le moment maximum, si la malchance veut que nous soyions près de la rupture le bras de levier est comme nous l'avons dit, 0,9 h', supérieur à EoA.

Nous sommes donc certains de surévaluer la tension maximum en l'estimant à 1,1x1,1 = 1,2 fois environ la tension initiale.

Il faut que cette tension maximum ne puisse pas devenir égale à la résistance réelle à la rupture, dans le cas où celle-ci viendrait à s'abaisser à sa limite inférieure. Or pour des aciers normaux, et même parmi les moins réguliers de ceux-ci qui nous sont livrés en France, les écarts maximum constatés sont de l'ordre de 10 % de la résistance moyenne, et l'écart probable de l'ordre de 2 %. Si l'on considère comme écart maximun un écart de 6 écarts probables, c'est donc une réduction de 12 % de la résistance moyenne qu'il faut prendre en compte.

On arriverait donc à estimer pour valeur limite de la tension initiale une valeur telle crue:

$$1{,}2\ T_i = \frac{T_r}{1{,}12}$$

ou:

$$T_i = 0{,}75\ T_r$$

En réalité c'est pessimiste car nous cumulons des probabilités; comme nous l'avons dit plus haut, pour éviter ce cumul il faut prendre, comme coefficient de sécurité, non pas 1,2x1,12 mais:

$$1 + \sqrt{0{,}2^2 + 0{,}12^2} = 1{,}23$$

et on arriverait à la règle Ti = 0,8 $T_r$ environ.

Telle est, pour les aciers utilisés couramment, la règle que l'on pourrait proposer: tendre au plus à 80 % de la limite de rupture. La tension permanente sera ce qu'elle sera, et cette simple règle sur la tension initiale tient lieu de toute autre règle de sécurité.

On pourra évidemment contester certaines des évaluations ci-dessus, mais une chose ne peut être contestée, c'est l'expérience. Or, comme je vous l'ai dit tout à l'heure, nous avons actuellement fait 400.000 tensions. Et à combien tendios-nous? Aux environs de 120 kg/mm$^2$, pour des aciers dont les résistances moyennes sont de l'ordre de 150 kg/mm$^2$. Il n'y a jamais eu de désordre. C'est là, si l'on peut dire, un calcul de probabilité expérimental supérieur à tous les calculs théoriques.

Il est toutefois nécessaire de faire une réserve concernant l'allongement de rupture de l'acier. Il est désirable que le moment de rupture ne soit pas diminué par suite d'une valeur trop faible de cet allongement de rupture.

Or si l'on appelle toujours h' la distance du centre de gravité des aciers à l'arête supérieure, la hauteur de la partie comprimée, au moment de la* rupture est 0,2 h'. Les distances de la fibre neutre à l'arête comprimée et à l'acier sont donc dans le rapport de 0,2 à 0,8 c'est à dire de 1 à 4. Le raccourcissement unitaire du béton à la rupture étant d'environ $\frac{3{,}5}{1.000}$, l'allongement de l'acier doit être si on ne veut pas limiter le moment de rupture de $\frac{4 \times 3{,}5}{1.000} = \frac{14}{1.000}$ soit 1,4 %, à partir de la tension initiale (qui correspond au moment de décompression complète de l'arête tendue).

Mais pour obtenir ce minimum, il faut que la valeur moyenne soit plus élevée, à cause de la dispersion, et cela nous amène à demander 3 à '4 %.

En plus il faut compter l'allongement entre 0 et la tension initiale qui est de l'ordre de 1/2 à 1 %. En plus encore, il faut tenir compte de ce que les valeurs indiquées par les laboratoires comprennent l'allongement de striction terme parasite qui, pour les éprouvettes de 200 mm généralement employées, atteint un ordre de grandeur de 1 %. Au total les cahiers des charges devraient donc spécifier des allongements de l'ordre de 5 à 6 %. Des aciers à diagramme trop raides et sans allongement sont dangereux et l'on risque de voir la rupture suivre de très près la fissuration.

* * *

Telles sont, je pense, les éléments principaux d'une codification de la sécurité. Comme vous le voyez, elles se classent en trois catégories; fixation de limites des contraintes, règles de calculs de ces contraintes, élaboration de cahiers des charges pour l'acier.

Il y a là un gros travail à faire, dont une partie devrait être faite sur le plan international.

En attendant, nous pouvons continuer à construire avec confiance, puisque nous savons que la sécurité est au moins égafe à celle des matériaux traditionnels. Mais il faut aller plus loin dans la recherche de la vérité, et, tout en avançant avec prudence, n'accepter les idées reçues qu'après les avoir contrôlées. En ce domaine, comme ailleurs, l'expérience seule peut nous donner les bases de nos études.

Ces résultats expérimentaux, ces statistiques, nous ne les connaissons pas suffisamment encore pour nous y appuyer en toute certitude. Il est essentiel que nous sachions au moins ceux qu'il faut réunir et dans quel sens nous devons y travailler.

Yves Guyon

# Contributo allo studio statico delle volte sottili sghembe senza rigidezza a flessione

*Migliorata per il conoide di primo grado, inteso corne pensilina, la soluzione nota del sistema di equazioni differenziali che ne esprime l'equilibrio, viene data, con eguale approssimazione, la soluzione per lo stesso conoide di primo grado inteso come shed e per il conoide di secondo grado nelle due forme applicative di pensilina e di shed.*

Il sistema di equazioni differenziali

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = -F_x \sqrt{1+p^2+q^2} \\ &\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = -F_y \sqrt{1+p^2+q^2} \\ &r N_x + t N_y + 2s N_{xy} = (pF_x + qF_y - F_z)\sqrt{1+p^2+q^2} \end{aligned}\right\} \quad (1\ a\text{-}b\text{-}c)$$

con le posizioni

$$N_x = N_x \sqrt{\frac{1+q^2}{1+p^2}}, \quad N_y = N_y \sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}} \qquad (2\ a\text{-}b)$$

e le notazioni del Monge

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \quad (3a \div e)$$

esprime, corne è noto [1], l'equilibrio di una volta sottile sghemba senza rigidezza a flessione $N_x$ e $N_y$ sono le tensioni unitarie oblique , $N_{xy}$ quella tangenziale, parallele alle intersezioni del piano

[1] In forma leggermente diversa e con altre convenzioni sui segni, questo sistema si trova nella « *Mémoire sur l'étude générale de surfaces gauches minces* » di B. LAFFAILLE pubblicata nel III volume di memorie dell'Associazione internazionale dei ponti e strutture e nella memoria « *Étude statique des voiles minces en paraboloide hyperbolique travaillant sans flection* » di F. AIMOND, comparsa nel IV volume di memorie délia stessa Associazione.

