: *in un campo a distribuzione solenoidale lungo un tubo di flusso, il flusso è costante.*

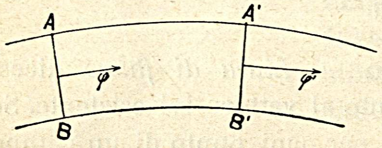

Fig. 12.

Tale proposizione corrisponde a quella che nell'idraulica si dice: *della continuità.*

Una conseguenza di questa proprietà è che nell'interno di una regione a distribuzione solenoidale nessun tubo di flusso può aver origine o termine; nessuna linea di flusso può nascere o terminare in una parte del campo nella quale la distribuzione sia solenoidale. — Se il campo abbraccia tutto lo spazio, e se dovunque la distribuzione è solenoidale, le linee di flusso o si estendono fino all'infinito o sono linee chiuse.

Un campo a distribuzione solenoidale si può dividere in tante porzioni finite od infinitesime, tubulari, in ciascuna delle quali il flusso del vettore è costante, come sarebbe quello della velocità di un flusso a volume invariabile che la riempisse. Ciò spiega la locuzione *solenoidale* (dal greco σωλὴν-ῆνος, *tubo*).

13. – Variazione del vettore lungo un tubo di flusso sottilissimo. — Immaginiamo in un campo a distribuzione solenoidale un tubo di flusso infinitamente sottile $A\,B\;A'\,B'$ (fig. 13) e consideriamo due sezioni rette $A\,B$, $A'\,B'$ qualunque, le aree delle quali siano $d\,S$, $d\,S'$. Indicando con f, f' rispettivamente i valori del vettore nelle sezioni $A\,B$, $A'\,B'$, i flussi attraverso alle due sezioni sono $f\,d\,S$, $f'\,d\,S'$, e siccome questi sono eguali, così si ha

$$f\,d\,S = f'\,d\,S', \quad \frac{f}{f'} = \frac{d\,S'}{d\,S};$$

ossia: lungo un tubo infinitamente sottile il vettore varia nella ragione inversa della sezione trasversale. Se il tubo va allargandosi il vettore va diminuendo di valore e viceversa.

Se $d S = d S'$ si ha $f = f$; se un tubo di flusso ha sezione costante, il vettore ha in esso un valore costante.

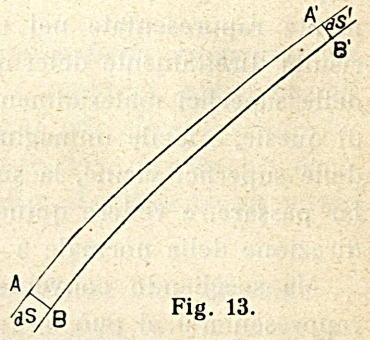

Fig. 13.

14. – Tubi unità. — Quando il flusso attraverso alle sezioni di un tubo di flusso è uguale a quello che nel sistema di misure adottato si prende per unità, il tubo dicesi *tubo unità.*

Un tubo di flusso qualunque si può sempre scomporre in tubi unità; esso si può sempre considerare come un fascio di tali tubi. Tutto il campo, se solenoidale, si può dividere in tubi unità. Il flusso attraverso ad una superficie qualunque tracciata nel campo è eguale al numero di tubi unità che attraversano tale superficie; il flusso passante dentro ad una linea chiusa è eguale al numero di tubi unità abbracciati da questa. Quindi in un campo solenoidale tutte le superficie aventi lo stesso contorno sono attraversate dallo stesso flusso; il flusso non dipende dalla forma della superficie, ma solo dal suo contorno.

15. – Rappresentazione del campo di un vettore. — Mediante un modello o disegno nel quale siano tracciate materialmente o graficamente superfici di livello, o linee di flusso, in numero e posizione conveniente, è sempre possibile rappresentare completamente il campo di un vettore, in modo che si possa dal modello o dal disegno dedurre come variino da punto a punto la grandezza e la direzione del vettore.

a) *Rappresentazione del campo mediante superficie di livello.* — Che un modello od un disegno, dove siano rappresentate parecchie superfici di livello sufficientemente vicine le une alle altre, possa far vedere in un colpo d'occhio quale sia in ogni punto la direzione del vettore, è evidente. Tale direzione infatti è normale alla superficie di livello passante per il punto considerato. Se questo si trova sopra una delle superfici materialmente rappresentate nel modello o nel disegno, la direzione risulta direttamente determinata; se esso non giace su di una delle superfici materialmente rappresentate, ma si trova fra due di queste, è facile immaginare per approssimazione, colla scorta delle superfici vicine, la superficie di livello che vi si potrebbe far passare, e vedere quindi quale sia approssimativamente la direzione della normale a questa superficie.

Ma scegliendo convenientemente le superfici di livello da rappresentarsi, si può fare di più: si può far sì che il modello o il disegno indichi approssimativamente, non solo la direzione, ma anche il valore del vettore. Basta a quest'uopo che le superfici disegnate o costrutte, corrispondano a potenziali equidifferenti, e che siano abbastanza vicine perchè le porzioni di linee di flusso comprese fra due superfici equipotenziali consecutive si possano praticamente, ad occhio, confondere con segmenti di rette. Diciamo Δn uno di questi segmenti e ΔV la differenza costante fra i potenziali su due superfici di livello consecutive; il quoziente $\frac{\Delta V}{\Delta n}$ ha per limite $\frac{d V}{d n}$; quindi esso, se Δn, come si è supposto, è piccolo, rappresenta un valore approssimativo di $\frac{d V}{d n}$.

Ora $\frac{d V}{d n}$ è appunto, a meno del segno, il valore di f. Basta dunque che sia data la differenza ΔV costante, scelta nella costruzione del modello o del disegno per poter determinare in ogni punto del campo il valore di f mediante la semplice misura di una lunghezza Δn.

L'avere scelto, nel fare il modello o il disegno, superfici corrispondenti a potenziali equidifferenti non è solamente utile per ridurre ad uno solo, a ΔV, i dati necessari per fare nel modo detto il calcolo di f, ma è anche utile per far sì che il modello del disegno indichi, a colpo d'occhio, la distribuzione del vettore nel campo.

Infatti se ΔV è costante, la relazione approssimativa

$$f = -\frac{\Delta V}{\Delta n}$$

dice che approssimativamente f è inversamente proporzionale a Δn: là dove Δn è piccolo, dove le superfici equipotenziali disegnate o costrutte sono vicine le une alle altre, il vettore ha un valore grande; là dove Δn è grande, dove le superfici equipotenziali sono lontane le une dalle altre, il vettore ha un valore piccolo.

b) *Rappresentazione del campo mediante linee di flusso.* — Si immagini il campo scomposto in tubi unità; e poi, come per renderli visibili, si finga che questi tubi si contraggano trasversalmente, si assottiglino, in modo da distaccarsi gli uni dagli altri. S'immagini anzi che la contrazione proceda tanto che i tubi unità si riducano infinitamente sottili, e che ciascuno di essi venga a confondersi con una semplice linea di flusso. Così a rappresentare i primitivi tubi unità rimangono semplicemente altrettante linee di flusso. Un disegno o un modello nel quale siano designate o costruite queste linee di flusso costituisce la rappresentazione o la mappa del campo.

Per eseguire materialmente la descritta rappresentazione si può procedere così: si traccia nel disegno o nel modello una superficie di livello. Su questa si segnano dei punti regolarmente distribuiti, in modo che su ciascuna porzione di essa ve ne abbia un numero eguale a quello dal quale, nel sistema di unità che si sarà scelto, è espresso il flusso passante attraverso alla porzione medesima. Per ciascuno dei punti segnati si traccia una linea di flusso. La condizione ora espressa, colla quale sono stati distribuiti i punti sulla superficie di livello scelta nella descritta operazione, si troverà verificata, in grazia della proprietà solenoidale, anche per i punti nei quali le linee di flusso tracciate incontrano tutte le altre superfici di livello.

Dato un disegno od un modello così costruito, se si vuole conoscere il flusso attraverso di una superficie qualunque, basta contare le linee di flusso passanti attraverso ad essa, o, ciò che vale lo stesso, dentro al contorno di essa.

Se si divide il numero di linee passanti attraverso la superficie considerata per l'area di questa, si ha [8] il valore medio della componente normale del vettore. Se la porzione di superficie è abbastanza piccola perchè la distribuzione dei punti su di essa sia uniforme, la detta divisione dà subito il valore della componente normale. Se la superficie è piana ed appartiene ad una superficie di livello, si ha addirittura il *vettore*. In altri termini, il valore del vettore è eguale al numero di linee attraversanti l'unità di superficie presa su di una superficie di livello.

In questo modo la rappresentazione del campo fatta per mezzo delle linee di flusso basta a dare non solo la direzione, ma anche il vettore in ogni punto. Là dove le linee sono più fitte il vettore è più grande; là dove sono più rade esso è più piccolo. Se non è sempre facile costruire un disegno o un modello come quello descritto, è sempre possibile immaginarlo; ed è sul descritto modo di rappresentazione del campo che è fondato il linguaggio degli elettricisti. Così si dice spesso *numero di linee di flusso attraversanti una superficie*, anzichè flusso del vettore attraverso alla superficie, e *numero di linee di flusso per unità di superficie*, anzichè valore del vettore.

16. – Campo uniforme. — Merita un cenno speciale il caso nel quale tutte le linee di flusso sono rette parallele. È facile vedere che in un tale campo il vettore ha un medesimo valore in tutti i punti. Infatti: 1° Tutti i tubi di flusso hanno sezione costante, e perciò, in virtù della proposizione dimostrata al n. 13, il vettore ha un medesimo valore in tutti i punti di una medesima linea di flusso. — 2° Le superficie equipotenziali, che sono normali alle linee di flusso, sono in questo caso altrettanti piani tutti paralleli fra di loro. Perciò la distanza dn fra due superficie equipotenziali, fra le quali la differenza di potenziali è dV, è la stessa su tutta l'estensione di esse; e quindi il vettore [11] $-\frac{dV}{dn}$ ha un medesimo valore in tutti i punti di una superficie di livello qualunque. Per conseguenza il vettore è lo stesso in tutti i punti del campo. Un campo come quello di cui abbiamo parlato, nel quale il vettore ha una medesima direzione e una medesima grandezza in tutti i punti, si dice *uniforme*.

§ 2°

CAMPI DI FORZE

17. – Masse o quantità di agente. — Fra tutte le quantità vettoriali ha importanza grandissima il vettore *forza*. In fisica si hanno spesso a considerare regioni o parti dello spazio, le quali godono di questa proprietà, che basta portare in esse alcuni corpi determinati, o in determinate condizioni, perchè questi si trovino sollecitati da forze. Una regione che gode di tale proprietà dicesi un *campo di forze*.

In un campo la forza che si esercita su un dato corpo varia da punto a punto; per uno stesso punto essa varia secondo la natura e le dimensioni del corpo che nel punto si considera.

Un campo di forze può abbracciare tutto lo spazio, oppure può essere limitato da determinate superfici.

Un esempio di campo di forze illimitato ci è offerto dal campo della gravità. Un corpo grave qualsiasi, in qualunque luogo si trovi nello spazio accessibile alle nostre indagini, è sollecitato da forze. Tale spazio è adunque, secondo la nostra definizione, un campo di forze. L'intensità della risultante delle forze che sollecitano il grave dipende dal grave stesso e dipende inoltre dal luogo ove questo si trova; e precisamente è noto che il confronto fra le intensità delle forze che in un medesimo luogo agiscono sui diversi corpi serve a paragonare tra di loro le *masse* di questi corpi, mentre invece il confronto tra le forze che sollecitano un medesimo corpo, quando viene portato in varii luoghi, serve a determinare il valore della gravità nei varii punti, cioè a paragonare tra di loro i varii punti del campo.

Il campo della gravità agisce su tutti i corpi ponderabili; ma ci sono campi di forze, i quali non agiscono che su alcuni corpi o su corpi in condizioni speciali. Per dire che un corpo è in quelle condizioni speciali necessarie perchè su di esso agisca un campo di forze determinate diremo che quel corpo contiene un *agente*. Con ciò non alluderemo ad alcuna ipotesi relativa all'intima natura delle condizioni speciali or nominate, come non alludiamo ad alcuna ipotesi intorno alla natura del calore quando diciamo che un corpo contiene calore.

Ma anche senza sapere in che cosa consista un dato agente, e senza fare sulla natura di esso alcuna ipotesi, noi possiamo trattarlo come una grandezza misurabile ed esprimibile in numeri. Possiamo infatti paragonare fra di loro le quantità di agente. Si immagini un corpicino, un punto materiale, che portato nel campo di forze considerato vi si trovi soggetto ad una forza: come l'esistenza di questa forza ci fa dire, secondo la fatta convenzione, che il punto materiale contiene agente, così la intensità di essa ci può servire a definire la *quantità* o la *massa* dell'agente medesimo. Se due punti materiali portati, l'uno dopo l'altro in un medesimo punto del campo, vi si trovano soggetti a forze eguali per intensità e per direzione, diciamo che essi contengono *uguali quantità* od *uguali masse* dell'agente di cui si tratta; se si trovano sollecitati da forze disuguali, diciamo che contengono masse disuguali, e precisamente se le due forze stanno fra loro come m sta ad n diciamo che le *masse* in essi contenute stanno nello stesso rapporto.

Dopo di ciò, se vogliamo esprimere con numeri i valori delle masse dell'agente considerato, non abbiamo da fare altro che scegliere una unità di misura, scegliere cioè una massa bene determinata e convenire di rappresentarne il valore col numero *uno*.

Per esaminare poi la *distribuzione delle forze* nel campo basta portare nei varii punti uno stesso corpo, e confrontare fra di loro le varie forze da cui esso è sollecitato. Noi diremo *massa di prova* la massa del corpo che si fa viaggiare entro il campo per istudiarne la distribuzione. Se si sceglie come massa di prova quella massa di agente che si è assunta come *unità di misura*, la direzione e la intensità della forza che agisce su di essa in un determinato punto del campo diconsi *direzione* ed *intensità* del campo in quel punto. L'intensità del campo in un punto si dice anche *valore della forza*, o semplicemente *forza* nel punto medesimo.

Se f è l'intensità del campo in un punto e se un corpicino, portato in quel punto, vi si trova sollecitato nella direzione del campo da una forza di intensità mf, si deve dire, per la definizione data di massa, che quel corpicino contiene una massa di agente uguale ad m. Può accadere che il corpicino si trovi sollecitato non nella direzione del campo, ma nella direzione opposta; allora si dice che esso contiene una massa *negativa*. Questi che abbiamo considerati sono i due soli casi che si possono presentare nei campi effettivi di forze: una massa qualunque può essere sollecitata da forze nella direzione del campo o nella direzione opposta, ma non mai da forze altrimenti dirette.

18. – Potenziale. Lavoro. — Si possono applicare ai campi di forza tutti i concetti esposti per i campi di vettori. Non abbiamo quindi bisogno di definire: *il flusso di forza attraverso ad una superficie, l'integrale della forza lungo una linea, le superficie di livello, le linee e i tubi di forza, la distribuzione solenoidale, il potenziale*, ecc.

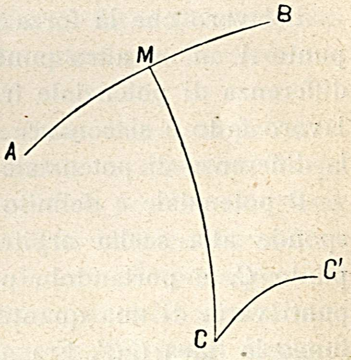

Fig. 14.

Nei campi di forza il potenziale assume un significato fisico notevole. Il potenziale V in un punto M del campo (fig. 14) è l'integrale del vettore lungo una linea qualunque collegante tal punto M con un punto C, considerato come fisso nel campo:

$$V = \int_{MC} f_s\, d s.$$

Se ora il vettore f è una forza, il prodotto $f_s\, d s$ rappresenta il lavoro fatto da quella forza sopra l'*unità* di massa lungo l'elemento $d s$, e l'integrale $\int_{MC} f_s\, d s$, ossia il potenziale, rappresenta il lavoro totale compiuto dalla forza quando l'unità di massa percorre la linea MC, che parte dal punto dato M e termina nel punto fisso C.

Considerando una linea qualunque fra due punti A, B si ha

$$V_A - V_B = \int_{AB} f_s\, d\, s$$

donde: la differenza di potenziale fra due punti A e B è il lavoro che la forza fa sulla massa *unità*, che passa dal punto A al punto B percorrendo una linea qualunque.

Se invece di una massa unità si sposta una massa m, la forza che su di essa agisce è $m f$, epperò il lavoro fatto quando la massa m si sposta da A in B è

$$m \int_{AB} f_s\, d\, s = m\,(V_A - V_B).$$

Il lavoro che la forza fa su una massa m che passa da un punto A ad un altro punto B è il prodotto della massa per la differenza di potenziale fra i due punti. Per ciò se si misura il lavoro fatto e si conosce la massa mobile, il loro rapporto dà la differenza di potenziale fra i punti estremi.

Il potenziale è definito a meno di una costante, che corrisponde alla scelta arbitraria del punto fisso C. Variando il punto C, e portandolo per es. in C', il potenziale in tutti i punti varia di una quantità costante che rappresenta il lavoro lungo la linea $C C'$. Fra gli infiniti punti C si potrà sempre scegliere quello per cui è massima la costante di integrazione, quello cioè che dà al potenziale il valore massimo possibile date le condizioni del campo. Con tale scelta il potenziale in un punto rappresenta il massimo lavoro che si può ottenere dalla forza, facendo viaggiare nel campo la massa *uno* a partire da tale punto, ossia il lavoro che si ha disponibile per il solo fatto che la massa *uno* si trova nel punto; rappresenta perciò un'*energia di posizione* o *energia potenziale*. Nei campi di forza la denominazione di potenziale è quindi bene appropriata al significato fisico; essa però è di uso più generale, e si applica, come si è veduto, ai campi di vettori in genere, e non ai soli campi di forze.

Se si considera una linea qualunque fra due punti, il lavoro fatto dalle forze del campo sulla massa *uno* che si sposta lungo di essa, è uguale alla diminuzione dell'energia, ossia, come si è veduto, alla differenza di potenziale fra i punti estremi.

Se la massa *uno* mobile percorre una linea chiusa ritornando al punto di partenza, e il lavoro totale compiuto nel percorso è nullo, si ritrova al ritorno nel punto lo stesso potenziale che si aveva alla partenza; se invece si è speso o ricavato un certo lavoro, si ritrova al ritorno nel punto un potenziale diverso da quello che si aveva alla partenza; i due valori presentano una differenza eguale al lavoro positivo o negativo compiuto lungo la linea percorsa. Nel 1° caso il potenziale è una funzione ad un solo valore o *monodroma*; nel 2° caso è una funzione a più valori o *polidroma*.

Se nel campo esistono linee di forza chiuse, il potenziale è certo polidromo, perchè lungo una linea di forza il lavoro non può essere nullo, avendo la forza costantemente la direzione stessa del movimento.

Fisicamente però se si ha una tale linea chiusa si può ottenere che la massa continui indefinitamente a muoversi lungo la linea seguitando a compiere lavoro. Ora perchè ciò possa succedere è necessario, in virtù del principio della conservazione dell'energia, che nel campo si spenda lavoro. Ne consegue che in un campo dovuto soltanto a condizioni statiche non si possono avere linee di forza chiuse, e il potenziale è una funzione monodroma; mentre in un campo mantenuto mediante spesa di lavoro il potenziale può essere una funzione polidroma.

