CAPITOLO V.

CORRENTI VARIABILI

§ 1°.

LEGGI E CONSIDERAZIONI FONDAMENTALI.

111. – Legge di Ohm. — Se un circuito è percorso da corrente variabile, la f. e. m. in un istante qualunque non è più soltanto la e esistente indipendentemente dalla variazione della corrente, ma ad essa si sovrappone la f. e. m. di selfinduzione $-\frac{d\varphi}{dt}$; cosicchè la f. e. m. complessiva che nell'istante considerato agisce sul circuito è $e - \frac{d\varphi}{dt}$.

Sebbene la legge di Ohm sia stata dimostrata solo per correnti costanti, tuttavia dal complesso delle esperienze siamo autorizzati ad estenderla al caso di correnti variabili e possiamo così enunciarla in modo generale:

In un circuito percorso da corrente variabile il valore dell'intensità ad un dato istante è dato dal rapporto fra la somma di tutte le f. e. m. che in quest'istante agiscono sul circuito e la resistenza del circuito stesso.

In un circuito completo fra la f. e. m. e l'intensità della corrente passa dunque la relazione generale

$$e - \frac{d\varphi}{dt} = r\,i; \tag{1}$$

se invece si considera una porzione di circuito, fra gli estremi della quale esiste una differenza di potenziale v, la relazione si scrive

$$(1') \qquad v + e - \frac{d\varphi}{dt} = r\, i.$$

112. – Extracorrenti di chiusura e di apertura. — La relazione (1) si può ancora porre sotto la forma:

$$i_1 - i_2 = i,$$

nella quale $i_1 = \frac{e}{r}$ è il valore che la corrente avrebbe, quando nel circuito agisse solo la f. e. m. e; $i_2 = \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dt}$ è una corrente che si sovrappone ad i_1 per il fatto che nel circuito varia la corrente, e quindi si produce una f. e. m. di selfinduzione.

Queste considerazioni riescono particolarmente importanti quando la f. e. m., e quindi anche l'intensità della corrente nel circuito, passano da un valore costante ad un altro valore pure costante.

Così se si ha un circuito nel quale agisce una pila di data f. e. m. e, durante la chiusura del circuito la f. e. m. varia dal valore zero al valore e, l'intensità della corrente varia dal valore $i = 0$ al valore $i = i_1 = \frac{e}{r}$; durante l'apertura del circuito la f. e. m. varia dal valore e a zero, e la corrente dal valore i_1 a zero.

Se si considera il periodo di tempo brevissimo nel quale la corrente varia, alla corrente normale i_1 si sovrappone una corrente indotta i_2; nella chiusura del circuito, poichè il flusso viene crescendo da zero al valore normale, la corrente indotta i_2 è opposta alla corrente normale i_1; nell'apertura invece il flusso diminuisce e quindi i_2 ha la stessa direzione di i_1. A queste correnti indotte i_2, si dà il nome di *extracorrenti di chiusura e di apertura del circuito*. È noto che esse furono scoperte sperimentalmente dal FARADAY.

113. – Lavori fatti da correnti variabili. Energia intrinseca di una corrente. — Possiamo scrivere la legge di Ohm sotto la forma

$$e = r\,i + \frac{d\varphi}{d\,t}.$$

Moltiplicando i due membri dell'equazione per $i\,d\,t$ si ottiene

$$e\,i\,d\,t = r\,i^2\,d\,t + i\,d\,\varphi.$$

Il primo membro di questa equazione rappresenta il lavoro che la f. e. m. e fa nel tempo $d\,t$, cioè il lavoro che si spende per mantenere la corrente; il secondo membro rappresenta ciò che è prodotto da questo lavoro: il termine $r\,i^2\,d\,t$ è il lavoro che si trasforma in calore, per effetto Joule; il termine $i\,d\,\varphi$ rappresenta il lavoro che si impiega per far variare il flusso φ.

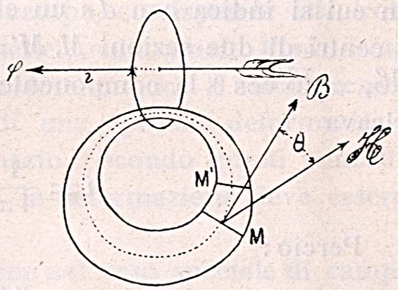

Fig. 118.

Fermiamoci a considerare questo lavoro $i\,d\,\varphi$, e vediamo anzitutto come possiamo esprimerlo altrimenti. Consideriamo il circuito della corrente i (fig. 118), ed immaginiamo il campo magnetico da esso generato, diviso in tanti tubi infinitesimi di induzione. Se indichiamo con ψ il valore del flusso attraverso ad uno qualunque di questi tubi, il flusso totale entro al circuito è dato da

$$\varphi = \Sigma\,\psi.$$

Considerando le variazioni di flusso nel tempo $d\,t$, si ha

$$d\,\varphi = \Sigma\,d\,\psi,$$

per cui

$$i\,d\,\varphi = i\,\Sigma\,d\,\psi = \Sigma\,i\,d\,\psi.$$

Basterà quindi che noi calcoliamo il termine $i\,d\,\psi$ per uno qualunque dei tubi infinitesimi di flusso considerati, e poi estendiamo la sommatoria a tutti questi tubi.

Se si considera uno dei tubi, il flusso ψ è costante lungo di esso; ed indicando con a l'area di una sezione qualunque M, con $\mathcal{B}$ il valore dell'induzione magnetica in tale sezione si ha $\psi = a\mathcal{B}$, per cui

$$d\psi = a\, d\mathcal{B}.$$

Ora l'integrale della forza magnetica lungo la linea di induzione asse del tubo considerato è espresso (9) [100] da:

$$\int \mathcal{H}_s\, ds = 4\pi i,$$

in cui si indica con ds un elemento della linea, compreso fra i centri di due sezioni M, M' del tubo infinitamente vicine, con $\mathcal{H}_s = \mathcal{H} \cos\theta$ la componente tangenziale della forza. Di qui si ricava

$$i = \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{H}_s\, ds.$$

Perciò:

$$i\, d\psi = \frac{a\, d\mathcal{B}}{4\pi} \int \mathcal{H}_s\, ds,$$

o ancora

$$i\, d\psi = \frac{1}{4\pi} \int a\, d\mathcal{B}\, \mathcal{H}_s\, ds$$

perchè $a\, d\mathcal{B}$ è costante lungo tutto il tubo. Ma $a\, ds = dv$ è l'elemento di volume compreso fra le due sezioni M, M' del tubo; si potrà quindi porre

$$i\, d\psi = \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{H}_s\, d\mathcal{B}\, dv.$$

Per ottenere il lavoro $i\, d\psi$ si dovrà per ogni tubo calcolare questo integrale esteso a tutto il tubo, e poi eseguire la somma degli integrali relativi ai vari tubi. Ricordando che questa somma è rappresentata da $i\, d\varphi$ possiamo scrivere

$$i\, d\varphi = \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{H}_s\, d\mathcal{B}\, dv, \tag{2}$$

intendendo che l'integrale sia esteso a tutto il volume occupato dal campo magnetico.

Il valore del secondo membro di questa espressione è quello stesso che si avrebbe se per ogni elemento di volume del campo si dovesse spendere un lavoro $\frac{1}{4\pi}\mathcal{H}_s\, d\,\mathcal{B}\, d\,v$, ossia per ogni unità di volume un lavoro

$$\frac{1}{4\pi}\mathcal{H}_s\, d\,\mathcal{B} = \frac{1}{4\pi}\mathcal{H}\cos\theta\, d\,\mathcal{B}\,.$$

L'espressione così trovata del lavoro per mezzo di un integrale di volume esteso a tutto il campo, corrisponde alla trattazione moderna di campi magnetici, nella quale l'induzione e lo spostamento magnetico si considerano come il risultato non già di un'azione a distanza, ma di una speciale deformazione del mezzo che riempie tutto lo spazio. Secondo questi concetti il lavoro necessario per produrre la deformazione deve essere distribuito in tutto lo spazio.

Intanto è importante notare come nel caso speciale di campi magnetici generati da correnti elettriche, partendo dai soli principii sperimentali dell'elettromagnetismo, siamo giunti ad una espressione del lavoro necessario per produrre una variazione nel campo magnetico, coincidente con quella trovata in generale per un campo magnetico qualunque, partendo dalla considerazione dello spostamento magnetico. Si ottiene qui una conferma che il concetto di spostamento, che si era definito solo per mezzo delle relazioni tra forza ed induzione magnetica, si può ancora legittimamente applicare ai lavori; è quindi rigoroso il procedimento seguito nel calcolo del lavoro in un campo magnetico [88], e possiamo ritenere esatti i risultati cui siamo giunti e le conseguenze che ne abbiamo dedotte.

Ritorniamo alla primitiva espressione $i\,d\,\varphi$ del lavoro necessario per produrre una variazione $d\,\varphi$ del flusso nel campo della corrente i.

Consideriamo un circuito qualunque e supponiamo di far variare in esso la corrente dal valore i_1 al valore i_2; corrispondentemente il flusso varia dal valore φ_1 al valore φ_2. Immaginiamo tracciata la linea $A\,M\,B$ (fig. 119), la quale ha per ascisse i valori di i, per ordinate i corrispondenti valori di φ. Questa linea (che si potrà costruire quando per tutti i materiali nei quali corrono le linee di flusso generate dalla corrente sia nota la relazione fra $\mathcal{H}$ e $\mathcal{B}$, perchè i è proporzionale ad $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}$ al flusso φ) dà una rappresentazione geometrica del lavoro. Infatti se consideriamo due punti M, N della curva, infinitamente vicini, le cui ordinate $O\,m$, $O\,n$ differiscano di $d\,\varphi$, l'area $M\,m\,n\,N$ è uguale ad $i\,d\,\varphi$, è cioè uguale al lavoro che si deve spendere per produrre la variazione $d\,\varphi$ del flusso. Per una variazione finita del flusso dal valore $\varphi_1 = O\,a$, al valore $\varphi_2 = O\,b$, il lavoro speso è uguale alla somma dei lavori elementari, è cioè uguale all'area $a\,A\,M\,B\,b$, compresa fra le ascisse estreme, la curva e l'asse delle ordinate.

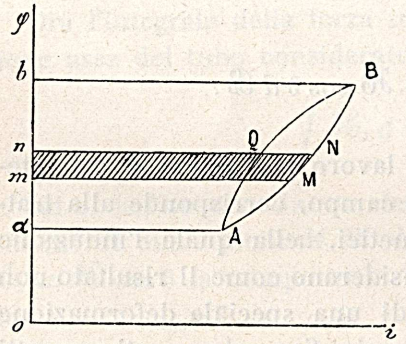

Fig. 119.

Supponiamo ora che il flusso ritorni dal valore φ_2 al valore φ_1 iniziale. Possono darsi due casi.

Se nel campo si ha un materiale presentante istèresi, il flusso φ conserva un valore che è maggiore di quello che aveva prima per lo stesso valore di i; si avrà quindi nel ritorno una linea $B\,Q\,A$ tutta superiore alla precedente. L'area $b\,B\,Q\,A\,a$ rappresenta un lavoro negativo, che viene restituito in questa trasformazione. Non tutto il lavoro speso per far passare il flusso da φ_1 a φ_2 viene restituito quando il flusso ritorna da φ_2 a φ_1; si ha un lavoro rappresentato dall'area $A\,M\,B\,Q\,A$, che viene assorbito in causa dell'istèresi e trasformato in calore.

Se invece nel campo non si hanno materiali presentanti istèresi, il flusso riprende nel ritorno gli stessi valori in corrispondenza dei medesimi valori di i; cioè si ha nel ritorno la stessa linea $B\,M\,A$. Perciò tutto il lavoro che si era speso per far passare il flusso dal valore φ_1 al valore φ_2 viene restituito quando il flusso ritorna da φ_2 al valore iniziale φ_1; nel tempo in cui il flusso ha conservato il valore φ_2 questo lavoro è rimasto immagazzinato nello spazio. In questo caso nel campo magnetico generato da una corrente elettrica si ha da considerare una *energia potenziale*, che si viene accumulando nel campo, quando la corrente e quindi il flusso crescono e che si trasforma in lavoro quando la corrente e il flusso diminuiscono.

Se si fa ad es. variare l'intensità della corrente dal valore zero al valore i, il flusso concatenato passa dal valore zero al valore φ, che, se nel campo non si hanno materiali presentanti istèresi, è una data funzione di i; per produrre una tale variazione si deve spendere un lavoro $\int_0^\varphi i\, d\varphi$, che si accumula nel campo e vi rimane allo stato potenziale, finchè l'intensità della corrente conserva il valore i cui è giunta; viene invece restituito quando la corrente ritorna di nuovo a zero. A questa energia potenziale accumulata nel campo si dà il nome di *energia intrinseca della corrente.* Essa ha naturalmente un significato ben definito solo quando nel campo non esiste istèresi, perchè se questa esiste non tutta l'energia accumulata viene restituita.

L'energia intrinseca di una corrente prende un'espressione semplice quando non solo nel campo non si ha istèresi, ma ancora la permeabilità magnetica ha un valore μ costante, indipendente dai valori della forza e della induzione magnetica. In questo caso è costante il coefficiente di selfinduzione del circuito; si può perciò scrivere

$$\varphi = L\, i, \qquad d\varphi = L\, d\, i$$

per cui

$$\int_0^\varphi i\, d\varphi = \frac{1}{2} L\, i^2. \tag{3}$$

Se in un circuito consideriamo il periodo in cui la corrente va crescendo, per esempio quello nel quale essa si stabilisce, non tutto il lavoro fatto della f. e. m. che agisce sul circuito si trasforma in calore per effetto Joule, ma una parte viene spesa a produrre il campo magnetico; si ha perciò nel circuito una corrente minore di quella normale di regime, o, se vogliamo, si aggiunge alla corrente normale una corrente opposta di chiusura. Finchè la corrente rimane costante, è costante il campo magnetico, e la corrispondente energia rimane accumulata allo stato potenziale. Quando la corrente diminuisce, come avviene ad esempio nel periodo di rottura, il lavoro che si ricava è maggiore di quello dovuto alla f. e. m. perchè il campo magnetico si annulla e restituisce l'energia prima accumulata. Alla corrente di regime si viene ad aggiungere un'extracorrente di apertura avente la stessa direzione; l'effetto prodotto da questa corrente corrisponde alla energia intrinseca che si sviluppa.

114. – Analogie meccaniche. Natura della corrente elettrica. — È notevole l'analogia tra i fenomeni che abbiamo ora considerati, dovuti all'induttanza del circuito, ed i fenomeni che si presentano nelle correnti di liquido, come effetto dell'inerzia. Così se entro ad un canale si vuole porre in movimento una massa di liquido, nel periodo in cui la velocità va crescendo, si deve spendere non solo il lavoro che si trasforma in calore a causa degli attriti, ma anche quello che si trasforma in forza viva, e che ci rappresenta un'energia disponibile, la quale viene restituita quando diminuisce la velocità; anche quando cessa la causa che ha prodotto il movimento, continua il moto del liquido finchè gli attriti non abbiano consumato tutta la energia corrispondente alla forza viva.

L'analogia però fra la corrente elettrica e la corrente di un liquido si limita al fatto ricordato. Si hanno invece fra le due categorie di fenomeni differenze essenziali. Nel caso della corrente idraulica l'energia sta nella massa del liquido in movimento entro al tubo, ed è affatto indipendente dai corpi che circondano il tubo. Nel caso della corrente elettrica invece la energia non sta già nel conduttore in cui si considera la corrente, ma in tutto lo spazio circostante, e cioè nel campo magnetico prodotto dalla corrente; il valore dell'energia è tanto maggiore quanto maggiore è la permeabilità magnetica del mezzo. Una corrente elettrica ha natura affatto diversa da quella di una corrente di fluido; la corrente elettrica è un fenomeno che risiede non solo nel conduttore, ma anche nello spazio circostante; si può anzi dire che la parte essenziale di ciò che costituisce la corrente sta nel campo magnetico circostante, perchè è nel campo che esiste l'energia; mentre invece nel conduttore non si ha che una dissipazione di energia.

Il conduttore ha però una funzione importante, quella di dare una direzione al fenomeno; dal conduttore dipende la distribuzione del campo magnetico. Sarebbe un errore il considerare la corrente come un fenomeno che esista solo nel conduttore, come un qualche cosa che nel conduttore si propaghi mentre invece il carattere essenziale della corrente sta nell'esistenza di un campo magnetico nel quale le linee di forza sono tutte chiuse su sè stesse attorno ad una linea, che è determinata dal conduttore.

---

§ 2°.

CORRENTI ALTERNATIVE.

115. – Grandezze alternative. Rappresentazione grafica. Definizioni. — In molte delle applicazioni pratiche, che nello stato attuale della elettrotecnica hanno grandissima importanza, si usano correnti variabili in modo continuo e periodico. Sono correnti nelle quali la direzione si inverte ad intervalli di tempo brevissimi ed uguali, e l'intensità varia periodicamente da un massimo in una direzione ad un massimo nella direzione opposta, per ritornare di nuovo al valore precedente, e così via. Queste correnti si dicono *alternative*, o *alternanti*, o *alternate*.

Per la natura stessa degli apparecchi da cui le correnti alternative sono prodotte, sono uguali gli intervalli di tempo brevissimi fra due successive inversioni della corrente; sono uguali i due valori massimi positivo e negativo che la corrente assume; di più la quantità d'elettricità che si trasmette in una direzione è uguale a quella che si trasmette nella direzione opposta, per modo che dopo un intervallo di tempo che comprenda un numero pari di inversioni, la quantità totale di elettricità trasmessa è nulla.

Su di un asse delle ascisse $O\,t$ (fig. 120), a partire da un'origine arbitraria si portino lunghezze proporzionali ai tempi, si portino poi come ordinate i corrispondenti valori dell'intensità.

