RESISTENZA DELLE MURATURE AL ROVESCIAMENTO

DISSERTAZIONE E TESI

PRESENTATE

ALLA COMMISSIONE ESAMINATRICE

DELLA REGIA SCUOLA D'APPLICAZIONE PER GLI INGEGNERI IN TORINO

DA

MOMO FELICE

DA VERCELLI

PER OTTENERE IL DIPLOMA

DI INGEGNERE LAUREATO

TORINO
TIPOGRAFIA FODRATTI, VIA OSPEDALE, 21.
1868

ALLA SACRA E VENERATA MEMORIA

DI MIO PADRE

ALLA MIA CARISSIMA MADRE

RESISTENZA DELLE MURATURE

AL ROVESCIAMENTO

Fra le svariate e molteplici forze alle quali sono soggetti i muri che entrano come parti costituenti d'un qualche edifizio, alcune, come le spinte delle volte, dei terrapieni, l'urto delle acque e molte altre tendono a produrne il completo o parziale rovesciamento. — A queste forze se ne oppongono altre, quali le azioni molecolari dei massi murali; il loro peso, il complesso delle quali costituisce ciò che dai costruttori chiamasi col nome di Resistenza delle Murature al rovesciamento.

Per quanto me lo consente la ristrettezza del tempo; darò alcuni cenni teorici intorno all'accennata resistenza dei muri, della quale deve spesso tener conto l'ingegnere nel dare i suoi progetti, poichè gli è solo con un accurato e giudizioso paragone fra le forze che agiscono sui materiali impiegati nella costruzione che si vuole eseguire, e le resistenze che tali materiali sviluppano; che si ottiene senza spreco di materia, epperciò colla massima economia, la stabilità, primo requisito d'un edifizio e senza della quale a poco gioverebbero la bellezza, la comodità e l'eleganza.

Sia $A\,B\,C\,D$ (*fig.* 1ª) la sezione trasversale di un muro che si suppone di lunghezza eguale all'unità, costrutto per strati regolari orizzontali, e sottoposto all'azione di una forza R, cognita di direzione e di intensità, la quale agisce contro la parete verticale $B\,C$ in un punto determinato I, in modo da essere possibile il rovesciamento di tutto o parte del muro nel senso della saetta S.

Evidentemente il giunto di separazione della parte che può essere rovesciata dalla parte di muro che rimane immobile, deve incontrare la faccia $B\,C$, secondo una linea rappresentata nel punto E posto al di sotto del punto d'applicazione I della forza R.

Supponiamo per ora che la rottura avvenga secondo il piano $E\,F$, la cui posizione andremo fra poco a stabilire, e troviamo intanto la condizione che deve essere verificata perchè il nostro masso murale possa dirsi stabile, sotto l'azione delle forze dalle quali trovasi sollecitato.

Pertanto osservo che, si dirà stabile il nostro muro allorquando il momento delle forze che tendono a produrre il rovesciamento, preso rispetto alla retta attorno alla quale tende ad aver luogo la rotazione, sarà minore o per lo meno eguale alla somma algebrica dei momenti di tutte le forze resistenti, presi rispetto alla medesima retta.

Ora le forze che tendono a produrre rovesciamento si riducono, nel caso che consideriamo alla componente orizzontale della forza R. Si oppongono invece, la componente verticale della forza R, il peso del masso $E\,C\,D\,F$ e di più la coesione e l'attrito che si sviluppano sul piano di rottura $E\,F$. — I pratici sogliono sempre trascurare queste due ultime forze e noi pure le trascureremo. Così saranno semplificati i calcoli e faremo una cosa in favore della stabilità.