---

§ 3°

CAMPI DI FORZE NEWTONIANE

19. – Forze newtoniane. — Un caso singolarmente importante, al quale dobbiamo applicare le nozioni precedenti, è quello delle *forze newtoniane*.

Si dà questo nome alle forze che hanno direzioni passanti pei punti materiali, fra i quali si esercitano, ed intensità inversamente proporzionali ai quadrati delle distanze fra i punti medesimi. Sono cioè forze attrattive o ripulsive che determinati punti materiali esercitano l'uno sull'altro, e che variano colla distanza, seguendo una legge analoga a quella colla quale variano le forze, dovute all'attrazione universale, che si esercitano fra i corpi celesti.

Ciò che l'esperienza ci dà direttamente è l'esistenza dell'attrazione o della ripulsione fra determinati punti materiali e la relazione fra le intensità delle forze e le distanze di tali punti; ma le semplici osservazioni che provano l'esistenza di queste forze non bastano a far scoprire la causa che le produce, e neppure la sede di tale causa. Però per la trattazione puramente matematica dei campi di forze newtoniane non occorre pensare al meccanismo al quale le forze stesse sono dovute; senza detrarre nè al rigore nè alla generalità delle deduzioni, si può estendere alle forze newtoniane il concetto di *agente* [17], e supporre queste forze dovute a *masse* o *quantità di agente*, contenute nei punti fra i quali esse si esercitano.

Consideriamo due punti materiali M ed M' situati a distanza r l'uno dall'altro, fra i quali si eserciti una forza newtoniana. Per definizione, tale forza è proporzionale ad $\frac{1}{r^2}$; inoltre si sa che la forza esercitata da M' su M è uguale ed opposta a quella esercitata da M su M'. Ora consideriamo il punto materiale M come un punto collocato nel campo di forze prodotto dal punto M'; poichè il punto M posto in tale campo, si trova soggetto ad una forza, noi dobbiamo dire [17] che M contiene un agente, e che questo ha una massa m proporzionale alla intensità della forza. Consideriamo similmente il punto M' come un punto collocato nel campo di forze prodotto dal punto M; poichè esso vi subisce una forza, dobbiamo dire che anch'esso contiene una massa m' di agente, e che questa è proporzionale alla forza. Dunque la forza è proporzionale ad $\frac{1}{r^2}$ ed alle masse m ad m' esistenti nei due punti. Detta quindi F la forza e rappresentata con k una costante di proporzionalità, il cui valore dipende dalla scelta delle unità di misura, e dalla natura del mezzo interposto fra i punti, abbiamo:

$$F = k\,\frac{m\,m'}{r^2}. \tag{6}$$

Siccome per le forze dovute al magnetismo ed all'elettricità, questa relazione è stata verificata sperimentalmente dal COULOMB, così essa si denomina: *legge di Coulomb.*

Supponiamo che sussista l'uguaglianza $m = m'$, la quale si può, in ogni caso, verificare sperimentalmente constatando la uguaglianza delle forze che agiscono sulle due masse quando queste vengono portate l'una dopo l'altra in un medesimo punto di un dato campo. Allora la formula di COULOMB dà:

$$F = k\,\frac{m^2}{r^2}\,.$$

Se, come è naturale che si faccia, si dà alla costante k un valore positivo, la forza F risulta positiva. Dobbiamo quindi considerare come *forza positiva* un'attrazione quando l'esperienza c'insegna che due masse uguali si attraggono, ed una ripulsione quando l'esperienza c'insegna che due masse uguali si respingono. Nel caso della gravitazione si deve trattare come forza positiva una attrazione; nei casi invece che sono oggetto del nostro studio dovremo considerare come forza positiva una ripulsione. Così faremo fin d'ora, e ciò equivarrà a ritenere che due masse m ed m' abbiano un medesimo segno od abbiano segni contrarii secondochè esse si respingono oppure si attraggono.

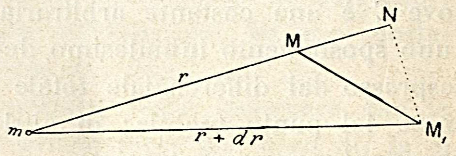

Fig. 15.

20. – Potenziale nei campi di forze newtoniane. — Il punto materiale M (fig. 15) contenente una massa *uno* sia situato nel campo di forze prodotto da una massa m situata nel punto m ad una distanza $m\,M = r$. Su di esso agisce una forza uguale a

$$k\,\frac{m}{r^2}\,.$$

Se sotto l'azione di tale forza il punto M si sposta per un tratto infinitesimo e viene in M_1 ad una distanza $m M_1 = r + dr$ dalla massa m, la forza fa un lavoro

$$k \frac{m}{r^2} \times MN,$$

ove MN è la proiezione di $M M_1$ sulla retta $m M$. Ma se $M M_1$ è infinitamente piccolo, come abbiamo supposto, la perpendicolare $M_1 N$ su $m M$ si confonde con un arco di circolo di centro m, quindi si ha $MN = m M_1 - m M = d r$, e l'espressione del lavoro si può scrivere

$$k m \frac{d r}{r^2},$$

ossia, dicendo c una costante arbitraria

$$-d \left(k \frac{m}{r} + c\right).$$

Se, invece del campo prodotto da una semplice massa m, si ha un campo prodotto da un numero qualunque di masse situate in altrettanti punti, la risultante delle forze che queste masse esercitano sul punto materiale M quando questo si sposti da M in M_1 fa un lavoro uguale alla somma di tanti lavori, ciascuno dei quali è espresso dalla formola che abbiamo trovata. Il valore di tale somma si può scrivere:

$$-d \left(k \Sigma \frac{m}{r} + C\right),$$

ove C è una costante arbitraria. Il lavoro corrispondente ad uno spostamento infinitesimo del punto materiale M è dunque espresso dal differenziale totale di una funzione delle coordinate del punto mobile; in altri termini *le forze esistenti nel campo hanno un potenziale.*

Se diciamo V il potenziale, il lavoro corrispondente allo spostamento infinitesimo del punto M si esprime con $-d V$; e se paragoniamo questa espressione con quella dianzi trovata per lo stesso lavoro, vediamo che

$$V = k \Sigma \frac{m}{r} + C. \tag{7}$$

Quando si sia scelta la costante arbitraria C, questo potenziale ha per ciascun punto dello spazio un valore unico.

Per conseguenza il lavoro $V_A - V_B$ che il campo fa sul punto mobile quando questo passa da un punto A ad un altro punto B, è indipendente dalla traiettoria del mobile, e dipende unicamente dalle posizioni del punto di partenza A e del punto di arrivo B. Quando il mobile percorre una linea chiusa e ritorna al punto di partenza, il lavoro è nullo. Nei campi newtoniani non si possono avere linee di forza chiuse.

21. - Energia. — Il potenziale V in un punto M del campo rappresenta [18] a meno di una costante l'*energia* disponibile per il fatto di avere la massa *uno* in quel punto.

Se nel punto M si ha, invece della massa *uno* finora considerata, un'altra massa qualunque m', l'energia che si ha disponibile quando il mobile M si trova dentro al campo di forze, in un punto ove il potenziale è V, è data dal prodotto

$$m' V.$$

In queste considerazioni abbiamo supposto che le masse m producenti il campo, sieno fisse nello spazio, e che la massa m' mobile nel campo non influisca sull'intensità di questo. Ora proponiamoci quest'altra questione più generale. È dato un sistema qualunque di punti materiali contenenti le masse $m, m_1, m_2, \ldots\ldots$; tutti questi punti, od alcuni di essi, sono mobili; trovate la somma dei lavori delle forze, la quale corrisponde ad una deformazione infinitamente piccola del sistema, ossia ad uno spostamento infinitesimo delle masse $m, m_1, m_2, \ldots\ldots$

Per rispondere a questa questione basta osservare che la forza fra due delle masse date, per esempio fra m ed m_1 fa il lavoro

$$k \frac{m\, m_1}{r^2} d\, r \qquad \text{ossia} \qquad - d \left(k \frac{m\, m_1}{r} + c\right),$$

e che quindi il lavoro totale è

$$- d \left(\Sigma\, k \frac{m\, m_1}{r} + C\right),$$

ove Σ rappresenta una somma estesa a tutte le combinazioni due a due che si possono fare coi punti del sistema, e C rappresenta una costante arbitraria di integrazione.

Facendo uso anche qui del concetto di energia diremo che l'energia del sistema è:

$$W = \Sigma\, k\, \frac{m\, m_1}{r} + C. \tag{8}$$

Per fare la somma che figura in questa espressione, possiamo cominciare a sommare i termini corrispondenti alle combinazioni di una delle masse, per esempio della m, con ciascuna delle altre; otteniamo così la somma parziale

$$m \,.\, k\, \Sigma\, \frac{m'}{r},$$

ove con m' vogliamo rappresentare una qualunque delle masse, eccettuata solo la m. Ma $k\, \Sigma\, \frac{m'}{r}$, è, a meno di una costante arbitraria, il potenziale del sistema nel punto ove è situata la massa m; la somma parziale è adunque $m\, V$. Nel medesimo modo le combinazioni di un'altra massa, per esempio della m_1, con ciascheduna delle rimanenti dànno una somma parziale $m_1\, V_1$, dove V_1 rappresenta il valore del potenziale nel punto ov'è collocata la massa m_1. Risultati analoghi dànno le somme parziali corrispondenti alle altre masse m_2, m_3, ... Sommando tutte le somme parziali si ha

$$\Sigma\, m\, V,$$

ove la somma Σ si estende a tutte le masse m, m_1 m_2, ... Ma in questo modo ciascuna coppia di masse è stata ripetuta due volte; per esempio, la combinazione delle due masse m ed m_1 fa parte tanto della somma parziale $m V$, quanto della $m_1\, V_1$. Dobbiamo quindi dividere per 2 il risultato che abbiamo ottenuto, e per tal modo troviamo che l'energia del sistema è espressa da:

$$W = \frac{1}{2}\, \Sigma\, m\, V. \tag{8'}$$

Se le masse alle quali è dovuto il campo invece di essere concentrate su punti in modo discontinuo hanno una distribuzione continua, allora nelle espressioni precedenti del potenziale e dell'energia, si sostituiranno alle singole masse finite m le masse elementari $d\,m$ e alla somma Σ l'integrale esteso a tutto lo spazio relativo.

22. – Flussi di forza. Teoremi di Stokes e di Green. Condizione solenoidale. — Consideriamo il campo di forze prodotto da una massa m situata nel punto m (fig. 16). In tale campo le linee di forza sono rette irradianti dal punto m, e i tubi di forza sono coni col vertice in m. Consideriamo uno di questi coni, infinitamente sottile. Esso taglia su di una superficie sferica $s\,s$ di centro m e di raggio uguale ad *uno* un elemento di area $d\,\omega$; questa area è ciò che noi diciamo *angolo solido del cono*. Se $S\,S$ è una superficie qualunque, la quale sia tagliata dal cono, questo determina su di essa un elemento superficiale $A\,B$; l'angolo solido $d\,\omega$ si dice la *superficie apparente dell'elemento $A\,B$ visto dal punto m*. Se poi si hanno da considerare i versi positivo e negativo della normale alla superficie $A\,B$, anche la superficie apparente dell'elemento si assume ora positiva ed ora negativa; essa si ritiene positiva quando il prolungamento $A\,f$ della visuale $m\,A$ al di là della superficie si trova dalla parte della normale positiva $A\,f_n$; si assume negativa nel caso contrario. Dicesi finalmente superficie apparente di una superficie $S\,S$ di area finita, vista dal punto m la somma delle superfici apparenti degli elementi $A\,B$ nei quali la superficie può essere scomposta.

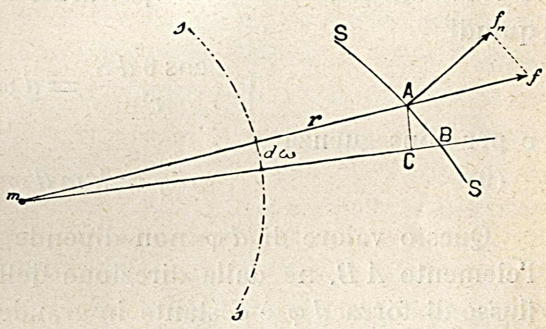

Fig. 16.

Poste queste definizioni, calcoliamo il flusso di forza attraverso all'elemento di superficie $A\,B$. Detta $d\,S$ la superficie dell'elemento, f_n la componente della forza secondo la normale alla superficie $S\,S$ nel punto A, e $d\,\varphi$ il flusso cercato, si ha:

$$d\,\varphi = f_n\,d\,S.$$

Ma se f è la forza in A e θ l'angolo che essa fa colla normale alla superficie $S\,S$, $f_n = f \cos\theta$; se inoltre si rappresenta con r la distanza $m\,A$, si ha $f = k\,\frac{m}{r^2}$, dunque

$$d\,\varphi = k\,m\,\frac{\cos\theta\,d\,S}{r^2}.$$

Ora $\cos\theta\,d\,S$ è l'area della proiezione $A\,C$ dell'elemento superficiale $d\,S$ sulla sfera di centro m e di raggio r e $\frac{\cos\theta\,d\,S}{r^2}$ è l'area dell'elemento corrispondente sulla sfera di raggio *uno*; quindi

$$\frac{\cos\theta\,d\,S}{r^2} = d\,\omega,$$

e per conseguenza

$$d\,\varphi = k\,m\,d\,\omega. \tag{9}$$

Questo valore di $d\,\varphi$ non dipende nè dalla distanza r dell'elemento $A\,B$, nè dalla direzione della normale di questo; il flusso di forza $d\,\varphi$ è costante in grandezza ed in direzione lungo tutto il cono infinitesimo considerato; i flussi attraverso a due sezioni quali si vogliano fatte nel cono sono uguali l'uno all'altro e diretti nel medesimo verso.

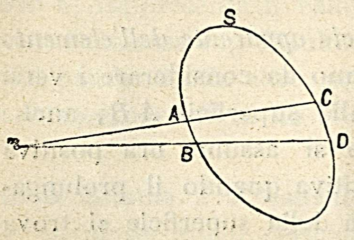

Fig. 17.

Consideriamo ora nel campo di forze della massa m una superficie chiusa S e proponiamoci di calcolare il flusso totale di forza che la attraversa dall'interno all'esterno.

Supponiamo dapprima che la massa m sia situata fuori della superficie chiusa (fig. 17).

Un cono infinitamente sottile col vertice in m, come quello dianzi considerato, attraversa la superficie chiusa S due volte, o più in generale un numero pari di volte; in $A\,B$ esso entra nello spazio racchiuso nella superficie, in $C\,D$ ne esce; ed in generale entra nella superficie un certo numero di volte ed altrettante ne esce. Per le ragioni svolte poc'anzi, i flussi di forza sugli elementi $A\,B$, $C\,D$, e in generale su tutti gli elementi della superficie S tagliati dal cono sono tutti uguali tra di loro. Questi flussi sono poi tutti diretti nel medesimo verso; per esempio se la massa m è positiva, sono tutti diretti verso $m A$. Ma se noi vogliamo calcolare il flusso di forza diretto dall'interno verso l'esterno della superficie S, dobbiamo prendere col loro segno i flussi attraverso all'elemento $C D$, ed in generale attraverso a tutti gli elementi per cui il cono esce dalla superficie, e col segno invertito i flussi su $A B$, ed in generale sugli elementi per i quali il cono entra nella superficie; siccome gli elementi superficiali attraverso ai quali il cono entra nella superficie sono tanti quanti sono quelli attraverso ai quali esso esce, così nella somma algebrica i flussi si elidono a due a due. Siccome la stessa cosa si può dire per tutti i coni di vertice m che incontrano la superficie S, così la somma algebrica dei flussi di forza che escono da tutti gli elementi della superficie S è uguale a zero: *il flusso totale di forza uscente dalla superficie chiusa S è nullo.*

Possiamo generalizzare e considerare la superficie S situata nel campo di forze prodotto non da una semplice massa m concentrata in un punto unico, ma da un numero qualunque di masse comunque distribuite. Se tutte queste masse sono esterne alla superficie S noi possiamo ripetere per ciascuna ciò che abbiamo detto per la m. Ma il flusso di forza totale dovuto al sistema di tutte le masse agenti è uguale alla somma dei flussi dovuti alle singole masse, dunque anche in questo caso il flusso totale uscente da S è nullo. Abbiamo dunque il teorema:

Se una superficie chiusa, tracciata in un campo di forze newtoniane, non contiene alcuna massa, il flusso di forza che la attraversa è uguale a zero.

Questo teorema è dovuto a Stokes.

Adottando la definizione stabilita al n. 7, diremo che in tutte le regioni ove non vi sono masse agenti, un campo di forze newtoniane è solenoidale. Quindi in tutte le regioni ove non esistono masse agenti sussistono le proprietà dimostrate pei campi solenoidali.

Così se fra due sezioni $A B$, $A' B'$ di un tubo di forza non esistono dentro al tubo masse agenti, i flussi di forza attraverso alle sezioni AB, $A'B'$, ed a tutte quelle che si possono immaginare comprese fra queste, sono uguali fra di loro e diretti nel medesimo verso: il numero dei tubi unità o delle linee di forza contenute dentro al tubo è costante per tutta la porzione di tubo considerata.

Trattiamo ora il caso nel quale esistono masse nell'interno della superficie chiusa S (fig. 18), e cominciamo a supporre che si abbia dentro ad S una sola massa m situata in un punto m. Se anche in questo caso noi immaginiamo col vertice in m un cono infinitamente sottile di angolo solido $d\,\omega$, questo taglia sulla superficie S un elemento BA; il flusso di forza $d\,\varphi$ attraverso a tale elemento ha, come abbiamo dimostrato, il valore

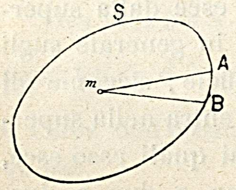

Fig. 18.

$$d\,\varphi = k\,m\,d\,\omega\,.$$

Attraverso a ciascun elemento di S passano flussi calcolabili nel medesimo modo, e questi flussi sono tutti diretti verso l'esterno se la massa m è positiva, o verso l'interno se m è negativa. Tutti questi flussi hanno per ciò il medesimo segno, il segno di m, e si sommano. Dunque il flusso totale di forza uscente dalla superficie chiusa S è

$$k\,m \int d\,\omega,$$

e l'integrale deve essere esteso a tutta la superficie. Ora la superficie apparente di S è, in questo caso, uguale a tutta la superficie sferica di centro m e di raggio *uno*, essa vale 4π; onde se diciamo φ il flusso di forza uscente da S, abbiamo:

$$\varphi = 4\,\pi\,k\,m. \tag{10}$$

Questa proposizione si estende subito al caso generale nel quale la superficie S racchiude nel proprio interno un numero qualunque di masse agenti. Basta osservare che i flussi di forza dovuti alle singole masse si sommano. Se si indica con $\Sigma\,m$ la somma algebrica di tutte le masse esistenti *dentro* alla superficie S, si ha attraverso a queste, dall'interno all'esterno, un flusso totale di forza Φ dato dalla formola:

$$\Phi = 4\pi k \Sigma m. \tag{10'}$$

Il teorema espresso da questa relazione è conosciuto sotto il nome di GAUSS o di GREEN.