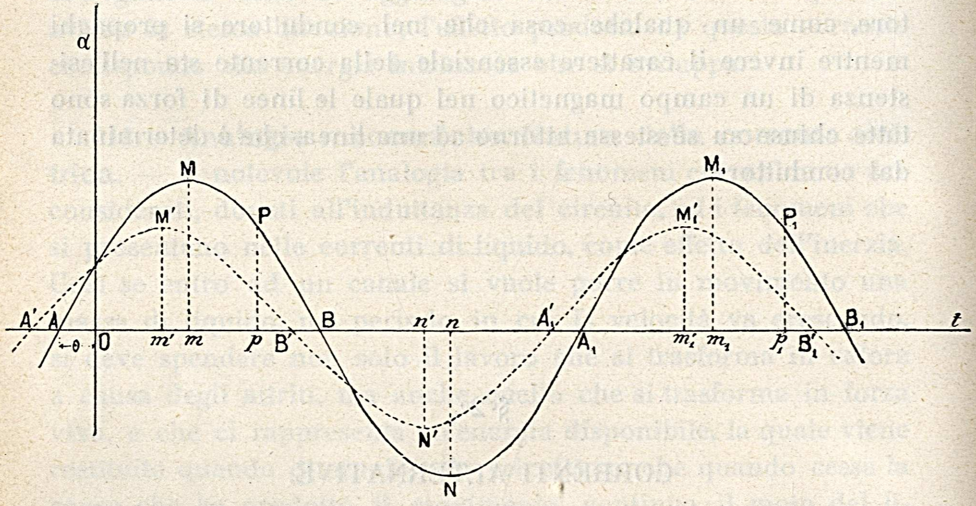

Fig. 120.

Si ottiene così una linea continua sinuosa, che consta di tante porzioni come la $A\,M\,B\,N\,A_1$ che si riproducono; gl'intervalli $A\,B$, $B\,A_1$ ... fra due successivi punti di incontro coll'asse, cioè fra due successive inversioni della corrente, sono fra loro uguali; i valori massimi $m\,M$, $n\,N$... sono pure fra loro uguali; ed infine sono ancora uguali le aree $A\,M\,B$, $B\,N\,A_1$ comprese fra l'asse ed ognuna delle porzioni della curva, perchè esse rappresentano l'integrale $\int i\,d\,t$, cioè la quantità di elettricità che attraversa il circuito nell'intervallo di tempo compreso fra due successive inversioni.

In un circuito nel quale sia alternativa l'intensità di corrente, anche le f. e. m. e le differenze di potenziale sono grandezze alternative, le quali soddisfano alle stesse proprietà dianzi ricordate, e sono perciò rappresentabili per mezzo di curve analoghe.

Considerando, in generale, una grandezza alternativa qualunque a, vediamo di stabilire alcune definizioni importanti.

L'intervallo di tempo durante il quale la grandezza prende tutti gl'infiniti valori positivi e negativi per cui può passare, e dopo il quale li riprende nello stesso ordine, dicesi *durata del periodo* o semplicemente *periodo*.

Nella figura il periodo è rappresentato dai seguenti $A A_1$, $m m_1$, $p p_1$ ... Se con moto di traslazione parallelamente all'asse si sposta la curva di un segmento ad essi uguale, la nuova curva risulta completamente sovrapposta alla precedente. In un periodo si hanno due inversioni.

Siccome nelle correnti usate industrialmente la durata del periodo è sempre una piccola frazione di secondo $\left(\text{da } \frac{1}{30} \text{ a } \frac{1}{100}\right)$, così torna più comodo considerare, anzichè la durata del periodo il numero di periodi completi che la grandezza alternativa presenta in un minuto secondo; per tale numero nel Congresso internazionale di Parigi (1889) fu adottato il nome di *frequenza*.

Se si indica con T il periodo, con n la frequenza, si ha:

$$n\,T = 1, \qquad n = \frac{1}{T}.$$

Il numero delle inversioni nell'unità di tempo è doppio della frequenza, ossia è $2\,n$.

Consideriamo ora più grandezze alternative coesistenti, e vediamo come si possano riferire l'una all'altra. Supponiamo che le diverse grandezze abbiano lo stesso periodo e siano rappresentabili per mezzo di curve simili, cioè per mezzo di curve che si possono dedurre l'una dall'altra semplicemente moltiplicando le ordinate per uno stesso fattore numerico. Tutte queste grandezze con opportuni cambiamenti di scala si potrebbero rappresentare per mezzo di una curva unica.

Se le varie grandezze che consideriamo non passano contemporaneamente per il valore massimo e per il minimo, saranno rappresentate per mezzo di curve che sono ancora simili, ma spostate l'una rispetto all'altra parallelamente all'asse. In questi casi è necessario definire la posizione delle curve sull'asse; a ciò serve il concetto di fase.

Dicesi *fase* la frazione di periodo già trascorsa nell'istante scelto come origine dei tempi. La fase è dunque un rapporto di due tempi, che per una data grandezza alternativa è arbitrario, essendo arbitraria sia l'origine del periodo, sia l'origine dei tempi.

Nella grandezza rappresentata in figura in $AMBNA_1$, se si contano i tempi a partire da O, ed i periodi a partire da A, la fase è data dal rapporto $\frac{AO}{AA_1}$.

Quando si considerano contemporaneamente più grandezze alternative, se si conviene di assumere per tutte la stessa origine dei tempi è perfettamente definita la *differenza di fase* fra due qualunque di esse.

Così la differenza di fase fra le due grandezze rappresentate in figura, l'una con linea piena, l'altra con linea punteggiata, è

$$\frac{A'O - AO}{AA_1} = \frac{A'A}{AA_1},$$

ed è perfettamente definita perchè $A'A$ non dipende dalla scelta delle origini.

La differenza di fase tra due grandezze rappresenta la frazione di periodo di cui l'una precede l'altra nella serie dei valori.

Fase e differenza di fase risultano ben definite solo quando si considerano grandezze simili.

Per definire completamente una grandezza alternativa non basta conoscerne il periodo e la fase, ma è necessario avere tutta la serie di valori che essa prende, cioè la forma della linea da cui la grandezza è rappresentata. Fra gl'infiniti valori di una grandezza alternativa, meritano di essere notati l'ampiezza, il valore medio ed il valore efficace.

Ampiezza è il valore massimo che la grandezza prende, e che, come abbiamo notato, ha lo stesso valore assoluto sia nella parte positiva sia nella parte negativa della curva.

Valore medio per un dato intervallo di tempo è la media dei valori che la grandezza assume in tale intervallo; esso è espresso da

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a\, d\, t,$$

se con a indichiamo il valore istantaneo della grandezza alternativa, e con t_1, t_2 i valori del tempo alle due estremità dell'intervallo considerato.

In particolare si considera il valore medio a_m per l'intervallo di tempo fra due successive inversioni, cioè la media di tutti i valori positivi, che la grandezza può assumere:

$$a_m = \frac{2}{T} \int_{-\theta}^{\frac{1}{2}T - \theta} a\, d\, t,$$

ove θ indica l'intervallo di tempo $A\,O$ fra l'origine del periodo e l'origine dei tempi.

Se si considera invece il valore medio per un periodo completo, o per un numero intero di periodi, esso è nullo, perchè l'area positiva e quella negativa sono uguali.

Se infine si considera il valore medio per un tempo qualunque, siccome l'integrale relativo al massimo numero di periodi compresi nel tempo considerato è nullo, così il valore medio si riduce al rapporto fra l'integrale relativo alla frazione di periodo che rimane, e tutto il tempo considerato. L'integrale al numeratore può essere tutto al più uguale all'area di una delle porzioni $A\,M\,B$ della curva, mentre invece il denominatore cresce col crescere dell'intervallo di tempo. Perciò si può ritenere praticamente nullo il valore medio di una grandezza alternativa quando sia preso per un intervallo di tempo sufficientemente grande.

Valore efficace di una grandezza alternativa, con denominazione adottata dal Congresso di Parigi (1889), dicesi la *radice quadrata della media dei quadrati dei valori che la grandezza* *alternativa prende in un intero periodo.* Indicando con $\mathcal{A}$ il valore efficace di a si ha

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T a^2\, d\, t.$$

Il valore efficace è una grandezza che ha le stesse dimensioni della grandezza alternativa; esso ha un'importanza superiore a tutti gli altri valori considerati, perchè sono i valori efficaci quelli che ci vengono indicati dagli strumenti di misura per correnti alternative.

116. – Grandezze alternative sinusoidali. Rappresentazione polare. Operazioni di somma e di derivazione. — Merita speciale considerazione il caso nel quale la grandezza alternativa è rappresentata da una sinusoide; la grandezza dicesi allora *alternativa sinusoidale* o *armonica semplice.*

Raramente e solo per approssimazione si presentano nella pratica correnti sinusoidali, tuttavia questo caso ha importanza perchè si presta ad una trattazione matematica semplice, dalla quale possono risultare le proprietà generali delle correnti alternative.

Il valore di una grandezza alternativa sinusoidale a nello istante t, contato a partire da un certo tempo, è dato dalla espressione:

$$a = A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t + \theta),$$

ove con T si indica il periodo, con θ il tempo già passato fra l'origine del periodo e l'origine dei tempi, cioè con $\frac{\theta}{T}$ la fase, e infine con A l'ampiezza (perchè A è appunto il valore massimo di a).

Si può ancora esprimere il valore a in funzione della frequenza:

$$a = A \operatorname{sen} 2\pi n (t + \theta)$$

o ancora, se si pone $\alpha = 2\pi n \theta$,

$$a = A \operatorname{sen}(2\pi n t + \alpha).$$

La grandezza sinusoidale a è dunque completamente definita quando ne sia data l'ampiezza, la frequenza o il periodo, ed infine la fase. A definire la fase può servire tanto il suo valore $\frac{\theta}{T}$, quanto il valore $\alpha = 2\pi \frac{\theta}{T}$, che dicesi perciò *valore angolare della fase.*

In una grandezza sinusoidale il valore medio per un semiperiodo è

$$(4) \qquad a_m = \frac{2}{T} \int_{-\theta}^{\frac{1}{2}T-\theta} A \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T}(t+\theta)\, dt = \frac{2}{\pi} A$$

ed il valore efficace (*):

$$\mathcal{A}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{T}(t+\theta)\, dt = \frac{A^2}{2},$$

cioè:

$$(5) \qquad \mathcal{A} = \frac{A}{\sqrt{2}}.$$

Noto uno qualunque dei tre valori, massimo, medio ed efficace, si possono facilmente ricavare gli altri.

Nel caso di grandezze alternative sinusoidali è conveniente ricorrere ad un'altra rappresentazione grafica, che dicesi *rappresentazione polare.*

Siano due assi ortogonali Ox, Oy (fig. 121); a partire da O, nella direzione che fa coll'asse Ox un angolo α uguale al valore angolare della fase della grandezza sinusoidale che si vuole presentare, si porti un segmento OA_0, la cui grandezza rappresenti in una determinata scala l'ampiezza A, e si supponga

(*) Indicheremo sempre colle stesse lettere in carattere minuscolo, stampatello maiuscolo, e corsivo maiuscolo rispettivamente i lavori istantaneo, massimo ed efficace delle stesse grandezze alternative.

che esso, mantenendo invariata la sua lunghezza, ruoti attorno ad O nel verso u, con moto uniforme e con frequenza n, cioè in modo da fare un giro nel tempo T, ossia n giri al minuto secondo. Alla fine del tempo t, contato a partire dalla posizione iniziale $O A_0$, il vettore avrà preso la posizione $O A$, la quale fa con $O A_0$ un angolo

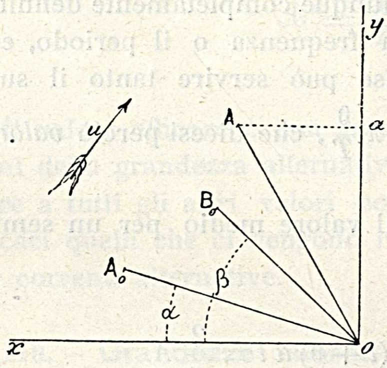

Fig. 121.

$$A_0 O A = 2 \pi n t;$$

e quindi coll'asse $O x$ un angolo

$$x O A = 2 \pi n t + \alpha .$$

Se si considera la proiezione $O a$ di $O A$ sull'asse $O y$ si ha

$$O a = O A \text{ sen } x O A = A \text{ sen } (2 \pi n t + \alpha) = a.$$

Una grandezza alternativa sinusoidale a è dunque rappresentata in un istante qualunque dalla proiezione, fatta su di una direzione fissa $O y$, di un vettore $O A$ di lunghezza costante ed uguale all'ampiezza, che ruoti in un dato verso con velocità angolare costante, e con frequenza n, e che nella sua posizione iniziale faccia colla direzione $O x$, normale ad $O y$, un angolo uguale al valore angolare della fase.

In modo analogo un'altra grandezza sinusoidale avente la stessa frequenza

$$b = B \text{ sen } (2 \pi n t + \beta)$$

si potrà rappresentare con un segmento $O B_0$, la cui lunghezza nella scala scelta rappresenti l'ampiezza B, e che formi coll'asse $O x$ un angolo $B_0 O x$ uguale al valore angolare β della fase. L'angolo $B_0 O A_0$ dei due vettori è uguale a $\beta - \alpha$, e dicesi *valore angolare della differenza di fase* fra le due grandezze sinusoidali. Poichè i due vettori ruotano colla stessa frequenza tale angolo si mantiene costante.

In questa rappresentazione la scelta degli assi corrisponde a stabilire la fase della grandezza alternativa, e poichè questa è arbitraria, è ancora arbitraria la scelta degli assi, cioè la grandezza è completamente rappresentata dal solo vettore OA. Così pure di due grandezze alternative è ben determinata la differenza di fase, ma è sempre arbitrario il valore della fase per una qualunque di esse; perciò si ha una rappresentazione completa di queste grandezze nei vettori OA_0, OB_0 che comprendono un angolo uguale al valore angolare della differenza di fase, senza che sia necessario stabilire la posizione degli assi.

Diremo *somma di due o più grandezze alternative sinusoidali* una grandezza i cui valori istantanei sono la somma dei valori istantanei delle grandezze considerate.

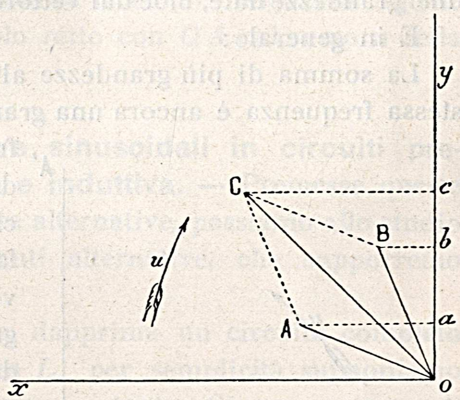

Fig. 122.

Vediamo come possiamo trovarne la rappresentazione polare. In un istante qualunque i valori a, b di due grandezze alternative sinusoidali rappresentate dai vettori OA, OB (fig. 122) sono dati dalle proiezioni Oa, Ob dei vettori su un asse Oy; nello stesso istante la somma delle due grandezze ha il valore

$$c = a + b = Oa + Ob.$$

Consideriamo la diagonale OC del parallelogramma $OACB$ costruito sui due vettori OA, OB; la sua proiezione Oc su Oy è

$$Oc = Oa + ac = Oa + Ob = c,$$

e ci dà quindi il valore istantaneo della somma delle due grandezze.

Ora poichè OA, OB girano con velocità uniforme il parallelogramma su di essi costruito ruota pur esso attorno ad O, mantenendo immutata la sua forma; quindi ancora il segmento OC la cui proiezione su Oy dà il valore istantaneo della somma, ha una lunghezza costante e ruota colla stessa frequenza dei due vettori OA, OB.

Dunque:

La somma di due grandezze alternative sinusoidali aventi la stessa frequenza è ancora una grandezza alternativa sinusoidale colla stessa frequenza, ed è rappresentata dalla diagonale del parallelogramma costruito sui due vettori che rappresentano le due grandezze date, cioè dal vettore somma di questi due vettori.

E in generale:

La somma di più grandezze alternative sinusoidali aventi la stessa frequenza è ancora una grandezza sinusoidale della stessa frequenza, ed è rappresentata dal vettore che forma il lato di chiusura della poligonale, i cui lati sono uguali e paralleli ai vettori che rappresentano le grandezze alternative date, cioè dal vettore somma di questi vettori. Se la poligonale è chiusa la somma è nulla.

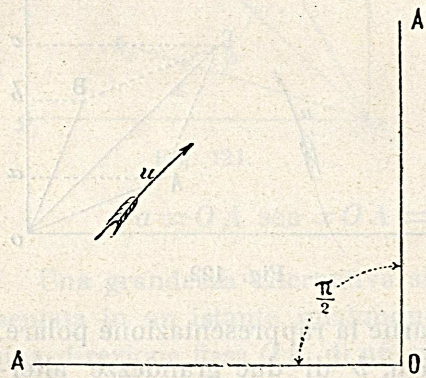

Fig. 123.

La derivata rispetto al tempo della grandezza alternativa sinusoidale

$$a = A \text{ sen } (2 \pi n t + \alpha)$$

è

$$a' = \frac{d a}{d t} = 2 \pi n A \cos (2 \pi n t + \alpha)$$

ossia

$$a' = 2 \pi n A \text{ sen } \left(2 \pi n t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right),$$

che si può ancora porre sotto la forma:

$$a' = A' \text{ sen } (2 \pi n t + \alpha')$$

ove si ponga

$$A' = 2 \pi n A, \qquad \alpha' = \alpha + \frac{\pi}{2}.$$

La derivata di una grandezza alternativa sinusoidale è una grandezza pur essa sinusoidale, di egual frequenza, con ampiezza uguale all'ampiezza della grandezza data moltiplicata per $2\pi n$, e in precedenza di fase di un angolo retto sulla grandezza data.

Se OA (fig. 123) rappresenta la grandezza data a, la derivata a' è rappresentata dal vettore OA', di lunghezza uguale a $2\pi n\, OA$, condotto ad angolo retto con OA nel verso u della rotazione.

117. – Correnti alternative sinusoidali in circuiti presentanti resistenza ohmica e induttiva. — Premesse queste nozioni generali sulle grandezze alternative, passiamo allo studio dei circuiti percorsi da correnti alternative, che supporremo sinusoidali.

1° *Circuito chiuso.* — Sia dapprima un circuito completo di resistenza r, e di induttanza L; per semplicità supponiamo che questa si possa trattare come costante. Ci proponiamo di trovare il valore e della f. e. m. che deve agire sul circuito per produrvi una corrente alternativa sinusoidale di data intensità

$$i = I \operatorname{sen}(2\pi n t + \alpha).$$

In un dato istante la legge di OHM applicata al circuito dà la relazione

$$e - \frac{d\varphi}{dt} = r\,i,$$

ossia, essendo L costante:

$$e - L\frac{di}{dt} = r\,i,$$

$$e = r\,i + L\frac{di}{dt}.$$

La f. e. m. e è dunque la somma delle due grandezze alternative $r\,i$, $L\dfrac{di}{dt}$.

