

20/ (Gennaio) -1954- ch. 1

# RASSEGNA TECNICA

La "Rassegna tecnica", vuole essere una libera tribuna di idee e, se del caso, saranno graditi chiarimenti in contraddittorio; pertanto le opinioni ed i giudizi espressi negli articoli e nelle rubriche fisse non impegnano in alcun modo la Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino

## La termocinetica, una scienza in evoluzione

Proloquio ai corsi del Politecnico di Torino, letta il 25 novembre 1950

Si espone le linee fondamentali dei progressi effettuati nel campo della trasmissione del calore dal punto di vista teorico sia dal punto di vista sperimentale, mettendo in evidenza l'evoluzione delle dottrine e dei metodi. Si osserva la propagazione dell'energia termica con particolare riferimento alle applicazioni più recenti nel campo delle alte temperature e delle elevate velocità.



Una certa consuetudine di studi mi ha indotto a leggere in questa circostanza di quell'insieme di nozioni sulla trasmissione del calore che per ampiezza di sviluppi scientifici, per varietà e rilievo di applicazioni, per numero di dotti cultori, può dirsi ormai costituisca una disciplina a sè stante, chiamata odiernamente, con una sola parola, termocinetica.

L'espone, sia pure sommariamente, l'evoluzione nel tempo delle dottrine e dei metodi, gioverà a metterne in evidenza gli aspetti più significativi.

### Conduzione.

La termocinetica sorse come scienza in quel periodo fra il '600 e il '700 che segnò un risveglio delle indagini sui fenomeni naturali e pose i fondamenti di molte moderne conoscenze.

Come tecnica essa già fioriva da epoche remotissime con le arti basate sulla cottura dei laterizi e delle ceramiche, sulla fusione dei metalli e del vetro, anche a prescindere dall'impiego del fuoco per le comuni necessità della vita.

Così avvenne per le stesse macchine termiche, che al suo sorgere la Termodinamica scientifica trovò, quasi da un secolo, funzionanti nelle miniere di carbone dell'Inghilterra centrale.

Del resto, come sarebbe riuscito possibile articolarsi e affermarsi ad una scienza termica prima che i concetti basilari di temperatura e di quantità di calore fossero usciti, sotto l'influsso potente del metodo sperimentale, dal vago e dall'incerto in cui si dibattevano da millenni?

È proprio a Galileo, com'è ben noto e da tutti riconosciuto, che si deve la costruzione del primo termometro (1603) ed una serie di geniali esperienze termiche, poi continuate dagli Accademici del Cimento e da altri dotti a Padova ed a Firenze.

Ed è nel '600 che si va lentamente elaborando l'antica idea del calore, come di un fluido immateriale che si trasferisce dai corpi caldi ai corpi freddi.

In questo quadro il Newton, giusto un secolo dopo Galileo, annuncia la legge di proporzionalità fra calore trasmesso e differenza di temperatura e la applica al raffreddamento spontaneo dei corpi (1701).

La Termocinetica nasce così, legata alla Meccanica nelle persone stesse dei suoi Fondatori, ed il le-

game non farà che divenire più stretto nel seguito, assumendo un profondo carattere concettuale.

Trascorso più di un altro secolo dalle prime calcolazioni del Newton, ed enunciati, sia pure imperfettamente, i principi della Termodinamica dal Carnot (1824) e dal Mayer (1842), potrà finalmente il Clausius, a mezzo l' '800, mostrare che il calore non è un fluido immateriale, come non lo è il lavoro meccanico; che queste due grandezze, di tanta importanza nella scienza e nella tecnica, non sono funzioni dello stato dei corpi, ma rappresentano delle energie in transito, in movimento; sono cioè legate, direbbe un filosofo, al divenire delle cose, non alla loro essenza; legate, aggiungiamo, alle modalità della trasformazione e non soltanto alle condizioni estreme, come lo sono invece l'energia interna, quella di posizione e via dicendo.

Questo movimento appunto, o con più rigore, i suoi effetti termici misurabili, nei corpi fissi o mobili, formano l'oggetto proprio della Termocinetica, mentre la Termodinamica ne studia gli effetti meccanici.

Prima ancora che queste idee divenissero patrimonio della cultura scientifica universale e vi agissero in ogni direzione come un fermento straordinariamente efficace, molto cammino era stato percorso nei campi delle discipline ausiliarie, la Termometria e la Calorimetria.

Le temperature invernali più rigide, riprodotte con opportune miscele, e le temperature estive più afose, ritenute comparabili a quelle del corpo umano, avevano fornito i primi capisaldi a Galileo e all'Accademia fiorentina, che usarono divisioni centesimali.

Gli stessi capisaldi furono adottati dal Fahrenheit nel 1727 con una divisione duodecimale dell'intervallo ed una ulteriore suddivisione in otto parti dei gradi così ottenuti; divisione e suddivisione ricopiate da quelle dei piedi e dei pollici che il mondo anglosassone ha nelle linee generali ereditato per le lunghezze dall'antichità classica ed alle quali è ancor oggi così gelosamente attaccato.

Accertata la costanza dei punti di solidificazione e di ebollizione dell'acqua, il Celsius, poco più tardi (1736), fa ad essi riferimento con la sua scala centesimale, entrata poi nell'uso scientifico corrente.

4991

D'altro canto i lavori di *Lavoisier e Laplace* (1790), e di *Dulong e Petit* (1817) avevano posto nelle mani degli studiosi dei metodi calorimetrici abbastanza attendibili.

Erano così gettate le basi sulle quali la Termodinamica poteva essere edificata con sicurezza, almeno per quanto riguardava i fenomeni di pura conduzione, della propagazione cioè nell'interno dei corpi o fra corpi contigui, non accompagnata da moti macroscopici relativi.

Chi assolse in notevole misura questo compito fu un fisico matematico di non comune valore, il *Fourier*, nel 1822.

Partendo da una relazione posta dal *Biot* nel 1804 la seppe generalizzare ed applicare non soltanto ai problemi del regime stazionario, ma altresì a quelli più complicati del regime variabile nel tempo.

Per risolvere questi problemi foggì nuovi ed eleganti strumenti matematici, in particolare gli sviluppi in serie che portano il suo nome e che suscitavano allora non poca sorpresa negli stessi ambienti scientifici.