[2] In générale la forza interna che agisce su di un elemento infinitesimo dell'area di una sezione, riferita all'area dell'elemento stesso, e cioè la tensione nel punto considerato, viene decomposta nella tensione normale, secondo la normale nel punto in questione, e nella tensione tan-

tangente alla superficie nel punto considerato con i piani coordinati $y = 0$ e $x = 0$, moltiplicate per lo spessore della volta. Converremo di considerare positive le prime due quando generano trazioni; riterremo positiva la terza, quando ha il senso delle coordinate crescenti nel sistema di coordinate ausiliarie X, Y con origine in $\Omega$[3] (figura 1) ed in una sezione nella quale la tensione obliqua ha il senso dell'asse delle coordinate positive. $F_x$, $F_y$ e $F_z$ sono le proiezioni sugli assi coordinati x, y, z, della forza esterna agente sull'unità di superficie, nel punto in questione, ed il loro senso positivo coincide con quello degli assi coordinati.

*Conoide di primo grado come pensilina.*

In coordinate ortogonali, per il conoide di primo grado (paraboloide iperbolico) disposto come nella figura 2, venne data [4], per il peso proprio e introducendo alcune semplificazioni, la seguente soluzione del sistema (1):

$$\left.\begin{aligned} N_x &= 0 \\ N_y &= 0 \\ N_{xy} &= -\frac{p}{2h} \end{aligned}\right\} \quad (4\ a\text{-}b\text{-}c),$$

dove p è il peso proprio riferito all'unità di superficie ed h vale $\frac{z}{xy}$.

Vediamo come si possa ottenere una maggiore approssimazione. L'equazione di un conoide di primo grado, riferito ad assi coordinati disposti come in fig. 2, è:

$$z = hxy\,. \qquad (5)$$

Ne segue

$$p = hy,\ q = hx,\ r = 0,\ s = h,\ t = 0, \quad (6\ a\ 4\text{-}\ e)$$

ed osservando che nel caso attuale $F_x = F_y = o$, $F_z = p$, il sistema (1) si trasforma nel seguente:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} &= 0 \\ N_{xy} &= -\frac{p}{2h}\sqrt{1 + h^2(x^2 + y^2)} \end{aligned}\right\} \quad (7\ a\text{-}b\text{-}c).$$

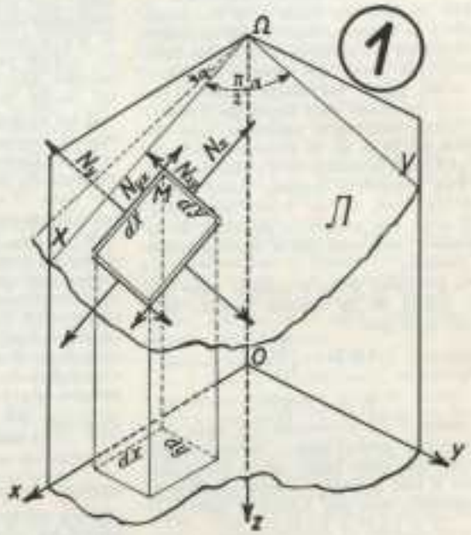
genziale, secondo il piano della sezione. Queste due componenti formano perciò tra di loro un angolo di 90°. Nello stabilire il sistema (1) ci serviamo di coordinate oblique; risulta opportuno pertanto decomporre la tensione secondo le direzioni degli assi, limitando l'elemento di area del quale studiamo l'equilibrio secondo le stesse direzioni.

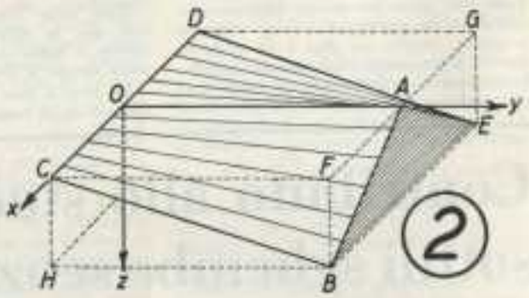
Le due componenti della tensione non sono più perpendicolari tra di loro. Una delle componenti, quella tangenziale, è ancora parallela alla sezione, ma l'altra non è più normale ad essa e per questo l'abbiamo chiamata tensione obliqua.

[3] Il sistema di coordinate ausiliarie X e Y, variabile in generale da punto a punto, ha servito per stabilire le equazioni differenziali, ed in particolare per ricavare le forinole di geometria analitica adoperate. Ad esso abbiamo dovuto riferirci ancora per stabilire quando debba intendersi positiva la Nxy; nel corso delle presenti ricerche, tutte le volte che parleremo degli assi coordinati, ci riferiremo al sistema x, y, z.

[4] ISSENMANN PILARSKY, *Calcai des voiles minces en beton arme*, Dunod, Paris, ARCANGELI, *Le costruzioni in cemento armato*, IV edizione, Hoepli, Milano.

Sviluppando in serie il radicale che figura nella (7c) ed arrestandoci ai termini di secondo grado; calcolando le derivate di $N_{xy}$ rispetto ad y e ad x ed introducendole nelle (7a) e (7b); integrando la prima con l'esigenza che lungo il margine OA (figura 2) si annulli la $N_x$ [5]; integrando la seconda




con l'esigenza che lungo il margine libero CD si annulli $N_y$, otteniamo la soluzione

$$\left.\begin{aligned} N_x &= \frac{1}{12}ph\sqrt{\frac{1 + h^2y^2}{1 + h^2x^2}} \cdot xy \cdot [6 - h^2(x^2 + 3y^2)] \\ N_y &= \frac{1}{12}ph\sqrt{\frac{1 + h^2x^2}{1 + h^2y^2}} \cdot xy \cdot [6 - h^2(3x^2 + y^2)] \\ N_{xy} &= -\frac{p}{2h}\sqrt{1 + h^2(x^2 + y^2)} \end{aligned}\right\} \quad (8\ a\text{-}b\text{-}c)$$

Con le esigenze formulate, abbiamo esaurito le costanti di integrazione disponibili. I vincoli dovranno assumere ai margini le forze che vi si presentano, rispettando l'ipotesi fondamentale di inesistente rigidezza a flessione.

