ANNO XXIX. Torino, 1903 NUM. 12.

L'INGEGNERIA CIVILE
E
LE ARTI INDUSTRIALI

PERIODICO TECNICO QUINDICINALE

Si discorre in fine del Fascicolo delle opere e degli opuscoli spediti franchi alla Direzione dai loro Autori od Editori.
È riservata la proprietà letteraria ed artistica delle relazioni, memorie e disegni pubblicati in questo Periodico.

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

I.

SUL PROFILO ECONOMICO DI DIGA A VANI INTERNI proposto PER LA FORMAZIONE DI LAGHI ARTIFICIALI

Carissimo Sacheri,

Sotto questo titolo leggo nel fascicolo 8° di quest'anno dell'*Ingegneria Civile* un articolo dell'egregio ing. Luigi Figari, col quale egli intende di confutare il cenno da me pubblicato nello stesso periodico fasc. 16 del 1900. Sebbene alieno, come sempre, dall'entrare in polemica, ho voluto rileggere il mio cenno ed ho visto che le osservazioni dell'egregio Collega non distruggono nè modificano ciò che io scrissi allora; e poichè tanto il cenno mio, quanto l'articolo dell'egregio ing. Figari, sono a disposizione dei lettori dell'*Ingegneria*, così essi potranno, paragonandoli, formarsi senz'altro un giudizio.

Mi limito quindi a rettificare qualche inesattezza nella quale l'egregio Collega è incorso, certo involontariamente.

E così mi preme innanzi tutto d'informare l'egregio Collega che io non mancai di mandare una copia del mio cenno al « Giornale del Genio Civile » nel quale era stata pubblicata la sua Memoria e se io avessi avuto il suo indirizzo, mi sarei fatto un pregio di inviargliene una direttamente. Così pure debbo fargli notare che ignoravo affatto, prima della lettura del suo nuovo articolo, che quel mio cenno fosse stato riprodotto nel periodico « L'Ingegneria e l'Industria » che qui a Teramo non si trova.

Soggiungo poi che il cenno mio non fu scritto coll'intendimento di fare una critica, ma di dare contezza di una pubblicazione sulla quale Ella, signor Direttore, aveva richiamato la mia attenzione, come su argomento del quale mi sono altre volte occupato; e ciò dico solo perchè non vorrei che mi si attribuissero delle intenzioni aggressive che non ho mai avute.

Ed ora, sorvolando su tutto il resto, rilevo un'asserzione che è capitale nella questione che ci occupa. Il signor ing. Figari a pag. 120, seconda colonna, dice che « il me» todo di calcolo da lui tenuto è presso a poco quello » ideato dal Krantz, seguito poi dal Crugnola nella pre» gevole sua opera *Sui muri di sostegno e sulle traverse* » *d'acqua*, e da molti altri che scrissero in materia, nè » mi consta che il Crugnola abbia successivamente modi» ficato i suoi sistemi di calcolo, applicandoli alla ricerca » della stabilità del tipo di diga da lui proposto, intro» ducendovi la considerazione delle sezioni oblique; è ben » giusto perciò che io attenda che egli ne faccia la prima » applicazione ».

Forse mi sarò espresso in modo oscuro nell'opera citata dal Collega, poichè egli asserisce precisamente il contrario di ciò che io in essa ho voluto scrivere. Il mio metodo non ha nulla a che fare con quello ideato da Krantz, anzi al § 74 ho inteso di dimostrare che i tipi dell'ing. Krantz « non soddisfano alle condizioni che l'autore si era prescritte » e che secondo la teoria delle sezioni oblique non sarebbero sufficientemente stabili. Nei paragrafi successivi poi, facevo un paragone fra il tipo da me proposto e quelli di Krantz e credo di avere dimostrato la superiorità del primo.

I sistemi di calcolo da me seguiti non hanno bisogno di venire modificati per introdurvi la considerazione delle sezioni oblique, poichè sono tutti condotti su tale considerazione; e al § 73 facevo financo una discussione per dimostrare la differenza che si avrebbe nei risultati calcolando senza tenere conto di tale obliquità. La teoria che vi serve di base è stata da me sviluppata in un articolo pubblicato nel fascicolo 8° dell'*Ingegneria Civile* dell'anno 1883, e poi accolta nel libro sopramenzionato: *Sui muri*, ecc., ai §§ 7 e 8. L'applicazione che il signor Figari attende che io faccia, si trova quindi già fatta, e non solo per le traverse murarie, ma in tutti i calcoli delle dimensioni dei muri di sostegno delle terre e dei muri di sponda, dei quali appunto si occupa l'Opera mia da lui citata. Aggiungo poi che, se si trascura l'obliquità, il mio tipo non presenta nè a monte, nè a valle in nessun caso sforzi di tensione, il che è anche accennato nelle tabelle in Appendice.

Non voglio aggiungere altro per non annoiare i lettori dell'*Ingegneria*, ma pel giudizio e l'applicazione del mio tipo mi riferisco a quanto ne scrissero i signori Wegmann, Fteley e le Commissioni nominate per lo studio dell'Acquedotto del Croton, le cui Relazioni sono tutte nel dominio pubblico.

Mando una affettuosa stretta di mano a lei, caro Sacheri, e mi confermo

Teramo.

Suo aff.
G. CRUGNOLA.

II.

LA MISURA DELLA FRECCIA DI INCURVAMENTO come mezzo di collaudo DELLE COSTRUZIONI IN CEMENTO ARMATO

(Veggasi la Tavola XII)

È opinione generale che le prove cosidette di collaudo, alle quali sinora si è limitata la verifica della stabilità delle costruzioni in conglomerato di cemento e ferro, siano di incerta interpretazione ed in parecchi casi anche illusorie.

La fiducia che i pochi specialisti si erano acquistata coi loro successi poteva, fino ad un punto, giustificare pel passato la mancanza di norme disciplinate e razionali sul modo di procedere a tali controlli. Ma oggi, a poca distanza dalla scadenza di parecchi fra i brevetti che proteggono l'esercizio dei sistemi più diffusi, si prevede non lontano il giorno in cui ingegneri ed imprese, quantunque non dedite in modo esclusivo a tal genere di costruzioni, vorranno progettarle correntemente, e metterle in opera come preziose ausiliarie dei sistemi antichi.

È dunque giustificata la discussione che s'agita in molte città fra Amministrazioni comunali, tecnici ed imprese per formulare prescrizioni di vigilanza ben definite sulle costruzioni in cemento armato, tanto più necessarie quanto maggiore libertà si vorrà dare all'iniziativa dei privati, conciliandola colla necessaria garanzia della sicurezza pubblica.

Ora l'indirizzo che pare destinato a prevalere fra noi, come risulta dalle proposte già fatte in Torino (1), è quello di assicurare essenzialmente la stabilità dell'opera con un esame preventivo del progetto e con una vigilanza continuata sull'esecuzione, per accertarsi delle qualità e proporzioni dell'impasto, della quantità di ferro adoperato, del suo esatto collocamento nel getto e del tempo decorso prima del disarmo delle parti portanti.

Alla prova di verifica da eseguirsi con un carico di collaudo si vuole attribuire un'importanza limitata. E invero, mentre da una parte i tecnici ne hanno posto in dubbio il valore, dall'altra alcune città della Germania, che ci precedettero nel concretare i regolamenti di vigilanza, adottarono norme così disparate ed esorbitanti per la grandezza del carico prescritto, che il loro esempio potè servire solo a porne in dubbio il significato ed a dissuadere dal seguirle.

Mi pare tuttavia che due ragioni consigliano a non trascurare questo mezzo semplicissimo di collaudo, ma piuttosto a studiarlo più a fondo per trarne tutto il profitto possibile.

Esse sono: 1ª La convenienza di non inceppare, con eccessivi controlli, lo sviluppo e la libertà dei lavori, riservandosi un mezzo di verifica finale delle qualità statiche della costruzione; 2ª l'impossibilità pratica di constatare con altri mezzi la cura posta nella manipolazione dell'impasto, che è uno dei coefficienti principali della stabilità di queste costruzioni, ed è appunto quello che, per un'esperienza non abbastanza sicura in chi dirige ed in chi eseguisce il lavoro, rimane più incerto.

*

I. *Discussione delle norme usuali che prescrivono un valore limite al rapporto della freccia alla portata.* — Due sono i criteri che si possono seguire nella verifica della stabilità col carico di prova.

Il primo consiste nel sottoporre l'intera costruzione, od anche solo una parte di essa, ad un carico assai maggiore, ad esempio, almeno triplo di quello che essa è destinata a reggere, cosicchè, constatando semplicemente in queste condizioni la stabilità dell'opera d'arte e l'assenza di deformazioni permanenti notevoli, sia lecito conchiudere in favore delle sue proprietà statiche.

Il secondo criterio sta nel considerare la grandezza della freccia come un mezzo per valutare le proprietà elastiche del materiale e del sistema nel suo complesso, ricavandola in condizioni quanto più è possibile prossime a quelle in cui si troverà di fatto sotto l'azione del sopracarico. Quindi il carico di collaudo dovrà essere di poco maggiore, e precisamente di quanto può rappresentare l'effetto dinamico del primo rispetto all'azione puramente statica del secondo. In media si potrà fissare il carico di collaudo uguale ad una volta e mezzo il sopracarico effettivo.

*

Di questi due modi differenti di valersi della prova di verifica, il primo si deve condannare in modo assoluto, poichè esso impone l'uso di un sopracarico che, salvo il caso di dimensioni eccessivamente resistenti della costruzione, la danneggia in modo duraturo; anche quando non vi produce fenditure, o deformazioni permanenti sensibili. Ciò risulta da recenti studi sperimentali fatti allo scopo di precisare coll'osservazione diretta la parte di sollecitazione presa su di sè dall'armatura metallica di una trave inflessa di cemento.

Ricerche fatte in Losanna fin dal 1894, mettendo a nudo in alcuni punti le sbarre di ferro per rilevarne direttamente le deformazioni con un apparecchio Fränkel, e ripetute a Zurigo il 1902 dal prof. Schüle, con precauzioni anche maggiori, per mezzo del metodo sensibilissimo di misura con specchio e scala, hanno permesso di concludere con questa importantissima legge (1):

In una trave di cemento inflessa *le sbarre di armatura manifestano una considerevole persistenza nella tensione cui sono state assoggettate, malgrado la diminuzione del carico applicato.* Cioè, la parte di sollecitazione che il ferro prende sopra di sè, non solo cresce col carico, raggiungendo, come è noto, il suo valor massimo, quando, per la presenza delle fessure nella zona tesa, tutta la resistenza a tensione è sopportata dall'armatura; ma dipende anche, e in grado

(1) *Norme per l'impiego del « Béton » armato nelle costruzioni.* — « Atti della Società degli Ingegneri di Torino », anno 1903, fasc. 1-2, ed « Ingegneria Civile », 1903, fasc. 11.

(1) F. Schüle, *Résistance et déformations du béton armé sollicité à la flexion.* — « Schweizerische Bauzeitung », numeri 22-24, 1902.

molto sensibile, dall'intensità dei carichi a cui la trave fu precedentemente sottoposta. Cosicchè se questa intensità è stata, nel periodo di prova, assai maggiore della normale, lo sforzo sollecitante il ferro rimane in seguito più grande di quello che le condizioni momentanee del carico imporrebbero, mentre per conseguenza la collaborazione del conglomerato nella resistenza della trave è assai minore.

In altre parole, il sistema resiste come se si trovasse in uno stadio più prossimo alla sua rottura. Quindi, se il suo grado di sicurezza non è molto elevato, è maggiore il rischio che un'azione dinamica improvvisa assoggetti il ferro ad un carico prossimo allo snervamento, pel quale, come è noto, il pericolo diventa immediato.

Il carico di collaudo non deve dunque superare di molto il sopracarico introdotto nei calcoli di stabilità, ma allora la prova non costituisce di per sè sola una garanzia sufficiente. Essa può fornirla soltanto in quanto rivela, con la grandezza delle deformazioni direttamente misurate, le proprietà elastiche del sistema.

Sotto questo punto di vista, il metodo è superiore ad ogni obbiezione.

Bisognerà però, col calcolo, o con norme stabilite per ogni tipo di costruzione, separare l'influenza delle condizioni statiche speciali di ciascun caso, da quella delle proprietà del materiale, in modo di dedurne il modulo d'elasticità. Invero in questa grandezza, che definisce la resistenza specifica alla deformazione, si può dire che vengono collettivamente valutati tutti i coefficienti di qualità, relativi al modo di resistere.

Così, trattandosi di conglomerato di cemento e ferro, insieme colla sufficienza dell'impasto e colla purezza delle materie prime adottate, facili del resto a verificarsi per altre vie, si avrà un controllo della cura impiegata nel manipolarle, nel comprimerle entro le forme e nel mantenere le armature di ferro nella posizione voluta.

Ma, come si avrà occasione di vedere in seguito, riesce in ogni caso difficile il dedurre dalle misure prese il modulo di elasticità corrispondente alle deformazioni avvenute. Prevalse quindi l'abitudine, nel caso di solai e di volte, di fissare un limite massimo al rapporto fra la freccia d'incurvamento e la luce libera della parte portante. La quale norma sarebbe affatto equivalente a quella che pone un limite inferiore al modulo di elasticità, e quindi altrettanto razionale, se la si fosse dedotta con un'analisi rigorosa dei fatti.

Invece la mancanza di dati sperimentali ben interpretati condusse in molti casi ad estendere questi limiti in modo quasi arbitrario da alcuni sistemi, pei quali erano stati riconosciuti validi, ad altri sostanzialmente diversi, e si commise quindi il duplice errore:

1° di non tenere il dovuto conto delle condizioni di posa, nonchè della struttura della trave e della proporzione fra la sezione di ferro dell'armatura e la sezione totale;

2° di fissare come limite superiore del rapporto fra freccia e portata valori troppo elevati, uniformandosi ai dati relativi alle costruzioni metalliche, che, a parità di resistenza, sono nel periodo elastico più cedevoli di una costruzione in conglomerato in cemento.

*

Devesi a questi fatti lo scredito in cui è caduto, come mezzo di controllo, il metodo pur sempre convenientissimo della misura della freccia sotto il carico di collaudo, tanto più che, dopo averne giustamente messa in chiaro l'applicazione erronea, si esagerò, volendone dimostrare assolutamente fallaci in ogni caso le conclusioni. Cito come caratteristica un'indagine, per altre parti assai pregevole, dell'ing. Federico Emperger di Vienna, pubblicata nel quarto numero del suo recente periodico, speciale per i costruttori in cemento armato (*).