Possiamo enunciare uniti i teoremi di STOKES e di GAUSS o di GREEN nel modo seguente:

Il flusso totale di forza, che esce da una superficie chiusa qualunque tracciata in un campo di forze newtoniane, è uguale al prodotto della costante $4\pi k$ *per la somma algebrica delle masse racchiuse nell'interno della superficie, ed è indipendente dalle masse situate all'esterno della superficie stessa.*

Sono corollari di questo teorema le seguenti proposizioni:

In un tubo di forza il flusso, il quale è costante lungo una porzione nella quale non esistono masse di agente, riceve un aumento $4\pi k m$, quando si passa da una parte all'altra di una sezione o di una regione del tubo dove sia contenuta una massa m.

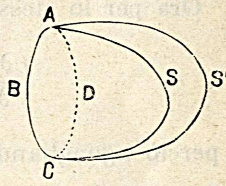

Fig. 19.

Se due superficie S, S' sono limitate da un medesimo contorno $ABCD$ (fig. 19) i flussi di forza che passano attraverso alle medesime hanno un medesimo valore ed un medesimo verso quando nello spazio $ASCS'$ compreso fra di esse non si trova alcuna massa; quando invece in tale spazio è situata una massa m i due flussi di forza presentano l'uno rispetto all'altro una differenza $4\pi k m$.

Se in un campo di forze newtoniane si circondano con superficie chiuse le regioni contenenti masse, tutta la regione esterna a tali superficie soddisfa alla condizione solenoidale; le regioni racchiuse dentro alla superficie non la soddisfano; ed il flusso che esce dalle medesime invece di essere nullo vale per ciascuna $4\pi k m$, ove m rappresenta la massa racchiusa: tutte le linee di forza hanno principio e termine in punti in cui si ha una massa di agente, oppure all'infinito.

23. – **Densità dell'agente. Equazioni di Poisson e di Laplace.** — Se v è il volume di una regione contenente una massa m, si suole denominare *densità media* dell'agente nello spazio v il rapporto $\frac{m}{v}$. Se il volume v è infinitamente piccolo, tale rapporto si dice *densità* dell'agente.

Se si rappresenta con ϱ la densità media dell'agente in una regione di volume v, si ha in tale regione una massa $m = \varrho\, v$, ed il valore del flusso di forza uscente da v si scrive:

$$(10'') \qquad \varphi = 4\,\pi\, k\, \varrho\, v.$$

Coll'analisi questa proposizione si può esprimere nel modo seguente:

Si consideri un prisma infinitamente piccolo, i cui lati paralleli a tre assi coordinati siano dx, dy, dz, e si supponga che dentro di esso la densità dell'agente sia ϱ. La massa contenuta nel prisma è in tale caso $\varrho\, dx\, dy\, dz$, e quindi per la proposizione dimostrata, il flusso di forza uscente dal medesimo è

$$4\,\pi\, k\, \varrho\, dx\, dy\, dz.$$

Ora per lo stesso flusso si è già trovata [6] l'espressione

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz,$$

e perciò uguagliando i due valori si ha:

$$(11) \qquad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\,\pi\, k\, \varrho.$$

Se si dice V il potenziale in un punto del prismetto infinitesimo, dalla (5) si ha:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Sostituendo questi valori nella equazione precedente, si ottiene:

$$(12) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\,\pi\, k\, \varrho.$$

Questa relazione è dovuta a Poisson.

Se la distribuzione è solenoidale, cioè entro all'elemento considerato non si ha massa di agente, è $\varrho = 0$, e quindi:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \tag{13}$$

ed è questa l'equazione di LAPLACE, la quale esprime la condizione di solenoidalità.

Dalle relazioni (1) e (11) risulta come, a meno di un fattore costante $4 \pi k$, la divergenza del vettore forza rappresenti la densità dell'agente; ciò pone precisamente in evidenza che se, con linguaggio ereditato dall'antico modo di considerare i fenomeni, si parla sempre di massa d'agente come di qualche cosa esistente nel corpo, in realtà il concetto di massa, al pari di quello di divergenza, è puramente matematico, e non implica alcuna ipotesi sulla natura del campo e sulle cause che lo producono. Quando si dice che in un punto del campo vi ha una massa d'agente, non s'intende che nel punto esista di fatto qualche cosa, ma semplicemente che in esso la divergenza del vettore forza ha valore diverso da zero.

CAPITOLO II

ELETTRICITÀ

§ 1°

EQUILIBRIO ELETTRICO

24. – Elettrizzazione per strofinamento. — Se si prende un bastone di ceralacca e lo si strofina con un pezzo di flanella di lana, o meglio con pelle di gatto, e poi lo si avvicina ad un tavolo su cui si abbiano pezzettini di corpi leggeri, come ritagli di carta, barbe di penna e simili, tali pezzettini si pongono in movimento, si rizzano su una punta, e talora saltano dal tavolo ed arrivano a toccare il bastone di ceralacca, cui si attaccano per un momento, poi si staccano bruscamente e ricadono, per saltare di nuovo e riattaccarsi, e così via.

Ciò prova che nello spazio tra il bastone di ceralacca ed il tavolo esistono delle forze, per l'azione delle quali i corpi leggeri si pongono in movimento; tale spazio ha dunque acquistato delle proprietà nuove che prima non aveva.

Lo stesso effetto si può ottenere usando, invece del bastone di ceralacca, bastoni di vetro, di zolfo, di ebanite, di ambra gialla, e in generale di una resina qualunque. Dal nome greco dell'ambra (ἤλεκτρον), per la quale tali proprietà erano già note agli antichi, è derivato il nome di *fenomeni elettrici* dato ai fenomeni ora ricordati, ed a molti altri che ad essi si collegano.

Il fenomeno, quale l'abbiamo ora descritto, si presenta assai complicato, perchè le varie parti del bastone strofinato si trovano in condizioni diverse. Per ottenere maggiore uniformità converrà che disponiamo altrimenti l'esperienza.

Al di sopra di un tavolo si abbiano due lastre metalliche disposte parallelamente: l'una *B* (fig. 20) sia in comunicazione metallica colla terra e poggi direttamente sul tavolo, l'altro *A* presenti orli arrotondati e sia portata da sostegni di vetro o di ebanite, oppure sostenuta da cordoncini di seta. Se si batte con coda di volpe un disco *D* di ebanite, e poi lo si pone al di sopra di *A*, si manifestano fra *A* e *B* i fenomeni già osservati coi pezzettini di carta fra bastone e tavolo, ma in modo più regolare, perchè, salvo le porzioni più vicine all'orlo, tutte le altre si trovano nelle stesse condizioni.

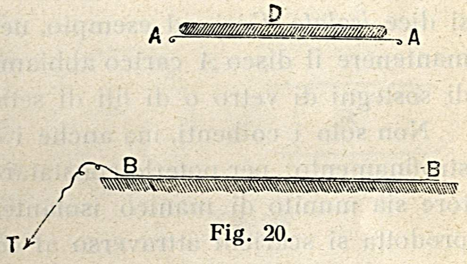

Fig. 20.

Lo spazio fra due lastre è dunque tale che piccoli corpicini portati in esso si trovano sollecitati da forze; esso costituisce un campo di forza che diremo *campo elettrico.* In realtà le forze si manifestano nel campo; la causa delle forze stesse si dovrebbe quindi ricercare nella materia che riempie tale spazio, anzichè nei corpi fra cui le forze si manifestano; ma ciò ci condurrebbe ora ad ipotesi puramente gratuite. Senza introdurre alcuna ipotesi, noi possiamo attribuire le forze elettriche ad uno speciale agente [17], che chiameremo *elettricità:* diremo perciò che sono *elettrizzate* o *cariche di elettricità* le lastre ed i corpicini fra cui le forze si esercitano.

25. – **Corpi conduttori e corpi coibenti.** — La disposizione sperimentale considerata nel numero precedente ci dà modo di constatare una differenza notevole nel comportamento dei varii corpi. Se si tocca il disco metallico *A* carico di elettricità (fig. 20), secondo la natura del corpo portato a contatto, può accadere che cessino subito i fenomeni elettrici ricordati, oppure che essi rimangano inalterati.

Alcuni corpi sono dunque atti a scaricare, condurre via la elettricità, e questi li diremo *conduttori* (metalli, solfuri metallici, soluzioni di sali ed acidi, tessuti animali, ecc.); altri corpi invece non possono scaricare l'elettricità, e questi li diremo *isolanti* o *coibenti* (zolfo, vetro, ebanite, resine, ecc.). Effettivamente in natura non vi ha corpo attraverso cui l'elettricità si scarichi istantaneamente, e così pure non vi ha corpo assolutamente incapace di condur via l'elettricità; non esiste cioè in natura nè il conduttore perfetto, nè il perfetto coibente, tuttavia si presentano fra le due classi di corpi differenze così notevoli da rendere legittima ed utile la distinzione fatta.

Perchè un conduttore possa mantenersi carico è necessario che si trovi unicamente a contatto di corpi coibenti; allora esso si dice *isolato*. Così, ad esempio, nell'esperimento ricordato per mantenere il disco A carico abbiamo dovuto isolarlo per mezzo di sostegni di vetro o di fili di seta.

Non solo i coibenti, ma anche i conduttori si elettrizzano per strofinamento; per poterlo constatare è necessario che il conduttore sia munito di manico isolante, ad evitare che l'elettricità prodotta si scarichi attraverso al corpo dell'esperimentatore.

26. – Due specie di elettricità. — Si prendano due lastre metalliche isolate uguali A, A' (fig. 21); su A si porti un disco D coibente, precedentemente elettrizzato per sfregamento; si tocchi A col dito, e poi senza più toccare nè A, nè A', si porti il disco D su A'. Le due lastre A, A' sono entrambe elettrizzate, ma in

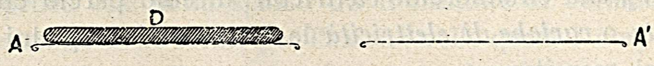

Fig. 21.

modo diverso. Infatti per mezzo di pendolini elettrici (sferette di midollo di sambuco sostenute da fili di seta) si può constatare che entrambe le lastre godono della proprietà di attrarre piccoli corpi, e di respingerli dopo che questi siano venuti a contatto; ma si osserverà ancora che il pendolino respinto da una lastra viene attratto dall'altra. Le due lastre pertanto sono entrambe cariche di elettricità, ma di natura diversa. Le due elettricità si dicono l'una *positiva*, l'altra *negativa*.

Dicesi *elettricità positiva* quella che rimane sulla lastra A, quando, postovi sopra un disco di resina elettrizzato, la si tocchi col dito, e poi si porti via il disco di resina; un tempo era detta anche *elettricità vitrea*, perchè è la stessa elettricità che prende una lastra metallica, cui si sovrappone un disco di vetro elettrizzato mediante strofinamento con seta.

Dicesi *elettricità negativa* quella che si ha sulla lastra A', quando le si sovrappone il disco di resina elettrizzato; essa perciò un tempo era detta anche *elettricità resinosa.*

27. – **Elettrizzazione per influenza.** — In un corpo si manifesta elettricità semplicemente avvicinandolo ad un altro corpo elettrizzato. Così se ad un conduttore A (fig. 22) isolato, carico di elettricità, ad es., positiva, avviciniamo un conduttore B, pur esso isolato, questo si elettrizza, e precisamente di elettricità omonima, positiva, nella parte più lontana, di elettricità contraria, negativa, nella parte più vicina ad A. Ciò si può facilmente riconoscere mediante pendolini elettrici.

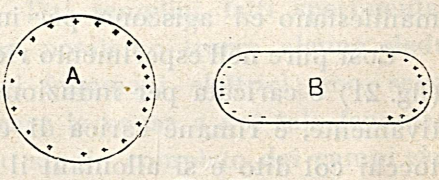

Fig. 22.

Se si allontana B oppure si scarica A, scompaiono le due elettricità su B.

Se B non è isolato (fig. 23), ma comunica colla terra, avviene ancora il fenomeno ora considerato, ma l'elettricità dello stesso nome si scarica a terra, e si ha quindi solo la carica contraria nella estremità di B vicina ad A. Anche questa carica scompare quando si allontana o si scarica A. Se però prima di allontanare o scaricare A si isola B, l'elettricità opposta rimane su B; questa carica, che prima era essenzialmente concentrata nella porzione di B vicino ad A, ora si ripartisce su tutto il conduttore B con legge che dipende solo dalla forma di questo. A questi fenomeni si dà il nome di *influenza* o di *induzione elettrostatica.*

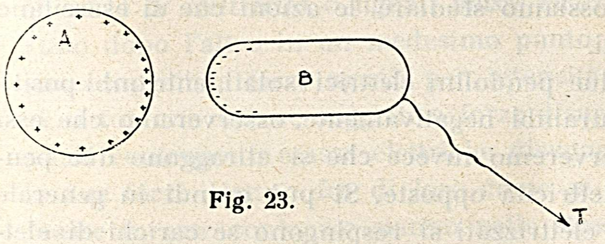

Fig. 23.

In quasi tutti gli esperimenti di elettrostatica si hanno a considerare fenomeni di influenza. Così, se esaminiamo meglio l'esperienza ricordata al numero 24, possiamo osservare che il disco *B* (fig. 20) di resina, elettrizzato negativamente, elettrizza per influenza la lastra *A*, che si carica di elettricità positiva sulla faccia superiore e di elettricità negativa sulla inferiore. Gli effetti delle due elettricità opposte e vicine su *D*, e sulla faccia superiore di *A* si elidono; si manifesta quindi solo la elettricità negativa della faccia inferiore, la quale agisce alla sua volta per induzione sulla lastra *B*, e la carica positivamente. Sono tali cariche, negativa su *A*, positiva su *B*, che si manifestano ed agiscono per influenza sui pezzettini di carta.

Così pure nell'esperimento ricordato al numero 26, la lastra *A* (fig. 21) è caricata per induzione dal disco *D* elettrizzato negativamente, e rimane carica di elettricità positiva quando la si tocchi col dito e si allontani il disco *D*. Sulla lastra *A'* invece, sulla quale si lascia il disco *D*, si rende manifesta solo la elettricità negativa indotta sulla faccia inferiore.

28. – **Attrazioni e repulsioni elettriche.** — Nella esperienza ricordata al numero 26 le due lastre *A*, *A'* sono cariche l'una di elettricità positiva, l'altra di elettricità negativa; abbiamo quindi un modo semplice di ottenere corpi elettrizzati positivamente o negativamente, portandoli in contatto colla lastra *A* o colla lastra *A'*, e possiamo studiare le azioni che si esercitano fra corpi elettrizzati.

Se carichiamo due pendolini elettrici isolati, entrambi positivamente, oppure entrambi negativamente, osserveremo che essi si respingono; osserveremo invece che si attraggono due pendolini carichi di elettricità opposte. Si può quindi in generale dire che due corpi elettrizzati si respingono se carichi di elettricità dello stesso nome, si attraggono se carichi di elettricità di nome contrario.

Se infine ad un pendolino isolato ed elettrizzato in modo qualunque avviciniamo un conduttore non isolato, osserveremo fra di essi un'attrazione, dovuta al fatto che sul corpo non isolato si produce per influenza elettricità di nome contrario.

A causa della influenza un corpo si elettrizza pel solo fatto di essere portato in presenza di un corpo elettrizzato; sempre quando si constatano forze attrattive o ripulsive, dovute ad azioni elettriche, entrambi i corpi, fra i quali le forze si esercitano, sono elettrizzati. È pertanto naturale attribuire le forze. che fra i corpi si esercitano, alle masse elettriche, che in questi corpi sono contenute. Si dirà perciò in modo generale:

Elettricità dello stesso nome si respingono, elettricità di nome contrario si attraggono.

29. – **Campo elettrico.** — Dai semplici fatti sperimentali che abbiamo ricordati, noi non possiamo trarre alcuna deduzione riguardo alla natura dei fenomeni elettrici; ma, senza preoccuparci per ora di ricercare la causa a cui tali fenomeni sono dovuti, potremo fare uno studio completo dei campi elettrici, applicando ad essi le nozioni che si sono in modo generale esposte sui campi di forze, trattando cioè l'agente *elettricità*, come si è fatto di un agente qualunque. Converrà per ciò che consideriamo non già corpi di forma e di dimensioni qualunque, ma corpicini così piccoli che si possano trattare come punti materiali, quando non siano troppo vicini l'uno all'altro.

Estenderemo pertanto ai campi elettrici le convenzioni fatte al numero 17. Diremo che due punti materiali contengono uguali *quantità di elettricità* o uguali *masse elettriche* quando, portati l'uno dopo l'altro in un medesimo punto del campo, vi si trovano soggetti a forze uguali per intensità e per direzione; se vi si trovano invece soggetti a forze disuguali, diremo che i due punti contengono masse elettriche disuguali, e precisamente se le due forze stanno fra di loro come m ad n, diremo che le masse in esse contenute stanno nello stesso rapporto.

Definito così il rapporto fra due masse, e scelta una data massa come *unità*, potremo esprimere con numeri i valori delle masse elettriche.

Facendo viaggiare nel campo elettrico una *massa di prova* potremo determinare in ogni punto la intensità e la direzione del campo.

La forza elettrica che si esercita su un punto può avere la direzione del campo o la direzione opposta, secondo che il punto sia carico di elettricità positiva o di elettricità negativa, ma non accade mai che il punto sia sollecitato da forze altrimenti dirette.

30. – Leggi fondamentali dall'equilibrio elettrico. — I fatti fondamentali ricordati e le considerazioni svolte ci mostrano la possibilità di costrurre strumenti per constatare e misurare quantità anche piccole di elettricità; basti citare per la loro importanza storica *l'elettroscopio a foglie d'oro* e la *bilancia di torsione di Coulomb.*

Per mezzo di questi semplici apparecchi si possono determinare alcune leggi, che sono verificate nell'equilibrio elettrico.

Si dice che un sistema di conduttori è in *equilibrio elettrico,* quando rimane immutata la distribuzione dell'elettricità, quando cioè non si manifestano fenomeni che attestino il passaggio di masse elettriche da una parte ad un'altra del sistema. Per ciò è necessario che i conduttori del sistema siano omogenei, abbiano temperatura uniforme, restino immobili, e non si trovino in presenza di corpi in condizioni magnetiche variabili.

Le leggi sperimentali, su cui si basa la teoria matematica dell'elettricità, sono essenzialmente tre; noi però ne citeremo quattro; di queste, una si può dedurre come conseguenza delle altre. Il fatto che tutte sono verificate sperimentalmente sta a conferma ed a controllo della loro esattezza.

1ª Legge. – *Le forze elettriche sono forze newtoniane.* — Tal legge fu per la prima volta constatata dal Coulomb colla sua bilancia di torsione. Sebbene le esperienze colla bilancia non possano dare una grande precisione, tuttavia sull'esattezza di questa legge non vi ha alcun dubbio, perchè essa risulta come conseguenza delle altre leggi, che l'esperienza dimostra con tutto il rigore desiderabile. La forza che si esercita fra due masse elettriche m, m' alla distanza r, è dunque espressa dalla formula di Coulomb

$$f = k \frac{m\,m'}{r^2}. \tag{1}$$

In questa relazione la costante k è positiva se conveniamo di considerare come positiva la repulsione fra due masse dello stesso segno.