Si distinguevano infatti in quegli anni le funzioni « matematiche » dalle funzioni « arbitrarie », definite ad esempio da curve tracciate a capriccio. In contrasto con queste idee, il *Fourier* dimostrava, sia pure in modo non completamente rigoroso, che anche le seconde erano sviluppabili in serie trigonometriche e quindi pensabili come somme di funzioni matematiche.

L'opera del *Fourier* intitolata « *La théorie analytique de la chaleur* » ebbe per gli studi termici un'importanza paragonabile a quella che, per gli studi meccanici, aveva avuto una trentina di anni prima la « *Mécanique analytique* » del *Lagrange*.

Tale opera fu ampliata e approfondita dai contemporanei *Duhamel* e *Poisson*, in seguito dal *Lamé*, dal *Kelvin*, dal *Riemann*, dal *Boussinesq*, dal *Beltrami* e rimane ancor oggi di fondamentale importanza, soprattutto per le applicazioni tecniche. Rimane, anche se l'ipotesi della continuità sulla quale essa si basa ha dovuto essere sostituita per altri riguardi da schemi differenti, più adatti a dar ragione dei legami fra la conduttività termica e le proprietà meccaniche ed elettriche dei corpi.

Schemi discontinui hanno difatti introdotto da prima il *Maxwell* per i gas nel 1860, con la sua teoria statistica degli urti elastici fra le molecole che permette di legare la loro conduttività termica alla viscosità e al calore specifico; poi il *Drude* nel 1900 per i conduttori metallici, nei quali lo spostamento di elettroni liberi rende conto e della conduttività termica e di quella elettrica e insieme le collega in note espressioni, vevoli anche alle basse temperature, se pure non in prossimità dello zero assoluto, in cui la resistenza elettrica e non la termica tende ad annullarsi; la *Smoluchowsky* nel 1910 per le polveri, per le quali la conduttività apparente è grandemente ridotta da effetti di discontinuità; il *Debye* nel 1914 per i cristalli non metallici nei quali la trasmissione è supposta avvenire fra gli atomi mediante onde termoelastiche; infine di recente il *Bridgman* (1923) per i liquidi, assimilati a sistemi di oscillatori elastici, vibranti nella

direzione della propagazione come nei fenomeni sonori, e l'*Eucken* (1932) per i solidi misti non metallici e per i corpi porosi, mettendo in relazione la conduttività dei vari mezzi componenti.

I problemi che le teorie classiche risolvevano riguardavano forme geometriche semplici delle superfici isoterme, quali le piane, le cilindriche, le sferiche, mentre il mezzo era supposto omogeneo, isotropo, inerte e con caratteristiche costanti al variare della temperatura. Il *Duhamel* (1892) studiò tuttavia la propagazione nei cristalli, nei quali la conduttività varia con la direzione, mentre la teoria del *Biot* (1804) della sbarra cilindrica fu applicata dal *Despretz* nel 1822 alla valutazione relativa delle conduttività termiche.

L'effetto Joule nei conduttori elettrici e la considerazione di talune reazioni chimiche, in particolare di quelle che avvengono durante la presa dei cementi, indussero in seguito a prendere in esame anche i casi nei quali la propagazione fosse accompagnata da una produzione di calore uniformemente distribuita nello spazio sede del movimento termico. Furono date soluzioni a questi problemi, che hanno interesse anche per l'astrofisica e la geologia, per le stesse configurazioni semplici ora ricordate, oltre che per conduttori prismatici a sezione rettangolare (*Humburg*, 1909).

Passi avanti nella medesima direzione furono recentemente compiuti tenendo conto della variazione di alcune proprietà fisiche con la temperatura, il che ingenera disuniformità nella produzione interna.

Pure recenti sono le trattazioni relative al regime termico nei cavi in olio per trasporto di energia elettrica (*Shanklin e Buller*, 1931); alla distribuzione delle temperature negli straterelli di olio lubrificante che si insinuano nei meati compresi fra gli accoppiamenti cinematici delle macchine (*Kinsbury*, 1933); alla propagazione in mezzi discontinui quali gli avvolgimenti delle macchine elettriche (*Jakob*, 1943); al riscaldamento mediante campi elettrici alternati ad alta frequenza (*J. P. Taylor*, 1943).

La considerazione dei disperdimenti laterali e terminali introduce sia nelle equazioni differenziali dei fenomeni, sia nei rilievi sperimentali dei campi termici delle complicazioni, che sono state però sormontate in non pochi casi, a partire dal già ricordato della sbarra cilindrica, a quelli delle sbarre coniche di alette piane e curve di vario profilo, dal rettangolare al trapezoidale al curvilineo di maggior convenienza riguardo all'impiego del materiale; e vediamo qui, in questa maggior convenienza economica affiorare una delle preoccupazioni più vive dei tecnici nelle loro concrete realizzazioni.

Lo studio del regime variabile nel tempo ha pure compiuto notevoli progressi, particolarmente riguardo agli effetti di mutazioni subitane di temperatura in determinate regioni dello spazio, ad esempio su di una o su entrambe le facce di una lastra piana, sulla superficie di corpi cilindrici o prismatici, o sferici, o cubici pieni o cavi. È facile intravedere le applicazioni di tale studio ai trattamenti termici dei metalli, al comportamento di macchine e di strutture portanti in consimili circo-

stanze ed a cogliere il legame che tale problema ha con la determinazione delle tensioni termiche, talora rilevanti, che vi fanno la loro apparizione, talchè è prezioso l'ausilio che ne trae il costruttore per il corretto proporzionamento di quelle macchine e di quelle strutture, non di rado duramente cimentate.

In luogo di variazioni subitane sono state prese in esame particolari leggi di variazione della temperatura col tempo, dalle lineari alle periodiche, interessanti la costruzione delle pareti dei forni, dei cilindri dei motori alternativi, delle parti attive dei rigeneratori termici a flussi alterni e applicate pure a problemi di geologia e di meteorologia.

Quando si tratta di configurazioni geometriche non semplici si rinuncia ad attaccare direttamente il problema coi soli mezzi dell'analisi matematica e si ricorre ad altri metodi.

Dal confronto delle equazioni differenziali relative a casi aventi qualche aspetto comune si giunge alla conclusione che la loro soluzione può essere identica quando sono uguali i valori numerici di gruppi o moduli adimensionali nei quali compaiono le grandezze caratteristiche, temporali e spaziali della propagazione. Tali moduli sono, in casi particolarmente significativi, contrassegnati col nome di dotti benemeriti di questi studi. Così per la conduzione termica si chiama modulo di *Fourier* il numero che si ottiene moltiplicando la diffusività termica per il periodo (cioè per la durata delle alternative cicliche) e dividendo tale prodotto per il quadrato di una dimensione lineare caratteristica (una distanza, il diametro, ecc.).