In questo suo lavoro si prendono in esame parecchie esperienze, i cui rendiconti erano già stati pubblicati in altri giornali tecnici, e si discute per ciascuna di esse la possibilità di interpretarne i risultati con un metodo proposto dall'A., sul quale avremo occasione di ritornare. Finalmente si raccolgono in un quadro riassuntivo, qui riprodotto, le freccie constatate per ciascun esemplare sotto l'azione del carico, al quale, secondo i calcoli dell'Emperger, corrispondono nel ferro tensioni di 1000 e di 1500 kg. per cmq., e si confrontano rispettivamente coi numeri esprimenti la 1500^{ma} e la 1000^{ma} parte della portata delle travi.

Sono di fatto questi i limiti che un regolamento francese, citato appunto nella monografia dell'Emperger, prescrive per le prove di collaudo fatte con un carico ugnale prima al sopracarico adottato nei calcoli di stabilità, poi, dopo 24 ore di permanenza, aumentato della metà di detto sopracarico.

Il paragone fra le freccie dedotte coll'esperienza e i limiti imposti dalla regola citata, rivela effettivamente per certi saggi una discordanza troppo sensibile, cosicchè l'A. ne deduce, che vi sono casi, nei quali la stabilità della trave, prima che sia raggiunto il limite fissato dalle prescrizioni francesi, è compromessa, e ve ne sono altri, in cui detto limite può essere oltrepassato senza pericolo, e quindi conchiude, che la regola è affatto arbitraria ed illusoria.

Ma, per gli esempi da lui citati, la conclusione è un po' affrettata. Invero l'A. avrebbe dovuto osservare, che precisamente i saggi, pei quali fu superato il limite prescritto dalla freccia misurata in corrispondenza alla tensione nel ferro di 1500 kg./cmq., si ruppero sotto un carico relativamente basso.

Per contro quelli che non raggiunsero detto limite resistettero a carichi più elevati.

Ciò vuol dire che nei primi, o per insufficiente bontà dell'impasto, o per difetto di formazione, provocante nel cemento prima che nel ferro sollecitazioni pericolose, ovvero per imperfezione del metodo da lui seguìto per valutare il carico a cui deve avere corrisposto nell'armatura la tensione limite anzidetta, la stabilità della trave, in corrispondenza alla freccia registrata, era già compromessa, mentre negli altri era ancora largamente assicurata.

Se invece dai rendiconti delle stesse esperienze deduciamo le freccie corrispondenti ad una determinata frazione, per

(*) Fr. v. Emperger. — *Die Durchbiegung und Einspannung von armierten Betonbalken*, dal « Béton und Eisen », 1902.

esempio, alla quarta parte del carico di rottura, con che eliminiamo tutte le cause di errore anzidette, e ci poniamo effettivamente in condizioni paragonabili di stabilità per tutti i saggi, adottando un medesimo coefficiente di sicurezza, otteniamo una notevole concordanza dei risultati sperimentali colla norma citata, che fissa il rapporto limite fra freccia e portata ad 1 0|00. Basta infatti confrontare fra loro i numeri scritti nelle ultime due colonne dell'annessa Tabella.

Freccie di incurvamento di travi in cemento armato.

N.	Indicazione dell'esperienza	Caratteristiche della trave	Percentuale in ferro	Età in mesi	Portata l m.	Valori della freccia in mm. corrispondenti a: tensione nel ferro 1500 kg./cm²	$\frac{l}{1500}$	tensione nel ferro 1000 kg./cm²	$\frac{l}{1000}$	sopracarico = 1/4 del carico di rottura
1	Vienna — Ast e C. — Solaio di prova con 5 nervature N. 1.	Hennebique	0,19	3	6,30	1,1 ÷ 3,0	4,2	3,6 ÷ 9,2	6,3	—
2	Gorinchem — Impresa costruttrice di Amsterdam . . .	Impasto 1 : 4	0,30	1	7,00	3,2	4,7	6,5	7,0	5,30
3	Vienna — Ast e C. — Solaio di prova con 4 nervature N. 2.	Hennebique	0,33	3	5,00	1,7 ÷ 2,5	3,3	3,5 ÷ 4,9	5,0	—
4	Losanna — De Mollins — Trave di prova	»	0,39	11	5,25	3 — 4 — 4,3 (*)	3,5	6,3	5,2	3,6 ÷ 5,0
5	Amsterdam — Striscia di soletta senza staffe	Impasto 1 : 4	1,39	3	2,00	1,7	1,3	2,8	2,0	1,60
		» 1 : 6				2,0		3,8		2,05
6	Amsterdam — Id. id. . .	» 1 : 6	1,86	3	2,00	—	—	—	2,0	2,0
7	Weissenbach — Pittel e Brausewetter	» 1 : 5	2,30	1	3,00	3,2	2,0	6,0	3,0	2,0
8	Amsterdam — Striscia di soletta senze staffe	» 1 : 4	2,78	3	2,00	3,0	1,3	4,4	2,0	2,6
		» 1 : 6				4,2		6,3		2,0

(*) I tre numeri registrati corrispondono a tre passaggi successivi del sopracarico per un medesimo valore, essendo stata fatta una ripresa nell'esperienza, dopo scaricata la trave.

Il paragone non fu fatto per i solai di prova sperimentati a Vienna (n. 1 e 3), non essendo stata per essi protratta la esperienza fino a rottura; ma per questi due saggi si vede che le freccie corrispondenti secondo i calcoli dell'Emperger alle tensioni di 1000 e di 1500 kg./cmq. nel ferro rispettano i limiti fissati dalle norme francesi, salvo i valori massimi constatati in alcune nervature del primo solaio di prova, che li superano.

Anche per esse, dunque, è lecito presumere un accordo abbastanza soddisfacente.

Così pure la trave Hennebique di 8 m. di lunghezza, costruita e sperimentata in Torino sul finire del 1902, insieme con altri tre esemplari di prova, tutti calcolati per un sopracarico di 500 kg. per ml., ha dato sotto il carico di 750 kg. per metro una freccia di mm. 6,8, poco inferiore cioè al millesimo della portata. È bensì vero che a detta freccia non corrispose il coefficiente di sicurezza verificato nelle esperienze riassunte nella tabella: poichè la trave si sfasciò sotto il carico di 16 t. uguale al quadruplo del sopracarico pel quale era stata calcolata e quindi appena a 2 volte e 2/3 il carico di collaudo. Ma la rottura, come è detto nel rendiconto dell'esperienza (*), fu probabilmente affrettata da cause esterne, sicchè l'accordo neppure in questo caso è smentito.

Ciò non deve tuttavia farci concludere in modo assoluto che la regola di collaudo desunta dal confronto fra le freccie misurate e un limite stabilito invariabilmente per qualsiasi trave in rapporto alla sua portata sia buona. Invero i saggi che la tabella considera si trovavano tutti, salvo il primo, in condizioni di posa quasi identiche, essendo appoggiati su bassi muri di calcestruzzo senza carico sovrastante alle loro estremità, cosicchè soltanto la solidarietà fra la massa cementizia costituente il sostegno e la trave potè assicurare nella prima fase dell'esperienza un semi-incastro.

Vi fu dunque per essi uniformità quasi perfetta nell'elemento che ha maggiore influenza sull'entità delle deformazioni, e quindi solo la differente loro struttura poteva dare luogo ad un modo diverso di comportarsi de' singoli saggi. Essa si rivela infatti con deformazioni relativamente più grandi nei campioni sperimentati ad Amsterdam, appunto perchè privi dei collegamenti metallici trasversali fra l'armatura e la zona compressa del calcestruzzo.

Fra questi poi è notevole che la freccia corrispondente al medesimo grado di sicurezza della trave aumenta colla proporzione del ferro adoperato, come risulta dalla quarta colonna, nella quale sono registrati i rapporti fra la sezione del ferro e l'area del rettangolo, avente per base la larghezza della trave in corrispondenza alla sua zona compressa e per altezza la distanza fra l'asse baricentico dell'armatura e il piano superiore della trave (*).

(*) « L' Ingegneria Civile », 1902, fasc. 3.

(*) È questo un modo razionale di valutare la percentuale di ferro nei solidi semplicemente inflessi, poichè rende confrontabili sezioni di forma diversa, siano esse rettangolari o a T. Invero nel periodo in cui la resistenza a tensione dello smalto cementizio è nulla o piccolissima, che è il periodo di maggior importanza nella verifica della stabilità, la sezione si può riguardare come composta esclusivamente della zona compressa e dell'armatura.

Si tratta però di variazioni di poca entità.

Quindi concludendo: per i bisogni della pratica, in cui del resto si incontra una varietà di strutture anche minore di quella rappresentata dai saggi testè discussi, e qualora si tratti di costruzioni non eccezionali e per tipo e per grandezza, la norma che limita il rapporto fra la freccia e la portata si può considerare come buona, sempre quando essa tenga il dovuto conto delle condizioni di appoggio della parte soggetta ad esperienza.

*

Ragionamenti dedotti dallo stesso ordine di idee ribattono, o almeno diminuiscono l'importanza di un'altra obbiezione. Essa concerne l'uso di fissare il valore-limite del rapporto fra la freccia e la portata per le prove di collaudo, deducendolo con esperienze eseguite su saggi appositamente fabbricati e quindi non solidali (come invece d'ordinario avviene nella pratica) colle parti adiacenti di una costruzione, che forma un tutto unico rispetto al suo modo di resistere.

Così è innegabile che un solaio in cemento armato si comporta piuttosto come una piastra vincolata lungo il contorno e rinforzata da nervature, anzichè come una serie di travi indipendenti accostate di fianco; sulla quale ipotesi si sogliono fondare i calcoli di stabilità per evitare complicazioni eccessive.

Questo modo speciale di resistere, si è detto, deve rendere minori le deformazioni di una data membratura in cemento armato, allorchè essa fa parte di un solaio. Sarebbe dunque erroneo valersi dei medesimi numeri, ottenuti sperimentando una membratura analoga, mantenuta affatto indipendente.

Ma anche qui, per essere nel vero, bisogna aver riguardo al fenomeno delle deformazioni in rapporto a quello della resistenza. La solidarietà delle singole parti di un solaio, rendendo efficace l'azione dei muri paralleli all'asse delle travi principali, in modo di diminuire le freccie d'incurvamento, dà pure luogo a tensioni unitarie di minore intensità. Quindi il problema si deve porre in questi termini:

Una membratura svincolata da ogni altro sistema resistente, fuorchè dai suoi appoggi di estremità, subisce una data freccia sotto l'azione del massimo fra i carichi di prova, che non ne pongono a repentaglio la stabilità. Se si considera la stessa membratura come parte di un solaio, e questo viene caricato fino ad ottenere la medesima freccia d'incurvamento, le tensioni interne del materiale saranno ancora entro i limiti di sicurezza?

È chiaro che soltanto uno studio sperimentale può rispondere a questa domanda; pure se, in via di approssimazione, si ritengono applicabili ai solai in calcestruzzo armato, le conclusioni della teoria delle piastre di spessore costante, formate di materiale omogeneo, è lecito rispondere affermativamente.

Basta in fatti confrontare i valori teorici della freccia di incurvamento e della tensione unitaria massima, che hanno luogo in una piastra rettangolare uniformemente caricata, e supposta una volta sorretta soltanto lungo due lati opposti, cioè funzionante come trave, ed un'altra volta appoggiata lungo tutto il perimetro. Ricorrendo alle formole date dal Saint-Vénant nelle sue celebri note al trattato del Clebsch sulla teoria dell'elasticità, si trova, che il rapporto fra la tensione massima σ'' e la freccia f in una piastra di spessore h è, con grande approssimazione, uguale a $\frac{\pi^2}{2}\frac{Eh}{a^2}$, se a è il lato minore della pianta rettangolare. Di pochissimo differisce il valore di detto rapporto in una trave semplicemente appoggiata di portata pari ad a, nelle stesse condizioni di carico e del medesimo spessore della piastra. Si ha di fatti $\frac{\sigma''}{f} = \frac{24}{5}\frac{Eh}{a^2}$.

Ciò vuol dire che la presenza degli appoggi paralleli ai lati minori in una piastra funzionante prima come semplice trave ne riduce tanto le tensioni unitarie massime quanto la freccia in un rapporto prossimamente se non perfettamente uguale (le formole citate danno per questo rapporto il valore 1/3). Non vi è dunque pericolo a caricare le piastre di spessore costante fino ad ottenere la stessa freccia che vi produce il sopracarico di sicurezza, quando esse si comportano come semplici travi poggianti lungo i due lati opposti maggiori del loro perimetro.

L'estensione da questo caso al problema assai più complesso dei solai cementizi, è certo un arbitrio; ma, come semplice induzione, essendo norma costruttiva costantemente rispettata quella di armarli parallelamente al lato minore della pianta, può avere il suo valore fino a che una ricerca diretta non provi l'opposto.

Quindi ancora una volta mi sembra che i ragionamenti fatti dimostrino esagerate le obbiezioni rivolte all'attendibilità del metodo di collaudo, consistente nella misura della freccia, anzi tendano ad attribuire ai valori-limiti da prescriversi a tali freccie una larghezza d'applicazione, che a primo aspetto potrebbe sembrare infondata.

*

Accenniamo ancora ad un fatto, al quale bisogna por mente nell'eseguire le prove di collaudo, quando si tratti di solai che si estendono molto in direzione normale a quella in cui è disposta l'armatura resistente.

Spesso in tali casi, per risparmio di tempo e di fatica, si limita il sopracarico ad una zona soltanto di essi; ma acciocchè i risultati della prova non riescano illusori, bisogna che questa zona sia assai larga, e si deve inoltre tener conto unicamente delle deformazioni presentate nella sua mezzaria. Altrimenti è troppo sensibile l'influenza delle parti adiacenti scariche del solaio, che contribuiscono a reggere il peso distribuito sulla zona.

Il Rabut ritiene che in un solaio, costituito da una soletta rinforzata da travi o nervature, bisogna che il carico sia esteso a 9 campate, acciocchè le deformazioni della nervatura di mezzo non siano sensibilmente attenuate dalla solidarietà della parte scarica della costruzione. La norma non deve essere presa alla lettera, poichè è chiaro che troppi

elementi variabili da caso a caso devono far sentire la loro influenza; ma, come utile guida al discernimento del collaudatore, meritava d'essere citata.

*

II. *Proposte di metodi razionali per le prove di collaudo.* — Le indagini precedenti non possono offrire sufficiente fondamento a dettare prescrizioni affatto sicure per i collaudi, sebbene in parte giustifichino alcune norme già in uso. Se si vorranno rendere meno imbarazzanti i controlli preliminari, occorrerà stabilire le modalità delle prove finali in seguito a seri studi sperimentali e teorici. E già su questa via si pose nella Svizzera la Commissione nominata dalla Società locale degli Ingegneri e da quella dei Fabbricanti di calce e cementi. In ogni caso poi le opere eccezionali per struttura o per importanza richiedono un'interpretazione diretta e razionale del loro modo di deformarsi sotto il carico di prova, interpretazione che deve consistere nel valutare, come si è detto, il modulo di elasticità del conglomerato, col quale furono fabbricate.

