APPENDICE

ALL'

ARTE DI FABBRICARE

CORSO COMPLETO DI ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

PER GL'INGEGNERI, PER GLI ARCHITETTI, PEI PERITI IN COSTRUZIONE
E PEI PERITI MISURATORI

VOLUME SECONDO

TESTO

DEFORMAZIONI

DEI

CORPI ELASTICI

studiate

NEI LORO PIÙ GENERALI RAPPORTI

COI LAVORI DELLA MODERNA INGEGNERIA

STUDIO DEL PROGETTO

DI

UN PONTE IN FERRO CON ARCHI

PER

CURIONI GIOVANNI

Professore di costruzioni civili, stradali ed idrauliche nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri di Torino.

TORINO

Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO Editore

4, via Alfieri, 4

—

1875

Proprietà letteraria e artistica, con riserva della traduzione.

Stabilimento Tipografico e di Stereotipia A. F. Negro
4, Via Alfieri, 4.

DEFORMAZIONI DEI CORPI ELASTICI

STUDIATE

NEI LORO PIÙ GENERALI RAPPORTI

COI LAVORI DELLA MODERNA INGEGNERIA

CAPITOLO I.

Nozioni preliminari.

1. **Cenni storici intorno alle teorie sulle deformazioni dei corpi elastici.** — Galileo Galilei ha creduto che fosse una parabola la curva, secondo cui si dispone l'asse di un solido rettilineo, orizzontalmente disposto e caricato di pesi; ed altri che vennero subito dopo di lui hanno invece manifestato l'idea che questa curva potesse essere una funicolare.

Giacomo Bernoulli fu il primo ad indicare la vera natura della *curva elastica*, ossia della curva secondo la quale si dispone l'asse di una verga elastica sotto l'azione di forze capaci di piegarla. Nell'anno 1691 fece conoscere la sua scoperta sotto forma di enigma; nell'anno 1694 enunciò la proprietà fondamentale che in un punto qualunque dell'accennata curva il raggio di curvatura è in ragione inversa del momento, attorno a questo punto, della forza che produce la flessione; nel successivo anno 1695 diede la dimostrazione dell'enunciata proprietà (1); e quindi assai diffusamente trattò l'argo-

(1) *Acta eruditorum Lipsiæ*, anno 1691, pag. 282; anno 1694, pag. 262; ed anno 1695, pag. 537.

mento della curvatura delle molle nell'anno 1705, in seguito al suo lavoro intitolato *Véritable hypotèse de la résistance des solides* (1). Considerando un punto qualunque di un filo elastico primitivamente rettilineo, tutto contenuto in un sol piano ed in equilibrio sotto l'azione di forze estrinseche giacenti nel piano medesimo, considerando tutte le forze estrinseche sollecitanti il filo fra il detto punto ed una sua estremità, ed instituendo l'equazione esprimente che il prodotto di un coefficiente di proporzionalità per l'inversa del raggio di curvatura del filo nell'indicato punto eguaglia la somma algebrica dei momenti delle forze ultime indicate, si ottiene un'equazione differenziale del secondo ordine, la quale rappresenta le curve elastiche state studiate da Giacomo Bernoulli. L'indicato coefficiente di proporzionalità dipende dalla materia componente il filo, dalla forma della sua sezione retta, e dal modo di valutare la resistenza molecolare, cosicchè, non essendo il metodo stato seguìto da Bernoulli per valutare l'accennata resistenza quello più perfetto adottato dai moderni autori, ma sibbene quello di Leibnitz (2), il coefficiente di proporzionalità da esso trovato non è sicuramente il più acconcio e quello che meglio conviene nello stato attuale della scienza.

Eulero, in una memoria intitolata *De curvis elasticis*, che fa seguito al suo bel lavoro *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, fece nell'anno 1744 una completa enumerazione delle curve elastiche piane, dedusse le loro forme, e spiegò le leggi delle loro circonvoluzioni. Egli cercò queste curve in seguito a considerazioni metafisiche sul doppio mezzo d'investigazione che offrono, da una parte le cause finali e dall'altra il calcolo degli effetti delle cause efficienti, rendendo minima la quantità rappresentata, per una lunghezza data dell'arco fra due punti nei quali sono pure date le lunghezze delle tangenti, dall'integrale dell'elemento dell'arco diviso per il quadrato del raggio di curvatura, e trovò che esse si riducono alle curve elastiche di Giacomo Bernoulli, definite dalla ragione inversa del raggio di curvatura o dalla proporzionalità della curvatura, in un punto qualunque, al momento delle forze intorno a questo punto. L'indicato integrale, stato chiamato *forza potenziale* da Daniele Bernoulli e che ora più semplicemente si chiama *potenziale*, non è altro che il lavoro di flessione per l'arco a cui il detto integrale si riferisce.

(1) Accademia delle scienze di Parigi, anno 1705.

(2) *Appendice all'Arte di fabbricare, La resistenza dei materiali esposta nei suoi più generali rapporti coi lavori della moderna ingegneria*, Num. 1.

La classificazione delle curve elastiche piane fatta da Eulero si estende a nove specie. Le prime sei specie sono relative ai casi in cui le forze sollecitanti ammettono una risultante che taglia la curva in un punto, e sono esse distinte dalla grandezza più o meno considerevole dell'angolo di questa risultante colla tangente nel medesimo punto. Si hanno: curve della prima specie, quando l'indicato angolo è infinitamente piccolo; curve della seconda specie quando quest'angolo è finito ed acuto; curve della terza specie tuttavolta che l'angolo medesimo è retto; curve della quarta specie quando il detto angolo è ottuso, ma minore di 131° 41'; curve della quinta specie allorquando si verifica appunto l'or accennato valore di 131° 41'; e curve della sesta specie quando l'angolo stesso supera l'ultimo indicato valore senza eccedere 180°.

Le curve elastiche della prima specie si riferiscono al caso dei solidi prismatici premuti nel senso della loro lunghezza, ossia più particolarmente al caso dei solidi caricati di punta (1). Eulero dedusse il valore che deve raggiungere la forza premente per incominciare a produrre un principio di flessione, e conchiuse che appena superato questo valore, da lui chiamato *forza delle colonne*, la forza premente deve determinare la rottura, giacchè l'acquistata curvatura le conferisce un braccio di leva ognor crescente. In una memoria dell'anno 1757 (2), il sommo matematico ritorna su ciò che aveva detto relativamente alla forza delle colonne, e giustifica l'asserzione abbastanza singolare che nessuna flessione verrà prodotta in una molla rettilinea premuta longitudinalmente, finchè la pressione non eccede una certa intensità dipendente dalla sua elasticità, pressione che, come già l'aveva enunciato Musschenbroeck nel 1729 (3), egli pur trova in ragione inversa del quadrato della lunghezza della molla.

Le curve elastiche della quarta specie, considerate nel caso in cui l'angolo della risultante delle forze colla tangente nel punto nel quale essa risultante incontra la curva, è assai poco maggiore dell'angolo retto, sono annoverate da Eulero fra le curve paraboliche del terzo grado. Questo avviene per un solido poco flessibile, orizzontalmente incastrato in un estremo e sollecitato da un peso all'altro, ed è della riunione di due di tali curve, raccordantisi nel punto di sospensione del peso, che si compone quella secondo la quale si dispone l'asse

(1) *Arte di fabbricare, Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni*, Num. 139 e 140.

(2) Accademia di Berlino, anno 1757.

(3) *Introductio ad cohærentiam corporum firmorum*, anno 1729.

di un solido rettilineo collocato su due appoggi e trasversalmente sollecitato nell'intervallo. Eulero fu il primo a far notare come, misurando la piccola saetta di flessione presa da una lama trasversalmente sollecitata, si possa sperimentalmente determinare quella costante che ne misura l'elasticità ; ma s'ingannò nel riguardare una tale costante come proporzionale al quadrato e non al cubo dello spessezza.

Le curve elastiche della quinta specie godono, secondo Eulero, della rimarchevole proprietà che prolungate si ripiegano sopra loro medesime, ed ammettono un nodo nel punto in cui sono incontrate dalla risultante delle forze sollecitanti.

Una proprietà poi che è comune a tutte le curve elastiche delle prime sei specie, consiste nell'essere un punto d'inflessione quello in cui la risultante delle forze incontra la curva, quand'anche esso si trovi ad un estremo libero, e questo perchè, essendo nullo il momento delle forze per quel punto, è anche nulla la curvatura.

Le curve elastiche della settima e dell'ottava specie sono quelle secondo le quali si dispone una lama, primitivamente rettilinea, sotto l'azione di forze, la cui risultante non incontra la curva, ma agisce in un punto di essa coll'intermezzo di un braccio di leva. Non vi ha punto in queste curve per cui il momento delle forze sollecitanti sia nullo, e quindi esse non ammettono alcun punto d'inflessione.

Finalmente le curve elastiche della nona specie si presentano allorquando le forze sollecitanti, quantunque situate in uno stesso piano, non ammettono una risultante unica, ma si riducono ad una coppia, e queste curve sono archi circolari.

Eulero, sul finire dell'interessante ed ammirabile memoria sulle curve elastiche, estende la sua analisi ad una lama di elasticità e di grossezza non uniformi ; ad una lama di elasticità e di grossezza costanti, ma primitivamente curva ; ad una lama contemporaneamente sollecitata da forze operanti in due punti particolari e da altre distribuite su una parte della sua lunghezza ; e finalmente alle oscillazioni di una lama abbandonata a se stessa dopo di essere stata inflessa. Nello studiare la curva, secondo la quale si dispone una lama già inizialmente curva, il distinto matematico prova che si deve eguagliare il momento delle forze sollecitanti, per rapporto ad un punto qualunque della curva, al prodotto della costante che misura l'elasticità, per la differenza delle inverse dei raggi di curvatura prima e dopo la deformazione.

Lagrange, in una sua prima memoria del 1769 (1), ha confermato i risultati di Eulero. Egli esprime con una maniera semplice gli integrali primi dell'equazione della curva elastica per mezzo dell'arco e dell'angolo che la tangente fa con una retta fissa, e dimostra che la quadratura esatta dell'espressione trovata per l'ordinata dipende dalla *rettificazione delle sezioni coniche*, ossia dalle funzioni ellittiche. Fa vedere che si può integrare per logaritmi e per esponenziali reali nel caso delle curve elastiche della sesta specie, quando la forza, che agisce per trazione, è quasi diretta secondo il prolungamento della tangente, oppure fa con questa un angolo assai poco differente da due angoli retti.

In una memoria *sulla figura delle colonne* (2), Lagrange ha messo in piena luce la quistione della curva elastica di prima specie, ed ha fatto sparire ogni difficoltà analitica sul risultato relativo al caso di un solido sollecitato di punta, dando in serie un integrale esatto dell'equazione differenziale senza sostituire l'ascissa all'arco, e stabilendo una relazione anche esatta fra la lunghezza sviluppata della curva, la sua saetta e la forza premente. Egli ha chiaramente dimostrato che, per qualsiasi forza con valore inferiore a quello trovato da Eulero, la saetta diventa immaginaria, e fu il primo a dedurre che i solidi sollecitati di punta sono suscettivi di prendere una curvatura con due, tre, quattro..... ventri, con inflessioni intermedie, ciò che ha effettivamente luogo se alcuni punti non possono muoversi lateralmente, e purchè le forze prementi abbiano intensità quattro, nove, sedici..... volte più grandi di quella che corrisponde ad un sol ventre senza inflessione. L'analisi di Lagrange dà anche il valore della saetta di curvatura, ciò che non può fare l'analisi di Eulero, e conduce ad un'espressione esatta della lunghezza della curva. Sul finire della stessa memoria, Lagrange conchiude, in seguito ad un calcolo incompleto, che i rigonfiamenti dei sostegni non aumentano punto la loro resistenza, ciò che non è assolutamente ammesso dai moderni costruttori.

Eulero ritornò nel 1778 sull'interessante soggetto dei sostegni (3), esaminò quanto avviene in una colonna non caricata fuorchè dal proprio peso, e conchiuse: che per quanto alta, pesante e di poca resi-

(1) *Sur la force des ressorts pliés*, Accademia di Berlino, anno 1769.

(2) Accademia delle scienze di Torino, volume dal 1770 al 1773.

(3) *Determinatio onerum quæ columnæ gestare valent — Examen insignis paradoxi in theoria columnarum occurrentis — De attitudine columnarum sub proprio pondere corruentium.* Accademia di Saint-Pétersbourg, anno 1778.

stenza sia una colonna, essa non prende alcuna flessione finchè è d'un sol pezzo; che essa invece s'inflette nella sua parte inferiore, quando la parte superiore vi è semplicemente appoggiata. Questo paradosso si spiega osservando che nel secondo caso, in corrispondenza della faccia di contatto delle due parti, l'asse della colonna può fare un angolo colla verticale, la qual cosa è impossibile se la parte superiore è invariabilmente connessa alla parte inferiore. Egli basta d'altronde l'intervento della più piccola forza orizzontale, o che la risultante dei pesi delle parti superiori si allontani un poco dalla linea centrale per determinare la flessione.

A Navier è dovuto il merito d'aver fatto progredire e di aver dato un indirizzo pratico alla risoluzione del problema avente per iscopo di determinare le curve elastiche. Questo distinto scienziato si attenne principalmente a quei casi nei quali si possono ammettere e nei quali realmente si hanno flessioni assai piccole, e studiò le curve elastiche piane riferentisi ai solidi prismatici, ai solidi leggiermente incurvati ed ai solidi inizialmente curvi.

Per quanto si riferisce alle curve elastiche corrispondenti ai solidi prismatici, Navier ha fatto notare che la loro equazione differenziale può, per tutte le specie state considerate da Eulero (salvo per la prima e per la nona che non ne abbisognano), essere integrata sotto forma finita; e raggiunse l'intento coll'assumere uno dei due assi coordinati non più secondo la risultante delle forze come faceva Eulero, ma secondo una tangente alla curva, onde poter sostituire l'elemento di questa coordinata all'elemento dell'arco. Una sua memoria inedita del 29 novembre 1819 sulla *flessione delle lame elastiche*, e stata approvata dall'Accademia delle scienze di Parigi nel 4 settembre 1820, contiene le risoluzioni di diversi problemi che grandemente interessano la pratica dell'ingegnere; problemi che dal Navier medesimo per la prima volta vennero svolti alla Scuola di ponti e strade di Parigi nell'anno 1820, e che in seguito, assieme a molti altri, vennero trattati nell'eccellente sua opera stata pubblicata nell'anno 1826 col titolo di *Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*. Fra questi problemi sono degni di particolare rimarco quelli relativi ai solidi rettilinei sollecitati longitudinalmente, ma ad una certa distanza dai loro assi, e quelli relativi ai solidi rettilinei sollecitati longitudinalmente e trasversalmente.

Nuova ed assai rimarchevole è la risoluzione, data dal Navier, del problema relativo alla resistenza ed alla curva elastica di un solido

prismatico leggiermente incurvato per essere posto, colla convessità in alto, fra due ritegni immobili e caricato nel suo mezzo.

Pei solidi aventi naturalmente asse curvilineo, Eulero ha dimostrato nella già citata memoria *De curvis elasticis*, che, quando è circolare la loro primitiva forma, si può determinare la nuova mediante le quadrature; e che la cosa succede ben diversamente allorquando la forma primitiva non è un arco di circolo, giacchè il relativo raggio di curvatura, generalmente variabile da punto a punto, è una funzione delle coordinate primitive e non delle coordinate dopo la deformazione. Navier, considerando il caso di inflessioni assai piccole, e tali da potersi approssimativamente prendere per braccio definitivo delle forze inflettenti quelli che esse hanno al principio della deformazione, ha visto che può esser condotto alle quadrature anche il problema della flessione piana per una forma primitiva di curva a semplice curvatura assolutamente qualunque; che anzi, se la curva primitiva può essere assimilata ad una parabola di secondo ordine, assai semplicemente egli ottiene, per gli integrali, funzioni intiere dell'ascissa allorquando la curvatura è così poco considerevole da potersi sviluppare la derivata dell'arco secondo le potenze intiere delle derivate dall'ordinata. Lo stesso approssimativamente si può fare per curve primitive qualunque, giacchè si possono esse assimilare a parabole di grado qualunque colla loro ordinata rappresentata da una funzione dell'ascissa, avente uno o più termini. Pei solidi curvilinei, la cui forma primitiva è un arco di circolo, Navier ha riconosciuto (1) che l'integrazione si poteva fare esattamente per un arco di ampiezza qualunque, ed è giunto a determinare la flessione, la spinta e la resistenza delle grandi centine con asse circolare.

Oltre le curve elastiche piane, vennero anche studiate quelle a doppia curvatura, ed innanzi tutto meritano di essere menzionate le equazioni differenziali del secondo ordine, che per queste ultime vennero date da Lagrange (2). Ma, limitandosi egli a generalizzare l'applicazione del principio di Giacomo Bernoulli, ha implicitamente ammesso che le forze non operassero fuori dei piani osculatori dell'asse del solido deformato, che quindi i loro momenti si esercitassero solamente intorno alle normali a questi piani, e giunse così ad equazioni incomplete. Binet, nell'anno 1814 (3), ha rimarcato l'omissione del

(1) *Annales des ponts et chaussées*, tomo 1° dell'anno 1833.

(2) *Mécanique analytique*, parte I, sezione V, § III.

(3) *Sur l'expression analytique de l'élasticité et de la roideur des courbes à double courbure*, Journal de l'Ecole polytecnique, anno 1815.

momento che generalmente esiste anche attorno alla tagente al detto asse, momento che sviluppa nel solido una reazione di torsione; e Poisson, nell'anno 1814, nella corrispondenza della scuola politecnica (1), e quindi nell'edizione dell'anno 1833 del suo trattato di meccanica, ha aggiunto, a ciascuna delle tre equazioni di Lagrange prese rispetto a tre assi coordinati ortogonali, un termine eguale a questo momento di torsione moltiplicato per il coseno dell'angolo che la tangente alla fibra media o all'asse del solido fa col corrispondente asse coordinato.

Le equazioni di Poisson, quantunque presentate siccome relative al caso il più generale, come assai bene osserva il Barré de Saint-Venant (2), non convengono in realtà che per quello nel quale il solido inflesso è primitivamente rettilineo con *sezioni isotrope*, ossia con sezioni i cui momenti d'inerzia sono principali ed eguali attorno a tutte le rette tracciate nel loro piano e pel loro centro di superficie (quali sono le sezioni circolari, quadrate, ecc.). In tutti gli altri casi, cioè quando il solido ha asse inizialmente curvo, ed anche quando ha asse rettilineo con sezioni *eterotrope* (quali sono le sezioni rettangolari, ellittiche, ecc.), le forze necessariamente ammettono, allorquando l'equilibrio è stabilito, un terzo momento da prendersi intorno ad una retta perpendicolare al piano determinato dalle rette intorno alle quali vennero presi i due primi momenti, e quindi rispetto al raggio di curvatura dell'asse o fibra media del solido inflesso o contorto.

Messa in evidenza la necessità di introdurre nelle equazioni generali e complete dell'equilibrio dei solidi elastici, non solo i momenti intorno alla tangente all'asse ed alla normale al piano osculatore, ma anche intorno al raggio di curvatura, il Barré di Saint-Venant, nell'intento di arrivare ad equazioni della maggior semplicità possibile, invece dei momenti intorno alla normale ed al raggio di curvatura, che si trovano nel piano di una sezione retta del solido, ha proposto di prendere i momenti intorno ai due assi principali centrali d'inerzia della sezione stessa. Di più, facendo vedere come i raggi di curvatura generalmente si spostino, per le deformazioni, nei piani delle sezioni in cui primitivamente trovansi contenuti, o, in altri termini, come le sezioni cangino d'orientazione per rapporto ai

(1) *Sur les lignes élastiques à double courbure*, anno 1816.

(2) Note ed appendice alla prima parte della terza edizione dell'opera di Navier, intitolata *Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, anno 1864.

piani osculatori che le tagliano secondo i raggi medesimi, ha posto in chiaro: doversi considerare nel caso generale e per un punto qualunque di una curva elastica sghemba, non solo la *prima curvatura* misurata dall'*angolo di contingenza*, ossia dall'angolo di due tangenti successive determinanti il piano osculatore per quel punto, ma anche la *seconda curvatura* misurata dall'*angolo di torsione*, ossia dall'angolo compreso fra due piani osculatori successivi: e potersi trascurare la considerazione delle due curvature nel solo caso in cui è quistione di determinare ciò che avviene di questi due elementi assieme, ossia di ottenere le rotazioni, le une relativamente alle altre, delle sezioni, o piuttosto dei loro elementi centrali.

L'ultimo indicato caso è appunto quello che fortunatamente si presenta nelle ordinarie e più frequenti circostanze della pratica, nelle quali trattasi sempre di spostamenti piccolissimi, che poco alterano la forma primitiva dei corpi in cui avvengono, e che non influiscono sensibilmente sulle grandezze dei bracci delle forze sollecitanti. Il Barré de Saint-Venant, in seguito a lunghi calcoli e passando per l'integrazione di tre equazioni differenziali simultanee di terzo ordine non lineari, ha dato tre formole (1), colle quali si determinano, mediante quadrature, i piccoli spostamenti dei punti dell'asse di un solido di forma qualunque; e queste formole conducono a quelle di Navier relative ai solidi con asse curvilineo piano quando si trascurino le tensioni e gli scorrimenti trasversali, di cui quest'ultimo autore non tiene conto alcuno.

Le citate equazioni degli spostamenti, come ha fatto notare lo stesso Barré de Saint-Venant, si possono stabilire direttamente, osservando che i diversi loro termini rappresentano le piccole rotazioni degli elementi della fibra media intorno agli assi coordinati in virtù delle forze esteriori; ed una tale deduzione diretta è stata fatta dal signor Bresse, il quale ha però considerato e composto assieme gli effetti delle rotazioni relative, non degli indicati elementi della fibra media, ma delle sezioni cui essi erano primitivamente perpendicolari (2). Le formole del Bresse si riducono alle formole che il Barré de Saint-Venant trovò nell'anno 1843, giacchè quelle immediatamente si deducono da queste con un'integrazione per parti, e combinando in una flessione unica, intorno ad un asse da determinarsi, le due flessioni che il Barré de Saint-Venant ha preferito di prendere sepa-

(1) *Comptes rendus*, anno 1843, tomo XVII, ed anno 1844, tomo XIX.

(2) *Cours de mécanique appliquée, Résistance des matériaux et stabilité des constructions*, anno 1859.

ratamente attorno ai due assi principali centrali d'inerzia delle sezioni. Sono anche dovute al Bresse altre formole, le quali servono a valutare le totali rotazioni, e quindi le totali deviazioni delle sezioni rette dei solidi elastici sotto l'azione di determinate forze.

2. **Assunto del presente lavoro.** — Per studiare le deformazioni dei corpi elastici in modo da soddisfare alle esigenze della moderna ingegneria, precisamente come già abbiamo fatto nel trattare della resistenza dei materiali (*Appendice all'Arte di fabbricare*, Vol. 1°), considereremo innanzi tutto il caso generale di un solido, avente per asse una curva a doppia curvatura A C B (*Fig.* 1), generato da una figura piana D E F di forma e grandezza costanti o variabili moventesi normalmente e col suo centro di superficie C sulla detta curva, e sollecitato da forze comunque operanti. Supporremo che questo solido, come sempre avviene nella pratica delle costruzioni, non possa prendere che piccolissimi spostamenti, i quali poco influiscano sulla sua forma primitiva e sulle grandezze dei bracci delle forze sollecitanti, ed ammetteremo che esso sia omogeneo in qualsiasi punto di una stessa sezione retta. Incomincieremo dal determinare le variazioni di coordinate di un punto qualunque dell'asse del solido, verremo quindi a cercare le deviazioni delle sue sezioni normali, e potremo con ciò farci un'idea sufficientemente esatta delle deformazioni in esso avvenute. Dal caso generale discenderemo ai casi particolari che più di frequente si presentano nella pratica delle costruzioni; faremo vedere come lo studio delle deformazioni viene in acconcio per la determinazione delle forze incognite nei solidi soggetti a vincoli; e finalmente verremo alle più importanti ricerche sulle deformazioni delle centine circolari per ponti e per tettoie.

Nel risolvere il problema dello studio delle deformazioni di un corpo elastico, ci occorrerà di valutare le resistenze longitudinali e trasversali in esso provocate, e le ipotesi delle quali ci serviremo per questa valutazione saranno quelle generalmente ammesse dagli ingegneri pratici e da noi già state dichiarate nel numero 4 del nostro lavoro sulla resistenza dei materiali (*Appendice all'Arte di fabbricare*, Vol. 1°). Considerando cioè la parte di corpo compresa fra due sezioni rette vicinissime (*Fig.* 2) D E F e D′ E′ F′, la immagineremo scomposta in elementi di fibra, ossia in piccoli prismi aventi i loro assi paralleli alla parte C C′ dell'asse e terminanti alle sezioni stesse da facce elementari di secondo ordine, e, in conformità di quanto sembra confermato da esperienze fatte nei limiti degli sforzi a cui praticamente si assoggettano i corpi nelle costruzioni, ammetteremo:

1° Che la sezione retta qualunque D E F, presa nel corpo prima dell'applicazione delle forze estrinseche, si sposti in modo che, dopo la deformazione, i diversi suoi punti si trovino in uno stesso piano;

2° Che la resistenza trasversale provocata nell'elemento superficiale qualunque e dell'indicata sezione sia proporzionale all'area dello stesso elemento, non che allo spostamento trasversale da esso subìto per rapporto all'elemento corrispondente e' della sezione retta D' E' F', ed inversamente proporzionale alla distanza C C' fra i centri di superficie delle due sezioni vicinissime considerate;

3° Che la resistenza longitudinale, provocata nell'elemento superficiale qualunque e, sia proporzionale all'area dello stesso elemento, non che allo spostamento longitudinale da esso subìto relativamente all'elemento corrispondente e', ed ancora inversamente proporzionale alla distanza CC' fra i centri di superficie delle due suddette vicinissime sezioni.

3. **Procedimento che può condurre alla risoluzione del problema avente per oggetto lo studio delle deformazioni dei corpi elastici.** — Considerando in un corpo, il cui sistema di generazione sia quello stato dichiarato sul principio del precedente numero, due sezioni rette vicinissime (*Fig.* 2) DEF e D'E'F', determineremo il piccolissimo spostamento che le forze sollecitanti indurranno nella prima delle indicate sezioni relativamente alla seconda. La parte $C C_u$ dell'asse del corpo, trovandosi unita alla sezione retta D E F, sentirà l'influenza dello spostamento di questa, e quindi varieranno le posizioni di tutti i suoi punti. Un punto qualunque C_i della detta parte dell'asse subirà adunque un piccolissimo spostamento, che potremo valutare siccome un effetto di quello della sezione D E F relativamente alla sezione vicinissima D'E'F'.

Considerando ora sull'asse del corpo un punto qualunque C_o, possiamo immaginare fra C_o e C_u un sistema di sezioni vicinissime. Sotto l'azione delle forze sollecitanti, ciascuna di queste sezioni subirà un piccolissimo spostamento per rapporto alla sezione precedente; e questi spostamenti relativi avranno la loro influenza su quello del punto C_i dell'asse. Quest'ultimo punto finirà adunque per prendere uno spostamento definitivo, che determineremo siccome l'effetto totale degli spostamenti delle sezioni comprese fra C_o e C_i per rapporto alle sezioni precedenti vicinissime.

La sezione iniziale, ossia quella corrispondente al punto C_o, non è generalmente immobile, essa è soggetta a spostarsi sotto l'azione delle forze sollecitanti; e quindi terremo anche conto dell'influenza

dello spostamento della sezione iniziale su quello del punto C_1.

Le variazioni di temperatura, in quanto sono causa di variazioni nelle dimensioni dei corpi che le provano, hanno per effetto di far variare la lunghezza e talvolta anche la forma della curva $C_0 C C_u$. Il punto C_1 può adunque cangiare di posizione per le variazioni di temperatura, e cercheremo anche di tener conto degli spostamenti che da questa causa possono derivare.

Nel caso di un corpo formato di più pezzi, la cui unione si opera con procedimenti e mediante apparecchi, i quali producono un aumento di lunghezza nell'asse primitivo, come succede, per esempio, in un arco metallico formato di più parti, fra le quali si inseriscono delle biette, e che quindi fortemente si inchiavardano e s'inchiodano, in qualche modo procureremo di tener anche conto degli spostamenti che per questo fatto possono avvenire nei diversi punti dell'asse suddetto.

CAPITOLO II.

Deformazioni di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti.

4. **Spostamento di una sezione retta qualunque di un solido elastico relativamente ad una sezione retta vicinissima.** — Abbiasi un solido elastico avente per asse la curva qualunque $C_0 C C_u$ (*Fig.* 2), e sia DEF una sua sezione retta qualsiasi. Assunto un sistema di assi coordinati ortogonali Cx, Cy e Cz colla loro origine nel centro di superficie C dell'indicata sezione, i due primi nel piano della sezione stessa e diretti secondo i suoi due assi principali centrali d'inerzia, il terzo per conseguenza normale al medesimo piano e tangente in C alla curva $C_0 C C_u$, consideriamo tutte le forze estrinseche applicate al corpo da quella parte della sezione DEF, verso la quale trovasi l'asse positivo delle ordinate z, e chiamiamo:

S una qualunque delle indicate forze (*Fig.* 3);

P, Q ed R le sue tre componenti rispettivamente parallele agli assi coordinati Cx, Cy e Cz;

p, q ed r le tre coordinate $\overline{CN}$, $\overline{NM}$ ed $\overline{ML}$ del suo punto d'applicazione L;

X, Y e Z le tre somme algebriche delle componenti, rispettivamente parallele agli assi Cx, Cy e Cz, di tutte le forze S (*Fig.* 2);

M_x, M_y ed M_z le tre somme algebriche dei momenti di rotazione

di tutte le forze S, presi rispettivamente questi momenti intorno agli assi Cx, Cy e Cz;

Σ una somma estesa a tutte le forze applicate al solido da quella parte della sezione retta DEF, verso la quale trovasi l'asse positivo delle ordinate z.

Abbiamo dalla statica sulla riduzione di un sistema qualunque di forze: che i valori delle forze X, Y e Z sono dati da

$$\left.\begin{aligned} X &= \Sigma P \\ Y &= \Sigma Q \\ Z &= \Sigma R \end{aligned}\right\} \quad (I);$$

che i valori dei momenti M_x, M_y ed M_z risultano dalle formole

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \Sigma (Qr - Rq) \\ M_y &= \Sigma (Rp - Pr) \\ M_z &= \Sigma (Pq - Qp) \end{aligned}\right\} \quad (2);$$

e finalmente che, essendo i valori di X, Y, Z, M_x, M_y ed M_z quelli corrispondenti a tutte le forze poste al di sopra della sezione DEF, le tre forze X, Y e Z si devono considerare come applicate al centro di superficie C della sezione DEF secondo le direzioni Cx, Cy e Cz, ed i tre momenti M_x, M_y ed M_z si devono ritenere siccome quelli di tre coppie rispettivamente poste nei piani zCy, xCz ed yCx (*a*). Tenendosi poi conto dei segni delle coordinate p, q ed r, non che di quelli delle forze P, Q ed R, le quali si devono considerare come positive o come negative, secondo che operano nel senso positivo o nel senso negativo degli assi coordinati, si ha: che le forze X, Y e Z sono dirette secondo gli assi coordinati positivi o secondo gli assi coordinati negativi, secondo che risultano precedute dal segno + o dal segno —; che i momenti di rotazione M_x M_y ed M_z tendono rispettivamente far rotare la parte di corpo posta a destra della sezione retta DEF, da z verso y intorno l'asse Cx, da x verso z intorno l'asse Cy, e da y verso x intorno l'asse Cz, o viceversa, secondo che risultano positivi o negativi.

(*a*) L'esattezza delle formole (1) e (2) è provata nella nota che trovasi nelle pagine 14 e 15 del primo volume dell'*Appendice all'Arte di fabbricare*.

Lo spostamento della sezione retta qualunque DEF relativamente alla sezione vicinissima D'E'F' è causato dalle tre forze X, Y, Z, e dai tre momenti M_x, M_y ed M_z. Le due forze X ed Y provocano una resistenza trasversale uniforme negli elementi di fibra compresi fra le sezioni DEF e D'E'F', e quindi determinano uno scorrimento di quella per rapporto a questa nella direzione della loro risultante. La forza Z provoca negli stessi elementi di fibra una resistenza longitudinale pure uniforme, e, a seconda del suo segno, determina per conseguenza un maggior distacco o un maggior avvicinamento della sezione DEF dalla sezione D'E'F'. I due momenti M_x ed M_y inducono nella sezione DEF un movimento rotatorio intorno ad una retta contenuta nel suo piano, sono causa di allungamenti in alcuni e di accorciamenti in altri degli elementi di fibra compresi fra le sezioni DEF e D'E'F', e provocano in questi una resistenza longitudinale non uniforme. Finalmente il momento M_z produce nella sezione DEF un movimento rotatorio attorno all'asse Cz, e provoca una resistenza trasversale pure non uniforme negli elementi di fibra sopra indicati. Essendo poi vicinissime fra di loro le due sezioni rette DEF e D'E'F', nella ricerca degli spostamenti della prima sezione relativamente alla seconda, considereremo il solido DEFD'E'F' come un prisma avente per base la figura DEF e per altezza CC'.

Incominciamo col considerare gli effetti delle forze X ed Y, e chiamiamo perciò:

$d\sigma$ la parte CC' dell'asse del corpo fra le due sezioni vicinissime DEF e D'E'F';

ω un elemento superficiale e della sezione DEF,

Ω la totale superficie della sezione stessa;

x_1 ed y_1 i due piccolissimi scorrimenti nelle direzioni dei due assi coordinati Cx e Cy della sezione DEF sotto l'azione delle forze X ed Y;

E_t il coefficiente di elasticità trasversale, dipendente dalla materia costituente il corpo, dove esso viene tagliato dalla sezione DEF;

Σ una somma estesa a tutte le superficie elementari ω.

Stando alle ipotesi state poste nel numero 2, evidentemente abbiamo: che le resistenze trasversali elementari provocate nell'elemento di fibra ee' parallelamente ai due assi coordinati Cx e Cy, sono rispettivamente espresse da

$$-E_t\,\omega\,\frac{x_1}{d\sigma},$$

$$-E_1 \omega \frac{y_1}{d\sigma};$$

e che, per essere $\Sigma\omega = \Omega$, le resistenze trasversali, parallele ai detti assi coordinati e provocate in tutti gli elementi di fibra compresi fra le sezioni DEF e D'E'F', sono date da

$$-E_1 \Omega \frac{x_1}{d\sigma},$$

$$-E_1 \Omega \frac{y_1}{d\sigma}.$$

Ma le resistenze trasversali or ora trovate devono far equilibrio alle forze X ed Y da cui sono provocate, cosicchè abbiamo le due equazioni d'equilibrio

$$X - E_1 \Omega \frac{x_1}{d\sigma} = 0$$

$$Y - E_1 \Omega \frac{y_1}{d\sigma} = 0,$$

dalle quali immediatamente abbiamo le formole

$$x_1 = \frac{X}{E_1 \Omega} d\sigma \qquad (3),$$

$$y_1 = \frac{Y}{E_1 \Omega} d\sigma \qquad (4),$$

la prima determinante la translazione della sezione DEF nella direzione Cx, e la seconda determinante la translazione della stessa sezione nella direzione Cy.

Passando alla valutazione dell'effetto prodotto dalla forza Z, diciamo

z_1 lo spostamento della sezione DEF parallelamente all'asse Cz, ed

E_1 il coefficiente di elasticità longitudinale, dipendente dalla materia costituente il corpo dove esso è tagliato dalla sezione retta DEF.

Per la terza ipotesi stata posta nel numero 2, abbiamo: che la resistenza longitudinale elementare provocata nell'elemento di fibra $e\,e'$, in cui avviene la variazione di lunghezza z_1, risulta

$$-E_1\,\omega\,\frac{z_1}{d\sigma};$$

che la totale resistenza longitudinale, provocata dalla forza Z nel complesso degli elementi di fibra compresi fra le sezioni rette DEF e D'E'F', è

$$-E_1\,\Omega\,\frac{z_1}{d\sigma};$$

che fra questa resistenza e la forza Z deve esistere l'equazione d'equilibrio

$$Z - E_1\,\Omega\,\frac{z_1}{d\sigma} = 0;$$

e finalmente che il valore della translazione z_1 è dato dalla formola

$$z_1 = \frac{Z}{E_1\,\Omega}\,d\sigma \qquad (5).$$

Per la valutazione degli effetti prodotti dai soli momenti di rotazione M_x ed M_y, incominciamo ad osservare: che la rotazione della sezione DEF avviene attorno ad una retta VV' passante pel suo centro di superficie C (*Appendice all'Arte di fabbricare*, Vol. 1°, *La resistenza dei materiali esposta nei suoi più generali rapporti coi lavori della moderna ingegneria*, Num. 28 e 29); che, essendo positive le due coppie di momenti M_x ed M_y, l'asse della coppia risultante deve essere diretto secondo una retta CM_r contenuta nell'angolo $x\,C\,y$; che la rotazione della sezione retta DEF ha luogo da destra a sinistra, ossia nel senso positivo, per rapporto ad un osservatore posto coll'occhio sulla $C\,M_r$ e rivolto verso il punto C; e finalmente che si sviluppa pressione, ossia una resistenza diretta secondo la parte positiva dell'asse delle ordinate z nell'elemento di fibra $e\,e'$ posto per rapporto alla retta VV' dalla stessa parte verso la quale trovasi l'asse positivo $C\,y$. Se poi supponiamo che il punto e della sezione retta DEF passi in e'', e se chiamiamo

x ed y le due coordinate $\overline{C\,d}$ e $\overline{d\,e}$ del punto e,

v la distanza $\overline{be}$ dello stesso punto dalla retta V V′,

θ l'arco di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo piccolissimo ebe'' e misurante la rotazione della sezione D E F attorno alla retta V V′,

ψ l'angolo V Cx della retta V V′ coll'asse delle ascisse Cx,

abbiamo: che la variazione di lunghezza dell'elemento di fibra ee', la cui lunghezza primitiva si può ritenere eguale a $d\sigma$, è data dal prodotto $v\theta$; che, per le ipotesi state ammesse nel numero 2, la resistenza longitudinale sviluppata da questo elemento a motivo dei momenti M_x ed M_y vale

$$E_1 \omega \frac{v\theta}{d\sigma};$$

che i momenti di questa resistenza rispetto agli assi coordinati Cx e Cy sono rispettivamente

$$-E_1 \omega \frac{v\theta}{d\sigma} y$$

$$E_1 \omega \frac{v\theta}{d\sigma} x;$$

e che i momenti, rispetto agli assi stessi, della totale resistenza sviluppata dagli elementi di fibra compresi fra le due sezioni rette D E F e D′E′F′, sono rispettivamente espressi da

$$-E_1 \frac{\theta}{d\sigma} \Sigma \omega v y$$

$$E_1 \frac{\theta}{d\sigma} \Sigma \omega v x.$$

Ma questi momenti delle resistenze devono far equilibrio ai momenti M_x ed M_y delle forze estrinseche, e quindi risultano le equazioni d'equilibrio

$$\left.\begin{aligned} M_x - E_1 \frac{\theta}{d\sigma} \Sigma \omega v y = 0 \\ M_y + E_1 \frac{\theta}{d\sigma} \Sigma \omega v x = 0 \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

Se ora immaginiamo tirate dal punto d le rette dc e df, la prima perpendicolare e la seconda parallela a V V', e se osserviamo che gli angoli cCd e def sono eguali all'angolo $VCx = \psi$, dai triangoli dfe e dcC, il primo rettangolo in f ed il secondo rettangolo in c, deduciamo i valori di $\overline{ef}$ e di $\overline{dc}$ dati da

$$\overline{ef} = y \cos \psi,$$

$$\overline{dc} = x \operatorname{sen} \psi.$$

Per essere $\overline{fb} = \overline{dc}$, la differenza $\overline{ef} - \overline{dc}$ dà la lunghezza $\overline{cb} = v$; cosicchè abbiamo

$$v = y \cos \psi - x \operatorname{sen} \psi.$$

Sostituendo questo valore di v nelle equazioni (6), ed osservando che l'angolo ψ è costante per rapporto al simbolo Σ, che $\Sigma \omega x y$ è una quantità nulla, giacchè gli assi coordinati Cx e Cy sono diretti secondo gli assi principali centrali d'inerzia della sezione retta DEF, e finalmente che le somme $\Sigma \omega y^2$ e $\Sigma \omega x^2$ rappresentano rispettivamente i momenti d'inerzia I_x ed I_y delle stesse sezioni rispetto agli assi Cx e Cy, otteniamo le due equazioni

$$\left.\begin{aligned} M_x - E_1 \frac{\theta}{d\sigma} I_x \cos \psi = 0 \\ M_y - E_1 \frac{\theta}{d\sigma} I_y \operatorname{sen} \psi = 0 \end{aligned}\right\} \quad (7),$$

le quali vengono in acconcio per determinare le due rotazioni della sezione DEF intorno agli assi coordinati Cx e Cy.

Essendo θ la misura della rotazione della sezione DEF intorno alla retta V V', ed essendo rispettivamente ψ e $90° - \psi$ gli angoli di questa retta cogli assi coordinati Cx e Cy, siccome la scomposizione delle rotazioni si fa in modo analogo a quello delle forze allorquando si riferiscano quelle agli assi corrispondenti, abbiamo: che il prodotto $\theta \cos \psi$ misura la rotazione della sezione DEF attorno all'asse Cx, e che il prodotto $\theta \operatorname{sen} \psi$ rappresenta la rotazione della stessa sezione attorno all'asse Cy. Ricavando questi prodotti dalle equazioni (7), ci risultano le formole

$$\theta \cos\psi = \frac{M_x}{E_1 I_x} d\sigma \qquad (8),$$

$$\theta \operatorname{sen}\psi = \frac{M_y}{E_1 I_y} d\sigma \qquad (9).$$

Dobbiamo ancora valutare l'effetto prodotto dal momento M_z, ossia la rotazione della sezione D E F attorno all'asse C_z. Ritenendo perciò tutte le denominazioni già state stabilite in questo numero, e chiamando

ϕ l'arco di raggio eguale all'unità che misura l'or indicata rotazione,

r la distanza del punto e dell'origine C,

abbiamo: che vale $r\phi$ l'arco piccolissimo di centro C e di raggio $C\overline{e}$ descritto dal punto e per l'esistenza del momento M_z; che, giusta le ipotesi state dichiarate nel numero 2, la resistenza trasversale sviluppata dall'elemento di fibra ee' vale

$$-E_t \omega \frac{r\phi}{d\sigma};$$

che il momento di questa resistenza rispetto all'asse C_z è

$$-E_t \omega \frac{r^2\phi}{d\sigma};$$

e che il momento, rispetto allo stesso asse, della totale resistenza trasversale sviluppata da tutti gli elementi di fibra compresi fra le due sezioni D E F e D' E' F' per causa del momento M_z, ha per espressione

$$-E_t \frac{\phi}{d\sigma} \Sigma \omega r^2.$$

Ma questo momento deve fare equilibrio al momento M_z, e quindi osservando che la somma $\Sigma \omega r^2$ rappresenta il momento d'inerzia I_z della sezione D E F intorno all'asse C_z, abbiamo l'equazione

$$M_z - E_t \frac{\phi}{d\sigma} I_z = 0,$$

dalla quale immediatamente ricaviamo

$$\phi = \frac{M_z}{E_t I_z} d\sigma \qquad (10).$$

Le translazioni x_1, y_1 e z_1 date dalle formole (3), (4) e (5), e le rotazioni $\theta \cos\psi$, $\theta \operatorname{sen}\psi$ e ϕ date dalle formole (8), (9) e (10), sono sei elementi che determinano lo spostamento della sezione DEF relativamente alla sezione vicinissima D'E'F'. Ne trarremo partito nei numeri che seguono onde studiare le deformazioni di un solido elastico sotto l'azione di forze estrinseche comunque operanti.

5. Variazioni di coordinate di un punto qualunque dell'asse di un solido elastico. — Riferiremo innanzi tutto lo spostamento della sezione retta qualunque DEF (*Fig.* 2) relativamente alla sezione vicinissima D'E'F' ad un nuovo sistema di assi coordinati ortogonali $O\xi$, $O\upsilon$ ed $O\zeta$, e chiameremo perciò rispettivamente:

α, β e γ gli angoli della retta Cx coi detti tre assi $O\xi$, $O\upsilon$ ed $O\zeta$;

α', β' e γ' gli angoli della retta Cy cogli stessi assi;

ξ, υ e ζ le tre coordinate $\overline{ON}$, $\overline{NP}$ e $\overline{PC}$ del punto C.