Per conseguenza dicendo:

P il peso del masso proiettato in $F\,E\,C\,D$;

α l'angolo che la direzione della forza R fa coll'orizzonte;

e facendo

$$E\,I = a \qquad E\,L = b \qquad E\,F = c$$

la condizione di stabilità del nostro muro sarà la seguente:

$$R \cos \alpha < P\,(c\text{-}b) + R \operatorname{sen} \alpha \,.\, c$$

che potremo eziandio scrivere così:

$$P\,(c\text{-}b) + R \operatorname{sen} \alpha \,.\, c = n\, R \cos \alpha \;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

indicando con n una frazione propria che chiamasi *Coefficiente di stabilità* e che in pratica si suole assumere variabile fra $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{5}$

Se ora pongo:

$$P\,(c\text{-}b) + R \operatorname{sen} \alpha\, c = R\, r$$

e

$$R \cos \alpha = T\, t$$

L'equazione (1) si ridurrà a questa

$$R\, r = n\; T\, t \;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

la quale per $n = 1$ diventa

$$R\, r = T\, t$$

Quest'ultima eguaglianza dice che il momento rovesciante è eguale al momento resistente. — Quando essa è verificata, quando cioè il muro, sotto l'azione del proprio peso e della forza sollecitante, trovasi perfettamente in equilibrio; si dice, che nel muro è cimentata la resistenza alla rottura per rovesciamento.

Intanto l'equazione (2) dicesi equazione di stabilità relativa alla resistenza al rovesciamento, e serve a risolvere questi due problemi principalmente.

1° Trovare a qual momento rovesciante si può assoggettare un muro perchè non abbia luogo il suo rovesciamento.

2° Trovare una delle dimensioni della sezion retta di forma nota da assegnarsi ad un muro di sostanza cognita, perchè possa resistere all'azione d'un dato momento rovesciante.

Abbiamo di già avertito che in un solido murale soggetto a rovesciamento, la rottura avverrà secondo un piano orizzontale, che passa per un punto E posto al di sotto del punto d'applicazione della forza sollecitante. Andiamo ora a determinare la posizione di questo giunto di rottura che diremo *sezione pericolosa.*

Come si vede dall'equazione (2) la sezione pericolosa sarà quella relativamente alla quale il coefficiente di stabilità n ha il massimo valore. Diffatti se nel solido $A\,B\,C\,D$ (*fig.* 1ª) considero due sezioni qualunque $A\,B$ ed $E\,F$ e se pongo per la prima $n = \frac{1}{2}$ e per la seconda $n = \frac{1}{3}$ ciò vorrà dire che per la sezione AB, il momento rovesciante vale la metà del momento resistente; mentre per la sezione $E\,F$, questo vale tre volte quello. — Vi è dunque maggior pericolo di rottura per la sezione inferiore.

Siccome poi dall'equazione (2) si ricava:

$$n = \frac{R\,r}{T\,t} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (3)$$

potremo anche definire la sezione pericolosa quella per rapporto alla quale è massimo il quoziente del momento rovesciante pel momento resistente.

Quando sia compiutamente determinata di forma e di grandezza la sezione $A\;B\;C\;D$ del muro.

Chiamando con y la distanza $C\,E$ del piano orizzontale passante per C dal giunto pericoloso si potranno esprimere in funzione di y e dei dati del problema i momenti $R\,r$ e $T\,t$; si avrà quindi

$$n = \frac{F\,(y)}{f\,(y)}$$

e cercando qual è il valore di y, che rende massimo il coefficiente di stabilità n; determineremo dove esiste la sezione pericolosa.

Per meglio chiarire quanto finora venimmo dicendo, risolviamo il seguente problema.

Trovare lo spessore $CD = x$ da assegnarsi ad un muro, la cui sezione trasversale suppongo rappresentata dal trapezio $A\ B\ C\ D$ (*fig.* 2) in cui il lato $B\ C$ è verticale e vale a; il lato $D\ A$ è inclinato colla scarpa di $\frac{1}{m}$; e che deve resistere all'azione di una forza orizzontale Q di intensità nota applicata nel punto I che si trova alla distanza $C\,I = \frac{1}{3}\,a$ dallo spigolo superiore del muro rappresentato nel punto C.