2ª Legge. – *Nell'equilibrio elettrico non vi ha elettricità all'interno dei conduttori: l'elettricità è tutta distribuita sulla superficie.* — Se infatti si porta un conduttore elettrizzato nell'interno di un conduttore cavo, a contatto di questo, si può constatare per mezzo di un elettroscopio che il corpo ha perduta ogni traccia di elettricità, che cioè tutta l'elettricità è passata alla superficie esterna del conduttore cavo. Tale artificio ci dà modo di privare completamente un corpo di ogni carica elettrica, e ci dà ancora modo di sommare algebricamente, cioè di sovrapporre sulla superficie esterna del conduttore cavo, le masse elettriche dei corpi che si portano nel suo interno.

3ª Legge. – *Nell'equilibrio elettrico la forza elettrica è nulla all'interno dei conduttori cavi completamente chiusi.* — Non vi ha campo elettrico entro ai conduttori cavi salvo che lo si produca con corpi carichi ed isolati posti nel loro interno.

Il Faraday per verificare questa legge si fece costrurre un casotto di legno, portato da piedi isolanti, rivestito all'esterno di sottile lastra metallica. Cogli strumenti più delicati egli non constatò mai la minima forza elettrica entro al casotto, neppure quando gli si davano all'esterno potenti cariche, tali da produrre lunghe scintille.

Si dimostra che se questa legge è verificata le forze elettriche sono necessariamente forze newtoniane; si ha quindi una conferma della legge di Coulomb.

4ª Legge. – *Comunque si operi per produrre elettricità, si sviluppano sempre ed in quantità uguali le due specie di elettricità, per modo che la somma algebrica delle elettricità prodotte è nulla. La quantità totale di elettricità esistente in un dato sistema di corpi, è costante, non si può nè aumentare nè diminuire, qualunque azione si eserciti fra questi corpi.*

A tal legge si dà il nome di *principio della conservazione della elettricità.* Questo principio si dimostra facilmente sommando per mezzo di un conduttore cavo le due elettricità prodotte. Così se entro al casotto di FARADAY si pone una macchina elettrostatica, i cui conduttori comunichino col rivestimento metallico del casotto, si possono produrre potenti cariche elettriche senza che nulla si manifesti all'esterno, perchè alla superficie esterna si portano entrambe le elettricità opposte prodotte, le quali, essendo uguali, dànno una somma nulla.

31. - Potenziale elettrico. — Partendo dalle leggi sperimentali ricordate si possono studiare in modo completo i campi elettrici in equilibrio.

E di fatti tutta la trattazione svolta pei campi newtoniani si può, per la 1ª legge, senz'altro applicare ai campi elettrici. Per le masse elettriche sono quindi verificati i teoremi di GAUSS e di STOKES; nelle regioni in cui non vi sono masse elettriche la distribuzione è solenoidale; in un campo elettrico superficie di livello, linee e tubi di forza godono di tutte le proprietà notate nei campi newtoniani. In ogni punto del campo esiste il *potenziale elettrico,* il quale ha un valore ben determinato dalla espressione

$$V = k \Sigma \frac{m}{r} + C, \tag{2}$$

in cui m rappresenta una qualunque delle masse producenti il campo, r la sua distanza dal punto considerato; la sommatoria, che in generale è una somma di integrali, va estesa a tutte le masse del campo; infine C è una costante di integrazione che dipende dalla scelta del punto fisso nel campo, cui si riferiscono i potenziali.

Fra potenziale e forza elettrica passa la relazione fondamentale:

$$f_s = - \frac{dV}{ds}. \tag{3}$$

L'energia di un campo elettrico è espressa da

$$W = \frac{1}{2} \Sigma m V, \tag{4}$$

nella quale m, V sono la massa ed il potenziale in un punto qualunque del campo, e la sommatoria è estesa a tutte le masse del campo.

I campi elettrici hanno però proprietà speciali, che non sono comuni a tutti i campi newtoniani, proprietà le quali risultano come conseguenza delle altre leggi fondamentali stabilite.

Nell'interno di un conduttore non vi ha massa elettrica (2^a legge); si può quindi, senza modificare la distribuzione dell'elettricità, sopprimere in un conduttore tutta la parte interna, lasciandovi solo una crosta superficiale, anche infinitamente sottile; si può cioè al conduttore pieno sostituire un conduttore cavo, della stessa forma e superficie. Ora all'interno di un conduttore cavo la forza è nulla (3^a legge), è perciò nulla la forza anche all'interno di un conduttore qualunque. Per tutti i punti di un conduttore si ha dunque:

$$f_s = -\frac{dV}{ds} = 0,$$

da cui:

$$V = \text{costante}.$$

Questa relazione vale per punti interni comunque vicini alla superficie del conduttore, vale quindi ancora per i punti della superficie stessa.

In un campo elettrico il potenziale ha lo stesso valore in tutti i punti di un conduttore, esso varia solo da conduttore a conduttore attraverso al mezzo coibente interposto.

Le superficie che limitano i conduttori sono superficie *equipotenziali*, e quindi superficie *di livello;* la forza è normale alla superficie del conduttore in ogni suo punto.

In tutte le nostre esperienze noi ci troviamo sempre necessariamente in presenza di un conduttore, la *terra*, con la qual parola si deve intendere non soltanto il suolo, ma ogni conduttore in comunicazione più o meno buona con esso (pareti e soffitto della camera, ecc.). Converrà per semplicità di calcolo che, nella espressione dei potenziali, scegliamo la costante di integrazione, per modo che sia nullo il potenziale della terra. Ciò corrisponde a scegliere il punto fisso C [18] sulla terra.

Con questa convenzione *il potenziale di un conduttore è il lavoro che la forza elettrica fa sulla massa* uno, *che dal conduttore passa ad un altro conduttore in buon contatto col suolo*, o, altrimenti, *il lavoro che si deve spendere per portare la unità di massa dalla terra al conduttore.*

Il potenziale di un conduttore è positivo o negativo secondo che esso è maggiore o minore di quello della terra.

32. – Densità elettrica superficiale. Relazione fra densità e forza elettrica. — La quantità di elettricità per unità di superficie dicesi *densità elettrica superficiale;* il suo valore in un punto qualunque sulla superficie di un conduttore è il limite cui tende il rapporto fra la quantità di elettricità contenuta su di una piccola superficie comprendente il punto e l'area di tale superficie, quando questa tende verso zero.

Se $d\,S$ è l'area di un elemento infinitesimo, $d\,m$ la massa elettrica infinitamente piccola sull'elemento, σ la densità, si ha

$$\sigma = \frac{d\,m}{d\,S}, \qquad d\,m = \sigma\, d\,S.$$

Le variazioni della densità da punto a punto sulla superficie di un conduttore dànno la legge secondo cui l'elettricità è distribuita sulla superficie stessa; se la densità ha un valore costante, la distribuzione è uniforme.

Sulla superficie $A\,B$ (fig. 24) di un conduttore in equilibrio elettrico consideriamo un elemento di area $d\,S$, limitato dal contorno $a\,b$; sia σ la densità su tale elemento, ed f il valore della forza in un punto M esterno al conduttore ed infinitamente vicino all'elemento stesso, forza che assumiamo positiva se diretta all'esterno. Immaginiamo il tubo di forza avente per base $a\,b$; esso taglia sul piano condotto per M normalmente ad f un elemento $a'\,b'$, la cui area è ancora $d\,S$; conduciamo infine all'interno del conduttore una superficie c qualunque avente per contorno $a\,b$.

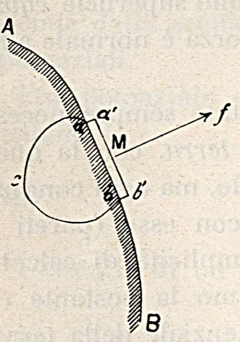

Fig. 24.

La superficie c, l'elemento $a' b'$, e la superficie laterale della porzione di tubo compresa fra $a b$, $a' b'$, formano una superficie chiusa contenente nel suo interno, sull'elemento $a b$, la massa elettrica $\sigma d S$; per il teorema di GAUSS il flusso da essa uscente è $4 \pi k \sigma d S$. Ora la forza è nulla sulla superficie c, è tangente alla superficie del tubo, è normale all'elemento $a' b'$; il flusso uscente è quindi semplicemente $f d S$. Si ha perciò

$$f d S = 4 \pi k \sigma d S,$$

da cui

$$f = 4 \pi k \sigma, \qquad \sigma = \frac{f}{4 \pi k}. \tag{5}$$

Tra la forza elettrica in un punto infinitamente vicino alla superficie di un conduttore, e la densità sulla superficie stessa passa dunque una semplice relazione di proporzionalità.

È importante notare che f e σ hanno lo stesso segno; ciò prova che la forza è diretta all'esterno in corrispondenza degli elementi carichi di elettricità positiva, diretta invece all'interno dove la carica è negativa.

Abbiamo già ricordato che le linee di forza esistono soltanto nello spazio isolante, e sono normali alla superficie dei conduttori; ora possiamo dire di più che esse partono dalla superficie dei conduttori carichi di elettricità positiva, e vanno a terminare alla superficie dei conduttori elettrizzati negativamente.

33. – Pressione elettrostatica. — Sulla superficie $A B$ (fig. 25) di un conduttore si consideri ancora un elemento $a b$, di area $d S$, sul quale la densità ha il valore σ; sia poi un punto M, la cui distanza dall'elemento sia infinitamente piccola a fronte della sua distanza dal contorno dell'elemento. La forza f nel punto M si può considerare come risultante di due forze; cioè della f_1 dovuta alla massa $\sigma d S$ distribuita sull'elemento $a b$, e della f_2 dovuta alle rimanenti masse del sistema, esclusa la $\sigma d S$ dianzi considerata.

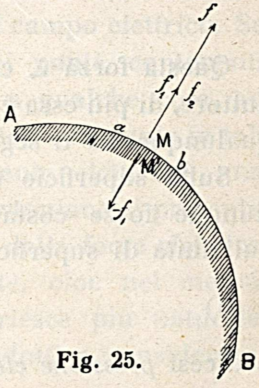

Fig. 25.

La forza f_1, che può essere finita essendo dovuta ad una massa infinitesima ma infinitamente vicina al punto, è, a meno di un infinitesimo, uguale alla forza che sul punto M esercita una distribuzione uniforme, di densità σ, sul piano indefinito cui appartiene l'elemento $a\,b$; per ragione di simmetria essa è normale al piano. La forza f è pure normale all'elemento $a\,b$, quindi anche la f_2 ha la stessa direzione, cosicchè si ha semplicemente:

$$f = f_1 + f_2.$$

Nel punto M', interno al conduttore e simmetrico ad M rispetto al piano $a\,b$, l'intensità del campo è nulla; la forza dovuta alla massa $\sigma\,d\,S$ sull'elemento è uguale ed opposta alla forza f_1 in M; infine, a meno di un infinitesimo, la forza dovuta alle rimanenti masse è la stessa f_2. Si ha perciò:

$$f_2 - f_1 = 0, \qquad f_1 = f_2 = \frac{1}{2} f;$$

ma $f = 4\,\pi\,k\,\sigma$, quindi

$$f_1 = f_2 = 2\,\pi\,k\,\sigma.$$

Ora su ogni punto dell'elemento $a\,b$ tutte le altre masse del sistema esercitano forze, le quali differiscono infinitamente poco dalla forza f_2, che le stesse masse producono nel punto M infinitamente vicino. Ma sull'elemento $a\,b$ è distribuita la massa $\sigma\,d\,S$, per ciò essa è soggetta, per azione delle altre masse del campo, ad una forza

$$f_2\,\sigma\,d\,S = 2\,\pi\,k\,\sigma^2\,d\,S.$$

Questa forza è, come la f_2, normale alla superficie del conduttore, di più essa è sempre positiva, cioè diretta verso l'esterno, qualunque sia il segno di σ.

Sulla superficie di un conduttore elettrizzato si esercitano dunque forze costantemente dirette verso l'esterno. La forza sull'unità di superficie ha il valore

$$p = 2\,\pi\,k\,\sigma^2 \tag{6}$$

e dicesi *pressione elettrostatica.*

L'esistenza della pressione elettrostatica si può dimostrare elegantemente, avvicinando un corpo elettrizzato ad una bolla di sapone; per induzione la bolla si elettrizza e per effetto della pressione elettrostatica, essa si rigonfia e si rompe.

Le forze $p\,d\,S$ che sollecitano ogni elemento $d\,S$ della superficie di un conduttore si possono considerare come dovute ad una tensione esercitata sui conduttori dal mezzo isolante fra di essi interposto. Un modo di rappresentarci il fenomeno consiste nel supporre che nel mezzo si abbiano tanti cordoncini attaccati ad ogni elemento superficiale $d\,S$ dei conduttori, e tesi così da esercitare sull'elemento la tensione $p\,d\,S$. Il sistema delle forze elettriche attrattive e repulsive, cui ogni conduttore è soggetto, per azione delle masse elettriche del campo, equivale al sistema delle tensioni $p\,d\,S$ esercitate dal mezzo isolante sui conduttori.

Siamo così condotti a pensare alla possibilità che gli effetti che attribuimmo alle forze newtoniane esercitantisi fra i conduttori a distanza, siano invece dovuti a tensioni esistenti nel mezzo, in cui i conduttori sono collocati; tensioni le quali sarebbero prodotte da speciali deformazioni, da uno stato di equilibrio forzato, nel mezzo stesso. Sotto il punto di vista meccanico e matematico la considerazione delle tensioni nel mezzo isolante equivale alla considerazione delle forze newtoniane a distanza fra i conduttori.

Per stabilire quale fra le due interpretazioni del campo elettrico sia più esatta, e più corrispondente ai fatti esperimentali, bisognerà anzitutto che l'esperienza ci abbia dato modo di risolvere la questione, dove veramente sia la sede dei fenomeni elementari, ai quali è dovuta l'esistenza del campo elettrico. Se infatti la causa della forza elettrica sta nei punti, contenenti le masse elettriche, si è condotti a pensare a qualche cosa, ad una materia, o ad una condizione della materia esistente in tali punti, si è cioè condotti ad attribuire all'agente elettricità una vera esistenza materiale, e la trattazione newtoniana si presenta più naturale. Se invece la causa immediata della forza elettrica sta nello spazio stesso in cui il campo esiste, cioè nel mezzo coibente interposto fra i conduttori, non riesce più naturale considerare azioni a distanza, ma si è condotti a considerare la forza come la manifestazione di una condizione del mezzo isolante, per esempio di una speciale deformazione di esso, deformazione la quale si trasmette da punto a punto con continuità, per passi infinitamente piccoli, e che si rende manifesta colle tensioni $p\,d\,S$ esercitate sui conduttori.

34. – Distribuzione dell'elettricità alla superficie dei conduttori. Potere delle punte. — Si consideri il campo generato da un conduttore qualunque M carico di elettricità (fig. 26).

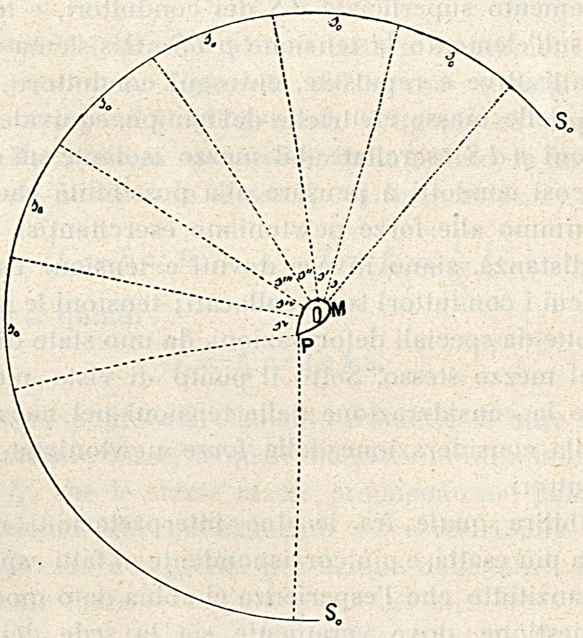

Fig. 26.

Ad una distanza sufficientemente grande, perchè siano trascurabili rispetto ad essa le dimensioni del corpo, il campo prodotto è quello stesso che si avrebbe se la massa elettrica anzichè distribuita sulla superficie del corpo fosse tutta raccolta in un punto centrale O. Oltre quella distanza le linee di forza sono dunque rette passanti per O; le superficie di livello sono superficie sferiche, concentriche in O, e quindi equidistanti; la forza ha un valore costante per tutti i punti della stessa superficie sferica. A minor distanza influiscono sul campo le dimensioni del corpo;

dalla forma del corpo dipende la forma delle superficie di livello, e ciò tanto più quanto minore ne è la distanza; la stessa superficie del corpo è superficie di livello. Le linee di forza, normali a tutte queste superficie, dipendono naturalmente esse pure dalla forma e dalla curvatura della superficie del corpo.

Sia $S_0 S_0$ una delle superficie sferiche di livello, in ogni punto della quale la forza ha un valore costante. Immaginiamo la superficie $S_0 S_0$ divisa in tanti elementi di area s_0; attraverso ad ognuno di essi il flusso di forza ha lo stesso valore $f_0 s_0$.

Prendiamo tali elementi come basi di tanti tubi di forza, i quali ci determinano sulla superficie di M gli elementi s, s', s''... di area tanto minore quanto più i tubi sono convergenti, cioè quanto maggiore è la curvatura della superficie di questi elementi. Il flusso di forza attraverso a questi elementi ha i valori fs, $f's'$, $f''s''$..... se con f, f', f''... rappresentiamo i corrispondenti valori della forza. A causa della solenoidalità, si hanno le relazioni:

$$f_0 s_0 = fs, \qquad f_0 s_0 = f' s' ;$$

da cui

$$fs = f' s'. \qquad \frac{f}{f'} = \frac{s'}{s}.$$

È dunque tanto maggiore la forza elettrica quanto minore è l'area s dell'elemento, cioè quanto minore è il raggio di curvatura; e poichè la densità elettrica è proporzionale alla forza, anche la densità è inversamente proporzionale al raggio di curvatura. Si ha così la legge secondo la quale la distribuzione della carica sulla superficie dei conduttori dipende dalla forma della superficie stessa.

In ogni caso particolare, considerando tubi di forza infinitesimi, si potranno stabilire calcoli precisi, e trovare i valori della densità in tutti i punti di un conduttore in equilibrio; a noi basta di avere esaminato il fenomeno in modo generale.

Un caso speciale notevole merita di essere considerato.

Il conduttore M presenti una cuspide in un punto P. In questo punto il raggio di curvatura è nullo, quindi la forza è infinita; la densità e la pressione elettrostatica sono pure infinite.

Nella pratica si possono ottenere raggi di curvatura, se non nulli, molto piccoli per mezzo di punte nelle quali è quindi grandissima la pressione. Ciò spiega il così detto *potere delle punte*, cioè la facilità con cui le punte lasciano disperdere la elettricità. È noto che questa proprietà riesce utilissima in molti apparecchi e strumenti elettrici, come, ad esempio, nelle macchine elettrostatiche.