Osservando che sono rispettivamente $\frac{d\xi}{d\sigma}$, $\frac{d\upsilon}{d\sigma}$ e $\frac{d\zeta}{d\sigma}$ i coseni degli angoli che la retta Cz, tangente in C alla curva C_0CC_u, fa cogli assi coordinati $C\xi$, $C\upsilon$ e $C\zeta$, e proiettando le tre translazioni x_1, y_1 e z_1 date dalle formole (3), (4) e (5) del numero precedente sugli ultimi accennati assi, abbiamo: che sono

$$\frac{X \cos\alpha}{E_t \Omega} d\sigma$$

$$\frac{X \cos\beta}{E_t \Omega} d\sigma$$

$$\frac{X \cos\gamma}{E_t \Omega} d\sigma$$

le tre proiezioni della translazione x_1; che valgono

$$\frac{Y \cos\alpha'}{E_t \Omega} d\sigma$$

$$\frac{Y \cos\beta'}{E_t \Omega} d\sigma$$

$$\frac{Y \cos\gamma'}{E_t \Omega} d\sigma$$

le tre proiezioni della translazione y_1; che risultano

$$\frac{Z}{E_1 \Omega} d\xi$$

$$\frac{Z}{E_1 \Omega} d\upsilon$$

$$\frac{Z}{E_1 \Omega} d\zeta$$

le tre proiezioni della translazione z_1.

Analogamente, scomponendo ciascuna delle rotazioni $\theta \cos\psi$, $\theta \operatorname{sen}\psi$ e ϕ, risultanti dalle formole (8), (9) e (10) del numero precedente, in tre attorno agli assi $O\xi$, $O\upsilon$ ed $O\zeta$, troviamo: che sono

$$\frac{M_x \cos\alpha}{E_1 I_x} d\sigma$$

$$\frac{M_x \cos\beta}{E_1 I_x} d\sigma$$

$$\frac{M_x \cos\gamma}{E_1 I_x} d\sigma$$

le tre componenti della rotazione $\theta \cos\psi$; che valgono

$$\frac{M_y \cos\alpha'}{E_1 I_y} d\sigma$$

$$\frac{M_y \cos\beta'}{E_1 I_y} d\sigma$$

$$\frac{M_y \cos\gamma'}{E_1 I_y} d\sigma$$

le tre componenti della rotazione $\theta \operatorname{sen}\psi$; e finalmente che sono espresse da

$$\frac{M_z}{E_1 I_z} d\xi$$

$$\frac{M_z}{E_1 I_z} d\upsilon$$

$$\frac{M_z}{E_t I_z} d\zeta$$

le tre componenti della rotazione ϕ.

Riepilogando possiamo dire che il movimento relativo della sezione DEF per rapporto alla sezione vicinissima D'E'F' è determinato: da tre translazioni a, b e c parallele agli assi coordinati $O\xi$, $O\upsilon$ ed $O\zeta$, date dalle formole

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{X\cos\alpha}{E_t\Omega} d\sigma + \frac{Y\cos\alpha'}{E_t\Omega} d\sigma + \frac{Z}{E_l\Omega} d\xi \\ b &= \frac{X\cos\beta}{E_t\Omega} d\sigma + \frac{Y\cos\beta'}{E_t\Omega} d\sigma + \frac{Z}{E_l\Omega} d\upsilon \\ c &= \frac{X\cos\gamma}{E_t\Omega} d\sigma + \frac{Y\cos\gamma'}{E_t\Omega} d\sigma + \frac{Z}{E_l\Omega} d\zeta \end{aligned}\right\} \quad (1);$$

e da tre rotazioni m, n e p intorno agli assi stessi, espresse da

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{M_x\cos\alpha}{E_l I_x} d\sigma + \frac{M_y\cos\alpha'}{E_l I_y} d\sigma + \frac{M_z}{E_t I_z} d\xi \\ n &= \frac{M_x\cos\beta}{E_l I_x} d\sigma + \frac{M_y\cos\beta'}{E_l I_y} d\sigma + \frac{M_z}{E_t I_z} d\upsilon \\ p &= \frac{M_x\cos\gamma}{E_l I_x} d\sigma + \frac{M_y\cos\gamma'}{E_l I_y} d\sigma + \frac{M_z}{E_t I_z} d\zeta \end{aligned}\right\} \quad (2).$$

A motivo dello spostamento infinitesimo della sezione retta qualunque DEF, varia la posizione di un punto qualsiasi G_i dell'asse, e, chiamando

ξ_i, υ_i e ζ_i le sue tre coordinate,

$d\xi_i$, $d\upsilon_i$ e $d\zeta_i$ le variazioni infinitesime delle coordinate stesse, abbiamo: che il punto G_i subisce, parallelamente agli assi $C\xi$, $C\upsilon$ e $C\zeta$, tre spostamenti espressi dalle translazioni a, b e c; che di più nelle stesse direzioni si verificano altri spostamenti causati dalle tre rotazioni m, n e p.

Proiettati i punti C e C_i (*Fig.* 4) dell'asse $C_o C C_u$ sul piano $\xi O\upsilon$ in P e P_i, riesce facile il comprendere come lo spostamento del punto

C_i per la rotazione attorno all'asse $O\xi$ consista in un piccolo elemento circolare di raggio $\overline{PP_i}$, avente il verso da P_i verso Q, contenuto in un piano parallelo al piano $\xi O v$ e proiettantesi su questo in un arco infinitesimo P_iP'. La lunghezza del detto elemento è

$$p.\overline{PP_i};$$

conducendo pei punti P e P_i le rette PN e P_iN_i parallele ad Ov e da P' la retta P'R parallela ad $O\xi$, otteniamo rispettivamente nei due cateti $\overline{P'R}$ e $\overline{P_iR}$ del triangolo piccolissimo P_iRP' le lunghezze delle sue proiezioni sui due assi coordinati $O\xi$ ed Ov; finalmente, essendo il triangolo P_iRP' simile al triangolo PTP_i, che risulta col condurre PT parallela all'asse $O\xi$, ed avendosi

$$\overline{PT} = \overline{NN_i} = \xi_i - \xi$$

$$\overline{TP_i} = v_i - v,$$

immediatamente ricaviamo

$$\overline{P'R} = \frac{\overline{TP_i} \times \overline{P_iP'}}{\overline{PP_i}} = p\,(v_i - v)$$

$$\overline{P_iR} = \frac{\overline{PT} \times \overline{P_iP'}}{\overline{PP_i}} = p\,(\xi_i - \xi).$$

È nulla la proiezione dello spostamento subìto dal punto C_i, pel fatto della rotazione p, sull'asse $O\zeta$, giacchè questo spostamento ha luogo in un piano perpendicolare all'asse or indicato; la proiezione $p\,(v_i - v)$ sull'asse $O\xi$ si deve considerare come positiva, perchè produce aumento dell'ascissa del punto P; e si deve considerare come negativa la proiezione $p\,(\xi_i - \xi)$ sull'asse Ov, perchè produce diminuzione nell'ordinata dello stesso punto.

Ragionando per le proiezioni degli spostamenti dovuti alle rotazioni intorno agli assi $O\xi$ ed Ov, precisamente come abbiamo fatto per le proiezioni dello spostamento dovuto alla rotazione intorno all'asse $O\zeta$, facilmente possiamo conchiudere: che, per la rotazione attorno all'asse $O\xi$, le proiezioni del corrispondente spostamento risultano

0 sull'asse $O\xi$

$$m(\zeta_i - \zeta) \text{ sull'asse } O\upsilon$$
$$-m(\upsilon_i - \upsilon) \text{ sull'asse } O\zeta;$$

che, per la rotazione attorno all'asse $O\upsilon$, le proiezioni del relativo spostamento sono

$$-n(\zeta_i - \zeta) \text{ sull'asse } O\xi$$
$$0 \text{ sull'asse } O\upsilon$$
$$n(\xi_i - \xi) \text{ sull'asse } O\zeta;$$

e che, per la rotazione attorno all'asse $O\zeta$, si hanno per proiezioni del relativo spostamento

$$p(\upsilon_i - \upsilon) \text{ sull'asse } O\xi$$
$$-p(\xi_i - \xi) \text{ sull'asse } O\upsilon$$
$$0 \text{ sull'asse } O\zeta.$$

Riunendo assieme tutte le proiezioni sopra un medesimo asse, ci risulta che i valori di $d\xi_i$, $d\upsilon_i$ e $d\zeta_i$ sono dati dalle formole

$$\left.\begin{aligned} d\xi_i &= a + p(\upsilon_i - \upsilon) - n(\zeta_i - \zeta) \\ d\upsilon_i &= b + m(\zeta_i - \zeta) - p(\xi_i - \xi) \\ d\zeta_i &= c + n(\xi_i - \xi) - m(\upsilon_i - \upsilon) \end{aligned}\right\} \quad (3),$$

le quali, pei valori di a, b, c, m, n e p dati dalle equazioni (1) e (2), diventano

$$d\xi_i = \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{E_i \Omega}(X\cos\alpha + Y\cos\alpha')\,d\sigma + \frac{Z}{E_i\Omega}\,d\xi \\ &+(\upsilon_i - \upsilon)\left[\frac{1}{E_i}\left(\frac{M_x\cos\gamma}{I_x} + \frac{M_y\cos\gamma'}{I_y}\right)d\sigma + \frac{M_z}{E_i I_z}\,d\zeta\right] \\ &-(\zeta_i - \zeta)\left[\frac{1}{E_i}\left(\frac{M_x\cos\beta}{I_x} + \frac{M_y\cos\beta'}{I_y}\right)d\sigma + \frac{M_z}{E_i I_z}\,d\upsilon\right] \end{aligned}\right\}$$

$$d\upsilon_i = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{E_t \Omega} (X \cos\beta + Y \cos\beta') \, d\sigma + \dfrac{Z}{E_l \Omega} \, d\upsilon \\ + (\zeta_i - \zeta) \left[\dfrac{1}{E_l} \left(\dfrac{M_x \cos\alpha}{I_x} + \dfrac{M_y \cos\alpha'}{I_y} \right) d\sigma + \dfrac{M_z}{E_t \Omega} \, d\xi \right] \\ - (\xi_i - \xi) \left[\dfrac{1}{E_l} \left(\dfrac{M_x \cos\gamma}{I_x} + \dfrac{M_y \cos\gamma'}{I_y} \right) d\sigma + \dfrac{M_z}{E_t I_x} \, d\zeta \right] \end{array} \right\}$$

$$d\zeta_i = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{E_t \Omega} (X \cos\gamma + Y \cos\gamma') \, d\sigma + \dfrac{Z}{E_l \Omega} \, d\zeta \\ + (\xi_i - \xi) \left[\dfrac{1}{E_l} \left(\dfrac{M_x \cos\beta}{I_x} + \dfrac{M_y \cos\beta'}{I_y} \right) d\sigma + \dfrac{M_z}{E_t I_z} \, d\upsilon \right] \\ - (\upsilon_i - \upsilon) \left[\dfrac{1}{E_l} \left(\dfrac{M_x \cos\alpha}{I_x} + \dfrac{M_y \cos\alpha'}{I_y} \right) d\sigma + \dfrac{M_z}{E_t I_z} \, d\xi \right] \end{array} \right\}$$

I trovati valori di $d\xi_i$, $d\upsilon_i$ e $d\zeta_i$ rappresentano le variazioni di coordinate del punto C_i (*Fig.* 2) a motivo dello spostamento infinitesimo subìto dalla sezione retta qualunque D E F relativamente alla sezione infinitamente vicina; e quindi, integrando i detti valori di $d\xi_i$, $d\upsilon_i$ e $d\zeta_i$ fra i limiti corrispondenti ai punti C_o e C_i, devono risultare le variazioni di coordinate del punto C_i per causa degli spostamenti che, sotto l'azione delle forze estrinseche, tutte le sezioni comprese fra gli indicati limiti prendono le une per rapporto alle altre nell'ipotesi che sia fissa la sezione d'origine, ossia quella corrispondente al punto C_o. Chiamando adunque

ξ_o, υ_o e ζ_o le coordinate del punto C_o,

σ_o la parte dell'asse del solido compresa fra l'origine degli archi ed il punto C_o,

σ_i la parte dell'asse del solido intercetta fra la detta origine ed il punto C_i,

$\Delta'\xi_i$, $\Delta'\upsilon_i$ e $\Delta'\zeta_i$ le variazioni delle coordinate del punto C_i sotto l'azione delle forze estrinseche, quando si supponga fissa la sezione d'origine corrispondente al punto C_o,

otteniamo le formole

$$\Delta'\xi_i = \begin{cases} \displaystyle\int_{\xi_o}^{\xi_i} \left[\frac{1}{E_t\Omega}(X\cos\alpha + Y\cos\alpha')\frac{d\sigma}{d\xi} + \frac{Z}{E_l\Omega}\right]d\xi \\ \displaystyle + \int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (v_i - v)\left[\frac{1}{E_l}\left(\frac{M_x\cos\gamma}{I_x} + \frac{M_y\cos\gamma'}{I_y}\right) + \frac{M_z}{E_tI_z}\frac{d\xi}{d\sigma}\right]d\sigma \\ \displaystyle - \int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (\zeta_i - \zeta)\left[\frac{1}{E_l}\left(\frac{M_x\cos\beta}{I_x} + \frac{M_y\cos\beta'}{I_y}\right) + \frac{M_z}{E_tI_z}\frac{dv}{d\sigma}\right]d\sigma \end{cases} \quad (4),$$

$$\Delta' v_i = \begin{cases} \displaystyle\int_{v_o}^{v_i} \left[\frac{1}{E_t\Omega}(X\cos\beta + Y\cos\beta')\frac{d\sigma}{dv} + \frac{Z}{E_l\Omega}\right]dv \\ \displaystyle + \int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (\zeta_i - \zeta)\left[\frac{1}{E_l}\left(\frac{M_x\cos\alpha}{I_x} + \frac{M_y\cos\alpha'}{I_y}\right) + \frac{M_z}{E_tI_z}\frac{d\xi}{d\sigma}\right]d\sigma \\ \displaystyle - \int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (\xi_i - \xi)\left[\frac{1}{E_l}\left(\frac{M_x\cos\gamma}{I_x} + \frac{M_y\cos\gamma'}{I_y}\right) + \frac{M_z}{E_tI_z}\frac{d\zeta}{d\sigma}\right]d\sigma \end{cases} \quad (5),$$

$$\Delta'\zeta_i = \begin{cases} \displaystyle\int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \left[\frac{1}{E_t\Omega}(X\cos\gamma + Y\cos\gamma')\frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{Z}{E_l\Omega}\right]d\zeta \\ \displaystyle + \int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (\xi_i - \xi)\left[\frac{1}{E_l}\left(\frac{M_x\cos\beta}{I_x} + \frac{M_y\cos\beta'}{I_y}\right) + \frac{M_z}{E_tI_z}\frac{dv}{d\sigma}\right]d\sigma \\ \displaystyle - \int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (v_i - v)\left[\frac{1}{E_l}\left(\frac{M_x\cos\alpha}{I_x} + \frac{M_y\cos\alpha'}{I_y}\right) + \frac{M_z}{E_tI_z}\frac{d\xi}{d\sigma}\right]d\sigma \end{cases} \quad (6).$$

Ma nella sezione iniziale, ossia in quella corrispondente al punto C_o

dell'asse, può anche avvenire uno spostamento, ed importa tenerne conto nel valutare le variazioni di coordinate del punto C_i. Chiamando perciò

$\Delta\xi_o$, Δv_o e $\Delta\zeta_o$ gli spostamenti della sezione iniziale paralleli agli assi coordinati $O\xi$, Ov ed $O\zeta$,

m_o, n_o e p_o le tre componenti, rispetto ai medesimi assi coordinati, della rotazione della stessa sezione,

$\Delta''\xi_i$, $\Delta''v_i$ e $\Delta''\zeta_i$ le variazioni di coordinate del punto C_i quando si tenga contemporaneamente conto degli spostamenti di tutte le sezioni comprese fra C_o e C_i sotto l'azione delle forze estrinseche e degli spostamenti della sezione iniziale,

abbiamo: che per i soli spostamenti della sezione iniziale, le coordinate del punto C_i prenderebbero le variazioni $\delta'\xi_i$, $\delta'v_i$ e $\delta'\zeta_i$ facili a determinarsi ripetendo i ragionamenti che servirono alla deduzione delle formole (3), e quindi date da

$$\delta'\xi_i = \Delta\xi_o + p_o(v_i - v_o) - n_o(\zeta_i - \zeta_o) \qquad (7),$$

$$\delta'v_i = \Delta v_o + m_o(\zeta_i - \zeta_o) - p_o(\xi_i - \xi_o) \qquad (8),$$

$$\delta'\zeta_i = \Delta\zeta_o + n_o(\xi_i - \xi_o) - m_o(v_i - v_o) \qquad (9);$$

e che quindi le variazioni di coordinate $\Delta''\xi_i$, $\Delta''v_i$ e $\Delta''\zeta_i$ risultano

$$\Delta''\xi_i = \delta'\xi_i + \Delta'\xi_i \qquad (10),$$

$$\Delta''v_i = \delta'v_i + \Delta'v_i \qquad (11),$$

$$\Delta''\zeta_i = \delta'\zeta_i + \Delta'\zeta_i \qquad (12).$$

I cangiamenti di temperatura, secondo che corrispondono ad aumenti od a diminuzioni di calore, producono dilatazioni o restringimenti in tutte le parti di un corpo che li prova; e quindi tali cangiamenti possono avere qualche influenza sulla variazione di coordinate dell'asse di un solido elastico. Le alterazioni di dimensioni prodotte dai cangiamenti di temperatura non implicano un'alterazione di forma in un corpo omogeneo libero da vincoli; ma quest'ultima può essere assai ragguardevole, quando ostacoli esterni operano sul corpo. Tenendo conto dell'esistenza e quindi delle reazioni degli ostacoli, si può considerare come assolutamente libero il corpo che ad essi si trova vincolato e valutare col metodo che segue l'influenza

dei cangiamenti di temperatura sulle variazioni di coordinate del suo asse. Detto

τ il coefficiente di dilatazione lineare corrispondente al cangiamento di temperatura che conviene considerare, ossia il prodotto del coefficiente di dilatazione della materia di cui il corpo è formato per l'aumento o per la diminuzione di temperatura che in esso si suppone avvenire,

abbiamo: che nell'arco CC' di lunghezza $d\sigma$ si verifica la variazione di lunghezza

$$\tau d\sigma;$$

che le proiezioni di questa variazione di lunghezza sui tre assi coordinati $O\xi$, $O\upsilon$ ed $O\zeta$ sono rispettivamente

$$\tau d\sigma \frac{d\xi}{d\sigma} = \tau d\xi$$

$$\tau d\sigma \frac{d\upsilon}{d\sigma} = \tau d\upsilon$$

$$\tau d\sigma \frac{d\zeta}{d\sigma} = \tau d\zeta;$$

e finalmente che, supponendo costante il valore di τ, le variazioni di coordinate dovute ai cangiamenti di temperatura per la parte di asse C_oC_i sono date da

$$\int_{\xi_o}^{\xi_i} \tau d\xi = \tau (\xi_i - \xi_o)$$

$$\int_{\upsilon_o}^{\upsilon_i} \tau d\upsilon = \tau (\upsilon_i - \upsilon_o)$$

$$\int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \tau d\zeta = \tau (\zeta_i - \zeta_o).$$

Il valore di τ deve essere assunto positivo o negativo, secondo che si riferisce ad un aumento o ad una diminuzione di temperatura.

Chiamando

$\Delta\xi_i$, Δv_i e $\Delta\zeta_i$ le variazioni di coordinate del punto C_i col tener contemporaneamente conto degli spostamenti di tutte le sezioni comprese fra C_o e C_i, degli spostamenti della sezione iniziale e dell'influenza delle variazioni di temperatura,
otteniamo i loro valori coll'aggiungere rispettivamente ai secondi membri delle equazioni (10), (11) e (12) le quantità $\tau(\xi_i - \xi_o)$, $\tau(v_i - v_o)$ e $\tau(\zeta_i - \zeta_o)$; cosicchè si hanno le formole

$$\Delta\xi_i = \delta'\xi_i + \Delta'\xi_i + \tau(\xi_i - \xi_o)$$

$$\Delta v_i = \delta' v_i + \Delta' v_i + \tau(v_i - v_o)$$

$$\Delta\zeta_i = \delta'\zeta_i + \Delta'\zeta_i + \tau(\zeta_i - \zeta_o).$$

Sostituendo poi in queste formole i valori di $\Delta'\xi_i$, $\Delta' v_i$ e $\Delta'\zeta_i$ dati dalle equazioni (4), (5) e (6), non che i valori di $\delta'\xi_i$, $\delta' v_i$ e $\delta'\zeta_i$ dati dalle formole (7), (8) e (9), arriviamo alle seguenti formole determinatrici dei valori definitivi delle variazioni di coordinate $\Delta\xi_i$, Δv e $\Delta\zeta_i$.

$$\Delta\xi_i = \left\{ \begin{array}{l} \Delta\xi_o + p_o(v_i - v_o) - n_o(\zeta_i - \zeta_o) + \tau(\xi_i - \xi_o) \\ + \displaystyle\int_{\xi_o}^{\xi_i} \left[\frac{1}{E_1\Omega}(X\cos\alpha + Y\cos\alpha') \frac{d\sigma}{d\xi} + \frac{Z}{E_1\Omega} \right] d\xi \\ + \displaystyle\int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (v_i - v) \left[\frac{1}{E_1} \left(\frac{M_x\cos\gamma}{I_x} + \frac{M_y\cos\gamma'}{I_y} \right) + \frac{M_z}{E_1 I_z} \frac{d\zeta}{d\sigma} \right] d\sigma \\ - \displaystyle\int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (\zeta_i - \zeta) \left[\frac{1}{E_1} \left(\frac{M_x\cos\beta}{I_x} + \frac{M_y\cos\beta'}{I_y} \right) + \frac{M_z}{E_1 I_z} \frac{dv}{d\sigma} \right] d\sigma \end{array} \right\} \quad (13),$$

$$\Delta v_i = \left\{ \begin{array}{l} \Delta v_o + m_o(\xi_i - \xi_o) - p_o(\xi_i - \xi_o) + \tau(v_i - v_o) \\ + \displaystyle\int_{v_o}^{v_i} \left[\frac{1}{E_t \Omega} (X \cos\beta + Y \cos\beta') \frac{d\sigma}{dv} + \frac{Z}{E_t \Omega} \right] dv \\ + \displaystyle\int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (\zeta_i - \zeta) \left[\frac{1}{E_t} \left(\frac{M_x \cos\alpha}{I_x} + \frac{M_x \cos\alpha'}{I_y} \right) + \frac{M_z}{E_t I_z} \frac{d\xi}{d\sigma} \right] d\sigma \\ - \displaystyle\int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (\xi_i - \xi) \left[\frac{1}{E_t} \left(\frac{M_x \cos\gamma}{I_x} + \frac{M_y \cos\gamma'}{I_y} \right) + \frac{M_z}{E_t I_z} \frac{d\xi}{d\sigma} \right] d\sigma \end{array} \right\} (14),$$

$$\Delta \zeta_i = \left\{ \begin{array}{l} \Delta \zeta_o + n_o(\xi_i - \xi_o) - m_o(v_i - v_o) + \tau(\zeta_i - \zeta_o) \\ + \displaystyle\int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \left[\frac{1}{E_t \Omega} (X \cos\gamma + Y \cos\gamma') \frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{Z}{E_t \Omega} \right] d\zeta \\ + \displaystyle\int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (\xi_i - \xi) \left[\frac{1}{E_t} \left(\frac{M_x \cos\beta}{I_x} + \frac{M_y \cos\beta'}{I_y} \right) + \frac{M_z}{E_t I_z} \frac{dv}{d\sigma} \right] d\sigma \\ - \displaystyle\int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (v_i - v) \left[\frac{1}{E_t} \left(\frac{M_x \cos\alpha}{I_x} + \frac{M_y \cos\alpha'}{I_y} \right) + \frac{M_z}{E_t I_z} \frac{d\xi}{d\sigma} \right] d\sigma \end{array} \right\} (15).$$

I grandi archi metallici sono generalmente formati di più parti da disporsi a guisa di cunei, fra i quali si conficcano delle biette di metallo e che in seguito fortemente si inchiavardano o si inchiodano. Risulta da tale disposizione: che un arco siffatto esercita sui suoi appoggi alcune azioni indipendenti dalle forze che lo sollecitano, ossia che esso agirebbe ancora sui suoi appoggi anche quando si sopprimessero tutte le forze che gli sono direttamente applicate; e che questo equivale ad una dilatazione artificiale, in virtù della quale la fibra media prenderebbe una lunghezza maggiore della sua lunghezza primitiva. Il signor Bresse propone di tener conto di questo fatto, attribuendo alla costante τ, che entra nelle formole (13), (14)

e (15), non il valore del coefficiente di dilatazione lineare prodotto dal cangiamento di temperatura, ma sibbene questo coefficiente aumentato dal rapporto fra l'allungamento prodotto dal sistema di unione e la lunghezza primitiva dell'asse dell'arco. Così, dicendo

S la lunghezza totale della fibra media quale venne progettata,

s l'allungamento prodotto dal sistema di unione delle diverse parti dell'arco,

τ' la dilatazione lineare, positiva o negativa, dovuta al cangiamento di temperatura,

si potrà assumere il valore di τ quale risulta dalla formola

$$\tau = \tau' + \frac{s}{S} \qquad (16).$$

Il rapporto $\frac{s}{S}$ è variabile nella pratica; esso però è sempre assai piccolo; e negli archi metallici è ordinariamente più piccolo del numero 0,0001. Il valore di τ' è dato dall'aumento o dall'abbassamento di temperatura espresso in gradi centigradi, moltiplicato per il coefficiente di dilatazione lineare della materia di cui il corpo è formato, il qual coefficiente si può ritenere: di 0,000008 pel legname di larice rosso; di 0,0000122 pel ferro; di 0,0000111 per la ghisa; e di 0,00001079 per l'acciaio.

La pratica applicazione delle formole (13), (14) e (15) suppone che si conoscano le equazioni della curva $C_o C C_u$ rispetto ai tre assi coordinati $O\xi$, $O\upsilon$ ed $O\zeta$, e che di più siano note le leggi secondo le quali variano da sezione a sezione le forze X, Y e Z, i momenti M_x, M_y ed M_z, le sezioni Ω, i momenti d'inerzia I_x, I_y ed I_z, gli angoli α, β e γ, gli angoli α', β' e γ', ed i coefficienti d'elasticità E_l ed E_t.

6. **Deviazione delle sezioni rette di un solido elastico.** — Nel deformarsi di un solido elastico sotto l'azione di forze estrinseche, avvengono in ciascuna delle sezioni rette una translazione ed una rotazione; e, per causa di quest'ultima, ciascuna sezione normale finisce per deviare dalla sua primitiva posizione. Considerando una sezione retta qualsiasi, per esempio quella corrispondente al punto C_i (*Fig.* 2), la deviazione che essa prova si ottiene componendo la rotazione della sezione iniziale corrispondente al punto C_o con tutte le rotazioni relative di due sezioni vicine fra C_o e C_i. Chiamando

m_i, n_i e p_i le rotazioni della sezione corrispondente al punto C_i,

e conservando alle lettere M_x, M_y, M_z, I_x, I_y, I_z, E_t, E_l, m_o, n_o, p_o,

ξ_o, υ_o, ζ_o, ξ_i, υ_i, ζ_i, ξ, υ, ζ e σ i significati che già loro vennero attribuiti nei numeri 4 e 5, ed avendo riguardo alle equazioni (2) dell'ultimo citato numero, abbiamo adunque le formole

$$\left.\begin{aligned} m_i &= m_o + \int_{\xi_o}^{\xi_i} \left[\frac{1}{E_i}\left(\frac{M_x \cos\alpha}{I_x} + \frac{M_y \cos\alpha'}{I_y}\right)\frac{d\sigma}{d\xi} + \frac{M_z}{E_t I_z}\right] d\xi \\ n_i &= n_o + \int_{\upsilon_o}^{\upsilon_i} \left[\frac{1}{E_i}\left(\frac{M_x \cos\beta}{I_x} + \frac{M_y \cos\beta'}{I_y}\right)\frac{d\sigma}{d\upsilon} + \frac{M_z}{E_t I_z}\right] d\upsilon \\ p_i &= p_o + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \left[\frac{1}{E_i}\left(\frac{M_x \cos\gamma}{I_x} + \frac{M_y \cos\gamma'}{I_y}\right)\frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{M_z}{E_t I_z}\right] d\zeta \end{aligned}\right\} (1),$$

le quali vengono in acconcio per determinare la deviazione, ossia la totale rotazione di una sezione retta qualunque di un solido elastico deformatosi sotto l'azione di determinate forze estrinseche, allorquando si conoscono le equazioni della curva $C_o C C_u$ rispetto ai tre assi coordinati $O\xi$, $O\upsilon$ ed $O\zeta$, e le leggi secondo le quali variano da sezione a sezione i momenti M_x, M_y ed M_z, i momenli d'inerzia I_x, I_y ed I_z, gli angoli α, β e γ, gli angoli α', β' e γ', ed i coefficienti d'elasticità E_i ed E_t.

7. Determinazione delle costanti, le quali rappresentano i movimenti della sezione iniziale. — Le formole (13), (14) e (15) del numero 5 dànno le componenti $\Delta\xi_i$, $\Delta\upsilon_i$ e $\Delta\zeta_i$ dello spostamento di un punto qualunque dell'asse di un solido elastico in funzione delle forze estrinseche e delle sei quantità costanti $\Delta\xi_o$, $\Delta\upsilon_o$, $\Delta\zeta_o$, m_o, n_o e p_o, le quali definiscono lo spostamento di quella sezione che chiamiamo sezione iniziale; e quindi rimane indeterminata la posizione definitiva del solido, finchè non si conoscono le sei costanti or indicate. Dal modo però con cui vennero dedotte le accennate equazioni, chiaramente risulta come lo spostamento di una sezione retta qualunque del corpo relativamente alla sezione iniziale sia determinato in funzione delle sole forze estrinseche, e come per conseguenza l'indeterminazione delle costanti $\Delta\xi_o$, $\Delta\upsilon_o$, $\Delta\zeta_o$, m_o, n_o e p_o porti bensì indeterminazione nella posizione reale, ma non nella forma definitiva del corpo.

Ad ogni modo le costanti accennate sono sempre facili a determinarsi nella maggior parte dei casi pratici, e conducono allo scopo le

condizioni degli appoggi fissi, degli incastramenti, dei raccordamenti, ed in genere di vincoli per cui alcune sezioni devono restare assolutamente fisse o prendere certi determinati movimenti. Esaminando alcuni casi particolari, faremo vedere, nel capitolo che segue, come si determinano queste costanti nelle più frequenti circostanze della pratica.

CAPITOLO III.

Deformazioni dei corpi elastici nei casi particolari che più di frequente si presentano nella pratica delle costruzioni.

8. **Variazioni di coordinate dell'asse primitivamente rettilineo di un solido elastico, sollecitato da forze contenute in un sol piano passante per l'asse medesimo, e deviazioni delle sue sezioni rette.** — Assumendo in questo caso l'asse o fibra media del corpo per asse delle ascisse ζ, ed il piano di sollecitazione per piano $\zeta O \upsilon$, si ha

$$\xi_o = 0, \qquad \xi_i = 0, \qquad \xi = 0,$$

$$\upsilon_o = 0, \qquad \upsilon_i = 0, \qquad \upsilon = 0,$$

$$\sigma_o = \zeta_o, \qquad \sigma_i = \zeta_i, \qquad \sigma = \zeta.$$

I due assi principali centrali d'inerzia Cx e Cy (*Fig.* 5) di una sezione retta qualunque DEF sono perpendicolari all'asse coordinato $O\zeta$, di modo che risulta

$$\cos\gamma = \cos\gamma' = 0\,;$$

e, proiettando i detti assi principali d'inerzia sul piano $\xi O \upsilon$ in Ox' ed Oy', per essere $\xi O x' = \alpha$, $\upsilon O x' = \beta$, $\xi O y' = \alpha'$ e $\upsilon O y' = \beta'$, immediatamente si deduce

$$\beta = 90^o - \alpha, \qquad \alpha' = 90^o + \alpha, \qquad \beta' = \alpha,$$

d'onde

$$\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha, \qquad \cos\alpha' = -\operatorname{sen}\alpha, \qquad \cos\beta' = \cos\alpha.$$

Si ha

$$M_z = 0,$$

giacchè tutte le forze sollecitanti incontrano l'asse Oz; e, per essere nulle le translazioni prodotte dalla forza Z, parallelamente agli assi $O\xi$ ed Ov, giacchè questa forza è perpendicolare al piano ξOv, risulta

$$\int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{Z}{E_1\Omega}\, d\xi = 0,$$

$$\int_{v_0}^{v_1} \frac{Z}{E_1\Omega}\, dv = 0.$$

Se poi si proiettano sul piano ξOv le due forze X ed Y (*Fig.* 6), e si costruisce il rettangolo i cui lati rappresentano in intensità e direzione queste stesse forze, si ha: che la diagonale OR di questo rettangolo è diretta secondo l'asse Ov; che sono eguali le due perpendicolari $\overline{PX}$ e $\overline{QY}$ alla detta diagonale; che, per essere eguali ad α i due angoli PXO e QOY, risulta

$$\overline{PX} = X\cos\alpha,$$

$$\overline{QY} = Y\operatorname{sen}\alpha;$$

che per conseguenza

$$X\cos\alpha - Y\operatorname{sen}\alpha = 0.$$

Avuto riguardo alle relazioni or ora stabilite, e ricorrendo alle equazioni (13), (14) e (15) del numero 5, riesce facile il dedurre le formole determinatrici delle variazioni di coordinate $\Delta\xi_i$, Δv_i e $\Delta\zeta_i$ pel caso di un solido elastico con asse primitivamente rettilineo e sollecitato da forze contenute nel piano ζOv (*Fig.* 5). Tali formole risultano

$$\Delta\xi_i = \left\{ \begin{array}{l} \Delta\xi_o - n_o(\zeta_i - \zeta_o) \\ \\ -\displaystyle\int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{1}{E_l}(\zeta_i - \zeta)\left(\frac{M_x \operatorname{sen}\alpha}{I_x} + \frac{M_y \cos\alpha}{I_y}\right) d\zeta \end{array} \right\} (1),$$

$$\Delta v_i = \left\{ \begin{array}{l} \Delta v_o + m_o(\zeta_i - \zeta_o) + \displaystyle\int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{1}{E_t \Omega}(X \operatorname{sen}\alpha + Y \cos\alpha)\, d\zeta \\ \\ +\displaystyle\int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{1}{E_l}(\zeta_i - \zeta)\left(\frac{M_x \cos\alpha}{I_x} - \frac{M_y \operatorname{sen}\alpha}{I_y}\right) d\zeta \end{array} \right\} (2),$$

$$\Delta\xi_i = \Delta\xi_o + \tau(\zeta_i - \zeta_o) + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{Z}{E_l \Omega}\, d\zeta \qquad (3).$$

Il valore di $\Delta\xi_i$ dato dalla formola (1) non è generalmente nullo, e quindi siamo portati a conchiudere che un solido elastico, avente per asse primitivo una linea retta e sollecitato da forze tutte contenute in uno stesso piano passante per l'asse medesimo, in generale si deforma in modo da sortire l'asse deformato dal piano di sollecitazione, ed anche da disporsi secondo una curva a doppia curvatura.

Le totali rotazioni m_i, n_i e p_i della sezione retta corrispondente al punto C_i intorno agli assi coordinati $O\xi$, Ov ed $O\zeta$ possono essere dedotte applicando al caso particolare le formole generali (1) del numero 6. Avendo perciò riguardo alle relazioni tutte state stabilite fin dal principio di questo numero, troviamo le formole

$$\left. \begin{array}{l} m_i = m_o + \displaystyle\int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{1}{E_l}\left(\frac{M_x \cos\alpha}{I_x} - \frac{M_y \operatorname{sen}\alpha}{I_y}\right) d\zeta \\ \\ n_i = n_o + \displaystyle\int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{1}{E_l}\left(\frac{M_x \operatorname{sen}\alpha}{I_x} + \frac{M_y \cos\alpha}{I_y}\right) d\zeta \\ \\ p_i = p_o \end{array} \right\} (4),$$

da cui sarà agevole dedurre i valori delle rotazioni m_i, n_i e p_i, le quali dànno un'idea della totale deviazione della sezione retta corrispondente al punto C_i.

9. **Condizioni e formole per la flessione piana di un solido elastico con asse primitivamente rettilineo sollecitato da forze contenute in un sol piano passante per l'asse medesimo.** — Se, per tutte le sezioni rette del corpo, l'asse d'inerzia Cy (*Fig.* 5) è contenuto nel piano coordinato $\zeta O v$, ossia nel piano di sollecitazione, risulta che l'asse Cx si trova nel piano coordinato $\zeta O \xi$, che esso è parallelo ad $O\xi$, e che per conseguenza è nullo l'angolo α. Si ha

$$\operatorname{sen}\alpha = 0, \qquad \cos\alpha = 1,$$

$$X = 0, \qquad M_y = 0;$$

e, ammettendo che siano

$$\Delta\xi_o = 0, \qquad n_o = 0, \qquad p_o = 0,$$

le formole (1), (2) e (3) del precedente numero si semplificano e diventano

$$\Delta\xi_i = 0,$$

$$\Delta v_i = \Delta v_o + m_o(\zeta_i - \zeta_o) + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{Y}{E_i\Omega}\,d\zeta + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} (\zeta_i - \zeta)\,\frac{M_x}{E_i I_x}\,d\zeta \quad (1),$$

$$\Delta\zeta_i = \Delta\zeta_o + \tau(\zeta_i - \zeta_o) + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{Z}{E_i\Omega}\,d\zeta \quad (2).$$

Essendo nullo il valore di $\Delta\xi_i$, siamo portati a conchiudere che l'asse deformato si trova nel piano coordinato $\zeta O v$, ossia nel piano di sollecitazione, e quindi possiamo stabilire che un solido elastico, avente per asse primitivo una linea retta e sollecitato da forze contenute in un sol piano passante per la retta medesima, s'infletterà in modo da trovarsi l'asse deformato nel piano di sollecitazione quando saranno soddisfatte le seguenti condizioni: di avvenire nel piano $\zeta O v$, ossia nel piano di sollecitazione, gli spostamenti paralleli agli assi coordinati del centro di superficie della sezione iniziale; di rotare questa

sezione solamente intorno ad una parallela all'asse $C\xi$, ossia intorno ad una perpendicolare al piano di sollecitazione; di essere un asse principale centrale d'inerzia l'intersezione di ciascuna sezione retta col piano di sollecitazione (*b*).

(*b*) Le formole (1) e (2), relative alla flessione piana di un solido con fibra media primitivamente rettilinea, sollecitato da forze contenute in un sol piano passante per la fibra medesima ed intersecante tutte le sezioni rette secondo un asse principale centrale d'inerzia, sono quasi le sole che vengono in acconcio per lo studio delle deformazioni delle travi, quali generalmente si mettono in opera nelle costruzioni; e quindi, onde non costringere gli uomini della pratica a passare per la teoria piuttosto complicata, di cui tali formole sono una conseguenza. crediamo conveniente di esporre il metodo semplice e spedito che può servire per la diretta loro deduzione.

Assumendo l'asse del corpo per asse della ascisse ζ (*Fig.* 7), e ponendo l'asse compagno $O\upsilon$ nel piano di sollecitazione, lo spostamento della sezione retta qualunque EF relativamente alla sezione infinitamente vicina E'F' consta: di una translazione nella direzione $O\zeta$; di una translazione parallelamente ad $O\upsilon$; e di una rotazione per cui la sezione EF, primitivamente parallela ad E'F', si dispone in modo da fare con questa un angolo piccolissimo.