Prima di tutto converrà determinare la sezione pericolosa che per ora supporrò rappresentata in $E\ F$ alla distanza $C\ E = y$ dalla faccia superiore del muro.

Il momento rovesciante sarà nel caso che consideriamo:

$$T\,t = \left(y - \frac{1}{3}\,a\right) Q$$

Ora, per mezzo della verticale $D\,M$, immaginando scomposto il nostro masso murale, che si suppone di lunghezza eguale all'unità, in due parti proiettate in $A\,D\,N$ e $B\,C\,D\,N$ e dicendo G il peso del metro cubo di muratura; il momento resistente $R\,r$ (come è facile a vedersi) si potrà esprimere con:

$$R\,r = G\,y\left(\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{x}{m}\,y + \frac{1}{3\,m^2}\,y^2\right)$$

Per conseguenza, detto n il coefficiente di stabilità; esso sarà, per una sezione qualunque del muro che consideriamo, espresso con

$$n = \frac{T\,t}{R\,r} = \frac{\left(y - \frac{1}{3}\,a\right) Q}{G\,y\left(\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{x}{m}\,y + \frac{1}{3\,m^2}\,y^2\right)} \quad \ldots\ldots (4)$$

Per avere il valore di y che rende massimo il nostro n, cioè per trovare la sezione pericolosa; secondo la nota regola del calcolo differenziale, formiamo il $\frac{d\,n}{d\,y}$ considerando x come costante e si avrà:

$$\frac{dn}{dy}=\frac{Q}{G}\frac{-\frac{2}{3m^2}y^3-\left(\frac{1}{m}x-\frac{a}{3m^2}\right)y^2+\frac{2}{3m}axy+\frac{1}{6}ax^2}{\left\{y\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{m}y+\frac{1}{3m^2}y\right)\right\}^2}.$$

Eguagliamo il secondo membro di quest'ultima equazione a zero, per la qual cosa basterà far nullo il numeratore della frazione ed avremo:

$$\frac{2}{3m^2}y^3+\left(\frac{1}{m}x-\frac{a}{3m^2}\right)y^2-\frac{2}{3m}axy-\frac{1}{6}ax^2=0$$

Ora si dovrebbero cercare le radici di quest'equazione di 3° grado. Nel caso in cui siamo però non è necessario di fare una tale operazione. Poichè si osservi innanzi tutto che l'equazione che dobbiamo risolvere, secondo che ci dice l'analisi finita, non può ammettere che una sola radice reale positiva. Si osservi inoltre che per $y=\frac{1}{3}a$ e per $y=\infty$ si ha dall'equazione (4) $n=o$. Epperciò la equazione (4) si può graficamente rappresentare per mezzo d'una curva ascintotica rispetto l'asse delle y della forma di quella della (*fig.* 3) la quale curva fra i punti di ascisse $y=\frac{1}{3}a$ e $y=\infty$ ammetterà un punto U per cui l'ordinata n sarà massima. Fino a qual punto il $\frac{d\,n}{d\,y}$ sarà positivo. Da tutte queste considerazioni risulta quindi chiaro che trattandosi qui di massimi relativi siccome per $y=a$ si ha $\frac{d\,n}{d\,y}>o$; sarà a il valore di y che rende massimo il valore di n per modo che dovremo conchiudere che la sezione pericolosa del muro rappresentato in $A\ B\ C\ D$ deve essere la base $A\ B$. Se ora nell'equazione (4) porremo per n un numero compreso fra $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{5}$ e per y il suo valore a che testè abbiamo determinato; potremo ricavare il valore di x cioè potremo trovare lo spessore da darsi al nostro muro affinchè non venga rovesciato dalla forza Q.

Si consideri ora un muro (*fig.* 4) la cui sezione traversale sia $A\,B\,C\,D$ e la cui sezione orizzontale alla base, sia rappresentata dal rettangolo $A_1\ A_2\ B_1\ B_2$. Andiamo a determinare la pressione massima, riferita all'unità di superficie, che ha luogo sullo spigolo rappresentato in A, attorno al quale tende a rovesciare il muro, per virtù di una forza qualunque R, dalla quale trovasi sollecitato.