Osservando che r ed L sono fattori costanti e ricordando la rappresentazione polare di una grandezza sinusoidale e della sua derivata, avremo subito la rappresentazione di $r\,i$ in un vettore condotto in una direzione arbitraria con lunghezza $OA = rI$ (fig. 124), e la rappresentazione di $L\,\frac{di}{dt}$ nel vettore OB condotto ad angolo retto con OA nel verso u della rotazione, con lunghezza $OB = 2\pi n L I$.

Il vettore OC risultante di OA e di OB rappresenta la f. e. m. e; cioè la lunghezza OC ci dà l'ampiezza E, e l'angolo $\varphi = C\widehat{O}A$, che esso forma col vettore OA, ci dà la precedenza di fase che la f. e. m. presenta rispetto all'intensità della corrente. La f. e. m. è dunque espressa da

$$e = E \text{ sen } (2\pi n t + \alpha + \varphi).$$

Dal triangolo rettangolo OAC si ricava

$$E^2 = r^2 I^2 + (2\pi n L)^2 I^2,$$

e perciò, se si pone

$$(6) \qquad \lambda = 2\pi n L, \qquad \varrho = \sqrt{r^2 + \lambda^2},$$

si ha:

$$(7) \qquad E = \varrho I.$$

Dalla (5) risulta che l'equazione (7) vale anche se alle ampiezze E, I si sostituiscono i valori efficaci $\mathcal{E}$, $\mathcal{I}$.

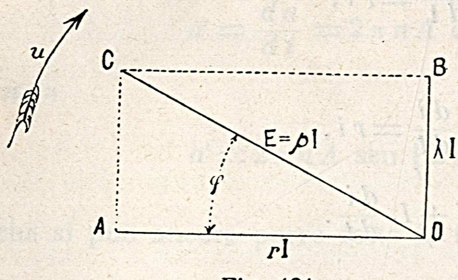

Fig. 124.

Nell'ipotesi fatta che L sia costante, anche ϱ è una costante. Perciò si può dire che fra le ampiezze, e quindi anche fra i valori efficaci della f. e. m. e dell'intensità della corrente in un circuito percorso da una corrente sinusoidale passa una relazione di proporzionalità, cioè una relazione analoga a quella che costituisce la legge di Ohm nel caso delle correnti continue.

Al fattore ϱ, che corrisponde alla resistenza, si dà il nome di *resistenza apparente del circuito* o *impedenza;* esso dipende sia dalla *resistenza effettiva* r, che dicesi pure *reale, ohmica* o *metallica,* sia dalla grandezza λ che dipende dalla induttanza, ed a cui si dà perciò il nome di *resistenza induttiva* o *reattanza.*

Data la resistenza reale r, e la induttiva λ si può facilmente ottenere la impedenza per mezzo delle relazioni dianzi scritte.

Quando siasi eseguita la costruzione grafica del vettore E, si può osservare che con un semplice cambiamento di scala i due cateti OA, AC possono rappresentare r e λ; e allora la resistenza apparente ϱ è rappresentata dall'ipotenusa OC.

Per un dato valore della resistenza ohmica il valore della resistenza apparente è tanto maggiore quanto maggiore è il valore dell'induttanza del circuito; solo quando sia $L=0$ si ha $\varrho=r$, ma in generale è $\varrho>r$, e la loro differenza può anche essere grande, quando sia grande il valore dell'induttanza.

Dalla costruzione grafica si ricava pure subito il valore angolare della differenza di fase fra e ed i. Il triangolo rettangolo OAC in cui l'angolo AOC è uguale a φ, dà:

$$(8) \qquad \operatorname{tang} \varphi = \frac{\lambda}{r}, \qquad \operatorname{sen} \varphi = \frac{\lambda}{\varrho}, \qquad \cos \varphi = \frac{r}{\varrho}.$$

Per un dato valore finito della resistenza r lo spostamento φ di fase è nullo se è nulla l'induttanza del circuito; se L non è nullo, φ ha valori crescenti col crescere di L, e tende a $\frac{\pi}{2}$ quando L tende all'infinito; dicesi allora che le due grandezze sono *in quadratura;* l'una passa pei valori massimi quando l'altra si annulla.

Per un dato valore finito dell'induttanza L l'angolo φ varia col variare della resistenza ohmica del circuito. Al limite per $r=0$ si ha $\varphi=\frac{\pi}{2}$; col crescere di r, φ diminuisce e tende a zero quando r è grandissimo.

Si hanno dunque due valori limiti per l'angolo φ; il valore zero quando sia λ e quindi L piccolo a fronte di r, ed il valore $\frac{\pi}{2}$ quando λ e L sono grandissimi a fronte di r. Nei casi pratici il valore di φ è compreso fra questi valori estremi.

2° *Porzione di circuito.* — Sia un tratto di circuito di resistenza r, nel quale non esista altra f. e. m. salvo quella dovuta all'induttanza L, che supponiamo costante. Ci proponiamo di trovare la caduta di potenziale che in esso si produce quando è percorso da una data corrente alternativa. La legge di OHM ad un dato istante ci fornisce la relazione

$$v = r\,i + L\,\frac{d\,i}{d\,t}.$$

Con costruzione analoga a quella fatta nel caso precedente si trova il vettore che rappresenta v; si possono qui ripetere le considerazioni generali che si sono fatte allora.

Sussiste anche qui fra le ampiezze e fra i valori efficaci della differenza di potenziale e dell'intensità della corrente una legge analoga a quella di OHM:

$$V = \varrho\,I. \tag{7}$$

La costante ϱ è la resistenza apparente della porzione considerata di circuito, ed è legata alla resistenza ohmica r, ed alla resistenza induttiva $\lambda = 2\,\pi\,n\,L$ dalla stessa relazione

$$\varrho = \sqrt{r^2 + \lambda^2}.$$

Infine la differenza di potenziale presenta sull'intensità della corrente una precedenza di fase, il cui valore angolare è dato in funzione dei valori di L e di r, dalle stesse relazioni (8).

3° *Circuiti derivati.* — Le relazioni che abbiamo ricavate permettono di trattare nel caso di correnti alternative il problema dei *circuiti derivati*. In generale per le applicazioni pratiche non è necessario risolvere il problema in tutta la sua generalità; noi quindi considereremo solo il caso semplice, nel quale ognuno dei circuiti abbia una resistenza ed una induttanza propria, ma non presenti sensibile coefficiente d'induzione mutua cogli altri circuiti.

Fra due punti A, B (fig. 125) del circuito principale siano derivati due circuiti 1, 2, presentanti rispettivamente le resistenze ohmiche r_1, r_2, le resistenze induttive λ_1, λ_2, prodotte dalle induttanze L_1, L_2, e quindi le resistenze apparenti ϱ_1, ϱ_2. Indichiamo rispettivamente con i_1, i_2, i le intensità delle correnti derivate e della corrente principale; con v_a, v_b, $v = v_a - v_b$ i valori istantanei del potenziale in A e B, e della differenza di potenziale fra A e B.

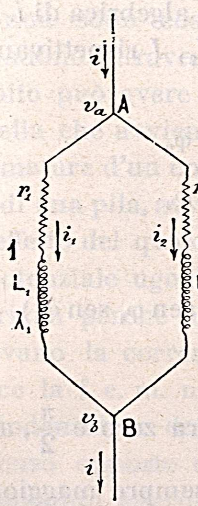

Fig. 125.

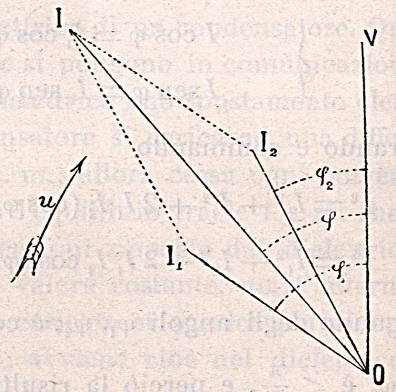

Fig. 126.

La relazione (7') applicata ai due circuiti derivati dà

$$V = \varrho_1 I_1 = \varrho_2 I_2$$

da cui:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1}$$

cioè:

I valori massimi e quindi anche i valori efficaci dell'intensità delle correnti derivate stanno fra di loro nella ragione inversa delle resistenze apparenti dei rispettivi circuiti derivati.

Nell'ipotesi da noi fatta, che nei circuiti esistano solo resistenze ohmiche ed induttive, il principio della conservazione dell'elettricità, o se vogliamo il primo principio di KIRCHHOFF, applicato in A, ci dà

$$i = i_1 + i_2.$$

Dato il vettore $O\,V$ (fig. 126) che rappresenta la differenza di potenziale v, si possono ricavare colle costruzioni descritte i vettori OI_1, OI_2, che rappresentano le correnti derivate i_1, i_2; la loro somma OI è la rappresentazione polare della corrente principale i.

Possiamo facilmente trovare l'espressione algebrica di i. Dette φ_1, φ_2, φ le differenze di fase fra V, ed I_1, I_2, I rispettivamente si ha

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} I \cos\varphi &= I_1 \cos\varphi_1 + I_2 \cos\varphi_2 \\ I \operatorname{sen}\varphi &= I_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + I_2 \operatorname{sen}\varphi_2 \end{aligned} \right.$$

quadrando e sommando

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2 I_1 I_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \operatorname{sen}\varphi_1 \operatorname{sen}\varphi_2)$$

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2 I_1 I_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Ognuno degli angoli φ_1, φ_2, è compreso fra zero e $\frac{\pi}{2}$, anche $\varphi_1 - \varphi_2$ è $< \frac{\pi}{2}$, e perciò la risultante I è sempre maggiore di ciascuna delle sue componenti I_1, I_2.

Si possono pure facilmente calcolare le differenze di fase; così dividendo le equazioni (α) membro a membro si ricava la relazione:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{I_1 \operatorname{sen}\varphi_1 + I_2 \operatorname{sen}\varphi_2}{I_1 \cos\varphi_1 + I_2 \cos\varphi_2},$$

la quale dà la differenza di fase φ fra la differenza di potenziale V e la corrente principale I.

La differenza di fase fra le due correnti secondarie è data dall'equazione

$$\operatorname{tang}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tang}\varphi_1 - \operatorname{tang}\varphi_2}{1 + \operatorname{tang}\varphi_1 \operatorname{tang}\varphi_2}.$$

Basterà in queste espressioni sostituire i valori di I_1, I_2, φ_1, φ_2 dati dalle (7′), (8) per avere le diverse grandezze espresse in funzione di V e delle resistenze ohmiche, apparenti ed induttive che definiscono i circuiti. Avendo I espresso in funzione di V si potrà trovare il rapporto $\frac{V}{I} = \varrho$, cioè la resistenza apparente complessiva dei due circuiti.

118. – Effetto della capacità nei circuiti percorsi da corrente alternativa. — Si possono ancora produrre correnti variabili in circuiti non completamente chiusi, in circuiti cioè che non sono costituiti soltanto da corpi conduttori, ma si richiudono attraverso al dielettrico. Difatti fra i due capi del circuito può avere luogo una corrente di spostamento analoga a quella che avviene nel dielettrico di un condensatore. Quando le armature d'un condensatore si pongono in comunicazione coi poli di una pila, avviene nel dielettrico uno spostamento elettrico, per effetto del quale il condensatore si carica ad una differenza di potenziale uguale alla f. e. m.; allora cessa ogni corrente di elettricità perchè si stabilisce l'equilibrio tra le f. e. m. che producevano la corrente e le reazioni opposte dal dielettrico. Se invece la f. e. m. non ha un valore costante, ma è alternativa, il condensatore dopo essersi caricato si scarica per ricaricarsi in senso opposto e così via; avviene cioè nel dielettrico uno spostamento alternativo.

In generale le estremità di un circuito interrotto, comunque esse siano formate, costituiscono le due armature di un condensatore, la cui capacità dipende dalle dimensioni degli estremi del circuito e della grossezza e natura del dielettrico interposto.

Studiamo l'effetto di una capacità inserita in un circuito percorso da corrente alternativa.

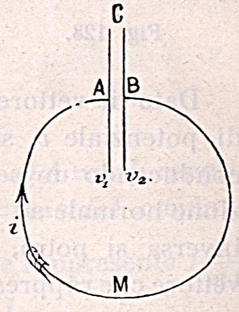

Fig. 127.

Consideriamo perciò un circuito qualunque nel quale sia inserita una capacità C. Indichiamo con i il valore istantaneo della corrente sinusoidale che lo percorre, di cui assumeremo come positiva la direzione segnata dalla freccia i (fig. 127), indichiamo poi con v_1 v_2 i valori istantanei corrispondenti dei potenziali sulle due armature, e infine con $v = v_1 - v_2$ la differenza del potenziale fra le due armature nell'istante considerato.

Poichè i è la corrente nel conduttore BMA, nel tempo infinitesimo $d\,t$ passa in ogni sezione del conduttore e viene sull'armatura A una quantità di elettricità $i\,d\,t$; cioè la carica del condensatore cresce di $i\,d\,t$ nel tempo $d\,t$. Ma se nello stesso tempo $d\,t$ la differenza di potenziale fra le armature cresce di $d\,v$, l'aumento di carica del condensatore si può esprimere per mezzo del prodotto $C\,d\,v$. Uguagliando queste due espressioni della stessa carica si ha

$$i\,d\,t = C\,d\,v,$$

da cui:

$$i = C\,\frac{d\,v}{d\,t}. \tag{9}$$

L'intensità della corrente alternativa che percorre un circuito comprendente un condensatore è data dal prodotto della capacità del condensatore per la derivata rispetto al tempo della differenza di potenziale fra le sue armature.

Se la differenza di potenziale fra le armature è una grandezza sinusoidale

$$v = V \operatorname{sen}(2\,\pi\,n\,t + \alpha),$$

anche i è una grandezza sinusoidale, avente l'ampiezza

$$I = 2\,\pi\,n\,C\,V,$$

e presentante una precedenza di fase $\frac{\pi}{2}$ sulla differenza di potenziale.

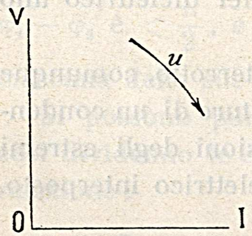

Fig. 128.

Dato il vettore $O\,V$ (fig. 128), che rappresenta la differenza di potenziale v, si ottiene subito il vettore che rappresenta i, conducendo un segmento $O\,I$ di lunghezza $2\,\pi\,n\,C.\,O\,V$ in direzione normale ad $O\,V$ nel verso del movimento. Con costruzione inversa si potrà, dato il vettore che rappresenta i, trovare il vettore che rappresenta la differenza di potenziale fra le armature.

119. – Correnti alternative sinusoidali in circuiti presentanti resistenza, induttanza e capacità. — In un circuito percorso da corrente alternativa, date le grandezze che definiscono il circuito, cioè i valori della resistenza r, dell'induttanza L e della capacità C, ci proponiamo di trovare la f. e. m. che deve agire sul circuito per produrvi una corrente di data intensità.

Indichiamo con i, e, v_1, v_2 i valori istantanei dell'intensità della corrente della f. e. m., e dei potenziali sulle due armature A, B del condensatore (fig. 129); e consideriamo come direzione positiva della corrente quella indicata dalla freccia i.

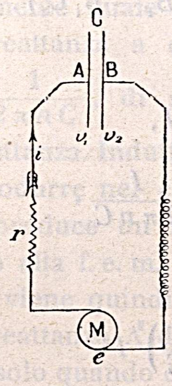

Fig. 129.

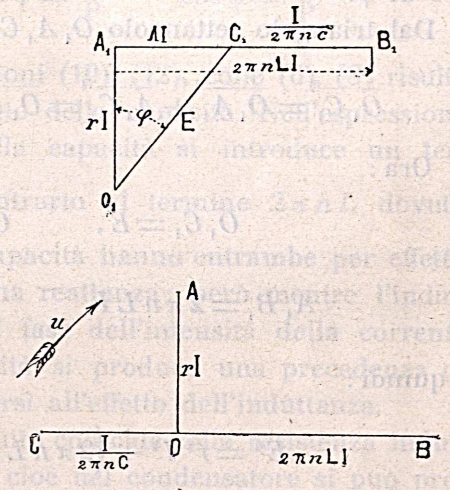

Fig. 130.

La legge di Ohm applicata al conduttore $BLMrA$ ci dà:

$$v_2 - v_1 + e - L\frac{di}{dt} = ri,$$

da cui, ponendo $v_1 - v_2 = v$:

$$e = ri + L\frac{di}{dt} + v.$$

Se il vettore OA (fig. 130) di lunghezza $OA = rI$ rappresenta ri, il vettore OB di lunghezza $OB = 2\pi nLI$ condotto normalmente ad OA nel verso u della rotazione rappresenta $L\dfrac{di}{dt}$, infine il vettore OC di lunghezza $OC = \dfrac{I}{2\pi nC}$ condotto normalmente ad OA, ma nel verso opposto a quello della rotazione u rappresenta v.

Se si compongono questi tre vettori per mezzo della poligonale $O_1A_1B_1C_1$ il lato di chiusa O_1C_1 rappresenta la f. e. m. e che ci proponevamo di trovare; la lunghezza O_1C_1 dà l'ampiezza

E, l'angolo $A_1\,O_1\,C_1 = \varphi$ dà il valore angolare della differenza di fase fra e ed i.

Si possono facilmente ricavare le espressioni analitiche di E e di φ.