La translazione secondo la direzione $O\zeta$ è prodotta dalla forza Z, diretta secondo $C\zeta$ ed applicata nel centro di superficie C della sezione retta EF Segue da ciò che, essendo

$d\zeta$ la distanza $\overline{CC'}$ fra le due sezioni vicinissime EF ed E'F',

Ω la superficie della sezione retta EF, ed

E_l il valore del coefficiente di elasticità longitudinale ad essa relativo,

questa translazione, la quale non è altro che l'allungamento subìto dal prisma EFF'E' sotto l'azione della forza Z diretta secondo il suo asse, vien data da

$$\frac{Z}{E_l \Omega} d\zeta \qquad (1).$$

Analogamente, è prodotta dalla forza Y, parallela a $C\upsilon$ ed applicata al centro di superficie C della sezione EF, la translazione o scorrimento trasversale nel senso $O\upsilon$; di maniera che, dicendo

E_t il coefficiente di elasticità trasversale relativo all'or indicata sezione, si ha che questa translazione è espressa da

$$\frac{Y}{E_t \Omega} d\zeta \qquad (2).$$

La rotazione della sezione EF relativamente alla sezione vicinissima E'F' è prodotta dal momento M_x delle forze applicate al corpo a dritta della prima

Può darsi che le forze sollecitanti, le sezioni rette ed i coefficienti di elasticità variino in modo da essere una linea retta la proiezione della

delle or indicate sezioni, per rapporto all'asse proiettato nel punto C. Supponendo che, ammessa l'immobilità della sezione E'F', la sezione EF sotto l'azione dell'indicato momento passi in E''F'', la rotazione che vuolsi valutare è misurata dall'arco di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo piccolissimo $ECE'' = FCF''$. Se adunque si chiamano

θ l'or indicato arco,

ω un elemento superficiale preso sulla sezione retta EF in m,

v la distanza $\overline{Cm}$ di quest'elemento da C,

si ha: che la resistenza longitudinale sviluppata dall'elemento di fibra nm è data

$$\frac{E_1 \omega v \theta}{d\zeta} ;$$

che il momento di questa resistenza elementare per rapporto all'asse proiettato in C vale

$$\frac{E_1 \omega v^2 \theta}{d\zeta} ;$$

e che il momento di tutta la resistenza sviluppata dagli elementi di fibra compresi fra le sezioni vicinissime EF ed E'F' per causa del momento M_x, è data da

$$\frac{E_1 \theta}{d\zeta} \Sigma \omega v^2 .$$

Se ora osservasi che $\Sigma \omega v^2$ è il momento d'inerzia I_x della sezione retta EF per rapporto alla retta proiettata nel punto C, e che il momento di tutte le azioni molecolari sviluppate fra EF ed E'F' deve eguagliare il momento M_x, si ha l'equazione d'equilibrio

$$\frac{E_1 \theta I_x}{d\zeta} = M_x ,$$

dalla quale si ricava

$$\theta = \frac{M_x}{E_1 I_x} d\zeta \qquad (3).$$

Lo spostamento infinitesimo della sezione retta DEF, il quale risulta dalle translazioni (1) e (2) e dalla rotazione data dalla formola (3), fa variare la posizione di un punto qualsiasi C_i dell'asse; e, dicendo

curva, rappresentata dalle equazioni (1), (2) e (3) del numero precedente, sul piano $\xi O \upsilon$. In questo caso la flessione è piana, ma deviata, ossia ha

ζ l'ascissa $\overline{OC}$ del punto C,

ζ_i l'ascissa $\overline{OC_i}$ del punto C_i,

$d\upsilon_i$ e $d\zeta_i$ le variazioni infinitesime delle coordinate del punto C_i a motivo dell'or accennato spostamento infinitesimo,

si ha: che questo punto descrive parallelamente alla $O\upsilon$ la lunghezza infinitesima espressa dalla (2) ed un arco pure infinitesimo di centro C, di raggio $\overline{CC_i} = \zeta_i - \zeta$ e di ampiezza eguale a quella dell'angolo che la perpendicolare in C alla E″F″ fa coll'asse $O\zeta$; giacchè si suppone che la sezione EF, normale all'asse del solido prima della deformazione, si conservi tale anche dopo. L'arco di raggio eguale all'unità chiudente il detto angolo è adunque θ, cosicchè lo spostamento $d\upsilon_i$ è dato da

$$d\upsilon_i = \frac{Y}{E_1 \Omega} d\zeta + (\zeta_i - \zeta) \frac{M_x}{E_1 I_x} d\zeta.$$

Nella direzione dell'asse $O\zeta$ il punto C_i percorre la lunghezza espressa dalla (1), e, per essere l'indicato arco infinitesimo normale all'asse suddetto, la rotazione della sezione EF non influisce sulla variazione dell'ascissa del punto C_i; cosicchè si ha

$$d\zeta_i = \frac{Z}{E_1 \Omega} d\zeta.$$

Questi valori di $d\upsilon_i$ e $d\zeta_i$ rappresentano le variazioni di coordinate del punto C_i a motivo dello spostamento infinitesimo subìto dalla sezione retta qualunque EF relativamente alla sezione infinitamente vicina E′F′, di maniera che, integrandoli fra i limiti corrispondenti ai punti C_o e C_i, devono risultare le variazioni di coordinate del punto C_i per causa degli spostamenti che tutte le sezioni comprese fra gli indicati limiti prendono le une per rapporto alle altre. Se adunque si prende per sezione iniziale quella corrispondente al punto C_o, e se chiamansi

ζ_o l'ascissa $\overline{OC_o}$,

$\Delta'\upsilon_i$ e $\Delta'\zeta_i$ le variazioni di coordinate del punto C_i a motivo degli spostamenti di tutte le sezioni comprese fra C_o e C_i sotto l'azione delle forze estrinseche,

si ha

$$\Delta'\upsilon_i = \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{Y}{E_1 \Omega} d\zeta + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} (\zeta_i - \zeta) \frac{M_x}{E_1 I_x} d\zeta$$

$$\Delta'\zeta_i = \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{Z}{E_1 \Omega} d\zeta.$$

luogo in un piano differente dal piano di sollecitazione. Nei solidi omogenei avrà luogo questa flessione piana deviata quando saranno soddis-

Se poi la sezione iniziale corrispondente al punto C_0 non si può ritenere come fissa, ma se in essa si verificano, una translazione nel piano coordinato $\zeta O \upsilon$ ed una rotazione intorno alla retta proiettata nel punto C_0, dicendo

$\Delta\upsilon_0$ e $\Delta\zeta_0$ le due translazioni della sezione iniziale parallelamente ai due assi coordinati $O\upsilon$ ed $O\zeta$,

m_0 la rotazione della stessa sezione intorno alla retta proiettata in C_0, ossia l'arco di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo che il piano della sezione iniziale prima della deformazione fa col piano della sezione iniziale dopo la deformazione,

$\Delta''\upsilon_i$ e $\Delta''\zeta_i$ le variazioni di coordinate del punto C_i quando si tenga conto degli spostamenti di tutte le sezioni comprese fra C_0 e C_i sotto l'azione delle forze estrinseche e degli spostamenti della sezione iniziale,

risulta: che, a motivo della translazione $\Delta\upsilon_0$ e della rotazione m_0 il punto C_i descrive parallelamente ad $O\upsilon$ la lunghezza $\Delta\upsilon_0$ ed un piccolissimo arco di centro C_0, di raggio $\overline{C_0 C_i} = \zeta_i - \zeta_0$ e di lunghezza $m_0(\zeta_i - \zeta_0)$; che per la translazione $\Delta\zeta_0$ descrive questa stessa lunghezza nella direzione $O\zeta$; e finalmente che i valori di $\Delta''\upsilon_i$ e $\Delta''\zeta_i$ risultano

$$\Delta''\upsilon_i = \Delta\upsilon_0 + m_0(\zeta_i - \zeta_0) + \int_{\zeta_0}^{\zeta_i} \frac{Y}{E_t \Omega}\, d\zeta + \int_{\zeta_0}^{\zeta_i} (\zeta_i - \zeta)\, \frac{M_x}{E_l I_x}\, d\zeta,$$

$$\Delta''\zeta_i = \Delta\zeta_0 + \int_{\zeta_0}^{\zeta_i} \frac{Z}{E_l \Omega}\, d\zeta.$$

Volendosi ancora tener conto dell'influenza delle variazioni di temperatura sulle variazioni di lunghezza dell'asse del corpo, secondo che quelle corrispondono ad aumenti o a diminuzioni di temperatura, queste si risolvono in allungamenti od accorciamenti dell'asse. Se adunque si considera la parte di corpo a cui corrisponde la parte $C_0 C_i$ dell'asse, e se chiamansi

τ il prodotte del coefficiente di dilatazione lineare della materia di cui il corpo è formato pêr l'aumento o per la diminuzione di temperatura che devesi considerare,

$\Delta\upsilon_i$ e $\Delta\zeta_i$ le variazioni di coordinate del punto C_i col tener contemporaneamente conto degli spostamenti di tutte le sezioni comprese fra C_0 e C_i sotto l'azione delle forze estrinseche, degli spostamenti della sezione iniziale e degli spostamenti causati dalle variazioni di temperatura,

fatte le seguenti condizioni: di trovarsi le direzioni Cx e Cy (*Fig.* 5) degli assi principali centrali d'inerzia di tutte le sezioni rette in due piani fra loro perpendicolari, non coincidenti coi piani coordinati $\zeta O \xi$ e $\zeta O \upsilon$; di essere in uno stesso piano le perpendicolari agli assi neutri delle stesse sezioni, e quindi di essere eguali fra di loro gli angoli ψ di questi assi colle direzioni Cx. La tangente dell'angolo ψ ha per valore $\frac{I_x}{I_y}\frac{M_y}{M_x}$ (*Appendice all'Arte di fabbricare*, Vol. 1°, *La resistenza dei materiali esposta nei suoi più generali rapporti coi lavori della moderna ingegneria*, Num. 15), e quindi la seconda delle enunciate condizioni esige che per tutte le sezioni rette del solido sia costante il prodotto $\frac{I_x}{I_y}\frac{M_y}{M_x}$.

si ottengono le formole

$$\Delta \upsilon_i = \Delta \upsilon_o + m_o (\zeta_i - \zeta_o) + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{Y}{E_t \Omega} \, d\zeta + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} (\zeta_i - \zeta) \frac{M_x}{E_l I_x} \, d\zeta$$

$$\Delta \xi_i = \Delta \xi_o + \tau (\zeta_i - \zeta_o) + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{Z}{E_l \Omega} \, d\zeta,$$

le quali sono appunto le (1) e (2) già state dedotte come conseguenza della teoria conveniente al caso generale stato considerato nel secondo capitolo. Per valore di τ si assumerà quello dato dalla formola (16) del numero 5, quando il solido è formato di più pezzi, e quando sono ad esso applicabili le considerazioni state fatte per lo stabilimento dell'ultima citata formola.

È poi facile il dedurre la deviazione, per causa delle deformazioni, della sezione retta corrispondente al punto qualunque C_i dalla sua posizione primitiva. Questa deviazione, che chiameremo m_i, è misurata della rotazione m_o della sezione d'origine aumentata dalla somma delle piccolissime rotazioni delle successive sezioni vicinissime comprese fra C_o e C_i, e quindi è data dalla formola

$$m_i = m_o + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{M_x}{E_l I_x} \, d\zeta,$$

la quale coincide precisamente colla formola (5) che si deduce dalla teoria generale.

Siccome l'asse primitivo del solido si confonde coll'asse $O\zeta$, si ha

$$\Delta v_o = v_o, \qquad \Delta v_i = v_i,$$

e trascurando, come generalmente si fa nelle applicazioni, l'effetto dovuto allo sforzo di taglio Y, il quale trovasi in un termine della formola (1), questa formola diventa

$$v_i = v_o + m_o(\zeta_i - \zeta_o) + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} (\zeta_i - \zeta) \frac{M_x}{E_1 I_x} d\zeta \qquad (3).$$

Differenziando per rapporto alla variabile ζ_i due volte di seguito quest'equazione, si ha

$$\frac{dv_i}{d\zeta_i} = m_o + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{M_x}{E_1 I_x} d\zeta$$

$$\frac{d^2 v_i}{d\zeta_i^2} = \frac{M_x}{E_1 I_x} \qquad (4),$$

e quest'ultima equazione, ponendo z invece di ζ, u invece di v, ε invece del prodotto $E_1 I_x$, e μ invece del momento inflettente M_x, si riduce a

$$\varepsilon \frac{d^2 u}{dz^2} = \mu,$$

ossia all'equazione differenziale del secondo ordine della curva elastica, quale ordinariamente si dà nei trattati sulla resistenza dei materiali, come punto di partenza dei calcoli sulla flessione piana dei solidi elastici con asse rettilineo (*Arte di fabbricare, Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni*, Num. 106).

In quanto alle rotazioni m_i, n_i e p_i della sezione corrispondente al punto C_i, riesce facile dedurle dalle formole (4) del precedente numero, quando abbiasi riguardo agli stabiliti valori di $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, M_y, n_o e p_o, ed immediatamente si trova: che sono nulli i valori di n_i e di p_i; e che per determinare il valore di m_i, si ha la formola

$$m_i = m_o + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{M_x}{E_1 I_x} \, d\zeta \qquad (5).$$

Questa formola porta a conchiudere che la rotazione ha luogo intorno ad una perpendicolare al piano di sollecitazione, e che m_i rappresenta l'angolo che, dopo la deformazione, la sezione retta corrispondente al punto C_i fa colla sua posizione primitiva.

10. **Variazioni di coordinate della fibra media di un solido elastico avente per asse primitivo una curva piana, sollecitato da forze contenute nel piano della curva medesima, e deviazioni delle sue sezioni rette.** — In questo caso, tutte le forze, operanti sul solido fra la sezione retta qualunque DEF (*Fig.* 2) e la sezione estrema avente il suo centro in C_u, necessariamente dànno luogo ad una risultante unica, oppure ad una coppia, giacenti nel piano determinato dall'asse del corpo ; e, prendendo in questo stesso piano i due assi coordinati $O\zeta$ ed Ov, risulta

$$\xi_o = 0, \qquad \xi_i = 0, \qquad \xi = 0.$$

L'asse Cz (*Fig.* 8) di una sezione retta qualunque DEF trovasi nel piano di sollecitazione, cosicchè

$$M_z = 0 ;$$

e, per essere nulla la translazione prodotta dalle forze sollecitanti parallelamente all'asse $O\xi$, si ha

$$\int_{\xi_o}^{\xi_i} \left[\frac{1}{E_1 \Omega} (X \cos\alpha + Y \cos\alpha') \frac{d\sigma}{d\xi} + \frac{Z}{E_1 \Omega} \right] d\xi = 0.$$

Per le relazioni or ora stabilite, le formole (13), (14) e (15) del numero 5, le quali servono a trovare le variazioni di coordinate nel caso di un solido avente per asse una curva qualsiasi e sollecitato da forze comunque operanti, ci dànno per il caso di un solido elastico avente per asse primitivo una curva piana e sollecitato da forze contenute sul piano dell'asse medesimo

$$\Delta\xi_i = \left\{ \begin{array}{l} \Delta\xi_o + p_o(v_i - v_o) - n_o(\zeta_i - \zeta_o) \\ + \int_{\sigma_o}^{\sigma_i} \left[\frac{v_i - v}{E_l} \left(\frac{M_x \cos\gamma}{I_x} + \frac{M_y \cos\gamma'}{I_y} \right) \right] d\sigma \\ - \int_{\sigma_o}^{\sigma_i} \left[\frac{\zeta_i - \zeta}{E_l} \left(\frac{M_x \cos\beta}{I_x} + \frac{M_y \cos\beta'}{I_y} \right) \right] d\sigma \end{array} \right\} \quad (1),$$

$$\Delta v_i = \left\{ \begin{array}{l} \Delta v_o + m_o(\zeta_i - \zeta_o) + \tau(v_i - v_o) \\ + \int_{v_o}^{v_i} \left[\frac{1}{E_t \Omega} (X\cos\beta + Y\cos\beta') \frac{d\sigma}{dv} + \frac{Z}{E_l \Omega} \right] dv \\ + \int_{\sigma_o}^{\sigma_l} \left[\frac{\zeta_l - \zeta}{E_l} \left(\frac{M_x \cos\alpha}{I_x} + \frac{M_y \cos\alpha'}{I_y} \right) \right] d\sigma \end{array} \right\} \quad (2),$$

$$\Delta\zeta_i = \left\{ \begin{array}{l} \Delta\zeta_o - m_o(v_i - v_o) + \tau(\zeta_l - \zeta_o) \\ + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \left[\frac{1}{E_t \Omega} (X\cos\gamma + Y\cos\gamma') \frac{d\sigma}{d\zeta} + \frac{Z}{E_l \Omega} \right] d\zeta \\ - \int_{\sigma_o}^{\sigma_i} \left[\frac{v_i - v}{E_l} \left(\frac{M_x \cos\alpha}{I_x} + \frac{M_y \cos\alpha'}{I_y} \right) \right] d\sigma \end{array} \right\} \quad (3)$$

Il valore di $\Delta\xi_i$ dato dalla formola (1) non è generalmente nullo, e quindi possiamo stabilire che un solido elastico, avente per asse primitivo una curva piana e sollecitato da forze contenute nel piano della curva stessa, in generale si deforma in modo da disporsi il suo asse secondo una curva a doppia curvatura.

Venendo alle rotazioni m_i, n_i e p_i della sezione retta corrispondente al punto C_i intorno agli assi coordinati $O\xi$, Ov ed $O\zeta$, riesce facile

il dedurle dalle formole (1) del numero (6). Osservando perciò che $M_z = 0$, abbiamo le formole

$$\left.\begin{aligned} m_i &= m_o + \int_{\sigma_o}^{\sigma_i} \frac{1}{E_l}\left(\frac{M_x \cos\alpha}{I_x} + \frac{M_y \cos\alpha'}{I_y}\right) d\sigma \\ n_i &= n_o + \int_{\sigma_o}^{\sigma_i} \frac{1}{E_l}\left(\frac{M_x \cos\beta}{I_x} + \frac{M_y \cos\beta'}{I_y}\right) d\sigma \\ z_i &= p_o + \int_{\sigma_o}^{\sigma_i} \frac{1}{E_l}\left(\frac{M_x \cos\gamma}{I_x} + \frac{M_y \cos\gamma'}{I_y}\right) d\sigma \end{aligned}\right\} \quad (4),$$

le quali servono a dare un'idea della deviazione della sezione retta corrispondente al punto qualunque C_i per il fatto delle deformazioni avvenute nel corpo a cui questa sezione appartiene.

11. **Condizioni per la flessione piana di un solido elastico avente per asse primitivo una curva piana e sollecitato da forze contenute nel piano della curva medesima.** — Se per tutte le sezioni rette del corpo l'asse d'inerzia Cy (*Fig.* 8) si mantiene nel piano coordinato $\zeta O \upsilon$, ossia nel piano di sollecitazione, risulta che l'asse Cx è perpendicolare al piano $\zeta O \upsilon$, e che quindi è parallelo all'asse coordinato $O\xi$. In questo caso abbiamo adunque

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 90^\circ, \qquad \gamma = 90^\circ,$$

e quindi

$$\cos\alpha = 1, \qquad \cos\beta = 0, \qquad \cos\gamma = 0.$$

Trovandosi la retta Cy nel piano $\zeta O \upsilon$, ed essendo essa normale all'asse $C_o C C_u$ del solido, ci risulta

$$\alpha' = 90^\circ,$$

$$\cos\alpha' = 0, \qquad \cos\beta' = \frac{d\zeta}{d\sigma}, \qquad \cos\gamma' = -\frac{d\upsilon}{d\sigma}.$$

Per essere l'asse Cy nel piano di sollecitazione, troviamo

$$M_y = 0,$$

e, ponendo di più

$$\Delta\xi_o = 0, \qquad n_o = 0, \qquad p_o = 0,$$

le equazioni (1), (2) e (3) del precedente numero si riducono a

$$\Delta\xi_i = 0$$

$$\Delta v_i = \left\{ \begin{array}{l} \Delta v_o + m_o (\zeta_i - \zeta_o) + \tau (v_i - v_o) \\ + \displaystyle\int_{v_o}^{v_i} \left(\frac{Y}{E_t \Omega} \frac{d\zeta}{dv} + \frac{Z}{E_l \Omega} \right) dv \\ + \displaystyle\int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (\zeta_i - \zeta) \frac{M_x}{E_l I_x} \, d\sigma \end{array} \right\} \quad (1),$$

$$\Delta\zeta_i = \left\{ \begin{array}{l} \Delta\zeta_o - m_o (v_i - v_o) + \tau (\zeta_i - \zeta_o) \\ + \displaystyle\int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \left(- \frac{Y}{E_t \Omega} \frac{dv}{d\zeta} + \frac{Z}{E_l \Omega} \right) d\zeta \\ - \displaystyle\int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (v_i - v) \frac{M_x}{E_l I_x} \, d\sigma \end{array} \right\} \quad (2).$$

Il valore di $\Delta\xi_i$ è adunque nullo ; cosicchè siamo portati a conchiudere che l'asse deformato di un solido elastico avente per asse primitivo una curva piana e sollecitato da forze contenute nel piano della curva stessa si mantiene nel piano coordinato $\zeta O v$, ossia nel piano di sollecitazione, e che quindi la flessione è piana, allorquando sono soddisfatte le seguenti condizioni : di avvenire nel piano di sollecitazione gli spostamenti paralleli agli assi coordinati del centro di superficie C_o della sezione iniziale ; di poter girare questa sezione solamente intorno ad una perpendicolare al piano di sollecitazione ; di

essere un asse principale centrale d'inerzia l'intersezione di ciascuna sezione col piano stesso (*c*).

(*c*) Le centine, sollecitate da forze contenute in un sol piano passante pel loro asse ed intersecante ciascuna sezione secondo una retta di simmetria, e quindi secondo un asse principale centrale d'inerzia, sono gli unici corpi elastici con asse curvilineo, di cui il costruttore deve studiare le deformazioni nell'esercizio della sua carriera; e quindi la flessione piana dei solidi inizialmente curvi è forse la sola che può interessare nella pratica delle costruzioni. In vista di ciò, crediamo conveniente di aggiungere in questa nota la deduzione diretta delle formole (1) e (2), e così l'uomo della pratica potrà rendersi ragione della convenienza delle formole medesime senza passare per la teoria piuttosto complicata stata esposta nel precedente capitolo, e di cui tali formole sono una conseguenza.

Assunti gli assi coordinati $O\zeta$ ed $O\upsilon$ (*Fig.* 9) nel piano di sollecitazione, e quindi anche nel piano determinato dall'asse $C_0 C C_n$ del corpo, se considerasi una sezione retta qualunque EF, abbiamo che lo spostamento di questa sezione relativamente alla sezione vicinissima E'F' consta: di una translazione nella direzione Cz normale al piano della sezione EF e quindi tangente in C alla curva $C_0 C C_n$; di una translazione parallelamente a Cy; e di una rotazione, per cui la sezione EF si dispone in modo da fare colla E'F' un angolo differente dall'angolo primitivo FGF'.

La translazione nel senso Cz è prodotta dalla forza Z, eguale alla somma algebrica delle componenti secondo Cz di tutte le forze operanti sul corpo a dritta della sezione EF ed applicata nel centro di superficie C dell'or accennata sezione. Risulta quindi che, essendo

$d\sigma$ la parte CC' dell'asse fra le due sezioni EF ed E'F',

Ω la superficie della sezione retta EF, ed

E_1 il valore del coefficiente di elasticità longitudinale ad essa relativo,

questa translazione, la quale altro non è che l'allungamento subìto dal corpo EFF'E' sotto l'azione della forza Z, vien dato da

$$\frac{Z}{E_1 \Omega} d\sigma.$$

I coseni degli angoli che la retta Cz fa coi due assi coordinati $O\zeta$ ed $O\upsilon$, sono rispettivamente

$$\frac{d\zeta}{d\sigma}, \qquad \frac{d\upsilon}{d\sigma};$$

e quindi le due componenti dell'indicata translazione sono, secondo l'asse $O\zeta$

$$\frac{Z}{E_1 \Omega} d\zeta \qquad (1),$$

secondo l'asse $O\upsilon$

$$\frac{Z}{E_1 \Omega} d\upsilon \qquad (2).$$

Nel caso delle centine simmetriche e simmetricamente caricate rispetto alla verticale passante pel punto culminante O (*Fig.* 10) del

La translazione nel senso Cy è prodotta dalla forza Y, eguale alla somma algebrica delle componenti secondo Cy di tutte le forze operanti sul corpo a dritta della sezione EF ed applicata nel centro di superficie C. Essendo E_t il coefficiente di elasticità trasversale relativo all'or indicata sezione, si ha che questa translazione o scorrimento della sezione EF relativamente alla sezione E'F' vale

$$\frac{Y}{E_t \Omega} d\sigma,$$

e che è diretta secondo la normale Cy alla curva $C_0 C C_u$. I coseni degli angoli che la retta Cy fa coi due assi coordinati $O\zeta$ ed $O\upsilon$ sono rispettivamente

$$-\frac{d\upsilon}{d\sigma}, \qquad \frac{d\zeta}{d\sigma},$$

e quindi le due componenti dell'or indicata translazione o scorrimento risultano, secondo l'asse $O\zeta$

$$-\frac{Y}{E_t \Omega} d\upsilon \qquad (3),$$

secondo l'asse $O\upsilon$

$$\frac{Y}{E_t \Omega} d\zeta \qquad (4).$$

La rotazione della sezione EF relativamente alla sezione vicinissima E'F' è prodotta dal momento M_x delle forze applicate al corpo a dritta della prima delle or indicate sezioni per rapporto all'asse proiettato nel punto C; e quindi, ragionando precisamente come si è fatto nella nota (*b*) del numero 9, ed osservando che la parte di asse del corpo intercetto fra le due sezioni vicinissime EF ed E'F' non è $d\zeta$, ma $d\sigma$, si ottiene che questa rotazione è misurata dall'arco di raggio eguale all'unità

$$\frac{M_x}{E_l I_x} d\sigma \qquad (5).$$

Lo spostamento infinitesimo della sezione retta EF, il quale risulta dalle translazioni date dalle espressioni (1), (2), (3) e (4), e dalla rotazione data dall'espressione (5), fa variare la posizione di un punto qualsiasi C_i dell'asse, ed abbiamo: che il punto C_i si trasporta, parallelamente ad $O\zeta$, della quantità espressa dalla somma delle due espressioni (1) e (3), parallelamente ad $O\upsilon$ della quantità espressa dalla somma delle espressioni (2) e (4); e finalmente che lo stesso punto descrive un arco infinitesimo $C_i c_i$ di centro C e

loro asse, assumendo per sezione iniziale quella corrispondente al punto or ora indicato, per origine delle coordinate il punto stesso,

di raggio $\overline{CC_i}$. Conducendo per C_i e c_i le perpendicolari C_iP_i e c_ip_i alla $O\zeta$ e le perpendicolari C_iQ_i e c_iq_i alla $O\upsilon$, risultano in $\overline{P_ip_i} = \overline{C_ic}$ e $\overline{Q_iq_i} = \overline{c_ic}$, le proiezioni dell'arco C_ic_i sugli assi coordinati, e quindi gli spostamenti, paralleli a questi assi, che avvengono nel punto C_i pel fatto della rotazione della sezione EF, non sono altro che i due cateti del triangolo infinitesimo C_icc_i. Ora, se immaginiamo per C la retta CR parallela ad $O\zeta$, risulta il triangolo C_iRC simile al triangolo C_icc_i, cosicchè si ha

$$\overline{c_ic} = \frac{C_ic_i \times \overline{CR}}{\overline{CC_i}},$$

$$\overline{C_ic} = \frac{C_ic_i \times \overline{C_iR}}{\overline{CC_i}}.$$

Chiamando poi

ζ ed υ le due coordinate del punto C,

ζ_i ed υ_i quelle del punto C_i,

ed osservando che

$$\overline{C_ic_i} = \overline{CC_i} \times \frac{M_x}{E_iI_x}\,d\sigma,$$

$$\overline{CR} = \zeta_i - \zeta,$$

$$\overline{C_iR} = \upsilon_i - \upsilon,$$

otteniamo

$$\overline{c_ic} = (\zeta_i - \zeta)\,\frac{M_x}{E_iI_x}\,d\sigma, \qquad (6),$$

$$\overline{C_ic} = (\upsilon_i - \upsilon)\,\frac{M_x}{E_iI_x}\,d\sigma, \qquad (7).$$

Si deve considerare come positivo lo spostamento $\overline{c_ic}$, giacchè produce aumento dell'ordinata υ_i del punto C_i; e si deve considerare come negativo lo spostamento $\overline{C_ic}$, giacchè produce diminuzione nell'ascissa ζ_i dello stesso punto.

Indicando ora con

$d\upsilon_i$ e $d\zeta_i$ le variazioni infinitesime delle coordinate del punto C_i a motivo dello spostamento infinitesimo della sezione retta EF,

e per asse delle ordinate la verticale $O\upsilon$, tenendo conto soltanto degli effetti prodotti dal momento inflettente M_x, trascurando quelli dovuti

abbiamo

$$d\upsilon_i = \frac{Y}{E_t \Omega} d\zeta + \frac{Z}{E_l \Omega} d\upsilon + (\zeta_i - \zeta) \frac{M_x}{E_l I_x} d\sigma,$$

$$d\zeta_i = -\frac{Y}{E_t \Omega} d\upsilon + \frac{Z}{E_l \Omega} d\zeta - (\upsilon_i - \upsilon) \frac{M_x}{E_l I_x} d\sigma.$$

Integrando questi valori di $d\upsilon_i$ e $d\zeta_i$ fra i limiti corrispondenti ai punti C_0 e C_i, risultano le variazioni di coordinate del punto C_i per causa degli spostamenti che tutte le sezioni comprese fra gli indicati limiti prendono le une per rapporto alle altre; cosicchè chiamando

ζ_0 ed υ_0 le coordinate del centro C_0 della sezione iniziale,

σ_0 e σ_i le lunghezze degli archi corrispondenti ai punti C_0 e C_i,

$\Delta'\upsilon_i$ e $\Delta'\zeta_i$ le variazioni di coordinate del punto C_i a motivo degli spostamenti di tutte le sezioni comprese fra C_0 e C_i sotto l'azione delle forze estrinseche, si ha

$$\Delta'\upsilon_i = \int_{\upsilon_0}^{\upsilon_i} \left(\frac{Y}{E_t \Omega} \frac{d\zeta}{d\upsilon} + \frac{Z}{E_l \Omega} \right) d\upsilon + \int_{\sigma_0}^{\sigma_i} (\zeta_i - \zeta) \frac{M_x}{E_l I_x} d\sigma \quad (8),$$

$$\Delta'\zeta_i = \int_{\zeta_0}^{\zeta_i} \left(-\frac{Y}{E_t \Omega} \frac{d\upsilon}{d\zeta} + \frac{Z}{E_l \Omega} \right) d\zeta - \int_{\sigma_0}^{\sigma_i} (\upsilon_i - \upsilon) \frac{M_x}{E_l I_x} d\sigma \quad (9).$$

Posto che la sezione iniziale corrispondente al punto C_0 non si possa ritenere come fissa, ma che invece si verifichino in essa una translazione nel piano coordinato $\zeta O \upsilon$ ed una rotazione attorno alla retta proiettata nel punto C_0, essendo

$\Delta\upsilon_0$ e $\Delta\zeta_0$ le due translazioni della detta sezione iniziale parallelamente ai due assi coordinati $O\upsilon$ ed $O\zeta$,

m_0 la rotazione della stessa sezione intorno alla retta proiettata in C_0, ossia l'arco di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo che il piano della sezione iniziale prima della deformazione fa col piano in cui si trova la stessa sezione dopo la deformazione,

$\Delta''\upsilon_i$ e $\Delta''\zeta_i$ le variazioni di coordinate del punto C_i quando si tenga contemporaneamente conto degli spostamenti di tutte le sezioni comprese fra C_0 e C_i sotto l'azione delle forze estrinseche e degli spostamenti della sezione iniziale,

abbiamo: che è

$$\Delta\upsilon_0 + m_0(\zeta_i - \zeta_0)$$

la proiezione sull'asse $O\upsilon$ della linea percorsa dal punto C_i a motivo della translazione $\Delta\upsilon_0$ e della rotazione m_0; che vale

alle variazioni di temperatura, allo sforzo di taglio Y ed alla forza tangenziale Z, e supponendo fissa la sezione iniziale, le formole (1) e

$$\Delta\zeta_0 - m_0(\upsilon_i - \upsilon_0)$$

la proiezione della stessa linea sull'asse $O\zeta$ a motivo della translazione $\Delta\zeta_0$ e della stessa rotazione m_0; e che i valori di $\Delta''\upsilon_i$ e di $\Delta''\zeta_i$ sono dati da

$$\Delta''\upsilon_i = \Delta\upsilon_0 + m_0(\zeta_i - \zeta_0) + \Delta'\upsilon_i \qquad (10),$$

$$\Delta''\zeta_i = \Delta\zeta_0 - m_0(\upsilon_i - \upsilon_0) + \Delta'\zeta_i \qquad (11).$$

Volendosi ancora tener conto dell'influenza delle variazioni di temperatura sulle variazioni delle coordinate dell'asse del corpo, si chiamino:

τ il prodotto del coefficiente di dilatazione lineare della materia di cui il corpo è formato per l'aumento o per la diminuzione di temperatura che devesi considerare;

$\Delta\upsilon_i$ e $\Delta\zeta_i$ le variazioni di coordinate del punto C_i quando contemporaneamente si tenga conto degli spostamenti di tutte le sezioni comprese fra C_0 e C_i sotto l'azione delle forze estrinseche, degli spostamenti della sezione iniziale e degli spostamenti causati dalle variazioni di temperatura.

Nell'arco CC' di lunghezza $d\sigma$ avrà luogo la variazione

$$\tau\, d\sigma;$$

le proiezioni di questa variazione sui due assi $O\upsilon$ ed $O\zeta$ risultano rispettivamente

$$\tau\, d\sigma \frac{d\upsilon}{d\sigma} = \tau\, d\upsilon,$$

$$\tau\, d\sigma \frac{d\zeta}{d\sigma} = \tau\, d\zeta;$$

e, ammettendo che sia costante il valore del coefficiente τ, le variazioni di coordinate, dovute ai cangiamenti di temperatura per la parte di solido compreso fra le due sezioni rette corrispondenti ai punti C_0 e C_i, risultano

$$\int_{\upsilon_0}^{\upsilon_i} \tau\, d\upsilon = \tau(\upsilon_i - \upsilon_0),$$

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_i} \tau\, d\zeta = \tau(\zeta_i - \zeta_0).$$

Il valore di τ si assumerà positivo o negativo, secondo che trattasi di un au-

(2) notevolmente si semplificano e si riducono a

$$\Delta v_i = \int_0^{\sigma_i} (\zeta_i - \zeta) \frac{M_x}{E_l I_x} d\sigma \qquad (3),$$

$$\Delta \zeta_i = - \int_0^{\sigma_i} (v_i - v) \frac{M_x}{E_l I_x} d\sigma \qquad (4).$$

Queste formole, convenientemente applicate al caso di una centina

mento o di una diminuzione di temperatura; ed i valori di Δv_i e $\Delta \zeta_i$ saranno dati da

$$\Delta v_i = \Delta'' v_i + \tau (v_i - v_o),$$

$$\Delta \zeta_i = \Delta'' \zeta_i + \tau (\zeta_i - \zeta_o).$$

Sostituendo poi in queste formole i valori di $\Delta'' v_i$ e $\Delta'' \zeta_i$ dati dalle equazioni (10) ed (11), ed avendo riguardo alle relazioni (8) e (9), si trovano le formole

$$\Delta v_i = \left\{ \begin{array}{l} \Delta v_o + m_o (\zeta_i - \zeta_o) + \tau (v_i - v_o) \\ + \displaystyle\int_{v_o}^{v_i} \left(\frac{Y}{E_t \Omega} \frac{d\zeta}{dv} + \frac{Z}{E_l \Omega} \right) dv \\ + \displaystyle\int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (\zeta_i - \zeta) \frac{M_x}{E_l I_x} d\sigma \end{array} \right\} \qquad (12),$$

$$\Delta \zeta_i = \left\{ \begin{array}{l} \Delta \zeta_o - m_o (v_i - v_o) + \tau (\zeta_i - \zeta_o) \\ + \displaystyle\int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \left(- \frac{Y}{E_t \Omega} \frac{dv}{d\zeta} + \frac{Z}{E_l \Omega} \right) d\zeta \\ - \displaystyle\int_{\sigma_o}^{\sigma_i} (v_i - v) \frac{M_x}{E_l I_x} d\sigma \end{array} \right\} \qquad (13),$$

le quali sono appunto le formole (1) e (2) già state dedotte in questo numero, quali conseguenze della teoria generale stata esposta nel secondo capitolo. Per valore di τ si assumerà quello dato dalla formola (16) del numero 5 quando il

di materia omogenea e con sezione retta costante, dànno lo stesso risultato a cui conducono le formole (4) state stabilite nel numero

solido sia formato di più pezzi e quando siano ad esso applicabili le considerazioni state fatte per la deduzione dell'ultima citata formola.

Volendosi la deviazione, per causa della deformazione, della sezione retta corrispondente al punto qualunque C_i dalla sua posizione primitiva od anche la misura m_i della variazione dell'angolo da essa fatto con un piano invariabile normale all'asse del solido, basta osservare che una tale deviazione è data dalla rotazione m_o della sezione iniziale aumentata dalla somma delle piccolissime rotazioni delle successive sezioni vicininissime comprese fra C_o e C^i, cosicchè abbiamo la formola

$$m_i = m_o + \int_{\sigma_o}^{\sigma_i} \frac{M_x}{E_i I_x} \, d\sigma \qquad (14),$$

la quale coincide appunto colla formola (5) dedotta dalla teoria generale.

Le formole (1), (2) e (5) del numero 9, convenienti nel caso della flessione piana di un solido elastico con asse primitivamente rettilineo e sollecitato da forze contenute in un sol piano passante per l'asse medesimo, assai facilmente si possono dedurre dalle formole (12), (13) e (14) or ora trovate. Infatti, assumendo per asse delle ascisse ζ l'asse stesso del corpo, si ha

$$v_o = 0, \qquad v = 0, \qquad v_i = 0,$$

$$\sigma_o = \zeta_o, \qquad \sigma = \zeta, \qquad \sigma_i = \zeta_i;$$

e le suddette formole si riducono a

$$\Delta v_i = \Delta v_o + m_o(\zeta_i - \zeta_o) + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{Y}{E_i \Omega} \, d\zeta + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} (\zeta_i - \zeta) \frac{M_x}{E_i I_x} \, d\zeta,$$

$$\Delta \zeta_i = \Delta \zeta_o + \tau(\zeta_i - \zeta_o) + \int_{\zeta_o}^{\zeta} \frac{Z}{E_i \Omega} \, d\zeta,$$

$$m_i = m_o + \int_{\zeta_o}^{\zeta_i} \frac{M_x}{E_i I_x} \, d\zeta,$$

ossia alle formole le quali dànno le variazioni di coordinate dell'asse e le deviazioni delle sezioni di un solido elastico con asse primitivamente rettilineo, sollecitato da forze contenute in uno stesso piano passante per l'asse medesimo e con tutte le sezioni rette tagliate dal piano di sollecitazione secondo un asse principale centrale d'inerzia.

167 delle prime tre edizioni di quel volume della nostra *Arte di fabbricare*, nel quale abbiamo trattato della *Resistenza dei materiali e della stabilità delle costruzioni*, col vantaggio notevole di richiedere una sola invece di due integrazioni successive.

Le rotazioni m_i, n_i e p_i della sezione retta corrispondente al punto qualunque C_i, si deducono dalle formole (4) del numero precedente, tenendo conto dei valori di $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, M_y, n_o e p_o stati riportati fin dal principio di questo numero. Troviamo che sono nulli i valori delle rotazioni n_i e p_i, e che serve la formola

$$m_i = m_o + \int_{\sigma_o}^{\sigma_i} \frac{M_x}{E_l I_x} \, d\sigma \qquad (5)$$

alla determinazione della rotazione m_i. Quest'ultima rotazione poi ha luogo intorno ad una perpendicolare al piano di sollecitazione, ed m_i misura la variazione dell'angolo della sezione retta corrispondente al punto C_i, con un piano di posizione invariabile e normale all'asse primitivo del corpo.

12. **Determinazione delle costanti, le quali rappresentano il movimento della sezione iniziale.** — Come già abbiamo promesso nel numero 7, faremo questa determinazione in alcuni casi particolari, e ci limiteremo a quelli che più di frequente si presentano nelle applicazioni. Si supporrà che la deformazione sia piana, ed allora, per le condizioni state dichiarate nei numeri 9 ed 11, ci basterà trovare i valori di Δv_o, $\Delta \zeta_o$ ed m_o.

Il caso più semplice è quello in cui il solido ha, in corrispondenza della sezione d'origine, un appoggio fisso ed un incastramento, i quali rendono invariabile la posizione della detta sezione. In questo caso evidentemente avremo

$$\Delta v_o = 0, \qquad \Delta \zeta_o = 0,$$

$$m_o = 0.$$

Che se l'appoggio fisso e l'incastramento esistessero in una sezione differente da quella d'origine, chiamando

x' ed y' le due coordinate del centro di superficie C' (*Fig.* 8) di questa sezione,

determineremo le tre costanti Δv_o, $\Delta \zeta_o$ ed m_o esprimendo che sono nulle le variazioni $\Delta x'$ e $\Delta y'$ delle coordinate del punto C' e che la se-

zione corrispondente a questo punto si mantiene nella sua primitiva posizione, ossia che in essa non ha luogo rotazione e che quindi è nulla la rotazione m'. Ricorrendo perciò alle formole (1), (2) e (5) del precedente numero, ed osservando che v_1, ζ_1 e σ_1 si devono cangiare in v', ζ' e σ', avremo

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta v_0 + m_0(\zeta' - \zeta_0) + \tau(v' - v_0) \\ + \displaystyle\int_{v_0}^{v'} \left(\frac{Y}{E_1\Omega}\frac{d\zeta}{dv} + \frac{Z}{E_1\Omega}\right) dv \\ + \displaystyle\int_{\sigma_0}^{\sigma'} (\zeta' - \zeta)\,\frac{M_x}{E_1 I_x}\, d\sigma \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\zeta_0 - m_0(v' - v_0) + \tau(\zeta' - \zeta_0) \\ + \displaystyle\int_{\zeta_0}^{\zeta'} \left(-\frac{Y}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\zeta} + \frac{Z}{E_1\Omega}\right) d\zeta \\ - \displaystyle\int_{\sigma_0}^{\sigma'} (v' - v)\,\frac{M_x}{E_1 I_x}\, d\sigma \end{array}\right\} = 0,$$

$$m_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma'} \frac{M_x}{E_1 I_x}\, d\sigma = 0.$$

Dall'ultima di queste equazioni immediatamente abbiamo

$$m_0 = -\int_{\sigma_0}^{\sigma'} \frac{M_x}{E_1 I_x}\, d\sigma,$$

e, sostituendo questo valore di m_0 nella prima e nella seconda delle stesse equazioni, troviamo

$$\Delta v_o = \left\{ \begin{array}{l} -\tau\,(v' - v_o) - \displaystyle\int_{v_o}^{v'} \left(\frac{Y}{E_t \Omega} \frac{d\xi}{dv} + \frac{Z}{E_l \Omega} \right) dv \\ \\ - \displaystyle\int_{\sigma_o}^{\sigma'} (\xi_o - \xi) \frac{M_x}{E_l I_x}\, d\sigma \end{array} \right\}$$

$$\Delta \xi_o = \left\{ \begin{array}{l} -\tau\,(\xi' - \xi_o) - \displaystyle\int_{\xi_o}^{\xi'} \left(-\frac{Y}{E_t \Omega} \frac{dv}{d\xi} + \frac{Z}{E_l \Omega} \right) d\xi \\ \\ + \displaystyle\int_{\sigma_o}^{\sigma'} (v_o - v) \frac{M_x}{E_l I_x}\, d\sigma \end{array} \right\}$$

per formole determinatrici degli spostamenti Δv_o e $\Delta \xi_o$.

Nel caso frequentissimo della pratica, in cui le due estremità del corpo riposano su due appoggi fissi, si prenda la linea che unisce i centri di superficie C_o e C_u (*Fig.* 11) delle due sezioni estreme per asse delle ascisse ξ ed il centro C_o per origine delle coordinate. Essendo $2a$ la lunghezza $\overline{C_o C_u}$ della linea che unisce i centri C_o e C_u delle due sezioni estreme,
abbiamo: pel punto C_o

$$v_o = 0, \qquad \xi_o = 0,$$

$$\Delta v_o = 0, \qquad \Delta \xi_o = 0;$$

pel punto C_u

$$v_u = 0, \qquad \xi_u = 2a,$$

$$\Delta v_u = 0.$$

Applicando al punto C_u l'equazione (1) del numero 11, avremo l'equazione

$$2a m_o + \int_0^{2a} \left(\frac{Y}{E_t \Omega} + \frac{Z}{E_l \Omega} \frac{dv}{d\xi} \right) d\zeta + \int_0^{2a} (2a - \zeta) \frac{M_x}{E_l I_x} \frac{d\sigma}{d\xi}\, d\xi = 0,$$

dalla quale immediatamente si deduce

$$m_0 = -\frac{1}{2a}\left[\int_0^{2a}\left(\frac{Y}{E_1\Omega} + \frac{Z}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\zeta}\right)d\zeta + \int_0^{2a}(2a-\zeta)\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta\right].$$

Quest'equazione determina la costante m_0; in quanto alle altre due Δv_0 e $\Delta\zeta_0$ già si è detto che è nullo il valore di ciascuna di esse.

Finalmente considereremo il caso in cui l'asse del corpo avrà un punto fisso, ed un elemento la cui posizione cangierà per causa della deformazione, ma la cui direzione sarà preventivamente determinata. Questo caso si presenta in una centina simmetrica per rapporto ad una retta e simmetricamente sollecitata da ciascuna banda della retta stessa; giacchè dovendo la centina conservarsi simmetrica anche dopo la deformazione, l'elemento dell'asse, il quale trovasi sulla retta di simmetria, non potrà punto cangiare di direzione. Assumendo per asse delle ascisse una retta 0ζ (*Fig.* 12) passante pel punto fisso C_u e per asse delle v la perpendicolare $0v$ condotta pel punto C_0, nel quale si conosce la direzione dell'asse del corpo, e prendendo per sezione d'origine quella corrispondente al punto C_0, porremo le condizioni che devono essere nulli gli spostamenti Δv_u e $\Delta\zeta_u$ del punto C_u. Chiamando perciò

a l'ascissa $\overline{0C_u}$ del punto C_u,

ed applicando le equazioni (1) e (2) del numero 11 coll'osservare che $m_0 = 0$, avremo le equazioni

$$\left.\begin{aligned}&\Delta v_0 - \tau v_0 + \int_0^a\left(\frac{Y}{E_1\Omega} + \frac{Z}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\zeta}\right)d\zeta\\ &+\int_0^a(a-\zeta)\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\zeta_0 + \tau a + \int_0^a\left(-\frac{Y}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\zeta} + \frac{Z}{E_1\Omega}\right)d\zeta\\ &+\int_0^a v\,\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta\end{aligned}\right\} = 0,$$

dalle quali immediatamente otteniamo

$$\Delta v_0 = \tau v_0 - \int_0^a \left(\frac{Y}{E_1 \Omega} + \frac{Z}{E_1 \Omega} \frac{dv}{d\zeta} \right) d\zeta - \int_0^a (a - \zeta) \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} \, d\zeta,$$

$$\Delta \zeta_0 = -\tau a - \int_0^a \left(-\frac{Y}{E_1 \Omega} \frac{dv}{d\zeta} + \frac{Z}{E_1 \Omega} \right) d\zeta - \int_0^a v \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} \, d\zeta,$$

per formole determinatrici delle due costanti Δv_0 e $\Delta \zeta_0$.

Nel caso di una centina simmetrica e simmetricamente caricata, si può assumere l'asse delle ascisse ζ nella direzione della corda $A C_a$ (*Fig.* 13) e l'asse delle ordinate v nella direzione della retta di simmetria $0 C_0$. Siccome la centina deformata deve ancora essere simmetrica rispetto alla $0 C_0$, il punto C_0 conservasi sulla $0v$ e quindi, oltre di essere $m_0 = 0$, si ha ancora $\Delta \zeta_0 = 0$; ed il valore di Δv_0 fa conoscere l'abbassamento del punto C_0, ossia la variazione di saetta dell'asse della centina.

CAPITOLO IV.

Determinazione delle forze incognite.

13. **Assunto di questo capitolo.** — Ben di frequente avviene che alcune fra le forze, sollecitanti un corpo, per cui voglionsi studiare le deformazioni e la stabilità, non sono elementi cogniti, e quindi importa vedere quali procedimenti vengono in acconcio per la loro determinazione.