35. – Superficie corrispondenti. — Nel campo elettrico immaginiamo non più un unico conduttore a distanza grandissima da tutti gli altri, ma due conduttori A, B in presenza (fig. 27); consideriamo un tubo qualunque di forza collegante i due conduttori. Le superfici di contorno $a\,a$, $b\,b$, che esso determina sui conduttori, si dicono *superficie corrispondenti*. Sappiamo che la superficie $a\,a$, da cui il tubo parte, è elettrizzata positivamente, e la $b\,b$, alla quale il tubo arriva, è elettrizzata negativamente; ora dico che le masse opposte m_a, m_b distribuite sulle due superficie corrispondenti sono uguali. Infatti immaginiamo due superficie α, β, quali si vogliano, situate all'interno dei due conduttori ed aventi per contorno i contorni delle superficie corrispondenti; formiamo per tal modo con queste superficie e colla superficie laterale del tubo una superficie chiusa comprendente nell'interno le due masse m_a, m_b. Il flusso uscente da questa superficie è nullo, perchè la forza è nulla nei punti delle superficie α, β interne, ed è tangente nei punti della superficie laterale del tubo; ma pel teorema di Gauss il flusso uscente è dato da $4\pi k\,(m_a + m_b)$; si ha quindi

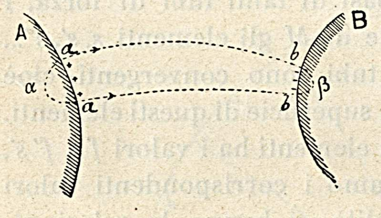

Fig. 27.

$$4\pi k\,(m_a + m_b) = 0,$$

ossia

$$m_a + m_b = 0, \qquad m_a = -\,m_b\,;$$

Due superficie corrispondenti contengono masse elettriche uguali e di segni contrarii.

Il teorema delle superficie corrispondenti vale a chiarire sempre meglio il concetto che i fenomeni elettrici siano dovuti a deformazioni del mezzo. Possiamo completare la rappresentazione di un campo elettrico per mezzo di cordoncini elastici. Ogni cordoncino, che vedemmo fissato normalmente alla superficie di un conduttore, possiamo immaginarlo disposto secondo un tubo di forza collegante due elementi corrispondenti. Agli estremi di uno stesso cordoncino si hanno uguali masse elettriche come è naturale, perchè le masse elettriche, agenti a distanza, equivalgono per i loro effetti alle tensioni dei cordoncini.

36. – Rappresentazione di campi elettrici speciali. Influenza elettrostatica. — I fatti sperimentali ricordati e le proposizioni dimostrate ci permettono di dedurre facilmente note proprietà dei campi elettrici. Così, ad esempio, gli stessi fenomeni d'induzione elettrostatica risultano come necessaria conseguenza delle considerazioni generali che abbiamo fatte.

Consideriamo un campo uniforme, un campo cioè nel quale le linee di forza sono rette parallele uniformemente distribuite; le superficie di livello corrispondenti a potenziali equidifferenti sono piani paralleli ed equidistanti.

In tale campo s'introduca un conduttore isolato AB (fig. 28). Evidentemente ad una certa distanza da AB non si fa sentire in modo apprezzabile l'effetto prodotto dalla introduzione del conduttore; al di là di una certa distanza si può quindi ritenere il campo immutato. Siano V e V_n le prime superficie di livello, che si possono considerare come piane, f, f le prime linee di forza, che si possono ritenere rette. A distanze minori il campo è necessariamente variato; difatti all'interno del conduttore la forza è nulla; la superficie AB del conduttore stesso è una superficie di livello. In punti vicini al conduttore le superficie di livello si scostano poco da AB, poi col crescere della distanza vanno man mano deformandosi fino a ritornare piane. In corrispondenza delle porzioni AB del conduttore si hanno due regioni, nelle quali le superficie di livello sono più fitte. Le cose si passano come se le superficie di livello si fossero spostate e deformate per far posto al conduttore.

Le linee di forza si deformano anch'esse in modo da mantenersi normali alle superficie di livello. Se il campo ha la direzione scelta in figura, le linee di forza, partendo dalla regione al di là del piano V, in cui sono ancora rette parallele, vanno incurvandosi e convergendo verso l'estremo A; mentre dallo estremo B vanno divergendo fino a che al di là del piano V,

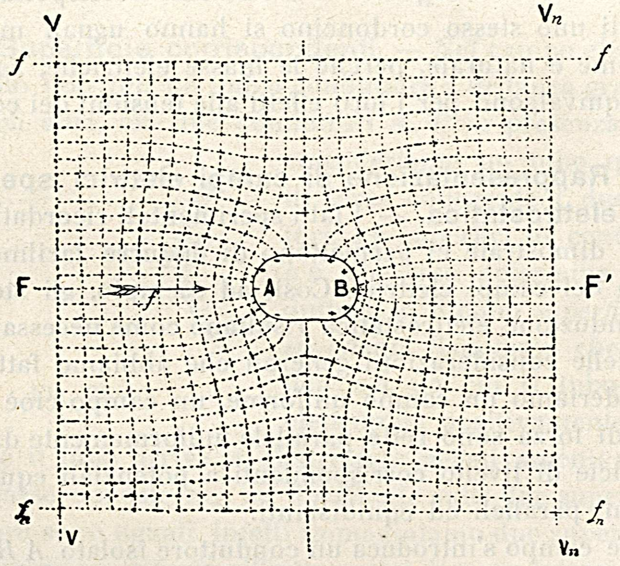

Fig. 28.

possono di nuovo considerarsi come rette. Se tutto è simmetrico le rette FA, BF' sono ancora linee di forza. Nel conduttore sulla porzione A, alla quale arrivano le linee di forza, si ha una distribuzione di elettricità negativa; sulla porzione B, da cui le linee di forza partono, una distribuzione di elettricità positiva.

Consideriamo un altro esempio.

In un campo uniforme, sia V_n (fig. 29) il piano di livello a potenziale zero, formato, ad esempio, dalla superficie di un conduttore in comunicazione colla terra. In questo campo s'introduca un conduttore AB collegato con un filo metallico BC alla superficie V_n e quindi alla terra. Oltre una certa distanza le superficie di livello si mantengono piane, le linee di forza rette; sia V il primo di questi piani, f, f_n le prime linee di forza rette.

Nelle vicinanze del conduttore il campo è necessariamente variato. La superficie a livello zero è costituita dal piano V_n, dalla superficie del filo BC e dalla superficie del conduttore AB. Le successive superficie vanno man mano scostandosi dalla forma della superficie a livello zero, sino a riprendere la forma piana. Nelle vicinanze della porzione A del conduttore tali su-

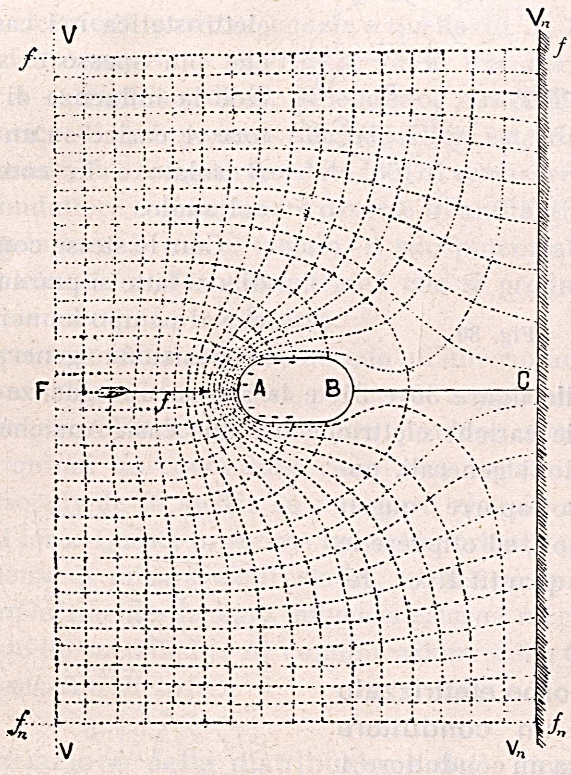

Fig. 29.

perficie sono più fitte. Le cose in sostanza si passano come se le superficie di livello fossero state respinte a sinistra di AB.

Colla direzione scelta del campo le linee di forza che al di là del piano V sono rette, vengono convergendo ed addensandosi specialmente sulla porzione A. Supposto tutto simmetrico la retta FA è ancora una linea di forza. Sul conduttore AB arrivano linee di forza; nessuna ne parte: esso è quindi carico solo di elettricità negativa, che è distribuita essenzialmente nella porzione A.

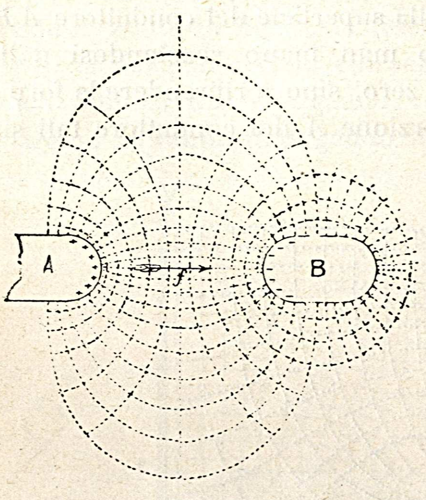

Fig. 30.

In questi due esempi siamo venuti considerando l'influenza di un campo uniforme su un conduttore; si può allo stesso modo considerare l'influenza elettrostatica nel caso generale che più spesso ci si presenta, cioè la influenza di un conduttore *A* carico su un conduttore *B* isolato o in comunicazione col suolo.

Con le stesse considerazioni dianzi fatte si può subito vedere che il campo ha nei due casi la disposizione generale rappresentata nelle figure 30 e 31, e le stesse conseguenze si traggono rispetto alle cariche elettriche nei due casi. Anzichè limitarci a considerazioni generali, potremmo sottoporre questi casi a calcoli, ed ottenere le relazioni quantitative dei fenomeni.

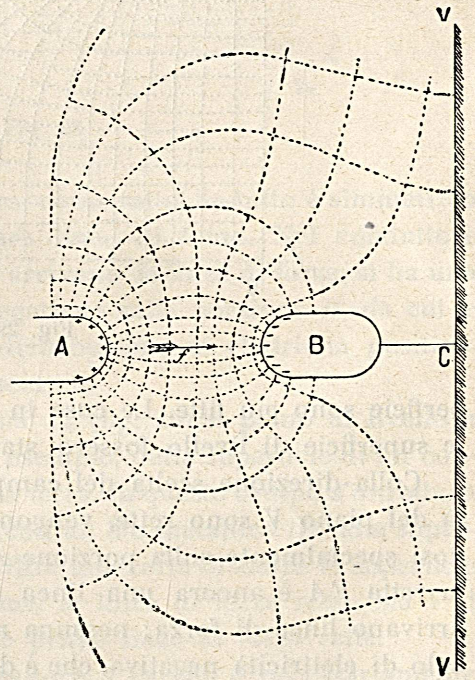

Fig. 31.

37. – Corpo elettrizzato entro ad un conduttore cavo. — Sia un conduttore *A* carico di elettricità, per es., positiva, posto dentro ad un conduttore *B* che lo circonda completamente. Tutti i tubi di forza esistenti nello spazio fra *A* e *B*, partono dalla superficie di *A* e terminano necessariamente sulla superficie interna di *B*. Quindi alle varie masse contenute su *A* corrispondono masse uguali e di segni contrarii nell'interno di B, e per conseguenza le masse totali distribuite sulle due superficie sono uguali e di segni contrarii. Per il principio della conservazione dell'elettricità, la quantità totale di elettricità che A produce su B è nulla, si deve quindi avere sulla superficie esterna di B una quantità di elettricità positiva uguale a quella di A. Se A viene a contatto della superficie interna di B, le due masse uguali, positiva di A e negativa di B, si elidono, cosicchè nel complesso la carica di A è passata alla superficie esterna di B. Ciò dà modo, come abbiamo già ricordato [30] di scaricare completamente un conduttore e di sommare diverse quantità di elettricità.

Se il conduttore B non è isolato, il suo potenziale si mantiene costantemente nullo, e l'elettricità che si produce alla sua superficie esterna si scarica a terra.

Qualunque fenomeno elettrico accada all'interno non produce alcuna azione all'esterno; d'altra parte noi sappiamo che qualunque fenomeno elettrico esterno non produce alcuna azione all'interno; quindi un conduttore cavo non isolato e perfettamente chiuso divide lo spazio in due parti elettricamente indipendenti fra loro. Questa proprietà trova importanti applicazioni negli strumenti di misura elettrostatici, i quali si possono proteggere completamente da ogni influenza esterna racchiudendoli entro a custodie metalliche, in comunicazione colla terra, costituenti veri *schermi elettrici*.

38. – **Variazione della distribuzione delle masse senza alterare la distribuzione della forza in date regioni.** — In un campo elettrico consideriamo una superficie S di livello, che divide il campo in due regioni, l'una interna, l'altra esterna. Se immaginiamo la superficie S materializzata per mezzo di una sottile lamina metallica, si sviluppano per induzione due distribuzioni elettriche uguali ed opposte sulle sue faccie; e precisamente la carica elettrica totale indotta sulla faccia esterna è uguale alla somma algebrica M delle masse m contenute nel suo interno; sulla faccia interna la carica totale è $-M$. Poichè S è una superficie di livello, non si viene con ciò a modificare in alcun modo l'equilibrio del sistema, nè si altera per nulla il

valore della forza; infatti le due distribuzioni uguali ed opposte indotte, che restano in equilibrio sulla superficie S senza variare la distribuzione delle altre masse, producono in ogni punto forze uguali ed opposte.

Ora le masse interne alla superficie conduttrice, comprese le masse $-M$, non producono campo all'esterno, e le masse esterne, comprese le $+M$, non producono campo all'interno; possiamo quindi dire che il campo prodotto nella regione esterna dalle preesistenti masse interne alla superficie, è uguale al campo prodotto dalla massa M distribuita sulla superficie stessa, e ancora che il campo all'interno prodotto dalle preesistenti masse esterne, è uguale al campo prodotto dalla massa $-M$.

In un campo elettrico, se si considera solo la porzione interna, o la porzione esterna ad una superficie di livello, si può sempre alle masse esterne od alle masse interne alla superficie stessa sostituire rispettivamente le masse elettriche che si sviluppano all'interno, oppure all'esterno della superficie stessa, quando questa si immagina metallizzata.

Se nel campo si ha solo da considerare lo spazio compreso fra due superficie di livello, S interna ed S' esterna, senza alterare per nulla la distribuzione della forza in tale regione, si può alle masse interne ad S, ed alle masse esterne ad S' immaginare sostituite le cariche che si producono per induzione rispettivamente sulla faccia esterna di S, e sulla faccia interna di S', quando le due superficie si immaginano metallizzate.

39. – Distribuzioni rettilinee e distribuzioni cilindriche. — Consideriamo il campo generato da una massa elettrica distribuita in modo uniforme lungo una linea retta indefinita, della quale indichiamo in A (fig. 32) la traccia sul piano di figura; rappresentiamo con λ la *densità elettrica lineare*, cioè la quantità di elettricità distribuita sulla unità di lunghezza.

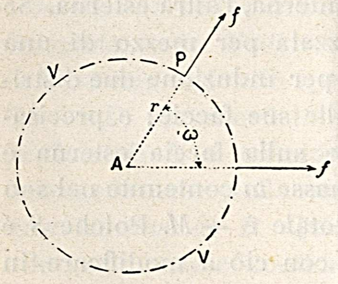

Fig. 32.

Per ragione di simmetria le linee di forza sono rette che incontrano la A ad angolo retto, e divergono dalla A, se supponiamo che la massa elettrica su A sia positiva; le superficie di livello sono superficie cilindriche aventi per asse la retta A; la forza ha un valore costante su ognuna di queste superficie.

Il flusso uscente dalla superficie chiusa formata dalla superficie di livello di raggio r, e da due piani normali all'asse, posti fra loro alla distanza l è $2\pi r l f$; d'altra parte, perchè tale superficie chiusa racchiude nel suo interno la massa $l\lambda$, il teorema di GAUSS dà per il flusso uscente l'espressione $4\pi k l \lambda$; si ha perciò:

$$2\pi r l f = 4\pi k l \lambda;$$

da cui

$$f = \frac{2k\lambda}{r}.$$

I diedri formati da due piani che si tagliano secondo la retta A sono tubi di forza. Se ω è l'angolo formato dai due piani, il flusso φ attraverso al diedro è dato dalla relazione:

$$\varphi : 4\pi k l \lambda = \omega : 2\pi,$$

da cui

$$\varphi = 2\omega k l \lambda.$$

Possiamo pure calcolare facilmente il potenziale in un punto qualunque del campo. Ricordando la (3) e l'espressione dianzi trovata della forza, si ha:

$$-\frac{dV}{dr} = f = \frac{2k\lambda}{r},$$

da cui

$$dV = -2k\lambda \frac{dr}{r},$$

ed integrando:

$$V = \text{cost.} - 2k\lambda \log r.$$

Le superficie equipotenziali sono determinate dall'equazione

$$r = \text{cost.};$$

sono dunque superficie cilindriche di asse A, come abbiamo già ricordato.

Si consideri ora il campo generato da due distribuzioni uguali ed opposte di elettricità su due rette parallele A_1, A_2 (fig. 33), sulle quali la densità elettrica per unità di lunghezza ha rispettivamente i valori λ, $-\lambda$.

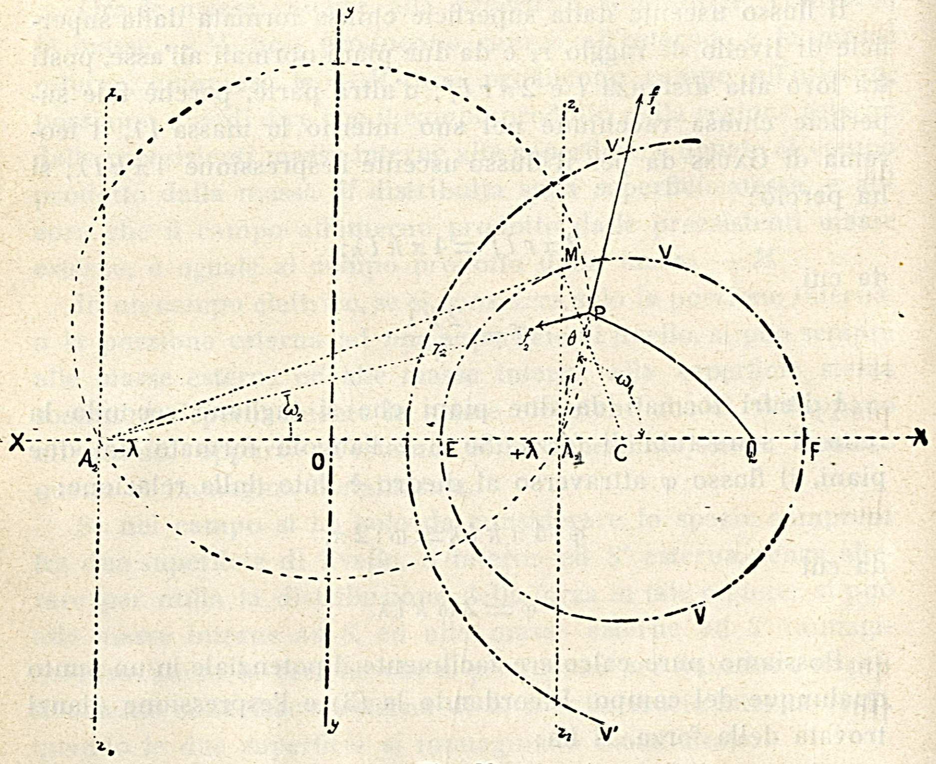

Fig. 33.