Se supponessimo assolutamente rigidi i materiali componenti il masso murale che si considera; è chiaro allora che fin dal momento in cui comincia il rovesciamento, tutto il masso $A\,B\,C\,D$ graviterebbe sullo spigolo A e la pressione riferita all'unità di superficie, che tale spigolo dovrebbe sopportare, essendochè una retta non ha superficie, sarebbe infinita.

Noi non supporremo l'assoluta rigidezza dei materiali; li supporremo dotati d'una certa elasticità, per modo che durante il rovesciamento, il muro $A\ B\ C\ D$ appoggi non tutto sullo spigolo A, ma sopra una parte $A\ M$ della base $A\ B$ come fa vedere la (*fig.* 5).

Quindi la pressione che sopporta il giunto pericoloso $A\ B$ del nostro muro; quando in esso è cimentata la resistenza al rovesciamento, potremo considerare ripartita in modo, che essa sia nulla su di una certa retta $M\,N$; che vada poi da questa proporzionalmente crescendo sino allo spigolo di rotazione $A_1\ A_2$; dove avrà acquistato il massimo valore, che riferito all'unità di superficie dirò K. Proponiamoci adunque di determinare questa K e la posizione della retta $M\ N$, che separa sul giunto pericoloso la parte premuta da quella non premuta.

Sia G il centro di gravità del masso murale $A\ B\ C\ D$.

P il suo peso.

α l'angolo che la direzione della forza sollecitante R fa coll'orizzonte.

Immagino trasportate in O punto d' incontro della direzione della forza R con la verticale passante per G le due forze R e P.

Ne faccio la risultante e la chiamo S.

Considero il punto H in cui la direzione di S incontra la retta $A\,B$ e dico u la distanza $A\,H = A_1\,H_1$. Tiro la orizzontale $o\,x$ e prolungo la retta $R\,S$ sino ad incontrare nel punto I questa orizzontale.

Faccio inoltre.

$$\widehat{SOP} = \varphi \qquad BE = h. \qquad BF = b \qquad AB = A_1 B_1 = c \qquad A_1 A_2 = 1$$

In seguito a tali denominazioni, dal triangolo $S\ o\ R$ si ha tosto:

$$S^2 = R^2 + P^2 - 2RP \cos oRS$$

ossia:

$$S^2 = R^2 + 2RP \operatorname{sen} \alpha + P^2.$$

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{R}{S} \cos \alpha$$

Immagino scomposta la forza S in due l'una orizzontale che dico Q, l'altra verticale che dico V.

Quest'ultima sarà espressa da:

$$V = P + R \operatorname{sen} \alpha \quad . \; . \; . \; (5)$$

Dal triangolo $L\ E\ o$ si ricava:

$$L\,o = b \operatorname{tang} \alpha$$

$$oF = h - b \operatorname{tang} \alpha$$

Quindi dal triangolo $H\ o\ F$ dedurremo

$$HF=(h-b\operatorname{tang}\alpha)\operatorname{tang}\varphi$$

Per conseguenza

$$u=AB-BH=c-b-(h-b\operatorname{tang}\alpha)\operatorname{tang}\varphi\ \ldots\ (6)$$