Un esempio assai semplice del modo di procedere si ha nelle prove di collaudo degli archi. Invero, essendo in essi escluse o ridotte a piccolissimo valore le sollecitazioni a tensione, e di più poco differente da sezione a sezione l'intensità della sollecitazione esterna, sono applicabili le teorie sulle deformazioni dei solidi omogenei ed elastici, ove alla sezione composta di ferro e di conglomerato di cemento si sostituisca una sezione ideale tutta in cemento.

Quindi, se si tratterà di stabilire *a priori* il limite massimo della freccia, basterà dedurlo coi noti metodi analitici o grafici, fissando un valore minimo del modulo di elasticità del conglomerato, uguale, per esempio a 150 t.|cm^2.

Volendo invece calcolare il modulo di elasticità per mezzo della freccia e delle deformazioni degli incastri direttamente osservate, bisognerà ricorrere alle stesse formole, od agli stessi procedimenti grafici, servendosi di un metodo di successive approssimazioni. Invero il momento di inerzia e l'area della sezione ideale dipendono, come è noto, dal modulo di elasticità del cemento, che è per l'appunto il risultato della ricerca.

Merita, a illustrazione delle cose dette, citare il recente collaudo del nuovo ponte sulla Bormida presso Millesimo ad una sola arcata di m. 51 di corda, costruito dall'ing. Porcheddu secondo il sistema Hennebique (*).

Le condizioni di prova prescrivevano una freccia non maggiore del millesimo della portata sotto un carico di 1100 kg.|m^2, cioè appunto prossimamente uguale ad una volta e mezzo il sopracarico di 700 kg.|m^2, pel quale fu calcolato. L'arcata presentò invece un abbassamento al vertice di soli 11 mm., quasi il quinto di quello posto come limite, nella convinzione ingiustificata che una norma accettabile, come si è detto, per solai, si possa estendere alle vôlte. Ora avrebbe bastato un calcolo anche di grossolana approssimazione per far vedere che ad una freccia di 51 mm. pari ad 1|1000 della portata doveva corrispondere un modulo di elasticità di 35 a 40 t.|cm^2, e quindi un impasto in condizioni eccezionalmente cattive, quali nessuna esperienza diretta ha mai rilevato. Invece, alla freccia effettivamente constatata corrisponde un modulo di circa 160 t.|cm^2, che rappresenta di fatto una buona garanzia, tenuto conto della poca stagionatura del getto in una massa tanto considerevole (3 mesi dall'ultimazione del getto delle arcate). Ciò conferma che l'estensione delle norme, fatta senza giusto discernimento può condurre, come di fatto avvenne in questo caso, a stabilire condizioni illusorie.

*

Assai maggiori difficoltà s'incontrano nello studio delle deformazioni dei solidi, che devono resistere al carico come travi, cioè esclusivamente per flessione.

In essi infatti, anche nei limiti di sicurezza, gli allungamenti della massa cementizia superano assai i confini delle più grandi deformazioni elastiche del materiale, cosicchè il fenomeno della flessione diventa molto più complesso e più difficile ad interpretarsi, che nel caso di travi metalliche.

Volendo tenere un conto esatto del diagramma rigoroso delle tensioni nel conglomerato di cemento, dato per la prima volta dal Considère, bisognerebbe supporre il modulo di elasticità variabile da punto a punto della trave colla tensione che in essi ha luogo.

Si suole invece semplificare il problema, sostituendo al sistema reale un ente ideale, la cui legge di deformazione si accosti, per quanto è possibile, a quella constatata dall'esperienza, essendo però più facilmente assoggettabile a calcoli.

E già s'introdussero tre diversi modi di ridurre a forma elementare il calcolo delle costruzioni in cemento armato:

1° Sostituendo alla trave di cemento e ferro una trave ideale tutta in cemento, avente un modulo di elasticità uguale in tutti i suoi punti, ma variabile coll'intensità del carico. La sezione di materiale cementizio, che equivale all'armatura in ferro, dovendosi dedurre da questa col moltiplicarla pel rapporto fra il modulo di elasticità del ferro e quello del sistema ideale sostituito, varia coll'intensità della sollecitazione esterna.

Un'applicazione di questo metodo al calcolo delle deformazioni trovasi nel Rendiconto già citato, che ebbi occasione di pubblicare su di alcune esperienze eseguite a Torino.

Il valore del modulo di elasticità, che così si deduce, non è che un valore medio fra quelli che assume in tutti i punti del sistema. Può quindi differire moltissimo dal valore effettivamente raggiunto in alcune parti della costruzione, quando le tensioni unitarie nel cemento, calcolate colla teoria, che si vale delle predette ipotesi, superano quelle, che effettivamente il conglomerato cementizio è capace a sviluppare;

2° Trascurando affatto la resistenza a tensione del cemento, a partire dall'istante in cui il suo valore massimo, calcolato col primo metodo, uguaglia il carico di rottura.

(*) Cfr. « L'Ingegneria Civile », 1903, fasc. 2°.

Secondo questo procedimento, applicato dall'ing. Emperger all'interpretazione delle esperienze citate, si devono distinguere due fasi differenti nel modo di deformarsi di una membratura in conglomerato di cemento inflesso: Una prima fase con freccie molto piccole, che si può studiare col primo metodo, e per la quale anzi è lecito supporre il modulo di elasticità del materiale cementizio costante. Una seconda fase, in cui si ammette pure detto modulo costante, in quanto non si tiene alcun conto della resistenza del cemento a tensione, e si limita quindi il diagramma delle tensioni interne al tratto, in cui gli sforzi sono di compressione, ammettendovi per di più una legge rigorosamente lineare;

3° Sostituendo al diagramma rigoroso delle tensioni (Tav. XII, fig. 1, linea punteggiata) il diagramma ideale proposto dal Considère (area tratteggiata nella stessa fig. 1) che poco se ne scosta e in cui si suppone che il modulo di elasticità sia lo stesso in tutti i punti di una sezione del solido (non in tutte le sezioni della trave), sino alla regione in cui è raggiunto il limite di elasticità a tensione, nella quale, volendosi supporre la resistenza del cemento costante, mentre gli allungamenti variano colla distanza dall'asse neutro, devesi ritenere uguale a zero il modulo.

Nelle ricerche, che si fondano su quest'ultima ipotesi, si ammette inoltre, che le sezioni di una trave, soggetta unicamente al momento flettente, rimangano piane, e che si possa far uso dei principii fondamentali della teoria dell'elasticità.

Tutti e tre i metodi enumerati trovarono applicazioni nei calcoli di stabilità delle travi di smalto cementizio, e il prof. Canevazzi ne fece a questo proposito un diligentissimo studio comparativo nelle sue Memorie sul Siderocemento pubblicate in Bologna gli anni 1901 e 1902, indicandoli rispettivamente coi nomi di: teoria limite inferiore, teoria limite superiore e teoria intermedia.

Invece nei problemi relativi al modo di deformarsi di questi sistemi furono sin ora, per quanto mi consta, adottati soltanto procedimenti fondati sulle ipotesi 1ª e 2ª. Ma è invece della 3ª, come quella che meno si scosta dall'interpretazione rigorosa dei fatti, che conviene valersi, acciocchè i risultati sperimentali, da cui si dovranno dedurre gli elementi indispensabili ai calcoli diretti, abbiano il più largo campo di applicazione. Certo, nemmeno prendendo come fondamento di una teoria delle deformazioni il diagramma di Considére, sarà lecito far uso delle proprietà elastiche del materiale, valutate con esperienze di compressione e di tensione. Da queste in fatti si può dedurre il valore effettivo del modulo di elasticità in corrispondenza alla grandezza della sollecitazione unitaria, non già i valori medi, che si devono introdurre in un metodo approssimato di calcolo.

Però le leggi ottenute, sperimentando direttamente a flessione travi d'un dato tipo, si potranno ritenere esatte anche per esemplari di proporzioni e di struttura alquanto diverse: e la teoria svolta avrà il pregio della massima generalità possibile.

*

Prese dunque a fondamento delle ricerche che ci proponiamo di fare le ipotesi della teoria intermedia, possiamo fin d'ora distinguere nel problema due parti:

1ª Deduzione sperimentale della legge con cui variano l'uno in funzione dell'altra il modulo di elasticità e la pressione unitaria massima dello smalto di cemento in una trave inflessa, o per dir meglio i valori apparenti di queste due grandezze calcolabili colla teoria scelta;

2ª Modo di valersi di detta legge per dedurre dalle misure facili a rilevare in un'esperienza di collaudo le proprietà elastiche dello smalto cementizio.

Trovata la via di risolvere questi due problemi, l'applicazione pratica di essi suggerirà facilmente delle norme sicure per stabilire un valore limite inferiore del modulo di elasticità, atto a garantire la stabilità della costruzione. E questo valore potrà essere scelto, sia fissando un coefficiente di sicurezza rispetto al carico di rottura, se l'esperienza è stata spinta fino a questo estremo stadio, sia avendo riguardo all'entità della pressione unitaria massima apparente.

*

La disposizione più conveniente delle esperienze necessarie alla soluzione del primo quesito è quella che assicura nel tratto centrale della trave la sollecitazione a flessione semplice con un momento di intensità costante M per tutte le sezioni. Ciò si ottiene, per esempio, appoggiando la trave in due punti equidistanti dagli estremi, e applicando a questi ultimi due carichi uguali.

Indichiamo con:

E_c il modulo di elasticità apparente dello smalto cementizio;

E il modulo di elasticità noto del ferro dell'armatura;

$r = \frac{E}{E_c}$ il rapporto fra i due anzidetti moduli;

σ'' la compressione unitaria massima apparente nello smalto;

i la distanza del baricentro della sezione dell'armatura dal lembo inferiore della trave;

h la distanza dello strato neutro dal baricentro della sezione dell'armatura, che supponiamo limitata alla zona tesa;

f la freccia d'incurvamento del tratto compreso fra gli appoggi, dedotta dall'esperienza per un determinato valore del momento M.

Si possono assumere come incognite del problema le tre quantità r, h, σ''. Esse dipendono:

1° Dalle due equazioni della statica, che esprimono le condizioni di equilibrio alla traslazione ed alla rotazione fra le tensioni interne e l'unica sollecitazione esterna esistente, cioè la coppia di momento M;

2° Dall'equazione di elasticità, in cui è data la freccia f per mezzo delle incognite del problema. Scriviamo esplicitamente quest'ultima: Ammesso che le sezioni restino piane, la rotazione relativa di due di esse, distanti dx, è

$$d\varphi = \frac{\sigma''}{E_c}\frac{dx}{h_1} = \frac{r\,\sigma''\,dx}{E\,h_1}, \qquad (1)$$

se con h_1 si indica la distanza dallo strato neutro dell'elemento di sezione più compresso. Quindi l'equazione dei lavori virtuali, scritta per la condizione ipotetica di un carico uguale all'unità, concentrato sulla mezzaria della trave, diventa:

$$f = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x}{2}\, d\phi = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x\, r\, \sigma''}{E\, h_1}\, dx .$$

Nel caso particolare di sollecitazione supposto, essendo il momento flettente uguale in tutte le sezioni del tronco di trave considerato, saranno pure costanti rispetto all'ascissa x le quantità $\sigma'' h_1 r$, quindi:

$$f = \frac{\sigma'' r\, l^2}{8\, E\, h_1} . \qquad (2)$$

Malgrado la semplicità di questa espressione, il calcolo numerico delle incognite sarebbe estremamente laborioso, poichè, combinando la (2) colle due equazioni della statica, anche nel caso meno complesso di una sezione rettangolare, si ottiene un'equazione di 4° grado in σ'', la quale ha per cofficienti dei polinomi con moltissimi termini. Conviene quindi ricorrere ai seguenti metodi grafici.

*

Risoluzione del primo quesito per una sezione rettangolare. — Sia b (Tav. XII, fig. 2) la larghezza della trave ed F la sezione dell'armatura corrispondente. Con un semplice cambiamento di scala il diagramma delle tensioni unitarie si trasforma in quello delle tensioni totali ripartite sulle singole corde della sezione (fig. 1), salvo il tratto occupato dall'armatura metallica. Per semplicità la supporremo concentrata in uno strato di spessore infinitesimo disposto al livello del suo asse baricentrico. Allora la tensione totale T, che essa sopporta, si calcola moltiplicando il modulo di elasticità E del ferro, per la sezione F resistente e per l'allungamento unitario che l'armatura subisce, che vale $h \frac{d\phi}{dx}$.

Si ha dunqne, rammentando la (1),

$$T = r\, \sigma'' \frac{h}{h_1} F . \qquad (3)$$

Però gli elementi che determinano questo diagramma sono tutti ignoti, eccetto l'ordinata costante del suo tratto inferiore E'' C'', che vale la larghezza della sezione b moltiplicata per la tensione unitaria t, corrispondente allo snervamento del conglomerato cementizio. Questa, come è noto, si scosta pochissimo dal suo carico di rottura a tensione, cosicchè è lecito adottare senz'altro quest'ultimo di assai facile determinazione sperimentale.

Immaginiamo ora di aver costruito l'integrale grafica del diagramma delle tensioni totali, proiettandone le ordinate da un polo P, la cui distanza polare, letta nella scala delle lunghezze, indicheremo con a.

Nell'eseguire questa integrazione, assumendo una base E O parallela a quella del diagramma dato (fig. 2), teniamo conto a parte dell'ordinata corrispondente alla tensione T dell'armatura. Si avrà allora alla sinistra di E O un primo tratto rettilineo uscente da E. Esso si raccorda in C' con un arco di parabola C' S corrispondente alla legge lineare, colla quale variano nel tratto superiore le ordinate del diagramma delle tensioni. La parabola ha naturalmente i diametri perpendicolari alla base del diagramma e il vertice Q in corrispondenza al punto B'', in cui le tensioni cambiano segno. Alla destra di E O vi è poi un tratto E K' di ordinata nulla, e, oltrepassata l'armatura, un tratto K S di ordinata costantemente uguale a $T : a$.

Siccome la prima delle equazioni di equilibrio fornite dalla statica dice che il diagramma delle tensioni è di area nulla, sarà necessariamente uguale a zero l'ordinata finale del diagramma integrale; quindi la linea che si svolge a sinistra e quella che si svolge a destra della base E O devono avere il medesimo termine S.

L'area Δ racchiusa dal contorno E C' S K K' per una nota proprietà del diagramma integrale, misura, ridotto alla base a, il momento statico del diagramma delle tensioni rispetto ad una delle ordinate estreme.