Dal triangolo rettangolo $O_1\,A_1\,C_1$ si ha

$$\overline{O_1\,C_1}^2 = \overline{O_1\,A_1}^2 + \overline{A_1\,C_1}^2 = \overline{O_1\,A_1}^2 + (A_1\,B_1 - B_1\,C_1)^2.$$

Ora:

$$O_1\,C_1 = E, \qquad O_1\,A_1 = r\,I,$$

$$A_1\,B_1 = 2\,\pi\,n\,L\,I, \qquad B_1\,C_1 = \frac{I}{2\,\pi\,n\,C},$$

e quindi:

$$E^2 = r^2\,I^2 + \left(2\,\pi\,n\,L - \frac{1}{2\,\pi\,n\,C}\right)^2 I^2.$$

Se si pone:

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} 2\,\pi\,n\,L - \frac{1}{2\,\pi\,n\,C} &= \Lambda, \\ \sqrt{r^2 + \Lambda^2} &= \mathrm{P}, \end{aligned} \right.$$

si può ancora scrivere:

$$(11) \qquad E = \mathrm{P}\,I.$$

La stessa relazione, qui trovata per i valori massimi, sussiste pure per i valori efficaci. Nell'ipotesi che noi abbiamo fatto di L costante, P è una costante; quindi anche in questo caso generale sussiste una relazione analoga alla legge di Ohm, fra i valori massimi od efficaci della f. e. m., e dell'intensità della corrente. Al fattore costante P che tiene il posto della resistenza nella legge di Ohm si dà ancora il nome di *impedenza o resistenza apparente del circuito;* essa dipende non solo dalla resistenza ohmica, ma anche dall'induttanza e dalla capacità. Alla grandezza Λ si dà il nome di *reattanza del circuito.*

Dallo stesso triangolo rettangolo $O_1 A_1 C_1$ si può ricavare il valore di φ:

$$(12) \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\Lambda}{r}, \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{\Lambda}{P}, \qquad \cos\varphi = \frac{r}{P}.$$

Dal confronto delle relazioni (10), (12), colle (6), (8) risulta chiaramente quale sia l'effetto della capacità. Nell'espressione della reattanza a causa della capacità si introduce un termine $\frac{1}{2\pi n C}$, di segno contrario al termine $2\pi n L$ dovuto all'induttanza. Induttanza e capacità hanno entrambe per effetto di introdurre nel circuito una reattanza; però mentre l'induttanza produce un ritardo di fase dell'intensità della corrente rispetto alla f. e. m., la capacità si produce una precedenza di fase, e viene quindi ad opporsi all'effetto dell'induttanza.

La reattanza Λ di un circuito coincide colla resistenza induttiva λ solo quando è $C = \infty$, cioè nel condensatore si può produrre uno spostamento continuo con una differenza finita di potenziale: è questo il caso di un circuito metallicamente chiuso.

Secondo i valori della capacità e dell'induttanza si possono presentare tre casi distinti.

1° Sia $\frac{1}{2\pi n C} < 2\pi n L$, cioè $B_1 C_1 < A_1 B_1$ (figura 130); il punto C_1 cade alla destra di A_1 fra A_1 e B_1. In questo caso, che è il più frequente nella pratica, si ha nel circuito una f. e. m. ancora in precedenza di fase sull'intensità della corrente, ma il valore di questa differenza di fase, e quindi anche il valore della f. e. m., sono minori di ciò che sarebbero quando nel circuito non si avessero condensatori; lo stesso effetto si potrebbe ottenere con un circuito nel quale fosse la stessa la resistenza ohmica, ma minore l'induttanza.

2° Sia $\frac{1}{2\pi n C} > 2\pi n L$, cioè $B_1 C_1 > A_1 B_1$ (figura 131); il punto C_1 cade alla sinistra di A_1. In questo caso la reattanza Λ è negativa, quindi è ancor negativo l'angolo φ, cioè la f. e. m. non precede ma segue la corrente: l'effetto della capacità prevale sull'effetto dell'induttanza.

Il ritardo di fase di e rispetto ad i cresce col crescere di $\frac{1}{2\pi n C}$, cioè col diminuire della capacità

In un circuito percorso da corrente alternativa si può dunque, variando i valori dell'induttanza e della capacità, far variare la differenza di fase tra la f. e. m. e l'intensità della corrente in modo qualunque fra i limiti $+\frac{\pi}{2}$ e $-\frac{\pi}{2}$; si ha una precedenza di fase di e su i prossimo a $\frac{\pi}{2}$ quando l'induttanza è grandissima, invece un ritardo di fase prossimo a $\frac{\pi}{2}$ quando è minima la capacità.

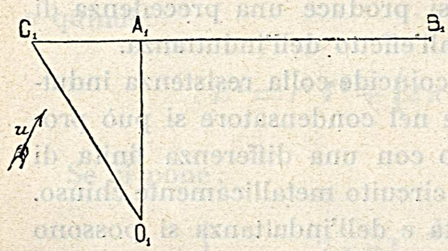

Fig. 131.

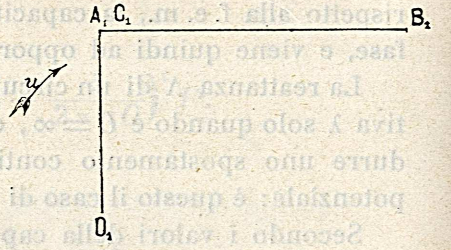

Fig. 132.

3° Consideriamo il caso intermedio in cui $\frac{1}{2\pi n C} = 2\pi n L$ ossia

$$(13) \qquad 4\pi^2 n^2 L C = 1.$$

Il punto C_1 (fig. 132) cade in A_1 perchè $B_1 C_1 = A_1 B_1$.

In questo caso $\varphi = 0$, $\mathrm{P} = r$, cioè non vi ha differenza di fase fra la f. e. m. e la corrente; la resistenza apparente ha il valore minimo possibile, cioè l'intensità della corrente ha il valore massimo per una data f. e. m., ovvero la f. e. m. ha il valore minimo per una data intensità di corrente.

Lo stesso effetto si otterrebbe in un circuito avente la stessa resistenza ohmica, ma priva di reattanza; gli effetti dell'induttanza e della capacità si neutralizzano.

In un dato circuito, qualunque siano i valori di L e di C, si potranno sempre ottenere gli effetti ora considerati, purchè la frequenza della corrente sia tale da soddisfare alla (13), purchè cioè sia:

$$(14)\quad \begin{cases} n = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{1}{\sqrt{LC}}, \\ T = 2\pi\sqrt{LC}. \end{cases}$$

120. – Risuonatori elettrici. — Un circuito che presenti una piccolissima resistenza e che soddisfi alla relazione (13), può essere percorso da una corrente di notevole intensità, anche quando è piccola la f. e. m. che su di esso agisce.

Consideriamo il caso limite nel quale è nulla la resistenza ohmica; allora $L\dfrac{di}{dt}$ e v sono fra loro uguali ed opposti ma non nulli, è invece $rI = 0$. Nella costruzione del vettore O_1C_1, che rappresenta la f. e. m., trattata al numero precedente, i punti O_1, A_1, C_1 coincidono, mentre $O_1B_1 = B_1C_1$ ha un certo valore non nullo; ne risulta che, pur non avendosi f. e. m. nel circuito, non sono nulli nè la differenza di potenziale V, nè l'intensità della corrente I.

Questo risultato, che può a tutta prima sembrare paradossale, soddisfa invece completamente al principio della conservazione dell'energia. Nel circuito considerato si ha una continua e periodica trasformazione di energia magnetica in energia elettrica, e inversamente, trasformazione che, essendo nulla la resistenza, può farsi senza consumo di energia.

La meccanica ci offre esempi di queste trasformazioni. Così quando un pendolo oscilla nel campo della gravità, senza che alcuna resistenza passiva si opponga al suo moto, si produce una trasformazione continua dell'energia potenziale del pendolo nel suo punto più alto, in energia cinetica del pendolo sulla verticale.

Parimenti se in un corpo perfettamente elastico si produce una prima deformazione, esso continua ad essere soggetto in modo periodico a deformazioni uguali ed opposte; si ha anche qui una trasformazione continua di energia cinetica in potenziale, e viceversa.

Affatto analogo è il fenomeno elettrico che abbiamo dianzi considerato. Data una carica al condensatore, si è in esso accumulata una certa energia potenziale elettrica; la differenza di potenziale fra le due armature genera nel circuito una corrente, e perciò un'energia magnetica, per effetto della quale si producono f. e. m. opposte, che caricano il condensatore ad una differenza di potenziale uguale e opposta a quella di prima; gli stessi fenomeni si ripeteranno quindi in senso opposto, e così via in modo periodico. Si ha dunque una continua trasformazione di energia elettrica in magnetica e viceversa, nella quale per l'ipotesi fatta di $r = 0$, è nullo il consumo di energia. Quando è massima l'energia potenziale elettrica, quando cioè v è massimo, è invece nulla la i, che dicemmo essere in quadratura con v, ed è quindi ancora nulla l'energia magnetica; reciprocamente è massima l'energia magnetica e nulla la elettrica, quando i è massimo e v è nullo.

Siccome la trasformazione dell'una energia nell'altra è completa, così i valori delle due energie debbono essere uguali.

L'energia magnetica totale è (3)

$$\frac{1}{2} L I^2.$$

L'energia elettrica totale è (8') [41]

$$\frac{1}{2} \frac{q^2}{C},$$

ove q è la carica totale del condensatore, cioè la quantità totale di elettricità che passa attraverso al circuito in un quarto di periodo. Se supponiamo nulla la fase di i cioè poniamo

$$i = I \operatorname{sen} 2 \pi n t,$$

si ha

$$q = \int_0^{\frac{T}{4}} i \, d t = I \int_0^{\frac{T}{4}} \operatorname{sen} 2 \pi n t \, d t = \frac{I}{2 \pi n} \cdot$$

L'energia elettrica totale è dunque

$$\frac{1}{2}\,\frac{q_2}{C}=\frac{1}{2}\,\frac{I^2}{4\,\pi^2\,n^2\,C}\,.$$

Uguagliando i valori dell'energia magnetica e della elettrica si ottiene

$$\frac{1}{2}\,L\,I^2=\frac{1}{2}\,\frac{I^2}{4\,\pi^2\,n^2\,C}$$

cioè

$$4\,\pi^2\,n^2\,L\,C=1.$$

Si ricade così nell'equazione (13) di condizione supposta nello studio del fenomeno.

Il sistema considerato è dunque tale che basta produrre in esso una prima volta una corrente alternativa di frequenza n, perchè questa continui indefinitamente. In pratica non si può realizzare un tale sistema, essendo impossibile rendere nulla la resistenza del circuito; ma possiamo sempre ottenere circuiti in condizioni prossime a quelle del sistema considerato, quando la resistenza sia piccola e sia soddisfatta la relazione (13).

Se con un artificio qualunque facciamo agire su un tale circuito successive f. e. m. periodiche, anche piccolissime, aventi la stessa frequenza, gli effetti prodotti da queste f. e. m. si sommano, precisamente come in un pendolo si accumulano gli effetti degli impulsi dati collo stesso ritmo col quale il pendolo oscilla, e precisamente come in una corda vibrante si aumentano le vibrazioni per le oscillazioni trasmesse da corde vibranti all'unisono con quella. Per l'analogia con questo caso dell'acustica, un circuito elettrico che soddisfa alle indicate condizioni si dice un *risuonatore elettrico*.

In un risuonatore si accumulano le oscillazioni aventi un dato ritmo, e possono dar luogo ad oscillazioni di maggior ampiezza; una volta prodotta nel risuonatore una data vibrazione, questa continua per sè stessa senza che più agisca alcuna f. e. m., e continuerebbe sino all'infinito se si potesse realizzare il caso teorico d'un risuonatore non presentante resistenza ohmica.

Per ogni risuonatore le relazioni (14) definiscono la frequenza ed il periodo delle oscillazioni alle quali esso può risuonare. Variando l'induttanza e la capacità del circuito, si può far variare a piacimento la frequenza ed il periodo. Quanto minori sono l'induttanza e la capacità, tanto minore è il periodo e maggiore la frequenza.

121. – Differenza di potenziale fra due punti di un circuito percorso da corrente alternativa. — Consideriamo una porzione AB di circuito (fig. 133); in ab sia inserito un condensatore di capacità C; indichiamo rispettivamente con r_1, L_1, r_2, L_2 la resistenza ohmica e l'induttanza dei due tratti Aa, Bb. Nella porzione AB di circuito non si abbia altra f. e. m. se non quella di selfinduzione; nella rimanente parte agisca una f. e. m. alternativa di frequenza n. Assumiamo come direzione positiva della corrente quella della freccia; indichiamo con i l'intensità della corrente ad un dato istante, con v_1, v_2, u_1, u_2 i valori del potenziale agli estremi A, B, ed alle armature a, b del condensatore.

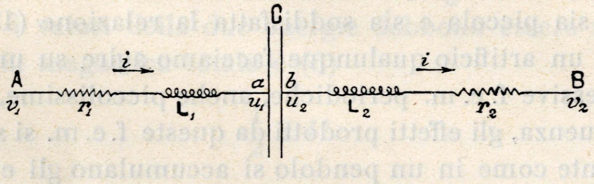

Fig. 133.

Data la corrente che percorre il circuito, ci proponiamo di trovare la differenza di potenziale fra gli estremi A, B.

La legge di Ohm applicata successivamente alle due porzioni Aa, bB di circuito dà:

$$v_1 - u_1 - L_1 \frac{d\,i}{d\,t} = r_1\, i$$

$$u_2 - v_2 - L_2 \frac{d\,i}{d\,t} = r_2\, i\,.$$

Sommando membro a membro, e ponendo $v_1 - v_2 = v$, $u_1 - u_2 = u$, $r_1 + r_2 = r$, $L_1 + L_2 = L$:

$$v - u - L\frac{di}{dt} = ri$$

da cui

$$v = ri + L\frac{di}{dt} + u.$$

Quest'equazione è perfettamente analoga a quella che dà la f. e. m. di un circuito in funzione della corrente [119]; onde si può ricavare la v con una costruzione identica a quella fatta per ottenere e.

Ponendo anche in questo caso:

$$(10') \qquad \left\{ \begin{aligned} \Lambda &= 2\pi n L - \frac{1}{2\pi n C}, \\ \mathrm{P} &= \sqrt{r^2 + \Lambda^2} \end{aligned} \right.$$

si ha:

$$(11') \qquad V = \mathrm{P}\, I.$$

P si dice ancora *resistenza apparente* o *impedenza*, e Λ *reattanza* della porzione considerata di circuito.

Le stesse relazioni (12) determinano la differenza di fase fra la differenza di potenziale e l'intensità della corrente.

Si possono qui ripetere le stesse considerazioni fatte nel caso di un circuito completo; la capacità e l'induttanza producono effetti contrari; la capacità genera una precedenza di fase, l'induttanza un ritardo di fase della corrente rispetto alla differenza di potenziale.

Se $\dfrac{1}{2\pi n C} > 2\pi n L$ prevale l'effetto dell'induttanza: la v è in precedenza di fase sulla i.

Se invece $\dfrac{1}{2\pi n C} > 2\pi n L$ prevale l'influenza della capacità: la i è in precedenza sulla v.

Se infine $\frac{1}{2\pi n C} = 2\pi n L$, gli effetti della capacità e della induttanza si neutralizzano: non si ha differenza di fase fra v ed i, e l'impedenza ha il valore minimo $P = r$.

122. – Circuiti derivati. — Consideriamo due circuiti derivati 1, 2 (fig. 134); nel circuito 1 sia inserita una resistenza ohmica r ed un'induttanza L, nel circuito 2 un condensatore di capacità C.

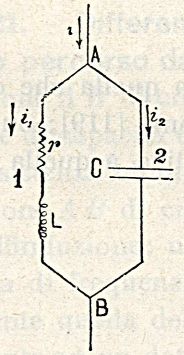

Fig. 134.

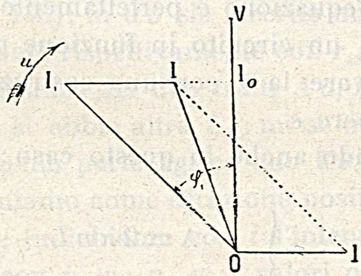

Fig. 135.

Nel circuito 1 si ha $C = \infty$, e quindi

$$\Lambda_1 = \lambda = 2\pi n L, \qquad P_1 = \varrho = \sqrt{r^2 + \lambda^2};$$

invece nel circuito 2 si ha $r = 0$, $L = 0$, e quindi:

$$\Lambda_2 = -\frac{1}{2\pi n C}, \qquad P_2 = \frac{1}{2\pi n C}.$$

La resistenza apparente P_2 che è uguale alla $\sqrt{\Lambda^2}$ si è presa col segno $+$, perchè, come la resistenza ohmica, essa è di sua natura positiva.

Se è data la differenza di potenziale V fra i punti A, B, si ottengono subito le intensità delle correnti derivate:

$$I_1 = \frac{V}{\varrho}; \qquad I_2 = \frac{V}{P_2} = 2\pi n C V,$$

ed il loro ritardo di fase rispetto a V:

$$\operatorname{tang} \varphi_1 = \frac{\lambda}{r}; \qquad \operatorname{tang} \varphi_2 = \frac{\Lambda}{r_2} = -\infty, \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}.$$

Se $O\,V$ (fig. 135) rappresenta la differenza di potenziale, le due correnti derivate sono rappresentate dai vettori: $O\,I_1$ che segue $O\,V$ di un angolo φ_1, ed $O\,I_2$ che precede $O\,V$ di un angolo $\frac{\pi}{2}$; il vettore risultante $O\,I$ rappresenta la corrente principale.

Importa notare come in questo caso, a differenza di ciò che succede quando non si fa uso di condensatori, si ha fra le due correnti derivate una differenza di fase, il cui valore angolare è sempre $> \frac{\pi}{2}$, compreso fra $\frac{\pi}{2}$ e π.

Da questo fatto risulta un'altra importante proprietà; la corrente principale può avere un'ampiezza $O\,I$ minore dell'ampiezza $O\,I_1$ della corrente nel circuito derivato 1; il che non si può ottenere se non si ricorre a condensatori.

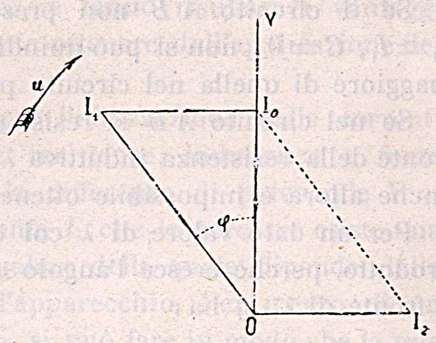
Fig. 136.

Dato un circuito $A\,B$, che presenti un'induttanza L grande a fronte della sua resistenza ohmica r, collegando ad A e B le armature di un condensatore per mezzo di fili d'induttanza e di resistenza trascurabili, si potrà ottenere in $A\,B$ una data corrente I_1, anche quando non si disponga nel resto del circuito che di una corrente I minore, purchè compresa fra certi limiti.