In un punto qualunque del campo, alle distanze r_1 da A_1, r_2 da A_2, la prima distribuzione produce una forza $f_1 = \frac{2k\lambda}{r_1}$ diretta secondo A_1P; la seconda distribuzione vi produce una forza $f_2 = -\frac{2k\lambda}{r_2}$, diretta secondo PA_2; l'intensità del campo nel punto P è la risultante delle due forze f_1, f_2; essa è contenuta nel piano condotto per P normalmente alle A_1, A_2.

Tutte le rette, come la XX, normali alle A_1, A_2 sono linee di forza; tutte le sezioni rette delle superficie cilindriche aventi per direttrice una linea di forza e per generatrice una retta parallela ad A_1, A_2, sono ancora linee di forza. Una qualunque di queste superficie cilindriche ed il piano $A_1\, A_2$ determinano un tubo di forza attraverso al quale il flusso è costante.

Consideriamo una superficie cilindrica a generatrici parallele alle due rette, ed avente per direttrice una linea qualunque $P\,Q$, il cui estremo Q si trovi nel piano $A_1\,A_2$; se mantenendo fissa la generatrice Q, spostiamo la generatrice P in modo che il flusso φ attraverso alla superficie $P\,Q$ rimanga costante, la generatrice P descrive una superficie cilindrica luogo di linee di forza.

Ognuna delle distribuzioni su A_1 ed A_2 produce attraverso alla superficie $P\,Q$ rispettivamente i flussi:

$$\varphi_1 = 2\,k\,l\,\lambda\,\omega_1, \qquad \varphi_2 = -2\,k\,l\,\lambda\,\omega_2,$$

il flusso risultante è

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = 2\,k\,l\,\lambda\,(\omega_1 - \omega_2).$$

Dal triangolo $P\,A_1\,A_2$ si ha $\theta = \omega_1 - \omega_2$, e perciò:

$$\varphi = 2\,k\,l\,\lambda\,\theta.$$

L'equazione delle linee di forza nel piano è dunque

$$\theta = \text{cost.}$$

Questa è l'equazione di un sistema di circonferenze passanti per A_1 e per A_2, ed aventi i loro centri sulla retta $y\,y$ condotta normalmente alla $A_1\,A_2$ pel suo punto di mezzo O.

Le superficie di livello sono ancora superficie cilindriche a generatrici parallele alle rette A_1, A_2. Possiamo facilmente trovarne l'equazione. Il potenziale in un punto qualunque è

$$V = V_1 + V_2;$$

ora

$$V_1 = \text{cost.} - 2\,k\,\lambda\,\log r_1, \qquad V_2 = \text{cost.} + 2\,k\,\lambda\,\log r_2;$$

e quindi

$$V = \text{cost.} + 2\,k\,\lambda\,\log \frac{r_2}{r_1}.$$

L'equazione $V = \text{cost.}$ delle superficie di livello ci dà in questo caso

$$\frac{r_2}{r_1} = \text{cost.}$$

Nel piano della figura questa equazione rappresenta le circonferenze il cui diametro EF si trova sulla retta $A_1 A_2$, ed è diviso armonicamente dai punti A_1, A_2, talchè:

$$\frac{A_2 E}{A_1 E} = \frac{A_2 F}{A_1 F}.$$

Si possono facilmente costrurre queste circonferenze: si conduce la retta $Z_1 Z_1$ normale in A_1 alla XX; da un suo punto qualunque M si conduca la $A_2 M$ e la normale; questa determina sulla $A_1 A_2$ il centro C del cerchio passante per M. In modo analogo si costruiscono le circonferenze passanti per i punti della retta $Z_2 Z_2$ normale in A_2 alla XX.

Le superficie di livello formano due sistemi, l'uno disposto attorno alla retta A_1, l'altro attorno alla retta A_2; i due sistemi sono separati dal piano yy, che è pur esso una superficie di livello.

Se ci limitiamo a considerare lo spazio fra due superficie V, V' di livello, per le considerazioni svolte al numero precedente, possiamo alle due distribuzioni rettilinee considerate sostituire le masse elettriche che per induzione si sviluppano su queste superficie, quando si immaginiamo metallizzate; la quantità di elettricità distribuita sulle due superficie cilindriche per unità di lunghezza misurata secondo l'asse è uguale alla densità delle distribuzioni rettilinee.

Questa considerazione ci permette di estendere lo studio ora fatto ai campi prodotti da distribuzioni cilindriche, cioè ai campi dovuti a due masse uguali ed opposte distribuite su due conduttori entrambi cilindrici ad asse parallelo, oppure l'uno piano e l'altro cilindrico con asse parallelo al piano. Infatti potremo sempre sostituire al sistema dei due conduttori elettrizzati due distribuzioni rettilinee, le quali abbiano densità uguale alla quantità di elettricità distribuita sui conduttori per unità di lunghezza, e siano disposte per modo che le superficie dei due conduttori siano superficie di livello nel campo generato dalle distribuzioni rettilinee.

40. - Capacità elettrostatica. — Si consideri un conduttore A isolato, in presenza di altri conduttori B', B'', B''',..... in comunicazione metallica colla terra, e si supponga che inizialmente anche A sia a potenziale zero. Se si dà al conduttore A una carica positiva, questa per influenza sviluppa cariche negative sugli altri conduttori. Il potenziale dei conduttori B non viene perciò alterato, mentre A assume un potenziale V, il cui valore si può calcolare per mezzo della (2), nella quale si deve tener conto non solo della massa data ad A, ma ancora di tutte le masse indotte sugli altri conduttori.

Lasciando immutata la posizione dei corpi si dia al conduttore A una seconda carica uguale alla precedente; la seconda carica si distribuisce sulla superficie di A secondo la stessa legge con cui si è distribuita la prima carica, e produce quindi per induzione le stesse masse sugli altri corpi. Pel fatto di aver raddoppiata la carica di A, in ognuno dei termini $\frac{m}{r}$ che entrano nell'espressione del potenziale si è raddoppiato m, mentre r è rimasto invariato; si è dunque reso doppio anche il valore del potenziale.

Quindi si può dire che fra il potenziale V, che un conduttore isolato in presenza di conduttori a potenziale zero assume per effetto di una carica M, e la carica stessa passa la relazione di proporzionalità:

$$M = C\,V. \qquad (7)$$

Più in generale, dato un conduttore in presenza di altri a potenziale costante, la carica M che gli si deve dare per portarne il potenziale dal valore V_1 al valore V_2, è proporzionale alla differenza $V_2 - V_1$, cioè:

$$M = C\,(V_2 - V_1). \qquad (7')$$

Alla costante C di proporzionalità si dà il nome di *capacità elettrostatica.*

Le relazioni precedenti dànno l'espressione della capacità:

$$(7'') \qquad C = \frac{M}{V} \qquad C = \frac{M}{V_2 - V_1};$$

se si fa $V = 1$, oppure $V_2 - V_1 = 1$, si ha

$$M = C;$$

ne risulta che la *capacità elettrostatica di un conduttore* è la quantità di elettricità che ad esso si deve dare per elevarne di un'unità il potenziale, mentre il potenziale di ogni altro conduttore in presenza rimane costante.

Le considerazioni stesse dalle quali siamo stati portati a parlare di capacità provano che essa non dipende solo dalla forma e dalle dimensioni del conduttore che si considera, ma ancora dalla forma, dalle dimensioni e dalla posizione di tutti i conduttori che si trovano in presenza.

La capacità di un conduttore aumenta quando gli si avvicina un altro conduttore comunicante colla terra.

Infatti consideriamo ancora il conduttore A isolato e carico positivamente, in presenza dei conduttori B, comunicanti colla terra; avviciniamo ad A uno dei corpi B; noi veniamo con ciò a diminuire la distanza di un punto di A dalle masse negative indotte su questo corpo; veniamo cioè, nella espressione del potenziale, ad aumentare il valore dei termini negativi $-\frac{m}{r}$. Ne risulta che senza alterare per nulla la carica di A, per il solo fatto di avergli avvicinato un conduttore comunicante colla terra, è diminuito il valore del potenziale, e quindi è aumentato il rapporto $\frac{M}{V}$, cioè la capacità di A.

41. – Condensatori. — La proprietà che abbiamo dianzi ricordata ci dà modo di ottenere grandi capacità per mezzo di due conduttori, l'uno isolato, l'altro comunicante colla terra, i quali presentino estese superficie affacciate a piccolissima distanza. Siano, ad esempio, due lastre A, B piane, parallele, separate da un sottile strato d'aria. Fatta astrazione dalle porzioni vicine agli orli, il campo fra le due lastre è uniforme; si hanno sulle due lastre due cariche opposte uguali ed ugualmente distribuite; ad ogni massa $+m$ su A corrisponde una uguale massa $-m$ su B. Nella espressione del potenziale in un punto qualunque P di A, dette r, r' le distanze del punto P dagli elementi corrispondenti $+m$ e $-m$, ad ogni termine $\frac{m}{r}$ corrisponde un termine $-\frac{m}{r'}$. Ora, facendo abbastanza piccola la distanza delle lastre si può ottenere r' poco differente da r, cioè V molto piccolo, e C grandissimo.

Questo ragionamento è anche più rigoroso se il conduttore B avvolge completamente A. Ogni tubo che parte da A incontra B; le masse su A e su B sono assolutamente uguali. Basterà rendere grandi le superficie affacciate e piccolo lo strato interposto, per avere un grande capacità.

Al sistema di due conduttori presentanti grandi superficie affacciate a piccola distanza, si dà il nome di *condensatore;* posto l'uno dei conduttori a terra, si può, a causa della grande capacità, dare all'altro potenti cariche, cioè condensarvi notevoli masse elettriche senza elevarne di molto il potenziale.

I due conduttori diconsi *le armature* del condensatore. Un condensatore dicesi *chiuso* quando una delle armature è formata da una superficie chiusa avviluppante completamente l'altra; dicesi *aperto* quando ciò non si verifica.

Capacità di un condensatore è la capacità di una delle sue armature, quando si ponga l'altra a terra; è cioè la carica che si deve dare ad una delle armature per far crescere di una unità il suo potenziale, mentre l'altra armatura è mantenuta a terra, o più in generale a potenziale costante.

La capacità è una grandezza ben definita solo per i condensatori chiusi, poichè l'armatura esterna fa da schermo elettrico all'interna, la quale non subisce alcuna influenza dall'esterno. Per i condensatori aperti ciò non è più vero in modo rigoroso, ma nei casi pratici lo si può ancora ritenere verificato con molta approssimazione, perchè a causa della grande superficie delle armature e della loro piccola distanza, le modificazioni che i corpi estranei possono arrecare nella distribuzione della carica sono una frazione piccolissima, affatto trascurabile della carica totale.

Dati n condensatori, si possono diversamente collegare: si può anzitutto riunire fra loro e colla sorgente di elettricità una delle armature dei singoli condensatori, mentre le altre armature comunicano fra loro e colla terra: si ha in questo caso il collegamento *in quantità* o *in parallelo.* Dette C_1, C_2, C_3..... le capacità dei singoli condensatori, M_1, M_2, M_3..... le rispettive cariche, V la differenza di potenziale fra le armature, si ha:

$$M_1 = C_1 V, \qquad M_2 = C_2 V, \qquad M_3 = C_3 V.....$$

Questo sistema equivale ad un condensatore unico, il quale assume una carica

$$M = M_1 + M_2 + M_3 + ...$$

quando si stabilisce una differenza di potenziale V fra le sue armature; esso presenta perciò una capacità

$$C = \frac{M}{V} = C_1 + C_2 + C_3 + ...$$

La capacità di un sistema di condensatori in quantità è la somma delle capacità dei singoli condensatori.

Se gli n condensatori hanno la stessa capacità c, la capacità del sistema è

$$C = n\,c.$$

Si può invece riunire alla sorgente di elettricità una delle armature del 1° condensatore, collegare la seconda armatura di questo ad una delle armature del 2° condensatore, la seconda armatura del 2° ed una delle armature del 3°, e così via successivamente, l'ultima armatura dell'ultimo condensatore alla terra; si ha in questo caso il collegamento *in cascata* o *in serie.* Dette ancora C_1, C_2, C_3..... le capacità dei singoli condensatori, V la differenza di potenziale totale, V_1, V_2, V_3..... le differenze di potenziale fra le armature dei varii condensatori, M la carica del 1° condensatore, che esattamente nei condensatori chiusi, con tutta approssimazione nei casi pratici, è ancora la carica che si sviluppa per influenza nei successivi conduttori, si ha

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + ...$$

$$V_1 = \frac{M}{C_1}, \qquad V_2 = \frac{M}{C_2}, \qquad V_3 = \frac{M}{C_3}, ...$$

e quindi

$$\frac{V}{M} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ...$$

Il sistema equivale dunque ad un condensatore unico di capacità

$$C = \frac{M}{V} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ...}$$

La capacità di un sistema di condensatori in cascata è uguale al reciproco della somma dei reciproci delle capacità dei singoli condensatori.

Se gli n condensatori presentano la stessa capacità c, la capacità del sistema è

$$C = \frac{c}{n}.$$

Consideriamo un condensatore *carico*, un condensatore cioè nel quale si è prodotta una differenza di potenziale fra le armature, per mezzo di una quantità M di elettricità data ad una di esse. Se facciamo comunicare metallicamente le due armature, queste vengono a costituire un unico conduttore, nel quale il potenziale ha valori diversi; non è più possibile l'equilibrio; deve perciò avvenire un movimento di elettricità e precisamente la massa $+M$ passa dall'una armatura all'altra, elidendovi la massa uguale $-M$; il potenziale di entrambe le armature si riduce a zero; in tal modo si è *scaricato* il condensatore.

Nella scarica di un condensatore si sviluppa una certa quantità di energia, e difatti nel conduttore che collega le due armature avviene sempre un riscaldamento; se poi la differenza di potenziale è abbastanza elevata, la scarica si produce nel coibente anche prima che il contatto metallico sia stabilito, e si manifesta allora colla scintilla, che dà luce, calore, rumore.

Questa energia, che si sviluppa nella scarica, era prima accumulata nel condensatore. Per caricare un condensatore si deve spendere un lavoro che rimane accumulato nel condensatore stesso, e che nella scarica viene restituito sotto forma di luce, calore e lavoro meccanico.

Possiamo calcolare facilmente la energia totale accumulata in un condensatore carico. Se V_1, V_2 sono i potenziali delle due armature, ed M è la carica elettrica, che (esattamente per i condensatori chiusi, con molta approssimazione per i condensatori aperti) ha lo stesso valore su entrambe le armature, la (4) ci dà l'espressione dell'energia:

$$W = \frac{1}{2} M (V_2 - V_1), \tag{8}$$

e per l'equazione (7′), (7″)

$$W = \frac{1}{2} \frac{M^2}{C}, \tag{8′}$$

$$W = \frac{1}{2} C (V_2 - V_1)^2. \tag{8″}$$

42. – Potere induttore specifico o Costante dielettrica. — Di un condensatore noi abbiamo sin qui considerato solo le due armature metalliche, che ritenemmo sede delle cariche elettriche; ora occorre che esaminiamo quale parte prende nei fenomeni di carica e scarica il coibente interposto fra le armature.

Abbiasi un condensatore, nel quale le due armature e l'isolante interposto si possano fra di loro separare completamente, costituito, ad esempio, da due bicchieri metallici, l'uno esterno, l'altro interno ad un conveniente bicchiere di vetro.

Caricato questo condensatore, separiamone le varie parti, avendo cura di non scaricarlo. Possiamo allora portare a contatto le due armature senza che si manifesti alcun fenomeno in modo notevole; ma se ricostituiamo il condensatore, si può ottenere una scarica pressochè uguale a quella che si ha quando lo si scarica senza smontarlo.

Quest'esperienza ci prova che nel fenomeno della carica di un condensatore il coibente non ha solo l'effetto puramente passivo di isolare le armature, ma assume una parte attiva principale; la carica risiede essenzialmente nel coibente, anzichè nelle armature. Qualunque sia la natura della carica, noi dovremo ricercarne la causa in una variazione delle condizioni del coibente, e non già in uno stato speciale delle armature.

I risultati sperimentali si spingono anche oltre; non solo il fenomeno della carica risiede nell'isolante, ma dalla natura di questo dipende la grandezza della carica; cioè sulla capacità del condensatore influiscono non solo la posizione e le dimensioni delle armature, ma ancora la natura dell'isolante frapposto. Ciò viene dimostrato per mezzo di esperienze stabilite su condensatori, nei quali si possa, senza alterare la superficie e la distanza delle armature, variare il coibente frapposto.

I rapporti delle capacità di uno stesso condensatore con coibenti diversi sono indipendenti dalla forma e dalle dimensioni del condensatore; essi sono grandezze specifiche delle sostanze isolanti.

Faraday, al quale è dovuta questa importante scoperta, chiamò *potere induttore specifico* di un dato coibente il rapporto

$$\varepsilon = \frac{C}{C_0} \tag{9}$$

fra la capacità C di un condensatore qualunque, formato da questo coibente, e la capacità C_0 dello stesso condensatore, nel quale, rimanendo ferme le altre condizioni si sostituisca al coibente considerato un uguale strato d'aria.

Teoricamente sarebbe preferibile riferire i poteri induttori specifici al vuoto assoluto (etere), ma ciò renderebbe molto più difficili le determinazioni sperimentali. D'altronde è così piccola la differenza nel comportamento dell'aria e del vuoto, che i poteri induttori specifici delle varie sostanze possono praticamente considerarsi come riferiti all'etere.

La determinazione sperimentale dei valori di ε presenta nella pratica gravi difficoltà per il fatto che la capacità di un condensatore non è mai una grandezza ben definita, ma può variare assai a seconda delle condizioni nelle quali si esperimenta. Così la capacità cresce col crescere del tempo impiegato per fare la carica; diminuisce invece col crescere del tempo per cui si abbandona a sè il condensatore carico prima di scaricarlo. Infine non tutta l'elettricità si scarica appena si stabilisce la comunicazione fra le due armature, ma si possono, dopo la scarica principale, ottenere successive scariche residue. Per queste ragioni riesce difficile, non solo fare tali determinazioni, ma anche definire bene la grandezza che si ha da misurare. Si spiegano così le differenze nei valori di ε determinati dai diversi sperimentatori. L'esperienza permette di determinare non il valore esatto del potere induttore specifico di ogni sostanza, ma piuttosto dei limiti in cui tal valore è compreso.

Ci limiteremo a riportare i valori di ε di alcune principali sostanze:

$\varepsilon = 1$ ...... per l'aria (per definizione);
$= 1$ ...... molto approssimativamente per il vuoto assoluto e per i gas; per alcuni gas è di qualche millesimo superiore all'unità, per altri inferiore;
$= 1{,}6$ ..... per la seta;
$= 1{,}9$ a $2{,}3$ per la paraffina;
$= 2{,}34$ .... per la gomma elastica pura;
$= 2{,}5$ a $3{,}5$ per la gomma elastica vulcanizzata;
$= 2{,}8$ a $4{,}2$ per lo zolfo;
$= 3$ a 5 per la guttaperca;
$= 5$ ...... per la mica;
$= 2$ a 5 per il vetro pesante e fusibile *(flint)*;
$= 5$ a 10 per il vetro leggero e poco fusibile *(crown)*.

Malgrado l'incertezza di queste determinazioni sperimentali, le differenze fra le varie sostanze sono così caratteristiche, da dimostrare in modo certo che in un condensatore il coibente ha una influenza grandissima; la carica ha sede nel coibente; le due armature non sono che un mezzo per poter agire su grandi superficie e su piccoli strati di isolante.