Dunque Δ è uguale al momento flettente M, se si leggono le ascisse nella scala delle lunghezze (1 cm. = m cm.), le ordinate in quella delle forze, che si immagina scelta nel tracciamento del diagramma delle tensioni (1 cm. = n kg./cm.) e si moltiplica il prodotto per la base a; o, ciò che fa lo stesso, se si intende che 1 cm^2 di area rappresenti un momento di $m\, n\, a$ kg. cm.

Ciò premesso, scelto come incognita immediata il diagramma integrale, il problema da risolvere si può enunciare in questi termini:

È noto, in seguito a ricerche preliminari, il valore di t, e per ogni esperienza eseguita sulla trave inflessa si misurò la freccia f prodotta da un momento M. Il primo determina l'ordinata $b\, t$ del tratto inferiore del diagramma delle tensioni e quindi la direzione E L del diagramma integrale; la seconda fornisce l'angolo ϕ, che la direzione K B' forma con la base E O. Invero si ha, rammentando prima la (3) e poi la (2):

$$\text{tang}\, \phi = \frac{T : a}{h} = \frac{r\, \sigma'' F}{h_1\, a} = \frac{8\, E\, f\, F}{a\, l^2} , \qquad (4)$$

ove l'ultimo membro contiene tutte quantità note. Trattasi di trovare la posizione del punto B', traccia dell'asse neutro, per la quale, costruito un diagramma della forma precedentemente discussa, esso risulti di area uguale ad M.

Superata questa difficoltà, il diagramma delle tensioni è dato in più modi: sia dalla posizione dei punti B'' e C'', l'ultimo dei quali corrisponde al raccordo fra il contorno rettilineo ed il parabolico, sia conducendo per P il raggio P A parallelo alla tangente alla parabola nel suo punto estremo S, e determinando così la tensione $b\, \sigma''$.

Per ultimo, il valore di T fornito dal segmento K K' permette di calcolare colla (3) il rapporto r.

Ecco ora il modo di procedere per falsa posizione: Scelto un punto B' un po' al disopra del punto di mezzo di E O, si conduca per esso una retta formante l'angolo ϕ con la base O E. Essa determina K e quindi S. Si tratta di segnare l'arco di parabola passante per S, tangente ad E L e avente per asse l'orizzontale per B'.

A questo scopo serve la costruzione indicata nella figura per trovare il punto C′ in cui la tangente E L tocca la parabola. Prolungato E L fino ad incontrare in V la retta S K, e proiettato orizzontalmente B′ in B sulla stessa retta, si costruì:

$$\overline{VC} = \overline{VI} = \sqrt{\overline{VB}^2 - \overline{SB}^2}. \qquad (5)$$

Sull'orizzontale per C trovasi il punto C′ (*).

Si sa allora che pel punto di mezzo N del segmento C′L passa la tangente in S alla parabola, quindi la costruzione della curva, che chiude il diagramma di tentativo, diventa agevolissima.

Si può risparmiare questo lavoro segnando la retta, che congiunge S al punto R, che dista da C′ di $\frac{1}{3}$ C′L. Infatti, questa retta è linea di compenso pel segmento parabolico, e quindi l'area limitata dal contorno poligonale EK′KSR, molto più facile a calcolarsi, equivale all'area Δ del diagramma che corrisponde alla posizione di B′ scelta per falsa posizione.

In generale, Δ non sarà uguale ad M; però, se nella scelta di B′ si procede con un giusto discernimento, facile ad acquistarsi colla pratica, la differenza M — Δ sarà sempre abbastanza piccola, perchè lo spostamento δh di B′, pel quale essa si annulla, si possa calcolare nel modo seguente:

Si consideri l'area Δ come una funzione della distanza h di B′ dall'asse baricentrico K′ dell'armatura, e si calcoli il valore di $\frac{d\Delta}{dh}$ corrispondente alla posizione attribuita a B′ nel tentativo fatto. Con approssimazione tanto maggiore quanto più piccola è la differenza M — Δ, si ha:

$$\delta h = (M - \Delta) : \left(\frac{d\Delta}{dh}\right)_{B'}. \qquad (6)$$

Ora, l'area del diagramma equivalente a Δ, si può scomporre in tre parti:

1ª Il triangolo positivo E L O costante;

2ª Il rettangolo positivo O S K K′ di area

$$H \,.\, h \operatorname{tang} \varphi = h \,.\, \overline{SZ}.$$

3ª Il triangolo negativo L R S di area

$$\frac{1}{2}\,\overline{LS}\,.\,\overline{LR}\,\operatorname{sen}\,S\hat{L}R = \frac{1}{3}\,\overline{LS}\,.\,\overline{SC}.$$

Quindi:

$$\left(\frac{d\Delta}{dh}\right)_{B'} = \overline{SZ} - \frac{1}{3}\,\overline{SC}\,\frac{d\,\overline{LS}}{dh} - \frac{1}{3}\,\overline{LS}\,\frac{d\,\overline{SC}}{dh}. \qquad (7)$$

Ma:

$$\frac{d\,\overline{LS}}{dh} = \frac{d\,\overline{K'K}}{dh} = \operatorname{tang}\varphi, \qquad (8)$$

$$\frac{d\,\overline{SC}}{dh} = \frac{d\,\overline{WV}}{dh} - \frac{d\,\overline{VC}}{dh}.$$

Dalla figura si deduce poi:

$$\overline{WV} = h \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\alpha,$$

e, ricorrendo alla (5):

$$\frac{d\,\overline{VC}}{dh} = \frac{\overline{VB}}{\overline{VC}}\,\frac{d\,\overline{VB}}{dh} - \frac{\overline{SB}}{\overline{VC}}\,\frac{d\,\overline{SB}}{dh}.$$

Finalmente, essendo:

$$\frac{d\,\overline{SB}}{dh} = -1 \quad , \quad \frac{d\,\overline{VB}}{dh} = \frac{d\,\overline{WV}}{dh} + 1,$$

si può scrivere:

$$\frac{d\,\overline{SC}}{dh} = \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\alpha - \frac{\overline{VB}}{\overline{VC}}(1 + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\alpha) - \frac{\overline{SB}}{\overline{VC}},$$

o, dopo semplici trasformazioni:

$$\frac{d\,\overline{SC}}{dh} = -\frac{\overline{BC}}{\overline{VC}}\operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\alpha - \frac{\overline{VS}}{\overline{VC}}.$$

Ma $\overline{BC} \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}\alpha = d$, come risulta dalla figura; dunque:

$$\frac{d\,\overline{SC}}{dh} = -\frac{\overline{VS} + d}{\overline{VC}} = -\frac{\overline{VD}}{\overline{VC}}.$$

Valendosi della precedente eguaglianza e della (8) per trasformare la (7), si ottiene:

$$\left(\frac{d\Delta}{dh}\right)_{B'} = \overline{SZ} - \overline{SY} + \frac{1}{3}\,\overline{LS}\,\frac{\overline{VD}}{\overline{VC}} = \overline{ZY} + \frac{1}{3}\,\overline{VX},$$

ove il segmento V X è il risultato dell'operazione di moltiplicazione grafica del segmento L S per il rapporto $\frac{\overline{VD}}{\overline{VC}}$.

Nella figura sono eseguite le semplici costruzioni necessarie per giungere a questo risultato: Tracciata la retta di compenso S R, al quale scopo è necessario dividere in tre parti il segmento L′C, o, ciò che fa lo stesso, il segmento S C, si proiettò il punto dividente superiore di quest'ultimo parallelamente a B′K in Y. Poi, valendosi degli angoli φ ed α, già costruiti, si dedusse da B C il segmento d. Aggiunto d a V S si costruì V X come 4ª proporzionale dopo V I = V C, V D e V U = L S.

Portato in ultimo Y X′ = $\frac{1}{3}$ V X di seguito a Z Y, si ottenne in Z X′ il valore della derivata dell'area Δ rispetto ad h in corrispondenza alla posizione scelta pel punto B′.

(*) Invero, se riferiamo la parabola al suo asse come ascissa ed alla tangente nel vertice come ordinata, la sua equazione prende notoriamente la forma:

$$y^2 = p\,x; \qquad (*)$$

quindi:

$$2\,y\,y' = p. \qquad (**)$$

Scriviamo la (*) una prima volta per il punto S, ed una seconda volta per C′; poi deduciamo membro a membro questa da quella, e sostituiamo al parametro p il valore dato dalla (**) scritta per il punto C′; otterremo:

$$y^2_s - y^2_c = 2\,y_c\,y'_c\,.\,\Delta x.$$

Ma:

$$y'_c\,\Delta x = VC \quad , \quad y_s = SB \quad , \quad y_c = BC,$$

quindi:

$$\overline{SB}^2 - \overline{BC}^2 = 2\,\overline{BC}\,.\,\overline{VC}.$$

Sostituendo in ambi i membri al posto di B C la differenza V B — V C, e sviluppando, si deduce la (5).

Servendosi di questo segmento nella risoluzione numerica della (6), occorre notare che, se Δ fu valutato nelle unità stesse di M, $\left(\frac{d\Delta}{dh}\right)_{B'}$ è una forza, e quindi vale li segmento Z X′ letto nella scala di 1 cm. $= n \frac{\text{kg.}}{\text{cm.}}$ moltiplicato per a. Così si otterrà in *centimetri* il valore di δh positivo o negativo, secondochè la posizione definitiva di B′ è al disopra o al disotto di quella scelta per falsa posizione; e, tracciando gli elementi essenziali del diagramma integrale, si calcoleranno, come fu detto, i valori di σ'' e di r.

*

Risoluzione dello stesso quesito per una sezione a **T**. — Meno semplice riesce la ricerca per le travi di sezione a **T**, colla quale si interpreta, come è noto, il modo di resistere dei solai con nervature, per la riconosciuta solidarietà della soletta colla costola.

Il procedimento nella sua generalità è identico a quello seguìto nel caso precedente:

Il diagramma delle tensioni totali per le singole corde presenta, in corrispondenza dell'attacco L″ della nervatura alla soletta (area tratteggiata fig. 3, Tav. XII) una discontinuità dovuta al brusco cambiamento di larghezza della sezione.

Quindi, ammessa la legge di ripartizione lineare per le compressioni unitarie, il profilo del primo diagramma nella parte superiore risulta determinato dai segmenti $L_2 A_2$ e $B'' L_1$ di due rette uscenti dal punto B″ situato a livello dello strato neutro.

Il rapporto delle ordinate sovrapposte di queste due rette è uguale al rapporto $\varepsilon = \frac{b_2}{b_1}$ delle larghezze della sezione, misurate in corrispondenza della soletta e della nervatura. Il diagramma integrale sarà dunque limitato nel tratto C′S da due archi appartenenti a parabole di parametri diversi, ma entrambe coll'asse disposto sull'orizzontale per B′ e aventi in comune un punto L′ a livello del profilo inferiore della soletta. Si può subito notare che le tangenti alle due parabole in punti di uguale ordinata devono avere, rispetto alla base E O costanti angolari proporzionali alle ordinate dei corrispondenti diagrammi $B'' A_2$ e $B'' A_1$, cioè nel rapporto fisso ε. In questo stesso rapporto staranno dunque i parametri delle due curve, cosicchè le loro equazioni rispetto all'asse Ω B si possono porre sotto la forma seguente:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Parabola C′ L′} & y^2 = \varepsilon p (x - q_1) \\ \text{Parabola L′ S} & y^2 = p (x - q_2) \end{array}\right\} \qquad (9)$$

ove q_1 e q_2 indicano le ascisse dei corrispondenti vertici contate dal punto Ω.

Allora, dopo aver costruita la retta E G, a cui la parabola C′ L′ deve essere tangente, e avere fissato per falsa posizione il punto B′ e per conseguenza (in virtù della (4) vera anche in questo caso) il punto S, pel quale deve passare la parabola L′ S, si esprimano analiticamente le tre condizioni che determinano le due curve, cioè:

1ª La seconda delle (9) è soddisfatta per $x = \overline{\Omega B}$ ed $y = \overline{BS}$, quindi:

$$\overline{BS}^2 = p\,\overline{\Omega B} - p\,q_2;$$

2ª L'equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon p}{x - q_1}}$, che si ricava dalla prima delle (9), deve mutarsi in un'identità ove si ponga $x = \Omega Q = 2 q_1$, e $\frac{dy}{dx} = \text{tang}\,\alpha$; perciò:

$$4\,\text{tang}^2\,\alpha \,.\, q_1 = \varepsilon p;$$

3ª Le ascisse x nelle due equazioni (9) devono essere uguali, quando si dia alle ordinate il valore $\overline{BL}$; il che permette di scrivere:

$$\overline{BL}^2 + \varepsilon p\, q_1 = \varepsilon\,\overline{BL}^2 + \varepsilon p q_2 .$$

Eliminando fra queste tre equazioni p e q_2, si deduce:

$$2 q_1 \,\text{tang}\,\alpha \,.\, 2\,(\overline{\Omega B} - q_1)\,\text{tang}\,\alpha = \\ = \varepsilon\,(\overline{BS}^2 - \overline{BL}^2) + \overline{BL}^2, \qquad (10)$$

la quale permette di costruire graficamente l'ordinata $Q C' = 2 q_1 \,\text{tang}\,\alpha$ del punto di contatto C′, che, anche nel caso trattato precedentemente, fu scelta come incognita immediata del problema. Nella fig. 3 si vedono eseguite le operazioni necessarie. Dedotto $\overline{SI} = \sqrt{\overline{BS}^2 - \overline{BL}^2}$ ed $L''R = \sqrt{b_1 b_2} = b_1\sqrt{\varepsilon}$, coll'angolo di riduzione di vertice L″ e di lati b_1 e $b_1\sqrt{\varepsilon}$ si costruì $L''N = \sqrt{\varepsilon\,(\overline{BS}^2 - \overline{BL}^2)}$.

Trasportato L″N in L W, preso $W W' = BL$, si ottenne in L W′ la radice quadrata dell'espressione che forma il secondo membro della (10). Questa equazione dice allora che L W′ è media geometrica fra C′Q e 2 B V — C′Q, infatti la (10) si può anche scrivere così:

$$\overline{C'Q}\,(2\,\overline{BV} - \overline{C'Q}) = \varepsilon\,(\overline{BS}^2 - \overline{BL}^2) + \overline{BL}^2. \qquad (10')$$

Questa proprietà fu interpretata graficamente, tracciando con centro in V l'arco di cerchio B C, e determinandovi il punto C di ordinata L W′. Sull'orizzontale per C trovasi il punto di contatto C′ cercato, col quale si possono facilmente tracciare i due archi di parabola.

Anche in questo caso l'area Δ racchiusa dal diagramma integrale e valutata nella scala di 1 cmq. $= mna$ kg.cm., differirà in generale dal momento flettente M. Bisogna quindi calcolare lo spostamento del punto B′, scelto per falsa posizione, a cui corrisponde l'uguaglianza dei valori Δ ed M.