Queste considerazioni di carattere generale, e sull'esempio dato dall'*Helmholtz* (1860) e dal *Reynolds* (1883), applicate a molti rami delle scienze fisiche, consentono di ricorrere a modelli e in forza della dimostrata similitudine, di estendere i risultati su questi sperimentalmente conseguiti a intere classi di altri casi, corrispondenti a dimensioni ed a materiali diversi e ad altre differenti circostanze.

L'equazione alle derivate seconde, nota sotto il nome di equazione di *Laplace*, ha un'estesissimo campo di applicazione nella fisico-matematica; basterà accennare, negli schemi abituali, oltre alla conduzione termica, ai moti fluidi non rotazionali, ai fenomeni di diffusione, alla configurazione dei campi elettrici e magnetici.

Il fatto che le funzioni di variabile complessa possono soddisfare tale equazione ha consentito di sviluppare un metodo, detto della *rappresentazione conforme* o *isogonale*, atto a semplificare la soluzione di questi problemi mediante una corrispondenza biunivoca fra due piani coordinati, corrispondenza che non muta il valore degli angoli fra tratti elementari omologhi. Con una scelta appropriata della equazione di trasformazione, che deve soddisfare alle condizioni dette di *Cauchy-Riemann*, si può in tal modo passare da un grafico a struttura complicata ad altro molto più semplice, sul quale nel nostro caso il tracciamento della rete di isoterme e della rete ortogonale di linee di flusso, quindi il calcolo delle quantità di calore, risultano ovvii.

Il *Kelvin* (1880) ha suggerito il metodo delle *sorgenti fittizie*, atto a descrivere un campo, stazionario o variabile, come se fosse generato da un sistema di sorgenti e di pozzi, puntiformi o lineari o superficiali secondo i casi, ad azione continua od anche, per i cosiddetti impulsi termici, istantanea, dai quali pigliassero origine, o nei quali rispettivamente terminassero, le linee di flusso.

Il metodo, combinato col principio di simmetria, è particolarmente indicato per la determinazione della distribuzione delle temperature in mezzi parzialmente o totalmente illimitati; valgono quali esempi quelli di cavi elettrici, oppure di tubi scaldanti o raffreddanti disposti nel terreno.

Recentissimo (*Rosenthal*, 1946) è il metodo che considera il campo termico generato da sorgenti puntiformi o lineari mobili di moto uniforme. Le applicazioni riguardano la saldatura ad arco, la tempera superficiale per immersione, la colata dei metalli nei processi di fusione.

Il calcolo operatorio di *Heaviside*, creato in origine (1893) per la soluzione dei problemi inerenti alle correnti elettriche variabili è pure adatto a trattare fenomeni termici transitori, sostituendo le temperature ai potenziali elettrici, i flussi termici alle intensità di corrente. La definizione degli operatori simbolici di *Heaviside* è fatta in modo da permettere di impiegare con essi le consuete operazioni dell'algebra, pur possedendo proprietà più generali delle ordinarie differenziazioni e integrazioni. Esso trasforma le equazioni differenziali a coefficienti costanti in equazioni algebriche e costituisce pertanto nei casi indicati un rapido mezzo di indagine, permettendo, con operazioni più semplici, di effettuare agevolmente le calcolazioni numeriche.

Un procedimento operatorio, simile a quello di *Heaviside*, è attualmente preferito per la soluzione di complicati problemi di conduzione termica transitoria. È fondato sulla cosiddetta « *trasformata di Laplace* », operazione che muta anch'essa, ma con maggiore generalità della precedente, equazioni differenziali in equazioni algebriche (*Doetsch*, 1925).

Per casi ancora più complicati di quelli affrontabili coi metodi precedenti, e la pratica ne pone sempre più di frequente, non resta che ricorrere a soluzioni approssimate, ottenibili con metodi unicamente numerici, o in parte grafici, o sperimentali.

Dei primi è da ricordare il cosiddetto « *relaxation method* » dovuto al *Cross* (1932) e da lui applicato a problemi di elasticità. Agli effetti degli studi di propagazione termica il mezzo reale è assimilato a un tessuto di cui si immagina di rilasciare le maglie, ottenendosi così una struttura reticolata a elementi rettangolari più o meno fitti. Nei fili di tali maglie si suppongono concentrati i fenomeni in esame e per essi si scrivono le equazioni della propagazione, semplificate perchè ridotte a essere unidimensionali. Ciò permette di passare ai numeri, imponendo dapprima una arbitraria distribuzione dei parametri variabili, nel nostro caso della temperatura.

Le verifiche relative ai bilanci energetici nei nodi di tali maglie difficilmente tornano per la distribuzione tentata. Si ritoccano pertanto i primi

valori ed una mano esperta arriva dopo pochi tentativi a ridurre gli errori al disotto dei limiti praticamente tollerati.

Esempi di applicazione: la propagazione lungo spigoli o diaframmi a elementi piani o curvi di forma accidentata e attraverso strutture portanti multiple munite di pannelli radianti (G. Bozza, 1950).

I metodi grafici, pur non raggiungendo in genere il grado di approssimazione dei precedenti, hanno il vantaggio di visualizzare l'andamento delle linee di flusso e sono spesso preferiti nella tecnica perchè rendono più difficile all'esecutore di cadere in errori banali di ordine di grandezza. Nel caso di flusso stazionario valgono procedimenti già noti in campo elettrico (Lehmann, 1909). Il tracciamento delle reti ortogonali di isoterme e di adiabatiche a maglie curvilinee è reso possibile dalla conoscenza delle condizioni ai limiti, spesso alquanto semplificate, e dall'applicazione di semplici regole grafiche.

Il metodo delle differenze finite, sostituite ai differenziali delle equazioni di partenza, è stato indicato dal Binder nel 1911 e perfezionato da E. Schmidt (1924) che lo ha applicato al problema del muro in regime comunque variabile nel tempo. Non si può spingere oltre certi limiti la suddivisione in strisce di spessore finito per non rendere troppo laboriose le operazioni.

L'indagine sperimentale diretta sui fenomeni di conduzione nei casi complessi ora indicati presenta gravi difficoltà di esecuzione e di interpretazione critica dei risultati. Si è dato perciò largo sviluppo a metodi, pure sperimentali, ma indiretti e più rapidi, fondati sull'impiego di modelli, che traggono profitto da fenomeni diversi dai precedenti, retti, però, sia pure con specifiche limitazioni, da equazioni differenziali dello stesso tipo.