Sviluppando in serie i radicali contenuti nelle

[5] Ad evitare la disposizione di una membratura, lungo il margine OA, la quale assuma la risultante delle azioni provenienti dalle due parti della volta.



(8a-b-c) ed arrestandoci ai termini di primo grado, otteniamo ancora

$$\left.\begin{aligned} N_x &= \frac{1}{48}ph\,(2 + h^2y^2)(2 - h^2x^2)\,xy\,[6 - h^2(x^2 + 3y^2)] \\ N_y &= \frac{1}{48}ph\,(2 + h^2x^2)(2 - h^2y^2)\,xy\,[6 - h^2(3x^2 + y^2)] \\ N_{xy} &= -\frac{p}{4h}[2 + h^2(x^2 + y^2)] \end{aligned}\right\} \quad (9\ a\text{-}b\text{-}c)$$

Se, con riferimento alla figura 2, assumiamo OC = 2,20 m, OA = 4,50 m, BF=1,00 m, p = 240 kg/m$^2$, comprendendo in quest'ultimo valore tanto il peso proprio quanto il sovraccarico, per il punto B di coordinate x = 2,20, y = 4,50, z = l, le (4), (8) e (9) ci forniscono nell'ordine, i seguenti valori delle tensioni:

| | | |
|---|---|---|
| $N_x = 0$ | $N_x = 113{,}7$ kg/m | $N_x = 114{,}7$ kg/m |
| $N_y = 0$ | $N_y = 105{,}3$ » | $N_y = 103{,}7$ » |
| $N_{xy} = -1188$ kg/m | $N_{xy} = -1331$ » | $N_{xy} = -1340$ » |

Con i valori dati dalle (8), le (7a) e (7b) diventano:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = \frac{1}{2}phy\left(1 - \frac{h^2}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{\sqrt{1 + h^2(x^2 + y^2)}}\right).$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = \frac{1}{2}phx\left(1 - \frac{h^2}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{\sqrt{1 + h^2(x^2 + y^2)}}\right).$$

Nella seguente tabella sono raccolti alcuni valori numerici di queste espressioni:

| Punto | Coordinate x | y | z | $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y}$ | $\frac{\partial v_y}{\partial_x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| B | 2,20 | 4,50 | 1 | — 1,13 127 | — 0,05 116 |
| A | 0 | 4,50 | 0 | — 0,74 727 | 0 |
| O | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| C | 2,20 | 0 | 0 | 0 | — 0,20 373 |

Le deviazioni dallo zero, nel caso numerico considerato, non sono di grande entità; esse sono dovute allo sviluppo in serie di potenze limitato ai termini di primo grado. Con le (4) non si hanno deviazioni, ma il valore di $N_{xy}$ è approssimato, già nel sistema di equazioni differenziali del quale il sistema (4) è soluzione.

*Area del conoide di primo grado.*

L'area delle due falde rappresentate nella figura 2 è data da:

$$S = 2\iint\sqrt{1 + h^2(x^2 + y^2)}\ dx\ dy\,.$$

Sviluppando in serie il radicale, tenendo conto dei soli termini di primo grado ed effettuando la doppia integrazione, otteniamo:

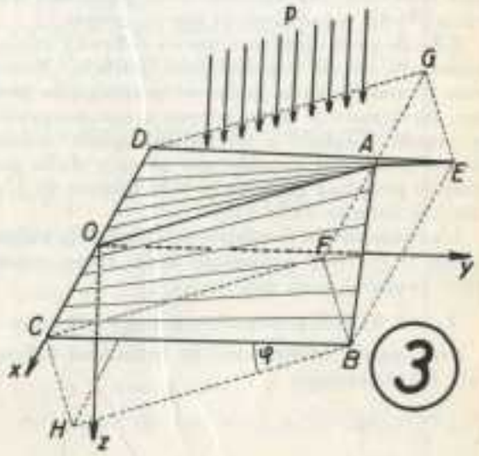
$$S = \frac{1}{3}x_B\,y_B \cdot [6 + h^2(x_B^2 + y_B^2)]\,. \qquad (10)$$

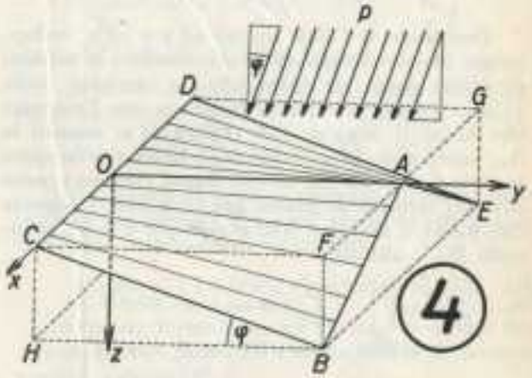
In questa formula $X_B$ ed $y_B$ sono le due prime coordinate del punto B.

Applicando la (10) all'esempio numerico considerato precedentemente, abbiamo:

$$S = 20{,}64\ m^2,$$

mentre l'area della proiezione orizzontale è 19,80 m$^2$.




*Conoide di primo grado come shed.*

Nel conoide disposto a shed il piano BCDE (fig. 2) deve risultare orizzontale, il che si ottiene facendo ruotare il conoide attorno a CD (asse x) verso l'alto di un angolo definito dalla relazione:

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_B}{y_B} \qquad (11)$$

Se vogliamo che le forze esterne (peso proprio) risultino ancora parallele all'asse delle z, il sistema degli assi coordinati non dovrà ruotare col conoide, e ci troveremo quindi nelle condizioni della fig. 3.

L'equazione del conoide si trasforma nella seguente:

$$z = \frac{hxy - y\,\mathrm{tg}\,\varphi}{1 + x\,h\,\mathrm{tg}\,\varphi}\,.$$

Il calcolo diventa estremamente laborioso e praticamente ineseguibile. Ce ne convinciamo imme-

oliatamente calcolando una delle derivate parziali, per esempio la (3a):

$$p = h \cdot \frac{y\,(1 + x\,h\,\mathrm{tg}\,\varphi) - (hxy - y\,\mathrm{tg}\,\varphi)\,\mathrm{tg}\,\varphi}{(1 + xh\,\mathrm{tg}\,\varphi)^2} .$$

Evidentemente non è possibile pensare di iniziare il calcolo introducendo nelle equazioni differenziali delle espressioni di questo genere.