A tale scopo, in conformità a quanto si fece nel caso della sezione rettangolare, si consideri l'area Δ come funzione di h, scomponendola in tre parti: due positive E G O e K′ O S K ed una negativa limitata dal contorno mistilineo C′ L′ S G. Quanto alle prime due non vi è nulla di nuovo a dire.

La terza si valuta più comodamente osservando, che essa, moltiplicata per a, è uguale al momento statico, rispetto

all'ordinata estrema, dell'area $C''\,B''\,L_1\,L_2\,A_2\,G$ del diagramma delle tensioni. Si ha dunque come sua espressione:

$$\frac{1}{6\,a}\left[\overline{A_1 G}\cdot\overline{C''G}^2+\overline{A_1 A_2}\,h_1^2-\overline{L_1 L_2}\,(h_1-s)(h_1+2s)\right].$$

Sostituendo ai segmenti indicati i loro valori in funzione di $\overline{C'Q}$, h_1 ed s la precedente espressione si trasforma così:

$$\frac{b_1\,t}{3\cdot a\cdot\overline{C'Q}}\Big[(\overline{C'Q}+h_1)^3+$$

$$+(\varepsilon-1)\,h_1^3-(\varepsilon-1)\,(h_1-s)^2\,(h+2s)\Big]. \qquad (11)$$

Si può ora calcolarne facilmente la derivata rispetto ad h, notando che $\frac{d\,h_1}{d\,h}=-1$,

e ponendo per brevità $\frac{d\,\overline{C'Q}}{d\,h}=D$.

L'espressione che se ne deduce può essere interpretata con facili costruzioni grafiche; ma esse sono in numero un po' troppo grande, e rendono quindi la ricerca poco pratica.

*

Fortunatamente nella maggior parte dei casi è lecito scegliere il punto L′ come posizione di tentativo di B′, poichè di fatto, date le proporzioni generalmente adottate per le nervature in rapporto alla soletta, l'asse neutro della sezione si scosta di poco dal profilo inferiore della soletta.

Allora la (10′), che abbiamo dedotto nel caso generale, venendo B a coincidere con L, si riduce a:

$$C'Q\,(2\cdot L\,V-C'Q)=\varepsilon\,s^2. \qquad (10'')$$

Costruito quindi (fig. 4) con vertice in L″ un angolo di riduzione di rapporto $\sqrt{\varepsilon}$, e ribaltato su uno dei suoi lati lo spessore s della soletta si dedusse sull'altro $L''N=s\sqrt{\varepsilon}$. Poi centro in V si segnò l'arco di cerchio L C, determinandovi il punto C di ordinata L″N. Sull'orizzontale passante per C trovasi il punto di contatto C′ della parabola colla tangente E G. Invero l'ultima costruzione eseguita, interpretata analiticamente, si riduce alla (10″).

Anche in questo caso, noto C′, il tracciamento dei diagrammi di tentativo si può ultimare in più modi, il che permette una verifica delle costruzioni eseguite. Coincidendo per la scelta fatta l'asse comune alle due parabole colla retta, sulla quale esse devono tagliarsi, il loro vertice comune sarà il punto di mezzo del segmento Ω Q. Anche la tangente in detto punto sarà comune, perchè diretta verticalmente. Quindi il punto di mezzo M del segmento, che su detta tangente staccano i diametri passanti per Ω e per S, è il punto pel quale passa la tangente estrema MS del secondo arco di parabola, che limita il diagramma integrale.

Per verifica la parallela ad MS condotta da P deve passare pel punto A_2 in cui termina l'ordinata estrema del diagramma delle tensioni.

Per calcolare poi $\left(\frac{d\,\Delta}{d\,h}\right)_{L'}$ si cominci ad osservare che, delle tre parti in cui conviene scomporre l'area Δ, la prima ha derivata nulla, e la seconda, precisamente come nel caso della sezione rettangolare, ha per derivata il segmento S Z.

Qualche difficoltà presenta invece la terza parte, la cui area devesi valutare, senza introdurre alcuna ipotesi speciale sulla scelta di B′, ed è quindi data dalla (11). Nella derivata di detta espressione rispetto ad h pongasi $h_1=s$, si ottiene allora, dopo semplici trasformazioni:

$$-\frac{b_1\,t}{3\,a\,\overline{C'Q}^2}\Big[(D\,s+3\,\overline{C'Q})\,\overline{C'Q}^2+2\cdot\overline{C'Q}\cdot s+\varepsilon\,s^2)-$$

$$-2\,(\overline{C'Q}+s)^2\cdot D\cdot\overline{C'Q}\Big], \qquad (12)$$

ove D, come si è detto, indica la derivata di $\overline{C'Q}$ rispetto ad h.

Quindi ricorrendo alla (10′), e sostituendovi, dopo eseguita la derivazione, s ad h_1, L a B, si deduce:

$$D=-\frac{\varepsilon\,s+\overline{C'Q}\,(1+\operatorname{tang}\phi\,\operatorname{tang}\alpha)}{L\,V-\overline{C'Q}}.$$

Numeratore e denominatore sono di facile costruzione grafica. Invero colla spezzata Q U′ U″ U, il cui primo lato è parallelo ad L′ K, si ottiene:

$$L''\,U=\overline{C'Q}\,(1+\operatorname{tang}\phi\,\operatorname{tang}\alpha).$$

Portato quindi, a partire da V, $V\,F=\varepsilon\,s+L''\,U$, si ha in F V C‴ l'angolo di riduzione di rapporto — D, col quale si deduce prontamente, come nella fig. 4 si vede:

$$F\,X=-D\cdot C'\,Q \qquad X\,Y=-D\cdot s.$$

Tracciando poi un triangolo L″ N′ N, i cui lati L″N ed L″N′ valgano rispettivamente $s\sqrt{\varepsilon}$ e $\overline{C'Q}$, mentre il coseno dell'angolo fra essi compreso sia $-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ (la costruzione indicata nella fig. 4 spiega chiaramente come ciò si possa eseguire con facilità, valendosi di elementi già noti) si ha nel terzo suo lato

$$N\,N'=\sqrt{\overline{C'Q}^2+2\cdot\overline{C'Q}\cdot s+\varepsilon\,s^2}.$$

Allora la (12) dopo ovvie trasformazioni, fatte allo scopo di evitare operazioni grafiche sopra segmenti di grandezza troppo differente, può scriversi così:

$$-\frac{2\,b_1\,t}{\overline{C'Q}}\left[\frac{3\,\overline{C'Q}-\overline{XY}}{\overline{C'Q}}\cdot\frac{\overline{NN'}^2}{6\,a}+\frac{\overline{FX}}{\overline{C'Q}}\,\frac{\overline{C'''S}}{3\,a}\right]. \qquad (12')$$

Il termine entro parentesi, calcolato colle costruzioni fatte intorno al punto X, risulta uguale a Z′ Z″. Nel caso della figura poi il rapporto $\frac{2\,b_1\,t}{\overline{C'Q}}$ è così prossimo all'unità che senz'altro — Z′ Z″ si può ritenere uguale alla derivata rispetto ad h della terza delle parti in cui fu scomposta l'area Δ.

Essendo detta parte da considerarsi negativamente, si conclude che:

$$\left(\frac{d\,\Delta}{d\,h}\right)_{L'}=S\,Z+Z'\,Z''.$$

E con questo valore, ricorrendo alla (6) si calcolerebbe la posizione vera dell'asse neutro.

(*Continua*) *Ing.* M. Panetti.

GEOMETRIA PRATICA

LA RISOLUZIONE GENERALE DEL PROBLEMA DI HANSEN

La determinazione simultanea di due stazioni incognite appoggiate a due punti di nota posizione, costituisce il problema di Hansen. La prima trattazione di questo problema risale al 1671 (Collins); diversi altri metodi di trattazione dello stesso problema furono proposti nel 1754 da Lagrive nel suo *Manuel de Trigonométrie pratique* e nel 1802 da Bohumberger.

La trattazione fattane da Hansen rimonta solo al 1841 ed il problema va conosciuto oggi col suo nome forse perchè fu il primo ad introdurre il sistema delle coordinate (*).

La risoluzione generale, indipendente dalla peculiare disposizione dei punti venne poi data dall'Jordau (**).

Un'altra risoluzione analitica dello stesso problema venne proposta col metodo così detto della base fittizia (***).

Un'elegante risoluzione grafica venne di recente proposta dall'ing. F. Hatt, Accademico di Francia (****), giovandosi della posizione dei punti di Collins.

Una risoluzione analitica dello stesso problema l'abbiamo dedotta noi basandosi sopra una proprietà caratteristica del tetragono piano (*****). Non crediamo fuor di proposito offrire con la presente nota una risoluzione generale dell'importante problema di Hansen, derivandola dalla risoluzione generale del tetragono completo da noi proposta in un recente studio (******). Nel problema di Hansen si conosce il lato o base di appoggio $A\,B = c$; gli elementi *misurati* sono: la coppia di *angoli secondari* del tetragono completo $D\hat{C}A = C_1$ $DCB = C_2$ rilevati nella stazione C (si devono supporre generati nel senso dell'ordine ciclico dei vertici del triangolo di riferimento A B C dalla rispettiva ceviana C D) e la coppia di *coordinate angolari* del secondo punto di stazione D rispetto allo stesso triangolo di riferimento, p. es., α, β; la terza γ si conchiude (*******).

Ciò premesso, con la scorta del semplice grafico approssimativo (vedi fig. 56), si possono scrivere subito le seguenti relazioni angolari:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= 2\pi - (\alpha + \beta) \\ C &= C_2 - C_1 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= D\hat{B}C = \alpha + C_2 + \pi = B_2 - B + 2\pi \\ A_2 &= D\hat{A}C = -\beta + C_1 + 3\pi = A_1 + A \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Dalla prima delle relazioni (2) si ottiene facilmente la differenza dei due angoli del tetragono $(B_2 - B)$, se ne determina quindi la somma ricorrendo ad una delle nostre formule, cioè:

$$\frac{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} \gamma} = \frac{\operatorname{sen}(-C_1)}{\operatorname{sen} B_2}, \quad (3)$$

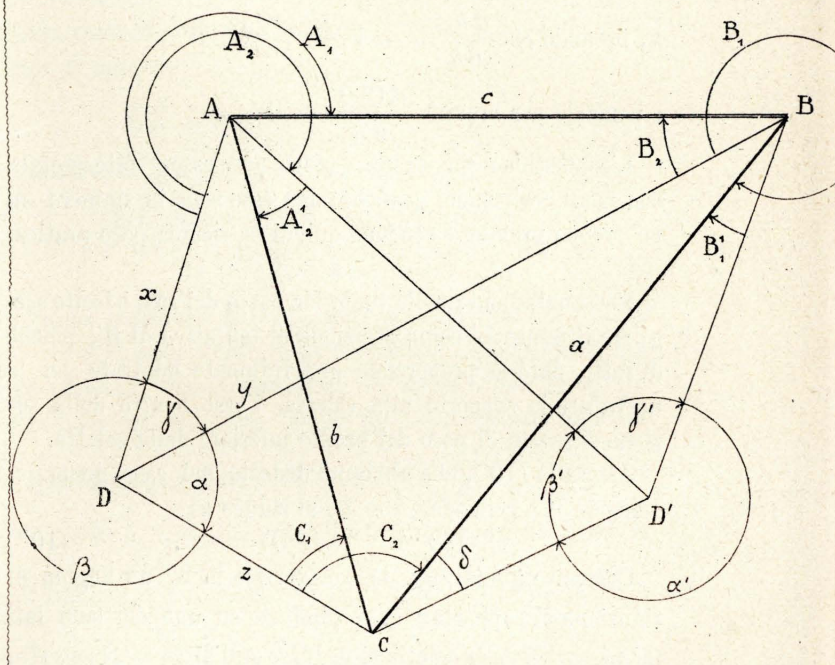

Fig. 56.

da cui si ha il rapporto:

$$\frac{\operatorname{sen} B_2}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}(-C_1)}{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen} C} = \cot\lambda, \quad (4)$$

quindi

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B_2 + B) = \operatorname{tang}\frac{1}{2}B_1 \operatorname{tang}\left(\lambda + \frac{\pi}{4}\right). \quad (5)$$

Da quest'ultima si ricava la somma $(B_2 + B)$ dei due angoli incogniti, quindi conoscendo la differenza e la somma essi sono pienamente determinati; si può avere un controllo delle operazioni numeriche dalla relazione:

$$B + B_1 - B_2 = \pi. \quad (6)$$

Determinato in questo modo l'angolo B si conchiude l'angolo A del triangolo di riferimento, si calcolano colle note formule di trigonometria i due lati a, b ed infine le *coordinate ceviane* del punto D ossia le distanze incognite della triangolazione $D\,A = x$, $D\,B = y$, $D\,C = z$.

*

Si potrebbe invece determinare direttamente l'angolo A e conchiudere B, ricorrendo all'altra relazione analoga alla (3), cioè:

$$\frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen} C \operatorname{sen}\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(-A_1)}{\operatorname{sen} C_2}, \quad (7)$$

(*) Eine Aufgabe der praktischen Geodäsie und deren Auffonsung, « Astronomische Nachrichten », Bd. 18, S. 165, 1841.

(**) Handbuch der Vermessungs' Kunde, 2te Auflage. G. Erede, *Elementi di Topografia.*

(***) Baule Lehrbuch der Vermessungs Kunde, 2te Auflage. G. Erede, *Elementi di Topografia.*

(****) *Utilisation des points de Collins, ecc.* (« Comptes-rendus », 1901).

(*****) G. Delitala, *Nuova risoluzione di due problemi* (« L'Ingegneria Civile, ecc. », Torino, 1901).

(******) G. Delitala, *La risoluzione generale del tetragono completo.*

(*******) Sul problema di Hansen e sue generalizzazioni si trovano alcuni cenni storici in Hammer, « Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie », 2te Auflage.

si ottiene il rapporto:

$$\frac{\operatorname{sen}(-A_1)}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen} C_2}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} C} = \cot\beta\,, \qquad (8)$$

da cui

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A_1 - A) = \operatorname{tang}\frac{A_2}{2}\operatorname{tang}\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right). \qquad (9)$$

Da quest'ultima si ricava la differenza $(A_1 - A)$ dei due angoli incogniti, dei quali se ne conosce la somma dalla seconda delle relazioni (2), quindi essi due angoli del tetragono sono pienamente determinati; il controllo delle operazioni numeriche si può avere dalla relazione

$$A + A_1 - A_2 = 0. \qquad (10)$$

*

Infine si possono determinare contemporaneamente i due angoli incogniti A e B del triangolo di riferimento ricorrendo alla terza delle nostre formule generali analoga alle (3) e (7), cioè:

$$\frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen}\beta} = \frac{\operatorname{sen}(-B_1)}{\operatorname{sen} A_2}\,, \qquad (11)$$

si ottiene il rapporto:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(-B_1)\operatorname{sen}\beta} = \cot\nu\,, \qquad (12)$$

dove A_2 e B_1 sono angoli noti dalle relazioni (2); quindi si ricava:

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A - B) = \cot\frac{C}{2}\operatorname{tang}\left(\nu + \frac{\pi}{4}\right). \qquad (13)$$

Ora, conoscendo la somma dei due angoli A e B, e determinata la differenza, essi due angoli sono pienamente determinati; il controllo delle operazioni numeriche si può avere dalla relazione

$$A + B + C = \pi\,. \qquad (14)$$

È facile vedere che gli ultimi risultati ottenuti nel terzo caso delle nostre formule generali, corrispondono precisamente a quelli del metodo comunemente usato.