L'analogia fra la conduzione termica e la conduzione elettrica fu già utilizzata dal Kohlrausch nel 1872, poi dal Langmuir nel 1913; lo è attualmente su vasta scala: si impiegano vasche piene di elettroliti e aventi forme simili a quelle dei solidi in esame mentre gli elettrodi adempiono le funzioni di facce conduttrici. Il Beucken (1936) l'ha estesa ai flussi transitori impiegando circuiti con capacità e induttanze.

L'analogia fra campi termici e magnetici diede lo spunto allo Jakob nel 1914 per lo studio di disposizioni coibenti non consuete, il Northrup mostrò (1913) quali larghe possibilità offrisse per le forme geometriche accidentate l'analogia esistente fra campi termici e campi elettrostatici. Il Nusselt mise in rilievo nel 1916, ai fini di queste ricerche, l'analogia coi fenomeni di diffusione di un gas o di un vapore in un'altro, giocando la differenza delle pressioni parziali ed il flusso di molecole un ruolo analogo a quello della differenza di temperatura e rispettivamente del flusso termico.

Del resto anche il flusso di liquidi in mezzi porosi e, comunque, i flussi non rotazionali sono utilizzati allo stesso scopo, assolvendo qui le pressioni l'ufficio delle temperature.

Non occorre sottolineare che tutti questi metodi presentano limitazioni nella loro applicazione,

difficoltà peculiari di esecuzione e cause di errore, ed esigono pertanto delle cautele nella accettazione dei risultati.

### Irradiazione.

La Termocinetica non si limita allo studio dei fenomeni di conduzione pura, nell'interno dei corpi, ma studia anche gli effetti termici che si producono all'esterno, nell'ambiente che li circonda.

Può giovare anche per questo punto il tornare indietro nel tempo per seguire, sia pure sommariamente, lo sviluppo storico delle idee scientifiche al riguardo.

Si comprese presto che l'energia ceduta da un corpo caldo all'ambiente si compone di due parti distinte, che seguono leggi differenti: la prima è ceduta per contatto all'atmosfera, o in genere al fluido che ne tocca la superficie, la seconda, molto maggiore della prima alle temperature elevate, è irradiata a distanza, come avviene dell'energia che ci giunge dal sole attraverso gli spazi celesti nei quali la materia è estremamente rarefatta. Di queste stesse radiazioni solari, oggetto di esperienze da parte di Galileo e di tanti dotti nel '600 e nel '700, in Italia e fuori, il Bouguer nel 1729 valuta approssimativamente, per via calorimetrica, la cosiddetta costante solare, cioè l'energia che arriva normalmente sull'unità di superficie nell'unità di tempo; mentre il Landriani, verso la metà del '700, trova nel rosso il massimo effetto termico delle medesime radiazioni rifratte da un prisma.

La separazione fra energia irradiata e calore ceduto per contatto, fu eseguita in modo sistematico, se pure imperfetto, da Dulong e Petit nelle loro esperienze del 1818.

Un notevole passo avanti fu compiuto dopo che le esperienze del Melloni (1827) ebbero messo in chiaro che le radiazioni, allora dette calorifiche, già studiate dal Leslie (1804) e dal Bérard (1814), seguivano le stesse leggi di quelle luminose. Lo studio della loro propagazione era pertanto ricondotto all'ottica, scienza antica e già in quei tempi notevolmente sviluppata.

Dopo molti infruttuosi tentativi, la valutazione degli effetti termici globali che tale irradiazione comportava in un esteso intervallo di temperature non ricevette una sistemazione soddisfacente che dallo Stefan nel 1879 con la sua legge delle quarte potenze delle temperature assolute. Legge di validità limitata però, come poco dopo mostrò il Boltzmann (1884) con considerazioni teoriche dedotte da una geniale idea del Bartoli (1876), a quel radiatore (e assorbitore) integrale le cui proprietà limiti, valevoli per qualunque lunghezza d'onda, erano state definite dal Kirchhoff nel 1860, e che fu realizzato sperimentalmente come cavità isoterma dal Christiansen nel 1884.

Chiudendo un'altra lunga serie di tentativi con l'uscire dagli schemi classici e dalle precedenti concezioni dell'energia raggiante, partendo cioè dall'ipotesi della natura elettromagnetica e discreta dalle radiazioni il Planck calcolò nel 1900 la distribuzione spettrale dell'energia emessa dal radiatore integrale mediante una relazione in accordo coi ri-

sultati sperimentali spettrometrici e con la citata legge delle quarte potenze.

Risultò fortunatamente possibile, mediante fattori di correzione, applicare approssimativamente tali leggi alla emissione superficiale di una numerosa serie di solidi dielettrici e semiconduttori. Deviazioni più importanti e complesse furono però constatate per i metalli puri. Prescindendo da ricerche meno recenti e conclusive, sono da citare al riguardo i lavori teorici e sperimentali di Schmidt ed Eckert (1927-1935) che hanno mostrato quali modificazioni occorre apportare per questi corpi non solo alla legge di Planck, ma anche a quella antica enunciata per la luce dall'astronomo Lambert fin dal 1760, e nota comunemente sotto il nome di legge del coseno, perchè lega l'intensità dell'energia emessa al coseno dell'angolo di emissione.

L'applicazione di tali leggi e delle loro modificazioni a problemi pratici quale sarebbe il calcolo dell'energia scambiata per irradiazione fra più corpi in presenza aventi diverse temperature superficiali diviene laboriosa per poco che si esca da forme geometriche semplici e quando si voglia tener conto delle riflessioni multiple provocate da imperfetto assorbimento.

Per il calcolo dei fattori di configurazione, legati alla distribuzione dei flussi, può essere utilizzata l'analogia coi problemi di illuminazione; in particolare si può ricorrere alle eleganti soluzioni fornite dal Lambert, ora citato, nella sua classica « Photometria » (1760), e dal Beer nel 1854.

Soluzioni dirette per alcune configurazioni geometriche semplici furono date dal Christiansen nel 1883, che suppose il mezzo trasparente; esse furono poi riprese dal Nusselt (1918).

La diminuzione di intensità in mezzi semitrasparenti fu già espressa dal Biot nel 1836.