Data la corrente I_1, la resistenza r e l'induttanza L del circuito $A\,B$, vediamo quale sia il valore minimo I_0 della corrente principale, che ci permette ancora di ottenere una corrente I_1 in $A\,B$, e quale debba essere in questo caso la capacità del condensatore.

Sia (fig. 136) $O\,V$ la differenza di potenziale fra i punti A, B, $O\,I_1$ la corrente che si vuole ottenere nel circuito $A\,B$, φ la loro differenza di fase. Evidentemente il minimo valore di I è $O\,I_0$, proiezione di I_1 su V, cioè:

$$I_0 = I_1 \cos\varphi = V\frac{r}{\rho^2}\,.$$

Nel circuito del condensatore la corrente deve avere il valore

$$I_2 = I_1 \operatorname{sen} \varphi = V \frac{\lambda}{\varrho^2}$$

e poichè $I_2 = 2\pi n C V$, il valore della capacità è dato dalla relazione

$$2\pi n C V = V \frac{\lambda}{\varrho^2}$$

ossia dalla

$$2\pi n C = \frac{\lambda}{\lambda^2 + r^2}.$$

La capacità del condensatore dipende dunque da r e da λ.

Se il circuito $A B$ non presenta induttanza si ha $\lambda = 0$, $I_0 = I_1$, $C = 0$: non si può quindi ottenere in $A B$ una corrente maggiore di quella nel circuito principale.

Se nel circuito $A B$ la resistenza ohmica r è grandissima a fronte della resistenza induttiva λ, si ha ancora $I_0 = I_1$, $C = 0$: anche allora è impossibile ottenere l'effetto voluto.

Per un dato valore di λ col diminuire di r cresce l'effetto prodotto, perchè cresce l'angolo φ; al limite per r trascurabile a fronte di λ, si ha:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \qquad I_0 = O,$$

e la relazione che determina la capacità della derivazione è

$$2\pi n C = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2\pi n L}$$

ossia

$$4\pi^2 n^2 L C = 1.$$

In questo caso si ha dunque nel circuito $A B$ una corrente I_1, che può avere intensità grande come noi vogliamo, pur essendo infinitesima la corrente I_0 nel circuito principale. La corrente I_2 nel condensatore è uguale ed opposta alla corrente I_1, cioè le due correnti I_1, I_2 costituiscono una corrente unica che percorre il circuito formato dai due circuiti derivati. Questo sistema costituisce un vero risuonatore, e, come appare dalla relazione scritta testè, soddisfa all'equazione (13) dei risuonatori. Se la resistenza r è nulla, la corrente una volta stabilita continua indefinitamente; se si fanno agire altre correnti I_0, anche piccolissime, purchè abbiano la stessa frequenza e la stessa fase, i loro effetti si sommano nel circuito. Ritroviamo così per altra via le proprietà dei risuonatori, e vediamo di più che le vibrazioni sincrone possono essere prodotte non solo facendo agire sul risuonatore f. e. m. piccolissime, ma ancora mandandovi correnti di minima intensità.

Queste considerazioni hanno non solo un'importanza teorica grandissima, ma anche un'importanza pratica diretta. Esse dimostrano gli effetti dell'induttanza e della capacità nei circuiti percorsi da corrente alternativa, e fanno risultare i vantaggi che si potrebbero industrialmente ottenere dall'applicazione dei condensatori in parallelo.

Gli apparecchi industriali per l'utilizzazione delle correnti alternative possono presentare resistenze, induttanze e forze elettromotrici. In generale fra la differenza di potenziale V ai poli dell'apparecchio e la corrente I_1 che lo percorre esiste una differenza di fase, il valore angolare della quale dipende dalla induttanza e dalle f. e. m. nell'apparecchio. Per mezzo di un condensatore posto in parallelo, si può fare in modo che la rete di distribuzione non debba fornire tutta la corrente I_1, ma solo la corrente I_0 in fase con V; la corrente $I_0 I_1$ in quadratura viene data dal condensatore convenientemente calcolato.

123. - **Lavoro di una corrente alternativa.** — In una porzione di circuito siano, ad un dato istante:

$$i = I \operatorname{sen} 2 \pi n t$$

$$v = V \operatorname{sen} (2 \pi n t + \varphi)$$

i valori dell'intensità della corrente e della differenza di potenziale fra gli estremi.

Il lavoro fatto dalla corrente nel tempo $d\,t$ è:

$$v\,i\,d\,t,$$

ed in un intero periodo:

$$\int_0^T v\, i\, d\, t.$$

Il valore medio del lavoro in un periodo, o se vogliamo, in un tempo grandissimo, cioè il lavoro che viene fatto nell'unità di tempo è dunque:

$$w = \frac{1}{T}\int_0^T v\, i\, d\, t\,;$$

sostituendo i valori di v, i;

$$w = \frac{VI}{T}\int_0^T \operatorname{sen} 2\,\pi\, n\, t \operatorname{sen}(2\,\pi\, n\, t + \varphi)\, d\, t\,,$$

ed integrando:

$$w = \frac{VI}{2}\cos\varphi\,;$$

tenendo infine conto della (5) si ottiene

$$w = \mathfrak{V}\,\mathfrak{I}\cos\varphi. \tag{15}$$

In modo analogo, se si considera un circuito completo sul quale agisca una f. e. m. alternativa sinusoidale *e*, il lavoro nell'unità di tempo è dato da

$$w = \mathfrak{E}\,\mathfrak{I}\cos\varphi. \tag{15'}$$

Non basta dunque per il calcolo del lavoro nelle correnti alternative tener conto dei due fattori: intensità di corrente e differenza di potenziale o f. e. m., ma bisogna pure tener conto della loro differenza di fase. Al prodotto $\mathfrak{V}\,\mathfrak{I}$ oppure $\mathfrak{E}\,\mathfrak{I}$, si dà il nome di *lavoro apparente;* esso non coincide col *lavoro effettivo* w, se non quando la corrente è in accordo di fase colla differenza di potenziale o colla f. e. m.

Se il circuito o la porzione di circuito considerata non presenta altre f. e. m. oltre a quella *e* che produce la corrente, ed a quella dovuta all'induttanza, allora $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{E}$ sono la somma dei due vettori $r\,\mathfrak{J}$ e $\lambda\,\mathfrak{J}$ fra di loro ortogonali, si ha perciò:

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{V}\cos\varphi\\ \mathfrak{E}\cos\varphi\end{array}\right\}=r\,\mathfrak{J}$$

e quindi

$$w=r\,\mathfrak{J}^2.$$

Il lavoro w fatto dalla corrente si trasforma tutto in calore per effetto JOULE; esso dipende solo dalla resistenza r e non dall'induttanza λ. Si ha pertanto una differenza caratteristica fra le resistenze ohmiche e le resistenze induttive; le due resistenze si equivalgono finchè si considerano le cadute di potenziale prodotte al passaggio di una data corrente; ma non si equivalgono più se si considerano i lavori. Sulla dissipazione dell'energia sotto forma di calore non influisce punto l'induttanza del circuito.

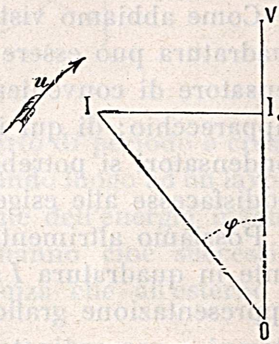

Fig. 137

Per mezzo di una resistenza ohmica inserita in un circuito, non si può produrre una diminuzione della corrente senza dissipazione di energia; una resistenza induttiva invece produce la diminuzione della corrente senza consumo di lavoro.

A tale scopo si usano in pratica spirali avvolte su nuclei di ferro presentanti piccola riluttanza; ad esse gl'inglesi dànno il nome di *choking coil.*

Le stesse cose si possono porre sotto forma diversa. La corrente I (fig. 137) si può considerare come la risultante della I_0 in accordo di fase con V o con E, e della $I_0 I$, che è in ritardo di fase di $\frac{\pi}{2}$. Ora si ha:

$$\mathfrak{J}_0=\mathfrak{J}\cos\varphi,$$

e quindi:

$$w = \begin{cases} \mathfrak{V}\,\mathfrak{J}_0. \\ \mathfrak{E}\,\mathfrak{J}_0. \end{cases}$$

Il lavoro fatto dipende dunque solo dalla corrente in accordo di fase, la corrente in quadratura è una corrente *oziosa* che non fa lavoro.

Queste considerazioni hanno grande importanza per le pratiche applicazioni delle correnti alternative. In un apparecchio industriale, per mantenere la voluta differenza di fase fra V ed I, è in generale necessaria una corrente in quadratura, la quale non produce nè consuma lavoro. Questa corrente oziosa però, se non porta danno nell'apparecchio utilizzatore, obbliga la rete di distribuzione a portare non la sola corrente $O\,I_0$, ma una corrente maggiore $O\,I$; è quindi causa di una maggiore perdita per effetto Joule nella rete.

Come abbiamo visto al numero precedente, la corrente in quadratura può essere data direttamente sul luogo da un condensatore di conveniente capacità inserito in derivazione sull'apparecchio; di qui i grandi vantaggi che dall'applicazione dei condensatori si potrebbero ritrarre, quando la loro costruzione soddisfacesse alle esigenze di un circuito pratico.

Possiamo altrimenti renderci ragione del fatto che la corrente in quadratura $I \operatorname{sen} \varphi$ non produce lavoro ricorrendo alla rappresentazione grafica per mezzo delle curve aventi per ascisse i tempi e per ordinate i valori istantanei delle grandezze alternative considerate. Le due curve sono due sinusoidi; quella che rappresenta E o V precede di un quarto di periodo quella che rappresenta $I \operatorname{sen} \varphi$ (fig. 138). Il lavoro della corrente $I \operatorname{sen} \varphi$ è in ogni istante dato dal prodotto delle ordinate delle due curve; esso è positivo nei tratti come $a\,B$, $b\,A$,... nei quali le ordinate hanno lo stesso segno, negativo nei tratti come $A\,a$, $B\,b$,... nei quali le ordinate hanno segni opposti.

Il lavoro è dunque alternativamente positivo e negativo, e cambia di segno ad ogni quarto di periodo. Ora ad ogni quarto di periodo corrispondono lavori uguali in valore assoluto, perchè le due grandezze prendono la stessa successione di valori; è pertanto nullo il lavoro medio della corrente I sen φ.

Vediamo l'interpretazione fisica di questo fatto. Quando la corrente è nulla, è pure nulla l'energia intrinseca del campo magnetico da essa generata, ma la differenza di potenziale è massima, è cioè massima l'energia del campo elettrico. A partire da tale istante diminuisce la differenza di potenziale e la energia elettrica, cresce invece l'intensità della corrente e l'energia magnetica; dopo un quarto di periodo v è nullo e la corrente è massima. Si ha dunque in questo quarto di periodo un lavoro fatto dal campo elettrico; tutta l'energia elettrica si trasforma

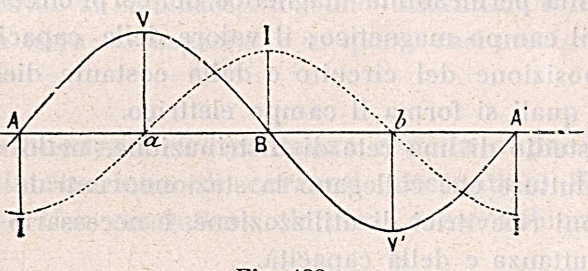

Fig. 138.

in energia magnetica. Nel successivo quarto di periodo v cresce in senso opposto, la corrente diminuisce dando luogo ad un lavoro negativo che rappresenta la trasformazione dell'energia magnetica in energia elettrica, e così via. Si hanno cioè successive trasformazioni periodiche di energia, senza che all'esterno si spenda o si ricavi lavoro.

Se la corrente alternativa non è sinusoidale, è ancora vero che il lavoro effettivo w fatto dalla corrente non coincide in generale col lavoro apparente dato dal prodotto $\mathfrak{V}\,\mathfrak{J}$; ma il rapporto di questi due lavori non si può più esprimere semplicemente col coseno di un angolo.

Il rapporto $\frac{w}{\mathfrak{V}\,\mathfrak{J}}$, la cui considerazione ha grande importanza negli apparecchi industriali, è dai pratici inglesi chiamato *fattore di potenza (power factor)*; altri lo dicono *coefficiente* o *fattore di riduzione del lavoro;* il Kapp lo chiama *rendimento dell'impianto (plant efficiency).*

124. – Induttanza e capacità delle condutture elettriche. — Il circuito di una corrente elettrica presenta sempre un'induttanza ed una capacità.

Presenta un'induttanza perchè non si può rendere nullo il flusso d'induzione magnetica generato dalla corrente e concatenato col circuito; presenta una capacità anche quando in esso non siano inseriti dei veri condensatori, perchè fra i diversi punti a potenziale diverso, e fra questi punti ed i corpi circostanti (in modo speciale la terra che è a potenziale zero) si stabilisce un campo elettrico.

Il valore dell'induttanza dipende dalla disposizione del circuito e dalla permeabilità magnetica dei corpi circostanti in cui si forma il campo magnetico; il valore della capacità dipende dalla disposizione del circuito e dalla costante dielettrica dei corpi nei quali si forma il campo elettrico.

Nello studio di una rete di distribuzione, nello studio cioè delle condutture che collegano la stazione centrale generatrice alle stazioni ricevitrici di utilizzazione, è necessario tener conto e dell'induttanza e della capacità.

Anche in una semplice conduttura costituita da due fili, di andata e di ritorno, può l'induttanza avere valori abbastanza notevoli, quando sia grande la lunghezza. Nella pratica industriale si usano disposizioni speciali per rendere minima l'induttanza: così nelle condutture sotterranee o subacquee si ricorre ai *cavi concentrici*. Questi sono costituiti da due conduttori, l'uno cilindrico formato da un filo o da una corda di rame, l'altro tubulare, disposto coassiale al primo, ed in generale formato da trefoli di rame; opportuni strati di coibente isolano i due conduttori l'uno dall'altro, ed il conduttore esterno dalla terra o dall'acqua in cui dev'essere posto; armature esterne di piombo o di ferro servono come riparo meccanico. Un'altra disposizione pure usata (Ferranti) è quella di due conduttori tubulari coassiali, convenientemente isolati fra di loro e dall'esterno. In questi casi l'induttanza è minima, perchè, per gli effetti a distanza, i due conduttori equivalgono a correnti contrarie disposte secondo l'asse.

Possiamo facilmente renderci conto del fatto che una conduttura presenta sempre una certa capacità, talora anche notevole, considerando alcuni casi speciali.

In un cavo concentrico i due conduttori rappresentano le armature, l'isolante interposto il coibente di un vero condensatore cilindrico. Nel caso di due cavi paralleli, ognuno di essi equivale ad un condensatore cilindrico avente per armatura interna il conduttore e per armatura esterna l'involucro metallico protettore del cavo; le due armature esterne comunicano fra di loro per mezzo della terra o dell'acqua in cui sono immerse; perciò il complesso dei due campi equivale a due condensatori cilindrici disposti in cascata. Nel caso di condutture aeree il campo elettrico si stabilisce fra i due conduttori e fra ognuno di essi e la terra; la capacità è in questi casi assai minore, ma non nulla.

125. – Influenza dell'induttanza e della capacità in una rete di distribuzione di correnti alternative. Fenomeno Ferranti. — Una conduttura elettrica, come abbiamo notato,

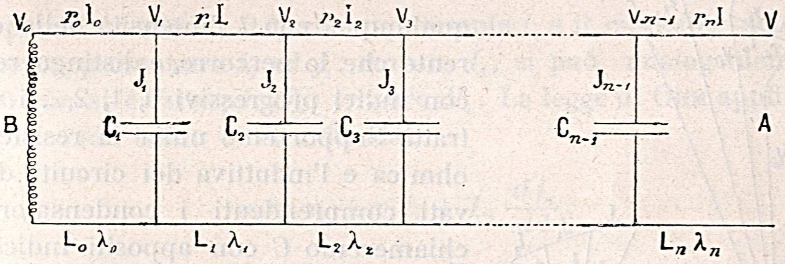

Fig. 139.

presenta sempre induttanza e capacità; fra poco vedremo come si proceda nel loro calcolo, frattanto studiamone l'influenza in una rete di distribuzione per correnti alternative.

Consideriamo il caso pratico semplice in cui da una stazione generatrice *A* (fig. 139) si trasmette la corrente per mezzo di due fili, di andata e di ritorno, ad un'unica stazione ricevitrice *B*, nella quale la corrente viene utilizzata. Possiamo col pensiero al sistema effettivo sostituire un sistema fittizio, tale che corrisponda coll'approssimazione che vogliamo alla realtà.

Nel fatto essendo l'induttanza e la capacità distribuite su tutta la lunghezza della rete, si dovrebbero immaginare infiniti condensatori posti in parallelo fra i due conduttori; ma ai medesimi possiamo sostituire un numero finito di condensatori, convenientemente disposti fra gli estremi A e B; quanto maggiore sarà il numero dei condensatori che consideriamo, tanto più ci avvicineremo alla realtà.

Date per grandezza e per fase la differenza di potenziale v_0 e l'intensità della corrente i_0, necessarie al funzionamento dell'apparecchio utilizzatore B, ci proponiamo di ricavare le grandezze corrispondenti v ed i che la macchina generatrice A deve produrre. In generale v ed i differiscono da v_0 ed i_0 per gli effetti prodotti dalla resistenza ohmica, dall'induttanza e dalla capacità.

Divisa la rete, come sopra si è detto, in tanti tratti compresi fra due condensatori successivi, indicheremo rispettivamente con r, L, $\lambda = 2\,\pi\,n\,L$ la resistenza ohmica, l'induttanza e la resistenza induttiva dell'insieme delle due porzioni di andata e di ritorno di un tratto qualunque, con i l'intensità della corrente che lo percorre, e distingueremo con indici progressivi 0, 1, 2,... i vari tratti. Supporremo nulla la resistenza ohmica e l'induttiva dei circuiti derivati comprendenti i condensatori e chiameremo C con appositi indici la loro capacità, v ed j con gli stessi indici le differenze di potenziale fra le armature e le intensità delle correnti che li percorrono. In questo schema l'intensità della corrente varia per salti nei punti di derivazione dei condensatori mentre in una rete effettiva essa, per effetto della capacità, varia in modo continuo.