Queste forze incognite sono generalmente le reazioni di ostacoli, i quali impediscono che il corpo si deformi liberamente, costringendo il suo asse a conservare l'immobilità o a prendere dati ammissibili spostamenti in alcuni suoi punti, oppure rendendo nulla o di prestabilito possibile valore la rotazione di alcune sue sezioni trasversali. Segue da ciò che le condizioni esprimenti, che devono essere eguali a zero, o ad un determinato valore, le espressioni degli spostamenti di certi punti o le rotazioni di determinati sezioni, condurranno generalmente alla determinazione delle forze incognite.

Conviene però osservare che è possibile un gran numero di combinazioni diverse, tanto nella disposizione degli ostacoli che si oppongono alle deformazioni del corpo, quanto nella natura degli ostacoli stessi ed al loro modo di agire; cosicchè il problema, del quale intendiamo occuparci in questo capitolo, può dar luogo ad una grande varietà di quistioni particolari, e quindi riesce quasi impossibile di dare una teoria in termini affatto generali. Con un sufficiente numero di problemi relativi a casi particolari e minutamente esposti, faremo vedere come si deve risolvere l'importante problema della determinazione delle forze incognite, e porremo il nostro lettore in grado di poter trattare tutti i casi che si possono presentare nell'esercizio pratico della carriera dell'ingegnere costruttore e dell'ingegnere meccanico. Limiteremo le nostre ricerche ai soli casi delle deformazioni piane, e quindi le sole formole dei numeri 9 e 11 saranno quelle che verranno in acconcio per la risoluzione delle quistioni che stiamo per svolgere in questo capitolo.

14. **Determinazione delle reazioni degli appoggi per un solido sostenuto alle due estremità da due appoggi fissi, i quali impediscono qualsiasi spostamento ai due punti estremi dell'asse.** — Sia A C B (*Fig.* 14) la linea piana costituente l'asse primitivo del corpo, trovisi esso sollecitato da forze contenute del piano dell'asse, ed abbia tali sezioni rette da essere tutte tagliate secondo un asse principale centrale d'inerzia dal piano or ora indicato. Immaginando tolti i due appoggi in A e B, se vogliamo poter considerare il corpo come posto nelle stesse condizioni in cui effettivamente trovasi per l'esistenza degli appoggi stessi, è necessario sostituire due reazioni R ed R', le quali sono appunto le due forze incognite che in questo caso dobbiamo determinare. Queste reazioni si trovano innanzi tutto nel piano della linea A C B e delle forze applicate al corpo, giacchè non potrebbe altrimente verificarsi il suo equilibrio; ma è indeterminato il loro punto d'applicazione contro i piani delle sezioni trasversali determinate dai punti A e B. Per togliere in qualche modo questa indeterminazione, e quindi procedere nella risoluzione dell'assuntoci problema, osserviamo che generalmente gli appoggi consistono in robusti muri, sui quali si dispone un cuscinetto di ghisa; e che il corpo appoggia su questi cuscinetti coll'intermezzo di una lastra di piombo o coll'intermezzo di cunei, aventi per iscopo di dare una ripartizione quasi uniforme della pressione; e quindi si può ammettere, senza troppo allontanarsi dalla realtà, che le reazioni sono applicate nei centri di superficie delle sezioni estreme.

Assunto il punto A per origine delle coordinate, la retta $A\xi$ che unisce i due punti estremi A e B dell'asse del corpo per asse delle ascisse e la perpendicolare $A\upsilon$ per asse delle ordinate, si chiamino:

$2a$ la distanza $\overline{AB}$ dei due punti A e B;

F una qualunque delle forze applicate al corpo incontrante l'asse in M,

δ l'angolo $FM\xi'$ che questa forza fa colla parte positiva dell'asse delle ascisse, e

λ l'angolo $FM\upsilon'$ che la stessa forza fa colla parte positiva dell'asse delle ordinate, ed

f il braccio di leva della forza F relativamente al punto A;

Q e V le due componenti della reazione R, la prima secondo BA e l'altra perpendicolarmente a BA,

Q' e V' le due componenti della reazione R', la prima secondo AB e l'altra perpendicolarmente ad AB;

Σ una somma estesa a tutte le forze F.

Le condizioni generali d'equilibrio del sistema, costituito dal corpo avente per asse la curva ACB, danno le tre equazioni

$$Q' + \Sigma F \cos\delta - Q = 0 \qquad (1),$$

$$V + V' + \Sigma F \cos\lambda = 0 \qquad (2),$$

$$2aV - \Sigma F d = 0 \qquad (3),$$

le prime due esprimenti che è nulla la somma algebrica delle componenti di tutte le forze che lo sollecitano, rispettivamente parallele agli assi $A\xi$ ed $A\upsilon$, la terza che è zero la somma algebrica dei momenti delle stesse forze rispetto al punto A. L'equazione (3) dà

$$V = \frac{\Sigma F d}{2a},$$

e, trovato il valore di V, dall'equazione (2) si può dedurre il valore di V', il quale è dato da

$$V' = -V - \Sigma F \cos\lambda.$$

L'equazione (1) costituisce una relazione fra le due incognite Q e Q'; ed abbiamo quindi bisogno di una seconda relazione, la quale ci

viene somministrata ponendo che, non ostante l'azione di tutte le forze, resta invariabile la distanza fra i due punti A e B delle due estremità dell'asse o fibra media del corpo. Assumendo per sezione d'origine quella corrispondente al punto A, abbiamo

$$\zeta_0 = 0, \qquad \upsilon_0 = 0,$$

e la sua immobilità porta a stabilire

$$\Delta\zeta_0 = 0.$$

Per il punto B poi, il quale deve pure rimanere immobile, si ha

$$\zeta_1 = 2a, \qquad \upsilon_1 = 0,$$

$$\Delta\zeta_1 = 0;$$

cosicchè, applicando a questo punto l'equazione (2) del numero 11, immediatamente si ottiene

$$2a\tau + \int_0^{2a} \left(-\frac{Y}{E_1\Omega}\frac{d\upsilon}{d\zeta} + \frac{Z}{E_1\Omega} + \frac{M_x\upsilon}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta} \right) d\zeta = 0 \quad (4).$$

Quest'ultima equazione contiene la sola incognita Q, che si tratta di mettere in evidenza. Perciò, avendo riguardo alle convenzioni già state stabilite nel numero 4 sui segni algebrici di Y, Z ed M_x, porremo le formole

$$\left.\begin{aligned} Y &= Y' + Q\frac{d\upsilon}{d\sigma} \\ Z &= Z' - Q\frac{d\zeta}{d\sigma} \\ M_x &= M_x' - Q\upsilon \end{aligned}\right\} \quad (5),$$

nelle quali υ rappresenta l'ordinata PN di un punto qualunque N dell'asse del corpo considerato; Y' la somma delle proiezioni di tutte le forze le quali operano da questo punto fino al punto B, esclusa la forza Q, sulla direzione Ny della normale in N alla linea A CNB; Z' la somma delle proiezioni delle stesse forze sulla tangente Nz nello

stesso punto; e finalmente M_x' la somma dei momenti, per rapporto al punto qualunque N dell'asse del corpo, di tutte le forze operanti da questo punto fino all'estremo B, escluso quello della forza Q.

Avendosi l'equazione della curva A C B rispetto ai due assi coordinati Aζ ed Aυ, ed essendo noto il valore di V, le forze Y', Z' ed il momento M_x', si possono considerare come funzioni della sola ζ, e, sostituendo i loro valori nella (4), si ha l'equazione

$$\left\{\begin{aligned} &2a\tau - \int_0^{2a} \frac{Y'}{E_1\Omega}\,\frac{d\upsilon}{d\zeta}\,d\zeta - Q\int_0^{2a}\frac{1}{E_1\Omega}\,\frac{d\upsilon}{d\sigma}\,\frac{d\upsilon}{d\zeta}\,d\zeta \\ &+\int_0^{2a}\frac{Z'}{E_1\Omega}\,d\zeta - Q\int_0^{2a}\frac{1}{E_1\Omega}\,\frac{d\zeta}{d\sigma}\,d\zeta \\ &+\int_0^{2a}\frac{M_x'\upsilon}{E_1 I_x}\,\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta - Q\int_0^{2a}\frac{\upsilon^2}{E_1 I_x}\,\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta \end{aligned}\right\} = 0,$$

dalla quale si ricava la seguente formola determinatrice di Q

$$Q = \frac{2a\tau - \int_0^{2a}\frac{Y'}{E_1\Omega}\,\frac{d\upsilon}{d\zeta}\,d\zeta + \int_0^{2a}\frac{Z'}{E_1\Omega}\,d\zeta + \int_0^{2a}\frac{M_x'\upsilon}{E_1 I_x}\,\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta}{\int_0^{2a}\frac{1}{E_1\Omega}\,\frac{d\upsilon}{d\sigma}\,\frac{d\upsilon}{d\zeta}\,d\zeta + \int_0^{2a}\frac{1}{E_1\Omega}\,\frac{d\zeta}{d\sigma}\,d\zeta + \int_0^{2a}\frac{\upsilon^2}{E_1 I_x}\,\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta} \quad (6),$$

Determinato il valore di Q mediante quest'ultima formola, riesce facile ottenere quello di Q', giacchè si ha dalla formola (1)

$$Q' = Q - \Sigma F\cos\delta.$$

Allorquando si creda di poter trascurare gli scorrimenti trasversali, e quindi le azioni delle forze che li producono, giacchè avviene generalmente che le resistenze trasversali hanno poca importanza relativamente alle resistenze longitudinali, non si tien conto del termine

$$\int_0^{2a}\frac{Y}{E_1\Omega}\,\frac{d\upsilon}{d\zeta}\,d\zeta$$

nell'equazione (4), non si considera la prima delle formole (5), e la formola (6) si riduce a

$$Q = \frac{2a\tau + \int_0^{2a} \frac{Z'}{E_1\Omega}\, d\zeta + \int_0^{2a} \frac{M_x' v}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta}\, d\zeta}{\int_0^{2a} \frac{1}{E_1\Omega} \frac{d\zeta}{d\sigma}\, d\zeta + \int_0^{2a} \frac{v^2}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta}\, d\zeta} \qquad (7),$$

Qualora si trovasse un valore negativo per alcuna delle incognite, vorrebbe dire che la forza da essa rappresentata è diretta in senso contrario a quello da noi stato supposto.

Le forze Q e Q′ considerate in senso contrario, che è quanto dire le azioni orizzontali esercitate dall'arco avente per asse la curva A C B sui suoi appoggi, costituiscono le spinte dell'arco stesso, allorchè esse risultano positive, e tendono rovesciare i piedritti al di fuori. Quando le forze applicate all'arco sono qualunque, queste spinte sono generalmente differenti l'una dall'altra ; ma, come risulta dall'equazione (1), esse sono eguali tuttavolta che si ha

$$\Sigma F \cos\delta = 0,$$

come quando trattasi di un arco colla corda orizzontale e caricato di pesi.

Nel caso di un solido con asse rettilineo (*Fig.* 15), trovandosi l'asse primitivo A C B del solido nella direzione dell'asse Aζ, si ha

$$v = 0, \qquad \frac{dv}{d\zeta} = 0, \qquad d\sigma = d\zeta,$$

e quindi, tanto dall'equazione (6) quanto dall'equazione (7), otteniamo che il valore di Q è dato dalla formola

$$Q = \frac{2a\tau + \int_0^{2a} \frac{Z'}{E_1\Omega}\, d\zeta}{\int_0^{2a} \frac{1}{E_1\Omega}\, d\zeta} \qquad (8).$$

Se finalmente tutte le forze sollecitanti il corpo sono perpendicolari alla sua lunghezza, allora esse non ammettono alcuna competente nella direzione dell'asse A B, è nullo il valore di Z', il valore di Q dipende solamente dalle variazioni di lunghezza del corpo pei cangiamenti di temperatura, e vien dato dalla semplicissima formola

$$Q = \frac{2a\tau}{\int_0^{2a} \frac{1}{E_1 \Omega} \, d\zeta}.$$

Quando il fattore τ è negativo, il valore di Q è pure negativo, e rappresenta lo sforzo con cui il corpo A B tende tirare all'indentro i sostegni, se ad esso trovasi legato. Se però il corpo non è legato ai sostegni, il valore negativo di Q non deve essere considerato, giacchè è evidente che in questo caso il corpo non eserciterebbe alcuna azione orizzontale sui sostegni stessi.

14. **Determinazione delle reazioni degli appoggi per una centina sostenuta alle due estremità da due appoggi fissi, simmetrica e simmetricamente sollecitata.** — Sia A C B (*Fig.* 16) l'asse di una centina o di un solido inizialmente curvo; le due estremità di questa centina si trovino su due appoggi immobili, disposti in modo da impedire qualsiasi spostamento dei punti A e B, come venne supposto nel precedente numero; ma la curva A C B sia simmetrica rispetto alla retta Ov perpendicolare alla A B nel suo punto di mezzo C; e di più la centina si trovi sotto l'azione di forze simmetricamente applicate e disposte rispetto all'accennata perpendicolare.

Per la definita simmetria nella forma e nelle forze sollecitanti la centina, il punto di mezzo C dell'asse si sposterà mantenendosi sulla retta Ov, e le due reazioni in A e B risulteranno eguali fra di loro ed egualmente inclinate sulla A B. Se adunque chiamiamo

R ciascuna delle indicate reazioni,

Q e V le componenti secondo Oζ e secondo Ov di ognuna di esse, e se conserviamo alle lettere F, λ ed a i significati che loro vennero attribuiti nel numero precedente, abbiamo: che a motivo della simmetria sono verificate per identità le condizioni dell'equilibrio di translazione nel senso Aζ e dell'equilibrio di rotazione attorno al punto A; e che si riduce a

$$V + \Sigma F \cos\lambda = 0 \qquad (1),$$

l'equazione esprimente la condizione dell'equilibrio di translazione nella direzione $O\upsilon$. Abbiamo considerato una sola delle componenti V delle reazioni R nello stabilire l'equazione (1), e quindi la somma $\Sigma F \cos\lambda$ è estesa alle sole forze che si trovano applicate alla mezza centina CB. Risolvendo la citata equazione per rapporto a V, troviamo

$$V = -\Sigma F \cos\lambda \qquad (2).$$

Per avere il valore di Q, poniamo la condizione esprimente che è nullo lo spostamento $\Delta\zeta_1$ dell'estremo B dell'asse della centina applicando l'equazione (2) del numero 11 e prendendo per sezione d'origine, e quindi per origine delle integrazioni, quella corrispondente al punto culminante C. Siccome, a motivo della simmetria dell'asse della centina e delle forze sollecitanti rispetto ad $O\upsilon$, la tangente nel punto C conserva, dopo la deformazione, la stessa direzione che aveva prima che questa avvenisse, e siccome il punto C si muove sulla $O\upsilon$, si ha: pel punto C

$$m_0 = 0, \qquad \zeta_0 = 0, \qquad \Delta\zeta_0 = 0.$$

Pel punto B poi risulta

$$\zeta_1 = a, \qquad \upsilon_1 = 0, \qquad \Delta\zeta_1 = 0,$$

e quindi la citata equazione del numero 11 si riduce a

$$a\tau + \int_0^a \left(-\frac{Y}{E_t \Omega}\frac{d\upsilon}{d\zeta} + \frac{Z}{E_1 \Omega} \right) d\zeta + \int_0^a \frac{M_x \upsilon}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\, d\zeta = 0 \qquad (3),$$

nella quale le coordinate ζ ed υ, l'arco σ, la superficie Ω, il momento d'inerzia I_x, i coefficienti di elasticità E_1 ed E_t, le forze Y e Z ed il momento M_x si riferiscono ad un punto qualunque N dell'asse della centina. Ponendo ora in quest'equazione

$$Y = Y' + Q\frac{d\upsilon}{d\sigma}$$

$$Z = Z' - Q\frac{d\zeta}{d\sigma}$$

$$M_x = M'_x - Q\upsilon$$

onde mettere in evidenza il valore di Q, ed osservando che Y', Z' ed M_x' hanno gli stessi significati che loro vennero attribuiti nel precedente numero, l'equazione (2) diventa

$$\left\{\begin{aligned} &a\tau - \int_0^a \frac{Y'}{E_t\Omega}\,\frac{d\upsilon}{d\zeta}\,d\zeta - Q\int_0^a \frac{1}{E_t\Omega}\,\frac{d\upsilon}{d\sigma}\,\frac{d\upsilon}{d\zeta}\,d\zeta \\ &+\int_0^a \frac{Z'}{E_l\Omega}\,d\zeta - Q\int_0^a \frac{1}{E_l\Omega}\,\frac{d\zeta}{d\sigma}\,d\zeta \\ &+\int_0^a \frac{M_x'\upsilon}{E_l I_x}\,\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta - Q\int_0^a \frac{\upsilon^2}{E_l I_x}\,\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta \end{aligned}\right\} = 0,$$

dalla quale immediatamente si ricava

$$Q = \frac{a\tau - \int_0^a \frac{Y'}{E_t\Omega}\,\frac{d\upsilon}{d\zeta}\,d\zeta + \int_0^a \frac{Z'}{E_l\Omega}\,d\zeta + \int_0^a \frac{M_x'\upsilon}{E_l I_x}\,\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta}{\int_0^a \frac{1}{E_t\Omega}\,\frac{d\upsilon}{d\sigma}\,\frac{d\upsilon}{d\zeta}\,d\zeta + \int_0^a \frac{1}{E_l\Omega}\,\frac{d\zeta}{d\sigma}\,d\zeta + \int_0^a \frac{\upsilon^2}{E_l I_x}\,\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta} \quad (4).$$

Volendosi trascurare i termini che corrispondono agli sforzi di taglio, ossia agli sforzi provocanti la resistenza allo scorrimento trasversale, bisognerebbe nell'equazione (3) omettere il termine contenente Y, ed allora il valore di Q si ridurrebbe a

$$Q = \frac{a\tau + \int_0^a \frac{Z'}{E_l\Omega}\,d\zeta + \int_0^a \frac{M_x'\upsilon}{E_l I_x}\,\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta}{\int_0^a \frac{1}{E_l\Omega}\,\frac{d\zeta}{d\sigma}\,d\zeta + \int_0^a \frac{\upsilon^2}{E_l I_x}\,\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta} \quad (5).$$

Le formole (2) e (4), oppure le formole (2) e (5) allorquando si

crede di poter trascurare gli sforzi provocanti la resistenza trasversale, bastano per risolvere il problema della determinazione delle reazioni degli appoggi per una centina simmetrica e simmetricamente caricata.

Per rapporto ai segni da cui possono trovarsi affette le incognite e per rapporto al caso di un solido rettilineo valgono le osservazioni che già vennero fatte sul finire del precedente numero.

16. **Determinazione delle reazioni degli appoggi per una centina collocata su un piano che non oppone un ostacolo diretto all'allungamento della sua corda.** — Consideriamo innanzi tutto il caso di una centina sostenuta alle sue estremità da appoggi colle facce superiori piane talmente levigate da non esservi attrito fra esse ed il piede della centina, talmente resistenti da impedire la benchè minima penetrazione degli estremi A e B (*Fig.* 14) sotto le facce stesse, ma non presentanti alcun ostacolo all'allontanamento ed all'avvicinamento dei detti estremi. In questo caso è evidente che sono nulli i valori di Q e di Q', ossia le componenti delle reazioni degli appoggi secondo la retta AB, che fra le componenti delle forze F nel senso dell'asse delle ζ deve essere verificata la condizione

$$\Sigma F \cos \delta = 0,$$

e che non si hanno a trovare che le due componenti normali V e V' mediante le formole (2) e (3) del numero 14.

Se non è nullo l'attrito fra le facce d'appoggio e le estremità della centina, s'incomincierà col calcolare le spinte Q e Q' e le due reazioni V e V' col metodo che venne indicato nel numero 14, supponendo cioè che gli appoggi siano totalmente fissi. Fatto questo calcolo, si paragonino i valori di Q e di Q' coi prodotti di V e di V' pel coefficiente d'attrito f delle facce in contatto della centina e degli appoggi. Se trovansi, in valore assoluto, verificate le due ineguaglianze

$$Q < fV \qquad\qquad Q' < fV',$$

è segno che non può avvenire alcun scorrimento, e che tutto succederà come si è supposto nella deduzione di Q, di Q', di V e di V'. Ma se le due indicate ineguaglianze non sono verificate, la corda $\overline{AB}$ varierà finchè i valori di Q e di Q' siansi ridotti ad essere rispettivamente eguali ad fV ed a fV'. Le reazioni R ed R' sarebbero date da

$$R = V\sqrt{1+f^2}$$

$$R' = V'\sqrt{1+f^2};$$

e ciascuna di esse farebbe colla normale alla rispettiva faccia d'appoggio un angolo eguale all'angolo d'attrito.

17. **Determinazione delle reazioni degli appoggi per una centina incastrata alle sue due estremità.** — La condizione dei due incastramenti in A e B (*Fig.* 17) racchiude la conseguenza dell'invariabilità delle direzioni delle tangenti all'asse ACB della centina nei punti ora indicati, ossia ancora della nessuna rotazione delle sezioni rette corrispondenti agli stessi punti. Segue da ciò che se noi supponiamo tolti i due appoggi coi corrispondenti mezzi d'incastramento delle due estremità della centina, per mantenerla nelle primitive condizioni bisogna ammettere l'esistenza, non solo delle due reazioni R ed R', ma ben anche quella di due coppie M ed M', la prima per mantenere invariabile la direzione della tangente BT nel punto B dell'asse, e la seconda per mantenere pure invariabile la posizione AT' della tangente nel punto A dell'asse medesimo. Se adunque alle due reazioni R ed R' sostituiamo le loro componenti Q e Q' secondo AB, V e V' perpendicolarmente ad AB, abbiamo sei incognite da determinare: le tre Q, V ed M per l'estremo B; e le tre Q', V' ed M' per l'estremo A.

Scrivendo le tre equazioni d'equilibrio delle forze esteriori col tener conto delle reazioni e delle coppie indicate, incomincieremo coll'avere tre equazioni fra le sei incognite. Ponendo quindi in A il centro della sezione d'origine, assumendo la retta $A\zeta$ per asse delle ascisse e la retta Av, ad essa normale, per asse delle ordinate, applicheremo al punto B le equazioni (1), (2) e (5) del numero 11, mediante le quali esprimeremo che devono essere nulli gli spostamenti Δv_i e $\Delta\zeta_i$ per questo punto, e che deve pure essere nulla la rotazione m_i della sezione retta corrispondente allo stesso punto. Sono nulli i valori di $\Delta\zeta_o$, Δv_o, m_o, ζ_o, v_o, v_i e σ_o da porsi nelle citate formole, e vale $\overline{AB} = 2a$ l'ascissa ζ_i del punto B. Otterremo così altre tre equazioni le quali, unite alle tre già accennate esprimenti le condizioni d'equi-

librio delle forze estrinseche, daranno le sei relazioni atte a determinare le sei incognite Q, Q', V, V', M ed M'.

Limitandoci a considerare il solo caso della centina simmetrica e simmetricamente sollecitata rispetto alla retta $O\upsilon$ (*Fig.* 18) perpendicolare alla $\overline{AB}$ nel suo punto di mezzo O, avremo: che il punto di mezzo C della centina si sposterà mantenendosi sulla retta $O\upsilon$; che le due reazioni in A e B saranno fra loro eguali ed egualmente inclinate all'orizzonte; che saranno pure eguali le due coppie corrispondenti agli incastramenti degli estremi della centina; e che quindi avremo

$$Q' = Q, \qquad V' = V, \qquad M' = M.$$

A motivo della perfetta simmetria della centina e delle forze sollecitanti rispetto alla $O\upsilon$, sono verificate per identità le condizioni dell'equilibrio di translazione nel senso $A\xi$ e dell'equilibrio di rotazione attorno al punto A; e si riduce a

$$V + \Sigma F \cos\lambda = 0$$

l'equazione la quale esprime la condizione dell'equilibrio di translazione nella direzione $O\upsilon$. Da quest'equazione immediatamente si ha

$$V = -\Sigma F \cos\lambda \qquad (1),$$

e la somma $\Sigma F \cos\lambda$ deve essere estesa alle sole forze che si trovano applicate alla mezza centina CB.

Per ottenere i due valori di Q e di M, bisogna porre le condizioni che devono essere nulli nel punto B lo spostamento $\Delta\xi_1$ e la rotazione m_1, e quindi bisogna applicare le formole (2) e (5) del numero 11. Assumendo perciò come assi coordinati la retta $O\xi$ e la perpendicolare $O\upsilon$ nel mezzo di AB, e ponendo in corrispondenza del punto C la sezione d'origine, per questo punto avremo

$$m_0 = 0, \qquad \xi_0 = 0, \qquad \Delta\xi_0 = 0;$$

pel punto B ci risulterà

$$\xi_1 = a, \qquad \upsilon_1 = 0, \qquad \Delta\xi_1 = 0,$$

$$m_1 = 0;$$

e le citate equazioni (2) e (5) si ridurranno a

$$\alpha\tau + \int_0^a \left(-\frac{Y}{E_t \Omega}\frac{d\upsilon}{d\xi} + \frac{Z}{E_l \Omega} \right) d\xi + \int_0^a \frac{M_x \upsilon}{E_l I_x}\frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = 0 \quad (2)$$

$$\int_0^a \frac{M_x}{E_l I_x}\frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = 0 \quad (3),$$

nelle quali le coordinate υ e ξ, l'arco σ, la superficie Ω, il momento d'inerzia I_x, i coefficienti di elasticità E_l ed E_t, le forze Y e Z ed il momento M_x si riferiscono ad un punto qualunque N dell'asse della centina.

Ora, onde mettere in evidenza le due incognite Q ed M, si potrà porre

$$Y = Y' + Q\frac{d\upsilon}{d\sigma}$$

$$Z = Z' - Q\frac{d\xi}{d\sigma}$$

$$M_x = M_x' - Q\upsilon + M,$$

nelle quali Y', Z' ed M' hanno i significati che già loro vennero attribuiti nei numeri 14 e 15, coll'avvertenza che nel momento M_x' non trovasi compreso il momento incognito M. Sostituendo questi valori di Y, Z ed M_x nelle equazioni (2) e (3) ed ordinandole per la determinazione delle due incognite Q ed M, otteniamo

$$Q\left(\int_0^a \frac{1}{E_t \Omega}\frac{d\upsilon}{d\sigma}\frac{d\upsilon}{d\xi} d\xi + \int_0^a \frac{1}{E_l \Omega}\frac{d\xi}{d\sigma} d\xi + \int_0^a \frac{\upsilon^2}{E_l I_x}\frac{d\sigma}{d\xi} d\xi \right) -$$

$$- M\int_0^a \frac{\upsilon}{E_l I_x}\frac{d\sigma}{d\xi} d\xi$$

$$= \alpha\tau - \int_0^a \frac{Y'}{E_t \Omega}\frac{d\upsilon}{d\xi} d\xi + \int_0^a \frac{Z'}{E_l \Omega} d\xi + \int_0^a \frac{M_x' \upsilon}{E_l I_x}\frac{d\sigma}{d\xi} d\xi \quad (4),$$

$$Q\int_0^a \frac{v}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta - M\int_0^a \frac{1}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta = \int_0^a \frac{M_x'}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \qquad (5).$$

Una volta calcolati i diversi integrali definiti che entrano nelle ultime due equazioni, la qual cosa si potrà sempre fare, almeno per approssimazione, le ultime due equazioni, le quali sono del primo grado fra le due incognite Q ed M, facilmente condurranno alla loro determinazione. Conoscendosi il valore di V tutto rimane determinato, e quindi sono le equazioni (1), (4) e (5) quelle che servono alla completa risoluzione del problema.

Qualora credasi di poter trascurare i termini corrispondenti agli sforzi trasversali ossia agli sforzi provocanti la resistenza allo scorrimento trasversale, bisogna omettere nell'equazione (2) il termine contenente la forza Y ; ed allora l'equazione (4) si riduce a

$$Q\left(\int_0^a \frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\zeta}{d\sigma}d\zeta + \int_0^a \frac{v^2}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right) - M\int_0^a \frac{v}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta$$

$$= a\tau + \int_0^a \frac{Z'}{E_1\Omega}d\zeta + \int_0^a \frac{M_x' v}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta.$$

Quest'ultima equazione e l'equazione (5) sono allora quelle da impiegarsi per la determinazione delle due incognite Q ed M.

Nel caso di un solido avente per asse la linea retta, si assume l'asse $A\zeta$ nella direzione dell'asse A B (*Fig.* 19) del corpo; si ha

$$v = 0, \qquad \frac{dv}{d\zeta} = 0, \qquad d\sigma = d\zeta;$$

e dalle equazioni (4) e (5) si deducono i valori di Q e di M dati dalle formole

$$Q = \frac{a\tau + \int_0^a \frac{Z'}{E_1 \Omega} d\zeta}{\int_0^a \frac{1}{E_1 \Omega} d\zeta},$$

$$M = -\frac{\int_0^a \frac{M_x'}{E_1 I_x} d\zeta}{\int_0^a \frac{1}{E_1 I_x} d\zeta} \qquad (6).$$

Se finalmente, stando sempre nel caso di un solido con asse rettilineo, le forze sollecitanti il corpo sono perpendicolari alla sua lunghezza, si ha $Z' = 0$; il valore della forza Q si riduce a

$$Q = \frac{a\tau}{\int_0^a \frac{1}{E_1 \Omega} d\zeta};$$

ed il valore del momento M è sempre dato dalla formola (6).

18. **Determinazione delle reazioni degli appoggi e della tensione di un tirante parallelo alla corda per una centina appoggiata alle due estremità, simmetrica e simmetricamente sollecitata.** — Sia A C B (*Fig.* 20) l'asse della centina che vogliamo considerare; gli appoggi siano fatti in modo da opporsi al benchè minimo allontanamento degli estremi A e B della centina; siavi poi un tirante D E, parallelo alla detta corda, articolato alle sue due estremità e situato in tale posizione da unire due punti della centina i quali tendono allontanarsi l'uno dall'altro. Quest'ultima condizione è indispensabile quando vuolsi adottare come tirante una semplice spranga che possa assai bene resistere all'azione di una forza traente, ma soggetta ad inflettersi con facilità sotto l'azione di una forza premente. Egli è evidente che, se i due punti d'articolazione del tirante colla centina

tendessero avvicinarsi, il tirante risulterebbe quasi inutile, salvo che esso fosse una sbarra rigida e di grande sezione. Del resto, i calcoli che instituiremo saranno ancora applicabili a questo caso. Ammetteremo che il tirante non debba sopportare carico alcuno, faremo anche astrazione del suo peso siccome relativamente piccolo, e ci proporremo di determinare la sua tensione e la reazione esercitata da ciascuno degli appoggi sull'arco.

Si conservino alle lettere Q, V, F, λ ed a gli stessi significati che loro vennero attribuiti nel numero 15; si osservi che il valore di V è dato dalla formola (2) dell'or citato numero, ossia da

$$V = -\Sigma F \cos \lambda ;$$

si chiamino

$2a'$ la lunghezza $\overline{DE}$ del tirante,

b la distanza $\overline{OF}$ del suo asse dalla corda AB della centina,

T la tensione che esso sopporta,

Ω' la superficie della sua sezione retta,

E' il coefficiente di elasticità per la materia costituente il tirante; e si assumano per assi coordinati le due rette $O\zeta$ ed $O\upsilon$, la prima nella direzione della corda AB e la seconda perpendicolare a questa direzione e passante pel punto di mezzo O della corda stessa. A motivo della perfetta simmetria della centina e delle forze sollecitanti rispetto alla retta $O\upsilon$, è evidente che il punto C non può spostarsi che su questa linea, e che l'elemento superiore dell'asse della centina non può deviare per causa della flessione; nella metà del tirante EF, per causa della tensione T, ha luogo l'allungamento $\frac{T a'}{E' \Omega'}$; e nell'estremo B dell'asse della centina, essendo esso ritenuto dall'appoggio che gli impedisce di scorrere, non possono avvenire movimenti di translazione. Segue da ciò che, applicando l'equazione (2) del numero 11 ai due punti B ed E dell'asse della centina, potremo porre le due condizioni che lo spostamento $\Delta\zeta_i$ è nullo per il punto B ed eguale a $\frac{T a'}{E' \Omega'}$ per il punto E. Assumendo nel punto C l'origine delle integrazioni, avremo adunque

$$m_o = 0, \qquad \zeta_o = 0, \qquad \Delta\zeta_o = 0$$

pel punto C,

$$\zeta_1 = a, \qquad v_1 = 0, \qquad \Delta\zeta_1 = 0$$

pel punto B e

$$\zeta_1 = a', \qquad v_1 = b, \qquad \Delta\zeta_1 = \frac{T\,a'}{E'\,\Omega'}$$

pel punto E; cosicchè le due equazioni, risultanti dall'applicazione della citata equazione (2) del numero 11, risultano

$$a\tau + \int_0^a \left(-\frac{Y}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\zeta} + \frac{Z}{E_1\Omega}\right)d\zeta + \int_0^a \frac{M_x v}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta = 0 \qquad (1),$$

$$a'\tau + \int_0^{a'} \left(-\frac{Y}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\zeta} + \frac{Z}{E_1\Omega}\right)d\zeta + \int_0^{a'} \frac{M_x\,(v-b)}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta = \frac{T\,a'}{E'\,\Omega'} \qquad (2).$$

Ora, bisogna in queste equazioni mettere in evidenza le due incognite Q e T. Osserviamo perciò che si hanno le formole

$$Y = Y' + (Q + T)\frac{dv}{d\sigma}$$

$$Z = Z' - (Q + T)\frac{d\zeta}{d\sigma}$$

$$M_x = M_x' - Qv - T\,(v - b)$$

per un punto qualunque fra C ed E; mentre queste formole si riducono a

$$Y = Y' + Q\frac{dv}{d\sigma}$$

$$Z = Z' - Q\frac{d\zeta}{d\sigma}$$

$$M_x = M_x' - Qv$$

per un punto qualunque posto fra E e B. In quanto alle quantità Y', Z' ed M_x', esse hanno i medesimi significati che loro vennero attribuiti nei numeri 14 e 15, di modo che sono funzioni immediatamente calcolabili per ciascun punto in funzione di ζ e di v. Sostituendo questi valori di Y, di Z e di M_x nelle equazioni (1) e (2), ed osservando che la forza T influisce nello spostare l'asse della centina soltanto pel tratto CE, ossia fra i limiti $\zeta = 0$ e $\zeta = a'$, troviamo:

$$Q\left(\int_0^a \frac{1}{E_t\Omega}\frac{dv}{d\sigma}\frac{dv}{d\zeta}d\zeta + \int_0^a \frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{d\sigma}d\zeta + \int_0^a \frac{v^2}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)$$

$$+T\left(\int_0^{a'} \frac{1}{E_t\Omega}\frac{dv}{d\sigma}\frac{dv}{d\zeta}d\zeta + \int_0^{a'} \frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{d\sigma}d\zeta + \int_0^{a'} \frac{v(v-b)}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)$$

$$= a\tau - \int_0^a \frac{Y'}{E_t\Omega}\frac{dv}{d\zeta}d\zeta + \int_0^a \frac{Z'}{E_1\Omega}d\zeta + \int_0^a \frac{M_x' v}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \qquad (3),$$

$$Q\left(\int_0^{a'} \frac{1}{E_t\Omega}\frac{dv}{d\sigma}\frac{dv}{d\zeta}d\zeta' + \int_0^{a'} \frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{d\sigma}d\zeta + \int_0^{a'} \frac{v(v-b)}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta\right)$$

$$+T\left(\int_0^{a'} \frac{1}{E_t\Omega}\frac{dv}{d\sigma}\frac{dv}{d\zeta}d\zeta + \int_0^{a'} \frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{dv}d\zeta + \int_0^{a'} \frac{(v-b)^2}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta + \frac{a'}{E'\Omega'}\right)$$

$$= a'\tau - \int_0^{a'} \frac{Y'}{E_t\Omega}\frac{dv}{d\zeta}d\zeta + \int_0^{a'} \frac{Z'}{E_1\Omega}d\zeta + \int_0^{a'} \frac{M_x'(v-b)}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta \qquad (4).$$

Effettuati i vari integrali definiti che entrano in queste equazioni, tutto in esse è noto, ad eccezione delle due forze Q e T, e quindi riesce facile procedere alla loro determinazione.

Volendosi trascurare gli effetti prodotti dagli sforzi trasversali,

bisogna omettere nelle equazioni (1) e (2) i termini contenenti Y, ed allora le formole determinatrici di Q e di T si riducono a

$$Q\left(\int_0^a \frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{d\sigma}d\xi+\int_0^a \frac{v^2}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi\right)$$

$$+T\left(\int_0^{a'} \frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{d\sigma}d\xi+\int_0^{a'} \frac{v(v-b)}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi\right)$$

$$=a\tau+\int_0^a \frac{Z'}{E_1\Omega}d\xi+\int_0^{a'} \frac{M_x' v}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi \qquad (5),$$

$$Q\left(\int_0^{a'} \frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{d\sigma}d\xi+\int_0^{a'} \frac{v(v-b)}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi\right)$$

$$+T\left(\int_0^{a'} \frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{d\sigma}d\xi+\int_0^{a'} \frac{(v-b)^2}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi+\frac{a'}{E'\Omega'}\right)$$

$$=a'\tau+\int_0^{a'} \frac{Z'}{E_1\Omega}d\xi+\int_0^{a'} \frac{M_x'(v-b)}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi \qquad (6).$$

Nè il problema riescirebbe di molto più complicato, quando si volesse anche tener conto del peso proprio del tirante, giacchè per la determinazione di Q e di T servirebbero ancora le equazioni (3) e (4), oppure le equazioni (5) e (6), secondo che si crede di non potere o di poter trascurare gli effetti degli sforzi trasversali. In questo caso però, essendo P la metà del peso del tirante, bisognerebbe, nel calcolare V, Y', Z' ed M_x', comprendere i termini che deriverebbero dall'azione di un peso P applicato nel punto E.

Soventi volte i tiranti sono formati di due pezzi coi loro assi sulla

stessa retta e riuniti da una chiocciola posta alle loro estremità. Le due estremità, le quali vengono così riunite nella chiocciola, sono fatte a vite coi vermi disposti in contrario senso, di maniera che, facendo girare la chiocciola, si produce una diminuzione nella lunghezza totale del tirante. Allorquando si presenta questo caso, invece di egualiare all'allungamento $\frac{T a'}{E' \Omega'}$ lo spostamento $\Delta\zeta_i$ del punto E, evidentemente si dovrà eguagliare alla stessa quantità diminuita dell'accorciamento prodotto girando la chiocciola.

Alcune volte si fa operare la chiocciola durante la costruzione, onde rendere nullo il valore di Q. L'equazione (3), dopo aver fatto in essa $Q = 0$, servirà allora alla determinazione della tensione T; e l'equazione (4) dopo la soppressione del termine contenente la Q e dopo l'introduzione dell'accorciamento da prodursi mediante la chiocciola, verrà in acconcio per la determinazione teorica di quest'accorciamento. Quando credasi di poter trascurare gli effetti dovuti agli sforzi trasversali, alle equazioni (3) e (4) si sostituiranno le altre assai più semplici (5) e (6).

19. **Determinazione delle reazioni degli appoggi e delle mutue azioni fra due pezzi, uno con asse rettilineo e l'altro con asse rettilineo o curvilineo, i quali essendo incastrati per una loro estremità, assieme si riuniscono nell'altra.** — Un problema, che qualche volta si presenta nella costruzione delle strade ferrate di montagna, è quello di attraversare, mediante viadotti, burroni inaccessibili col loro fondo instabile e giacenti fra due rocce resistenti. Essendo impossibile in tali condizioni di cose lo stabilimento di pile a sostegno del viadotto, se il burrone è più largo di quanto comporta il limite superiore della portata delle travate metalliche, è imperiosa necessità, o di rinunciare alla costruzione del viadotto, o di trovar mezzo per dar appoggio alla travata in uno o due punti intermedii mediante uno o due sostegni, foggiati a guisa di grandi mensole. Ciascuna di queste mensole verrà saldamente fissata in una spalla del viadotto eseguita in buona muratura, la quale, mediante opportuni intagli ed addentellati, faccia quasi un capo solo colla roccia cui trovasi addossata, e sarà formata di un sostegno principale AB (*Fig.* 21) incastrato alla sua estremità inferiore, e di un tirante orizzontale AC unito al sostegno principale nell'estremo A ed incastrato all'altra estremità. La travata poi, la quale va da una spalla all'altra, troverà appoggio sulla mensola in corrispondenza del punto di riunione A del pezzo principale AB col tirante AC. Ora,

la pressione che la travata eserciterà in A ed i pesi propri del sostegno principale AB e del tirante AC, sono forze le quali inducono delle deformazioni nel sistema, e che fanno nascere le reazioni degli appoggi, non che la mutua azione delle due parti AB ed AC nel punto A, di maniera che è un interessante problema di pratica utilità quello che ha per oggetto le determinazioni state dichiarate nel titolo di questo numero. Per quanto ci consta, da nessuno venne data la risoluzione di questo problema, il quale costituisce una bella applicazione della teoria delle deformazioni dei corpi elastici nel caso in cui tutte le forze sollecitanti sono in uno stesso piano; e quindi ci proponiamo di trattarlo nel modo il più generale possibile per quanto si riferisce alle direzioni della pressione che ha luogo in A e delle forze applicate al sostegno principale AB ed al tirante AC, sempre, ben inteso, nell'ipotesi che queste forze siano nel piano determinato dall'asse dei detti corpi, e che questo piano tagli qualsiasi loro sezione retta secondo un asse principale centrale d'inerzia, per guisa che siano applicabili le sole formole state stabilite nei numeri 9 ed 11.

Ammettendo che nel punto A siavi incastramento reciproco dei due pezzi AC ed AB, di modo che, al sopravvenire di deformazioni nei pezzi medesimi, risulti invariabile l'angolo sotto il quale essi s'incontrano, e non dimenticando che anche in B e C si suppone esservi incastramento dei due corpi AB ed AC in quello a cui sono fermati, cosicchè si ritengono come invariabili le inclinazioni delle sezioni rette corrispondenti ai punti B e C coll'orizzonte, le incognite da determinarsi risultano in numero di nove, tre per l'appoggio e per l'incastramento in B, altre tre per l'appoggio e per l'incastramento in C, e finalmente altre tre per la mutua azione dei due pezzi AC ed AB nel punto A. Invece dell'appoggio e dell'incastramento in B, bisognerà sostituire una reazione applicata al punto B, ossia le sue componenti secondo due assi coordinati, ed una coppia per mantenere invariabile la posizione della sezione retta corrispondente al punto B. Analogamente, invece dell'appoggio e dell'incastramento in C, si dovrà sostituire una reazione applicata al punto C, ossia le sue componenti secondo gli assi coordinati, ed una coppia onde mantenere invariabile la sezione corrispondente al punto C. Finalmente, alla mutua azione dei due pezzi in A è necessario sostituire due forze parallele agli assi coordinati ed una coppia avente per ufficio di mantenere invariabile l'angolo sotto il quale i detti pezzi s'incontrano. Le sei forze or accennate, tre parallele ad un asse coordinato, e tre

parallele all'asse coordinato compagno, e le tre coppie pur indicate sono appunto le nove incognite del problema.

Per giungere alla determinazione di queste nove incognite, assumeremo l'origine delle coordinate nel punto O in cui s'incontrano le due rette condotte, una per C perpendicolarmente, e l'altra per B parallelamente ad AC; e prenderemo l'asse delle ζ in direzione perpendicolare e l'asse della υ in direzione parallela ad AC; e chiameremo:

a le ascisse eguali $\overline{OC}$ e $\overline{DA}$ dei punti C ed A;

b la lunghezza $\overline{CA}$, ossia l'ordinata del punto A;

b' l'ordinata $\overline{OB}$ del punto B;

$\Delta\zeta''$ e $\Delta\upsilon''$ le variazioni delle coordinate del punto d'incontro A degli assi dei due pezzi;

m'' la rotazione della sezione retta del solido rettilineo AC in corrispondenza del punto A, la qual rotazione, a motivo del mutuo incastramento in A fra i corpi AC ed AB, è pur quella della sezione retta del solido AB in corrispondenza dello stesso punto A;

Q, Q' e Q'' le componenti parallele all'asse $O\upsilon$ delle reazioni degli appoggi e della mutua azione dei due pezzi in B, C ed A;

V, V' e V'' le componenti parallele all'asse $O\zeta$ delle stesse forze;

M, M' ed M'' i momenti delle coppie corrispondenti agli incastramenti in B, C ed A;

F una qualunque delle forze estrinseche applicate al solido AB, indipendentemente dalle reazioni incognite su esso operanti;

δ e λ gli angoli di questa forza colle parti positive degli assi coordinati $O\zeta$ ed $O\upsilon$;

F_1, δ_1 e λ_1 le quantità analoghe per una forza estrinseca qualunque applicata al solido AC;

Ff ed F_1f_1 i momenti delle forze F ed F_1, il primo relativamente al punto B ed il secondo relativamente al punto C.