Ma se questo è vero nel caso dei condensatori, è naturale estendere le stesse considerazioni in generale a tutti i fenomeni elettrostatici. Un condensatore non è se non un caso particolare di un sistema elettrostatico; le differenze sono puramente geometriche. Si può per gradi piccoli, variando la distanza e modificando la forma e le dimensioni delle armature, passare ad un sistema di due conduttori qualunque, e in tale passaggio non si vengono a modificare per nulla le condizioni fisiche del fenomeno. Le deduzioni fatte per il caso semplice di due conduttori possono subito estendersi al caso generale di un campo qualunque. Siamo così condotti ad ammettere che nei fenomeni elettrici l'isolante interposto fra i conduttori ha la parte essenziale; dall'isolante dipendono e le cariche elettriche, e le differenze di potenziale, e l'energia del sistema. Solo nei coibenti si manifestano le forze elettriche; i conduttori sono invece definiti da una proprietà negativa, dalla inettitudine ad essere sede di forze elettriche; essi rappresentano come tante lacune nel campo elettrostatico.

I corpi isolanti, appunto per la loro proprietà di trasmettere le forze elettriche, furono dal FARADAY chiamati *corpi dielettrici.* Il potere induttore specifico ε, che è una grandezza specifica, la quale definisce le proprietà di ogni dielettrico, dicesi *costante dielettrica.*

L'esperienza ci prova dunque che nel dielettrico e non nei conduttori hanno sede le forze elettriche e l'energia del campo; qualunque siano le cause dei fenomeni elettrostatici, è certo che esse si dovranno ricercare in condizioni speciali non già dei conduttori, ma del mezzo dielettrico. Quando esiste il campo il dielettrico si trova in uno stato di equilibrio forzato; ogni suo elemento è soggetto a speciali deformazioni.

43. – Polarizzazione. Spostamento. — La trattazione che abbiamo svolta dei campi elettrici ci ha condotti a concludere [33], che, sotto il punto di vista puramente meccanico, un campo elettrico si può considerare sia come un sistema di forze newtoniane che si esercitano fra le masse elettriche a distanza, sia come un sistema di tensioni *pd S* che esistono e si trasmettono nel dielettrico lungo i tubi di forza. Ora le considerazioni fatte al numero precedente ci hanno dimostrato che l'esistenza del campo è dovuta, non ad uno stato speciale dei corpi conduttori, sui quali sono distribuite le masse elettriche, ma ad uno stato speciale del dielettrico, interposto fra i conduttori, nel quale si manifestano le forze elettriche. Appare quindi più naturale e più corrispondente ai fatti sperimentali trattare il campo elettrico come un sistema di tensioni nel dielettrico.

Senza fare alcuna ipotesi sulla natura delle deformazioni a cui sono dovute le tensioni nel dielettrico e quindi le forze elettriche, possiamo subito notare l'analogia che le deformazioni e le forze nel dielettrico presentano colle deformazioni e colle forze in un corpo elastico.

Un corpo elastico si deforma se noi vogliamo con esso trasmettere una forza, e la deformazione sviluppa forze interne; in modo perfettamente analogo un dielettrico, nel quale si produce un campo elettrico, si deforma; le forze elettriche sono l'effetto di queste deformazioni. Come in un corpo elastico deformato è accumulata della energia, che viene restituita quando cessa la causa deformatrice, così un campo elettrico ci rappresenta una energia che viene restituita quando scompare la deformazione, a cui il campo stesso è dovuto.

Ad esempio nella carica di un condensatore si deforma il dielettrico; in questo e non nelle armature si accumula l'energia; nella scarica scompare la deformazione del dielettrico, il quale restituisce l'energia che si era prima spesa per deformarlo. Ma l'analogia fra i due fenomeni fisici è anche più completa: come non si hanno corpi perfettamente elastici e si presentano fenomeni di elasticità susseguente, per cui il ritorno alla forma primitiva si fa per gradi, così il dielettrico non restituisce tutto d'un tratto l'energia accumulata, ma presenta scariche residue o susseguenti.

Chi abbandonando l'antico modo di considerare i fenomeni elettrici portò per il primo lo studio sul dielettrico fu il Faraday, il quale materializzava nel suo pensiero i tubi di forza. Quanto al meccanismo con cui le forze si propagano, il Faraday, non per fare ipotesi, ma per collegarsi agli antichi concetti, immaginava il dielettrico costituito da piccoli corpicini conduttori, annegati in un mezzo assolutamente coibente. Quando in questo spazio si porta un corpo elettrizzato, esso agisce per influenza sui corpicini vicini, e questi sui seguenti. In tal modo tutti i corpicini si elettrizzano e si orientano secondo tubi di forza (fig. 34); così per successive influenze l'elettricità si trasmette attraverso al dielettrico. Tale rappresentazione del FARADAY, se ha il merito di far intervenire il dielettrico, anche partendo dall'antico modo di ragionare, introduce però una ipotesi affatto arbitraria sulla sua costituzione.

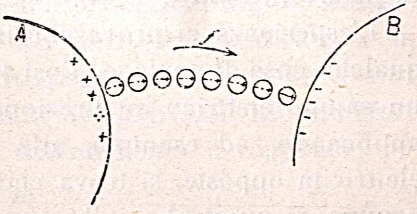

Fig. 34.

Lord KELVIN (WILLIAM THOMSON) partendo dagli stessi concetti del FARADAY, dà del fenomeno una rappresentazione la quale ha il merito di far intervenire il dielettrico senza introdurre alcuna ipotesi nè sulla costituzione di esso, nè sulla natura della elettricità.

Lord KELVIN immagina col pensiero il dielettrico diviso in elementi di volume limitati da superficie di tubi di forza, e da superficie di livello, e suppone che, quando esiste il campo, ogni elemento sia tale che, se fosse isolato, presenterebbe ai suoi estremi, sulla superficie di livello, quelle condizioni per cui lo si dice carico di elettricità positiva da una parte, negativa dall'altra.

Secondo tale modo di vedere considerando un tubo di forza infinitamente sottile (figura 35), e immaginandolo diviso in elementi con superficie di livello se il campo è diretto da sinistra a destra, ogni elemento presenta una massa negativa sulla faccia a sinistra, ed una massa positiva sulla faccia a destra. Lungo uno stesso tubo di forza tali masse sono uguali; quindi considerando una sezione qualunque $a\,b$ di un tubo di flusso, essa contiene una massa positiva come appartenente all'elemento p, e una massa negativa come appartenente all'elemento adiacente q; le due

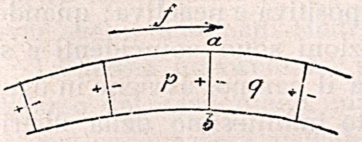

Fig. 35.

masse uguali ed opposte si elidono per quanto riguarda le azioni a distanza, e possono quindi esistere senza che ne constatiamo la presenza. A tale stato speciale del dielettrico si dà il nome di *polarizzazione*.

L'esperienza ci prova che in natura deve realmente accadere qualche cosa di analogo. Così se in un blocco di mica si produce un campo elettrico in direzione normale ai piani di sfaldatura, applicando, ad esempio, alle faccie estreme corpi carichi di elettricità opposte, si trova che dividendo il blocco in lamine, ognuna di queste ha sulle due faccie cariche contrarie.

Il Maxwell, seguendo un tale ordine di idee, potè sottoporre la polarizzazione ad una trattazione matematica rigorosa, per mezzo del concetto di *spostamento elettrico*, senza ricorrere ad ipotesi arbitrarie sulla natura fisica dell'elettricità.

Consideriamo uno degli elementi p (fig. 36), in cui immaginammo diviso il dielettrico. Quando il campo è polarizzato nella direzione f, si hanno sulle due faccie di p due masse uguali ed opposte, $-m$ su $a\,b$, $+m$ su $c\,d$. Ora se si prende la massa $+m$ e con uno spostamento infinitesimo la si porta da $c\,d$ in $a\,b$, essa si sovrappone ivi alla massa uguale negativa: le due masse si elidono; si distrugge così la polarizzazione. Inversamente si può immaginare che le due masse prima coincidano in $a\,b$, e che nell'atto della polarizzazione la massa $+m$ si porti in $c\,d$. Ciò si può ripetere per ogni elemento; per renderci quindi conto del fenomeno della polarizzazione possiamo immaginare nel campo due distribuzioni uguali di elettricità positiva e negativa; quando non esiste il campo, le due distribuzioni sono coincidenti e si elidono, ma nell'atto in cui si forma il campo, avviene in ogni elemento di volume uno spostamento infinitesimo della distribuzione positiva nella direzione del campo. La polarizzazione si può pure immaginare prodotta mantenendo fissa la distribuzione positiva e spostando la negativa in direzione opposta al campo, oppure ancora considerando entrambe le distribuzioni mobili per versi contrari. Ciò che influisce è lo spostamento relativo delle due distribuzioni e non il loro spostamento assoluto.

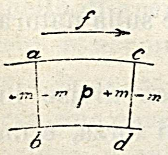

Fig. 36.

Per maggior semplicità converrà che consideriamo sempre lo spostamento della distribuzione positiva, il quale ha la direzione del campo, cioè verso l'esterno di conduttori carichi positivamente, e verso l'interno dei conduttori carichi negativamente.

Sia un elemento di superficie $d S$ normale alla direzione in cui avviene lo spostamento; mentre questo si produce, attraverso all'elemento passa una quantità $d m$ di elettricità; dicesi *valore dello spostamento* in un punto P dell'elemento il rapporto

$$b = \frac{d m}{d S}.$$

Lo spostamento è una grandezza vettoriale; il suo valore è dato dalla quantità di elettricità, che, nell'atto in cui si produce la polarizzazione, attraversa l'unità di superficie ad esso normale; la sua direzione è in ogni punto quella del campo, almeno se noi ci limitiamo a considerare corpi isotropi.

Dato lo spostamento in ogni punto, sono affatto determinate le condizioni del campo.

In un campo elettrico si può coll'esperienza constatare in modo diretto solo l'esistenza della forza. Nel concetto newtoniano si considera la divergenza della forza; dove la divergenza è diversa da zero, si dice che là vi ha una massa elettrica; è questa massa che s'immagina col pensiero materializzata. Nel concetto maxwelliano si considera direttamente il vettore in ogni punto, ed è il vettore stesso che s'immagina col pensiero materializzato. Si ha così una finzione che è meno artificiosa e più diretta, e che presenta sulla teoria newtoniana il vantaggio di portare le nostre considerazioni sul dielettrico dove l'esperienza dimostra aver sede i fenomeni elettrici.

La teoria maxwelliana parte da un concetto fondamentale diverso dal newtoniano, ma essa pure non si basa su alcuna ipotesi sulla natura dell'elettricità o sulla costituzione dei dielettrici e dei conduttori, anzi può accordarsi con qualsiasi ipotesi.

Se, ad esempio, si considerasse il campo come prodotto da una vera deformazione della materia, oppure se lo si ammettesse dovuto ad un orientamento delle molecole, sarebbe sempre possibile rappresentare questa deformazione, o questo orientamento, per mezzo dello spostamento di MAXWELL.

In punti alla superficie dei conduttori il valore dello spostamento è uguale al valore della densità elettrica superficiale; il flusso dello spostamento attraverso ad una data superficie è uguale alla massa elettrica su di essa distribuita; se il flusso è uscente la massa è positiva, negativa se il flusso è entrante.

Il flusso dello spostamento uscente da una superficie chiusa qualunque è uguale alla somma delle masse elettriche contenute entro alla superficie; questa somma è in generale diversa da zero, e quindi lo spostamento non ha distribuzione solenoidale. Il limite del rapporto tra il flusso uscente dalla superficie chiusa ed il volume da essa limitato, cioè la divergenza del vettore b, è uguale alla densità elettrica in questo volume.

Solo nel dielettrico lo spostamento è distribuito solenoidalmente; il suo flusso è costante lungo uno stesso tubo di forza; da ciò risulta evidente il teorema delle superfici corrispondenti.

Le considerazioni ora fatte valgono per i campi elettrici in equilibrio, ma conviene che consideriamo pure l'istante nel quale avviene la polarizzazione. Se entro ad una superficie chiusa qualunque si produce una massa elettrica positiva, per il principio della conservazione dell'elettricità, si deve necessariamente produrre anche una eguale massa negativa. Ciò significa che se attraverso ad una superficie chiusa qualunque si ha un flusso di spostamento uscente, attraverso alla stessa superficie si deve avere un eguale flusso entrante; il flusso totale è nullo.

Questa proprietà, che l'esperienza dimostra vera nel complesso dei fenomeni, salvo prova contraria, si deve ritenere sussistere in ogni elemento. Per ciò diremo che lo spostamento elettrico, nell'atto in cui si produce, ha distribuzione solenoidale; le linee di spostamento sono linee chiuse attraverso ai dielettrici ed ai conduttori.

Lo spostamento elettrico, mentre si genera presenta dunque, una distribuzione perfettamente analoga a quella, secondo cui si trasmette a tutta la massa di un liquido incompressibile ed a volume invariabile lo spostamento prodotto in un suo punto; entro ad una superficie chiusa qualunque non può entrare alcun volume del liquido, senza che ne esca simultaneamente un eguale volume.

Lo spostamento elettrico avviene in tutto lo spazio: nei dielettrici allo spostamento si oppongono reazioni elastiche, le quali crescono col crescere dello spostamento; nei conduttori non si producono tali reazioni. Possiamo rappresentarci materialmente il diverso comportamento dei dielettrici e dei conduttori ricorrendo ancora al paragone collo spostamento di un liquido incompressibile. Immaginiamo nel dielettrico materializzato le superfici di livello ed i tubi di flusso, mediante membrane, le quali pur essendo cedevoli, oppongano reazioni elastiche, il dielettrico risulta così diviso in tante cellule, che supponiamo ripiene del fluido. In tal modo uno spostamento può ancora trasmettersi nel fluido, ma le membrane vengono deformate e sviluppano reazioni elastiche che tendono ad opporsi allo spostamento. Nei conduttori invece, tali membrane, o non esistono, o cedono a sforzi piccolissimi, senza che si producano reazioni elastiche.

Vedremo che anche i conduttori oppongono resistenze allo spostamento elettrico; queste però sono solo resistenze passive che consumano energia, non resistenze elastiche, le quali accumulano l'energia per poi restituirla.

La considerazione dianzi fatta sullo spostamento di un fluido incompressibile, la quale devesi puramente interpretare come una possibile rappresentazione meccanica del fenomeno, e non come una spiegazione di esso, rende anche più manifesta l'analogia fra la polarizzazione elettrica e le deformazioni elastiche. La forza elettrica al pari della forza deformatrice, è proporzionale alla forza colla quale ciò che si sposta, o si deforma, vince le reazioni elastiche; essa è quindi proporzionale alla reazione elastica, ed ha la direzione opposta, la direzione cioè dello spostamento.

44. – Significato fisico dei fattori costanti k, ε. — In un punto infinitamente vicino alla superficie di un conduttore fra la forza f e la densità elettrica σ passa la relazione $f = 4\pi k \sigma$. Sulla superficie di un conduttore la densità e lo spostamento elettrico b hanno valori uguali, si ha quindi ancora

$$(10) \qquad f = 4\pi k b, \qquad b = \frac{f}{4\pi k}.$$

Ora entrambi i vettori b ed f sono distribuiti solenoidalmente nel dielettrico; il loro rapporto si mantiene costante lungo uno stesso tubo di forza. Le relazioni dianzi scritte valgono dunque in generale per ogni punto del dielettrico.

Nel campo elettrico spostamento e forza sono fra loro proporzionali, precisamente come in un corpo elastico vi ha relazione di proporzionalità fra la deformazione e la forza deformatrice.

Per produrre uno spostamento unità è necessaria una forza $f_0 = 4\pi k$.

Nello studio dei corpi elastici il fattore di proporzionalità, che dà la forza necessaria per produrre un allungamento unità in una verga avente l'unità di lunghezza e di sezione, dicesi coefficiente di elasticità. In modo analogo la costante $4\pi k$ si potrebbe chiamare *coefficiente di elasticità elettrica* del mezzo; il suo valore varia da mezzo a mezzo. Questa interpretazione fisica del fattore k della formula di Coulomb rende ben manifesto che esso non è un semplice coefficiente numerico, ma una vera grandezza fisica.

Tra il fattore k e la costante dielettrica ε passa una relazione notevole.

In un condensatore costituito da due armature piane parallele poste alla distanza D, consideriamo una porzione di area S lontana dagli orli; su ognuna delle armature è distribuita in modo uniforme una massa $M = S\sigma$; la forza, normale alle armature, ha in ogni punto il valore costante $f = 4\pi k\sigma$; fra le armature si ha una differenza di potenziale

$$V_1 - V_2 = \int_0^D f\,dn = fD = 4\pi k\sigma D.$$

L'espressione generale

$$C = \frac{M}{V_1 - V_2}$$

dà per la capacità della porzione considerata il valore

$$C = \frac{S}{4\pi k D}.$$

Da questa relazione risulta che la capacità di un condensatore è inversamente proporzionale al fattore k: d'altra parte per la definizione stessa della costante dielettrica ε, la capacità è proporzionale ad ε; ne risulta che ε ed $\frac{1}{k}$ sono fra loro proporzionali, cioè

$$\varepsilon k = \text{costante numerica.}$$

Quale sia il valore di questa costante noi non sappiamo. Difatti per nessun corpo ci è noto il valore assoluto della costante dielettrica; per poter esprimere con numeri i valori relativi di ε per i varii corpi noi abbiamo assunto come unità il valore della costante dielettrica di un determinato corpo, e precisamente dell'aria o meglio dell'etere. Così pure non ci è noto il valore assoluto del fattore k per nessuna sostanza, e possiamo assumere un valore arbitrario per una data sostanza: precisamente si pone $k=1$ per l'aria, o meglio per l'etere; è questa l'ipotesi fondamentale che si prende come base del sistema elettrostatico di unità di misura elettriche (*).

Con queste ipotesi si ha per l'etere, e quindi per tutti i corpi:

$$\varepsilon k = 1, \qquad \varepsilon = \frac{1}{k}.$$

Le relazioni (10) tra la forza e lo spostamento elettrico possono quindi ancora porsi sotto la forma:

$$(10') \qquad f = \frac{4\pi}{\varepsilon} b, \qquad b = \frac{\varepsilon}{4\pi} f.$$

La costante dielettrica ci si presenta dunque come una grandezza proporzionale allo spostamento che si produce con una data forza; essa dà la misura dell'attitudine del dielettrico a polarizzarsi; la si potrebbe perciò chiamare *coefficiente di cedevolezza elettrica.*

(*) Vedi l'APPENDICE sulle unità di misura.

45. – **Energia di un campo elettrico.** — Nella teoria newtoniana l'energia di un campo elettrico è data dalla espressione generale

$$W = \frac{1}{2} \Sigma m V.$$

Nel concetto maxwelliano l'energia del campo non ha sede sui conduttori, dove sono distribuite le masse elettriche, ma bensì nel dielettrico, dove si manifestano la forza e lo spostamento elettrico; l'energia si deve quindi esprimere in funzione dei valori di b e di f in ogni punto, per mezzo di un integrale di volume esteso a tutto lo spazio dielettrico. Se possiamo in questo modo trasformare l'espressione dell'energia, avremo una conferma che le due teorie, newtoniana e maxwelliana, dal punto di vista puramente matematico, si equivalgono.