Ma fra i corpi in presenza può esistere un mezzo non solo non trasparente, ma attivamente partecipante agli scambi di energia perchè sede esso stesso di una produzione distribuita nello spazio e selettiva nei riguardi delle lunghezze d'onda. È ciò che avviene nei forni a combustione, e che, in genere, interessa l'irradiazione delle fiamme. La conoscenza degli spettri di emissione dell'anidride carbonica e del vapor d'acqua (Paschen, 1893) permise di affrontare e risolvere alcuni di questi problemi di carattere tecnico nel regime stazionario (Nusselt, 1923; Schack, 1924). Furono date soluzioni generiche relative a strati piani (Königsberger, 1903), a sfere (Nusselt, 1923), a cilindri illimitati (ancora il Nusselt nel 1926) o anche di altezza finita (E. Schmidt, 1933), caso quest'ultimo che può interessare i motori a combustione interna. Soluzioni approssimate riguardano forme cubiche e parallelepipedo, spazi compresi fra fasci di tubi, come capita nelle caldaie (Hottel, 1927), e si è riscontrato che tali soluzioni ricordano formalmente quelle che si incontrano in alcuni problemi di riverberazione acustica.

La sola soluzione generale che si conosca per il regime variabile nel tempo è stata data per lo strato piano illimitato dal Pogorzelsky nel 1936.

È stata pure studiata l'emissione di sospensioni di granuli incandescenti in mezzi aeriformi, emis-

sione che riguarda le fiamme luminose in genere e in particolare le grandi fiammate dei forni industriali alimentate con polvere di carbone o con nafta, e che si avvicina a quella del radiatore integrale se la concentrazione dei granuli è elevata.

Anche in questi casi si può tener conto delle riflessioni multiple fra le pareti del forno, progressivamente attenuate dall'assorbimento delle stesse pareti e del mezzo, perchè di questo problema è nota l'impostazione analitica generale (Codegone, 1939), ma la soluzione in casi concreti risulta molto laboriosa. Usualmente però tali riflessioni hanno piccola influenza sul fenomeno globale.

### Convenzione.

La propagazione del calore nei fluidi in movimento è spesso chiamata « convezione termica » per mettere in evidenza la funzione in certo modo « vettrice » delle loro correnti. Essa ha caratteristiche profondamente diverse da quelle della conduzione pura, e per molto tempo fu studiata soltanto in maniera empirica. Così fecero i già citati Dulong e Petit e in seguito il Pécllet (1860), soprattutto per ciò che si riferisce ai moti spontaneamente indotti nell'atmosfera dalle differenze di temperatura.

Si trattava di ricerche scrupolose, ma limitate a casi molto particolari, se pure di grande interesse anche tecnico; comunque mancanti di una visione unitaria, fondata su pochi principi di generale validità, ed in questo stadio empirico rimasero fino a tempi relativamente recenti, fino a quando cioè lo sviluppo dell'aerodinamica fu tale da dare ad esse un contributo decisivo.

È tuttavia da osservare che fin dal 1874 il Reynolds, l'originale indagatore della natura dei moti fluidi, aveva suggerito di collegare la propagazione del calore al fenomeno di attrito, quando il movimento fosse accompagnato dalla produzione di vortici, che provocano un rimescolamento e quindi uno scambio trasversale contemporaneo di quantità di moto e di quantità di calore. E su questa correlazione, rimasta senza sviluppi, egli stesso, come afferma lo Stanton (1897), era tornato per darle una espressione analitica, fondandosi sulla ipotesi di una completa similitudine della distribuzione dei due campi di velocità e di temperatura.

Così è del 1881 una memoria di L. Lorenz nella quale, partendo dalle equazioni di Navier-Stokes per il moto dei fluidi viscosi e da quelle del Fourier per la conduzione termica, viene ricavata l'espressione del flusso termico ceduto da una lastra piana verticale all'aria non artificialmente mossa; mentre è di due anni dopo una memoria del Graetz in cui è risolto il problema nel caso di un fluido in movimento in un tubo, quando però questo moto non sia accompagnato da vortici, ma avvenga come se la corrente fosse suddivisa in tante lamine scorrenti l'una sull'altra senza mescolarsi.

Furono quelli lavori di pionieri, rispettivamente nei tre campi della convezione forzata in regime turbolento, della convezione libera e di quella forzata in regime laminare; lavori però fondati su ipotesi piuttosto restrittive e semplificative, e non accompagnati da quei perfezionamenti teorici e da

quelle verifiche sperimentali condotte e ripetute da differenti ricercatori e con diversi metodi, che insieme conferiscono alle costruzioni scientifiche una garanzia della loro generale applicabilità e validità.

È nel nostro secolo che tali indagini sistematiche vengono compiute, specialmente per soddisfare alle esigenze tecniche, sempre più varie, numerose e pressanti.

La direzione indicata dal *Reynolds* per i moti turbolenti fu seguita dapprima dal *Prandtl* (1910), che adattò anche al flusso termico la sua teoria dello strato limite, adiacente alla parete solida, poi dal *Taylor* (1916), dal *Latzko* (1921), che in particolare studiò l'influenza del bordo d'ingresso nei tubi, dal *Sellerio* (1928), dal *Kármán* (1939) che introdusse l'ipotesi di uno strato di transizione fra quello laminare e la corrente turbolenta, dal *Martinelli* (1947) per i metalli fusi.

La soluzione analitica diretta delle equazioni del campo convettivo libero è ripresa e approfondita dal *Graffi* (1930) da un punto di vista generale, da *Schmidt* e *Beckmann* nel 1930 per la lastra piana verticale e da *Hermann* nel 1936 per i cilindri orizzontali, mentre il problema del *Graetz* è ripreso dal *Nusselt* (1910) e dal *Leveque* (1928) ed esteso ai condotti a sezione rettangolare appiattita ed a sezione anulare dallo *Jakob* (1941).

Si collega a queste trattazioni il caso generale di una corrente fluida che investe un ostacolo, questione di fondamentale importanza per l'aerodinamica, in cui viene dapprima studiata supponendo corrente ed ostacolo alla stessa temperatura. Ma per effetto degli attriti che tale moto eccita nello strato limite aderente alla superficie dell'ostacolo, lo strato stesso diviene sede di una dissipazione di energia meccanica e quindi di una produzione di calore, trascurabile nei moti lenti, ma sempre più rilevante alle alte velocità. Un regime di flusso termico non tarda a stabilirsi, venendo a corrispondere ad una determinata distribuzione di temperature nel fluido e sull'ostacolo.