Conserveremo alle lettere Y, Z, M_x, E_l, E_t, Ω, I_x, ζ_o, ζ_i, ζ, υ_o, υ_i, υ, σ_o, σ_i, σ, m_o, m_i e τ i significati che loro vennero attribuiti nelle formole dei numeri 9 ed 11; e, per distinguere quelle che si riferiscono al sostegno principale AB da quelle che si riferiscono al tirante AC, stabiliremo di non apporre alcun nuovo indice alle prime e di apporre l'indice 1 alle altre.

Applicando a ciascuno dei due corpi AB ed AC le tre condizioni d'equilibrio della statica per un sistema di forze contenute in un sol piano, col dire che per ciascuno degli indicati corpi devono essere nulle, le due somme algebriche delle componenti delle forze estrin-

seche (comprendendo fra queste anche le reazioni alle estremità) parallele agli assi coordinati $O\xi$ ed $O\upsilon$, e la somma algebrica dei momenti di rotazione delle stesse forze intorno a due rette perpendicolari al piano coordinato $\xi O\upsilon$, abbiamo: per l'equilibrio del corpo AB, quando si prendano i momenti intorno alla retta proiettata nel punto B,

$$\left.\begin{aligned} &V + V'' + \Sigma F \cos\delta = 0 \\ &Q + Q'' + \Sigma F \cos\lambda = 0 \\ &Q''a - V''(b - b') + M'' + \Sigma F f + M = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1);$$

per l'equilibrio del corpo AC, quando si assumano i momenti intorno alla retta proiettata nel punto C

$$\left.\begin{aligned} &V' - V'' + \Sigma F_1 \cos\delta_1 = 0 \\ &Q' - Q'' + \Sigma F_1 \cos\lambda_1 = 0 \\ &V''b - M'' + \Sigma F_1 f_1 + M' = 0 \end{aligned}\right\} \quad (2);$$

e così ci risultano le sei equazioni (1) e (2) fra le nove incognite Q, Q', Q'', V, V', V'', M, M' ed M''.

Avendosi più incognite che equazioni, il problema non si può risolvere colle sole condizioni d'equilibrio della statica dei corpi rigidi, ed è imperiosa necessità di tener conto delle deformazioni che, sotto l'azione delle forze sollecitanti, saranno per manifestarsi nel punto di giunzione A dei due solidi considerati.

Applicando la formola (5) del numero 11 per determinare la rotazione della sezione retta corrispondente al punto A del solido AB, prendendo per sezione d'origine quella corrispondente al punto B e tenendo conto dell'incastramento del solido in quest'ultimo punto, si trova

$$m'' = \int_{b'}^{b} \frac{M_x}{E I_x} \frac{d\sigma}{d\upsilon} d\upsilon \quad (3);$$

e analogamente, applicando la stessa formola (5) del numero 9 per determinare la rotazione della sezione retta corrispondente al punto A del solido rettilineo A B, assumendo in C la sezione d'origine, osservando che a quest'ultimo punto corrisponde un incastramento e che $d\sigma_1 = dv_1$, si ha

$$m'' = \int_0^b \frac{M_{1x}}{E_1 I_{1x}} dv_1 \qquad (4).$$

Passiamo ora ad applicare le equazioni (1) e (2) del già citato numero 11 per determinare gli spostamenti $\Delta v''$ e $\Delta \zeta''$ del punto A, tanto considerandolo come appartenente al solido A B, quanto riguardandolo come appartenente al solido AC. Nel primo caso, prendendo per sezione d'origine quello corrispondente al punto B, si ottengono le equazioni

$$\Delta v'' = \tau (b - b') + \int_{b'}^b \left(\frac{Y}{E_1 \Omega} \frac{d\zeta}{dv} + \frac{Z}{E_1 \Omega} \right) dv + \int_{b'}^b (a - \zeta) \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{dv} dv \quad (5),$$

$$\Delta \zeta'' = \tau a + \int_{b'}^b \left(- \frac{Y}{E_1 \Omega} + \frac{Z}{E_1 \Omega} \frac{d\zeta}{dv} \right) dv - \int_{b'}^b (b - v) \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{dv} dv \quad (6).$$

Nel secondo caso, assumendo per sezione d'origine quella corrispondente al punto C, osservando che $d\sigma_1 = dv_1$ e che $\frac{d\zeta_1}{dv_1} = 0$, giacchè trattasi di un solido con asse rettilineo parallelo all'asse coordinato Ov, e siccome $\zeta_1 - \zeta = \zeta_1 - \zeta_0 = 0$, risultano le equazioni

$$\Delta v'' = \tau_1 b + \int_0^b \frac{Z_1}{E_1 \Omega_1} dv_1 \qquad (7),$$

$$\Delta\zeta'' = -\int_0^b \frac{Y_1}{E_1 t \Omega_1} d\upsilon_1 - \int_0^b (b - \upsilon_1) \frac{M_{1x}}{E_1 I_{1x}} d\upsilon_1 \qquad (8).$$

Fra le sei equazioni (3), (4), (5), (6), (7) ed (8) si devono ora eliminare i due spostamenti $\Delta\upsilon''$ e $\Delta\zeta''$ e la rotazione m'', onde ottenere le tre equazioni finali che, unitamente alle sei equazioni (1) e (2), concorreranno a determinare le nove incognite Q, Q', Q'', V, V', V'', M, M' ed M''. Assai facilmente si raggiunge lo scopo eguagliando fra di loro i due valori di m'' dati dalle equazioni (3) e (4), i due valori di $\Delta\upsilon''$ somministrati dalle formole (5) e (7) ed i due valori di $\Delta\zeta''$ espressi dai secondi membri delle equazioni (6) ed (8). Così facendo e trasportando nel primo membro tutti i termini delle equazioni risultanti, si trova che le cercate equazioni finali risultano

$$\int_{b'}^b \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\upsilon} d\upsilon - \int_0^b \frac{M_{1x}}{E_1 I_{1x}} d\upsilon_1 = 0 \qquad (9),$$

$$b(\tau - \tau_1) - \tau b' + \int_{b'}^b \left(\frac{Y}{E_1 \Omega} \frac{d\zeta}{d\upsilon} + \frac{Z}{E_1 \Omega} \right) d\upsilon - \int_0^b \frac{Z_1}{E_1 \Omega_1} d\upsilon_1$$

$$+ \int_{b'}^b (a - \zeta) \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\upsilon} d\upsilon = 0 \qquad (10),$$

$$\tau a + \int_{b'}^b \left(-\frac{Y}{E_1 \Omega} + \frac{Z}{E_1 \Omega} \frac{d\zeta}{d\upsilon} \right) d\upsilon + \int_0^b \frac{Y_1}{E_1 \Omega_1} d\upsilon_1$$

$$- \int_{b'}^b (b - \upsilon) \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\upsilon} d\upsilon + \int_0^b (b - \upsilon_1) \frac{M_{1x}}{E_1 I_{1x}} d\upsilon_1 = 0 \qquad (11).$$

Bisogna ora mettere in evidenza in queste tre equazioni quelle delle nove incognite Q, Q', Q'', V, V', V'', M, M' ed M'' che in esse possono entrare, e ci atterremo per questo ai metodi già stati seguìti nella risoluzione delle quistioni che in questo capitolo si sono proposte. Considerando un punto qualunque N della curva AB, immaginando in questo punto la tangente Nz e la normale Ny e chiamando

Y' la somma delle proiezioni, sulla Ny, di tutte le forze, le quali operano sul corpo BA dal punto N al punto A, escluse le due forze Q'' e V'',

Z' la somma delle proiezioni delle stesse forze sulla tangente Nz,

M_x' la somma dei momenti, per rapporto al punto qualunque N, di tutte le forze operanti sul corpo AB da N in A, esclusi quelli delle forze Q'', V'' ed il momento M'',

ξ ed υ le due coordinate $\overline{OP}$ e $\overline{PN}$,

abbiamo

$$\left.\begin{aligned} Y &= Y' + Q''\frac{d\xi}{d\sigma} - V''\frac{d\upsilon}{d\sigma} \\ Z &= Z' + Q''\frac{d\upsilon}{d\sigma} + V''\frac{d\xi}{d\sigma} \\ M_x &= M_x' + Q''(a-\xi) - V''(b-\upsilon) + M'' \end{aligned}\right\} \quad (12).$$

Analogamente, considerando un punto qualsiasi N_1 della retta AC, immaginando in questo punto la normale N_1y_1 e dicendo

Y_1' la somma delle proiezioni, sulla Ny_1, di tutte le forze, le quali operano sul corpo AC del punto N_1 al punto A, esclusa la forza $-V''$,

Z_1' la somma delle proiezioni delle stesse forze sulla N_1z_1, esclusa la $-Q''$,

M_{1x}' la somma dei momenti, per rapporto al punto qualunque N_1, di tutte le forze operanti sul corpo AC da N in A, ad eccezione del momento della forza $-V''$ e del momento $-M''$,

υ_1 l'ordinata $\overline{CN_1}$ del punto N_1,

abbiamo le relazioni

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= Y_1' + V'' \\ Z_1 &= Z_1' - Q'' \\ M_{1x} &= M_{1x}' + V''(b - v_1) - M'' \end{aligned}\right\} \quad (13).$$

Ponendo i trovati valori di Y, Z, M_x, Y', Z' ed M_x' nelle equazioni finali (9), (10) ed (11), esse diventano

$$Q''\int_{b'}^{b}\frac{a-\zeta}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{dv}dv - V''\left(\int_{b'}^{b}\frac{b-v}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{dv}dv + \int_0^b \frac{b-v_1}{E_{11}I_{1x}}dv_1\right)$$

$$+M''\left(\int_{b'}^{b}\frac{1}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{dv}dv + \int_0^b \frac{1}{E_{11}I_{1x}}dv_1\right.$$

$$\left. = -\int_{b'}^{b}\frac{M_x'}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{dv}dv + \int_0^b \frac{M_{1x}'}{E_{11}I_{1x}}dv_1\right) \quad (14),$$

$$Q''\left\{\begin{aligned} &\int_{b'}^{b}\frac{1}{E_t\Omega}\frac{d\xi}{d\sigma}\frac{d\xi}{dv}dv + \int_{b'}^{b}\frac{1}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\sigma}dv \\ &+\int_{b'}^{b}\frac{(a-\zeta)^2}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{dv}dv + \int_0^b \frac{1}{E_{11}\Omega_1}dv_1 \end{aligned}\right\}$$

$$-V''\left\{\int_{b'}^{b}\frac{1}{E_t\Omega}\frac{d\xi}{d\sigma}dv - \int_{b'}^{b}\frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\zeta}{d\sigma}dv + \int_{b'}^{b}\frac{(a-\zeta)(b-v)}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{dv}dv\right\}$$

$$+M''\int_{b'}^{b}\frac{(a-\zeta)}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{dv}dv = \tau b' - b(\tau - \tau_1) - \int_{b'}^{b}\frac{Y'}{E_t\Omega}\frac{d\xi}{dv}dv$$

$$-\int_{b'}^{b}\frac{Z'}{E_1\Omega}dv + \int_0^b \frac{Z_1'}{E_{11}\Omega_1}dv_1 - \int_{b'}^{b}(a-\zeta)\frac{M_x'}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{dv}dv \quad (15),$$

$$-Q''\left\{\int_{b'}^{b}\frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{d\sigma}\,dv-\int_{b'}^{b}\frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{d\sigma}\,dv+\int_{b'}^{b}\frac{(a-\xi)(b-v)}{E_1I_x}\frac{d\sigma}{dv}\,dv\right\}$$

$$+V''\left\{\begin{aligned}&\int_{b'}^{b}\frac{1}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\sigma}\,dv+\int_{b'}^{b}\frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{d\sigma}\frac{d\xi}{dv}\,dv\\&+\int_{b'}^{b}\frac{(b-v)^2}{E_1I_x}\frac{d\sigma}{dv}\,dv+\int_{0}^{b}\frac{1}{E_{1_1}\Omega_1}\,dv_1+\int_{0}^{b}\frac{(b-v_1)^2}{E_{1_1}I_{1x}}\,dv_1\end{aligned}\right\}$$

$$-M''\left\{\int_{b'}^{b}\frac{(b-v)}{E_1I_x}\frac{d\sigma}{dv}\,dv+\int_{0}^{b}\frac{(b-v_1)}{E_{1_1}I_{1x}}\,dv_1\right\}=-\tau a+\int_{b'}^{b}\frac{Y'}{E_1\Omega}\,dv$$

$$-\int_{b'}^{b}\frac{Z'}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{dv}\,dv-\int_{0}^{b}\frac{Y_1'}{E_{1_1}\Omega_1}\,dv_1+\int_{b'}^{b}(b-v)\frac{M_x'}{E_1I_x}\frac{d\sigma}{dv}\,dv$$

$$-\int_{0}^{b}(b-v_1)\frac{M_{1x}'}{E_{1_1}I_{1x}}\,dv_1 \qquad (16).$$

Una volta fatti gli integrali che entrano in queste tre equazioni, esse conterranno d'incognito le sole forze Q'', V'' ed il momento M'', e quindi serviranno all'immediata determinazione di queste tre quantità. Ottenuti i valori di Q'', V'' ed M'', la prima delle equazioni (1) servirà a trovare il valore di V, la seconda a trovare il valore di Q e la terza a trovare il valore di M; la prima delle equazioni (2) verrà in acconcio per ottenere il valore di V', la seconda per ottenere il valore di Q' e la terza per ottenere il valore di M'.

La determinazione dei coefficienti costanti, che entrano nelle equazioni (15) e (16), richiede generalmente calcoli lunghi e faticosi e, quando credasi di poter trascurare gli effetti prodotti dalle forze

provocanti la resistenza trasversale, si può a queste equazioni apportare qualche semplificazione trascurando tutti i termini i quali contengono i coefficienti di elasticità trasversale E_t ed E_{1t}.

Il caso che da noi venne considerato è il più complesso di quelli che si possono presentare nella pratica, allorquando è quistione di stabilire un appoggio del tipo di quello rappresentato nella figura 21ª, perchè abbiamo supposto esservi mutuo incastramento dei due pezzi in A, ed essere incastrati nel ritegno immobile il sostegno principale AB ed il tirante AC. Invece degli incastramenti però si possono adottare le articolazioni; ed in questo caso la risoluzione del problema, costituente l'oggetto di questo capitolo, esige generalmente calcoli meno lunghi e meno laboriosi. Nel numero che segue ci proponiamo di far vedere come deve essere trattato il problema nei casi di una, di due e di tre articolazioni.

20. **Risoluzione del problema del numero precedente nei casi di articolazioni in corrispondenza degli appoggi sul ritegno immobile e nel punto di concorso.** — Sette differenti casi si possono presentare nella determinazione delle forze incognite sollecitanti il sostegno principale AB (*Fig.* 21) ed il tirante AC, giacchè può darsi che siavi articolazione in A ed incastramenti in B e C, articolazione in B ed incastramenti in C ed A, articolazione in C ed incastramenti in B ed A, articolazioni in A e B ed incastramento in C, articolazioni in A e C ed incastramento in B, articolazioni in B e C ed incastramento in A, finalmente articolazioni in A, B e C.

Nel caso di un'articolazione in A, la mutua azione R'' fra i due pezzi AB ed AC necessariamente passa per A, il momento M'' è nullo, e quindi le sei equazioni (1) e (2) del precedente numero si riducono solamente a contenere le otto incognite Q, Q', Q'', V, V', V'', M ed M'. Facendo i valori di $\Delta v''$ e di $\Delta\zeta''$ per il punto A considerato come appartenente al sostegno principale AB ed i valori di $\Delta v''$ e di $\Delta\zeta''$ per il punto A riguardato come appartenente al tirante AC, si avranno le equazioni (5), (6), (7) ed (8), eguagliando tra di loro i due valori di $\Delta v''$ e di $\Delta\zeta''$, si otterranno le due equazioni finali (10) ed (11). In queste ultime due equazioni si porranno in evidenza le incognite Q'' e V'', mettendovi i valori di Y, Z, M_x, Y_1, Z_1 ed M_{1x} dati dalle relazioni (12) e (13), e si giungerà alle due equazioni finali (15) e (16) senza i termini contenenti il momento M''. Queste equazioni serviranno a determinare le due incognite Q'' e V'', e mediante le

formole (1) e (2) si potranno allora determinare le altre sei incognite V, Q, M, V', Q' ed M'.

Se invece si ha un'articolazione in B, mentre in C ed A si hanno incastramenti, la reazione R nel punto B passa pel centro d'articolazione corrispondente a questo punto, e quindi è nullo il momento M. Le sei equazioni (1) e (2) del precedente numero si riducono a contenere le sole incognite Q, Q', Q'', V, V', V'', M' ed M''; si deve istituire l'equazione (3), la quale esprime la rotazione della sezione retta corrispondente al punto A dell'asse A B del sostegno principale, col dire che la sezione iniziale corrispondente al punto B può prendere una rotazione m; e di questa rotazione m si deve pure tener conto nel porre le due equazioni (5) e (6) esprimenti gli spostamenti $\Delta v''$ e $\Delta \xi''$ del punto A considerato come appartenente all'asse A B del sostegno principale. Invece dell'equazione (3) si ha

$$m'' = m + \int_{b'}^{b} \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{dv}\, dv \qquad (3)^{II};$$

l'equazione (4) non cangia; le equazioni (5) e (6) si riducono a

$$\Delta v'' = ma + \tau(b - b') + \int_{b'}^{b} \left(\frac{Y}{E_1 \Omega} \frac{d\xi}{dv} + \frac{Z}{E_1 \Omega} \right) dv$$

$$+ \int_{b'}^{b} (a - \xi) \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{dv}\, dv \qquad (5)^{II},$$

$$\Delta \xi'' = -m(b - b') + \tau a + \int_{b'}^{b} \left(-\frac{Y}{E_1 \Omega} + \frac{Z}{E_1 \Omega} \frac{d\xi}{dv} \right) dv$$

$$- \int_{b'}^{b} (b - v) \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{dv}\, dv \qquad (6)^{II};$$

le equazioni (7) ed (8) non cangiano; e quindi le equazioni finali (9), (10) ed (11) diventano

$$m+\int_{b'}^{b}\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{dv}\,dv-\int_{0}^{b}\frac{M_{1x}}{E_{11}I_{1x}}\,dv_1=0 \qquad (9)^{II},$$

$$ma+b(\tau-\tau_1)-\tau b'+\int_{b'}^{b}\left(\frac{Y}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{dv}+\frac{Z}{E_1\Omega}\right)dv-\int_{0}^{b}\frac{Z_1}{E_{11}\Omega_1}\,dv_1$$

$$+\int_{b'}^{b}(a-\xi)\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{dv}\,dv=0 \qquad (10)^{II},$$

$$-m(b-b')+\tau a+\int_{b'}^{b}\left(-\frac{Y}{E_1\Omega}+\frac{Z}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{dv}\right)dv+\int_{0}^{b}\frac{Y_1}{E_{11}\Omega_1}\,dv_1$$

$$-\int_{b'}^{b}(b-v)\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{dv}\,dv+\int_{0}^{b}(b-v_1)\frac{M_{1x}}{E_{11}I_{1x}}\,dv_1=0 \qquad (11)^{II}.$$

Conviene ora eliminare la rotazione m fra le ultime tre equazioni, onde avere due equazioni indipendenti da quest'incognita, le quali, unitamente alle equazioni (1) e (2) del precedente numero, verranno in acconcio per determinare le otto incognite Q, Q', Q'', V, V', V'', M' ed M''. Moltiplicando la prima delle ultime tre equazioni per a e sottraendola dalla seconda e quindi moltiplicandola pel binemio $b-b'$ ed aggiungendola alla terza, si ottengono le due equazioni

$$b'(\tau-\tau_1)-\tau b'+\int_{b'}^{b}\left(\frac{Y}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{dv}+\frac{Z}{E_1\Omega}\right)dv-\int_0^b\frac{Z_1}{E_{1_1}\Omega_1}dv_1$$

$$-\int_{b'}^{b}\zeta\frac{M_x}{E_1I_x}\frac{d\sigma}{dv}dv+a\int_0^b\frac{M_{1x}}{E_{1_1}I_{1x}}dv_1=0 \qquad (10)_1^{II},$$

$$\tau a+\int_{b'}^{b}\left(-\frac{Y}{E_1\Omega}+\frac{Z}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{dv}\right)dv+\int_0^b\frac{Y_1}{E_{1_1}\Omega_1}dv_1$$

$$-\int_{b'}^{b}(b'-v)\frac{M_x}{E_1I_x}\frac{d\sigma}{dv}dv+\int_0^b(b'-v_1)\frac{M_{1x}}{E_{1_1}I_{1x}}dv_1=0 \qquad (11)_1^{II}.$$

Mettendo ora in evidenza in queste ultime due equazioni le quantità incognite col porre in esse i valori di Y, Z, M_x, Y_1, Z_1 ed M_{1x} dati dalle formole (12) e (13) del precedente numero, si ottengono due relazioni fra le incognite Q'', V'' ed M''. Con queste due relazioni e colla terza delle equazioni (1) del numero precedente si potranno determinare queste incognite, giacchè $M=0$; e serviranno dopo la prima e la seconda delle equazioni (1) per trovare V e Q, le equazioni (2) per calcolare V', Q' ed M'.

Analogo al caso or ora considerato è quello nel quale si ha una articolazione in C, ed incastramenti in B ed A. La reazione R' nel punto C passa pel centro d'articolazione corrispondente a questo punto, di modo che è nullo il momento M'. Le sei equazioni (1) e (2) del numero precedente contengono le otto incognite Q, Q', Q'', V, V', V'', M ed M''; l'equazione (3) non subisce alcuna modificazione; l'equazione (4) deve essere instituita colla condizione che la rotazione della sezione iniziale del tirante, la qual sezione è quella corrispondente al punto C, possa prendere una rotazione m', cosicchè invece della detta equazione (4) si avrà

$$m'' = m' + \int_0^b \frac{M_{1x}}{E_{1}I_{1x}} d\upsilon_1 \qquad (4)^{III}.$$

Non cangieranno le equazioni (5) e (6); e, tenendo conto della rotazione m', si troverà che l'estremo A del tirante AB subirà gli spostamenti $\Delta v''$ e $\Delta \zeta''$ dati da

$$\Delta v'' = \tau_1 b + \int_0^b \frac{Z_1}{E_{1}\Omega_1} d\upsilon_1 \qquad (7)^{III},$$

$$\Delta \zeta'' = - m' b - \int_0^b \frac{Y_1}{E_{1}\Omega_1} d\upsilon_1 - \int_0^b (b - \upsilon_1) \frac{M_{1x}}{E_{1}I_{1x}} d\upsilon_1 \qquad (8)^{III};$$

cosicchè queste ultime due equazioni sono quelle che tengono il posto delle equazioni (7) ed (8) del numero precedente. Restano modificate soltanto la (9) e la (11) delle tre equazioni finali, giacchè queste equazioni risultano

$$\int_{b'}^b \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\upsilon} d\upsilon - m' - \int_0^b \frac{M_{1x}}{E_{1}I_{1x}} d\upsilon_1 = 0 \qquad (9)^{III},$$

$$m' b + \tau a + \int_{b'}^b \left(- \frac{Y}{E_1 \Omega} + \frac{Z}{E_1 \Omega} \frac{d\zeta}{d\upsilon} \right) d\upsilon + \int_0^b \frac{Y_1}{E_{1}\Omega_1} d\upsilon_1$$

$$- \int_{b'}^b (b - \upsilon) \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\upsilon} d\upsilon + \int_0^b (b - \upsilon_1) \frac{M_{1x}}{E_{1}I_{1x}} d\upsilon_1 = 0 \qquad (11)^{III},$$

Moltiplicando per b la prima di queste equazioni e quindi sommandole membro a membro, si ottiene

$$\tau a + \int_{b'}^{b} \left(- \frac{Y}{E_1 \Omega} + \frac{Z}{E_1 \Omega} \frac{d\zeta}{dv} \right) dv + \int_{0}^{b} \frac{Y_1}{E_{1'} \Omega_1} dv_1$$

$$+ \int_{b'}^{b} v \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{dv} dv - \int_{0}^{b} v_1 \frac{M_{1x}}{E_{1'} I_{1x}} dv_1 = 0 \qquad (11)^{III}$$

per una delle equazioni finali indipendenti dalla rotazione m', mentre l'altra è la stessa equazione (10) del precedente numero. Ponendo ora in evidenza, nell'or citata equazione (10) e nell'ultima equazione trovata, le quantità incognite col sostituire in esse i valori di Y, Z, M_x, Y_1, Z_1 ed M_{1x} dati dalle relazioni (12) e (13) del precedente numero, si arriva a due equazioni fra le tre incognite Q'', V'' ed M''. Con queste due equazioni e colla terza delle equazioni (2) del numero precedente sarà possibile determinare le accennate tre incognite, giacchè si ha $M' = 0$; serviranno le equazioni (1) per quindi trovare V, Q ed M, si impiegheranno la prima e la seconda delle equazioni (2) per determinare V' e Q'.

Nel caso di due articolazioni, una in A e l'altra in B, passa per A la reazione R'', passa per B la reazione R e sono nulli i momenti M'' ed M. Le sei equazioni (1) e (2) del precedente numero esistono, ma le incognite in esse contenute sono solamente le sette Q, Q', Q'', V, V', V'' ed M'. Nel fare i valori degli spostamenti $\Delta v''$ e $\Delta \zeta''$ del punto A, considerato come appartenente all'asse del sostegno principale AB, e riferendo i detti spostamenti alla sezione iniziale determinata dal punto B, bisogna tener conto della rotazione m di questa stessa sezione, e quindi invece delle equazioni (5) e (6) del precedente numero si avranno le equazioni $(5)^{II}$ e $(6)^{II}$ già state stabilite considerando il caso di una sola articolazione in B. Le equazioni (7) ed (8) del numero precedente non cangiano, e, eguagliando fra di loro i valori di $\Delta v''$ dati dalla $(5)^{II}$ e dalla (7), non che i valori di $\Delta \zeta''$ dati dalla $(6)^{II}$ e dalla (8), si ottengono le equazioni $(10)^{II}$ ed $(11)^{II}$. Moltiplicando l'equazione $(10)^{II}$ pel binemio $b - b'$, moltipli-

cando l'equazione (11)^{II} per a e sommando i due prodotti, si ottiene l'equazione finale

$$(b-b')\left[(b-b')\tau-b\tau_1\right]+\tau a^2+(b-b')\int_{b'}^{b}\left(\frac{Y}{E_t\Omega}\frac{d\xi}{dv}+\frac{Z}{E_l\Omega}\right)dv$$

$$+a\int_{b'}^{b}\left(-\frac{Y}{E_t\Omega}+\frac{Z}{E_l\Omega}\frac{d\xi}{dv}\right)dv+a\int_{0}^{b}\frac{Y_1}{E_{1t}\Omega_1}dv_1-(b-b')\int_{0}^{b}\frac{Z_1}{E_{1l}\Omega_1}dv_1$$

$$-\int_{b'}^{b}\left[(b-b')\xi-av+ab'\right]\frac{M_x}{E_lI_x}\frac{d\sigma}{dv}dv+a\int_{0}^{b}(b-v_1)\frac{M_{1x}}{E_{1l}I_{1x}}dv_1=0.$$

In quest'equazione bisogna ora mettere in evidenza le quantità incognite, col porre in essa i valori di Y, Z, M_x, Y_1, Z_1 ed M_{1x} dati dalle formole (12) e (13) del numero precedente. Così facendo si giunge ad una relazione fra le due incognite Q'' e V'', giacchè si ha $M''=0$. Con questa relazione e colla terza delle equazioni (1) del numero precedente, per essere anche $M=0$, si potranno determinare le due incognite Q'' e V''. Dalla prima e dalla seconda delle equazioni (1) si dedurranno V e Q, colle tre equazioni (2) si calcoleranno V', Q' ed M'.

Analogo al caso or ora trattato è quello di un'articolazione in A, di un incastramento in B e di un'articolazione in C. La reazione R'' passa pel punto A e passa per C la reazione R'; è nullo il momento M'' ed è pur nullo il momento M'. Esistono le sei equazioni (1) e (2) del precedente numero, e le incognite in esse contenute sono le sette quantità Q, Q', Q'', V, V', V'' ed M. La terza delle equazioni (2), per essere $M'=M''=0$, permette di subito determinare il valore di V''. Le equazioni (5) e (6) del numero precedente non cangiano; ma, dovendosi tener conto della rotaziane m' della sezione del tirante relativa al punto C nel fare gli spostamenti $\Delta v''$ e $\Delta\xi''$ del punto A, considerato come appartenente all'asse del solido rettilineo AC, invece delle equazioni (7) e (8) si avranno le due equazioni (7)^{III} e (8^{III}) già state stabilite nel caso della sola articolazione in C. Eguagliando fra di loro i

due valori di $\Delta v''$ dati dalla (5) e dalla (7^{III}) ed i due valori di $\Delta \xi'''$ dati dalle formole (6) ed $(8)^{III}$, si ottengono l'equazione (10) del nnmero precedente e l'equazione $(11)^{III}$; e la citata equazione (10), siccome indipendente dalla rotazione m', costituisce l'equazione finale, la quale, unitamente alle equazioni (1) e (2) del precedente numero, viene in acconcio per la determinazione delle sette incognite del problema. Perciò, bisogna mettere in evidenza nella citata equazione (10) le quantità incognite che in essa si trovano col porre, invece di Y, Z, M_x e Z_1, i loro valori dati dalle formole (12) e dalla seconda delle formole (13) del precedente numero; e si otterrà un'equazione contenente la sola incognita Q'', la quale si potrà per conseguenza determinare. Le tre equazioni (1) del precedente numero serviranno alla determinazione delle incognite V, Q ed M; la prima e la seconda delle equazioni (2) condurranno alla determinazione di V' e di Q'.

Se le articolazioni sono in B e C, e se vi ha incastramento reciproco dei due pezzi in A, le reazioni R ed R' passano rispettivamente pei punti B e C, e sono nulli i momenti M ed M'. Le sei equazioni (1) e (2) del precedente numero contengono le sette incognite Q, Q', Q'', V, V', V'' ed M''; cosicchè manca un'equazione per la completa loro determinazione. Non essendo nulle le rotazioni m ed m' delle sezioni iniziali corrispondenti ai due punti B e C, invece delle formole (3) e (4) del precedente numero, si avranno rispettivamente le formole $(3)^{II}$ e $(4)^{III}$ esprimenti, la prima la rotazione della sezione retta corrispondente al punto A nell'ipotesi che questa sezione appartenga al sostegno principale AB, e la seconda la rotazione della sezione retta determinata dallo stesso punto, ma corrispondente al solido AC. Siccome poi, a motivo del mutuo incastramento dei due corpi in A, le accennate rotazioni devono avere lo stesso valore, si ottiene subito l'equazione

$$m + \int_{b'}^{b} \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{dv} dv - m' - \int_{0}^{b} \frac{M_{1x}}{E_1 I_{1x}} dv_1 = 0 \qquad (9)^{VI}.$$

Scrivendo le formole determinatrici degli spostamenti $\Delta v''$ e $\Delta \xi''$ del punto A, considerato siccome appartenente all'asse AB del sostegno principale, si otterranno le $(5)^{II}$ e $(6)^{II}$ invece delle formole (5) e (6) del precedente numero; e analogamente, scrivendo le formole determinatrici degli stessi spostamenti e per lo stesso punto, considerato come

appartenente all'asse A C del tirante, si avranno le formole (7)^{III} ed (8)^{III} invece delle formole (7) ed (8). Eguagliando fra di loro i due valori di $\Delta v''$ dati dalle formole (5)^{II} e (7)^{III} ed i due valori di $\Delta \xi''$ dati dalle formole (6)^{II} ed (8)^{III}, si ottengono le equazioni

$$ma + b(\tau - \tau_1) - \tau b' + \int_{b'}^{b} \left(\frac{Y}{E_t \Omega} \frac{d\xi}{dv} + \frac{Z}{E_l \Omega} \right) dv$$

$$- \int_0^b \frac{Z_1}{E_{l1} \Omega_1} dv_1 + \int_{b'}^{b} (a - \zeta) \frac{M_x}{E_l I_x} \frac{d\sigma}{dv} dv = 0 \qquad (10)^{VI},$$

$$- m(b - b') + m' b + \tau a + \int_{b'}^{b} \left(- \frac{Y}{E_t \Omega} + \frac{Z}{E_l \Omega} \frac{d\xi}{dv} \right) dv$$

$$+ \int_0^b \frac{Y_1}{E_{lt} \Omega_1} dv_1 - \int_{b'}^{b} (b - v) \frac{M_x}{E_l I_x} \frac{d\sigma}{dv} dv$$

$$+ \int_0^b (b - v_1) \frac{M_{1x}}{E_{l1} I_{1x}} dv_1 = 0 \qquad (11)^{IV}.$$

Sostituendo nella (11)^{IV} il valore di m' che si ricava dalla (9)^{VI} e riducendo, si ha l'equazione

$$mb' + \tau a + \int_{b'}^{b} \left(- \frac{Y}{E_t \Omega} + \frac{Z}{E_l \Omega} \frac{d\xi}{dv} \right) dv$$

$$+ \int_0^b \frac{Y_1}{E_{lt} \Omega_1} dv_1 + \int_{b'}^{b} v \frac{M_x}{E_l I_x} \frac{d\sigma}{dv} dv - \int_0^b v_1 \frac{M_{1x}}{E_{l1} I_{2x}} dv_1 = 0;$$

ed eliminando fra questa e la $(10)^{IV}$ la rotazione m, si ottiene l'equazione finale

$$b\,b'\,(\tau-\tau_1)-(a^2+b'^2)\tau+b'\int_{b'}^{b}\left(\frac{Y}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{dv}+\frac{Z}{E_1\Omega}\right)dv$$

$$-a\int_{b'}^{b}\left(-\frac{Y}{E_1\Omega}+\frac{Z}{E_1\Omega}\frac{d\zeta}{dv}\right)dv-a\int_{0}^{b}\frac{Y_1}{E_{11}\Omega_1}dv_1-b'\int_{0}^{b}\frac{Z_1}{E_{11}\Omega_1}dv_1$$

$$+\int_{b'}^{b}\left[b'(a-\xi)-av\right]\frac{M_x}{E_1I_x}\frac{d\sigma}{dv}dv+a\int_{0}^{b}v_1\frac{M_{1x}}{E_{11}I_{1x}}dv_1=0$$

Se ora in quest'equazione si mettono in evidenza le incognite col porre in esse i valori di Y, Z, M_x, Y_1, Z_1 ed M_{1x} dati dalle formole (12) e (13) del precedente numero, si ottiene una relazione fra le tre quantità Q'', V'' ed M''. Questa relazione, la terza delle equazioni (1) del precedente numero e la terza delle equazioni (2), serviranno alla determinazione delle ultime indicate quantità. Dalle prime due delle equazioni (1) si potranno dopo ricavare i valori di V e di Q, e dalle prime due delle equazioni (2) si potranno dedurre i valori di V' e di Q'.

Finalmente ci resta da esaminare l'ultimo caso, ossia quello in cui vi sono articolazioni nei punti B, C ed A. La reazione R passa per B, le due reazioni R' ed R'' passanno rispettivamente pei punti C ed A, e quindi sono nulli i tre momenti M, M' ed M''. Le incognite del problema si riducono adunque alle sei forze Q, Q', Q'', V, V' e V'', e bastano a determinarle le sei equazioni (1) e (2) del precedente numero, ossia le sei equazioni somministrate dalla statica dei corpi rigidi.

21. Determinazione delle mutue azioni fra più pezzi curvi assieme rilegati. — Un interessante problema, svolto dal signor Bresse nel suo lavoro intitolato *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes*, è quello che il chiarissimo autore propone come esempio, per spiegare il metodo da seguirsi nella determinazione delle mutue azioni che hanno luogo fra diversi pezzi curvi, rilegati fra di loro in modo da costituire un sistema le cui differenti parti sono

solidarie le une colle altre, e coi loro assi in uno stesso piano il quale contiene pure tutte le forze sollecitanti.

Nell'esempio trattato dal signor Bresse è preso in considerazione un sistema di tre pezzi, i cui assi sono rappresentati nelle curve A D C E B, D F ed E G (*Fig.* 22). Si suppone che i punti A, B, F e G siano appoggi fissi senza incastramenti, o, in altri termini, che siano invariabili le coordinate di questi punti, ma che le direzioni delle tangenti alle dette curve nei punti stessi possano variare pel fatto delle deformazioni; e si ammette che nei punti D ed E siavi incastramento reciproco dei pezzi D F ed E G colla centina A D C E B; di maniera che, al sopravvenire di deformazioni, risulti invariabile l'angolo sotto il quale i detti tre pezzi s'incontrano. Le incognite del problema sono le reazioni degli appoggi e le mutue azioni dei tre pezzi nei loro punti di collegamento, le quali tutte si trovano nel piano delle tre curve, giacchè noi supponiamo, come già abbiamo fatto per tutti i problemi stati trattati in questo capitolo, che la flessione di ciascuno dei tre archi che consideriamo si produca in questo stesso piano.

Le reazioni dei punti A, B, F e G sono quattro forze passanti per questi punti, e ciascuna di esse si può decomporre in due parallele agli assi coordinati. A ciascuna delle mutue azioni in D ed E è necessario sostuire due forze parallele agli assi coordinati ed una coppia.

L'origine delle coordinate si prenda in A, l'asse delle ascisse ζ si assuma nella direzione della corda della centina ADCEB, l'asse delle ordinate sia la retta Aυ perpendicolare ad AB, e si chiamino:

$2a$ la lunghezza $\overline{AB}$;

ζ', υ', ζ'', υ'', ζ''', υ''' e ζ^{IV}, υ^{IV} le coordinate dei punti F, D, E e G;

$\Delta\zeta''$, $\Delta\upsilon''$, $\Delta\zeta'''$ e $\Delta\upsilon'''$ le variazioni delle coordinate dei punti D ed E;

m, m', m^{IV} ed m^{V} le rotazioni delle sezioni rette dei tre archi considerati in corrispondenza degli appoggi A, F, G e B;

m'' ed m''' le rotazioni delle sezioni rette degli stessi archi in D ed E, le quali rotazioni, per gli ammessi incastramenti, sono eguali, in D ed E, tanto per la centina principale A D C E B quanto per gli archi D F ed E G;

Q, Q', Q'', Q''', Q^{IV} e Q^{V} le componenti parallele alle asse Aζ delle reazioni degli appoggi e delle mutue azioni in A, F, D, E, G e B,

V, V', V'', V''', V^{IV} e V^{V} le componenti, parallele all'asse Aυ, delle stesse forze;

M'' ed M''' i momenti delle coppie corrispondenti agli incastramenti in D ed E;

F una qualunque delle forze estrinseche applicate alla centina ACB, indipendentemente dalle reazioni incognite su essa operanti,

δ e λ gli angoli di questa forza colle parti positive degli assi coordinati Aζ ed Aυ,

F_1, δ_1 e λ_1 le quantità analoghe per una forza estrinseca qualunque applicata all'arco D F ed

F_2, δ_2 e λ_2 le stesse quantità per una forza estrinseca operante sull'arco GE;

Ff, F_1f_1 ed F_2f_2 i momenti delle forze F, F_1 ed F_2, il primo relativamente al punto A, il secondo relativamente al punto F ed il terzo relativamente al punto G.

Alle lettere Y, Z, M_x, E_1, E_t, Ω, I_x, ζ_o, ζ_1, ζ, υ_o, υ_1, υ, σ_o, σ_1, σ, m_o, m_1 e τ conserveremo i significati che loro vennero attribuiti nelle formole del numero 11; e, per distinguere quelle che si riferiscono alla centina principale da quelle che si riferiscono agli archi DF ed EG, stabiliremo di non apporre alcun nuovo indice alle prime e di apporvi rispetttivamente gli indici 1 e 2 alle altre.

Applicando ai tre archi ACB, DF ed EG le tre condizioni d'equilibrio della statica per un sistema di forze contenute in un sol piano, col dire che per ciascuno degli indicati archi devono essere nulle, le due somme algebriche delle componenti delle forze estrinseche (comprendendo fra queste anche le reazioni alle estremità) parallele agli assi coordinati Aζ ed Aυ, e la somma algebrica dei momenti di rotazione delle stesse forze intorno a tre rette perpendicolari al piano coordinato ζAυ, abbiamo: per l'equilibrio della centina ACB, quando si prendano i momenti intorno alla retta proiettata in A,

$$\left.\begin{aligned} &Q+Q''+Q'''+Q^{v}+\Sigma F\cos\delta=0\\ &V+V''+V'''+V^{v}+\Sigma F\cos\lambda=0\\ &-Q''\upsilon''+V''\zeta''-M''-Q'''\upsilon'''+V'''\zeta'''-M'''+2aV^{v}+\Sigma Ff=0 \end{aligned}\right\} \quad (1);$$

per l'equilibrio dell'arco DF, assumendo i momenti intorno alla retta proiettata in F,

$$\left.\begin{aligned} &Q'-Q''+\Sigma F_1\cos\delta_1=0\\ &V'-V''+\Sigma F_1\cos\lambda_1=0\\ &-Q''(\upsilon'-\upsilon'')+V''(\zeta'-\zeta'')+M''+\Sigma F_1f_1=0 \end{aligned}\right\} \quad (2);$$

per l'equilibrio dell'arco EG, prendendo i momenti intorno alla retta proiettata nel punto G,

$$\left.\begin{aligned} &-Q''' + Q^{IV} + \Sigma F_2 \cos \delta_2 = 0 \\ &-V''' + V^{IV} + \Sigma F_2 \cos \lambda_2 = 0 \\ &-Q'''(v^{IV} - v''') + V'''(\xi^{IV} - \zeta''') + M''' + \Sigma F_2 f_2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

Le equazioni (1) (2) e (3), or ora stabilite, costituiscono nove relazioni fra le quattordici incognite Q, Q', Q'', Q''', Q^{IV}, Q^{V}, V, V', V'', V''', V^{IV}, V^{V}, M'' ed M''' ; e quindi non sono sufficienti per la loro determinazione.

Per rendere determinato il problema è necessario tener conto delle deformazioni che tendono manifestarsi nelle estremità e nei punti di giunzione degli archi considerati. Applicando la formola (5) del numero 11 alla determinazione delle rotazioni delle sezioni rette corrispondenti ai punti D, E, B, D e G col prendere come sezioni d'origine, quella del punto A dell'arco AD, quella del punto D dell'arco DE, quella del punto E dell'arco EB, quella del punto F dell'arco DF e quella del punto E dell'arco EG, abbiamo le cinque equazioni

$$\left.\begin{aligned} m'' &= m + \int_0^{\xi''} \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\xi} d\zeta \\ m''' &= m'' + \int_{\xi''}^{\xi'''} \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\xi} d\zeta \\ m^{V} &= m''' + \int_{\xi'''}^{2a} \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\xi} d\zeta \\ m'' &= m' + \int_{\zeta'}^{\zeta''} \frac{M_{1x}}{E_{11} I_{1x}} \frac{d\sigma_1}{d\zeta_1} d\zeta_1 \\ m^{IV} &= m''' + \int_{\zeta'''}^{\zeta^{IV}} \frac{M_{2x}}{E_{21} I_{2x}} \frac{d\sigma_2}{d\zeta_2} d\zeta_2 \end{aligned}\right\} \quad (4),$$

nelle quali sono incognite le sei rotazioni m, m', m'', m''', m^{IV} ed m^{V}.