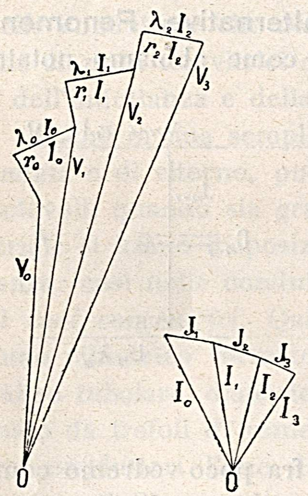

Fig. 140.

Siano dati (fig. 140) i due vettori $O\,V_0$, $O\,I_0$ che rappresentano v_0 ed i_0; potremo trovare successivamente, procedendo da B verso A, tutti i valori delle i e delle v per mezzo di costruzioni grafiche.

Nel primo tratto fra la stazione ricevitrice ed il condensatore C_1, abbiamo, per la legge di Ohm:

$$v_1 - v_0 - L_0 \frac{d\, i_0}{d\, t} = r_0\, i_0,$$

ossia:

$$v_1 = v_0 + r_0\, i_0 + L_0 \frac{d\, i_0}{d\, t}.$$

Il vettore $O\,V_1$ che rappresenta v_1 è dunque la somma dei vettori: V_0, $r_0\, I_0$ parallelo ad I_0, e $\lambda_0\, I_0$ normale ad I_0.

Trovato V_1 si ricava il valore della corrente nel condensatore C_1

$$J_1 = 2\,\pi\, n\, C_1\, V_1,$$

che sappiamo essere in precedenza di fase di 90° rispetto a V_1.

Passiamo al secondo tratto fra i condensatori C_1 e C_2.

Anzitutto rispetto alla corrente i_1 la i_0 e la j_1 sono correnti derivate, cioè in ogni istante:

$$i_1 = i_0 + j_1;$$

e perciò il vettore $O\,I_1$ che rappresenta i_1 è il risultante dei due che rappresentano i_0 ed j_1; trovato I_1, si può, analogamente a ciò che si è fatto per V_1, trovare V_2. La legge di Ohm applicata al secondo tratto di circuito dà:

$$v_2 = v_1 + r_1\, i_1 + L_1 \frac{d\, i_1}{d\, t}:$$

il vettore V_2 è il risultante del vettore V_1 e dei due $r_1\, I_1$ parallelo e $\lambda_1\, I_1$ normale ad $O\,I_1$.

Dal valore di V_2 si ricava la corrente nel secondo condensatore $J_2 = 2\,\pi\, n\, C_2\, V_2$, in precedenza di fase di 90° su V_2.

Si procederà in modo affatto analogo per i successivi tratti finchè si arrivi alla stazione generatrice.

Con eguale procedimento si potrebbero eseguire i calcoli numerici delle successive grandezze a partire dalla stazione ricevitrice, sino ad ottenere i valori di $\mathfrak{V}$ ed $\mathfrak{J}$ nella stazione generatrice.

In una rete percorsa da corrente continua l'intensità della corrente è costante, ed il potenziale va diminuendo dalla stazione generatrice alla ricevitrice proporzionalmente alle resistenze ohmiche; invece in una rete percorsa da corrente alternativa la corrente ed il potenziale possono variare in modo qualunque, dipendente non solo dalla resistenza, dall'induttanza e dalla capacità della rete, ma ancora dalle condizioni di funzionamento.

Nell'esempio considerato il potenziale va diminuendo dalla stazione generatrice A alla stazione ricevitrice B; la corrente non ha un'intensità costante lungo tutta la linea, ma va crescendo da A verso B, perchè alla corrente fornita da A s'aggiungono le correnti j dei condensatori; l'aumento della corrente è tanto maggiore quanto maggiore è la capacità della rete.

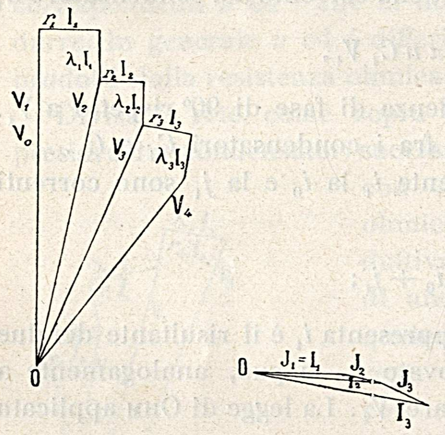

Fig. 141.

Nella stessa rete, variate le condizioni di funzionamento, possono accadere fenomeni opposti, può cioè accadere che la differenza di potenziale vada crescendo dalla stazione generatrice alla ricevitrice, e che invece la corrente vada diminuendo.

Così nell'esempio prima trattato supponiamo che nella stazione ricevitrice B si debba avere lo stesso valore $O\ V_0$ del potenziale, ma si interrompa in B il circuito, in modo che la corrente I_0 sia piccolissima o nulla. In queste condizioni ($I_0 = 0$, $r_0 I_0 = 0$, $\lambda_0 I_0 = 0$) V_1 coincide con V_0, $I_1 = J_1$, normale a V_0. Dalla fig. 141, nella quale sono eseguite le costruzioni analoghe a quelle del caso precedente, risulta che i successivi valori di I vanno crescendo, quelli di V diminuendo da B verso A.

Questi fatti, che possono a tutta prima parere paradossali, furono per la prima volta constatati sperimentalmente dall'ingegnere Ferranti a Londra in un cavo concentrico della lunghezza di parecchi chilometri, e ricevettero perciò il nome di *fenomeno Ferranti*.

In questa trattazione noi abbiamo fatto astrazione dalle perdite inevitabili lungo la linea; per tenerne conto bastava immaginare nei punti di derivazione dei condensatori inserite fra i due conduttori convenienti resistenze R, e aver riguardo, nell'applicare il primo principio di KIRCHHOFF in questi punti alle correnti $\frac{\mathfrak{V}}{R}$ in fase con v.

Come già abbiamo notato, in un calcolo rigoroso i tratti in cui immaginammo divisa la rete dovrebbero supporsi infinitesimi, si dovrebbero cioè considerare equazioni differenziali alle derivate parziali.

Questo calcolo fu fatto da O. HEAVISIDE nell'ipotesi che tutte le grandezze siano uniformemente distribuite lungo la linea; noi, senza darne lo sviluppo, ricordiamo i risultati a cui egli è giunto.

Se indichiamo con $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{V}_0$, $\mathfrak{J}_0$ i valori efficaci della differenza di potenziale e dell'intensità della corrente alla stazione generatrice ed alla stazione ricevitrice, con r, C, L, g i valori della resistenza, della capacità, dell'induttanza e della conduttanza di isolamento (cioè del reciproco della resistenza) per unità di lunghezza, supposte uniformemente distribuite ed espresse in unità pratiche, con l la lunghezza della linea in km., con n la frequenza della corrente, e poniamo $\omega = 2\pi n$, si ha:

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 \cos_h l z + y\, \mathfrak{J}_0 \operatorname{sen}_h l z$$

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 \cos_h l z + \frac{\mathfrak{V}_0}{y} \operatorname{sen}_h l z$$

ove si ponga

$$z = \sqrt{(r + \varepsilon\omega L)(g + \varepsilon\omega C)},$$

$$y = \sqrt{\frac{r + \varepsilon\omega L}{g + \varepsilon\omega C}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{-1}$$

e si indichino con $\cos_h$, sen_h il coseno ed il seno iperbolici.

Si noti però che una distribuzione uniforme della capacità e delle perdite lungo la rete non è possibile, perchè sussistono sempre cause perturbatrici in punti speciali: tali, ad esempio, i sostegni isolanti nelle condutture aeree ed i giunti nei canapi. Per queste ragioni nella pratica non è necessario ricorrere alle formule di HEAVISIDE, ed è più che sufficiente, anche per grandi lunghezze, il procedimento da noi indicato.

126. – Calcolo della capacità di una rete di distribuzione. — Ricordiamo come nei casi pratici più importanti si proceda al calcolo della capacità delle condutture elettriche.

1° La capacità di un *cavo concentrico*, che è un vero condensatore cilindrico, è (14) [46]

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \log \frac{R_2}{R_1}},$$

nella quale l è la lunghezza del cavo, R_1 il raggio esterno del conduttore interno, R_2 il raggio interno del conduttore esterno, ε la costante dielettrica.

2° Nel caso di *due canapi paralleli* si calcolano le capacità C_1, C_2 di ognuno di essi colla formula ora ricordata; la capacità C del loro complesso si calcola colla nota formula dei condensatori uniti in cascata:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

Se $C_2 = C_1$,

$$C = \frac{1}{2} C_1.$$

3° La capacità di un unico *conduttore filiforme aereo* è (15) [46]

$$C = \frac{\varepsilon l}{2 \log \frac{2d}{r}},$$

nella quale r è il raggio del filo, d la distanza fra il conduttore e la terra.

4° La capacità di *due conduttori aerei paralleli* si calcola per mezzo dell'espressione approssimata (16) [46]:

$$C = \frac{\varepsilon l}{4 \log \frac{D}{r}},$$

nella quale r è il raggio dei conduttori, D la distanza dei loro assi.

Nel caso di condutture aeree però ognuno degli isolatori di porcellana da cui il filo è sostenuto, rappresenta un vero condensatore posto in derivazione tra il filo e la terra, ed in generale la capacità complessiva degli isolatori è maggiore di quella del filo di linea. Un calcolo teorico in questi casi non è più possibile, ed il meglio è di riferirsi ai risultati di esperienze su condutture poste in condizioni analoghe.

È a ricordarsi che in queste formule le capacità sono espresse in unità elettrostatiche; quando si vogliano ridurre in unità elettromagnetiche, bisognerà moltiplicare per il conveniente rapporto di trasformazione (*).

127. – Calcolo dell'induttanza di una rete di distribuzione. — Si è visto [110] che l'induttanza d'un circuito è una grandezza ben definita solo quando il mezzo che lo circonda ha una permeabilità magnetica costante; questa condizione è, o si può ritenere per approssimazione, verificata nelle condutture elettriche.

Nel definire l'induttanza di un circuito [110], noi abbiamo implicitamente supposto che esso fosse filiforme; ora nel caso delle condutture elettriche non sono più trascurabili le dimensioni del conduttore; per calcolarne l'induttanza è quindi necessario conoscere come la corrente sia distribuita nella sezione. Noi vedremo nel numero seguente che una corrente alternativa non si distribuisce in modo uniforme su tutta la sezione del conduttore, ma ha una densità maggiore alla periferia che non nelle vicinanze dell'asse; per un calcolo rigoroso dell'induttanza

(*) Vedi l'Appendice sulle unità di misura.

sarebbe quindi necessario ricavare prima, coi procedimenti che indicheremo, la distribuzione della corrente nella sezione. Praticamente però si adopera un procedimento meno rigoroso e più spicciativo, e precisamente si calcola l'induttanza nelle due ipotesi estreme a cui corrispondono il valore massimo ed il valore minimo (ipotesi che in generale corrispondono ad una corrente uniformemente distribuita o ad una corrente concentrata in un sottile strato periferico); si assume poi d'ordinario come valore dell'induttanza la media di questi due valori.

Consideriamo varii casi particolari che hanno importanza pratica.

1° *Cavo concentrico con conduttore assiale.* — Sia $O\,O$ (fig. 142) l'asse, a il raggio della sezione cilindrica del conduttore interno, b, c i raggi interno ed esterno del conduttore tubulare; la zona cilindrica di grossezza $b - a$ è occupata dal coibente.

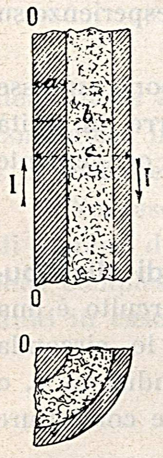

Fig. 142.

Quando il conduttore interno è percorso da una corrente I, una corrente uguale ed opposta percorre il conduttore esterno.

Supponiamo anzitutto che la corrente sia distribuita in modo uniforme nella sezione del conduttore.

Per semplice ragione di simmetria nel campo magnetico generato da tale sistema le linee di forza e d'induzione sono circonferenze aventi il centro sull'asse $O\,O$, disposte in piani normali all'asse. La forza e l'induzione magnetica hanno valori costanti lungo ognuna di queste circonferenze.

L'integrale della forza magnetica lungo l'intera circonferenza di raggio x è (9) [100]

$$\mathcal{H} \, . \, 2\pi x = 4\pi i:$$

da cui si ricava il valore della forza $\mathcal{H}$, nei punti della circonferenza:

$$\mathcal{H} = \frac{2\,i}{x}.$$

In queste espressioni i indica l'intensità totale della corrente che passa entro al cerchio considerato; perciò il valore di $\mathcal{H}$ è indipendente dalla corrente che passa fuori del cerchio.

Per un punto qualunque esterno al cavo si ha $i = I - I = 0$, e quindi $\mathcal{H} = 0$; è cioè nullo il campo.

Lungo il cerchio di raggio x l'induzione magnetica ha il valore

$$\mathcal{B} = \mu\, \mathcal{H} = \frac{2\,\mu\, i}{x}.$$

Se a distanza x dall'asse $O\,O$, e in un piano passante per l'asse consideriamo un rettangolo infinitesimo, avente per lati la lunghezza l del canapo, e $d\,x$, il flusso d'induzione magnetica che lo attraversa è

$$\mathcal{B}\, l\, d\,x = 2\,\mu\, l\, i\, \frac{d\,x}{x};$$

e perciò il flusso totale generato dalla corrente è

$$\varphi = 2\,l \int_0^c \mu\, i\, \frac{d\,x}{x}.$$

Calcoliamo separatamente le parti dell'integrale corrispondenti al conduttore interno, allo strato isolante ed al conduttore esterno.

Nel conduttore interno si ha $x < a$; le due correnti i, I stanno fra loro come le aree dei cerchi di raggi x ed a, cioè $i = I\, \frac{x^2}{a^2}$; si ha perciò:

$$\int_0^a \mu\, i\, \frac{d\,x}{x} = \frac{\mu\, I}{a^2} \int_0^a x\, d\,x = \frac{\mu}{2}\, I.$$

Nel coibente $i = I$, $\mu = 1$,

$$\int_a^b \mu\, i\, \frac{d\,x}{x} = I \log \frac{b}{a}.$$

Infine nel conduttore esterno i è la differenza fra la corrente I nel conduttore interno e la corrente opposta nella porzione di conduttore esterno compresa entro al cerchio di raggio x. Questa corrente sottrattiva e la corrente totale I nel conduttore esterno, stanno fra loro come le aree delle corone circolari comprese rispettivamente fra i raggi b ed x e fra b e c. Si ha cioè:

$$i = I - I\frac{x^2 - b^2}{c^2 - b^2} = I\frac{c^2 - x^2}{c^2 - b^2};$$

di più la μ ha lo stesso valore costante che nel conduttore interno. Per ciò:

$$\int_b^c \mu i \frac{dx}{x} = \frac{\mu I}{c^2 - b^2}\int_b^c \frac{c^2 - x^2}{x}\, dx = \frac{\mu I c^2}{c^2 - b^2}\log\frac{c}{b} - \frac{\mu}{2} I.$$

Sommando i varii termini e riducendo si ricava:

$$\varphi = 2\, l I\left[\log\frac{b}{a} + \mu\frac{c^2}{c^2 - b^2}\log\frac{c}{b}\right].$$

Il flusso prodotto da una corrente unità, cioè l'induttanza del sistema è dunque

$$L' = 2\, l\left[\log\frac{b}{a} + \mu\frac{c^2}{c^2 - b^2}\log\frac{c}{b}\right].$$

Si ha così il valore dell'induttanza nel caso in cui la corrente sia uniformemente distribuita, ed è questo il valore massimo che essa può assumere.

Il valore limite inferiore dell'induttanza si ottiene quando la corrente sia concentrata in strati sottilissimi periferici. Se supponiamo che il circuito si riduca a due strati infinitesimi di raggi a, b, eseguendo il calcolo in modo analogo a quello fatto poc'anzi, si trova il valore dell'induttanza

$$L'' = 2\, l \log\frac{b}{a}\cdot$$

Tutti i possibili valori dell'induttanza sono compresi fra i valori L', L''; si può come valore pratico assumere la media di questi due

$$L = 2\,l\left[\log\frac{b}{a} + \frac{\mu}{2}\,\frac{c^2}{c^2 - b^2}\log\frac{c}{b}\right].$$

2° *Cavo concentrico costituito da due conduttori tubolari coassiali.* — indichiamo con a_0, a; b, c (fig. 143) rispettivamente i raggi interno ed esterno del conduttore interno e dell'esterno.

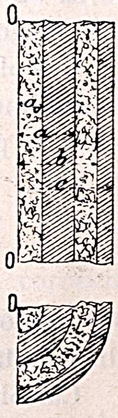

Fig. 143.

Trattando questo caso come il precedente si ricava che il valore massimo dell'induttanza corrispondente ad una corrente uniformemente distribuita è

$$L' = 2\,l\left[\log\frac{b}{a} + \mu\left(\frac{c^2}{c^2 - b^2}\log\frac{c}{b} - \frac{a_0^{\,2}}{a^2 - a_0^{\,2}}\log\frac{a}{a_0}\right)\right];$$

il valore minimo dell'induttanza, per correnti concentrate in due strati di raggi b, a, è

$$L'' = 2\,l\log\frac{b}{a};$$

il loro valore medio è

$$L = 2\,l\left[\log\frac{b}{a} + \frac{\mu}{2}\left(\frac{c^2}{c^2 - b^2}\log\frac{c}{b} - \frac{a_0^{\,2}}{a^2 - a_0^{\,2}}\log\frac{a}{a_0}\right)\right].$$

3° *Circuito costituito da due conduttori paralleli.* — Indichiamo con a, a' il raggio dei due conduttori (figura 144), con b la distanza dei loro assi.

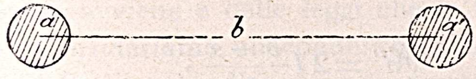

Fig. 144.

Qualunque sia la distribuzione della corrente nei conduttori, supponiamo che essa sia ancora simmetrica rispetto ai singoli assi, per modo che la forza magnetica in un punto prodotta da una delle correnti sia data da $\frac{2\,i}{x}$.