Se questo è abbastanza coibente, così da rendere trascurabile la conduzione nelle sue pareti, il calore generato passa interamente nella corrente; nasce per tal motivo una convezione termica « sui generis », che qualche Autore chiama « auto-convezione », perchè non prodotta da fonti esterne, ma sorgente spontaneamente dall'interno stesso della zona limitare del fluido in conseguenza del suo moto.

Se poi le pareti dell'ostacolo sono conduttrici e se per di più sono internamente riscaldate o raffreddate il campo termico e il relativo flusso risultano più o meno profondamente modificati, ma sempre in maniera strettamente legata alla distribuzione delle velocità. L'importanza dell'auto-convezione alle alte velocità è tale da ridurre grandemente e perfino da annullare l'efficienza dei radiatori degli aeromobili; da rendere intollerabile per l'aumento di temperatura la permanenza delle persone nelle cabine stagne degli aerei molto veloci, se non si provvede con mezzi adeguati a refrigerarle; da imporre l'impiego di acciaio inossidabile in luogo di leghe di alluminio troppo sensibili all'aumento di temperatura.

Hanno trattato questo interessante argomento,

seguendo diverse ipotesi, il *Pohlhausen* (1921), *Luigi Crocco* (1931-1941), il *Brainerd* e *Emmons* (1941) per la lastra piana; il *Brun* (1934) e l'*Eckert* (1940) per forme geometriche meno semplici (cilindri e profili alari).

Notevoli complicazioni, tuttora in istudio, sono indotte dal superamento della velocità del suono come pure dall'apparire delle onde d'urto, energetici fenomeni termici oltre che meccanici.

In questo campo emergono i lavori di *Carlo Ferrari* (1950).

Produzioni interne di calore, variamente distribuite nello spazio, possono verificarsi, come avviene ad esempio nelle fiamme, anche per effetto di reazioni chimiche. Il caso in cui queste correnti lambiscono pareti solide interessa i forni a combustione e vari apparecchi chimici ed è stato trattato recentemente dal *Véron* (1949).

Gli studi ai quali si è finora accennato sono intesi a ricercare con mezzi puramente analitici la soluzione delle equazioni che regolano i fenomeni ed a porre poi i risultati a confronto con i dati sperimentali.

Tali soluzioni riguardano, come si è visto, casi molto importanti sia dal punto di vista scientifico sia dal punto di vista tecnico, ma sono ordinariamente riferite a forme geometriche semplici, ed ai risultati si giunge spesso introducendo nelle premesse o nello sviluppo dei calcoli delle ipotesi più o meno semplificative.

Si posseggono fortunatamente metodi di indagine applicabili in maniera più generale, ai quali da alcuni decenni si fa ricorso con successo e con sempre maggiore frequenza e che costituiscono una utilissima integrazione dei precedenti.

Si tratta di metodi che richiedono congiuntamente l'impiego dell'analisi matematica e dell'esperienza e che, pur procedendo con modalità diverse, da premesse sostanzialmente interdipendenti, giungono ai medesimi risultati.

Il primo fra essi si fonda, come già si è accennato a proposito della conduzione, sul confronto delle equazioni differenziali relative a sistemi diversi, ma aventi uno o più aspetti comuni che li rendono simili: per esempio il rapporto di lunghezze omologhe, o i rapporti delle velocità o delle temperature prese in un dato istante in punti corrispondenti dei due sistemi, o anche (*Bozza*, 1933) tutti questi rapporti insieme.

Il secondo metodo, più formale ma non meno efficace del precedente, si fonda sull'analisi diretta delle cosiddette « dimensioni fisiche » delle grandezze che intervengono nel fenomeno in esame, dimensioni che in modo sintetico esprimono le relazioni di dipendenza fra le grandezze stesse e quelle poche scelte in generale come fondamentali, quali sono la lunghezza, la massa, il tempo, la temperatura.

Se le ipotesi di partenza sono corrette, e per assicurarci di tale correttezza non v'è di meglio che possedere del fenomeno una teoria già convalidata in qualche caso particolare dall'esperienza, le dimensioni riconosciute nelle premesse dovranno, qualunque sia la complessità del problema, essere ritrovate nei risultati.

Seguendo entrambi i metodi attraverso eleganti

elaborazioni si arriva a stabilire l'espressione di aggruppamenti di grandezze, funzionanti da parametri, la cui identità numerica nei vari sistemi considerati sancisce le condizioni di validità della similitudine e consente di estendere a intere classi di sistemi i risultati ricavati da prove su modelli in casi particolari relativamente poco numerosi.

Tali parametri sono funzioni dello stato fisico e delle caratteristiche geometriche, dinamiche e termiche della corrente e delle condizioni al contorno, ma lo sono in maniera adimensionale, sono cioè rappresentati da numeri puri che non mutano passando da un sistema ad un altro di unità di misura, per esempio dal metrico all'anglosassone, purché si tratti di sistemi internamente coerenti.

Fra questi parametri sono qui da ricordare, oltre a quello del *Reynolds*, già correntemente impiegato nella meccanica dei fluidi; il numero del *Nusselt*, che per il primo ha applicato questi metodi alla Termocinetica, numero in cui compaiono i coefficienti di convezione e di conduzione ed una lunghezza caratteristica; il numero del *Prandtl*, funzione del calore specifico, della viscosità e della conduttività termica del fluido e non delle sue condizioni di moto, il numero del *Grashof*, in cui entrano anche la densità e il coefficiente di dilatazione termica.

I primi tre dominano i problemi della convezione termica forzata, nei quali alle velocità molto elevate interviene anche il noto numero del *Mach*, che stabilisce in che rapporto sta la velocità in esame con quella locale di propagazione del suono. Il quarto parametro interviene nello studio dei fenomeni della convezione naturale.

La teoria della similitudine permette di sostituire a complicati sistemi di equazioni differenziali con numerose variabili in generale insolubili, delle relazioni fra pochi parametri numerici, ma non è in grado di stabilire quale forma debbano assumere tali relazioni.

È questo il compito dell'esperienza, compito per lo più assolto in modo brillante e con risultati straordinariamente semplici, rappresentabili da sintesi grafiche di non comune estensione ed efficacia, anche se con margini d'incertezza spesso non trascurabili.

Sarebbe troppo lunga anche una semplice enumerazione dei casi studiati con l'ausilio di queste teorie, che hanno permesso di organizzare in modo praticamente soddisfacente e con una mirabile semplicità di mezzi, una ricchissima messe di dati sperimentali, antichi e recenti, in intervalli vastissimi di valori numerici.