Osservando che sono immobili i punti estremi A e B della centina principale, che sono pure immobili i due punti estremi F e G degli archi DF ed EG, l'applicazione delle formole (1) e (2) del già citato numero 11, fatta per l'estremo D dell'arco AD colla sezione d'origine in A, per l'estremo E dell'arco DE colla sezione d'origine in D, per l'estremo B dell'arco EB colla sezione d'origine in E, per l'estremo D dell'arco DF colla sezione d'origine in F e finalmente per l'estremo G dell'arco EG colla sezione d'origine in E, ci porta a stabilire le seguenti relazioni

$$\Delta v'' = m\zeta'' + \tau v'' + \int_0^{\zeta''} \left(\frac{Y}{E_t\Omega} + \frac{Z}{E_l\Omega}\frac{dv}{d\zeta}\right) d\zeta + \int_0^{\zeta''} (\zeta'' - \zeta)\frac{M_x}{E_l I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\, d\zeta,$$

$$\Delta\zeta'' = -mv'' + \tau\zeta'' + \int_0^{\zeta''} \left(-\frac{Y}{E_t\Omega}\frac{dv}{d\zeta} + \frac{Z}{E_l\Omega}\right) d\zeta - \int_0^{\zeta''} (v'' - v)\frac{M_x}{E_l I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\, d\zeta,$$

$$\Delta v''' = \Delta v'' + m''(\zeta''' - \zeta'') + \tau(v''' - v'') + \int_{\zeta''}^{\zeta'''} \left(\frac{Y}{E_t\Omega} + \frac{Z}{E_l\Omega}\frac{dv}{d\zeta}\right) d\zeta + \int_{\zeta''}^{\zeta'''} (\zeta''' - \zeta)\frac{M_x}{E_l I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\, d\zeta,$$

$$\Delta\zeta''' = \Delta\zeta'' - m''(v''' - v'') + \tau(\zeta''' - \zeta'') + \int_{\zeta''}^{\zeta'''} \left(-\frac{Y}{E_t\Omega}\frac{dv}{d\zeta} + \frac{Z}{E_l\Omega}\right) d\zeta - \int_{\zeta''}^{\zeta'''} (v''' - v)\frac{M_x}{E_l I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\, d\zeta,$$

$$
\left.
\begin{aligned}
0 &= \Delta v''' + m'''(2a - \zeta''') - \tau v''' \\
&+ \int_{\zeta'''}^{2a} \left(\frac{Y}{E_1 \Omega} + \frac{Z}{E_1 \Omega} \frac{dv}{d\zeta} \right) d\zeta + \int_{\zeta'''}^{2a} (2a - \zeta) \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta, \\
0 &= \Delta \zeta'' + m''' v''' + \tau (2a - \zeta''') \\
&+ \int_{\zeta'''}^{2a} \left(- \frac{Y}{E_1 \Omega} \frac{dv}{d\zeta} + \frac{Z}{E_1 \Omega} \right) d\zeta + \int_{\zeta'''}^{2a} \frac{M_x v}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta, \\
\Delta v'' &= m' (\zeta'' - \zeta') + \tau_1 (v'' - v') \\
&+ \int_{\zeta'}^{\zeta''} \left(\frac{Y_1}{E_{1_1} \Omega_1} + \frac{Z_1}{E_{1_1} \Omega_1} \frac{dv_1}{d\zeta_1} \right) d\zeta_1 + \int_{\zeta'}^{\zeta''} (\zeta'' - \zeta_1) \frac{M_{1x}}{E_{1_1} I_{1x}} \frac{d\sigma_1}{d\zeta_1} d\zeta_1, \\
\Delta \zeta'' &= - m' (v'' - v') + \tau_1 (\zeta'' - \zeta') \\
&+ \int_{\zeta'}^{\zeta''} \left(- \frac{Y_1}{E_{1_1} \Omega_1} \frac{dv_1}{d\zeta_1} + \frac{Z_1}{E_{1_1} \Omega_1} \right) d\zeta_1 - \int_{\zeta'}^{\zeta''} (v'' - v_1) \frac{M_{1x}}{E_{1_1} I_{1x}} \frac{d\sigma_1}{d\zeta_1} d\zeta_1, \\
0 &= \Delta v''' + m'''(\zeta^{IV} - \zeta''') + \tau_2 (v^{IV} - v''') \\
&+ \int_{\zeta'''}^{\zeta^{IV}} \left(\frac{Y_2}{E_{2_1} \Omega_2} + \frac{Z_2}{E_{2_1} \Omega_2} \frac{dv_2}{d\zeta_2} \right) d\zeta_2 + \int_{\zeta'''}^{\zeta^{IV}} (\zeta^{IV} - \zeta_2) \frac{M_{2x}}{E_{2_1} I_{2x}} \frac{d\sigma_2}{d\zeta_2} d\zeta_2, \\
0 &= \Delta \zeta''' - m'''(v^{IV} - v''') + \tau_2 (\zeta^{IV} - \zeta''') \\
&+ \int_{\zeta'''}^{\zeta^{IV}} \left(- \frac{Y_2}{E_{2_1} \Omega_2} \frac{dv_2}{d\zeta_2} + \frac{Z_2}{E_{2_1} \Omega_2} \right) d\zeta_2 - \int_{\zeta'''}^{\zeta^{IV}} (v^{IV} - v_2) \frac{M_{2x}}{E_{2_1} I_{2x}} \frac{d\sigma_2}{d\zeta_2} d\zeta_2
\end{aligned}
\right\} \quad (5)
$$

In queste dieci equazioni, oltre le incognite che si trovano nelle equazioni (1), (2) e (3), le quali sono implicitamente contenute nei valori di Y, Y_1, Y_2, Z, Z_1, Z_2, M_x, M_{1x} ed M_{2x}, vennero introdotti gli spostamenti $\Delta\zeta''$, $\Delta\upsilon''$, $\Delta\zeta'''$ e $\Delta\upsilon'''$ e le rotazioni m, m', m'' ed m''' che si trovano nelle equazioni (4). Abbiamo adunque in tutto le ventiquattro incognite Q, Q', Q'', Q''', Q^{IV}, Q^V, V, V', V'', V''', V^{IV}, V^V, M'', M''', m, m', m'', m''', m^{IV}, m^V, $\Delta\zeta''$, $\Delta\upsilon''$, $\Delta\zeta'''$ e $\Delta\upsilon'''$ e le ventiquattro equazioni (1), (2), (3), (4) e (5) per determinarle. Le ultime dieci incognite si trovano soltanto nelle quindici equazioni (4) e (5), ed eliminandole, ci risulteranno quindi le cinque equazioni le quali, unite alle nove equazioni (1), (2) e (3), serviranno alla determinazione delle incognite Q, Q', Q'', Q''', Q^{IV}, Q^V, V, V', V'', V''', V^{IV}, V^V, M'', ed M'''.

Ricavando dalle equazioni (4) i valori di

$$\int_0^{\zeta''} \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta, \quad \int_{\zeta''}^{\zeta'''} \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta, \quad \int_{\zeta'''}^{2a} \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta,$$

$$\int_{\zeta'}^{\zeta''} \frac{M_{1x}}{E_{1_1} I_{1x}} \frac{d\sigma_1}{d\zeta_1} d\zeta_1 \quad \text{e} \quad \int_{\zeta'''}^{\zeta_1^{IV}} \frac{M_{2x}}{E_{2_1} I_{2x}} \frac{d\sigma_2}{d\zeta_2} d\zeta_2,$$

osservando che ζ'', υ'', ζ''', υ''', $2a$ e υ^{IV} sono quantità costanti, e ponendo per brevità di scritturazione

$$\left.\begin{aligned} \frac{Y}{E_1\Omega} + \frac{Z}{E_1\Omega}\frac{d\upsilon}{d\zeta} - \frac{M_x \zeta}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta} &= \Upsilon \\ -\frac{Y}{E_1\Omega}\frac{d\upsilon}{d\zeta} + \frac{Z}{E_1\Omega} + \frac{M_x \upsilon}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta} &= \Xi \end{aligned}\right\} \quad (6),$$

coll'avvertenza di mettere gli indici 1 e 2 alle quantità Υ e Ξ quando si riferiscono rispettivamente agli archi DF ed EG, abbiamo che le equazioni (5) si riducono a

$$
\left.
\begin{aligned}
\Delta v'' &= m''\xi'' + \tau v'' + \int_0^{\xi''} \Upsilon \, d\xi \\
\Delta \xi'' &= -m'' v'' + \tau \xi'' + \int_0^{\xi''} \Xi \, d\xi \\
\Delta v''' - \Delta v'' &= m'''\xi''' - m''\xi'' + \tau(v''' - v'') + \int_{\xi''}^{\xi'''} \Upsilon \, d\xi \\
\Delta \xi''' - \Delta \xi'' &= -m''' v''' + m'' v'' + \tau(\xi''' - \xi'') + \int_{\xi''}^{\xi'''} \Xi \, d\xi \\
-\Delta v'' &= 2a m^{v} - m'''\xi''' - \tau v''' + \int_{\xi'''}^{2a} \Upsilon \, d\xi \\
-\Delta \xi''' &= m''' v''' + \tau(2a - \xi''') + \int_{\xi'''}^{2a} \Xi \, d\xi \\
\Delta v'' &= m''\xi'' - m'\xi' + \tau_1(v'' - v') + \int_{\xi'}^{\xi''} \Upsilon_1 \, d\xi_1 \\
\Delta \xi'' &= -m'' v'' + m' v' + \tau_1(\xi'' - \xi') + \int_{\xi'}^{\xi''} \Xi_1 \, d\xi_1 \\
-\Delta v''' &= m^{IV}\xi^{IV} - m'''\xi''' + \tau_2(v^{IV} - v''') + \int_{\xi'''}^{\xi^{IV}} \Upsilon_2 \, d\xi_2 \\
-\Delta \xi''' &= -m^{IV} v^{IV} + m''' v''' + \tau_2(\xi^{IV} - \xi''') + \int_{\xi'''}^{\xi^{IV}} \Xi_2 \, d\xi_2
\end{aligned}
\right\} \quad (7).
$$

Queste dieci equazioni tengono il posto delle equazioni (5) e quindi, combinate colle cinque equazioni (4), vengono in acconcio per eli-

minare le dieci incognite ausiliarie m, m', m'', m''', m^{IV}, m^{V}, $\Delta\zeta''$, $\Delta v''$, $\Delta\zeta'''$ e $\Delta v'''$ e per dedurre le cinque equazioni le quali, unite alle nove equazioni (1), (2) e (3), devono servire alla determinazione delle quattordici incognite Q, Q', Q'', Q''', Q^{IV}, Q^{V}, V, V', V'', V''', V^{IV}, V^{V}, M'' ed M'''.

Sommando la seconda, la quarta e la sesta delle equazioni (7), immediatamente si ottiene l'equazione

$$2a\tau + \int_0^{2a} \Xi\, d\xi = 0 \qquad (8),$$

la quale costituisce una delle cinque equazioni finali indipendenti dalle incognite ausiliarie.

Sottraendo l'una dall'altra la seconda e l'ottava delle equazioni (7) moltiplicate per ζ', si ha

$$-m'\zeta' v' + \zeta'\zeta''(\tau - \tau_1) + \tau_1 \zeta'^2 + \zeta' \int_0^{\zeta''} \Xi\, d\xi - \zeta' \int_{\zeta'}^{\zeta''} \Xi_1\, d\xi_1 = 0 \qquad (I),$$

Analogamente, togliendo l'una dall'altra la prima e la settima delle stesse equazioni (7) moltiplicate per v', si trova

$$m'\zeta' v' + v' v''(\tau - \tau_1) + \tau_1 v'^2 + v' \int_0^{\zeta''} \Upsilon\, d\xi - v' \int_{\zeta'}^{\zeta''} \Upsilon_1\, d\xi_1 = 0 \qquad (II);$$

e sommando queste due equazioni risulta

$$(\zeta'\zeta'' + \upsilon'\upsilon'')(\tau - \tau_1) + (\zeta'^2 + \upsilon'^2)\,\tau_1$$

$$+ \int_0^{\zeta''} (\zeta'\Xi + \upsilon'\Upsilon)\,d\zeta - \int_{\zeta'}^{\zeta''} (\zeta'\Xi_1 + \upsilon'\Upsilon_1)\,d\zeta_1 = 0 \qquad (9),$$

la quale è la seconda delle equazioni finali indipendenti dalle incognite ausiliarie.

Moltiplicando la seconda, la quarta e la decima delle equazioni (7) per ζ^{IV} e quindi sommandole si giunge all'equazione

$$-m^{IV}\zeta^{IV}\upsilon^{IV} + \zeta'''\zeta^{IV}(\tau - \tau_2) + \tau_2\,\zeta^{IV^2}$$

$$+ \zeta^{IV}\int_0^{\zeta'''} \Xi\,d\zeta + \zeta^{IV}\int_{\zeta'''}^{\zeta^{IV}} \Xi_2\,d\zeta_2 = 0 \qquad (III);$$

ed analogamente, moltiplicando la prima, la terza e la nona delle equazioni (7) per υ^{IV} e sommandole, si trova l'equazione

$$m^{IV}\zeta^{IV}\upsilon^{IV} + \upsilon'''\upsilon^{IV}(\tau - \tau_2) + \tau_2\,\upsilon^{IV^2}$$

$$+ \upsilon^{IV}\int_0^{\zeta'''} \Upsilon\,d\zeta + \upsilon^{IV}\int_{\zeta'''}^{\zeta^{IV}} \Upsilon_2\,d\zeta_2 = 0 \qquad (IV).$$

Finalmente la somma delle due ultime equazioni dà

$$(\zeta'''\zeta^{IV} + \upsilon'''\upsilon^{IV})(\tau - \tau_2) + (\zeta^{IV^2} + \upsilon^{IV^2})\,\tau_2$$

$$\int_0^{\zeta'''} (\zeta^{IV}\Xi + \upsilon^{IV}\Upsilon)\,d\zeta + \int_{\zeta'''}^{\zeta^{IV}} (\zeta^{IV}\Xi_2 + \upsilon^{IV}\Upsilon_2)\,d\zeta_2 = 0 \qquad (10),$$

la quale è la terza delle equazioni finali indipendenti dalle incognite ausiliarie.

Sommando la quarta, la sesta e l'ottava delle equazioni (7) e quindi moltiplicando il risultato per $2a - \zeta'$, si ottiene

$$m' v' (2a - \zeta') + \tau (2a - \zeta'') (2a - \zeta') + \tau_1 (\zeta'' - \zeta') (2a - \zeta')$$

$$+ (2a - \zeta') \left(\int_{\zeta''}^{2a} \Xi \, d\zeta + \int_{\zeta'}^{\zeta''} \Xi_1 \, d\zeta_1 \right) = 0 \qquad \text{(V)};$$

e sommando la terza, la quinta e la settima delle equazioni (7) e moltiplicando dopo il risultato per $- v'$, si ha

$$- m' v' (2a - \zeta') - 2a v' (m^{v} - m') + \tau v' v'' - \tau_1 (v'' - v') v'$$

$$- v' \left(\int_{\zeta''}^{2a} \Upsilon \, d\zeta + \int_{\zeta'}^{\zeta''} \Upsilon_1 \, d\zeta_1 \right) = 0 \qquad \text{(VI)}.$$

Sommando membro a membro le due ultime equazioni, risulta

$$\left.\begin{aligned} & - 2a v' (m^{v} - m') + \tau \left[(2a - \zeta'') (2a - \zeta') + v' v' \right] \\ & + \tau_1 \left[(\zeta'' - \zeta') (2a - \zeta') - (v'' - v') v' \right] \\ & + \int_{\zeta''}^{2a} \left[(2a - \zeta') \Xi - v' \Upsilon \right] d\zeta + \int_{\zeta'}^{\zeta''} \left[(2a - \zeta') \Xi_1 - v' \Upsilon_1 \right] d\zeta_1 \end{aligned}\right\} = 0 \qquad \text{(VII)},$$

e quest'equazione contiene ancora le due incognite ausiliarie m^{v} ed m'. Per eliminare queste due incognite si sommino la seconda, la terza e la quarta delle equazioni (4). Così facendo si trova

$$m^{v} - m' = \int_{\zeta''}^{2a} \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\xi} d\zeta + \int_{\zeta'}^{\zeta''} \frac{M_{1x}}{E_1 I_{1x}} \frac{d\sigma_1}{d\xi_1} d\xi_1;$$

e, ponendo questo valore di $m^{v} - m'$ nell'ultima equazione, si ottiene

$$\left.\begin{aligned} &\tau\left[(2a-\zeta'')(2a-\zeta')+v'v''\right]+\tau_1\left[(\zeta''-\zeta')(2a-\zeta')-(v''-v')v'\right] \\ &+\int_{\zeta''}^{2a}\left[(2a-\zeta')\,\Xi - v'\Upsilon - 2av'\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}\right]d\zeta \\ &+\int_{\zeta'}^{\zeta''}\left[(2a-\zeta')\,\Xi_1 - v'\Upsilon_1 - 2av'\frac{M_{1x}}{E_1 I_{1x}}\frac{d\sigma_1}{d\xi_1}\right]d\xi_1 \end{aligned}\right\} = 0 \qquad (11)$$

per quarta delle equazioni finali indipendenti dalle incognite ausiliarie.

Togliendo dalla sesta la decima delle equazioni (7) e moltiplicando la differenza per $2a - \zeta^{IV}$, si ha

$$m^{IV} v^{IV}(2a-\zeta^{IV}) + \tau(2a-\zeta''')(2a-\zeta^{IV}) - \tau_2(\zeta^{IV}-\zeta''')(2a-\zeta^{IV}) + (2a-\zeta^{IV})\left(\int_{\zeta'''}^{2a}\Xi\,d\zeta - \int_{\zeta'''}^{\zeta^{IV}}\Xi_2\,d\xi_2\right) = 0 \qquad \text{(VIII)};$$

e, togliendo dalla quinta la nona delle stesse equazioni (7) dopo averle moltiplicate per $-v^{IV}$, risulta

$$-m^{v} v^{IV}(2a-\zeta^{IV}) - 2a\,v^{IV}(m^{v}-m^{IV}) + \tau\,v'''v^{IV} + \tau_2(v^{IV}-v''')v^{IV} - v^{IV}\left(\int_{\zeta'''}^{2a}\Upsilon\,d\zeta - \int_{\zeta'''}^{\zeta^{IV}}\Upsilon_2\,d\xi_2\right) = 0 \qquad \text{(IX)}.$$

Sommando ora le ultime due equazioni, si ottiene

$$\left\{\begin{array}{l} -2a\,v^{IV}(m^{V}-m^{IV})+\tau\left[(2a-\zeta''')(2a-\zeta^{IV})+v'''\,v^{IV}\right] \\ -\tau_2\left[(\zeta^{IV}-\zeta''')(2a-\zeta^{IV})-(v^{IV}-v''')\,v^{IV}\right] \\ +\displaystyle\int_{\zeta'''}^{2a}\left[(2a-\zeta^{IV})\Xi-v^{IV}\Upsilon\right]d\zeta-\int_{\zeta'''}^{\zeta^{IV}}\left[(2a-\zeta^{IV})\Xi_2-v^{IV}\Upsilon_2\right]d\zeta_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} =0 \\ (X), \end{array}$$

ed in quest'equazione si trovano ancora le due incognite ausiliarie m^{IV} ed m^{V}, che bisogna eliminare. Per raggiungere lo scopo, dalla terza delle equazioni (4) si sottragga la quinta onde dedurre

$$m^{V}-m^{IV}=\int_{\zeta'''}^{2a}\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}d\zeta-\int_{\zeta'''}^{\zeta^{IV}}\frac{M_{2x}}{E_{21} I_{2x}}\frac{d\sigma_2}{d\zeta_2}d\zeta_2,$$

e questo valore della differenza $m^{V}-m^{IV}$ si ponga nell'ultima equazione, la quale porta a trovare

$$\left\{\begin{array}{l} \tau\left[(2a-\zeta''')(2a-\zeta^{IV})+v'''v^{IV}\right] \\ -\tau_2\left[(\zeta^{IV}-\zeta''')(2a-\zeta^{IV})-(v^{IV}-v''')\,v^{IV}\right] \\ +\displaystyle\int_{\zeta'''}^{2a}\left[(2a-\zeta^{IV})\Xi-v^{IV}\Upsilon-2a v^{IV}\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\right]d\zeta \\ -\displaystyle\int_{\zeta'''}^{\zeta^{IV}}\left[(2a-\zeta^{IV})\Xi_2-v^{IV}\Upsilon_2-2a\,v^{IV}\frac{M_{2x}}{E_{21} I_{2x}}\frac{d\sigma_2}{d\zeta_2}\right]d\zeta_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} =0 \\ (12) \end{array}$$

per quinta delle equazioni finali indipendenti dalle incognite ausiliarie.

Le equazioni (8), (9), (10), (11) e (12) sono, sotto forma simbolica, le cinque equazioni finali (*d*); e le quattordici incognite Q,

(*d*) Applicando al punto B della centina principale A C B l'equazione (2) del numero 11 coll'esprimere che i punti A e B sono fissi, ed avendo riguardo al valore di Ξ dato dalla seconda delle equazioni (6) di questo numero, si cade sull'equazione finale (8); cosicchè quest'ultima è l'espressione dell'invariabilità della distanza dei due punti A e B.

Trovando, mediante la formola (2) del numero 11, lo spostamento $\Delta\zeta''$ del punto D dell'arco A D e quindi lo spostamento $\Delta\zeta''$ del punto D dell'arco F D, nell'ipotesi che il punto F possa prendere nel senso dell'asse $A\zeta$ lo spostamento iniziale $\Delta\zeta'$, eguagliando i due valori di $\Delta\zeta''$ così ottenuti, avendo riguardo alla seconda delle equazioni (6) non che alla prima ed alla quarta delle equazioni (4), ricavando dall'equazione risultante il valore di $\Delta\zeta'$ e moltiplicandolo per ζ', si ha il primo membro dell'equazione (I) per valore del prodotto $\zeta'\Delta\zeta'$. Analogamente, applicando la formola (1) del citato numero 11 alla determinazione dello spostamento $\Delta\upsilon''$ del punto D dell'arco A D e quindi alla determinazione dello spostamento del punto D dell'arco F D nell'ipotesi che il punto F sia soggetto allo spostamento iniziale $\Delta\upsilon'$, eguagliando fra di loro i due valori di $\Delta\upsilon''$, avendo riguardo alla prima delle equazioni (6) non che alla prima ed alla quarta delle equazioni (4), ricavando dall'equazione risultante il valore di $\Delta\upsilon'$ e moltiplicandolo per υ', si trova che il prodotto $\upsilon'\Delta\upsilon'$ non è altro che il primo membro dell'equazione (II). Il primo membro dell'equazione (9), ottenuta col sommare membro a membro le equazioni (I) e (II), vale adunque la somma

$$\zeta'\Delta\zeta' + \upsilon'\Delta\upsilon',$$

e, essendo nullo il suo secondo membro, essa indica che è nulla l'ultima indicata somma. Ora chiamando l' la distanza fra i due punti A ed F, si ha

$$l'^2 = \zeta'^2 + \upsilon'^2,$$

e, siccome la caratteristica Δ designa una variazione che noi teoricamente consideriamo come infinitamente piccola, la differenziazione dell'ultima relazione dà

$$l'\Delta l' = \zeta'\Delta\zeta' + \upsilon'\Delta\upsilon'.$$

Dall'essere nulla la somma $\zeta'\Delta\zeta' + \upsilon'\Delta\upsilon'$ consegue che è nullo il prodotto $l'\Delta l'$, e, non essendo zero l', ne deriva che è zero la variazione $\Delta l'$, ossia che

Q', Q'', Q''', Q^{IV}, Q^{V}, V, V', V'', V''', V^{IV}, V^{V}, M'' ed M''' si trovano implicitamente nei momenti M_x, M_{1x} ed M_{2x} non che nelle espressioni

si mantiene invariabile la distanza dei due punti A ed F; cosicchè l'equazione finale (9) è l'espressione dell'invariabilità della lunghezza della retta $\overline{AF}$.

Calcolando, mediante la formola (2) del numero 11, lo spostamento $\Delta\zeta''$ del punto D dell'arco AD, lo spostamento $\Delta\zeta'''$ del punto E dell'arco DE e lo spostamento $\Delta\zeta^{IV}$ del punto G dell'arco EG, si ottengono tre formole, la prima determinante il valore di $\Delta\zeta''$, la seconda il valore di $\Delta\zeta'''$ e la terza il valore di $\Delta\zeta^{IV}$. Ponendo nella seconda il valore di $\Delta\zeta''$ dato dalla prima, e quindi nella terza il valore di $\Delta\zeta'''$ così ottenuto, avendo riguardo alla seconda delle equazioni (6), non che alla prima, alla seconda ed alla quinta delle equazioni (4), si trova il valore di $\Delta\zeta^{IV}$. Questo valore di $\Delta\zeta^{IV}$, moltiplicato per ζ^{IV}, dà il primo membro dell'equazione (III). Analogamente, applicando la formola (1) del numero 11 per calcolare gli spostamenti $\Delta v''$, $\Delta v'''$ e Δv^{IV} del punto D dell'arco AD, del punto E dell'arco DE e del punto G dell'arco EG, ricavando il valore di Δv^{IV} con un procedimento simile a quello stato indicato per trovare il valore di $\Delta\zeta^{IV}$, avendo riguardo alla prima delle equazioni (6) ed alla prima, seconda e quinta delle equazioni (4) e moltiplicando per v^{IV} il valore di Δv^{IV}, si trova che il prodotto $v^{IV}\Delta v^{IV}$ non è altro che il primo membro dell'equazione (IV). Segue da ciò che il primo membro dell'equazione (10), ottenuta col sommare i due primi membri delle equazioni (III) e (IV), non è altro che la somma

$$\zeta^{IV}\Delta\zeta^{IV} + v^{IV}\Delta v^{IV}$$

e che questa somma deve essere nulla. Ora, dicendo l^{IV} la distanza fra i due punti A e G, si ha

$$l^{IV\,2} = \zeta^{IV\,2} + v^{IV\,2},$$

la qual relazione, designando con Δ una variazione che teoricamente consideriamo come infinitamente piccola, conduce a

$$l^{IV}\Delta l^{IV} = \zeta^{IV}\Delta\zeta^{IV} + v^{IV}\Delta v^{IV}.$$

Essendo nullo il secondo membro di quest'equazione deve anche essere nullo i primo, ossia il prodotto $l^{IV}\Delta l^{IV}$; e, siccome l^{IV} non può avere un valore nullo, è giuocoforza conchiudere per la nullità di Δl^{IV}. L'equazione (10) adunque esprime l'invariabilità della lunghezza della retta $\overline{AG}$.

Trovando, mediante la formola (2) del numero 11, lo spostamento $\Delta\zeta''$ del punto D dell'arco FD, lo spostamento $\Delta\zeta'''$ del punto E dell'arco DE e lo spostamento $\Delta\zeta^{V}$ del punto B dell'arco EB, nell'ipotesi che questo punto non

complesse Ξ, Ξ_1, Ξ_2, T, T_1 ed T_2. Col metodo tenuto nei precedenti problemi non si avrebbe difficoltà a metterle in evidenza, e, una

sia fisso, si hanno tre formole, la prima delle quali dà il valore di $\Delta\zeta''$, la seconda il valore di $\Delta\zeta'''$ e la terza il valore di $\Delta\zeta^{v}$. Ponendo nella seconda di queste formole il valore di $\Delta\zeta''$ dato dalla prima e quindi nella terza il valore risultante di $\Delta\zeta'''$, avendo riguardo alla seconda delle equazioni (6), alla seconda ed alla quarta delle equazioni (4), si trova il valore di $\Delta\zeta^{v}$, il quale moltiplicato pel binomio $2a-\zeta'$, diventa eguale al primo membro dell'equazione (V). In modo affatto analogo, trovando, coll'applicazione della formola (1) del numero 11, gli spostamenti $\Delta\upsilon''$, $\Delta\upsilon'''$ e $\Delta\upsilon^{v}$ del punto D dell'arco FD, del punto E dell'arco DE e del punto B dell'arco EB, ricavando il valore di $\Delta\upsilon^{v}$ con un procedimento in tutto simile a quello stato indicato per determinare il valore di $\Delta\zeta^{v}$, avendo riguardo alla prima delle equazioni (6) non che alla seconda, alla terza ed alla quarta delle equazioni (4) e moltiplicando l'ottenuto valore di $\Delta\upsilon^{v}$ per $-\upsilon'$, si trova che il prodotto $-\upsilon'\Delta\upsilon^{v}$ rappresenta il primo membro dell'equazione (VI). Il primo membro adunque dell'equazione (VII), ottenuta col sommare i due primi membri delle equazioni (V) e (VI) e quindi anche il primo membro dell'equazione (11), la quale altro non è che la (VII) dopo la sostituzione del valore della differenza $m^{v}-m'$, non è altro che il binomio

$$(2a-\zeta')\Delta\zeta^{v}-\upsilon'\Delta\upsilon^{v}$$

il quale deve essere nullo. Ora, chiamando ζ'^{v} ed υ'^{v} le due coordinate del punto B rispetto a due assi coordinati $F\zeta'$ ed $F\upsilon'$ colla loro origine in F e rispettivamente paralleli agli assi primitivi $A\zeta$ ad $A\upsilon$,

l'^{v} la distanza fra i due punti F e B,

si ha la relazione

$$l'^{v2}=\zeta'^{v2}+\upsilon'^{v2},$$

la quale differenziata, e indicando con Δ una variazione che teoricamente consideriamo come infinitamente piccola, dà

$$l'^{v}\Delta l'^{v}=\zeta'^{v}\Delta\zeta'^{v}+\upsilon'^{v}\Delta\upsilon'^{v}.$$

Ma

$$\zeta'^{v}=\overline{HB}=2a-\zeta',$$

$$\upsilon'^{v}=\overline{FH}=-\upsilon',$$

$$\Delta\zeta'^{v}=\Delta\zeta_{v},$$

$$\Delta\upsilon'^{v}=\Delta\upsilon^{v},$$

e quindi il valore di $l'^{v}\Delta l'^{v}$ è dato da

$$l'^{v}\Delta l'^{v}=(2a-\zeta')\Delta\zeta^{v}-\upsilon'\Delta\upsilon^{v},$$

volta fatto questo, si avrebbero quattordici equazioni di primo grado fra le indicate quattordici incognite. I calcoli, indubitatamente sa-

Come già si è detto, essendo nullo il secondo membro di quest'ultima equazione, deve anche essere nullo il primo, ossia il prodotto $l'^{\nu} \Delta l'^{\nu}$; e siccome l'^{ν} non ha un valore nullo, ne deriva che è nullo quello di $\Delta l'^{\nu}$, e quindi l'equazione (11) non è altro che l'espressione dell'invariabilità della distanza $\overline{BF}$.

Determinando, mediante la formola (2) del numero 11, lo spostamento $\Delta\zeta''$ del punto E dell'arco GE e quindi lo spostamento $\Delta\xi^{\nu}$ del punto B dell'arco EB, si hanno due formole, la prima determinatrice di $\Delta\zeta''$ e la seconda determinatrice di $\Delta\xi^{\nu}$. Sostituendo nella seconda il valore di $\Delta\zeta'''$ dato dalla prima avendo riguardo alla seconda delle equazioni (6) ed alla quinta delle equazioni (4) si trova un tal valore di $\Delta\xi^{\nu}$ che, moltiplicato pel binomio $2a - \zeta'^{\nu}$, dà un prodotto precisamente eguale al primo membro dell'equazione (VIII). Così, impiegando la formola (1) del citato numero 11, prima per trovare lo spostamento $\Delta\upsilon''$ del punto E dell'arco GE, e poi per determinare lo spostamento $\Delta\upsilon^{\nu}$ del punto B dell'arco EB, ponendo nella formola determinatrice di $\Delta\upsilon^{\nu}$ il valore di $\Delta\upsilon''$, avendo riguardo alla prima delle equazioni (6), alla terza ed alla quinta delle equazioni (4), risulta un tal valore di $\Delta\upsilon^{\nu}$ che moltiplicato pel fattore $-\upsilon'^{\nu}$, somministra precisamente il primo membro dell'equazione (IX). Segue da ciò che il primo membro dell'equazione (X), ottenuto col sommare i due primi membri delle equazioni (VIII) e (IX), e quindi anche il primo membro dell'equazione (12), la quale altro non è che la (X) dopo la sostituzione del valore della differenza $m^{\nu} - m'^{\nu}$, non è altro che il binomio

$$(2a - \zeta'^{\nu})\,\Delta\zeta^{\nu} - \upsilon'^{\nu}\,\Delta\upsilon^{\nu},$$

e che questa somma deve essere zero. Ora, dicendo

ζ''^{ν} ed υ''^{ν} le due coordinate del punto B rispetto ai due assi coordinati $G\zeta''$ e $G\upsilon''$ colla loro origine in G e rispettivamente paralleli agli assi coordinati $A\zeta$ ed $A\upsilon$,

l''^{ν} la distanza fra i due punti G e B,

si ha l'equazione

$$l''^{2}_{\nu} = \zeta''^{\nu 2} + \upsilon''^{\nu 2},$$

la quale, differenziata come già venne fatto per le equazioni analoghe dei casi precedenti, conduce a

$$l''^{\nu}\,\Delta l''^{\nu} = \zeta''^{\nu}\,\Delta\zeta''^{\nu} + \upsilon''^{\nu}\,\Delta\upsilon''^{\nu}.$$

Ma

$$\zeta''^{\nu} = \overline{KB} = 2a - \zeta'^{\nu},$$

$$\upsilon''^{\nu} = \overline{GK} = -\upsilon'^{\nu},$$

$$\Delta\zeta''^{\nu} = \Delta\zeta_{\nu},$$

$$\Delta\upsilon''^{\nu} = \Delta\upsilon^{\nu};$$

rebbero lunghi, ma condurrebbero ad una completa risoluzione del problema.

22. **Generalizzazione dei procedimenti stati seguiti in questo capitolo per la determinazione delle forze incognite in alcuni casi particolari.** — Chi ha seguìto con attenzione i metodi che noi, ad imitazione del signor Bresse (1), abbiamo svolto in questo capitolo, facilmente potrà comprendere le indicazioni succinte che stiamo per dare intorno ad un caso più generale che li abbraccia tutti, e che dal detto chiarissimo autore venne pure considerato.

Consideriamo un assieme di pezzi, i cui assi si trovano tutti in un medesimo piano il quale contiene anche le forze esterne, e le cui sezioni rette sono tali da essere tutte tagliate dal detto piano secondo un asse principale centrale d'inerzia. Il sistema di tutti i pezzi sia formato da un pezzo principale MN (*Fig.* 23), al quale sono uniti, mediante articolazioni o incastramenti, alcuni pezzi secondari indipendenti gli uni dagli altri. Il pezzo principale abbia: a punti A costretti a muoversi su curve fisse senza attrito; b punti B fissi, b' dei quali siano appoggi fissi, come in B′, e b'' incastramenti, come in B″; $2c$ punti C riuniti due a due da tiranti articolati; d punti collegati a punti fissi mediante altrettanti pezzi di collegamento, d' di questi pezzi di

cosicchè il valore di $l'''_\nu \Delta l'''_\nu$ è dato da

$$l'''_\nu \Delta l'''_\nu = (2a - \zeta^{iv}) \Delta \zeta^v - \upsilon^{iv} \Delta \upsilon^v.$$

Il secondo membro di quest'equazione, per quanto sopra si è detto, ha un valore nullo, e quindi è nullo anche il primo. Non essendo nulla la lunghezza l'''_ν, deve essere nulla la variazione $\Delta l'''_\nu$, di modo che l'equazione (12) esprime l'invariabilità della distanza $\overline{BC}$.

Le spiegazioni che in questa nota furono date hanno messo in evidenza lo spirito del metodo di eliminazione stato seguìto nella deduzione delle cinque equazioni finali (8), (9), (10), (11) e (12), e chiaramente hanno fatto risultare il significato di queste equazioni.

(1) *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes* (anno 1854), capitolo terzo e § V.

Cours de mécanique appliquée, Première partie, Résistance des matériaux et stabilité des constructions (anno 1859), capitolo secondo e § II.

collegamento, come $D'D_1'$, siano articolati alle loro estremità D' e D_1', d'' siano, come $D''D_1''$, incastrati alla loro estremità fissa D_1'' ed articolati al loro punto d'incontro D'' col pezzo principale MN, d''' siano, come $D'''D_1'''$, articolati alla loro estremità fissa D_1''' ed incastrati all'altra estremità D''', finalmente d^{IV} siano, come $D^{IV}D_1^{IV}$, incastrati alle loro due estremità. Il sistema di tutti i pezzi sia geometricamente determinato, siano pur date in intensità e direzione tutte le forze che lo sollecitano, e vogliansi determinare le reazioni dei punti fissi non che le mutue azioni dei diversi pezzi gli uni sugli altri.

Per ciascuno dei punti costretto, come A, a rimanere su una curva senza attrito corrisponderà una reazione della quale non si dovrà cercare che l'intensità, giacchè la sua direzione è quella della normale alla curva; per ciascuna articolazione, come nei punti D', D_1', D'', D_1''' e C, e per ciascun punto, come in B', corrisponderanno due forze incognite, le quali altro non sono che le componenti della reazione totale secondo due assi coordinati; per ciascun incastramento, come in B'', D_1'', D''', D^{IV} e D_1^{IV}, oltre le dette due componenti, si dovrà considerare il momento di una coppia generata dal trasporto, in un punto determinato, della reazione totale, della quale preventivamente non si conosce il punto d'applicazione. Si sa infatti che la reazione totale, fra due pezzi articolati, passa pel centro attorno al quale può avvenire la rotazione; ma che non succede più la stessa cosa nel caso di un'unione rigida, la quale sia capace di impedire una rotazione attorno al punto in cui i due pezzi si riuniscono. Segue dal sin qui detto: che agli a punti del pezzo principale, costretti a muoversi su curve fisse senza attrito, corrisponderanno a incognite; che i b' appoggi del pezzo principale daranno origine a $2b'$ incognite, e che i b'' incastramenti saranno causa di $3b''$ incognite; che pei $2c$ punti riuniti due a due da tiranti si avranno $4c$ incognite; che l'esistenza dei d' pezzi articolati alle due estremità produrrà due incognite per ogni articolazione, quattro incognite per ogni pezzo e quindi $4d'$ incognite; che pei d'' pezzi e pei d''' pezzi, articolati in un estremo ed incastrati all'altro, si avranno $2d'' + 2d'''$ incognite per le articolazioni e $3d'' + 3d'''$ incognite per gli incastramenti; e finalmente che ai d^{IV} pezzi incastrati alle loro estremità corrisponderanno tre incognite per ciascuna estremità, sei incognite per ciascun pezzo ed in tutto $6d^{IV}$ incognite. Il

numero totale delle incognite del problema sarà adunque

$$a+2(b'+2c+2d'+d''+d''')+3(b''+d''+d'''+2d^{IV}) \quad (1).$$

Trovato il numero totale delle forze incognite del sistema, passiamo a vedere come si dovrebbero instituire le equazioni per determinarle.

La statica dei sistemi invariabili ci darà, innanzi tutto, tre equazioni d'equilibrio per ciascuno dei corpi del sistema. Ora, avendo noi il pezzo principale, c tiranti e d pezzi di collegamento, le dette equazioni d'equilibrio si ridurranno a

$$3(1+c+d) \quad (2).$$

Le variazioni di coordinate $\Delta\xi$ e Δv per un punto qualunque, come A, del pezzo principale, costretto a muoversi su una curva fissa, hanno fra di loro una determinata relazione. Essendo

$$v=f(\xi)$$

l'equazione dell'accennata curva, a motivo della piccolezza di $\Delta\xi$ e di Δv, si ha

$$\Delta v=f'(\xi)\Delta\xi,$$

nella quale $f'(\xi)$ è la prima derivata di $f(\xi)$ per rapporto a ξ. Ponendo adunque in quest'ultima equazione il valore di ξ che corrisponde all'ascissa di ciascuno dei punti dell'asse del pezzo principale, i quali sono costretti a muoversi su curve fisse, e per Δv e $\Delta\xi$ le loro espressioni in funzione delle forze cognite ed incognite, si otterranno tante equazioni quanti sono i punti posti nell'indicata condizione, e quindi si avranno

$$a \quad (3)$$

equazioni nell'intero sistema.

Considerando i punti, come C, D', D'', D''' e D^{IV}, appartenenti a due pezzi differenti, le due coordinate di questi punti devono variare della stessa quantità, sia che si riferiscano all'uno, sia che si riferiscano all'altro dei due pezzi. Ora, avendosi nel sistema i $2c$ punti del pezzo principale uniti da tiranti ed i d punti uniti ai pezzi di colle-

gamento, si troveranno in tutto $2c + d$ punti appartenenti simultaneamente a due pezzi differenti, e, siccome ciascuno di essi ammette due variazioni di coordinate, risulta che sotto questo riguardo avremo un numero di equazioni espresso da

$$2(2c + d) \qquad (4).$$

Nei punti in cui, come in D''' e D^{IV}, i pezzi di collegamento sono incastrati col pezzo principale, la rotazione m deve essere la stessa, tanto per la sezione retta di questo, quanto per la sezione retta di quelli. Nel totale sistema i punti posti nell'or accennata condizione sono $d''' + d^{IV}$, e quindi essi danno luogo a

$$d''' + d^{IV} \qquad (5)$$

equazioni.

Le variazioni di coordinate sono nulle per tutti i punti fissi del sistema, come sono i punti B', D_1', D_1'', D_1''' e D_1^{IV}, appartenenti al pezzo principale ed alle estremità fisse dei pezzi di collegamento. Questi punti sono in numero di $b + d$, le variazioni di coordinate sono due per ciascun punto e quindi si hanno in tutto

$$2(b + d) \qquad (6)$$

equazioni.

Finalmente le rotazioni m delle sezioni rette corrispondenti ai punti fissi d'incastramento, come sono i punti B'', D_1'' e D_1^{IV}, sono nulle. I punti posti in tali condizioni sono $b'' + d'' + d^{IV}$, e quindi sotto questo riguardo si hanno in tutto

$$b'' + d'' + d^{IV} \qquad (7)$$

equazioni.

Riassumendo, abbiamo che il numero totale delle equazioni è dato dalla somma delle espressioni (2), (3), (4), (5), (6) e (7), cosicchè questo numero risulta

$$3(1 + c + d) + a + 2(2c + d) + d''' + d^{IV} + 2(b + d) + b'' + d'' + d^{IV}.$$

Osservando poi che

$$b = b' + b''$$

$$d = d' + d'' + d''' + d^{IV} \qquad (8),$$

l'ultima equazione diventa

$$a + 2b' + 3b'' + 7c + 7d' + 8d'' + 8d''' + 9d^{IV} + 3 \qquad (9).$$

L'espressione (1), la quale rappresenta il numero delle incognite del problema, può essere scritta

$$a + 2b' + 3b'' + 4c + 4d' + 5d'' + 5d''' + 6d^{IV} \qquad (10).$$

Facendo la differenza fra l'espressione (9) e l'espressione (10) ed avendo riguardo all'equazione (8), si trova

$$3(1 + c + d),$$

cosicchè il numero delle equazioni stabilite cogli indicati procedimenti supera di tante unità il numero delle incognite da determinarsi quante se ne hanno nell'ultima espressione.

Se però si osserva che nelle equazioni, il cui numero è dato dalla espressione (9), entrano le costanti, di cui si è parlato nei numeri 7 e 12, rappresentanti per ciascun pezzo il movimento della sezione iniziale, che queste costanti sono generalmente in numero di tre per ciascun pezzo e quindi in numero di

$$3(1 + c + d) \qquad (11)$$

per $1 + c + d$ pezzi dell'intiero sistema costituito dal pezzo principale, dai c tiranti e dai d pezzi di collegamento, si vede come alle incognite date dall'espressione (10) bisogna ancora aggiungere quelle date dall'espressione (11), e che per conseguenza si ha precisamente un numero di equazioni eguale a quello delle incognite.

Le considerazioni che furono fatte per il caso di un pezzo principale con punti costretti a muoversi su una curva immobile, con punti fissi, con incastramenti, con tiranti, e con pezzi di collegamento a ritegni immobili e nell'ipotesi della deformazione piana, sono suscettive della più ampia generalità, e sono applicabili anche ai casi della deforma-

zione non in un sol piano, della non indipendenza dei pezzi di collegamento e per tutti i sistemi complessi che si possono immaginare. Ma i pochi e semplici casi pratici che in questo capitolo abbiamo studiato e le formole a cui siamo arrivati, chiaramente rivelano come, anche per sistemi formati di pochi pezzi, si debbano eseguire calcoli lunghi non affatto scevri da difficoltà, e quindi, avendo trattato il problema della determinazione delle forze incognite per tutti i casi che hanno un vero interesse pratico, crediamo convenientemente esaurito l'argomento per tutto quello che può riuscire vantaggioso all'ingegnere costruttore.

CAPITOLO V.

Osservazioni e teoremi riferentisi al modo con cui le forze esterne entrano nelle formole delle deformazioni dei corpi elastici.