*

Si ottiene la verifica delle misure angolari del problema di Hansen, fissando una terza stazione D′ collegata alle prime due, p. es., alla prima stazione C, mediante l'angolo $B\,\hat{C}\,D' = \delta$, e misurando la coppia di *coordinate angolari* rispetto allo stesso triangolo di riferimento A B C, originando così il nuovo tetragono completo col vertice in D′. Per questo secondo tetragono si avranno analoghi *angoli secondari* che indicheremo con le lettere A'_1, B'_1... gli elementi di esso con le stesse lettere munite di apice. Da una semplice ispezione della figura si deducono le relazioni angolari seguenti:

$$\gamma' = 2\pi - (\alpha' + \beta')\,, \qquad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} B'_1 &= D'\,\hat{B}\,C = (\alpha' - \delta) + \pi = B'_2 - B \\ A'_2 &= D'\hat{A}C = 2\pi - (C_2 - C_1 + \delta + \beta') = A'_1 - A + 2\pi \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Dalla prima delle relazioni (16) si ottiene la differenza dei due angoli incogniti B'_2 e B′ e con formula analoga alla (3) se ne determina la somma, quindi si trovano i due angoli B'_2 e B′. Il valore numerico di B′ così ottenuto deve essere uguale a quello trovato dalla considerazione del primo tetragono; in generale ciò non avverrà e la divergenza sarà nei limiti di tolleranza voluta, nel quale caso si assume per valore vero dell'angolo B la media aritmetica dei due valori e si conchiude l'angolo A del triangolo di riferimento.

Si opera in un modo analogo se si parte dalla determinazione diretta di A e si conchiude l'angolo B, cioè si possono scrivere:

$$\left.\begin{aligned} B_v &= \frac{B + B'}{2} \\ A_v &= \frac{A + A'}{2} \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

In ogni caso è verificata la relazione identica

$$A + B = A' + B'\,. \qquad (18)$$

Se indichiamo l'errore $B - B' = \varepsilon$, la correzione angolare sarà data da $\frac{B - B'}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$; ponendo $A - A' = \varepsilon_2$ sarà la correzione angolare $\frac{A - A'}{2} = \frac{\varepsilon_2}{2}$ e risulterà evidentemente

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2\,. \qquad (19)$$

*

Cogli elementi misurati si ottiene anche la compensazione delle misure angolari sul problema di Hansen; del soggetto si è occupato con speciale competenza il chiaro prof. V. Reina dell'Università Romana, in una sua Memoria inserita negli Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino e riprodotta pure dall'autorevole « Rivista di topografia e catasto » (*). In altra successiva Nota il prof. Reina estendeva il metodo di compensazione pel caso generale della determinazione di *n* stazioni appoggiate a due punti noti di posizione e che potremo denominare il *problema di Hansen ampliato in generale* (**). Sul metodo di compensazione ci permettiamo solo osservare che si può ottenere l'equazione di condizione laterale identificando fra di loro i due valori del rapporto $\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$ ricavati rispettivamente dalla relazione (12) e dalla sua analoga pel secondo tetragono col vertice in D′, si otterrà cioè:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta' \operatorname{sen} A_2 \operatorname{sen} B'_1}{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} B_1 \operatorname{sen} A'_2} = 1\,. \qquad (20)$$

E sostituendo in quest'ultima agli angoli secondari dei due tetragoni A_2, B_1; A'_2, B'_1 i loro valori dati dalle relazioni (2), (16), essa diventa:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}(C_1 - \beta)\operatorname{sen}(\alpha' - \delta)}{\operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha' \operatorname{sen}(C_2 + \alpha)\operatorname{sen}(C_2 - C_1 + \beta' + \delta)} = 1\,. \qquad (21)$$

Sotto questa forma l'equazione laterale corrisponde precisamente a quella distinta colla (5) che leggesi nella prima

(*) V. Reina, *Della compensazione nel problema di Hansen* (« Atti dell'Accademia di Torino », 1891).

(**) V. Reina, *Il calcolo di compensazione nel problema generale di Hansen* (« Rivista di Topografia », 1894).

delle due citate Memorie del Reina; inoltre gli angoli A e B del nostro triangolo di riferimento, non sono altra cosa che gli angoli distinti in quella Memoria colle lettere ϕ e ψ. Nel resto si completa il calcolo di compensazione nel modo proposto dal prof. Reina.

Credo utile di far seguire a schiarimento dell'uso delle accennate formule generali, un esempio numerico, assumendo come valori degli angoli misurati, in massima, quelli scelti dallo stesso Reina.

ESEMPIO NUMERICO.

Angoli misurati e conchiusi, base data:

$$\alpha = 60^\circ\,27'\,20'' \qquad C_1 = 30^\circ\,57'\,43''$$
$$\beta = 252^\circ\,41'\,06'' \qquad C_2 = 84^\circ\,11'\,33''$$
$$\gamma = 46^\circ\,51'\,34'' \qquad C = 53^\circ\,13'\,50''$$
$$\alpha' = 267^\circ\,40'\,45'' \qquad \delta = 45^\circ\,58'\,49''$$
$$\beta = 49^\circ\,00'\,16''$$
$$\gamma = 43^\circ\,18'\,59'' \qquad \log c = 3{,}2316160$$

Angoli dedotti e calcolati:

$$B_1 = \alpha + C_2 + \pi = 324^\circ\,38'\,53''$$
$$B'_1 = (\alpha' - \delta) - \pi = 41^\circ\,41'\,56''$$
$$\log \operatorname{sen} \gamma = 9{,}8631315$$
$$\log \operatorname{sen} C_1 = 9{,}7113589$$
$$c \log \operatorname{sen} \beta = 0{,}0201409$$
$$c \log \operatorname{sen} C = 0{,}0963400$$
$$\log \operatorname{cot} \lambda = 9{,}6909713$$
$$\lambda = 63^\circ\,51'\,17''$$
$$\left(\lambda + \frac{\pi}{4}\right) = 108^\circ\,51'\,17''$$
$$\log \operatorname{tang} \left(\lambda + \frac{\pi}{4}\right) = 10{,}4666171$$
$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} B_2 = 9{,}5033567$$
$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(B_2 + B) = 9{,}9699738$$
$$\frac{1}{2}(B_2 + B) = 43^\circ\,01'\,15''$$
$$\frac{1}{2}(B_2 - B) = -\,17^\circ\,40'\,33''$$
$$B_2 = 25^\circ\,20'\,42''$$
$$B = 60^\circ\,41'\,48''$$

$$A_2 = \beta + C_1 + 3\pi = 318^\circ\,11'\,37''$$
$$A'_2 = 2\pi - (C_2 - C_1 + \delta + \beta' = 148^\circ\,12'\,55''$$
$$\log \operatorname{sen} \gamma = 9{,}8631315$$
$$\log \operatorname{sen} C_2 = 9{,}9977652$$
$$c \log \operatorname{sen} \alpha = 0{,}0604940$$
$$c \log \operatorname{sen} C = 0{,}0963400$$
$$\log \operatorname{cot} \beta = 10{,}0177307$$
$$\beta = 43^\circ\,49'\,51''$$
$$\left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) = 88^\circ\,49'\,51''$$
$$\log \operatorname{tang} \left(\beta + \frac{\pi}{4}\right) = 11{,}6901860$$
$$\log \operatorname{tang} \frac{A_2}{2} = 9{,}5810318$$
$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A_1 - A) = 11{,}2712178$$
$$\frac{1}{2}(A_1 - A) = -\,86^\circ\,56'\,04'' + 180$$
$$= 93^\circ\,03'\,56''$$
$$\frac{1}{2}(A_1 + A) = 159^\circ\,08'\,18''$$
$$A_1 = 252^\circ\,12'\,14''$$
$$A = 66^\circ\,04'\,22''$$

Verifica:

$$C = 53^\circ\,13'\,50''$$
$$B = 60^\circ\,41'\,48''$$
$$A = 66^\circ\,04'\,22''$$
$$\varepsilon = 180^\circ\,00'\,00''$$

Determinate le grandezze angolari, si completa la risoluzione del problema di Hansen, ossia il calcolo dei lati, con le solite formule di trigonometria.

Sassari.

Prof. G. DELITALA.

NOTIZIE

Il disegnatore universale. — Da qualche tempo è stato importato in Europa un apparecchio che facilita l'esecuzione dei disegni. L'inventore è un americano degli Stati Uniti, di cui non è dato il nome: il merito di aver fatto conoscere l'istrumento in seno alla Società degl'Ingegneri Civili di Francia a Parigi spetta all'ex-ufficiale del Genio militare degli Stati Uniti, signor Mahan. La sua comunicazione fu accolta con vivo interesse e la Scuola dei Ponti e Strade, pure di Parigi, ne fece subito l'esperimento, affidandolo all'impiegato che prepara i disegni pei diversi Corsi.

In sostanza, quest'istrumento compendia la riga a T, la squadra, le parallele, la scala di proporzione ed il rapportatore, ed ha sopratutto il vantaggio di dare alle rette ed agli angoli un parallelismo assoluto, come non saprebbe fare il più abile dei disegnatori, costretto coi metodi attuali a rimuovere di posto e riprendere alternativamente gli usuali strumenti. Quindi minore l'attenzione, la preoccupazione dello spirito e più che tutto, minore il tempo che si impiega nel lavoro.

Il *disegnatore universale* (come è schematicamente indicato nella figura 57) consta di due parallelogrammi articolati A B *a b*, C D *c d*, i quali sono fra loro collegati in modo che i due lati A B e C D siano fra loro perpendicolari. A tale effetto in luogo dei due lati minori disposti in croce, si ha un solo anello con quattro fori disposti secondo la direzione di due diametri fra loro normali AB, CD, ove si imperniano i lati maggiori dei due parallelogrammi.

Il lato *a b*, base del primo parallelogrammo, è collegato ad una piastra od àncora che serve a fissare l'istrumento, mediante viti, all'angolo superiore sinistro della tavola da disegno. Il lato *c d* del secondo parallelogrammo fa corpo con una parte anulare in cui s'impernia un disco da cui dipartono due braccia rigide, disposte ad angolo retto, destinate a sorreggere righe graduate secondo una data scala. Il detto disco, collegato alla piastra inferiore, ha pure una graduazione incisa sul lembo, da 0 a 90°, ad uso rapportatore, la quale permette di dare

ai regoli quell'inclinazione che si desidera, ad esempio, di 30°, 45°, 60°. Un bottone O al centro del disco graduato serve a manovrare l'apparecchio, che lambisce leggermente il foglio da disegno senza produrre guasti od alterazioni. Le due righe graduate permettendo di poter condurre linee della precisa lunghezza che abbisogna, fanno sì che si

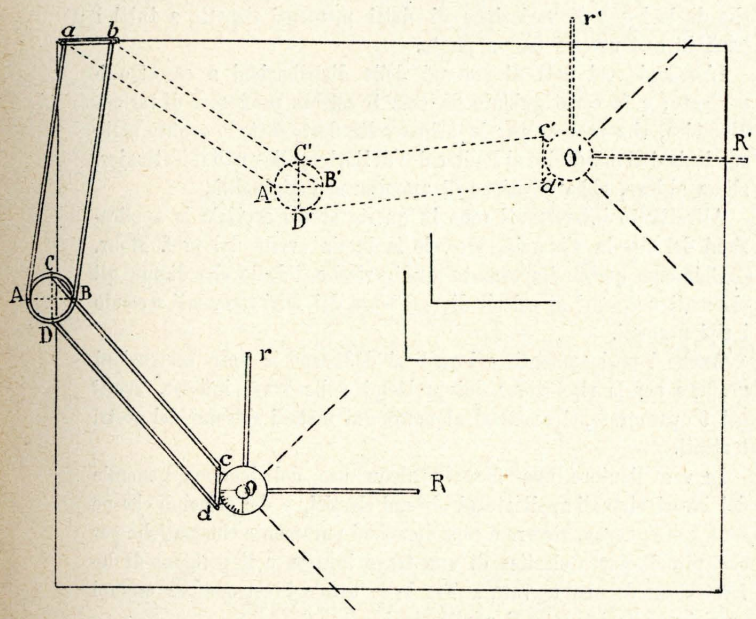

Fig. 57. — Rappresentazioue schematica del disegnatore universale.

può subito adoperare l'inchiostro, mentre anche l'uso della gomma da cancellare può essere risparmiato se si lavora a matita, poichè non vi sono più parti di linee da toglier via.

Questa, per sommi capi, la descrizione dell'apparato, nella costruzione del quale entrano viti, sostegni, arresti automatici, scanalature a coda di rondine ed altre particolarità meccaniche atte a garantirne la solidità, il facile maneggio e la sicurezza di una precisione massima.

Nella figura già citata vedesi in punteggiato una seconda posizione dell'istrumento ed apparisce chiaro come O*r* ed OR siano perfettamente parallele a O′*r*′, O′R′. Vedesi pure la traccia di alcuni angoli che si suppongono già delineati durante soste intermedie dell'istrumento stesso. Con linee a tratti si è poi indicata una posizione a 45° dalle righe.

Il costo medio del disegnatore universale, che va rapidamente diffondendosi in America, specialmente nelle grandi officine, uffici, arsenali, ecc., è di circa 150 lire o poco più; ve ne sono di varie grandezze. Allorchè il disegno che deve eseguirsi ha dimensioni piuttosto ampie, si trasporta l'apparecchio dalla prima ad una seconda, terza... àncora, fissate sul lato superiore della tavola, ben inteso collocando queste placche di base rigorosamente parallele fra loro.

Il risparmio di tempo che si ottiene con questo strumento vuolsi sia di un terzo e perfino della metà del tempo solito. Il suo uso non richiede molta pratica. Lo si dice specialmente utile nei disegni di statica grafica: è pure ugualmente adatto per compilare profili, diagrammi, proiezioni e simili — a base precipua di ascisse ed ordinate — in cui non si debba fare uso di curve e di parti ornamentali. Ad ogni modo l'apparecchio è così presto allontanato dal campo del disegno che, col sussidio degli ordinari compassi scriventi, od a mano, si può tracciare tutto quanto occorre per completare il disegno stesso.