Come sarebbe troppo lungo enumerare i metodi di misura e descrivere gli artifici di una tecnica sperimentale divenuta estremamente raffinata, tanto da riuscire non solo a effettuare rilievi in serie determinate di punti, ma a fotografare nel loro insieme i campi termici nelle più varie circostanze di moto, e da trarre profitto in maniera conclusiva delle analogie che gli scambi di calore presentano con gli scambi di massa dei processi di diffusione.

Conviene tuttavia almeno accennare che proprio da queste analogie si è preso lo spunto per la trat-

tazione sistematica dei fenomeni di evaporazione e di condensazione, sia di sostanze pure sia di miscele, dei casi cioè in cui alle complicazioni precedenti si aggiungono quelle, non di poco peso, dei mutamenti di stato di aggregazione e della coesistenza di sostanze diverse. È torna opportuno l'accenno perchè questi studi interessano un grandissimo numero di apparecchi di numerose industrie e fino a tempi recenti avevano mantenuto un carattere empirico.

Sono ancora il *Nusselt* (1916) per la condensazione e lo *Jakob* (1928-1936) per la evaporazione che con il *Bošnjakovic* (1930) hanno dato contributi fondamentali alla soluzione di questi problemi, nei loro aspetti di distribuzione continua e di distribuzione sferoidale delle fasi in trasformazione, mentre altri ricercatori hanno considerato l'influenza di aeriformi non condensabili e di altri componenti nelle miscele. I lavori di *Enskog* (1911) e di *W. K. Lewis* (1922) hanno posto su nuove basi lo studio della diffusione accompagnata da propagazione del calore.

Le considerazioni fin qui esposte riguardano fenomeni in certo senso elementari.

Negli apparecchi e negli impianti industriali come nelle stesse costruzioni civili essi appaiono per lo più sovrapposti e strettamente collegati.

Tipico il caso della trasmissione del calore fra due ambienti divisi da una parete, che assume a sua volta numerosi aspetti secondo la forma e la struttura della parete, la natura, lo stato fisico, le condizioni dinamiche dei fluidi che la toccano in regime permanente o transitorio, oltrechè secondo la forma e le condizioni termiche delle pareti circostanti. Mentre la distribuzione non uniforme delle temperature genera sforzi che si aggiungono a quelli prodotti dalle sollecitazioni meccaniche e in taluni casi, come nei corpi cilindrici di caldaie e forni, aggravano in modo preoccupante le condizioni di stabilità.

Qui lo scienziato lascia il posto al tecnico a cui spetta considerare in concreto tutte queste così mutevoli circostanze, e lo fa d'ordinario per giungere al calcolo dei flussi termici globali e al corretto proporzionamento delle varie parti costituenti gli apparecchi e gli impianti.

Con tali considerazioni si entra in una casistica estremamente varia e sempre rinnovata, che va dai riscaldatori a circolazione continua, con correnti concordi, o contrarie, o incrociate; ai rigeneratori termici fissi o mobili nei quali le correnti si alternano periodicamente a contatto di sostanze conduttrici e accumulatrici di energia; agli apparati evaporatori, ai condensatori, ai distillatori e assorbitori di mille fogge; e ancora, da un lato ai forni a combustione od elettrici per il trattamento dei metalli o di altri materiali alle alte temperature, dall'altro agli impianti per il raffreddamento e per la liquefazione e separazione dei gas a bassissime temperature; per venire infine alle più modeste, ma diffusissime applicazioni del riscaldamento degli edifici in cui il trasferimento del calore dai centri di produzione ai luoghi che ne abbisognano è effettuato mediante fluidi intermediari circolanti attraverso reti di condotti.

Una particolare complessità acquistano le applicazioni alle macchine termiche, specie alle moderne turbine a vapore ed a gas le cui pale incandescenti ruotano sotto l'impulso di celerissimi e caldissimi getti fluidi e sono pertanto soggette, nel loro giro vorticoso, al tormento di forze centrifughe e di temperature eccezionalmente elevate.

Dopo che la scienza, ordinatrice paziente e sagace organizzatrice dei dati empirici in una armonica unità concettuale, ha pronunciato la sua dotta parola, molto rimane ancora da fare alla tecnica, l'arte trasformatrice del mondo a servizio dell'uomo. E anche nel campo esaminato, come in tutti quelli che ci presenta la vita, è soltanto su di una collaborazione illuminata e cordiale che può fondarsi e fiorire un duraturo progresso.

**Cesare Codegone**

## BIBLIOGRAFIA (nell'ordine di citazione)

### Parte storica generale.

G. GALILEI - *Opere* - Edizione nazionale (a cura di A. Favaro, F. Del Lungo, U. Marchesini), 20 voll., Firenze 1890-1909.

*Saggi di naturali esperienze fatte nell'Accademia del Cimento*, Firenze, 1667.

I. NEWTON - Phil. Trans. Roy. Soc. London 1701.

S. CARNOT - *Réflexions sur la puissance motrice du feu* - Paris 1824.

R. MAYER - Lieb. Ann. 1842.

R. CLAUDIUS - Pogg. Ann. 1850.

G. FAHRENHEIT - Phil. Trans. Roy. Soc. London 1727.

A. CELSIUS - Abhandl. Schwed. Ges. Wiss. 1742.

A. L. LAVOISIER et P. S. LAPLACE - C. R. Ac. Sc., Paris 1790.

P. L. DULONC et A. T. PETIT - Ann. Chini. Phys. 1817.

### Conduzione.

J. B. BIOT - Bibl. Brit. 1804 - Traile de physique, Paris 1816.

J. B. FOURIER - *Théorie analytique de la chaleur* - Paris 1822.

B. DESPRETZ - Ann. Chini. Phys. 1822.

J. M. DUHAMEL - Journ. Ec. Politechn. 1832.

G. POISSON - *Théorie mathématique de la chaleur* - Paris 1835.

G. LAMÉ - Liouville Journ. Math. 1836-1843 - *Théorie de la chaleur* - Paris 1861.

THOMSON (Lord KELVIN) e P. G. TAIT - *Natural Philosophy* - Oxford 1867.