23. **Assunto di questo capitolo.** — Vi sono alcune osservazioni ed alcune proposizioni, riferentisi al modo con cui le forze esterne entrano nelle formole delle deformazioni dei solidi elastici, le quali, per le conseguenze di pratica utilità a cui conducono, meritano di essere prese in esame. Tali osservazioni e proposizioni già si trovano nei citati preziosi lavori del chiarisssimo signor professore Bresse, a cui sono dovuti i rapidi progressi che fece in questi ultimi tempi lo studio della resistenza dei materiali pei bisogni dell'ingegneria, ed immediatamente passiamo ad esporle facendone oggetto del presente capitolo.

24. **Espressioni delle forze X, Y, Z e dei momenti M_x, M_y ed M_z.** — Le quantità che, nello studio delle deformazioni dei solidi elastici, abbiamo designate colle lettere X, Y e Z sono le proiezioni, su tre assi coordinati ortogonali, di tutte le forze esterne, cognite e non cognite, applicate al corpo considerato fra una prestabilita sua sezione retta ed una sua estremità. I detti assi coordinati poi sono disposti in modo da essere, due di essi nel piano e diretti secondo gli assi principali centrali d'inerzia dell'accennata sezione retta, il terzo perpendicolare a questo piano e rivolto verso la parte alla quale sono applicate le forze che entrano nella formazione di X, Y e Z. Le quantità che abbiamo indicate colle lettere M_x, M_y ed M_z sono i momenti

delle stesse forze rispetto ai definiti assi coordinati. Ora, se chiamansi F_1, F_2, F_3, ... le accennate forze esterne ed A_1, A_2, A_3, ... coefficienti i quali dipendono dalle dimensioni del corpo e dalla posizione delle anzidette forze, si avranno, per le sei quantità X, Y, Z, M_x, M_y ed M_z, espressioni della forma

$$A_1F_1 + A_2F_2 + A_3F_3 + \ldots\ldots \qquad (1).$$

Conviene notare che queste espressioni non sono applicabili, senza cangiamento, per l'intiero corpo considerato. Se supponesi di percorrere il suo asse nel senso positivo della variabile σ che entra nelle formole generali dei numeri 5 e 6, a misura che si oltrepassa il punto d'applicazione di ciascuna forza, bisogna sopprimere il termine ad essa corrispondente nelle espressioni delle quantità X, Y, Z, M_x, M_y ed M_z. Queste quantità si conservano sempre funzioni lineari delle forze esterne, siano queste cognite siano incognite; e solamente il coefficiente di ciascuna forza diventa costantemente nullo per tutti i punti appartenenti ad una certa parte dell'asse del corpo.

Supponendo che gli angoli α, β, γ, α', β' e γ', i quali entrano nelle formole generali della deformazione (Num. 5 e 6), siano solamente funzioni delle coordinate ξ, υ e ζ del centro della sezione alla quale essi si riferiscono, dalla riconosciuta proprietà delle forze X, Y, Z e dei momenti M_x, M_y ed M_z, ne conseguono altre assai importanti per la pratica a motivo delle numerose applicazioni di cui sono suscettive. Queste proprietà passeremo in rassegna nel progresso di questo capitolo, ma intanto facciamo immediatamente osservare che l'indicata supposizione relativa agli angoli si trova verificata nel caso particolare della deformazione piana stata studiata nei numeri 9 ed 11, giacchè si ha

$$\cos\alpha = 1, \qquad \cos\beta = 0, \qquad \cos\gamma = 0$$

$$\cos\alpha' = 0, \qquad \cos\beta' = \frac{d\xi}{d\sigma}, \qquad \cos\gamma' = -\frac{d\upsilon}{d\sigma}.$$

25. **Espressioni delle sei costanti $\Delta\xi_o$, $\Delta\upsilon_o$, $\Delta\zeta_o$, m_o, n_o e p_o, determinanti il movimento della sezione iniziale, in funzione delle forze esterne e del coefficiente τ.** — Le condizioni, le quali

servono per determinare queste costanti (Num. 7 e 12), si riducono generalmente ad eguagliare a zero le variazioni delle coordinate di un punto, oppure le rotazioni di una sezione. Segue da ciò che, ammessa la restrinzione stata indicata nel precedente numero sui valori degli angoli α, β, γ, α', β' e γ', le accennate sei costanti devono risultare funzioni lineari, senza termine indipendente, delle forze esterne e del coeficiente di dilatazione τ; ossia, indicando con B_1, B_2, B_3, ..., C coefficienti i quali dipendono soltanto dalle dimensioni del corpo che si considera e dalla posizione delle forze esterne e conservando alle lettere F_1, F_2, F_3, ... i significati loro stati attribuiti nel precedente numero, si avranno espressioni della forma

$$B_1F_1 + B_2F_2 + B_3F_3 + ... + C\tau \qquad (1)$$

pei valori delle sei costanti $\Delta\xi_0$, $\Delta\upsilon_0$, $\Delta\zeta_0$, m_0, n_0 e p_0. — Infatti, sostituendo nelle formole (13), (14) e (15) del numero 5 e nelle formole (1) del numero 6 i valori di X, Y, Z, M_x, M_y ed M_z in funzione delle forze esterne per quelle sezioni per cui devono essere nulli i valori di $\Delta\xi_i$, $\Delta\upsilon_i$, $\Delta\zeta_i$, m_i, n_i e p_i, si ottengono funzioni lineari, senza termine indipendente, delle quantità $\Delta\xi_0$, $\Delta\upsilon_0$, $\Delta\zeta_0$, m_0, n_0, p_0, τ, F_1, F_2, F_3, ... Le sei equazioni, risultanti dall'eguagliare a zero queste sei funzioni e dalle quali si devono dedurre le sei incognite $\Delta\xi_0$, $\Delta\upsilon_0$, $\Delta\zeta_0$, m_0, n_0 e p_0, sono adunque del primo grado; i termini indipendenti dalle incognite (i quali sono i soli contenenti il coefficiente τ e le forze F_1, F_2, F_3, ...) avranno la forma (1) sopra indicata; e finalmente le dette incognite avranno pure valori della forma (1), giacchè per calcolare ciascuna di esse bisognerà moltiplicare i termini indipendenti pei diversi coefficienti delle incognite e fare delle somme di siffatti prodotti.

26. **Espressioni delle sei quantità $\Delta\xi_i$, $\Delta\upsilon_i$, $\Delta\zeta_i$, m_i, n_i e p_i, determinanti il movimento di una sezione qualunque, in funzione delle forze esterne e del coefficiente τ.** — Ponendo nelle formole (13), (14) e (15) del numero 5 e nelle formole (1) del numero 6 i valori di X, Y, Z, M_x, M_y ed M_z i quali hanno la forma (1) stata dichiarata nel numero 24, ed i valori di $\Delta\xi_0$, $\Delta\upsilon_0$, $\Delta\zeta_0$, m_0, n_0 e p_0 i quali hanno la forma (1) stata definita nel precedente numero 25, evidentemente si trova che i secondi membri delle or citate formole conservano la forma (1) ultima citata. Segue da ciò che, ammessa la restrinzione stata indicata nel numero 24 sui valori degli angoli α,

β, γ, α', β' e γ', si può stabilire il seguente teorema: *le sei quantità* $\Delta\xi_i$, $\Delta\upsilon_i$, $\Delta\zeta_i$, m_i, n_i *e* p_i, *le quali caratterizzano la deformazione in un punto qualunque dell'asse di un solido elastico, sono funzioni lineari, senza termine indipendente, delle forze esterne* F_1, F_2, F_3, ... *e del coefficiente di dilatazione* τ *proveniente da cause estranee a queste forze.*

Osservando poi che, se in una funzione della forma della funzione (1) del precedente numero si suppone successivamente che ciascuna delle quantità F_1, F_2, F_3, ... e τ sussista da sola e che si annullino tutte le altre, si riproducono l'uno dopo l'altro tutti i termini della funzione, il precedente teorema può ancora essere enunciato in questi termini: *i sei elementi* $\Delta\xi_i$, $\Delta\upsilon_i$, $\Delta\zeta_i$, m_i, n_i e p_i *della deformazione in un punto qualunque dell'asse di un solido elastico si ottengono col fare, per ciascuno di questi elementi, la somma dei valori che esso prenderebbe, qualora si facessero operare successivamente le diverse forze esterne e la dilatazione derivante da cause estranee a queste forze.*

Segue da ciò che l'effetto speciale dovuto a ciascuna forza non è modificato dalla presenza delle altre, e che le deformazioni si sovrappongono per dare l'effetto totale. A questa conseguenza non si può però arrivare senza ammettere che le deformazioni siano piccolissime e senza adottare nella determinazione delle sei costanti $\Delta\xi_o$, $\Delta\upsilon_o$, $\Delta\zeta_o$, m_o, n_o e p_o le condizioni state ammesse nel precedente numero, quelle cioè di eguagliare a zero le variazioni delle coordinate di un punto e le rotazioni di una sezione. Alla stessa conseguenza non si potrebbe pur giungere se gli angoli α, β, γ, α', β' e γ' non fossero funzioni delle sole coordinate del centro della sezione a cui si riferiscono, e se il coefficiente di dilatazione τ non fosse indipendente dalle forze sollecitanti.

27. Espressioni delle forze incognite in funzione delle forze date, e conseguenze relative alle deformazioni. — Le forze esterne, operanti sui diversi pezzi di un sistema elastico qualsiasi, si possono considerare siccome formanti due distinti gruppi: il primo comprende le forze le quali costituiscono dati immediati del problema; il secondo si riferisce alle forze che sono incognite e che si devono determinare dietro le condizioni del problema, seguendo i procedimenti stati indicati nel precedente capitolo IV. Or bene, le equazioni che si devono instituire per la determinazione delle forze incognite sono di due differenti specie. Quelle della prima specie sono somministrate dalla statica dei sistemi invariabili; si ottengono esse coll'eguagliare

a zero le proiezioni delle forze esterne su tre assi coordinati ortogonali ed i momenti delle stesse forze intorno agli assi medesimi: e quindi tanto le forze date, quanto le forze incognite entrano al primo grado in queste equazioni, le quali di necessità non contengono termine indipendente. Le equazioni della seconda specie sono quelle che si instituiscono: col porre che qualsiasi punto il quale scorre su una curva fissa si muove secondo la tangente a questa curva; coll'eguagliare a zero gli spostamenti di alcuni punti immobili, e le rotazioni delle sezioni d'incastramento corrispondenti a punti fissi; coll'eguagliare a zero le differenze fra gli spostamenti dei punti d'intersezione degli assi di due pezzi concorrenti, e le differenze fra le rotazioni delle sezioni rette in questi punti quando esiste reciproco incastramento dei due pezzi nel loro sito di concorso. Ponendo le equazioni, le quali esprimono queste condizioni, ed assumendo per incognite le componenti delle forze cercate secondo i tre assi coordinati ortogonali ed i momenti delle stesse forze intorno agli assi stessi, se gli angoli $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta'$ e γ' sono indipendenti dalle forze, si ottiene una serie di equazioni nelle quali, per quanto si è detto nel precedente numero, tutte le forze ed il coefficiente τ entrano al primo grado, e nelle quali non si ha termine indipendente.

Tutte le equazioni adunque, le quali serviranno a determinare le forze incognite, saranno equazioni del primo grado; ed i termini indipendenti dalle incognite saranno funzioni lineari, senza termine indipendente dalle forze date e del coefficiente di dilatazione. Per quanto poi venne detto nel numero 25 sui valori delle incognite in un sistema di equazioni del primo grado, si giunge a questi teoremi: *che le componenti delle forze incognite secondo tre direzioni ed i loro momenti per rapporto a tre assi determinati sono funzioni lineari, senza termine costante, delle forze date e del coefficiente di dilatazione τ; che queste componenti e questi momenti si possono determinare facendo la somma algebrica dei valori che si otterrebbero, quando ad una ad una si considerassero le forze date ed il coefficiente di dilatazione.*

Per quanto si è detto nel precedente numero, gli elementi della deformazione in un punto qualunque dell'asse di un solido elastico, ossia le sei quantità $\Delta\xi_i$, $\Delta\upsilon_i$, $\Delta\zeta_i$, m_i, n_i e p_i, sono funzioni lineari, senza termine indipendente, delle forze esterne e del coefficiente di dilatazione τ. Se ora immaginasi che nella loro espressione si pongano i valori delle forze esterne incognite in funzione delle forze date, a motivo del precedente teorema si avrà sempre una somma di termini

ciascuno dei quali sarà il prodotto di un coefficiente per una delle forze date o per il coefficiente τ. Segue da ciò che i teoremi del numero 26 possono essere modificati in ciò che, invece di tutte le forze esterne, si possono far entrare solamente le forze esterne date. Bisogna però avvertire che, quando si farà il calcolo per una delle forze separatamente o per la dilatazione, si dovrà tener conto delle forze esterne che, sotto la sola influenza di questa forza o dilatazione, nascerebbero negli appoggi, negli snodi, negli incastramenti e nei collegamenti dei diversi pezzi del sistema.

28. **Altro enunciato dei teoremi dei numeri 26 e 27.** — La variazione $\Delta\xi_i$ è la somma delle variazioni che si manifesterebbero nell'ascissa ξ_i se ciascuna forza cognita e la dilatazione τ operassero successivamente ad esclusione di tutte le altre cause, e, siccome l'asse delle ξ è arbitrario, si può immediatamente dedurre il seguente enunciato: *quando gli angoli, i quali entrano nelle formole generali della deformazione, sono indipendenti dalle forze, la spostamento di un punto dell'asse a motivo della deformazione è la risultante (ossia la linea che chiude il contorno poligonale) degli spostamenti che si produrrebbero qualora si facessero agire isolatamente e l'una dopo l'altra tutte le forze esterne cognite e le cause delle dilatazioni lineari indipendenti dai carichi.*

La risultante delle reazioni parziali, le quali nascerebbero in un dato punto per l'azione successiva ed isolata delle cause di deformazione precedentemente considerate, ha di comune colla reazione effettiva in questo punto le proiezioni su tre assi ed i momenti per rapporto a questi assi. Fra la detta risultante e l'indicata reazione vi ha adunque identità, e quindi il teorema ora enunciato si può anche estendere alle reazioni incognite.

29. **Forze equivalenti.** — Sono chiamati *sistemi di forze equivalenti* quelli che hanno una medesima risultante di translazione ed un medesimo momento risultante per un punto qualsiasi. Due sistemi di forze equivalenti si possono indifferentemente sostituire l'uno all'altro su un corpo invariabile in equilibrio, senza punto turbare quest'ultimo; ma, se il corpo non è assolutamente rigido, passando da un sistema all'altro possono di molto cangiare le tensioni e le pressioni delle diverse sue parti e le sue deformazioni. Così, un sistema di due forze eguali e contrarie applicato alle due estremità di una retta e nella direzione della retta stessa non turba punto l'equilibrio, ma modifica le azioni interne e produce una variazione di lunghezza.

Segue da ciò che si deve procedere con molta cautela in tutti i problemi relativi alla deformazione ed alla resistenza dei corpi elastici, quando si tratta di sostituire ad una risultante le sue componenti, od inversamente, o, in generale, quando si deve sostituire ad un sistema di forze un altro sistema di forze equivalenti. La condizione che deve essere soddisfatta, affinchè due sistemi di forze siano effettivamente equivalenti allorquando si tratta di corpi elastici, consiste in ciò che i valori di X, Y, Z, M_x, M_y ed M_z a cui tali sistemi conducono siano costantemente gli stessi per le stesse sezioni, giacchè, come risulta dalle formole state stabilite, si avrebbero allora deformazioni eguali e quindi resistenze eguali. Così, affinchè si possano sostituire ad una forza le sue componenti, è necessario che i punti d'applicazione di quella e di queste restino nella stessa sezione. Infatti, avendosi una forza F (*Fig.* 24) applicata al punto E della sezione C D di un corpo elastico coll'asse curvilineo A B, se si sostituiscono le due componenti P e Q alla forza F senza punto variare il punto d'applicazione E, non cangiano i valori delle quantità X, Y, Z, M_x, M_y ed M_z per una sezione qualsiasi del corpo, e quindi la trasformazione può essere fatta; ma se si volessero trasportare i punti d'applicazione delle forze F, P o Q sulla loro direzione nel punto d'incontro con un'altra sezione differente dalla C D, le cose succederebbero ben diversamente. In verità, se nel fare i valori di X, Y, Z, M_x, M_y ed M_z si devono considerare le forze operanti sul corpo da una sezione qualunque alla sezione corrispondente all'estremo B, bisogna tralasciare di contare la F o le sue due componenti appena si oltrepassa la sezione C D; ora, se supponesi F applicata in K, P applicata in I e Q applicata in L, evidentemente avverrebbe l'introduzione della forza F per tutte le sezioni fra G e K, l'introduzione della forza P per tutte le sezioni fra G ed I e della forza Q per tutte le sezioni fra G ed L. Si avrebbe adunque l'introduzione di forze che non vi dovrebbero essere nelle espressioni X, Y, Z, M_x, M_y ed M_z, e quindi, nello studio delle deformazioni e delle resistenze dei corpi elastici, non sono generalmente permessi i trasporti dei punti d'applicazione delle forze esterne, quand'anche questi trasporti si volessero fare nella direzione delle forze stesse.

30. **Proprietà degli archi simmetrici, ma non simmetricamente caricati.** — Abbiasi un arco col suo asse in A C B (*Fig.* 25) o più generalmente, un sistema di pezzi simmetrico rispetto ad un piano, ma non sollecitato da forze esterne simmetricamente disposte rispetto al piano

medesimo. Gli angoli α, β, γ, α', β' e γ' siano funzioni delle coordinate e siano quindi indipendenti dalle forze esterne. Il piano di simmetria sia quello in cui si trovano i due assi coordinati $O\upsilon$ ed $O\zeta$, cosicchè l'asse $O\xi$ risulti perpendicolare al detto piano.

Si considerino sull'asse del sistema due punti L ed M' simmetricamente disposti rispetto al piano $\upsilon O\zeta$, e si chiamino

ξ, υ e ζ le coordinate del punto M,

ξ', υ' e ζ' le coordinate del punto M',

$\Delta\xi$, $\Delta\upsilon$, $\Delta\zeta$, m, n e p le sei quantità che dànno la deformazione in M e

$\Delta\xi'$, $\Delta\upsilon'$, $\Delta\zeta'$, m', n' e p' le sei quantità determinanti la deformazione in M'.

Indicando con (F) il gruppo delle forze date, immaginiamo che esso si renda simmetrico rispetto al piano $\upsilon O\zeta$ col raddoppiare mediante forze simmetriche quelle che non hanno la loro compagna, o in altri termini immaginiamo che si faccia in modo da esservi, per ciascuna forza esterna F applicata in D, la sua compagna F' applicata in D' e simmetrica alla F per rapporto al piano $\upsilon O\zeta$. Si avrà così un sistema simmetrico e simmetricamente sollecitato dal gruppo di forze (F_1), e saranno

$\Delta\xi_1$, $\Delta\upsilon_1$, $\Delta\zeta_1$, m_1, n_1 e p_1 i sei elementi della deformazione nel punto M,

$-\Delta\xi_1$, $\Delta\upsilon_1$, $\Delta\zeta_1$, m_1, $-n_1$ e $-p_1$ i sei elementi della deformazione del punto M'.

Analogamente, supponendo tolte tutte le forze del gruppo (F), le quali non sono simmetriche rispetto al piano $\upsilon O\zeta$, si ottiene un sistema (F_2) e, sotto l'azione di un siffatto sistema, saranno

$\Delta\xi_2$, $\Delta\upsilon_2$, $\Delta\zeta_2$, m_2, n_2 e p_2 i sei elementi della deformazione nel punto M.

Nel passaggio dal gruppo di forze (F_2) al gruppo (F), le variazioni di coordinate

$$\Delta\xi_2, \qquad \Delta\upsilon_2, \qquad \Delta\zeta_2$$

diventano rispettivamente

$$\Delta\xi, \qquad \Delta\upsilon, \qquad \Delta\zeta,$$

e le rotazioni

$$m_2, \qquad n_2, \qquad p_2$$

acquistano rispettivamente i valori

$$m, \qquad n, \qquad p.$$

Passando adunque dal gruppo di forze (F_2) al gruppo di forze (F), i sei elementi della deformazione del punto M subiscono le variazioni rappresentate da

$$\left.\begin{array}{lll} \Delta\xi - \Delta\xi_2, & \Delta\upsilon - \Delta\upsilon_2, & \Delta\zeta - \Delta\zeta_2, \\ m - m_2, & n - n_2, & p - p_2 \end{array}\right\} \quad (1),$$

e queste variazioni sono evidentemente i sei elementi della deformazione che ha luogo nel detto punto per la sola azione delle forze non simmetriche del gruppo (F), giacchè sono queste le forze da aggiungersi al sistema per passare dal gruppo (F_2) al gruppo (F).

Analogamente, nel passaggio dal gruppo di forze (F) al gruppo di forze (F_1) le variazioni di coordinate

$$\Delta\xi', \qquad \Delta\upsilon', \qquad \Delta\zeta'$$

diventano rispettivamente

$$-\Delta\xi_1, \qquad \Delta\upsilon_1, \qquad \Delta\zeta_1;$$

le rotazioni

$$m', \qquad n', \qquad p'$$

acquistano rispettivamente i valori

$$m_1, \qquad -n_1, \qquad -p_1;$$

e quindi gli elementi della deformazione per il punto M' subiscono i cangiamenti rappresentati da

$$\left.\begin{array}{lll} -\Delta\xi_1 - \Delta\xi', & \Delta\upsilon_1 - \Delta\upsilon', & \Delta\zeta_1 - \Delta\zeta', \\ m_1 - m', & -n_1 - n', & -p_1 - p' \end{array}\right\} \quad (2).$$

Queste sei espressioni poi sono i sei elementi della deformazione del detto punto dovuta alla sola azione delle forze di cui differiscono i

due gruppi (F_1) ed (F), le quali forze sono simmetriche di quelle che costituiscono la differenza fra i gruppi (F) ed (F_2) (*e*).

Quest'ultima osservazione mette in evidenza come i sei elementi della deformazione per il punto M devono essere simmetrici dei sei elementi della deformazione per il punto M'. La simmetria dà direzioni opposte allo spostamento nella direzione $O\xi$ ed alle rotazioni $O\upsilon$ ed $O\zeta$, e quindi fra le espressioni (1) e (2) devono essere verificate le semplicissime relazioni

$$\left.\begin{aligned} \Delta\xi - \Delta\xi_2 &= \Delta\xi_1 + \Delta\xi' \\ \Delta\upsilon - \Delta\upsilon_2 &= \Delta\upsilon_1 - \Delta\upsilon' \\ \Delta\zeta - \Delta\zeta_2 &= \Delta\zeta_1 - \Delta\zeta' \\ m - m_2 &= m_1 - m' \\ n - n_2 &= n_1 + n' \\ p - p_2 &= p_1 + p' \end{aligned}\right\} \quad (3),$$

delle quali in molti casi si potrà vantaggiosamente trarre partito, giacchè la condizione di simmetria nelle forze è tale da facilitare notevolmente i calcoli, cosicchè riuscirà generalmente più comodo di calcolare, per esempio, $\Delta\xi_1$ e $\Delta\xi_2$ anzichè $\Delta\xi$ e $\Delta\xi'$.

A relazioni affatto analoghe si giunge per la determinazione delle forze incognite, ed il metodo di dimostrazione è in tutto identico a quello stato adottato per dedurre le precedenti relazioni (3). Stando sempre gli assi coordinati quali già vennero definiti, se chiamansi T, U e V le tre componenti parallele a questi assi delle forze incognite che provengono da uno dei vincoli, per esempio, da un vincolo in E,

(*e*) Infatti, se considerasi nel gruppo (F) la sola forza F (*Fig.* 25), nel gruppo (F_1) si dovranno considerare le due forze F ed F', e la forza di cui differiscono questi due gruppi, a motivo della F, è evidentemente la F'. Venendo poi al gruppo (F_2), siccome nel farlo deve essere soppressa la forza F, ne deriva che la forza di cui differiscono i gruppi (F) ed (F_2) a motivo della forza F è la stessa F, la quale è simmetrica di F', ossia di quella che costituisce la differenza fra i gruppi (F) ed (F_1) per rapporto alla sola forza F. Quanto si è detto per la forza F è vero per tutte le forze sollecitanti il sistema, e quindi è giusto il dire che le forze di cui differiscono i due gruppi (F_1) ed (F) sono simmetriche di quelle di cui differiscono i due gruppi (F) ed (F_2).

A, B ed C le somme algebriche dei momenti di queste forze rispetto agli stessi assi,

T', U', V', A', B' ed C' le quantità analoghe per il vincolo E' simmetrico di E,

T_1, U_1, V_1, A_1, B_1 ed C_1 ciò che divengono le quantità T, U, V, A, B ed C quando si sostituisce al sistema delle forze date (F) il sistema (F_1),

T_2, U_2, V_2, A_2, B_2 ed C_2 ciò che divengono le stesse quantità quando allo stesso sistema delle forze date si sostituisce il sistema (F_2),
si hanno quindi le relazioni

$$\left.\begin{aligned} T - T_2 &= T_1 + T' \\ U - U_2 &= U_1 - U' \\ V - V_2 &= V_1 - V' \\ A - A_2 &= A_1 - A' \\ B - B_2 &= B_1 + B' \\ C - C_2 &= C_1 + C' \end{aligned}\right\} \quad (4).$$

Ricavando dalle formole (3) e (4) i valori delle somme $\Delta\xi_1 + \Delta\xi_2$, $\Delta\upsilon_1 + \Delta\upsilon_2$, $\Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2$, $m_1 + m_2$, $n_1 + n_2$, $p_1 + p_2$, $T_1 + T_2$, $U_1 + U_2$, $B_1 + A_2$, $K_1 + K_2$, $B_1 + B_2$ ed $C_1 + C_2$, si ottengono le relazioni, fra gli spostamenti

$$\left.\begin{aligned} \Delta\xi_1 + \Delta\xi_2 &= \Delta\xi - \Delta\xi' \\ \Delta\upsilon_1 + \Delta\upsilon_2 &= \Delta\upsilon + \Delta\upsilon' \\ \Delta\zeta_1 + \Delta\zeta_2 &= \Delta\zeta + \Delta\zeta' \\ m_1 + m_2 &= m + m' \\ n_1 + n_2 &= n - n' \\ p_1 + p_2 &= p - p' \end{aligned}\right\} \quad (5),$$

fra le forze incognite

$$\left.\begin{aligned} T_1 + T_2 &= T - T' \\ U_1 + U_2 &= U + U' \\ V_1 + V_2 &= V + V' \\ A_1 + A_2 &= A + A' \\ B_1 + B_2 &= B - B' \\ C_1 + C_2 &= C - C' \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

Le equazioni (5) permettono di enunciare il seguente teorema: *allorquando un sistema elastico è simmetrico per rapporto ad un piano, ma non simmetricamente sollecitato, se si conduce ad essere simmetrico anche sotto quest'ultimo rapporto, prima coll'aggiungere per ciascuna forza esterna che non ha la sua compagna una forza della stessa intensità e simmetricamente disposta, e poi col sopprimere tutte le forze di cui mancano le simmetriche, e se, con queste due ipotesi, determinasi uno dei sei elementi della deformazione in un punto della fibra media, si ha che la somma delle due quantità così determinate è eguale alla somma o alla differenza delle quantità analoghe una pel punto considerato e l'altra pel punto simmetrico.* Le equazioni (6) dànno luogo ad un teorema analogo per le componenti di una reazione incognita parallelamente ai tre assi coordinati e per i suoi momenti intorno agli assi medesimi; di maniera che, stando le premesse del precedente teorema, si ha, *che se, colle accennate due ipotesi di simmetria, determinasi la componente parallela ad un asse coordinato od il momento intorno allo stesso asse della reazione incognita di un vincolo, la somma delle due componenti o dei due momenti così determinati è eguale alla somma od alla differenza delle quantità analoghe, una pel vincolo considerato e l'altra pel vincolo ad esso simmetrico.*

Devesi avvertire che nell'applicazione dei citati teoremi importa assumere due degli assi coordinati nel piano di simmetria ed il terzo normale a questo piano. Di più si deve prendere la differenza delle quantità analoghe per due punti simmetrici, allorquando la simmetria dà loro direzioni opposte. Questa circostanza si presenta per gli spostamenti e per le forze in proiezione sulla perpendicolare al

piano di simmetria, non che per le rotazioni e pei momenti intorno a rette contenute nel detto piano.

31. **Applicazione della dimostrata proprietà degli archi simmetrici, ma non simmetricamente caricati.** — Abbiasi una centina col suo asse rappresentato nella curva A C B (*Fig.* 26), simmetrica per rapporto alla verticale O C, collocata su due appoggi situati allo stesso livello in A e B, sollecitata da forze contenute nel piano della curva A C B, ma comunque operanti in questo piano e vogliansi determinare le spinte orizzontali che essa esercita contro gli appoggi.

Si assuma perciò l'origine delle coordinate in A, si prenda l'asse delle ξ nella direzione dell'orizzontale A ξ e si chiamino

F una qualunque delle forze date, le quali operano sulla centina,

δ l'angolo di questa forza coll'orizzonte,

Q e Q′ le due spinte orizzontali domandate, una in B e l'altra in A stimate secondo le ξ positive con un segno conveniente,

Q_1 e $-Q_1$ ciò che diverrebbero queste forze, completando la simmetria del sistema proposto coll'addizione di nuove forze,

Q_2 e $-Q_2$ i valori che prenderebbero le stesse forze, immaginando soppresse nel sistema tutte le forze che non hanno le loro simmetriche.

Per quanto si è detto nel precedente numero si ha

$$Q_1 + Q_2 = Q - Q' \qquad (1),$$

e di più, siccome la somma algebrica delle componenti orizzontali delle forze esterne applicate alla centina deve essere nulla, esiste fra Q e Q′ la relazione

$$Q + Q' + \Sigma F \cos \delta = 0 \qquad (2).$$

Se adunque si sanno calcolare le due spinte Q_1 e Q_2 nei due indicati casi di simmetria delle forze sollecitanti, riescirà facile, colle equazioni (1) e (2), dedurre le due spinte orizzontali Q e Q′ convenienti al caso dato della non simmetria nelle indicate forze.

Allorquando la somma $\Sigma F \cos \delta$ è eguale a zero, ciò che succede ogni qual volta la centina non sopporta che dei pesi o è sollecitata da forze simmetriche in intensità e direzione, senza che necessariamente siano simmetriche in posizione, l'equazione (2) dà

$$Q' = -Q,$$

cosicchè le due spinte sono eguali e di segno contrario, e, avuto riguardo al trovato valore di Q', si deduce dall'equazione (1)

$$Q = \frac{Q_1 + Q_2}{2} \qquad (3),$$

ossia che la spinta domandata è la media aritmetica fra le due spinte Q_1 e Q_2.

CAPITOLO VI.

Reazioni e deformazioni delle centine circolari poste su due appoggi fissi.

32. **Oggetto di questo capitolo.** — Quasi sempre avviene nella pratica che le centine da impiegarsi per soddisfare alle esigenze dell'arte edificatoria si costruiscono nelle seguenti condizioni: di avere asse circolare, di conservare sezione costante o pressochè costante da un estremo all'altro; di essere simmetriche rispetto al piano determinato dal loro asse; di trovarsi tutte le forze sollecitanti nell'or indicato piano; e finalmente di essere gli appoggi posti allo stesso livello e fatti in modo da rendere invariabili le distanze degli estremi delle centine che ricevono.

Segue da ciò che il piano di sollecitazione taglia ciascuna sezione retta delle indicate centine secondo un asse principale centrale d'inerzia, che la loro deformazione avviene nel detto piano, e che il problema dello studio delle deformazioni e della stabilità delle centine quasi sempre si presenta all'ingegnere pratico nelle condizioni le quali permettono di adottare i più facili ed i più spediti procedimenti di risoluzione.

Nel corso di questo capitolo ci proponiamo di stabilire le formole, le quali permettono di determinare le forze incognite, ossia le reazioni degli appoggi per centine poste nelle accennate condizioni; ci occuperemo dopo delle loro deformazioni, e principalmente dell'abbassamento del punto di mezzo del loro asse.

ARTICOLO I.

Reazione degli appoggi di una centina circolare.

33. **Indicazione dei problemi che si vogliono risolvere in questo articolo.** — Attenendoci alle quistioni già state trattate dal chiarissimo signor professore Bresse nei già citati suoi lavori (1), ci proponiamo di dare in quest'articolo i metodi da seguirsi per determinare le reazioni dei due appoggi fissi situati allo stesso livello, portanti una centina circolare con sezione costante: primieramente nelle ipotesi che su essa operi un peso isolato, o una forza orizzontale, o una coppia, o una dilatazione risultante da cause indipendenti dai carichi; secondariamente nelle ipotesi che la centina si trovi sotto l'azione di forze discontinue qualunque e di una dilatazione prodotta da altre cause, o di forze ripartite secondo una data legge di continuità. In quest'ultimo caso poi considereremo particolarmente le ipotesi, del peso proprio della centina, di un peso uniformemente distribuito su una certa parte della sua lunghezza, di un peso uniformemente distribuito sulla proiezione orizzontale del suo asse e di una pressione prodotta da un carico d'acqua.

Essendo poi ADB (*Fig.* 27) l'arco di circolo rappresentante l'asse primitivo della centina e C il suo centro, nella risoluzione dei problemi da trattarsi in quest'articolo, chiameremo

r il raggio $\overline{CA} = \overline{CB}$,

α l'angolo DCB corrispondente alla metà dell'arco ADB,

β l'angolo DCE determinante la sezione a cui trovasi applicata una forza o una coppia operante sulla centina,

φ l'angolo DCM corrispondente ad un punto qualunque M dell'asse della centina,

Q e V le due componenti orizzontale e verticale della reazione dell'appoggio B,

Q' e V' le analoghe componenti per l'appoggio A.

(1) *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes*, anno 1854, capitolo quarto, §§ I, II e III.

Cours de mécanique appliquée, Première partie, Résistance des matériaux et stabilité des constructions, anno 1859, capitolo quarto, §§ I, II e III.

Alle lettere Ω, I_x, Z, M_x e τ conserveremo i significati che loro vennero attribuiti nella deduzione delle formole generali. Finalmente chiameremo Z' ed M_x', come nel numero 14, i valori presi da Z e da M_x allorquando non si fa entrare la componente orizzontale della reazione degli appoggi.

34. **Reazione degli appoggi per una centina sottoposta all'azione di un peso.** — Sia ADB (*Fig.* 27) l'asse della centina ed E il punto a cui trovasi applicato un peso P. Immaginando condotte pel punto E la orizzontale EHE' e la verticale EF, si ha evidentemente

$$\overline{OF} = \overline{HE} = r \operatorname{sen} \beta,$$

mentre, per essere $\overline{OA} = \overline{OB}$, risulta

$$\overline{OA} = r \operatorname{sen} \alpha$$

$$\overline{AB} = 2r \operatorname{sen} \alpha;$$

cosicchè

$$\overline{FA} = r(\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta).$$

Le condizioni d'equilibrio fra le forze esterne del sistema risultano

$$-Q + Q' = 0,$$

$$V + V' - P = 0,$$

$$-Pr(\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta) + 2Vr \operatorname{sen} \alpha = 0,$$

la prima delle quali esprime che è nulla la somma algebrica delle componenti orizzontali di tutte le forze esterne, la seconda che è nulla la somma algebrica delle componenti verticali, e la terza che è nulla la somma algebrica dei momenti attorno al punto A. Da queste condizioni poi immediatamente si deduce

$$V = \frac{1}{2} P \left(1 + \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha}\right) \quad (1),$$

$$V' = \frac{1}{2} P \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha}\right) \quad (2),$$

$$Q = Q' \quad (3).$$

La prima di queste formole dà V, la seconda dà V′ e resta da determinarsi la Q. Per trovare quest'incognita si potrebbe applicare la formola (6) del numero 14, o, più semplicemente, la formola (7) dello stesso numero, allorquando si creda di poter trascurare gli effetti delle componenti delle forze esterne provocanti la resistenza trasversale; ma crediamo più comodo e più spedito di ricondurre il problema al caso di una centina simmetrica e simmetricamente caricata col trarre partito della proprietà stata dimostrata nel numero 30 e già stata applicata nel successivo numero 31.

Perciò, intenderemo aggiunto alla centina un altro peso P in un punto E′, il quale, per rapporto alla verticale O D, sia simmetrico del punto E. Se chiamasi Q_1 la componente orizzontale delle reazioni dei due appoggi A e B nell'ipotesi dei due pesi P, uno applicato in E e l'altro in E′, e se osservasi che la componente orizzontale delle reazioni degli stessi appoggi diventa zero per la soppressione dei due pesi, la formola (3) del numero 31 dà

$$Q = \frac{Q_1}{2} \qquad (4),$$

cosicchè, avuto Q_1, si dedurrà Q prendendone la metà.

Per determinare il valore di Q_1 dobbiamo calcolare la componente orizzontale della reazione degli appoggi fissi per una centina simmetrica e simmetricamente caricata, ossia dobbiamo applicare o la formola (4) o la formola (5) del numero 15, secondo che si crede di non poter trascurare o di poter trascurare gli effetti delle componenti delle forze esterne provocanti la resistenza trasversale. Noi, uniformandoci a quanto abitualmente si fa nella pratica e ad imitazione di quanto ha praticato il Bresse, trascureremo gli effetti delle ultime indicate componenti, e quindi dedurremo il valore di Q_1 dalla formola

$$Q_1 = \frac{\displaystyle\int_0^a \frac{Z'}{E_1\Omega}\,d\xi + \int_0^a \frac{M_x' v}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi}{\displaystyle\int_0^a \frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{d\sigma}\,d\xi + \int_0^a \frac{v^2}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi} \qquad (5),$$

la quale altro non è che la formola (5) del citato numero 15 col cangiamento di Q in Q_1 e colla soppressione del termine $a\tau$; giacchè, essendo nostro scopo di determinare le reazioni degli appoggi prodotte dal solo peso isolato P, non dobbiamo punto tener conto dei termini provenienti dalle dilatazioni o dai restringimenti causati dalle variazioni di temperatura. Gli assi delle coordinate ζ ed υ, che trovansi nell'ultima formola, sono quelli definiti dalle due rette $O\zeta$ ed $O\upsilon$, la prima passante per gli estremi A e B dell'asse della centina, la seconda perpendicolare alla AB nel suo punto di mezzo O; e la lunghezza a rappresenta la semi-corda $\overline{OB}$.

Per determinare il valore di Q_1 mediante la formola (5), bisogna innanzi tutto trovare per un punto qualunque M dell'asse della centina i valori di υ, di $d\zeta$ e di $d\upsilon$ in funzione dell'angolo $DCM = \phi$. Essendo $\overline{MI}$ l'ascissa del punto M, si ha

$$\zeta = r \operatorname{sen} \phi,$$

d'onde

$$d\zeta = r \cos \phi \, d\phi \qquad (6).$$

L'ordinata dello stesso punto M è $\overline{OI} = \overline{CI} - \overline{CO}$, di modo che risulta

$$\upsilon = r(\cos \phi - \cos \alpha) \qquad (7).$$

Siccome poi è circolare l'arco ADB, si ha

$$d\sigma = r \, d\phi \qquad (8).$$

Anche i valori di Z' e di M_x' si devono esprimere in funzione della variabile ϕ, e, per raggiungere lo scopo in modo da poter convenientemente fare le due somme che si trovano al numeratore della formola (5), conviene procurarsi i valori di Z' e di M_x', tanto per un punto qualunque dell'arco DE, quanto per un punto qualunque dell'arco EB, ed osservare che, nel caso dei due pesi P applicati uno in E e l'altro in E', le componenti verticali delle reazioni dei due

appoggi A e B sono ambedue eguali a P. Premesso questo si ha: che, per un punto qualunque M fra D ed E, si ottiene il valore di Z' scomponendo, tanto la forza — P applicata in E, quanto la forza P applicata in B, in due, una diretta e l'altra perpendicolare alla tangente Mz all'asse della centina, e prendendo la somma delle due componenti secondo Mz, la qual somma, per essere le dette forze eguali e di segno contrario, è evidentemente nulla; cosicchè si ha

$$Z' = 0 \qquad (9).$$

Il momento M_x' è la somma algebrica dei momenti, per rapporto al punto M, della forza — P applicata in E e della forza P applicata in B, e quindi, per essere

$$\overline{MI} = r \operatorname{sen} \phi,$$

il detto momento è dato da

$$M_x' = -Pr(\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\phi) + Pr(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi)$$

ossia, riducendo, da

$$M_x' = Pr(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta) \qquad (10).$$

Se invece il punto M è un punto qualunque M_1 dell'arco EB, si otterrà il valore di Z' collo scomporre la forza P applicata in B in due componenti, una parallela e l'altra perpendicolare alla tangente $M_1 z_1$ all'asse della centina, e prendendo col segno che le compete la prima di tali componenti. Così operando risulta

$$Z' = -P \operatorname{sen}\phi \qquad (11),$$

dove ϕ rappresenta l'ascissa angolare M_1CD del punto M_1. Per fare il momento M_x' relativamente al punto M_1, bisogna considerare la sola forza P applicata in B, di maniera che si ha

$$M_x' = Pr(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi) \qquad (12),$$

essendo sempre ϕ l'ascissa angolare M_1CD del punto M_1.

Ai limiti $\zeta = 0$ e $\zeta = a$, fra i quali si devono prendere i qnattro integrali che si trovano nella formola (5), corrispondono rispettivamente i valori particolari 0 ed α di ϕ; le quantità Z' ed M_x', essendo espresse da una differente funzione di ϕ nel passare dai punti dell'arco DE a quelli dell' arco EB, obbligano di dividere in due ciascuna delle somme che si trovano al numeratore, la prima fra i limiti $\phi = 0$ e $\phi = \beta$, la seconda fra i limiti $\phi = \beta$ e $\phi = \alpha$; finalmente, ammettendo noi che sia costante ed omogenea la sezione trasversale della centina, ne segue che sono pure costanti i due prodotti $E_1\Omega$ ed $E_1 I_x$. Sostituendo nei quattro integrali che si trovano nella formola (5) i trovati valori di $d\zeta$, v, $d\sigma$, Z' ed M_x' dati dalle formole (6), (7), (8), (9), (10), (11) e (12), ed avendo riguardo a quanto or ora si è detto, abbiamo

$$\int_0^a \frac{Z'}{E_1\Omega}\,d\zeta = -\frac{r}{E_1\Omega}\,P\int_\beta^\alpha \operatorname{sen}\phi\cos\phi\,d\phi,$$

$$\int_0^a \frac{M_x'\,v}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta = \frac{r^3}{E_1 I_x}\,P\left\{\begin{array}{l}(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta)\displaystyle\int_0^\beta (\cos\phi - \cos\alpha)\,d\phi \\ \\ +\displaystyle\int_\beta^\alpha (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi)(\cos\phi - \cos\alpha)\,d\phi\end{array}\right\},$$

$$\int_0^a \frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\xi}{d\sigma}\,d\zeta = \frac{r}{E_1\Omega}\int_0^\alpha \cos^2\phi\,d\phi,$$

$$\int_0^a \frac{v^2}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\zeta = \frac{r^3}{E_1 I_x}\int_0^\alpha (\cos\phi - \cos\alpha)^2\,d\phi.$$

Osservando ora che

$$\int d\phi = \phi,$$

$$\int \cos\phi \, d\phi = \operatorname{sen}\phi,$$

$$\int \operatorname{sen}\phi \, d\phi = -\cos\phi,$$

$$\int \operatorname{sen}\phi \cos\phi \, d\phi = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\phi$$

$$\int \cos^2\phi \, d\phi = \frac{1}{2}(\phi + \operatorname{sen}\phi\cos\phi),$$

le quattro indicate somme, da prendersi fra i limiti $\zeta = 0$ e $\zeta = a$, risultano

$$\int_0^a \frac{Z'}{E_1\Omega} d\zeta = -\frac{1}{2}\frac{r}{E_1\Omega} P(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta),$$

$$\int_0^a \frac{M_x'}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta = \frac{r^3}{E_1 I_x} P\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta) \\ +\cos\alpha(\cos\beta + \beta\operatorname{sen}\beta - \cos\alpha - \alpha\operatorname{sen}\alpha)\end{array}\right\},$$

$$\int_0^a \frac{1}{E_1\Omega}\frac{d\zeta}{d\sigma} d\zeta = \frac{1}{2}\frac{r}{E_1\Omega}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha),$$

$$\int_0^a \frac{v^2}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta = \frac{1}{2}\frac{r^3}{E_1 I_x}\left[\alpha(1 + 2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right].$$

Ponendo i valori di questi integrali nella formola (5), si ottiene

$$Q_1 = P \frac{-\frac{1}{\Omega}(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta) + \frac{r^2}{I_x}\left[(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta) + 2\cos\alpha(\cos\beta + \beta\operatorname{sen}\beta - \cos\alpha - \alpha\operatorname{sen}\alpha)\right]}{\frac{1}{\Omega}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1 + 2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]} \quad (13),$$

e quindi, per la relazione (4), il valore di Q risulta

$$Q = Q' = P \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\Omega}(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta) + \frac{r^2}{I_x}\left[\frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta) + \cos\alpha(\cos\beta + \beta\operatorname{sen}\beta - \cos\alpha - \alpha\operatorname{sen}\alpha)\right]}{\frac{1}{\Omega}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1 + 2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]} \quad (14).$$

Riepilogando, diremo che servono le formole (1) e (2) per trovare le componenti verticali V e V′ delle due reazioni degli appoggi in B ed A, e che è la formola (14) quella che dà il valore di $Q = Q'$, ossia la componente orizzontale di ciascuna delle indicate reazioni.