Ciò premesso facendo

$$UT=X \qquad\qquad Tt=x$$

la pressione che ha luogo sulla retta $b\ c$ parallela alla retta $M\ N$ sarà:

$$K\frac{x}{X}$$

quella sopportata dall'area elementare $a\ b\ c\ d$ varrà:

$$K\frac{x}{X}dx\ \ldots\ldots\ (7)$$

e il suo momento rispetto alla retta $M\ N$ sarà espresso con:

$$K\frac{x}{X}x\,dx$$

La pressione totale, sopportata dall'intera parte di base premuta $A_1\ A_2\ M\ N$ e che non è altro se non che la componente verticale V della forza S; si otterrà facilmente, integrando l'espressione (7) per cui si ottiene

$$V=\int_o^X K\frac{x}{X}dx=\frac{K}{X}\int_o^X x\,dx$$

ossia:

$$V=\frac{K}{2}X\ \ldots\ldots\ (8)$$

Prendendo ora il momento della pressione totale rispetto alla retta $M\,N$ avremo:

$$V.\,H\,T = \int_{o}^{X} K\,\frac{x}{X}\,x\,d\,x$$

ossia:

$$v\,(X - u) = \frac{K}{X}\int_{o}^{X} x^2\,d\,x$$

d'onde:

$$V = \frac{1}{3}\,\frac{K\,x^2}{X - u} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (9)$$

Paragonando le equazioni (8) e (9) dedurremo.

$$\frac{K}{2}\,X = \frac{1}{3}\,\frac{K\,X^2}{X - u}$$

e quindi

$$X = 3\,u \quad . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{I})$$

E mettendo per X il suo valore dato da quest'ultima equazione (I) si ricava

$$K = \frac{2}{3}\,\frac{V}{3\,u} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (\mathrm{II})$$

Le equazioni (I) (II) nelle quali si mettano per V e per u i loro valori (5) (6) risolvono completamente la questione.

Può darsi che la retta $M\,N$ la cui posizione è determinata dalla formula $X = 3\,u$ cada fuori del muro. Allora osservando che quando un muro rovescia ha luogo subito un principio di distacco dalla parte opposta a quella da cui si fa la rotazione si potrebbe ammettere che la pressione sopportata dal giunto pericoloso sia nulla sullo spigolo $B_1\,B_2$ (*fig.* 4) massima sullo spigolo $A_1\,A_2$ e in questa ipotesi si avrebbe subito

$$X = c$$

e per conseguenza.

$$K = 3\,v\,\frac{c-u}{c^2}$$

Per essere però più rigorosi diciamo k la pressione riferita all'unità di superficie; che realmente ha luogo sullo spigolo $B_1\,B_2$, K quella di $A_1\,A_2$ ed ammettiamo che questa pressione varii proporzionalmente da k a K.

Ciò posto se consideriamo la retta $b\,c$ alla distanza x della retta $B_1\,B_2$ e se diciamo y l'aumento di pressione che ha luogo nel passaggio da $B_1\,B_2$ a $b\,c$ questo sarà espresso con

$$y = (K - k)\,\frac{x}{c}$$

I punti del giunto pericoloso situati sulla retta $b\,c$ sopporteranno adunque una pressione

$$k + (K - k)\,\frac{x}{c}$$

L'area elementare $a\,b\,c\,d$ sarà premuta da una forza

$$k\,d\,x + (K - k)\,\frac{x}{c}\,d\,x$$

Integrando quest'ultima espressione fra i limiti o e c otterremo la pressione che si esercita sull'intera base $A_1\ B_1\ A_2\ B_2$ del muro. Avremo perciò:

$$V = K \int_o^c d\,x + (K - k) \int_o^c \frac{x}{c}\,d\,x$$

d'onde eseguendo l'integrazione indicata si ha

$$V = \frac{K + k}{2} \quad \ldots\ldots (10)$$

Il momento della pressione che ha luogo sull'area infinitesima $a\,b\,c\,d$ rispetto alla retta $B_1\ B_2$ sarà:

$$k\,x\,d\,x + (K - k)\,\frac{x^2}{c}\,d\,x$$

Il momento della pressione totale V rispetto alla stessa retta sarà quindi

$$V(c - u) = K \int_o^c x\,d\,x + (K - k)\,\frac{1}{c} \int_o^c x^2\,d\,x$$

d'onde

$$V(c - u) = \frac{1}{6}\,c^2\,(k + 2\,K) \quad \ldots\ldots (11)$$

Dalle due equazioni (10) (11) ricaveremo i valori cercati di K e di k che saranno così espressi

$$K = V\,\frac{4\,c - 6\,u}{c^2}$$

$$k = V\,\frac{6\,u - 2\,c}{c^2}$$

Affinchè sullo spigolo attorno al quale tende a farsi il rovesciamento non siavi pericolo di schiacciamento dei materiali, sarà necessario che la pressione K riferita all'unità di superficie sia minore del coefficiente di rottura per schiacciamento relativo alla materia che in tale spigolo si trova.