La semplicità dell'istrumento ci fa persuasi che con pochi mezzi ogni disegnatore di professione possa, con una certa facilità — riducendolo alla forma più semplice — costruirsi da per sè un disegnatore universale per farne l'esperimento, a quella guisa che si può improvvisare un pantografo con quattro listellini di legno. Così pure ci sembra che un apparecchio di tal genere, anche grossolanamente costruito, possa servire assai bene all'insegnamento del disegno (pei corsi orali, nei quali si eseguisce sulla lavagna il disegno mentre se ne spiega il procedimento, per es. nell'insegnamento della geometria descrittiva), applicandolo convenientemente sulla cornice delle lavagne, sulle quali è così disagevole l'uso di righe e squadre, chè due sole mani non bastano per tenere a sesto tali strumenti ed a tracciare nel tempo stesso le linee col gesso. Per questo uso, probabilmente, anzichè due regoli, converrebbe fissarne tre, o, per meglio dire, prolungare al disotto quello delle verticali.

In conclusione, il disegnatore universale — che presto vedremo forse in vendita anche in Italia — può rendere notevoli vantaggi a chi si occupa del disegno, e meritava essere accennato ai lettori dell'*Ingegneria Civile*.

A. F.

BIBLIOGRAFIA

L. v. Tetmajer. — **Die Angewandte Elasticitäts-und Festigkeits-Lehre auf Grund der Erfahrung.** — Seconda edizione interamente rinnovata. — Volume di 565 pagine con 274 figure nel testo e 10 Tavole. — Editore Franz Deuticke, Vienna, 1904.

È questo, come il titolo dice, un nuovo trattato sull'elasticità e resistenza dei materiali, scritto facendo un largo uso dei risultati delle esperienze di laboratorio, sia per porre i principii fondamentali delle singole teorie, sia per verificarne e correggerne le conseguenze, secondo il recente indirizzo degli studi di applicazione.

Autore dell'opera è il chiarissimo prof. Tetmajer, nome insigne nel campo di questi studi e nella storia recente del metodo sperimentale, succeduto al Bauschinger sull'ambito seggio di presidente dell'Associazione internazionale per le prove dei materiali, e passato, or son due anni, dalla cattedra e dal laboratorio del Politecnico federale di Zurigo a quella dell'Università tecnica di Vienna.

I programmi, di cui gli fu affidato lo svolgimento nella nuova sede, riguardano tutto intero quel ramo della meccanica applicata, che studia il modo di resistere dei corpi solidi all'azione delle forze, mentre in Zurigo una parte sola di questa materia, insieme col corso di tecnologia dei materiali da costruzione, formava oggetto del suo insegnamento. Quindi la prima edizione di quest'opera, concepita con intenti essenzialmente didattici, era rimasta incompiuta e limitata ai soli bisogni del suo corso d'allora. Adesso l'autore, dandola una seconda volta alle stampe 15 anni dopo, non l'ha soltanto trasformata per tener conto dei nuovi studi, ma l'ha completata, creando un trattato rispondente in modo perfetto alla finalità che il titolo dimostra.

*

La materia è ordinata in 6 capi, dei quali i primi 5 contengono le nozioni preliminari per l'argomento svolto nel 6°, che li supera di gran lunga per numero di pagine. Esso è suddiviso in 8 paragrafi, che trattano ciascuno di uno dei casi praticamente importanti di sollecitazione dei corpi prismatici ad asse rettilineo, o anche curvilineo, ma con raggio così grande, che gli elementi si possano considerare come retti. A questi solidi, che nella tecnica ricevono il nome generico di *travi*, si limita infatti lo svolgimento della materia.

Solo per eccezione, come appendice al paragrafo dello sforzo normale semplice, è svolta la teoria generale dei tubi cilindrici di grande spessore, deducendo le formole del Winkler e citando i risultati delle esperienze fatte per controllarle.

Altri argomenti, come la resistenza delle piastre e la teoria dei solidi ad asse sentitamente incurvato, vi sono omessi. E queste limitazioni rivelano subito che il trattato è scritto sopra tutto per gli ingegneri civili, ciò che del resto appare con evidenza nella scelta delle applicazioni, che illustrano largamente le teorie svolte.

Nè dobbiamo dolercene; poichè l'opera del Tetmajer, che, pel programma impostosi e per la natura dei metodi seguiti, costituirebbe un duplicato di quella del prof. Bach, viene così per la finalità affatto diversa a distinguersi da essa, e a completarla con vantaggio della letteratura tecnica tedesca, proponendosi la prima di indirizzare allo

studio di questa parte della meccanica applicata chi si occupa specialmente di costruzioni, ed essendo invece la seconda scritta pel costruttore di macchine.

*

È notevole l'ordine del lavoro, in cui consiste uno dei suoi caratteri più originali. Per ogni argomento, esposta coi mezzi più semplici possibili la teoria, e date le formole di stabilità per il calcolo delle dimensioni del solido, l'A. riassume i risultati degli studi sperimentali fatti al riguardo, e passa finalmente in rivista le applicazioni più importanti del caso trattato nel campo delle costruzioni.

Queste due ultime parti, che formano direi quasi un'appendice allo svolgimento solito a darsi fra noi ai trattati, meritano un cenno speciale.

*

Le notizie delle ricerche eseguite dai più illustri sperimentatori passati e contemporanei, fra i quali l'autore occupa un bel posto, dimostrano un criterio sicuro di scelta per l'evidenza colla quale i fatti citati confermano leggi teoricamente dedotte, o permettono di formularne altre e di accertare alcune proprietà di materiali che il ragionamento matematico non può scoprire.

E questa non è piccola lode, poichè nel campo pieno di insidie degli studi sperimentali non sono rari i risultati contradditori, fra i quali solo chi ha felice intuizione e lunga pratica può eliminare i meno attendibili con giusto discernimento, come è necessario per assicurare alle conclusioni quel carattere di certezza, che è dote essenziale di un buon trattato.

Considerate nel loro complesso, queste notizie costituiscono quasi un'antologia, che presenta in un quadro relativamente breve e nell'ordine razionale della materia le ricerche più concludenti di laboratorio, ciò che riuscirà utilissimo per chi si dedica a questo genere di studi.

Un altro merito che potrà essere apprezzato da un maggior numero di persone, è quello di fornire una gran quantità di dati pratici sulla resistenza, sulle deformazioni e sulle proprietà elastiche dei materiali d'uso più frequente.

Basti cltare le nitidissime tabelle che riassumono risultati di prove a sforzo normale ed a flessione dei metalli, dei legni, dei cementi e delle pietre, nonchè quelle che si riferiscono all'argomento dei solidi caricati di punta, oggetto per l'A. di una lunga serie dì importantissime ricerche originali, su cui dovremo trattenerci, parlando di un'altra sua pubblicazione.

*

Le applicazioni finalmente trattano quegli argomenti che si studiano in modo sistematico nei corsi pratici delle Scuole di ingegneria.

Sarebbe quindi assurdo cercarvi uno svolgimento esauriente delle singole materie; e l'A. stesso che vi richiama nella breve prefazione l'attenzione del lettore, attribuisce ad esse ed agli esempi numerici, di cui sono corredate, lo scopo di scegliere per i necessari esercizi dell'allievo soggetti concreti, che tengano viva la sua attenzione e lo preparino agli studi di applicazione propriamente detti.

Così passano in questa interessante rivista le funi metalliche, le articolazioni dei sistemi reticolari, gli appoggi a rulli delle travate, le viti e le chiodature di forza (queste ultime minutamente studiate), i sostegni e le colonne per edifizi civili ed industriali, le travi in cemento armato, ecc. E per ciascun argomento sono svolti più esempi dedotti da costruzioni effettivamente esistenti, citate caso per caso (con molta probabilità problemi, di cui ebbe ad occuparsi l'A. nell'esercizio della sua professione), i quali, se tolgono al trattato un poco di quell'unità che dà risalto all'eleganza ed al concatenamento delle dimostrazioni, lo fanno per compenso vivere di quella vita che può solo infondere l'abito di soddisfare ai bisogni dell'ingegneria applicata, per la quale è stato essenzialmente creato questo ramo della meccanica.

*

Non si è parlato dello svolgimento teorico della materia, perchè, riguardando essa un campo ormai così trito, poca libertà di scelta può lasciare a chi si assume il còmpito di farne un trattato scolastico.

Tuttavia non mancano i luoghi non comuni.

Nella prima parte (così si possono indicare come si è detto i primi 5 capi) dopo le generalità sulle grandezze che si presentano nello studio della resistenza e delle deformazioni dei solidi, vi è un intero capitolo, il 4°, in cui si svolge la teoria dei momenti di 2° ordine e d'inerzia delle figure piane con metodo in prevalenza analitico. Vi è di notevole l'uso di un singolare diagramma inedito dello Zeuner, che dà la legge di variazione di detti momenti rispetto a tutti i possibili assi uscenti da un punto.

L'analogia coi noti diagrammi delle distribuzioni a cassetto è evidente; e fu certo guidato da essa il celebre professore di termodinamica, che propose per la prima volta detto metodo grafico nelle sue lezioni di meccanica al Politecnico di Zurigo, alle quali il Tetmajer, allora allievo, ebbe occasione di ammirarne l'originalità.

Altrettanto interessanti sono in questo stesso capitolo le applicazioni del circolo d'inerzia, secondo la teoria svolta dal prof. Mohr.

Chiudono questo importante studio ricche tabelle che dànno gli elementi uecessari ai calcoli di resistenza dei ferri sagomati secondo i tipi normali.

Anche i ragionamenti, coi quali si deducono le note costruzioni grafiche per la risoluzione dei problemi sulle travi inflesse, svolti nel 6° paragrafo, si scostano alquanto dai metodi abituali dei nostri trattati.

In vero l'autore non facendo alcun uso del teorema generale dei lavori virtuali applicato ai sistemi elastici, e dei principii che ne sono conseguenza, ricorre a considerazioni puramente cinematiche per costruire la curva elastica di una trave inflessa o il poligono di deformazione di una travatura. Tre belle tavole illustrano con esempi pratici queste importanti applicazioni.

Notevoli infine sono le ultime pagine, in cui si risolve analiticamente in molti casi importanti il problema del solido prismatico inflesso da forze normali al suo asse geometrico e premuto parallelamente all'asse da forze applicate con eccentricità abbastanza piccola, perchè occorra tener conto dell'incremento del loro braccio di leva dovuto all'inflettersi della trave. Le equazioni differenziali da cui dipende la soluzione sono risolte con semplicità, e il paragrafo termina coll'applicazione delle formole ottenute alla verifica della stabilità di una biella, nel qual caso le forze inflettenti sono il peso proprio e le forze d'inerzia.

Qualche lettore potrà desiderare di vedere illustrata questa teoria, applicandola al calcolo dei puntoni delle incavallature, caricate da arcarecci anche fuori dei nodi. L'A. si limitò invece, come si è detto, ad un esempio scelto nel campo delle macchine; forse perchè ebbe a convincersi, come accadde anche a chi scrive, che nel caso citato il tener conto della flessione non altera sensibilmente i risultati di una verifica fatta, considerando il solido come soltanto caricato di punta. Ligio quindi alla buona massima che in un trattato non si deve discutere ciò che non conduce ad una conclusione pratica, ha taciuto.

*

In conclusione il nuovo volume del chiarissimo prof. Tetmajer riuscirà non solo un prezioso sussidio alle sue lezioni altamente stimate dai numerosissimi allievi di Vienna, ma sarà meditato da quanti si occupano di questo ramo della meccanica, sia per rendersene famigliari le applicazioni all'ingegneria civile, sia per abbracciare in un quadro unico tracciato da un tecnico di tanta competenza i risultati delle esperienze di laboratorio, che ormai per ciò che riguarda la resistenza dei materiali, sono così numerose da non lasciare quasi alcun argomento intentato, e così ben disciplinate da costituire una scienza a sè.

A questi pregi intrinseci aggiungono merito l'esposizione chiara e semplice, l'eleganza e la correttezza dell'edizione.

Chi scrive è quindi certo che all'opera non mancherà una meritata rinomanza anche fra noi, ed una lunga serie di edizioni, come augura; e sarebbe lieto che questo voto giungesse fino all'illustre A., a cui si sente debitore della cortese ospitalità accordatagli anni sono nel laboratorio del Politecnico federale di Zurigo, elevato dal prof. Tetmajer a così bella fama.

M. Panetti.

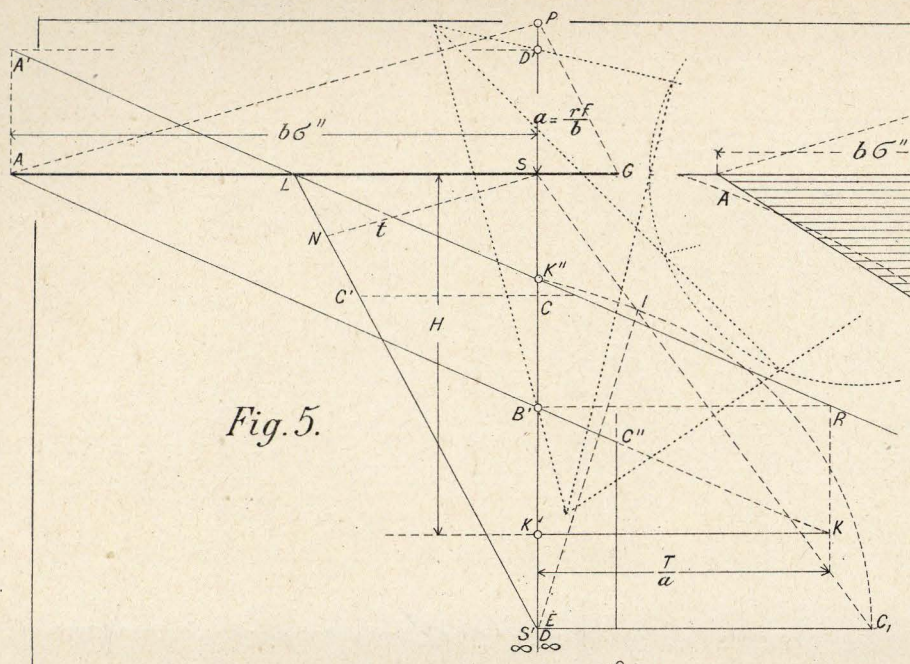

Fig. 5.