È facile però eliminare questa difficoltà iniziale, ricorrendo ad un semplicissimo artificio. Manterremo il conoide nella posizione relativa alla pensilina, inclinando le forze esterne (peso proprio) di un angolo $\varphi$ eguale a quello del quale avrebbe dovuto ruotare il conoide per passare dalla posizione di pensilina a quella di shed (figura 4). L'angolo $\varphi$ è definito dalla (11).

L'equazione del conoide è ancora la (5), valgono quindi le (6) e le proiezioni della foiza esterna (peso proprio) sugli assi sono:

$$F_x = 0,\ F_y = -p\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ F_z = p\cos\varphi . \qquad (12\ a\text{-}b\text{-}c)$$

Con queste avvertenze, le equazioni differenziali (1) diventano:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = p\,\mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{1 + h^2(x^2 + y^2)} \\ &N_{xy} = -\frac{p}{2h}(xh\,\mathrm{sen}\,\varphi + \cos\varphi)\sqrt{1 + h^2(x^2 + y^2)} \end{aligned}\right\} \quad (13\ a\text{-}b\text{-}c)$$

Derivando la (13c) rispetto ad y e ad x, sviluppando in serie i radicali ed arrestandoci ai termini di primo grado; introducendo le derivate nelle (13a) e (13b); integrando la prima con l'esigenza che lungo il margine OA (figura 4) si annulli la $N_x$; integrando la seconda, dopo di aver sviluppato in serie il radicale che in essa figura (tenendo conto dei soli termini di primo grado) e con l'esigenza che lungo il margine AB, e cioè per $y = y_A$, si annulli $N_y$[6], abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} &N_x = \frac{1}{48}\,ph\,xy\sqrt{\frac{1 + h^2y^2}{1 + h^2x^2}}\,(3\,xh\,\mathrm{sen}\,\varphi\,[4 - h^2(x^2 + 2y^2)] + 4\cos\varphi\,[6 - h^2(x^2 + 5y^2)]) \\ &N_y = \frac{1}{12}\,p\sqrt{\frac{1 + h^2x^2}{1 + h^2y^2}}\,\Big(\big[6\,\mathrm{sen}\,\varphi + xh\,[2\cos\varphi + xh(5\,\mathrm{sen}\,\varphi - xh\,(\cos\varphi + xh\,\mathrm{sen}\,\varphi))]\big]\,3\,(y - y_A) + \big(h^2\,[3\,\mathrm{sen}\,\varphi - xh\,(\cos\varphi + xh\,\mathrm{sen}\,\varphi)]\big)(y^3 - y_A^3)\Big) \\ &N_{xy} = -\frac{p}{2h}(xh\,\mathrm{sen}\,\varphi + \cos\varphi)\sqrt{1 + h^2(x^2 + y^2)} \end{aligned}\right\} \quad (14\ a\text{-}b\text{-}c)$$

Si perviene alla (14b) sia calcolando la costante di integrazione, funzione della sola x, con la condizione che per $y = y_A$ risulti $N_y = 0$, sia, più semplicemente, effettuando l'integrazione tra i limiti $y_A$ ed y , essendo $y_A$ il limite inferiore.

Anche qui, dopo di aver disposto nel modo ritenuto più opportuno, in relazione con la realtà fisica del problema, delle costanti di integrazione, i vincoli dovranno rispettare l'ipotesi di inesistente rigidezza a flessione.

*Conoide di secondo grado come pensilina.*

Con gli assi disposti come in figura 6, l'equazione del conoide parabolico di grado n è:

$$z = hx^n y .$$

Per n = 2 abbiamo l'equazione del conoide di secondo grado:

$$z = hx^2 y . \qquad (15)$$

Le derivate della (15) sono:

$$p = 2hxy,\ q = hx^2,\ r = 2hy,\ s = 2hx,\ t = 0 . \qquad (16)$$

Nel caso del peso proprio è:

$$F_x = 0,\ F_y = 0,\ F_z = p . \qquad (17)$$

Introducendo questi valori nelle (1), esse si trasformano nelle seguenti:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \\ &yv_x + 2x\,N_{xy} = -\frac{p}{2h}\sqrt{1 + h^2x^2(x^2 + 4y^2)} \end{aligned}\right\} \quad (18\ a\text{-}b\text{-}c)$$

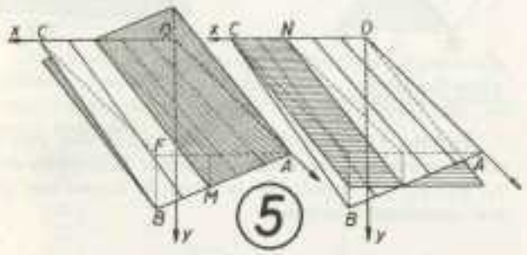
L'integrazione di queste equazioni da:

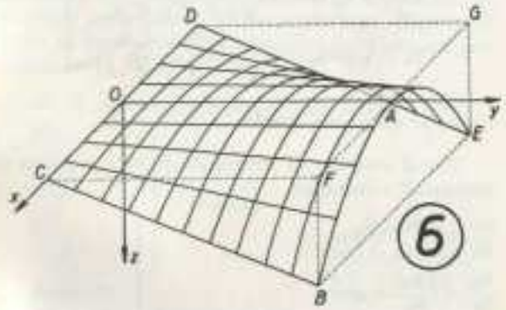
$$\left.\begin{aligned} &N_x = -\frac{p}{y}\sqrt{\frac{1 + 4h^2x^2y^2}{1 + h^2x^4}}\Big(\frac{1}{2h}\sqrt{1 + h^2x^2(x^2 + 4y^2)} + 2hx^2\big([0{,}03125\,x^4 + (0{,}3\,x^2 + y^2)\,x^2y^2)\,h^2 - 0{,}125\,x^2 - y^4\big]\Big) . \\ &N_y = -ph\sqrt{\frac{1 + h^2x^4}{1 + 4h^2x^2y^2}}\Big(\big[0{,}21875\,x^4(y - k) + 0{,}5\,x^2(y^2 - k^2) + 0{,}6\,(y^5 - k^5)\big]\,h^2x^2 - 0{,}375\,x^4(y\,k) - 0{,}33333\,(y^3 - k^3)\Big) . \\ &N_{yx} = phx\big((0{,}03125\,x^4 + (0{,}3\,x^2 + y^2)\,x^2y^2)\,h^2 - 0{,}125\,x^2 - y^4\big) . \end{aligned}\right\} \quad (19\ a\text{-}b\text{-}c)$$

Nel corso del calcolo abbiamo imposto che per x = 0 risultasse $N_{xy} = 0$ e che per y = k si avesse $N_y = 0$. Nel caso del conoide di primo grado avevamo voluto $N_X = 0$ per x = 0 in quanto lungo OA (figura 7) si sarebbe presentata la risultante verticale delle $N_x$ provenienti dalle opposte falde della volta. Lungo OA restano da assorbire le $N_{xy}$ provenienti dalle falde stesse (figura 8).