B. RIEMANN-WEBER - *Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik* - Braunschweig, ediz. varie.

J. BOUSSINESQ - *Théorie analytique de la chaleur* - Paris 1902.

E. BELTRAMI - Mem. Acc. Bologna - 1887.

J. C. MAXWELL - Phil. Mag. - 1860.

P. DRUDE - Ann. Phys. 1900.

M. SMOLUCHOWSKY - Wien. Ber. 1898 - II Int. Congr. on Heat - Wien 1910.

P. DEBYE - *Kinetische Theorie der Materie u. Elektrizität* - Berlin 1914.

P. W. BRIDGMAN - Proc. Nat. Ac. Sciences - 1923.

A. EUCKEN - Forsch. Geb. Ing. Wes. 1940.

K. HUMBURG - Elektr. Masch.-bau - 1909.

H. HELMHOLTZ - Sitz. Ak. Wiss. Wien - 1860.

O. REYNOLDS - Trans. Roy. Soc. London. - 1883.

G. B. SHANKLIN e F. H. BULLER - Gen. Elec. Rev. - 1931.

A. KINSBURY - Mech. Eng. 1933.

M. JAKOB - Trans. ASME - 1943.

J. P. TAYLOR - Trans. ASME - 1943.

Lord KELVIN - Heat (Enc. Brit. 1880).

D. ROSENTHAL - Trans. ASME - 1946.

O. HEAVISIDE - Proc. Roy. Soc. London 1893.

G. DOETSCH - Math. Zeit. 1925, 1928 (*Théorie der Wärmeleitung*).

H. CROSS - Trans. Am. Soc. Civ. Eng. 1932.

R. SOUTHWELL - *Relaxation methods in theoretical Physics* - Oxford 1946.

G. BOZZA - La Termotecnica - 1950.

TH. LEHMANN - Elektr. Zeit - 1909.

L. BINDER - Diss. München - 1911.

E. SCHMIDT - « Föppl Festschrift » - Berlin 1924.

FR. KOHLRAUSCH - Ann. Phys. 1872.

J. LANGMUIR e coll. - Trans. Am. Electr. Chem. Soc. - 1913.

CL. BEUCKEN - Congr. Int. Appi. Electrocalorifiques - Scheveningue 1936.

E. F. NORTHROP - Trans. Am. Electrochem. Soc. 1913.

M. JACOB - Zeit. ges. Kälte Ind., 1922 (Prove del 1914).

W. NUSSELT - Z. VDI - 1916.

### Irradiazione.

P. BOUGUER - *Traité optique sur la gradation de la lumière* - Paris 1760.

J. H. LAMBERT - Photometria - Augsburg 1760.

LANDRIANI - in A. Volta - *Lettere sull'aria infiammabile* - Milano 1778.

J. LESLIE - *Inquire into the nature of heat* - 1804.

M. MELLONI - Phil. Trans. 1827; Pogg. Ann. 1832; Ann. Chini. Phys. 1833.

J. E. BÉRARD - Gilb. Ann. 1814.

J. B. BIOT - Pogg. Ann. 1836.

J. STEFAN - Wien. Ber. 1879.

A. BARTOLI - *Sopra i movimenti prodotti dalla luce e dal calore* - Firenze 1876.

L. BOLTZMANN - Wied. Ann. 1884.

H. KIRCHHOFF - Pogg. Ann. 1860.

C. CHRISTIANSEN - Wied. Ann. 1884.

M. PLANCK - Ann. Phys. 1900.

E. SCHMIDT, E. ECKERT - Forsch. Geb. Ing. Wes. 1935.

A. BEER - *Photometrischen Calcüles*, Braunschweig, 1854.

C. CHRISTIANSEN - Wied. Ann. 1883.

W. NUSSELT - Ges. Ing. 1918.

G. B. BIOT - Pogg. Ann. 1836.

F. PASCHEN - Ann. d. Phys. 1894.

J. KONIGSBERGER - Ann. d. Phys. 1903.

W. NUSSELT - Forsch. Arb. Heft 264 - 1923.

A. SCHACK - Zeit. Techn. Phys. 1924.

W. NUSSELT - Z. V. D. I. 1926.

E. SCHMIDT - Zeit VDI - 1933.

H. C. HOTTEL - Trans. Am. Inst. Chem. Eng. 1927.

W. POGORZELSKY - Ann. Ac. Sciences Techn. Varsovie - 1936.

C. CODEGONE - « L'irraggiamento termico nelle caldaie » nel Vol.: / *combustibili nazionali*, Acc. Scienze Torino - 1939.

### Convezione.

E. PÉCLET - *Traité de la chaleur* - Paris 1860.

O. REYNOLDS - Proc. Manchester Lit. Phil. Soc. 1874.

T. E. STANTON - Trans. Roy. Soc. London - 1897.

L. LORENZ - Wied. Ann. 1881.

L. GRAETZ - Ann. d. Phys. 1883.

L. PRANDTL - Physik. Zeit. 1910.

G. I. TAYLOR - Brit. Adv. Comm. Aeron. - Rep. a. Meni. n. 272 - 1916.

H. LATZKO - Zeit. Angew. Math. Mech. 1921.

A. SELLERIO - Phys. Zeit. 1928.

TH. VON KARMAN - Trans. ASME. 1939.

R. C. MARTINELLI - Trans. ASME. 1947.

D. GRAFFI - Rend. Lincei - 1930.

E. SCHMIDT e W. BECKMANN - Techn. Mech. u. Therm. 1930.

R. HERMANN - VDI Forschungsheft n. 379 - 1936.

W. NUSSELT - Zeit. VDI - 1910.

J. LEVEQUE - Ann. des Mines - 1928.

M. JAKOB e K. A. REES - Trans. Am. Inst. Chem. Eng. 1941.

E. POHLHAUSEN - Zeit. f. Ang. Math. u. Mech. 1921.

L. CROCCO - Rend. Lincei, 1931 - Atti Guidonia, 1939.

H. W. BRAINERD e I. G. EMMONS - Journ. Appl. Mech. 1941.

E. BRUN - C. R. Ac. Sciences - Paris 1934.

E. ECKERT - Zeit. VDI, 1940.

C. FERRARI - Quarterly of Appl. Math. 1950.

M. VERON - Chaleur et Industrie, 1949.

G. BOZZA - *Trasmissione del calore e similitudine*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 1933.

W. NUSSELT - Zeit. VDI, 1916.

M. JAKOB - Forsch. Geb. Ing. Wes. 1928 - Mech. Eng. 1936.

F. BOSNYAKOVIC - Techn. Mech. u. Therm. 1930.

D. ENSKOC - Physik. Zeit. 1911.

W. K. LEWIS - Mech. Eng. 1922.