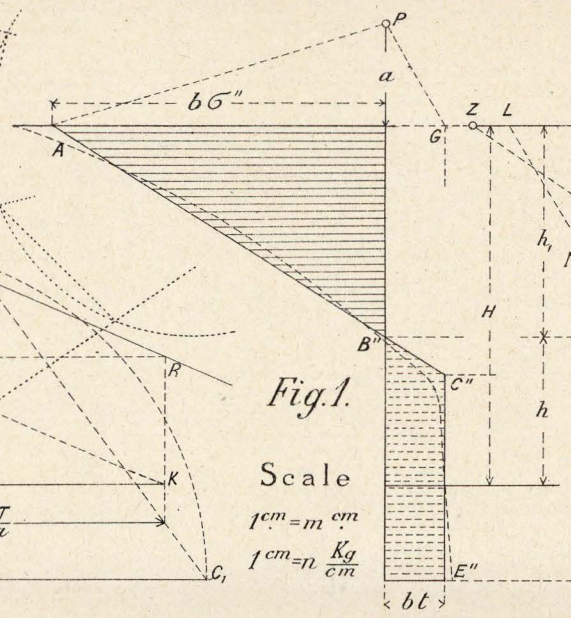

Fig. 1.

Scale

$1^{cm} = m^{cm}$

$1^{cm} = n \frac{Kg}{cm}$

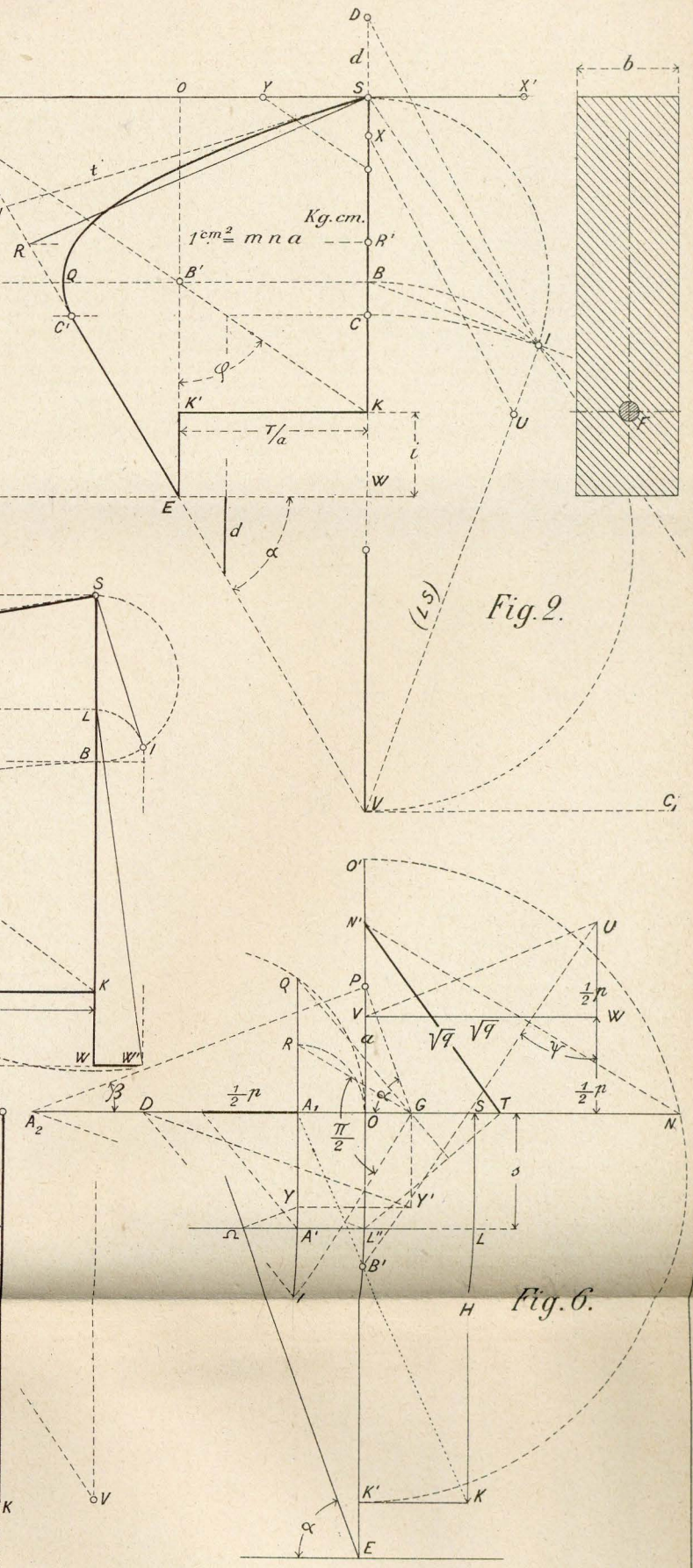

Fig. 2.

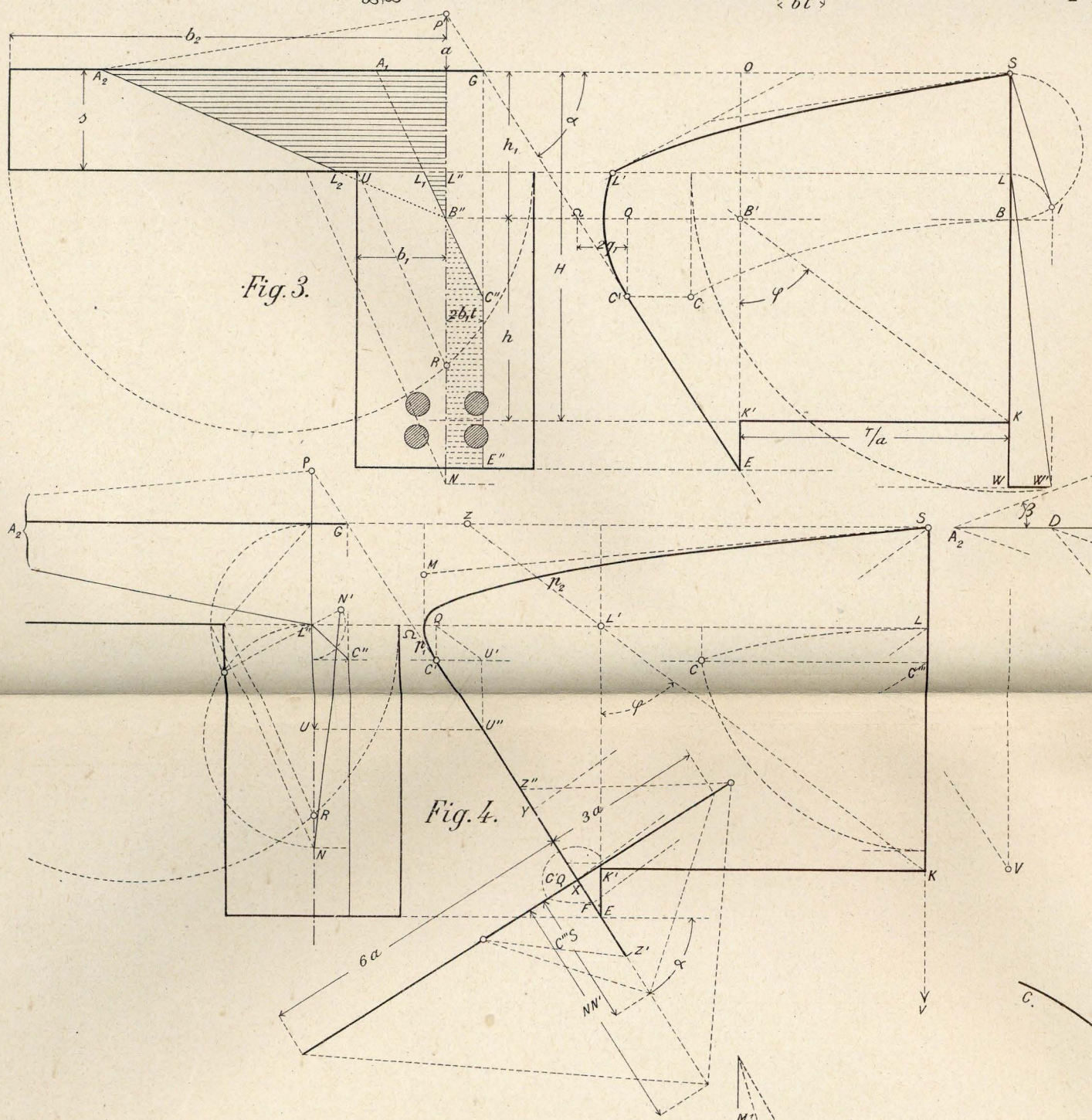

Fig. 3.

Fig. 4.

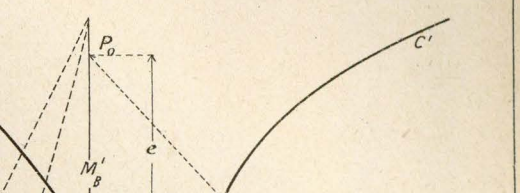

Fig. 6.

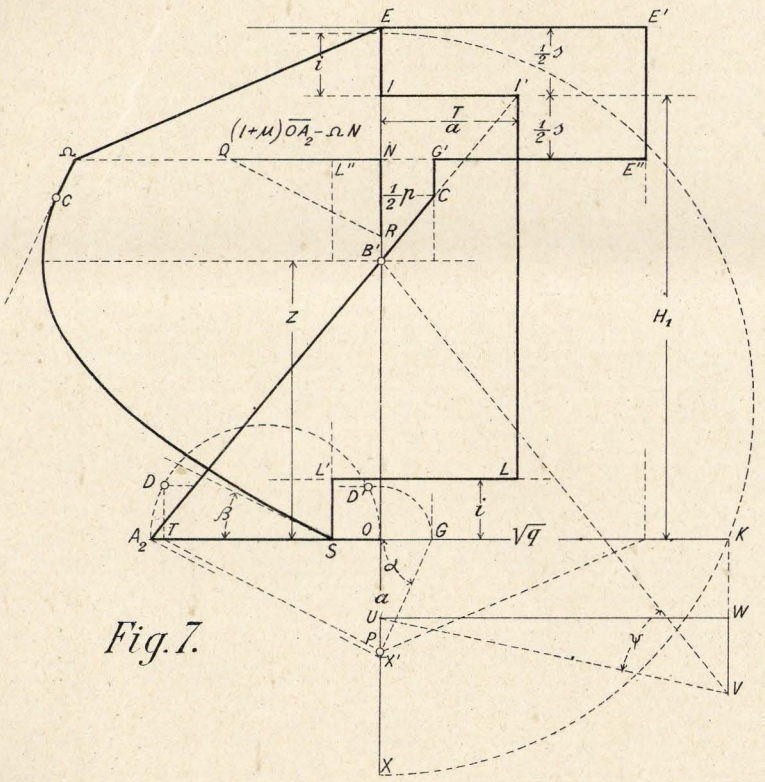

Fig. 7.

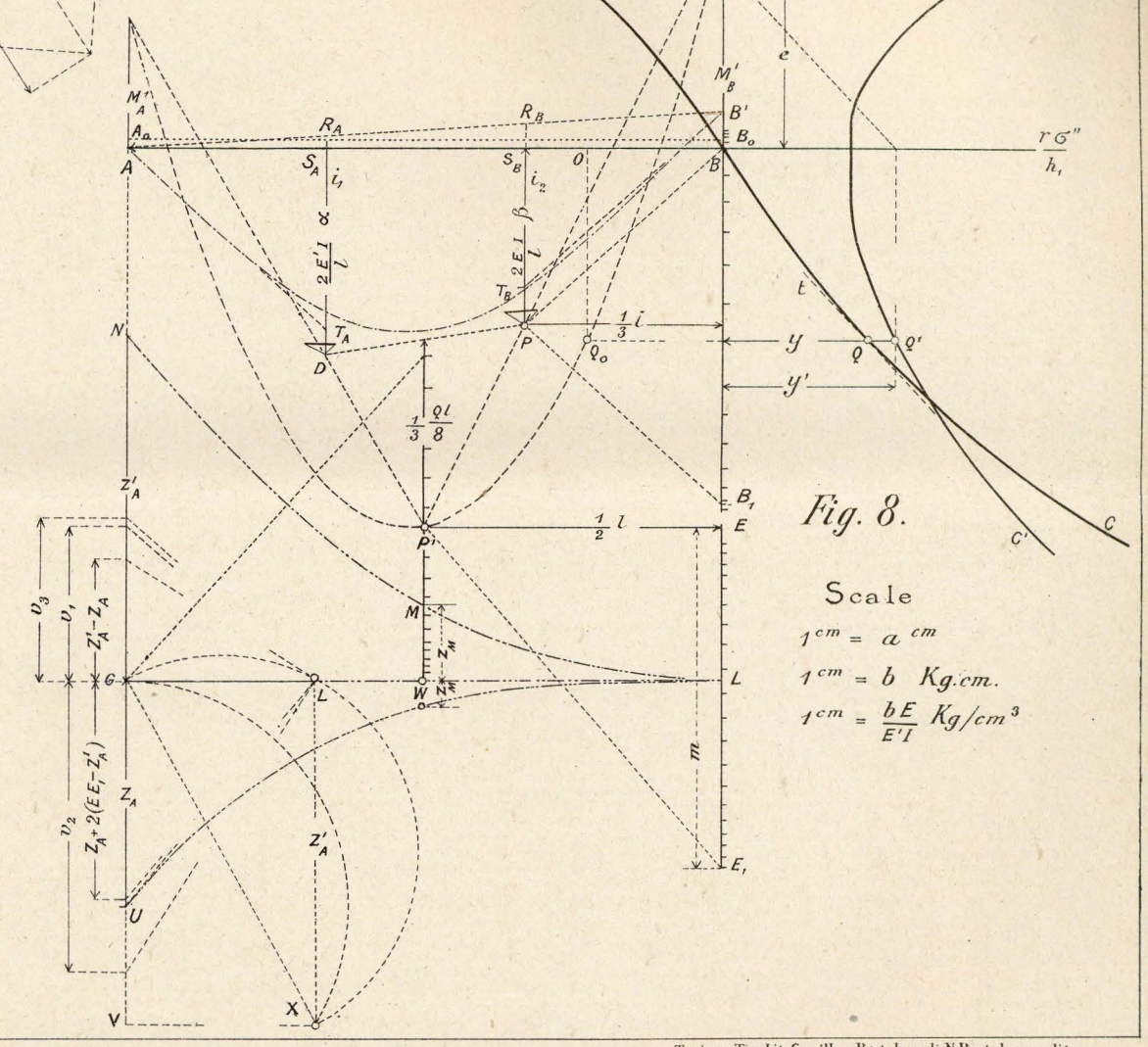

Fig. 8.

Scale

$1^{cm} = a^{cm}$

$1^{cm} = b$ Kg.cm.

$1^{cm} = \frac{bE}{E'I}$ Kg/cm³

Torino. Tip-Lit. Camilla e Bertolero di N. Bertolero, editore.

CALCOLO DELLE DEFORMAZIONI DELLE TRAVI IN CEMENTO ARMATO SECONDO IL DIAGRAMMA DI CONSIDÈRE