Nel conoide di secondo grado, lungo OA (figura 6), le $N_x$ provenienti dai due lati si equilibrano fra di loro, cosicché possiamo utilizzare la prima costante di integrazione per imporre ivi l'annullamento della $N_{xy}$.

La (19a) ci dice che per y = 0, e cioè lungo l'asse delle x, risulta $N_x =$ . Ammettere l'inesistenza della rigidezza a flessione significa supporre che la forza interna agente su di un elemento infinitesimo di area sia contenuta nel piano tangente, non abbia cioè componente trasversale al piano stesso, componente che darebbe origine alla flessione. L'ipotesi fatta ci porta ad un valore della $N_x$ lungo l'asse delle x, che non si accorda evidentemente con la realtà fisica del problema. Ce ne convinciamo immediatamente considerando la piastra BCDE (figura 9), incastrata lungo BE. Non ci sarebbe possibile pensare a delle tensioni infinite lungo CD e non si vede perché le cose dovrebbero cambiare quando, passando al conoide, introduciamo un elemento, la curvatura, notoriamente favorevole per l'equilibrio delle strutture. Di indubbio interesse sarebbe una ricerca sperimentale su questo argomento.




Se tagliamo il conoide di secondo grado con un piano y = k (figura 10), sostituendo al margine primitivo CD il nuovo margine MN e lasciando invariato il sistema di coordinate, veniamo ad eliminare l'anomalia che si presentava lungo l'asse delle x. Ci varremo della costante di integrazione ancora disponibile per esigere che per y = k risulti $N_y = O$.

Per l'integrazione del sistema di equazioni differenziali (18) ci siamo valsi dello sviluppo in serie, limitato, dei radicali, come per il conoide di primo grado.

*Conoide di secondo grado come shed.*

Ricorreremo nuovamente all'artificio di inclinare le forze esterne (peso proprio) di un angolo $\varphi$ definito dalla (11)[7]. Valgono ancora le (12), (15) e (16). Il sistema (1) assume la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ &\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = p\,\mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{1 + h^2x^2(x^2 + 4y^2)} \\ &yv_x + 2x\,N_{xy} = -\frac{p}{2h}(x^2h\,\mathrm{sen}\,\varphi + \cos\varphi)\cdot \\ &\qquad \cdot\sqrt{1 + h^2x^2(x^2 + 4y^2)} \end{aligned}\right\} \quad (20\ a\text{-}b\text{-}c)$$

Sviluppando in serie i radicali, dopo le necessarie derivazioni, e limitandoci ai termini di primo grado; esigendo, nel corso dell'integrazione del sistema (20), che per x = 0 sia $N_{xy} = 0$ e per $y = y_A$ risulti $N_y$ - O , abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} &N_x = \frac{p}{y}\sqrt{\frac{1 + 4h^2x^2y^2}{1 + h^2x^4}}\,\Big(2x^2\,\big[\mathrm{sen}\,\varphi\,[0{,}25 + h^2x^2(0{,}125\,x^2 + 0{,}66666\,y^2) - h^4x^4(0{,}05\,x^4 + 0{,}5\,x^2y^2 + 1{,}5\,y^4)] + h\cos\varphi\,[0{,}125\,x^2 + y^2 - h^2x^2(0{,}03125\,x^4 + 0{,}3\,x^2y^2 + y^4)]\big] - \frac{1}{2}\sqrt{1 + h^2x^2(x^2 + 4y^2)}\cdot\big[x^2\,\mathrm{sen}\,\varphi - \frac{1}{h}\cos\varphi\big]\Big) . \\ &N_y = p\sqrt{\frac{1 + h^2x^4}{1 + 4h^2x^2y^4}}\,\Big(y\,\big[\mathrm{sen}\,\varphi\,[1{,}25 + h^2x^2(1{,}12499\,x^2 + 1{,}33333\,y^2) - h^4x^4(0{,}45\,x^4 + 1{,}16666\,x^2y^2 + 1{,}5\,y^4)] + h\cos\varphi\,[0{,}375\,x^2 + 0{,}33333\,y^2 - h^2x^2(0{,}21875\,x^4 + 0{,}5\,x^2y^2 + 0{,}6\,y^4)]\big]\Big) - y_A\big[\mathrm{sen}\,\varphi\,[1{,}25 + h^2x^2(1{,}12499\,x^2 + 1{,}33333\,y_A^2) - h^4x^4(0{,}45\,x^4 + 1{,}66666\,x^2y_A^2 + 1{,}5\,y_A^4)] + h\cos\varphi\,[0{,}375\,x^2 + 0{,}33333\,y_A^2 - h^2x^2(0{,}21875\,x^4 - 0{,}5\,x^2y_A^2 - 0{,}6\,y_A^4)]\big]\Big) . \\ &N_{xy} = -px\,\big(\mathrm{sen}\,\varphi\,[0{,}25 + h^2x^2(0{,}125\,x^2 + 0{,}66666\,y^2) - h^4x^4(0{,}05\,x^4 + 0{,}5\,x^2y^2 + 1{,}5\,y^4)] + h\cos\varphi\,[0{,}125\,x^2 + y^2 - h^2x^2(0{,}03125\,x^4 + 0{,}3\,x^2y^2 + y^4)]\big) . \end{aligned}\right\} \quad (8)\ (21\ a\text{-}b\text{-}c)$$

*Area del conoide di secondo grado.*

L'area del conoide ABCDEA (figura 6) è data dall'espressione:

$$S = 2\iint\sqrt{1 + h^2x^2(x^2 + 4y^2)}\ dx\,dy$$

Sviluppando in serie il radicale, tenendo conto soltanto dei termini di primo grado ed effettuando la doppia integrazione, si ottiene:

$$S = 2x_B\,y_B\,\big(1 + h^2(0{,}1\,x_B^4 + 0{,}22222\,x_B^2\,y_B^2)\big) \qquad (22)$$

In questa formula $x_B$ ed $y_B$ sono le prime due coordinate del punto B. Per il conoide di secondo grado h vale $Z_B / x|\ y_B$ .