Così per un muro di granito, al quale si può senza pericolo di schiacciamento far sopportare un peso di 80 chilog. se si trovasse $K = 50$ chilog. si potrebbe conchiudere, che il muro è stabile.

MOMO FELICE

TESI LIBERE

Meccanica applicata e Idraulica pratica.

Pendolo conico di Watt.

Costruzioni civili, idrauliche e stradali.

Verificazione della stabilità delle grosse volte a botte.

Macchine a vapore e ferrovie.

Equazioni fondamentali di Termodinamica.

Geometria pratica.

Riduzione d'un angolo al centro di stazione.

Fig. 1

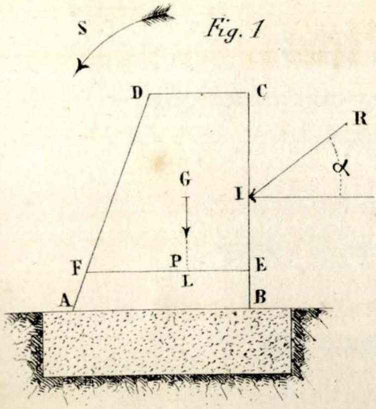

Fig. 2.

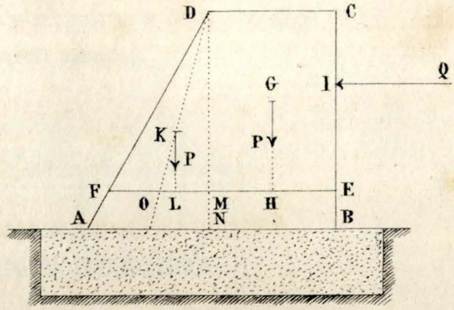

Fig. 3.

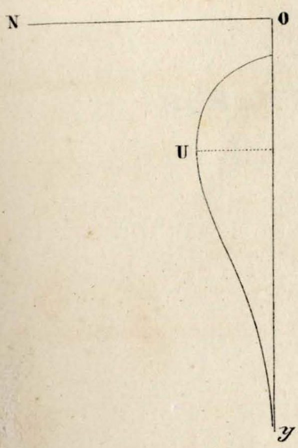

Fig. 4.

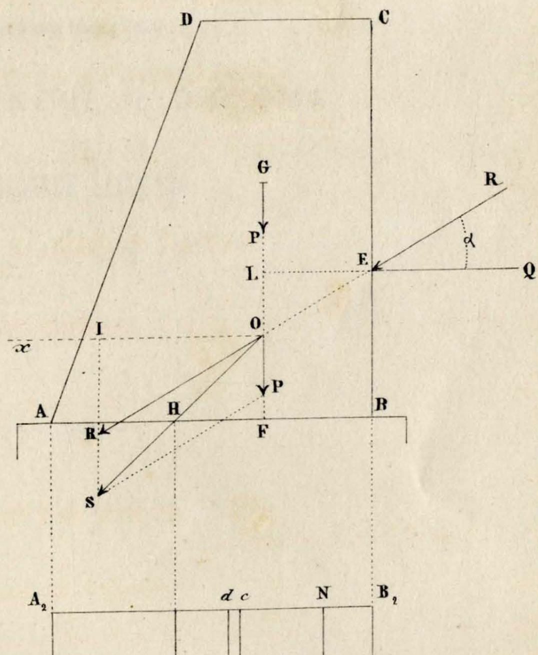

Fig. 5.