Nel campo prodotto dal complesso delle due correnti la forza $\mathcal{H}$ in un punto è la risultante delle forze $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$ dovute alle singole correnti.

Calcoliamo il flusso φ, concatenato col circuito, che attraversa normalmente una porzione di lunghezza l nel piano dei due assi. Se per semplicità riteniamo $\mu = 1$ in tutto il campo si ha:

$$\varphi = l \int_0^b \mathcal{H}\, d\,x = l \int_0^b \mathcal{H}'\, d\,x + l \int_0^b \mathcal{H}''\, d\,x.$$

Supponiamo dapprima che la corrente sia uniformemente distribuita.

Calcoliamo separatamente le varie parti dell'integrale, fra i limiti zero ed a nel 1° conduttore; fra a e $b - a'$ nel dielettrico, fra $b - a'$ e b nel secondo conduttore.

Per $x < a$ si ha:

$$\mathcal{H}' = 2\,I \frac{x}{a^2}, \qquad \mathcal{H}'' = \frac{2\,I}{b - x},$$

onde:

$$\int_0^a \mathcal{H}\, d\,x = 2\,I \left[\frac{1}{2} + \log \frac{b}{b - a}\right].$$

Per $a < x < b - a'$ si ha:

$$\mathcal{H}' = \frac{2\,I}{x}, \qquad \mathcal{H}'' = \frac{2\,I}{b - x},$$

onde:

$$\int_a^{b - a'} \mathcal{H}\, d\,x = 2\,I \left[\log \frac{b - a'}{a} + \log \frac{b - a}{a'}\right].$$

Per $b - a' < x < b$ si ha:

$$\mathcal{H}' = \frac{2\,I}{x}, \qquad \mathcal{H}'' = 2\,I \frac{b - x}{a'^2},$$

onde:

$$\int_{b - a'}^{b} \mathcal{H}\, d\,x = 2\,I \left[\frac{1}{2} + \log \frac{b}{b - a'}\right].$$

Sommando i varii termini e riducendo:

$$\varphi = 2\, l\, I\left[\log\frac{b^2}{a\, a'} + 1\right];$$

il valore massimo dell'induttanza è dunque

$$L' = 2\, l\left[\log\frac{b^2}{a\, a'} + 1\right].$$

Il valore minimo dell'induttanza si ha quando la corrente sia localizzata in uno strato infinitesimo alla superficie dei conduttori. Si ricava in questa ipotesi con calcolo analogo:

$$L'' = 2\, l \log\frac{b^2}{a\, a'}.$$

Come valore pratico si può assumere la media dei due

$$L = 2\, l\left(\log\frac{b^2}{a\, a'} + \frac{1}{2}\right).$$

128. – Fenomeno dello "skin-effect". Equazioni di Lord Kelvin. Aumento della resistenza ohmica del conduttore. — Abbiamo già osservato che una corrente alternativa non si distribuisce in modo uniforme su tutta la sezione del conduttore; conviene che ci rendiamo conto del modo in cui questo fenomeno avviene e delle leggi che lo regolano.

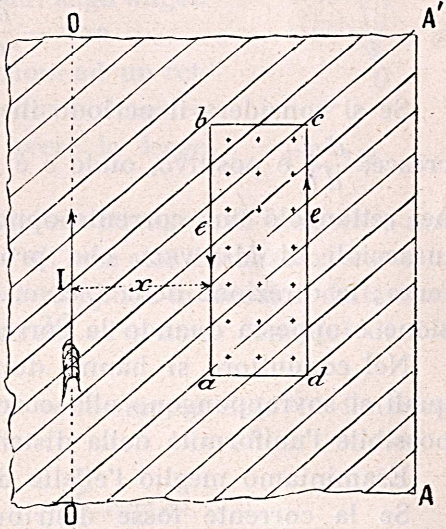

Fig. 145.

Consideriamo un conduttore cilindrico a sezione circolare di grande diametro percorso da corrente alternativa, e rappresentiamone nella fig. 145 una sezione meridiana. Quando la corrente è diretta dal basso all'alto, il campo magnetico da essa generato è, alla destra dell'asse $O\,O$, diretto dal davanti al di dietro del piano di figura. Se nelle vicinanze non esistono altri conduttori che disturbino la simmetria del sistema, le linee d'induzione sono circonferenze poste in piani normali all'asse, aventi il centro sull'asse, e situate sia all'esterno sia all'interno del conduttore.

In tutti i punti di una di queste circonferenze, entro la quale passa una porzione i di corrente, la forza magnetica ha lo stesso valore $\mathcal{H} = \frac{2i}{x}$.

Nel piano di figura consideriamo un rettangolo $a\,b\,c\,d$ avente i lati $a\,b$, $d\,c$ paralleli all'asse; in un dato istante esso è attraversato da un flusso magnetico φ; al variare della corrente varia l'intensità del campo generato; varia ancora il flusso φ entro al rettangolo, il quale è perciò sede di una f. e. m.

$$e = -\frac{d\,\varphi}{d\,t}.$$

Se si considera il periodo in cui la corrente cresce anche φ cresce, $\frac{d\,\varphi}{d\,t}$ è positivo, onde e è negativo, cioè tende a produrre nel rettangolo una corrente opposta al moto rotatorio del cavaturaccioli di MAXWELL che proceda nel senso delle linee di forza; la direzione della f. e. m. è quella delle freccie e; la direzione è opposta quando la corrente diminuisce.

Nel conduttore si hanno dunque delle correnti indotte, le quali si sovrappongono alla corrente principale e rendono impossibile l'uniformità della distribuzione.

Esaminiamo meglio l'effetto di queste f. e. m. d'induzione.

Se la corrente fosse distribuita in modo uniforme tra i punti a e b, e fra d e c si avrebbe una stessa differenza di potenziale, che possiamo rappresentare col vettore $O\,V$ (fig. 146) in precedenza di fase rispetto alla corrente $O\,I$. A questa differenza di potenziale, però, si aggiungono le f. e. m. d'induzione dianzi considerate, le quali hanno la stessa fase di $\frac{d\,\varphi}{d\,t}$, ossia di $\frac{d\,i}{d\,t}$, ed hanno sui due lati $a\,b$, $d\,c$ direzioni opposte, sono cioè rappresentate da due vettori $O\,E$, $O\,E'$ opposti, normali ad $O\,I$.

Sono pertanto diverse le differenze di potenziale fra d e c

e fra a e b rispettivamente rappresentate dal vettore $O\,V_1$, risultante di $O\,V$ e di $O\,E$, e dal vettore $O\,V_1'$ risultante di $O\,V$ e di $O\,E'$; ed è sempre $O\,V_1 > O\,V > O\,V_1'$, perchè a causa del ritardo di fase di I rispetto a V l'angolo $V\,O\,E$ è sempre acuto, mentre $V\,O\,E'$ è ottuso.

Ne risulta che le differenze di potenziale e quindi anche la densità di corrente vanno crescendo dall'asse verso la periferia. Quest'effetto è tanto maggiore quanto maggiori sono il diametro e la frequenza; questa influisce non solo sulle variazioni del flusso e quindi sulle f. e. m. indotte, ma ancora sulla differenza di fase fra V ed I, e quindi sugli angoli $V\,O\,E$, $V\,O\,E'$.

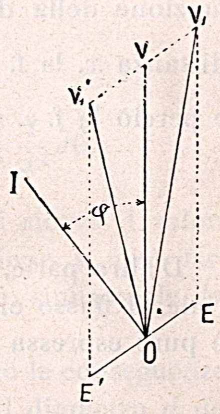

Fig. 146.

Riferendo queste considerazioni ad un rettangolo infinitesimo potremo tradurre il nostro ragionamento in formule, ed avere la legge matematica del fenomeno.

In una sezione meridiana sia un rettangolo di lunghezza *uno* compreso fra due rette parallele all'asse alle distanze x, $x + d\,x$.

Siano $\mathcal{H}$ ed u l'intensità del campo e la densità della corrente alla distanza x dall'asse; $\mathcal{H}$ ed u sono funzioni di x e del tempo t.

L'intensità del campo, come vedemmo, è data in funzione di x dalla relazione

$$\mathcal{H} = \frac{2\,i}{x}, \qquad \mathcal{H}\,x = 2\,i.$$

Derivando rispetto ad x:

$$x\,\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \mathcal{H} = 2\,\frac{\partial i}{\partial x}.$$

Ora $\frac{\partial i}{\partial x}\,d\,x$ è la corrente che passa entro alla corona circolare di raggi x, $x + d\,x$, perciò a meno di infinitesimi di secondo ordine:

$$\frac{\partial i}{\partial x} = 2\,\pi\,u\,x;$$

sostituendo:

$$(\alpha) \qquad x \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} + \mathcal{H} = 4 \pi u x.$$

La f. e. m. d'induzione che agisce sui lati del rettangolo è funzione della distanza dall'asse; detta e la f. e. m. sul lato a distanza x, la f. e. m. opposta sul secondo lato è $e + \frac{\partial e}{\partial x} d x$, e perciò la f. e. m. che agisce sul perimetro del rettangolo è

$$\frac{\partial e}{\partial x} d x.$$

D'altra parte, detta μ la permeabilità magnetica del materiale, il flusso entro al rettangolo è $\mu \mathcal{H} d x$, e perciò la f. e. m. è pure espressa da

$$\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} d x.$$

Uguagliando le due espressioni della f. e. m. si ricava:

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}.$$

In queste relazioni si deve prendere come direzione positiva di e quella della corrente I, quando si assuma come direzione positiva di $\mathcal{H}$ quella del flusso generato dalla corrente.

Detta ϱ la resistenza specifica del materiale di cui è fatto il conduttore si ha

$$e = \varrho u,$$

e se si suppone il conduttore omogeneo, cioè ϱ indipendente da x

$$\frac{\partial e}{\partial x} = \varrho \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Sostituendo:

$$(\beta) \qquad \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = \frac{\varrho}{\mu} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Nelle due equazioni (α), (β) figurano simultaneamente le derivate parziali di $\mathcal{H}$ e di u.

Si possono facilmente da queste ricavare due altre equazioni, l'una alle derivate parziali di u, l'altra alle derivate parziali di $\mathcal{H}$:

$$(\gamma) \quad \begin{cases} 4\pi \dfrac{\mu}{\varrho} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x} \dfrac{\partial u}{\partial x}, \\[2ex] 4\pi \dfrac{\mu}{\varrho} \dfrac{\partial \mathcal{H}}{d t} = \dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial x^2} + \dfrac{1}{x} \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - \dfrac{1}{x^2} \mathcal{H}. \end{cases}$$

Dall'integrazione di queste due equazioni si ricava il valore di u e di $\mathcal{H}$ in funzione di x; quest'integrazione si può fare facilmente tanto più se si suppone u funzione sinusoidale del tempo.

Senza sviluppare questi calcoli ne ricorderemo le conseguenze.

Quando la frequenza n della corrente ed il diametro d del conduttore hanno valori notevoli, è massima la densità della corrente presso alla superficie, praticamente nulla sull'asse ed a certa distanza da esso, tanto che per grandissimi valori di n e di d si può ritenere la corrente localizzata in un piccolo strato periferico. A questo fenomeno si dà il nome di *skin-effect* (*effetto della pelle*).

In un conduttore percorso da corrente alternativa di grande frequenza la porzione interna non giova al passaggio della corrente; la sezione non è bene utilizzata. La resistenza ohmica R_a che esso oppone al passaggio della corrente è perciò maggiore di quella che opporrebbe quando tutta la sua sezione fosse utilizzata, è maggiore cioè della resistenza R_c che lo stesso conduttore oppone ad una corrente continua. Questa distribuzione non uniforme della corrente produce anche un aumento del calore sviluppato nel conduttore per effetto Joule.

E difatti consideriamo l'unità di lunghezza di un conduttore omogeneo di resistività ϱ. Se $d\,S$ è l'area della zona circolare compresa fra i raggi x, $x + d\,x$, la corrente nella zona è $u\,d\,S$; la resistenza della porzione corrispondente di conduttore è $\varrho \dfrac{1}{d\,S}$

e perciò il calore che in esso si sviluppa è

$$\varrho\, u^2\, d\, S\,.$$

Si ha dunque nel conduttore una corrente

$$I = \int u\, d\, S,$$

che si sviluppa una quantità di calore

$$Q_a = \varrho \int u^2\, d\, S.$$

La resistenza ohmica R_a che il conduttore oppone alla corrente alternativa è il rapporto fra il calore sviluppato per effetto Joule, ed il quadrato dell'intensità della corrente, cioè:

$$R_a = \frac{Q_a}{I^2} = \varrho \frac{\int u^2\, d\, S}{[\int u\, d\, S]^2}\,.$$

Per una stessa intensità di corrente il denominatore è costante, invece il numeratore varia secondo la distribuzione di u, ed è minimo per u uniforme. Quindi la resistenza R_a ha sempre un valore superiore a quello che avrebbe per una corrente distribuita uniformemente.

Dall'espressione trovata di R_a si può ricavare il rapporto

$$\kappa = \frac{R_a}{R_c}$$

fra la resistenza R_a che il conduttore oppone alla corrente alternativa, e la resistenza R_c calcolata colla legge di Ohm, che lo stesso conduttore oppone ad una corrente continua.

Lord Kelvin diede un'espressione di K in funzione del quadrato del diametro d del conduttore e della frequenza n della corrente alternativa.

Nella seguente tabella, calcolata dal sig. Hospitalier per mezzo della formula di lord Kelvin, sono riuniti per diversi valori di $n\, d^2 = \frac{d^2}{T}$ (d essendo espresso in cm) i corrispondenti valori di K, cioè del coefficiente per cui si deve moltiplicare la resistenza calcolata colla legge di OHM, per avere la resistenza che il conduttore effettivamente oppone al passaggio della corrente alternativa.

$n\,d^2 = \frac{d^2}{T}$	$K = \frac{R_a}{R_c}$	$n\,d^2 = \frac{d^2}{T}$	$K = \frac{R_a}{R_c}$
0	1.0000	1 620	1.8628
20	1.0000	2 000	2.0430
80	1.0001	2 420	2.2190
180	1.0258	2 880	2.3937
320	1.0805	5 120	3.0956
500	1.1747	8 000	3.7940
720	1.3180	18 000	5.5732
980	1.4920	32 000	7.3250
1 280	1.6778	—	—

Per valori di $\frac{d^2}{T} > 32000$ la resistenza R_a si può calcolare approssimativamente ritenendola uguale a quella che si calcola colla legge di OHM per un conduttore a forma di crosta cilindrica, avente per diametro esterno quello della sezione del conduttore effettivo e per grossezza $6.38\sqrt{T}$ cm.

I valori di K dianzi riportati si riferiscono al caso in cui il conduttore sia di rame puro presentante la massima conduttività ($\varrho = 1.597$); se il conduttore è d'altro metallo, purchè non magnetico, il valore di K è quello della tabella moltiplicato per la conduttività del metallo di cui si tratta rispetto al rame.

Se il conduttore è formato di materiale magnetico, ad esempio di ferro, la tabella non serve affatto, perchè il fenomeno prende proporzioni completamente diverse secondo i valori della permeabilità magnetica.

Dall'esame dei numeri riportati risulta che negli impianti industriali, nei quali il diametro dei conduttori raramente supera 1 cm., non si ha assolutamente a tenere conto dei fenomeni di *skin-effect*, colle frequenze normali di 40 o 50; solo può già risentirsene l'effetto per le maggiori frequenze usate di circa 100.

Intanto però importa notare come per grandi frequenze e per sezioni di grande diametro, l'effetto dell'alternatività della corrente non si riduce solo ad introdurre una resistenza induttiva, ma produce anche un aumento della resistenza metallica; la resistenza induttiva influisce solo sulla caduta di potenziale prodotta lungo la linea, ma non sulla quantità di calore sviluppato; invece lo skin-effect produce una maggiore dissipazione di energia per effetto Joule a causa della localizzazione della corrente nella parte periferica del conduttore.

---

§ 3°.

CORRENTI DI SCARICA DEI CONDENSATORI.

129. – Equazioni di Lord Kelvin. — Oltre alle correnti alternative che abbiamo studiate hanno importanza altre correnti variabili, e precisamente le correnti di scarica dei condensatori.

Siano: C la capacità di un condensatore; r la resistenza ohmica del conduttore che stabilisce la comunicazione fra le due armature A, B; L il coefficiente di selfinduzione che supponiamo costante, ritenendo che in vicinanza del conduttore non vi siano corpi magnetici; Q la quantità di elettricità contenuta su una armatura prima che incominci la scarica, e q il valore a cui si riduce la carica alla fine del tempo t; i, v_1, v_2, $v = v_1 - v_2$ rispettivamente i valori dell'intensità della corrente, dei potenziali sulle armature e della loro differenza alla fine del tempo t,

La legge di Ohm applicata al circuito $A\,r\,B$ fra le due armature ci dà:

$$(\alpha) \qquad v - L\frac{d\,i}{d\,t} = r\,i;$$

la carica q nell'istante t è

$$(\beta) \qquad q = C\,v\,;$$

infine la corrente di scarica nello stesso istante è:

$$(\gamma) \qquad i = -\frac{d\,q}{d\,t}.$$

Queste tre equazioni determinano una qualunque delle grandezze q, i, v in funzione del tempo.

Per ottenere q si eliminino i, v nella (α) per mezzo delle (β) e (γ); si ottiene così:

$$(16) \qquad \frac{d^2\,q}{d\,t^2} + \frac{r}{L}\,\frac{d\,q}{d\,t} + \frac{1}{C\,L}\,q = 0.$$

Un integrale particolare di questa equazione differenziale di 2° grado ci è dato da

$$(\delta) \qquad q = A\,e^{\kappa t},$$

nella quale A è una costante arbitraria, κ una costante da determinarsi.

Derivando la (δ) si ha

$$\frac{d\,q}{d\,t} = \kappa\,A\,e^{\kappa t} = \kappa\,q, \qquad \frac{d^2\,q}{d\,t^2} = \kappa^2\,q.$$

Sostituendo tali valori nella (16):

$$q\left(\kappa^2 + \frac{r}{L}\,\kappa + \frac{1}{C\,L}\right) = 0.$$

Dovendo questa uguaglianza essere verificata per ogni valore di q, κ deve soddisfare alla relazione:

$$(\varepsilon) \qquad \kappa^2 + \frac{r}{L}\,\kappa + \frac{1}{C\,L} = 0,$$

dalla quale si ricavano i due valori seguenti di κ:

$$\kappa_1 = -\frac{r}{2L} + \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}$$

$$\kappa_2 = -\frac{r}{2L} - \sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}.$$

In corrispondenza di questi valori di κ si hanno i due integrali particolari della (16)

$$(\delta') \qquad \begin{cases} q = A\, e^{\kappa_1 t} \\ q = B\, e^{\kappa_2 t} \end{cases}$$

in cui A, B sono due costanti arbitrarie.