*Conoidi con curve direttrici non paraboliche.*

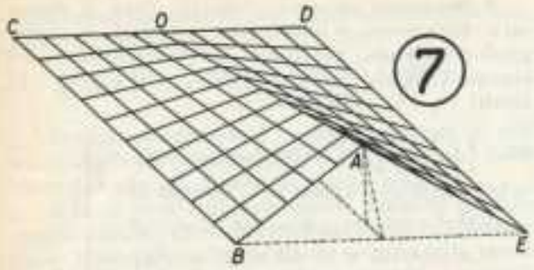
Il conoide è generato da una retta che si muove mantenendosi sempre parallela al piano yOz (x = 0, figura 6) ed a contatto col segmento CD e con la linea BAE. Quando BAE è una parabola di secondo grado, l'equazione del conoide è $z = hx^2y$, e tutte le sezioni di esso fatte con piani di equazione y = costante (figura 11) sono parabole di secondo grado.

---

[6] Nel caso della pensilina il margine BAE era incastrato, era quindi naturale prescrivere l'annullarsi della Ny lungo il margine libero COD; nel caso attuale è preferibile esigere che Ny si annulli invece lungo BAE.

[7] Questo accorgimento equivale perfettamente all'altro consistente nel far ruotare struttura ed assi di un angolo attorno all'assse delle x in modo da portare la pensilina nella posizione di shed, applicando poi le forze esterne (peso proprio) verticalmente.

[8] Alla forma della (21b) si perviene integrando e calcolando poi la costante di integrazione in modo che per $y = y_A$ risulti Ny = 0. Alla forma della (14b) si giunge invece integrando tra i limiti $y_A$ ed y. La (21b) può assumere forma analoga alla (14b) attraverso ovvie trasformazioni; alla stessa forma si potrebbe giungere integrando invece tra i limiti $y_A$ ed y.




Quando la curva BAE è una catenaria di equazione

$$z = h\left(\mathrm{Ch}\frac{x}{h} - 1\right)$$

l'equazione del conoide risulta

$$z = h\left(\mathrm{Ch}\frac{x}{h} - 1\right)\frac{y}{y_B}$$

e l'intersezione del conoide con un piano $y = k$ ha l'equazione

$$z = h\left(\mathrm{Ch}\frac{x}{h} - 1\right)\frac{k}{y_B}$$

la quale rappresenta una curva affine alla catenaria conosciuta sotto il nome improprio di catenoide.

Le (1), nel caso dello shed, diventano:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0\\
&\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = p\,\mathrm{sen}\,\varphi \cdot \sqrt{1 + \frac{y^2}{y_B^2}\mathrm{Sh}^2\frac{x}{h} + \frac{h^2}{y_B^2}\left(\mathrm{Ch}\frac{x}{h} - 1\right)^2}\\
&\frac{y}{h}\mathrm{Ch}\frac{x}{h}\cdot v_y + 2\mathrm{Sh}\frac{x}{h}\cdot N_{xy} =\\
&= -p\left(\mathrm{sen}\,\varphi\left(\mathrm{Ch}\frac{x}{h} - 1\right)\frac{h}{y_B} + \cos\varphi\right)\cdot\\
&\cdot\sqrt{y_B^2 + y^2\,\mathrm{Sh}^2\frac{x}{h} + h^2\left(\mathrm{Ch}\frac{x}{h} - 1\right)^2}
\end{aligned}\right\}$$

La curva BAE non si conserva neppure quando si tratta di una cicloide o di un cerchio. In quest'ultimo caso, con $R = \frac{1}{2}(z_B + x_B^2 / z_B)$, l'equazione del cerchio direttore è

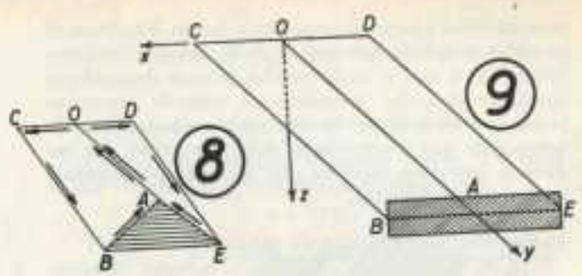
$$z = R - \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Il conoide è rappresentato dall'equazione

$$z = \frac{y_B}{y}\left(R - \sqrt{R^2 - x^2}\right),$$

e le (1), per lo shed, assumono la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0\\
&\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = p\,\mathrm{sen}\,\varphi\cdot\\
&\cdot\sqrt{1 + y_B^2\left(\frac{x^2}{y^2(R^2 - x^2)} + \frac{(R - \sqrt{R^2 - x^2})^2}{y^4}\right)}\\
&\frac{1}{y}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \frac{x^2}{(R^2 - x^2)^{3/2}}\right)v_x +\\
&+ 2\frac{R - \sqrt{R^2 - x^2}}{y^2}v_y - 2\frac{x}{y^2\sqrt{R^2 - x^2}}\cdot N_{xy} =\\
&= p\left(\mathrm{sen}\,\varphi\,\frac{y_B(R - \sqrt{R^2 - x^2})}{y^2} - \cos\varphi\right)\cdot\\
&\cdot\sqrt{\frac{1}{y_B^2} + \frac{x^2}{y^2(R^2 - x^2)} + \frac{(R - \sqrt{R^2 - x^2})^2}{y^4}}
\end{aligned}\right\}$$




*Azione del vento.*

Faremo l'ipotesi che il vento agisca con intensità p secondo la normale alla volta. Indicando con $\gamma_x$, $\gamma_y$, $\gamma_z$ gli angoli che la normale forma con gli assi coordinati, avremo:

$$\left.\begin{aligned}
F_x &= p\cos\lambda_x = p\,\frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\\
F_y &= p\cos\lambda_y = p\,\frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\\
F_z &= p\cos\lambda_z = p\,\frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}
\end{aligned}\right\}\quad(23\ \text{a-b-c})$$