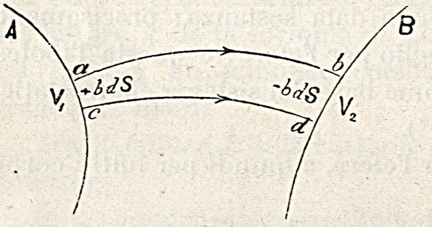

Fig. 37.

Nel calcolo di $\Sigma m V$ consideriamo separatamente i termini dovuti alle masse distribuite su superficie corrispondenti.

Sia ad esempio un tubo di forza infinitamente sottile, fra due conduttori A, B (fig. 37), nei quali il potenziale ha i valori V_1, V_2. Sulla superficie $a\,c$, da cui il tubo parte, è distribuita la massa $+ b\,d\,S$, sulla superficie $b\,d$, a cui il tubo arriva, è distribuita la massa $- b\,d\,S$; queste masse dànno nella sommatoria il termine

$$(V_1 - V_2)\, b\, d\, S.$$

Se con $d\,v = d\,s\,d\,S$ si rappresenta l'elemento di volume del tubo, e si osserva che per la definizione stessa di potenziale è

$$V_1 - V_2 = \int_{ab} f\, d\, s,$$

e di più che il flusso $b\,d\,S$ è costante lungo il tubo, si ha:

$$(V_1 - V_2)\, b\, d\, S = \int_{ab} b\, f\, d\, v.$$

Lo stesso calcolo si può ripetere per ogni coppia di elementi corrispondenti; perciò

$$\Sigma\, m\, V = \Sigma \int_{ab} b\, f\, d\, v.$$

Questa sommatoria rappresenta l'integrale esteso a tutti i tubi di forza, cioè a tutto il campo elettrico, o, se vogliamo, a tutto lo spazio, perchè dove è nullo il campo, cioè $f = 0$, è pure nullo il corrispondente termine nell'integrale: quindi l'energia del campo prende la forma:

$$W = \frac{1}{2} \int b\, f\, d\, v, \tag{11}$$

la quale ci dimostra che, anche per le deduzioni analitiche, è legittima la considerazione della energia come distribuita nel dielettrico. Quale però sia effettivamente la distribuzione della energia la nostra equazione non può dirci. Osserviamo solo che fra le infinite distribuzioni, le quali tutte soddisfano alla (11) la più semplice è quella risultante dalla ipotesi che $\frac{1}{2}\, b\, f\, d\, v$ rappresenti l'energia nell'elemento $d\, v$, nel quale la forza e lo spostamento hanno rispettivamente i valori b ed f. In tale ipotesi l'energia per unità di volume è

$$w = \frac{1}{2}\, b\, f. \tag{12}$$

Nella teoria dell'elasticità questa espressione dà il lavoro che si spende per produrre con una forza f un allungamento b, e che si accumula nel corpo deformato. Così anche per ciò che riguarda l'energia sussiste l'analogia più volte notata tra i fenomeni elettrici e le deformazioni elastiche.

Sostituendo nella (12) il valore di b dato dalla (10′), si ha l'energia per unità di volume in funzione della sola forza elettrica

$$w = \frac{\varepsilon}{8\,\pi}\, f^2. \tag{12′}$$

46. - Capacità di alcuni condensatori. — La formola generale $C = \frac{M}{V}$ ci permette di calcolare la capacità di alcuni condensatori di forma speciale, che occorre conoscere per le pratiche applicazioni. Noi calcoleremo la capacità C_0 di alcuni condensatori ad aria, ritenendo che nell'aria si abbia $k = 1$, il che equivale ad adottare il sistema di unità elettrostatiche [44]. Se il condensatore ha la stessa forma e le stesse dimensioni, ma è costituito da un dielettrico di potere induttore specifico ε, la sua capacità è [42]

$$C = \varepsilon C_0.$$

1° *Condensatore sferico.* — Siano O (fig. 38) il centro, R_1, R_2 i raggi delle due superficie sferiche concentriche, che costituiscono le armature del condensatore. Posta l'armatura esterna a terra, si dia alla interna una carica M, una carica uguale ed opposta $-M$ si produce sulla superficie interna dell'armatura esterna. Per effetto di queste cariche, le quali si trovano rispettivamente alle distanze R_1, R_2 dal centro O, il potenziale assume nel centro, e quindi in ogni punto dell'armatura interna, il valore

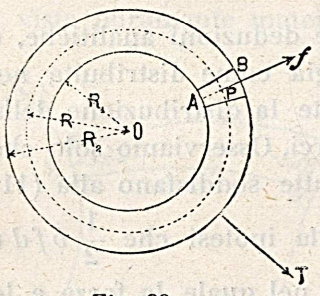

Fig. 38.

$$V = M\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

La capacità di tale condensatore è quindi

$$C_0 = \frac{M}{M\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)};$$

ossia:

$$C_0 = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \tag{13}$$

Alla stessa espressione possiamo giungere se calcoliamo la differenza di potenziale V fra le due armature, non partendo dal concetto newtoniano, ma considerando il campo elettrico nell'aria frapposta.

In tale campo, per semplice ragione di simmetria, le superfici di livello sono superfici sferiche concentriche, le linee di forza sono rette concorrenti nel centro, i tubi di forza sono porzioni dei coni di vertice O comprese nel dielettrico. Attraverso ad uno stesso tubo il flusso è costante; la forza è per ciò inversamente proporzionale all'area delle sezioni che il cono determina sopra le superfici di livello, ossia è inversamente proporzionale ai quadrati dei raggi di queste superfici sferiche.

Consideriamo una linea qualunque di forza $A\,B$, e su di essa un punto P della sfera di raggio R. Detta σ la densità elettrica sull'armatura interna, la forza ha nel punto A il valore $f_1 = 4\,\pi\,\sigma$, e nel punto P il valore

$$f = f_1 \frac{R_1^2}{R^2} = 4\,\pi\,\sigma \frac{R_1^2}{R^2}.$$

Osservando che la forza f ha la stessa direzione del raggio, la (3) ci dà

$$d\,V = -f\,d\,R = -4\,\pi\,\sigma\,R_1^2 \frac{d\,R}{R^2};$$

ed integrando lungo la linea $B\,A$

$$V = -4\,\pi\,\sigma\,R_1^2 \int_{R_2}^{R_1} \frac{d\,R}{R^2} = 4\,\pi\,\sigma\,R_1^2 \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right].$$

La quantità di elettricità distribuita sulla superficie dell'armatura interna è:

$$M = 4\,\pi\,\sigma\,R_1^2.$$

La capacità del conduttore è dunque

$$C_0 = \frac{M}{V} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1\,R_2}{R_2 - R_1};$$

come si è trovato dianzi.

Se la distanza $D = R_2 - R_1$ è molto piccola, trascurabile a fronte del raggio R di una qualunque delle armature, si può ritenere

$$C_0 = \frac{R^2}{D};$$

e se indichiamo con $S = 4\pi R^2$ la superficie dell'armatura, si può ancora porre

$$C_0 = \frac{S}{4\pi D}.$$

Consideriamo anche l'altro caso limite, nel quale la grossezza del dielettrico è infinitamente grande; supponendo che R_1 sia finito, e che R_2 tenda all'infinito, al limite si ha

$$C_0 = \frac{1}{\frac{1}{R_1}} = R_1.$$

È questo il caso di una sfera isolata nello spazio, lontana da ogni altro conduttore; la sua capacità nel sistema elettrostatico è espressa dallo stesso numero che esprime il raggio.

2° *Condensatore cilindrico.* — Le due armature sono cilindriche, coassiali, a base circolare. Nella fig. 39 rappresentiamo la sezione retta delle due superfici cilindriche: R_1, R_2 sono i raggi, O è la traccia dell'asse. Consideriamo una porzione del condensatore di lunghezza l abbastanza lontana dagli orli, perchè si possano ritenere le cariche elettriche uniformemente distribuite sulle due armature.

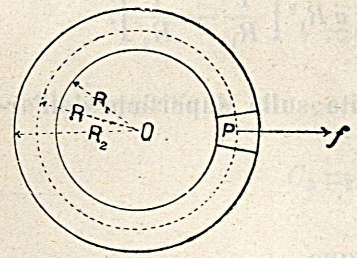

Fig. 39.

Nel dielettrico, per ragione di simmetria, le superfici di livello sono superfici cilindriche coassiali, le linee di forza sono raggi delle sezioni rette del cilindro; le porzioni del campo comprese fra due piani passanti per l'asse e due piani normali all'asse sono tubi di forza. Lungo uno stesso tubo la forza è inversamente proporzionale all'area delle sezioni che il tubo determina sulle superfici di livello, e quindi inversamente proporzionale ai raggi di queste superfici cilindriche. La forza ha in un punto della superficie dell'armatura interna il valore $f_1 = 4\pi\sigma$, ed in un punto P della superficie cilindrica di raggio R il valore

$$f = f_1 \frac{R_1}{R} = 4\pi\sigma \frac{R_1}{R}.$$

Anche in questo caso la (3) ci dà modo di calcolare la differenza di potenziale fra le due armature.

$$V_2 - V_1 = -4\pi\sigma R_1 \int_{R_2}^{R_1} \frac{dR}{R} = 4\pi\sigma R_1 \log \frac{R_2}{R_1}.$$

La carica sull'armatura interna è

$$M = 2\pi R_1 l \sigma;$$

e per ciò

$$C_0 = \frac{l}{2\log \frac{R_2}{R_1}}. \tag{14}$$

Praticamente l'espressione ora trovata ha grande importanza, perchè essa si applica al calcolo della capacità dei cavi sotterranei e sottomarini, i quali si possono considerare come condensatori cilindrici; se il cavo è semplice, le due armature sono costituite dal conduttore interno e dall'involucro protettore metallico esterno; se il cavo è concentrico, i due conduttori costituiscono le armature.

Consideriamo anche qui il caso-limite nel quale la distanza fra le armature è molto piccola. Detta D questa distanza, si ha

$$R_2 = R_1 + D, \qquad \log \frac{R_2}{R_1} = \log\left(1 + \frac{D}{R_1}\right);$$

se il rapporto $\frac{D}{R_1}$ è così piccolo che, nello sviluppo in serie del logaritmo (naturale), si possano trascurare le potenze di $\frac{D}{R_1}$ superiori alla prima, si può porre $\log \frac{R_2}{R_1} = \frac{D}{R_1}$, per cui

$$C_0 = \frac{l}{2\,\frac{D}{R_1}} = \frac{l\,R_1}{2\,D},$$

o ancora, come nel caso precedente

$$C_0 = \frac{S}{4\,\pi\,D},$$

se indichiamo con $S = 2\,\pi\,R_1\,l$ la superficie della porzione considerata di armatura.

3° *Condensatore costituito da due armature, l'una piana, l'altra cilindrica, fra di loro parallele.* — Rappresentiamo (fig. 40) con $y\,y$ la traccia del piano, col cerchio di centro C e di raggio $C\,M = r$ la traccia del cilindro; sia d la distanza dell'asse del cilindro dal piano $y\,y$. Per ogni unità di lunghezza, misurata parallelamente all'asse del cilindro, sulle due armature sono distribuite due cariche uguali ed opposte $+\lambda$, $-\lambda$; la carica sulla lunghezza l di una delle armature è $M = \lambda\,l$.

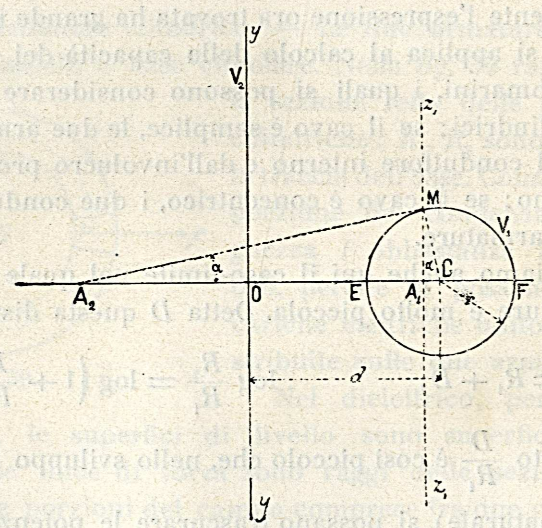

Fig. 40.

Consideriamo il campo prodotto da due distribuzioni uguali ed opposte, di densità $+\lambda$, $-\lambda$ su due rette, parallele all'asse del cilindro, di traccia A_1, A_2, tali che il piano yy e la superficie cilindrica siano superfici di livello; tali cioè [39] che il punto O di mezzo fra A_1 e A_2 si trovi sul piano yy, e che nel punto M, determinato sulla circonferenza dalla retta $z_1 z_1$ normale in A_1 alla $A_1 A_2$, le due rette $A_2 M$, CM si incontrino ad angolo retto. Nello spazio fra il piano e la superficie cilindrica tale campo è uguale a quello prodotto dalle due distribuzioni sulle armature del condensatore; sono perciò uguali nei due campi i valori del potenziale V_2 sul piano, V_1 sul cilindro, e possiamo quindi calcolarli [39] per mezzo della relazione:

$$V = \text{cost.} + 2\lambda \log \frac{r_2}{r_1},$$

dove r_2, r_1, sono le distanze di un punto qualunque della superficie dai due punti A_2, A_1.

Per il piano si ha $r_2 = r_1$, onde

$$V_2 = \text{cost.}$$

Per la superficie cilindrica si ha

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{A_2 E}{A_1 E} = \frac{A_2 F}{A_1 F} = \frac{A_2 E + A_2 F}{A_1 E + A_1 F} = \frac{A_2 C}{r}.$$

Ora $A_2 C = 2d - A_1 C = 2d - r \operatorname{sen} \alpha$, se si indica con α l'angolo $A_1 \widehat{M} C = C \widehat{A}_2 M$.

Si ha dunque $\frac{r_2}{r_1} = \frac{2d}{r} - \operatorname{sen}\alpha$, e quindi

$$V_1 = \text{cost.} + 2\lambda \log \left(\frac{2d}{r} \operatorname{sen} \alpha \right).$$

Abbiamo così il valore della differenza di potenziale fra le due armature del condensatore.

$$V_1 - V_2 = 2\lambda \log \left(\frac{2d}{r} \operatorname{sen} \alpha \right),$$

e perciò la capacità

$$C_0 = \frac{M}{V_1 - V_2} = \frac{l}{2 \log \left(\frac{2d}{r} - \operatorname{sen} \alpha \right)}.$$

Se il raggio r è piccolo a fronte della distanza d, si potrà semplicemente ritenere

$$C_0 = \frac{l}{2 \log \frac{2d}{r}}. \tag{15}$$

Una conduttura aerea in presenza della terra costituisce un vero condensatore, nel quale le armature sono il conduttore e la terra. A questo caso si può applicare la trattazione ora svolta, e perchè il diametro r del filo è sempre piccolo a fronte della sua distanza d dalla terra, si potrà sempre calcolare la capacità per mezzo della (15).

4° *Condensatore costituito da due armature cilindriche ad assi paralleli.* — I due cerchi di centri C_1, C_2 (fig. 41) rappresentano le sezioni dei due cilindri, che supponiamo avere lo stesso

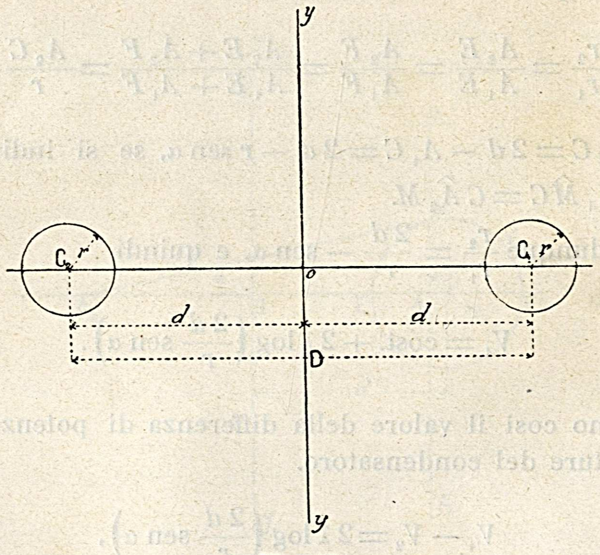

Fig 41.

raggio r; sia $D = 2d$ la distanza fra i due assi. Il piano $y\,y$ parallelo agli assi e da essi equidistante, è una superficie di livello; se noi la immaginiamo metallizzata, non verremo con ciò ad alterare per nulla il campo; possiamo quindi al sistema dei due conduttori cilindrici, sostituire il complesso dei due sistemi costituiti l'uno da un conduttore e dal piano $y\,y$, l'altro dallo stesso piano e dal secondo conduttore; la capacità di ognuno di questi sistemi è per quanto abbiamo visto dianzi:

$$c_0 = \frac{l}{2 \log \left(\frac{2d}{r} - \operatorname{sen} \alpha \right)},$$

o approssimativamente:

$$c_0 = \frac{l}{2 \log \frac{2d}{r}} = \frac{l}{2 \log \frac{D}{r}}.$$

Il condensatore considerato equivale a questi due condensatori collegati in cascata: la sua capacità è la metà di quella di uno di essi, ossia

$$C_0 = \frac{l}{4 \log \frac{D}{r}}. \tag{16}$$

I due fili paralleli di andata e di ritorno di una conduttura elettrica realizzano in pratica il caso considerato. Il raggio r dei due conduttori è sempre abbastanza piccolo a fronte della loro distanza D; perciò si potrà applicare la (16) al calcolo della capacità della linea.

5° *Condensatore piano.* — La capacità di una porzione di area S di un condensatore piano, nel quale le armature sono alla distanza D, è, come si è visto [44]:

$$C_0 = \frac{S}{4 \pi D}. \tag{17}$$

Per il condensatore piano è rigorosa l'espressione della capacità, che per il condensatore sferico e per il cilindrico a dielettrico molto sottile è soltanto approssimata. Del che ci rendiamo facilmente conto osservando che, in sostanza, il supporre il dielettrico infinitamente sottile equivale a considerare i condensatori come costituiti da tanti piccoli condensatori piani.

In un condensatore piano si può fare mobile una porzione di una delle armature e misurare la forza, diretta sempre verso l'interno del condensatore, che su di essa esercita il campo elettrico. La forza sulla unità di superficie non è altro che la pressione elettrostatica p.

Ora osserviamo che

$$p = 2\pi\sigma^2, \qquad \sigma = \frac{f}{4\pi}, \qquad f = \frac{V_1 - V_2}{D},$$

si ha

$$p = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{D}\right)^2.$$

Su di una porzione di area S la forza è dunque:

$$F = p\,S = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{V_1 - V_2}{D}\right)^2.$$

Da questa relazione si può ricavare il valore della differenza di potenziale $V_1 - V_2$, in funzione della forza F, della superficie S, e della distanza D:

$$(18) \qquad V_1 - V_2 = D\sqrt{\frac{8\pi F}{S}}.$$

È opportuno avvertire che $V_1 - V_2$ risulta espresso in unità elettrostatiche. Il fatto che D, S, F si determinano con semplici misure geometriche e meccaniche, prova la possibilità di eseguire misure *assolute* (*) di differenze di potenziale.

Su questo principio è fondato l'*elettrometro assoluto* di Lord Kelvin.

(*) Vedi Appendice sulle unità di misura.