La somma dei due integrali (δ')

$$(17) \qquad \begin{cases} q = A\, e^{\kappa_1 t} + B\, e^{\kappa_2 t} \\ q = e^{-\frac{r}{2L}t}\left[A\, e^{t\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}} + B\, e^{-t\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}}\right] \end{cases}$$

è ancora un integrale dell'equazione (16), anzi è l'integrale generale, perchè le due costanti si possono determinare in modo che a un dato valore di t corrispondano dati valori di q e di $\frac{dq}{dt}$. Difatti al tempo zero la carica ha il valore Q e la corrente il valore *zero*, deve quindi essere per $t = 0$,

$$q = Q, \qquad i = 0, \qquad \frac{dq}{dt} = 0.$$

Perciò ponendo $t = 0$ nella (17) e nella sua derivata avremo:

$$A + B = Q$$

$$\kappa_1 A + \kappa_2 B = 0,$$

da cui

$$(\eta) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{\kappa_2}{\kappa_2 - \kappa_1} Q \\ B &= -\frac{\kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} Q, \end{aligned} \right.$$

e sostituendo a κ_1, κ_2 i loro valori

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= \frac{Q}{2}\left[1 + \frac{r}{2L}\frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}}\right] \\ B &= \frac{Q}{2}\left[1 - \frac{r}{2L}\frac{1}{\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}}}\right]. \end{aligned} \right.$$

130. - Scarica aperiodica e scarica oscillante. — Si devono distinguere diversi casi secondo i valori della grandezza $\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}$ posta sotto radicale.

1° caso. — Il radicale è reale, cioè

$$\frac{r^2}{4L^2} > \frac{1}{CL}, \qquad r^2 > \frac{4L}{C}.$$

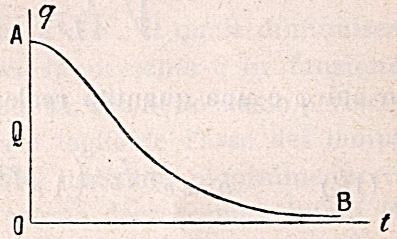

Fig. 147.

Consideriamo la curva avente per ascisse i tempi e per ordinate i valori corrispondenti di q (fig. 147). Per $t = 0$ si ha $q = Q$; a curva parte da un punto di ordinata $OA = Q$. Nel punto A la tangente alla linea è parallela all'asse dei tempi perchè per $t = 0$, $\frac{dq}{dt} = 0$. In seguito crescendo t l'ordinata diminuisce più o meno rapidamente, secondo il valore del rapporto $\frac{r}{L}$, e il suo valore non si annulla che per $t = \infty$: la curva è assintotica all'asse dei tempi.

In questo caso $\frac{dq}{dt}$ è sempre negativo, e quindi $i = -\frac{dq}{dt}$ è sempre positivo, cioè la corrente di scarica si fa sempre nello stesso verso. Teoricamente essa si annulla solo dopo un tempo infinito; praticamente cessa di essere sensibile dopo un tempo brevissimo.

2° *caso.* — Il radicale è immaginario, cioè:

$$\frac{r^2}{4L^2} < \frac{1}{CL}, \qquad r^2 < \frac{4L}{C}.$$

La legge del fenomeno è allora affatto diversa. Per comodità di scrittura poniamo

$$\varphi = \sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{r^2}{4L^2}},$$

ossia

$$\sqrt{\frac{r^2}{4L^2} - \frac{1}{CL}} = \varphi\sqrt{-1},$$

in cui φ è una quantità reale. La (17) si può allora scrivere

$$(17') \qquad q = e^{-\frac{r}{2L}t}\left(A\,e^{t\varphi\sqrt{-1}} + B\,e^{-t\varphi\sqrt{-1}}\right).$$

Questa espressione ci rappresenta una funzione periodica del tempo, perchè gli esponenziali sono funzioni trigonometriche circolari:

$$e^{t\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi t + \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi t$$

$$e^{-t\varphi\sqrt{-1}} = \cos\varphi t - \sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi t.$$

Sostituendo si ha

$$q = e^{-\frac{}{2L}}\left[(A+B)\cos\varphi t + (A-B)\sqrt{-1}\,\mathrm{sen}\,\varphi t\right],$$

e poichè dalle (η) si ricava:

$$A + B = Q$$

$$A - B = \frac{r}{2L} \frac{1}{\varphi \sqrt{-1}} Q,$$

si ha ancora:

$$(17'') \qquad q = Q e^{-\frac{r}{2L}t} \left(\cos \varphi t + \frac{r}{2L\varphi} \operatorname{sen} \varphi t\right),$$

nella quale il coefficiente di sen φt entro parentesi è una grandezza reale.

Pertanto q è espresso da una funzione trigonometrica moltiplicata per una funzione esponenziale. Se non esistesse il fattore $e^{-\frac{r}{2L}t}$, q sarebbe rappresentato dalla sinusoide

$$(19) \qquad q = Q (\cos \varphi t + \frac{r}{2L\varphi} \operatorname{sen} \varphi t),$$

cioè il condensatore assumerebbe successivamente e periodicamente cariche uguali ed opposte; ma le ordinate della sinusoide si devono moltiplicare per il fattore $e^{-\frac{r}{2L}t}$, il quale diminuisce col crescere di t. La curva che ci rappresenta q in funzione del tempo è dunque una linea sinuosa, avente lo stesso periodo della sinusoide dianzi considerata e tagliante l'asse dei tempi negli stessi punti. Le sue ordinate massime e minime però anzichè avere un valore costante, vanno decrescendo. Infatti le ascisse corrispondenti ai massimi sono date da

$$\cos \varphi t + \frac{r}{2L\varphi} \operatorname{sen} \varphi t = \pm 1$$

a cui corrispondono le ordinate $q = \pm Q e^{-\frac{r}{2L}t}$. Se rappresentiamo in $a\,b$, $a'\,b'$ (fig. 148) le due curve, simmetriche rispetto all'asse dei tempi, di equazione $q = \pm Q e^{-\frac{r}{2L}t}$, le quali partono dai punti a, a' di ordinata Q e vanno avvicinandosi assintoticamente all'asse $O\,t$, la linea che ci rappresenta i valori effettivi di q nella scarica è la $a\,m\,n\,r\,a_1 ...$, serpeggiante attorno all'asse $O\,t$, ed avente i massimi sulle due curve $a\,b$, $a'\,b'$.

La derivata $\frac{d\,q}{d\,t}$ è alternativamente positiva e negativa, e quindi i è ancora dato da una curva sinuosa, i cui massimi però vanno decrescendo.

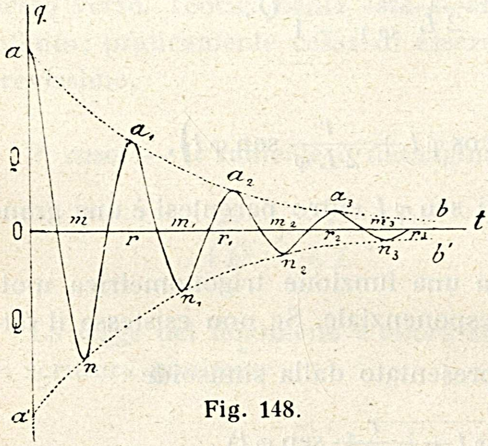

Fig. 148.

In questo caso il condensatore non si scarica gradatamente dal valore Q a zero, ma, avvenuta una prima scarica, prende una carica opposta, alla quale succede una seconda scarica, che dà luogo ad una nuova carica nel senso primitivo, e così di seguito. Le successive cariche hanno valori decrescenti. Teoricamente il fenomeno si protende sino all'infinito; praticamente dopo un tempo brevissimo le cariche cessano di essere sensibili.

Si dice che si ha in tal caso una *scarica oscillante,* e si ha infatti una continua oscillazione di elettricità fra l'una e l'altra armatura del condensatore.

Possiamo facilmente renderci conto del diverso modo in cui avviene la scarica di un condensatore secondo le diverse condizioni del circuito, se noi ci riferiamo a fenomeni meccanici analoghi. Consideriamo, ad esempio, una molla tesa; essa si trova in uno stato forzato e sviluppa delle reazioni elastiche, per azione delle quali tende a ritornare alla posizione di equilibrio, quando venga abbandonata a sè. Se la molla è posta in un mezzo che opponga al suo movimento una resistenza sufficientemente grande, per modo che l'energia prima accumulata e che ora si sviluppa, sia in gran parte spesa nel lavoro necessario a vincere la resistenza, la molla non acquista forza viva apprezzabile, e si avvicina grado grado alla posizione di equilibrio. Ma se il mezzo oppone una resistenza piccolissima, è piccolo il lavoro necessario a vincerla, la molla acquista una notevole forza viva, arriva nella posizione di equilibrio con una certa velocità, la oltrepassa, e si deforma in senso opposto fino a che le forze elastiche non abbiano consumato un lavoro uguale alla forza viva posseduta dalla molla, fino a che cioè questa forza viva non si sia tutta trasformata nell'energia potenziale della molla deformata; per effetto della quale si ripetono gli stessi fenomeni in senso inverso.

In modo perfettamente analogo il dielettrico di un condensatore carico è soggetto a reazioni elastiche, e ci rappresenta al pari di una molla deformata un'energia potenziale; nell'atto della scarica, se la resistenza del circuito è grande, tale energia viene tutta o quasi tutta consumata per effetto Joule, e la carica del condensatore si annulla. Se invece la resistenza è piccola è anche piccola l'energia dissipata in calore, la massima parte dell'energia potenziale del condensatore si trasforma in energia magnetica intrinseca della corrente di scarica, per effetto della quale energia, anche dopo scaricato il condensatore, continua la corrente, che ricarica il condensatore in senso opposto, sino a che l'energia cinetica della corrente non si sia di nuovo trasformata nell'energia potenziale del condensatore. Questa nuova carica produce poi gli stessi fenomeni per verso contrario.

Nel caso meccanico a parità di resistenze passive le oscillazioni sono tanto maggiori quanto maggiori sono l'elasticità e la massa o l'inerzia della molla; nella scarica del condensatore sono grandi le oscillazioni se è grande L a fronte di r.

Il periodo e la frequenza della scarica coincidono con il periodo e con la frequenza della grandezza sinusoidale espressa dalla (19). Confrontando tale espressione con quella generale di una grandezza sinusoidale ne risulta che

$$\varphi = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}$$

onde

$$n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{r^2}{4L^2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{CL} - \frac{r^2}{4L^2}}}.$$

La frequenza della scarica dipende dai valori di C, L, r, e si potrà far variare a piacimento variando la capacità del condensatore o l'induttanza e la resistenza del circuito.

A pari valori di C e di L, la frequenza cresce col diminuire di r; dati C ed L si ha il massimo di n per $r=0$; tale massimo è

$$n=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{CL}}.$$

Per $r=0$ si ha $\frac{r}{2L\varphi}=0$, $e^{-\frac{r}{2L}t}=1$; per cui la curva che rappresenta q si riduce ad una vera sinusoide di equazione:

$$q=Q\cos\varphi t.$$

Ciò significa che una volta stabilita nel circuito una corrente, questa può continuare indefinitamente da sè, senza che agisca sul circuito alcuna f. e. m.; siamo quindi nel caso già più volte considerato dei risuonatori; e difatti il valore di n testè scritto soddisfa all'equazione (13) di condizione. Vediamo qui come un modo di stabilire la corrente in principio è quello di dare una prima carica al condensatore.

Dato il valore di r si potrà sempre stabilire l'induttanza del circuito di scarica e la capacità del condensatore per modo che la scarica sia oscillante, ed abbia la frequenza che si vuole. Teoricamente n può variare in modo qualsiasi da *zero* ad ∞, ma praticamente i valori di n sono limitati dai valori che si possono dare ad r, L, C; anche nella pratica però si possono ottenere scariche di grandissima frequenza. Così Oliver Lodge ottenne nelle sue esperienze frequenze variabili fra 5.10^2 e 10^8; Enrico Hertz potè produrre oscillazioni con frequenze di oltre 6.10^8; il prof. Righi ottenne in seguito anche frequenze di 11.10^8, e attualmente le maggiori frequenze raggiunte nelle scariche sono di 5.10^{10}.

Ad ottenere piccole capacità e quindi grandi frequenze Hertz usava semplici conduttori aperti: ad esempio due conduttori cilindrici affacciati, o due semplici fili portanti alle estremità opposte piccole laminette.

131. – Proprietà delle correnti di scarica. Parafulmini. Correnti di Tesla. — In generale nelle correnti di scarica la frequenza è molto superiore a quella delle correnti alternative usate nella pratica industriale; nelle correnti di scarica si devono per ciò ancora manifestare tutti i fenomeni dovuti all'alternatività della corrente, i quali anzi si manifestano in modo assai più saliente. Lo *skin-effect*, o localizzazione della corrente alla superficie dei conduttori, qui ha sempre grande importanza anche per conduttori di piccolo diametro; esso è tale che la corrente si trasmette solo in un piccolo straterello alla superficie; la porzione interna non è utilizzata, cosicchè senza aumentare la resistenza si potrebbe ad un conduttore massiccio sostituire un tubo a pareti sottilissime.

La resistenza che in tal caso il conduttore presenta è di molto superiore a quella che si calcolerebbe colla legge di OHM; sulla resistenza metallica influisce assai più la frequenza che non la resistività del metallo. Anche la resistenza induttiva $\lambda = 2\pi n L$ cresce col crescere della frequenza, cosicchè la resistenza complessiva opposta dal conduttore al passaggio della corrente, alla quale il LODGE dà ancora il nome di *impedenza*, può avere valori grandissimi per grandi valori della frequenza.

Il LODGE stabilì a conferma di ciò una serie di esperienze elementari; ci basta citare la seguente:

Si colleghino i due poli *A*, *B* (figura 149) di una macchina elettrostatica colle armature interne di due bottiglie di LEYDA, le cui armature esterne siano collegate alle due sferette *a*, *b* affacciate di uno spinterometro. Quando si ha una scarica fra *A* e *B*, si ha pure una scarica fra *a* e *b*. L'esperienza prova che si mantiene ancora una viva scintilla fra *a* e *b*, anche quando le due armature esterne si fanno comunicare direttamente per mezzo di un filo *R* metallico, di piccolissima resistenza ohmica mentre fra *a* e *b* si ha uno spazio d'aria. Poichè la corrente si divide nei due circuiti derivati *R* ed *a b* in parti inversamente proporzionali alle impedenze, questa esperienza ci prova che l'impedenza del filo *R* è di molto maggiore della resistenza grandissima del circuito interrotto *a b*.

Per grandi frequenze sulla impedenza influisce pochissimo la resistenza specifica del metallo, di cui il conduttore è composto, ed influisce invece la permeabilità magnetica, dalla quale dipende l'induttanza e quindi la resistenza induttiva del circuito. Devesi però notare che, in generale, aumentando la induttanza si aumenta la durata del periodo ossia si diminuisce la frequenza della scarica; ad una diminuzione della frequenza corrisponde una diminuzione dello *skin-effect*, e della resistenza induttiva, cosicchè può darsi che la impedenza risulti minore usando un conduttore formato da materiele magnetico.

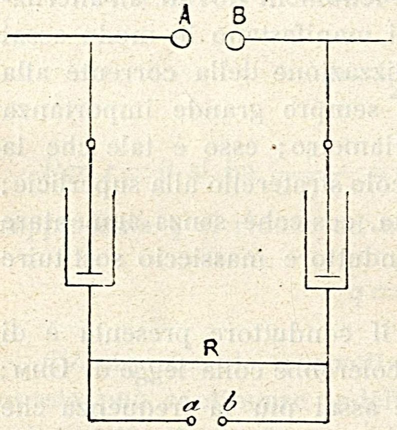

Fig. 149.

Il fenomeno è sempre assai complesso, e non è possibile, a meno di uno studio accuratissimo, trovare i rapporti delle impedenze di due circuiti diversi per forma, dimensioni e sostanza, quando siano attraversati dalla corrente di scarica di un condensatore.

Le considerazioni ora fatte hanno grande importanza nelle scariche del fulmine. Una scarica di fulmine è paragonabile alla scarica di un condensatore, di cui le armature sono nube e terra. La scarica può essere oscillante, ed è anzi questo il caso più generale. Il parafulmine, che agisce come un conduttore di scarica interposto fra terra e nube, presenterà una impedenza grandissima, che dipende non tanto dalla resistenza ohmica, quanto dalla resistenza induttiva e dallo *skin-effect*. Non può dunque più aversi la sicurezza che, quando fra la punta del parafulmine ed il suolo esista una comunicazione di grande conduttanza, il fulmine debba seguire una tale via; spesso difatti accade che il fulmine che colpì l'asta non seguiti più il conduttore, ma passi nell'edificio, oppure anche che colpisca punti dell'edificio vicini all'asta perchè l'impedenza di questo secondo percorso può essere minore di quella presentata dal conduttore del parafulmine.

Bastano queste poche considerazioni a provare come abbia ben poco valore la zona di protezione in relazione semplice colla lunghezza dell'asta, e come si debbano modificare gli antichi criteri nella costruzione dei parafulmini.

In seguito alla teoria elettromagnetica della luce di Maxwell ed alle esperienze di Hertz, delle quali ci occuperemo, si pensò alla convenienza di distribuire l'energia a scopo di illuminazione con correnti di altissima frequenza; Nicola Tesla fece a questo riguardo notevoli esperienze con correnti alternative prodotte sia da speciali macchine dinamo-elettriche, sia da scariche di condensatori. Uno dei fenomeni più sorprendenti che egli constatò, fu che si potevano impunemente far passare attraverso al corpo umano scariche a tensioni elevatissime, le quali alle frequenze industriali ordinarie sarebbero letali. Ciò è dovuto al fatto che per la grandissima frequenza la corrente si localizza alla superficie e non investe la massa del corpo.