*Conoide di primo grado.*

Per il conoide di primo grado le equazioni differenziali risultano:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = phy\\
&\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = phx\\
&N_{xy} = -\frac{p}{2h}\left[1 + h^2(x^2 + y^2)\right]
\end{aligned}\right\}\quad(24\ \text{a-b-c})$$

Con l'esigenza che per $x = 0$ e per $y = 0$ si abbia, rispettivamente, $N_x = 0$ e $N_y = 0$, la soluzione delle (24) è:

$$\left.\begin{aligned}
N_x &= 2phxy\sqrt{\frac{1 + h^2y^2}{1 + h^2x^2}}\\
N_y &= 2phxy\sqrt{\frac{1 + h^2x^2}{1 + h^2y^2}}\\
N_{xy} &= -\frac{p}{2h}\left[1 + h^2(x^2 + y^2)\right]
\end{aligned}\right\}\quad(25\ \text{a-b-c})$$

*Conoide di secondo grado.*

Le equazioni differenziali sono:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 2phxy\\
&\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = phx^2\\
&yv_x + 2x\,N_{xy} = -\frac{p}{2h}\left[1 + h^2x^2(x^2 + 4y^2)\right]
\end{aligned}\right\}\quad(26\ \text{a-b-c})$$

Con l'esigenza che per $x = 0$ sia $N_{xy} = 0$ e che per $y = k$ risulti $N_y = 0$, otteniamo per le (26) la soluzione:



$$\left.\begin{aligned}
N_x &= \frac{p}{y}\sqrt{\frac{1 + 4h^2x^2y^2}{1 + h^2x^2}}\left(-\frac{1}{2h}\left(1 + h^2x^2(x^2 + 4y^2)\right) + 2h^2x^2(0{,}25x^2 + y^2)\right)\\
N_y &= ph\sqrt{\frac{1 + h^2x^2}{1 + 4h^2x^2y^2}}\left[1{,}75x^2(y - k) + 0{,}33333(y^3 - k^3)\right]\\
N_{xy} &= -phx\,(0{,}25\,x^2 + y^2)
\end{aligned}\right\}\quad(27\ \text{a-b-c})$$

*Azione della neve.*

Nel caso di carichi con proiezione orizzontale costante, l'equilibrio di una volta sottile sghemba senza rigidezza a flessione viene espresso dal sistema seguente:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = -F_x\\
&\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = -F_y\\
&rv_x + tv_y + 2sN_{xy} = pF_x + qF_y - F_z
\end{aligned}\right\}\quad(28\ \text{a-b-c})$$

Vediamone l'applicazione al caso della neve, distribuita con intensità costante p sull'unità di proiezione orizzontale della superficie. Diamo il sistema di equazioni differenziali e la soluzione per i singoli casi.

*Conoide di primo grado come pensilina.*

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0\\
&\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0\\
&N_{xy} = -\frac{p}{2h}
\end{aligned}\right\}\quad(29\ \text{a-b-c})$$

Esigenze
per $x = 0$, $N_x = 0$
per $y = 0$, $N_y = 0$

$$\left.\begin{aligned}
&N_x = 0\\
&N_y = 0\\
&N_{xy} = -\frac{p}{2h}
\end{aligned}\right\}\quad(30\ \text{a-b-c})$$

*Conoide di primo grado come shed.*

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0\\
&\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = p\,\mathrm{sen}\,\varphi\\
&N_{xy} = -\frac{p}{2h}(xh\,\mathrm{sen}\,\varphi + \cos\varphi)
\end{aligned}\right\}\quad(31\ \text{a-b-c})$$

Esigenze
per $x = 0$, $N_x = 0$
per $y = y_A$, $N_y = 0$

$$\left.\begin{aligned}
&N_x = 0\\
&N_y = 1{,}5p\,\mathrm{sen}\,\varphi\sqrt{\frac{1 + h^2x^2}{1 + h^2y^2}}\cdot(y - y_A)\\
&N_{xy} = -\frac{p}{2h}(xh\,\mathrm{sen}\,\varphi + \cos\varphi)
\end{aligned}\right\}\quad(32\ \text{a-b-c})$$

*Conoide di secondo grado come pensilina.*

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0\\
&\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0\\
&yv_x + 2x\,N_{xy} = -\frac{p}{2h}
\end{aligned}\right\}\quad(33\ \text{a-b-c})$$

Esigenze
per $x = 0$, $N_{xy} = 0$
per $y = k$, $N_y = 0$

$$\left.\begin{aligned}
&N_x = -\frac{p}{2hy}\sqrt{\frac{1 + 4h^2x^2y^2}{1 + h^2x^2}}\\
&N_y = 0\\
&N_{xy} = 0
\end{aligned}\right\}\quad(34\ \text{a-b-c})$$

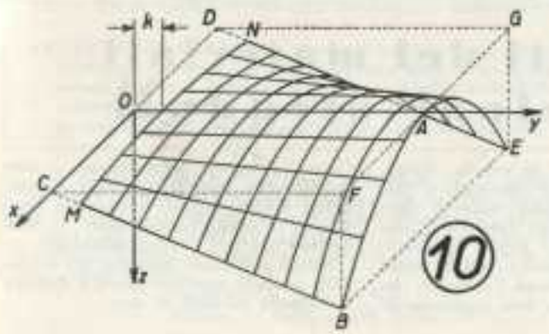
*Conoide di secondo grado come shed.*

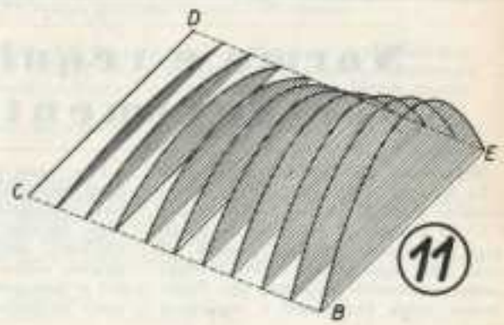
$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0\\
&\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = p\,\mathrm{sen}\,\varphi\\
&yv_x + 2\,x\,N_{xy} = -\frac{p}{2h}(x^2h\,\mathrm{sen}\,\varphi + \cos\varphi)
\end{aligned}\right\}\quad(35\ \text{a-b-c})$$

Esigenze
per $x = 0$, $N_{xy} = 0$
per $y = y_A$, $N_y = 0$

$$\left.\begin{aligned}
&N_x = -\frac{p}{2hy}\cos\varphi\sqrt{\frac{1 + 4h^2x^2y^2}{1 + h^2x^2}}\\
&N_y = \frac{5}{4}p\,\mathrm{sen}\,\varphi\cdot(y - y_A)\sqrt{\frac{1 + h^2x^2}{1 + 4h^2x^2y^2}}\\
&N_{xy} = -\frac{1}{4}p\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi
\end{aligned}\right\}\quad(36\ \text{a-b-c})$$

Le (8) sono una soluzione approssimata delle equazioni differenziali (7), ma l'approssimazione è maggiore della soluzione nota sinora e cioè del sistema (4). Le (14), (19), (21) sono anch'esse soluzioni approssimate dei sistemi (13), (18), (20), in conseguenza dello sviluppo in serie, limitato ai



termini di primo grado, dei radicali che compaiono nelle derivate della $N_{xy}$.

Le formule (10) e (22), le quali danno l'area del conoide di primo e di secondo grado, sono pure approssimate, sempre in conseguenza dello sviluppo in serie, limitato ai termini di primo grado, del radicale. Per queste due formule, essendo il calcolo limitato ad una doppia integrazione, si potrebbe, senza grande complicazione, tener conto di altri termini dello sviluppo in serie, ma la maggior complicazione mi sembra inutile per i bisogni della pratica.

Soluzioni esatte dei sistemi differenziali (24), (26), (29), (31), (33), (35), sono invece le (25), (27), (30), (32), (34), (36).

La soluzione esatta per la neve, relativa alla pensilina conoidale di primo grado, conoide con la soluzione approssimata, nota, relativa al peso proprio. Le tensioni oblique sono mille ovunque e quelle tangenziali sono costanti.

Ancora per la neve, ma per lo shed di primo grado, la $N_x$ è nulla ovunque; la $N_{xy}$ è funzione della sola x.

Sempre per la neve e per la pensilina di secondo grado, sono mille ovunque le $N_y$ e $N_{xy}$. Per lo shed di secondo grado la $N_{xy}$ è funzione soltanto di x.

Può essere opportuno porre in evidenza che le formule usuali e ben note per il passaggio alle tensioni principali, non possono essere adoperate nel caso attuale, in quanto l'elemento di volta, situato nel piano tangente (figura 5, per il conoide di primo grado e per i punti M e N), non è un rettangolo ma un parallelogrammo, non ha cioè in generale angoli retti. 1 suoi lati sono paralleli alle intersezioni del piano tangente con i piani $y = 0$ ed $x = 0$, le quali formano tra di loro, generalmente, un angolo $(90°-\alpha)$ (figura 1). È però sempre possibile, se pure attraverso qualche maggiore complicazione [J], il passaggio dalle $N_x$, $N_y$ ed $N_{xy}$ alle tensioni principali. Il parallelogrammo diventa un rettangolo lungo gli assi delle x e delle y.

Il calcolo numerico, anche con le formule più complesse relative al conoide di secondo grado, risulta agevole ordinandolo attraverso opportune tabelle.

Le formule dedotte non possono dirci nulla, evidentemente, per quanto riguarda la stabilità dell'equilibrio. Considerazioni interessanti su questo argomento possono essere trovate nella letteratura [10].

[9] V. FLUGGE, *Statik und Dynamik der Schalen,* Springer, Berlin, 1934.

[10] V. FLUGGE, *op. cit.,* e ISSERNMANN PILARSKY, *Vodes mince, voùtes-coques,* Dunod, Paris, 1937.

Leonardo Rosati

# Elenco aggiuntivo delle riviste ricevute in cambio

*Pubblicazioni ottenute in cambio* (in aggiunta all'elenco pubblicato nel numero di dicembre di « Atti e Rassegna Tecnica »).

Roma - « Documenti sull'Architettura e sull'industria edilizia » - A cura del Centro studi sull'Abitazione presso il C.N.R.

Padova - « Elettrotecnica », bibliografia italiana a cura del Centro di documentazione tecnica dell'Ist. di Elettrotecnica dell'Università di Padova.

Padova - « Idraulica » - bibliografia italiana a cura del centro di documentazione tecnica dell'Ist. di Idraulica dell'Università di Padova.

Palermo - « Le Opere » - rassegna della costruzione pubblica e privata del mezzogiorno.

Roma - « Produttività ».

Torino - « Radio ».

Roma - « Securitas » - a cura dell'E.N. P.I.

Bari - « La Tecnica nel Mezzogiorno ».

Torino - « La Stampa ».

Torino - « II Popolo Nuovo ».

Roma - « Notiziario dell'amministrazione sanitaria ».

Cagliari - « Bollettino tecnico trimestrale del Circolo culturale degli Ingegneri e degli Architetti Sardi ».

Torino - « Bollettino informazioni U.S.I.S. ».

Torino - « Pubblicazioni dell'Ist. Elettrotecnico Galileo Ferraris ».

Milano - « Bollettino di Unificazione ».

*Riviste straniere:*

Spagna - « Informes de la Construccion » (a cura dell'Ist. Tecnico della costruzione e del cemento).

*Pubblicazioni in Abbonamento - Riviste italiane:*

« Epoca ».
« Sapere ».
« Domus ».

*Riviste straniere:*

« Architecture d'aujourd'hui ».
:< Progressive architecture U.S.A. ».
« Architectural Review » - Inghilterra.

# Norme e requisiti dei materiali per pavimentazione stradale

Riportiamo nelle pagine seguenti da « Le Strade » dell'aprile 1950 le norme emanate dalla Direzione Generale dell'ANAS relative ai materiali da impiegarsi nelle pavimentazioni stradali; alcune sono esposte sotto forma di riferimenti orientativi, in attesa che l'argomento venga inquadrato e regolamentato.

Esse sono divise in tabelle riguardanti: materiali litici (materiali sciolti, terre); materiali lapidei (rocce e derivati); materiali lapidei (pietrischi, pietrischetti, graniglie, ghiaie, ghiaietti, ghiaini, sabbie, additivi); leganti idraulici e loro conglomerati (cementi); leganti idrocarburati e loro conglomerati (bitumi); leganti idrocarburati e loro conglomerati (catrami); leganti idrocarburati e loro derivati (emulsioni bituminose); leganti idrocarburati e loro derivati (polveri e rocce asfaltiche).

Hanno particolare interesse, nel campo delle terre le ricerche intese a definire le capacità portanti di esse.