35. **Reazioni degli appoggi per una centina sottoposta all'azione di una forza orizzontale.** — Sia A D B (*Fig.* 28) l'arco circolare rappresentante l'asse primitivo della centina, ed E il punto nel quale opera la forza orizzontale S.

Fra la forza S e le componenti Q e V, Q′ e V′ delle reazioni dei due appoggi B ed A, esistono le tre relazioni somministrate dalla statica dei corpi rigidi. Queste relazioni sono

$$-Q + Q' + S = 0,$$

$$V + V' = 0,$$

$$-Sr(\cos\beta - \cos\alpha) + 2Vr\operatorname{sen}\alpha = 0,$$

ed esse esprimono che sono nulle le somme algebriche delle componenti delle forze esterne nel senso degli assi $O\xi$ ed $O\upsilon$ e dei momenti delle stesse forze intorno al punto A. Le ultime due di queste equazioni dànno

$$V = -V' = S\,\frac{\cos\beta - \cos\alpha}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha} \qquad (1);$$

cosicchè conosciamo già le due componenti verticali delle reazioni in B ed A, le quali sono uguali e di segno contrario.

Per ottenere le due componenti orizzontali Q e Q′ delle indicate reazioni, torna comodo lo stesso artifizio già stato usato nel precedente numero. Aggiungeremo cioè nel punto E′, simmetrico di E, una forza orizzontale — S, simmetrica della forza S applicata in E. Chiamando Q_1 il valore assoluto della spinta orizzontale in B ed A nell'ipotesi che esistano le due indicate forze S e — S, ed osservando che è nullo il valore della spinta orizzontale Q_2 quando si suppone che sia soppressa l'unica forza S la quale non ha nel sistema la sua simmetrica, l'applicazione delle formole (1) e (2) del numero 31 ci dà

$$Q_1 = Q + Q',$$

$$-Q + Q' + S = 0,$$

dalle quali immediatamente deduciamo

$$Q = \frac{1}{2}\left(Q_1 + S\right) \qquad (2),$$

$$Q' = \frac{1}{2}\left(Q_1 - S\right) \qquad (3).$$

Ottenuto adunque il valore di Q_1, queste ultime due equazioni ci daranno le spinte domandate Q e Q′.

Per determinare il valore di Q_1, trattandosi della componente orizzontale della reazione degli appoggi di una centina simmetrica e simmetricamente caricata, ci serviremo della stessa formola (5) del numero 15, modificata col trascurare il termine destinato a tener conto delle variazioni di temperatura, ossia ci serviremo della formola (5) del precedente numero. I valori di $d\zeta$, v e $d\sigma$ sono ancora quelli dati dalle formole (6), (7) e (8) dello stesso numero; e, in quanto ai valori di Z′ e di M_x', bisogna distinguere se essi si riferi-

scono ad un punto qualunque M dell'arco DE, oppure ad un punto qualunque M_1 dell'arco EB. Conviene poi notare che le componenti verticali delle reazioni dei due appoggi A e B sono nulle quando la centina si suppone sollecitata in E ed E' dalle due forze S e — S. Il valore di Z' relativo al punto qualunque M dell'arco DE si ottiene scomponendo la forza S applicata in E in due, una parallela e l'altra normale alla tangente Mz, e prendendo la prima di tali componenti; di modo che risulta

$$Z' = S\cos\phi \qquad (4).$$

Il momento M_x' è quello della forza S per rapporto al punto M, e, siccome il braccio $\overline{HI}$ è dato da

$$\overline{HI} = \overline{CI} - \overline{CH} = r(\cos\phi - \cos\beta),$$

risulta

$$M_x' = Sr(\cos\phi - \cos\beta) \qquad (5).$$

Per un punto qualunque M_1 dell'arco EB, non dovendosi considerare la Q_1 nel fare i valori di Z' e di M_x', e, come già si è notato, essendo nulla la componente verticale della reazione in A e B quando si ammette che vi siano le due forze orizzontali +S e —S simmetricamente applicate alla centina, si ha che è nullo, tanto il valore di Z', quanto quello di M_x'.

Dei quattro integrali, che entrano nella formola determinatrice di Q_1, si devono solamente fare i due del numeratore; giacchè quelli del denominatore, dipendendo solamente dalla forma della centina e non dalle forze sollecitanti, risultano precisamente identici a quelli del precedente numero. In quanto agli integrali del numeratore, essi sono

$$\int_0^a \frac{Z'}{E_1\Omega}\,d\zeta = \frac{r}{E_1\Omega}S\int_0^\beta \cos^2\phi\,d\phi,$$

$$\int_0^a \frac{M_x'\upsilon}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta = \frac{r^3}{E_1 I_x}S\int_0^\beta (\cos\phi - \cos\beta)(\cos\phi - \cos\alpha)\,d\phi;$$

di maniera che, traendo partito degli integrali indefiniti già stati riportati nel precedente numero, si ottiene

$$\int_0^a \frac{Z'}{E_1\Omega}\,d\zeta = \frac{1}{2}\frac{r}{E_1\Omega}\,S\,(\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\beta),$$

$$\int_0^a \frac{M_x' v}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2}\frac{r^3}{E_1 I_x}\,S\Big[\beta(1+2\cos\beta\cos\alpha) - \operatorname{sen}\beta\cos\beta - 2\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\Big].$$

Ponendo nella formola determinatrice di Q_1 i valori or ora trovati dei due integrali del numeratore ed i valori dei due integrali del denominatore già stati dedotti nel precedente numero, ci risulta

$$Q_1 = S\,\frac{+\frac{1}{\Omega}\Big(\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\beta\Big) + \frac{r^2}{I_x}\Big[\beta(1+2\cos\beta\cos\alpha) - \operatorname{sen}\beta\cos\beta - 2\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\Big]}{\frac{1}{\Omega}\Big(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\Big) + \frac{r^2}{I_x}\Big[\alpha\,(1+2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\Big]} \quad (6).$$

Sostituendo questo valore di Q_1 nelle formole (2) e (3) immediatamente abbiamo i valori di Q e di Q', cosicchè diremo: che serve la formola (1) per trovare le componenti verticali V e V' delle reazioni dei due appoggi in B ed A, che la formola (6) permette di calcolare Q_1; e che finalmente le formole (2) e (3) vengono in acconcio per la determinazione delle componenti orizzontali Q e Q' delle reazioni.

Se il valore di S è negativo, risultano pure negativi quelli di Q_1 e di Q, di modo che quest'ultima è diretta da B verso ζ, o in altri termini, la centina, invece di spingere all'infuori, tira all'indentro l'appoggio B. In quanto al valore di Q', esso può risultare positivo o negativo, ed agisce sulla centina nel senso della maggiore delle due forze S e Q_1.

36. **Reazioni degli appoggi per una centina sottoposta all'azione di una coppia.** — Supponiamo che sulla sezione retta, corrispondente al punto E (*Fig.* 29) dell'asse primitivo ADB della centina, operi una coppia di momento μ situata nel piano dell'asse medesimo,

e proponiamoci di trovare le componenti orizzontali Q e Q', e le componenti verticali V e V' delle reazioni dei due appoggi B ed A dovute all'azione della coppia suddetta.

Ponendo le condizioni d'equilibrio dell'intiera centina sotto l'azione delle forze esterne, abbiamo

$$-Q+Q'=0,$$

$$V+V'=0,$$

$$\mu+2Vr\operatorname{sen}\alpha=0.$$

La prima di queste equazioni dice che le componenti orizzontali Q e Q' delle reazioni dei due appoggi B ed A sono eguali; la seconda esprime che le componenti verticali delle stesse reazioni sono eguali e di segno contrario; e finalmente la terza dà queste ultime componenti, di maniera che si ha

$$V=-V'=-\frac{\mu}{2r\operatorname{sen}\alpha} \qquad (1).$$

Per determinare le componenti Q e Q', considereremo il punto E' dell'asse della centina simmetrico di E per rapporto alla Ov. Alla sezione retta determinata dal punto E' immagineremo applicata una coppia $-\mu$ simmetrica della μ, e quindi determineremo la reazione orizzontale Q_1 dei due appoggi nell'ipotesi dell'esistenza delle indicate due coppie. Applicando la formola (3) del numero 31 coll'osservare che, nell'ipotesi della soppressione della coppia μ, la reazione Q_2 e quindi la spinta della centina è nulla, abbiamo

$$Q=\frac{1}{2}Q_1 \qquad (2),$$

cosicchè, una volta determinata la Q_1, otterremo Q e Q' col prenderne la metà.

Quando alla centina trovansi applicate le due coppie μ e $-\mu$, sono nulle le componenti verticali delle reazioni in A e B; il valore di Z' è nullo, tanto per la sezione retta corrispondente al punto qualunque M della parte DE dell'asse della centina, quanto per la sezione retta relativa al punto qualunque M_1 dell'altra parte EB. Il

momento μ rappresenta la quantità M_x' per la sezione retta determinata dal punto M, mentre per la sezione retta determinata dal punto M_1 si ha $M_x' = 0$.

La formola determinatrice di Q_1 è sempre la (5) del numero 34; essendo $Z' = 0$, si annulla il primo integrale del numeratore; si ha, pei valori di v e di $d\sigma$ dati dalle formole (7) e (8) del numero 34,

$$\int_0^{\alpha} \frac{M_x' v}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi = \frac{r^2}{E_1 I_x} \mu \int_0^{\beta} (\cos\phi - \cos\alpha) d\phi = \frac{r^2}{E_1 I_x} \mu (\operatorname{sen}\beta - \beta\cos\alpha);$$

ed i due integrali del denominatore hanno gli stessi valori già stati dedotti nel citato numero 34. La formola determinatrice di Q_1 risulta

$$Q_1 = \mu \frac{\frac{r}{I_x}(\operatorname{sen}\beta - \beta\cos\alpha)}{\frac{1}{2}\frac{1}{\Omega}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \frac{1}{2}\frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1 + 2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]}.$$

Prendendo la metà di Q_1, ossia moltiplicando per 2 il suo denominatore, si ottiene, come risulta dalla relazione (2), il domandato valore Q della componente orizzontale della reazione dell'appoggio B, cosicchè

$$Q = Q' = \mu \frac{\frac{r}{I_x}(\operatorname{sen}\beta - \beta\cos\alpha)}{\frac{1}{\Omega}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1 + 2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]} \quad (3).$$

La formola (1) adunque serve per trovare le componenti verticali V e V' delle reazioni degli appoggi B ed A, e la formola (3) prestasi a dedurre le componenti orizzontali Q e Q' delle stesse reazioni.

Il valore di μ può essere positivo o negativo. Se consideriamo per la sezione retta corrispondente al punto M i due assi My ed Mz, il primo contenuto nel piano della sezione medesima e nella direzione di quell'asse principale centrale d'inerzia secondo cui essa è tagliata dal piano di sollecitazione, il secondo tangente all'asse della centina nel punto M, abbiamo: che il valore di μ è positivo quando tende produrre rotazione da z verso y, negativo quando tende produrre rotazione contraria; e che il valore di Q risulta positivo nel primo caso, negativo nel secondo. Se la coppia di momento μ, invece di essere applicata

a dritta della verticale Ov, è applicata a sinistra, oltre di tener conto del segno di μ, bisogna anche tener conto del segno dell'angolo β, il quale sarà positivo o negativo, secondochè sarà contato a dritta o a sinistra della verticale Ov. La formola (3) mette in evidenza che il valore di Q è negativo quando i valori di μ e di β hanno segno contrario; ed in questo caso la centina tira all'indentro invece di spingere all'infuori i suoi appoggi.

37. **Reazioni degli appoggi per una centina sottoposta ad una variazione di lunghezza del suo asse.** — Vogliamo considerare in questo numero una centina, il cui asse, indipendentemente da qualsiasi forza, si allunghi o si accorci, come avviene pei cangiamenti di temperatura.

Incominciamo coll'osservare: che le forze esterne sollecitanti la centina si riducono in questo caso alle sole reazioni dei due appoggi; che, essendo queste forze applicate ai due estremi A e B (*Fig.* 27) della centina, e dovendo farsi equilibrio, di necessità sono dirette secondo la retta AB, e finalmente che le componenti verticali delle reazioni degli appoggi sono nulle.

La formola (5) del numero 15, quando in essa si ponga

$$Z' = 0 \qquad \text{ed} \qquad M_x' = 0,$$

serve a calcolare la spinta orizzontale Q della centina su ciascuno dei due appoggi e quindi la reazione di questi, cosicchè si ha

$$Q = \frac{a\tau}{\displaystyle\int_0^a \frac{1}{E_1 \Omega}\frac{d\xi}{d\sigma}d\xi + \int_0^a \frac{v^2}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi}.$$

I valori dei due integrali che trovansi al denominatore sono quelli già stati trovati nel numero 34; cosicchè, essendo

$$a = r \operatorname{sen}\alpha,$$

risulta

$$Q = \frac{2 E_1 \tau \operatorname{sen}\alpha}{\dfrac{1}{\Omega}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \dfrac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1 + 2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]} \qquad (1).$$

Il segno di Q dipende dal coefficiente τ, e quindi è positivo quando τ è positivo, ossia quando si ha un aumento di temperatura; negativo nel caso contrario. I valori positivi di Q indicano che la centina spinge all'infuori gli appoggi, ed i valori negativi della stessa forza accennano che la centina li tira all'indentro.

38. **Reazioni degli appoggi per una centina sottoposta all'azione di forze discontinue qualunque e ad una variazione di lunghezza prodotta da altre cause.** — Consideriamo ora il caso complesso ed indubitatamente il più frequente nella pratica, ossia quello di una centina la quale si trova sotto l'azione di un numero qualunque di forze applicate in determinati punti e di una variazione di lunghezza prodotta da cause estranee alle forze estrinseche, una delle quali si avrebbe appunto nelle variazioni di lunghezza corrispondenti agli aumenti ed alle diminuzioni di temperatura.

Per determinare le componenti verticali V e V' delle reazioni dei due appoggi B ed A (*Fig.* 14), stabiliremo le due equazioni d'equilibrio del sistema, considerato come invariabile, la prima esprimente che è nulla la somma algebrica delle componenti verticali di tutte le forze che lo sollecitano, la seconda esprimente che è nulla la somma algebrica dei momenti delle stesse forze rispetto al punto A. Queste equazioni saranno le (2) e (3) del numero 14; e così colla statica ordinaria dei sistemi invariabili troveremo le due forze V e V'.

In quanto alle componenti orizzontali Q e Q', ne faremo la determinazione col seguente procedimento. A ciascuna delle forze sollecitanti sostituiremo le sue due componenti, una P verticale e l'altra S orizzontale, ambedue applicate al centro della sezione sulla quale opera la risultante rispettiva, ed una coppia μ; mediante la formola (14) del numero 34 determineremo le componenti orizzontali delle reazioni degli appoggi per le diverse forze P; colle formole (2), (3) e (6) del numero 35 calcoleremo le componenti orizzontali delle reazioni degli appoggi per le diverse forze S orizzontali; adoperando la formola (3) del numero 36 troveremo le componenti orizzontali delle dette reazioni per le diverse coppie μ; e, finalmente, colla formola (1) del numero 37, dedurremo la reazione dei due appoggi per una variazione di lunghezza dell'asse della centina, derivante da cause indipendenti dalle forze sollecitanti. Per quanto si è detto nel numero 27, la somma algebrica delle componenti orizzontali delle reazioni parziali di un appoggio, trovate come or ora si è detto, costituirà la componente orizzontale della reazione totale dello stesso appoggio.

39. **Reazioni degli appoggi per una centina sottoposta all'azione di forze ripartite in modo continuo.** — Dal caso che abbiamo considerato nel precedente numero si passa a quello che ora vogliamo trattare, immaginando che i punti d'applicazione delle diverse forze indefinitamente si accostino gli uni agli altri. Qualunque sia la grandezza di tali forze e le distanze dei punti sui quali esse operano, le componenti orizzontali delle reazioni degli appoggi contro la centina si potranno sempre dedurre col fare le somme di tali componenti dovute alle azioni separate delle diverse forze elementari. Segue da ciò che, allorquando sarà quistione di trovare le componenti orizzontali delle reazioni degli appoggi contro una centina sollecitata da forze ripartite in modo continuo, dovremo fare l'integrale di una reazione orizzontale infinitamente piccola fra determinati limiti. In quanto alle componenti verticali delle dette reazioni, riescirà facile il determinarle colle condizioni d'equilibrio date dalla statica dei corpi rigidi.

Supponendo che abbiasi una centina sollecitata in modo continuo fra le due sezioni rette, corrispondenti ai due punti E_1 ed E_2 (*Fig.* 30) i cui angoli colla verticale sono $E_1CD = \beta_1$ ed $E_2CD = \beta_2$, se chiamasi $Fd\beta$ la forza applicata alla parte di centina cui corrisponde l'arco infinitesimo Ee, si ha che questa forza elementare determina una reazione orizzontale elementare di ciascun piedritto. Onde trovare questa reazione elementare per uno dei due piedritti, basterà scomporre la forza $Fd\beta$ in due secondo gli assi coordinati $O\xi$ ed $O\upsilon$, e considerare anche la coppia derivante dal trasporto di questa forza al centro della sezione cui essa trovasi applicata. Allora, applicando le formole dei numeri 34, 35 e 36, riescirà agevole dedurre le reazioni corrispondenti alle dette componenti ed alla citata coppia, e la somma algebrica di queste costituirà la componente orizzontale dQ della reazione dell'appoggio, stato considerato, per causa della forza elementare $Fd\beta$. Così procedendo, se si indicano con L, M ed N le funzioni cognite di β che moltiplicheranno il fattore $Fd\beta$ nelle espressioni delle tre parti che sommate dànno la dQ, si ha

$$dQ = (L + M + N)\,Fd\beta.$$

Da questa formola si deduce la componente orizzontale Q della reazione dell'appoggio sotto l'azione delle forze tutte distribuite in

modo continuo fra le sezioni corrispondenti ai due punti E_1 ed E_2, ed evidentemente risulta

$$Q = \int_{\beta_1}^{\beta_2} (L + M + N) F d\beta.$$

Sovente il problema è suscettivo di una risoluzione approssimativa che utilmente può essere impiegata nella pratica. Questa risoluzione consiste nel dividere la porzione di centina compresa fra le due sezioni rette determinate dagli angoli β_1 e β_2 in più parti, per ciascuna delle quali si determinerà l'intensità ed il punto d'applicazione della risultante delle forze che la sollecitano. Col prendere il numero di queste parti sufficientemente grande si possono trascurare, per ciascuna di esse, le piccole variazioni delle quantità L, M ed N e determinare la componente orizzontale Q della reazione di un appoggio, come quando si avesse una serie di forze discontinue, ciascuna delle quali sarà una delle risultanti parziali che vennero sostituite alla forza sollecitante totale.

40. **Reazioni degli appoggi per una centina caricata d'un peso uniformemente distribuito su una parte soltanto o sulla totalità della sua lunghezza.** — Ritenuto che le lettere r, α, φ, Q, V, Q' e V' abbiano i significati che loro vennero attribuiti nel numero 33 e che la retta CD (*Fig.* 30) sia la verticale passante pel centro dell'asse della centina, si chiamino:

q il peso che opera sull'unità di lunghezza dell'asse suddetto per una sua parte E_1E_2,

β_1 e β_2 i due angoli E_1CD ed E_2CD i quali determinano l'indicata parte dell'asse,

β l'angolo ECD corrispondente ad un punto qualunque E posto fra E_1 ed E_2.

Il peso elementare sull'arco infinitesimo Ee è

$$q r d\beta;$$

di maniera che, applicando la formola (14) del numero 34, onde

trovare la componente orizzontale dQ della reazione degli appoggi per causa del detto peso elementare, risulta

$$dQ = \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\Omega}(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta) + \frac{r^2}{I_x}\left[\frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta) + \cos\alpha(\cos\beta + \beta\operatorname{sen}\beta - \cos\alpha - \alpha\operatorname{sen}\alpha)\right]}{\frac{1}{\Omega}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1 + 2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]} q r \, d\beta.$$

Si tratta ora di integrare quest'equazione fra i limiti β_1 e β_2. Gli integrali indefiniti che ci conducono allo scopo sono

$$\int d\beta = \beta,$$

$$\int \cos\beta \, d\beta = \operatorname{sen}\beta,$$

$$\int \operatorname{sen}^2\beta \, d\beta = \frac{1}{2}(\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\beta),$$

$$\int \beta \operatorname{sen}\beta \, d\beta = -\beta\cos\beta + \operatorname{sen}\beta;$$

e la formola determinatrice di Q risulta

$$Q = qr \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\Omega}\left[\left(\beta_2 - \beta_1\right)\left(\operatorname{sen}^2\alpha - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}\beta_2\cos\beta_2 - \operatorname{sen}\beta_1\cos\beta_1\right)\right] + \frac{r^2}{I_x}\left[\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\alpha - \alpha\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \frac{5}{4}\right)\left(\beta_2 - \beta_1\right) + \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}\beta_2\cos\beta_2 - \operatorname{sen}\beta_1\cos\beta_1\right) + \cos\alpha\left\{2(\operatorname{sen}\beta_2 - \operatorname{sen}\beta_1) - \beta_2\cos\beta_2 + \beta_1\cos\beta_1\right\}\right]}{\frac{1}{\Omega}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1 + 2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]} \quad (1).$$

Se la parte E_1E_2 (*Fig.* 31) della centina, sulla quale trovasi il carico uniformemente distribuito, è simmetrica rispetto alla verticale Ov, indicando con γ l'angolo $DCE_1 = DCE_2$, si otterrà il valore di Q conveniente al caso particolare col fare nell'ultima formola

$$\beta_1 = -\gamma \qquad \text{e} \qquad \beta_2 = \gamma;$$

cosicchè la componente orizzontale delle reazioni dei piedritti sarà data da

$$Q = q r \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\Omega}\left[2\gamma\left(\operatorname{sen}^2\alpha - \frac{1}{2}\right) + \operatorname{sen}\gamma\cos\gamma\right] + \frac{r^2}{I_x}\left[\begin{array}{l} 2\gamma\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\alpha - \alpha\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \frac{5}{4}\right) \\ +\frac{1}{2}\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma + 2\cos\alpha\,(2\operatorname{sen}\gamma - \gamma\cos\gamma)\end{array}\right]}{\frac{1}{\Omega}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1+2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]} \qquad (2).$$

Se finalmente il peso si trova uniformemente distribuito su tutto l'asse della centina, come succede quando vogliasi determinare la componente orizzontale delle reazioni degli appoggi dovute al peso proprio dell'arco, si farà

$$\gamma = \alpha$$

nell'ultima formola: e risulta allora la seguente formola determinatrice di Q

$$Q = q r \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\Omega}\left[2\alpha\left(\operatorname{sen}^2\alpha - \frac{1}{2}\right) + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right] + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha\left(\frac{1}{2} - 5\cos^2\alpha - 2\alpha\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right) + \frac{9}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]}{\frac{1}{\Omega}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1+2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]} \qquad (3).$$

Questa formola, sopprimendo i due termini moltiplicati pel fattore $\frac{1}{\Omega}$ e cangiando α in Φ, si riduce alla formola (11) del numero 170 delle prime quattro edizioni di quel volume dell'*Arte di fabbricare*, nel quale abbiamo trattato della resistenza dei materiali e della stabilità delle costruzioni, la qual formola (11) venne dedotta dalle equazioni (4) del numero 167 del citato volume, esprimenti le variazioni di coordinate dell'asse di una centina quando si trascurino gli effetti di quelle componenti delle forze sollecitanti le quali sono tangenti all'asse medesimo.

Se il peso non è applicato all'asse della centina, ma alla sua superficie superiore, avviene che ciascun elemento di questo peso, operando alla sommità di una sezione inclinata, avrà un certo momento per rapporto all'orizzontale passante pel centro di superficie della sezione stessa e che quindi, volendosi tener conto di tutto, sarebbe anche il caso di trovare la parte di spinta proveniente da questo fatto. L'influenza del detto momento sul valore della spinta è però sempre assai piccola, e nella pratica, avuto anche riguardo alle incertezze della teoria, non conviene arrestarsi a così minuti particolari.

41. **Reazioni degli appoggi per una centina caricata di un peso uniformemente distribuito su una parte soltanto o sulla totalità della proiezione orizzontale del suo asse.** — Incominciando dal caso più generale in cui il peso è distribuito solamente sulla parte E_1E_2 (*Fig.* 30) dell'asse della centina, e chiamando p quello che corrisponde all'unità di lunghezza misurata sulla proiezione orizzontale $\overline{F_1F_2}$, si ha: che l'elemento di fibra media $\overline{Ee} = r\,d\beta$, la cui proiezione orizzontale è $r\cos\beta\,d\beta$, porta il peso

$$pr\cos\beta\,d\beta;$$

e che la spinta elementare dQ, prodotta da questo peso infinitesimo, risulta, per la formola (14) del numero 34,

$$dQ = \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\Omega}(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta) + \frac{r^2}{I_x}\left[\frac{1}{2}(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta) + \cos\alpha(\cos\beta + \beta\operatorname{sen}\beta - \cos\alpha - \alpha\operatorname{sen}\alpha)\right]}{\frac{1}{\Omega}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1 + 2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]} pr\cos\beta d\beta.$$

Bisogna ora integrare quest'equazione fra i limiti β_1 e β_2 definiti dagli angoli E_1CD ed E_2CD, ed occorre perciò far uso degli integrali indefiniti

$$\int \cos\beta d\beta = \operatorname{sen}\beta,$$

$$\int \operatorname{sen}^2\beta\cos\beta d\beta = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\beta,$$

$$\int \cos^2\beta d\beta = \frac{1}{2}(\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\beta),$$

$$\int \beta\operatorname{sen}\beta\cos\beta d\beta = \frac{1}{2}\beta\operatorname{sen}^2\beta - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^2\beta d\beta = \frac{1}{2}\beta\operatorname{sen}^2\beta - \frac{1}{4}(\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\beta),$$

i quali, presi fra gli indicati limiti e posti nel valore di dQ, dànno

$$Q = pr\,\frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\Omega}\left[(\operatorname{sen}\beta_2 - \operatorname{sen}\beta_1)\operatorname{sen}^2\alpha - \frac{1}{3}(\operatorname{sen}^3\beta_2 - \operatorname{sen}^3\beta_1)\right] + \frac{r^2}{I_x}\left[\begin{array}{l} \frac{1}{4}(\beta_2 - \beta_1)\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha(\beta_2\operatorname{sen}^2\beta_2 - \beta_1\operatorname{sen}^2\beta_1) \\ + \left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\alpha - \alpha\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 1\right)\left(\operatorname{sen}\beta_2 - \operatorname{sen}\beta_1\right) \\ + \frac{3}{4}\cos\alpha(\operatorname{sen}\beta_2\cos\beta_2 - \operatorname{sen}\beta_1\cos\beta_1) \\ - \frac{1}{6}(\operatorname{sen}^3\beta_2 - \operatorname{sen}^3\beta_1) \end{array}\right]}{\frac{1}{\Omega}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1 + 2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]} \quad (1).$$

Ammesso che la parte E_1E_2 (*Fig.* 31) della centina, sulla quale trovasi il carico uniformemente distribuito sulla proiezione orizzontale F_1F_2, sia simmetrica rispetto alla verticale Ov, chiamando γ l'angolo $DCE_1 = DCE_2$, si ottiene il valore di Q, il quale conviene pel caso particolare, col porre nell'ultima formola

$$\beta_1 = -\gamma \qquad \text{e} \qquad \beta_2 = \gamma;$$

e quindi, in questo caso, le componenti orizzontali delle reazioni dei piedritti sono date dalla formola

$$Q = pr\,\frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\Omega}\left(2\operatorname{sen}^2\alpha - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^2\gamma\right)\operatorname{sen}\gamma + \frac{r^2}{I_x}\left[\left(\frac{1}{2}+\operatorname{sen}^2\gamma\right)\gamma\cos\alpha + \frac{3}{2}\cos\alpha\operatorname{sen}\gamma\cos\gamma + 2\left(\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\alpha - \alpha\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - 1\right)\operatorname{sen}\gamma - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\gamma\right]}{\frac{1}{\Omega}(\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1+2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]} \qquad (2).$$

Se finalmente si ha un peso uniformemente distribuito sulla proiezione orizzontale dell'asse dell'intiera centina, si ottiene la componente orizzontale Q della reazione di ciascun appoggio col fare

$$\gamma = \alpha$$

nell'ultima formola, e risulta

$$Q = pr\,\frac{-\frac{2}{3}\frac{1}{\Omega}\operatorname{sen}^3\alpha + \frac{r^2}{I_x}\left[\left(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}^2\alpha\right)\alpha\cos\alpha - \frac{1}{2}\left(1-\frac{7}{3}\operatorname{sen}^2\alpha\right)\operatorname{sen}\alpha\right]}{\frac{1}{\Omega}(\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1+2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]} \qquad (3).$$

Quando in questa formola si sopprimano i due termini moltiplicati per il fattore $\frac{1}{\Omega}$ e si cangi α in Φ, si ottiene la formola (3) del numero 171 di quel volume dell'*Arte di fabbricare* nel quale abbiamo trattato della resistenza dei materiali e della stabilità delle costruzioni, la qual formola (3) venne dedotta dalle equazioni (4) del numero 167 del citato volume, esprimenti le variazioni di coordinate dell'asse di una centina, nell'ipotesi che non si tenga conto delle forze sollecitanti le quali sono tangenti all'asse medesimo.

42. **Reazioni degli appoggi per una centina sollecitata da un carico d'acqua su una parte soltanto o sulla totalità della sua lunghezza.** — Per risolvere questo problema adotteremo il metodo d'approssimazione stato indicato sul finire del numero 39.

Sia ADB (*Fig.* 32) l'asse circolare della centina, od E_1E_2 quella sua parte sulla quale opera un carico d'acqua. Ritengasi che le lettere r, α, ϕ, Q, V, Q' e V' abbiano i significati che loro vennero attribuiti nel numero 33, ed ammettasi che il carico d'acqua si elevi fino al livello determinato dalla retta GH. Considerando sul detto asse un punto qualunque E compreso fra E_1 ed E_2 e chiamando

θ_1 e θ_2 i due angoli E_1CD ed E_2CD,

θ l'angolo ECD corrispondente al punto qualunque E posto sull'asse e compreso fra E_1 ed E_2,

Π il peso dell'unità di volume d'acqua,

c l'altezza della retta $\overline{GH}$ o del livello del liquido al di sopra dell'estradosso LKM della centina,

d la distanza $\overline{DK}$ dell'asse della centina dall'estradosso stesso ossia la semi-altezza della centina,

l l'altezza del prisma di liquido sopportato dalla centina, presa quest'altezza nel senso perpendicolare alla parete verticale della centina stessa,

evidentemente abbiamo: che la lunghezza di un arco infinitesimo Ee dell'asse è data da

$$r\,d\theta;$$

che l'arco corrispondente E'e' preso sull'estradosso vale

$$(r+d)\,d\theta;$$

che la lunghezza $\overline{E'F'}$ della verticale condotta da E' fino ad incontrare la orizzontale GH è data

$$\overline{E'F'} = \overline{NI} = \overline{CI} - \overline{CN} = r + d + c - (r + d)\cos\theta,$$

e che quindi la pressione elementare, esercitata dal liquido su quella parte della centina alla quale corrisponde la lunghezza E*e* sull'asse e la lunghezza E'*e'* sull'estradosso, essendo il peso di un cilindro liquido avente per base quella premuta e per altezza la profondità del centro di questa base sotto la GH, risulta

$$\Pi l (r+d)\Big[r + d + c - (r + d)\cos\theta\Big]\,d\theta,$$

ossia, ponendo $r + d$ fattore comune,

$$\Pi l (r + d)^2 \left(\frac{c}{r+d} + 1 - \cos\theta\right) d\theta.$$

Questa pressione elementare è diretta normalmente all'estradosso, e quindi anche all'asse della centina, di maniera che ammette due componenti: una verticale, diretta dall'alto al basso, espressa da

$$\Pi l (r + d)^2 \left(\frac{c}{r+d} + 1 - \cos\theta\right) \cos\theta\, d\theta \qquad (1);$$

l'altra orizzontale, diretta da dritta verso sinistra, il cui valore è

$$\Pi l (r + d)^2 \left(\frac{c}{r+d} + 1 - \cos\theta\right) \operatorname{sen}\theta\, d\tau \qquad (2).$$

Se ora consideriamo sull'asse della centina due punti ε' ed ε'', a cui corrispondono gli angoli $\varepsilon' CD = \theta'$ ed $\varepsilon'' CD = \theta''$, e se vogliamo la componente verticale P e la componente orizzontale S della pressione che l'acqua esercita sulla parte corrispondente $\eta'\eta''$ dell'estra-

dosso, bisognerà integrare le espressioni (1) e (2) fra i limiti θ' e θ''. Ponendo per brevità di scritturazione

$$\left.\begin{aligned} \pi l\,(r+d)^2 &= A \\ \frac{c}{r+d}+1 &= B \end{aligned}\right\} \qquad (3),$$

i valori di P e di S risultano

$$P = A\int_{\theta'}^{\theta''} (B-\cos\theta)\cos\theta\,d\theta,$$

$$S = A\int_{\theta'}^{\theta''} (B-\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta.$$

Gli integrali indefiniti, necessari a conoscersi per la determinazione dei valori di P e di S, sono

$$\int \cos\theta\,d\theta = \mathrm{sen}\,\theta,$$

$$\int \mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = -\cos\theta,$$

$$\int \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}(\theta+\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta),$$

$$\int \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\theta,$$

e, facendo le integrazioni, si ottiene

$$P = A\left[-\frac{1}{2}(\theta''-\theta')+B(\operatorname{sen}\theta''-\operatorname{sen}\theta')-\frac{1}{2}(\operatorname{sen}\theta''\cos''\theta-\operatorname{sen}\theta'\cos\theta')\right] \quad (4),$$

$$S = A\left[B-\frac{1}{2}(\cos\theta'+\cos\theta'')\right](\cos\theta'-\cos\theta'') \quad (5).$$

La composizione delle pressioni elementari, che hanno luogo da η' ed η'', dà la risultante delle due forze P ed S. Le dette pressioni elementari passano pel centro C, perchè normali all'estradosso, e quindi anche l'indicata risultante passa per questo centro. Segue da ciò che, per determinare la sezione retta $b\,c$ (*Fig.* 33) della centina sulla quale operano le due forze P ed S, basta trovare l'angolo $c\,\mathrm{C}\,\mathrm{D}$ che la direzione della risultante delle dette forze fa colla verticale. Ora, chiamando

β l'angolo suindicato,

avremo che esso è dato da

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{S}{P} \quad (6),$$

o anche da

$$\cos\beta = \frac{P}{\sqrt{P^2+S^2}} \quad (7)$$

Prima di continuare nella risoluzione del problema che costituisce lo scopo di questo numero, facciamo ancora osservare che le due forze P ed S, ammettendo una risultante U la quale è tutta contenuta nella sezione retta $b\,c$, complessivamente considerate non possono dar origine ad una coppia tendente a produrre rotazione intorno all'orizzontale proiettata nel punto g; cosicchè le dette due forze operano sulla centina come se fossero applicate nel centro g della sezione retta in cui si trova la loro risultante U.

Siamo ora in grado di indicare con qual metodo si può procedere onde determinare le reazioni degli appoggi per una centina sollecitata da un carico d'acqua per una determinata parte E_1E_2 (*Fig.* 32) del suo asse. Si incominci col calcolare, mediante le formole (3), i valori delle costanti A e B, e quindi successivamente si facciano le seguenti operazioni: si segnino le sezioni rette determinate dai due punti E_1 ed E_2 intersecanti l'estradosso in E_1' ed E_2' (*Fig.* 34); si divida l'arco $E_1'E_2'$ in parti non tanto grandi nei punti e_1', e_2', e_3', ...; si considerino le pressioni dell'acqua sulle porzioni di estradosso della centina rappresentate in $E_1'e_1'$, $e_1'e_2'$, $e_2'e_3'$, ...; mediante le formole (4) e (5) si trovino i valori particolari P_1, P_2, P_3, ... di P ed i valori particolari S_1, S_2, S_3, ... di S per tutte queste porzioni; e finalmente si deducano, mediante la formola (6) o mediante la formola (7), gli angoli β_1, β_2, β_3, ... determinanti le sezioni rette a cui sono applicate le forze P_1 ed S_1, P_2 ed S_2, P_3 ed S_3, ... Ponendo successivamente nella formola (14) del numero 34 P_1, P_2, P_3, ... invece di P e β_1, β_2, β_3, ... invece di β, si ottengono i valori particolari Q_{1P}, Q_{2P}, Q_{3P}, ..., i quali rappresentano le componenti orizzontali delle reazioni degli appoggi B ed A per causa delle forze P_1, P_2, P_3, ... In modo analogo, successivamente ponendo nella formola (6) del numero 35 $-S_1$, $-S_2$, $-S_3$, ... in luogo di S e β_1, β_2, β_3, ... in luogo di β, si possono dedurre i valori particolari (Q_1^s), (Q_2^s), (Q_3^s), ... di Q_1, i quali, posti nelle equazioni (2) e (3) dello stesso numero in un coi corrispondenti valori di S, vengono in acconcio per la determinazione delle componenti orizzontali Q_1^s, Q_2^s, Q_3^s, ... delle reazioni dell'appoggio B (*Fig.* 32) e per la determinazione delle stesse componenti $Q'_1{}^s$, $Q'_2{}^s$, $Q'_3{}^s$, ... delle reazioni dell'appoggio A.

Le due somme

$$Q_{1P} + Q_{2P} + Q_{3P} + \ldots\ldots + Q_1^s + Q_2^s + Q_3^s + \ldots\ldots$$

$$Q_{1P} + Q_{2P} + Q_{3P} + \ldots\ldots + Q'_1{}^s + Q'_2{}^s + Q'_3{}^s + \ldots\ldots$$

dànno, la prima la componente orizzontale Q della reazione dell'appoggio B, e la seconda la componente orizzontale Q' della reazione dell'appoggio A.

In quanto alle componenti verticali V e V' delle reazioni degli

stessi appoggi, ci sono esse somministrate dalla statica dei corpi rigidi, col risolvere le due equazioni le quali risultano ponendo: che deve essere nulla la somma algebrica delle componenti verticali delle forze che sollecitano la centina e che deve pure essere nulla la somma algebrica dei momenti delle stesse forze rispetto al punto A, od anche rispetto ad un altro punto, per esempio, rispetto al centro C. Ponendo nella formola (4) $\theta' = \theta_1$ e $\theta'' = \theta_2$, si ottiene la componente verticale P_i della pressione prodotta dall'intiero carico d'acqua. Per essere

$$\overline{OB} = r \operatorname{sen} \alpha,$$

$$\overline{CO} = r \cos \alpha,$$

e, prendendo i momenti rispetto al punto C, le equazioni determinatrici di V e di V' risultano

$$V + V' - P_i = 0,$$

$$Q - Q' + (V - V') \operatorname{tang} \alpha = 0.$$

Se la parte della centina sulla quale opera il carico d'acqua è simmetrica rispetto alle verticale Ov (*Fig.* 35), converrà scomporre separatamente le due parti KE_2' e KE_1' della superficie d'estradosso, le quali si trovano una a dritta e l'altra a sinistra del giunto verticale IK alla chiave. Gli archi Ke_1', $e_1'e_2'$, $e_2'e_3'$, ... si assumeranno rispettivamente eguali agli archi Ke_1'', $e_1''e_2''$, $e_2''e_3''$, ..., perchè allora i valori dei P, degli S e dei β riferentisi ai primi saranno pur quelli che convengono pei secondi. Nel dedurre i valori delle componenti orizzontali delle reazioni degli appoggi si potranno così considerare le coppie di valori di P ed S, i quali sono simmetrici rispetto alla verticale Ov; la formola (13) del numero 34 converrà per dedurre le componenti orizzontali delle dette reazioni per ogni coppia dei valori di P; e la formola (6) del numero 35 servirà alla ricerca delle stesse componenti per ogni coppia dei valori di S,

ARTICOLO II.

Variazioni di saetta nelle centine circolari con sezione retta costante.

43. **Indicazione dei problemi che si vogliono risolvere in questo articolo.** — I problemi che ci proponiamo di risolvere in quest'articolo hanno per precipuo scopo di far vedere come si possa calcolare l'abbassamento che sarà per avvenire nel punto più elevato di una centina sotto l'azione delle forze, le quali saranno per sollecitarla, allorquando essa sarà in opera. Esamineremo solo alcuni casi: quello di una centina sollecitata da due pesi simmetricamente disposti rispetto alla sezione più elevata; quello di una centina sotto l'azione di un peso uniformemente distribuito sulla lunghezza intiera del suo asse; quello di una centina posta sotto l'azione di un peso uniformemente distribuito sull'intiera lunghezza della sua corda; e quello di una centina che si dilata o si restringe per cause indipendenti dai carichi. Finalmente si farà vedere come il problema possa essere risoluto anche per una centina posta sotto l'azione di forze qualunque quando siano soddisfatte le condizioni ristrettive del numero 32.

Tutte le denominazioni già state adottate nel precedente articolo saranno pure conservate per la risoluzione dei problemi che immediatamente passiamo a trattare.

44. **Variazione di saetta per una centina sottoposta all'azione di due pesi simmetricamente disposti rispetto alla sua sezione culminante.** — Trovandosi la centina nelle condizioni espresse nel numero 32 e di più essendo essa simmetricamente caricata, il valore di Δv_0, dato dalla penultima formola del numero 12 è quello che serve a far conoscere la domandata variazione di saetta. Trascurando l'effetto dello scorrimento trasversale, dicendo f la saetta $\overline{OD}$ (*Fig.* 27) che nella citata formola è indicata colla lettera v_0, e trascurando il termine τf, giacchè essendo nostro scopo di determinare la variazione di saetta della centina nell'ipotesi dei due pesi P, uno applicato in E e l'altro in E', non dobbiamo punto tener conto dei

termini provenienti dalle dilatazioni e dai restringimenti causati dai cangiamenti di temperatura, abbiamo

$$\Delta f = -\int_0^a \frac{Z}{E_1 \Omega} \frac{d\upsilon}{d\zeta} d\zeta - \int_0^a (a - \zeta) \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta \qquad (1).$$

Gli assi delle coordinate ζ ed υ, che trovansi nell'ultima formola, sono quelli definiti dalle due rette $O\zeta$ ed $O\upsilon$, la prima passante per gli estremi A e B dell'asse della centina, la seconda perpendicolare alla AB nel suo punto di mezzo O; e la lunghezza a rappresenta la semi-corda $\overline{OB}$.

Incominciando coll'esprimere ζ, υ, $d\upsilon$ e $d\sigma$ per un punto qualunque M dell'asse della centina in funzione dell'angolo $DCM = \phi$, abbiamo

$$\zeta = r \operatorname{sen} \phi, \qquad (2),$$

$$\upsilon = r(\cos \phi - \cos \alpha),$$

$$d\upsilon = -r \operatorname{sen} \phi \, d\phi \qquad (3),$$

$$d\sigma = r \, d\phi \qquad (4),$$

Anche i valori della forza Z e del momento M_x si devono esprimere in funzione della variabile ϕ. Per raggiungere l'intento in modo da poter convenientemente fare le due somme che si trovano nella formola (1), bisogna procurarsi i valori di Z e di M_x, tanto per un punto qualunque dell'arco DE, quanto per un punto qualunque dell'arco EB. Nel fare i valori di Z e di M_x bisogna tener conto della componente orizzontale Q_1 e della componente verticale V_1 della reazione di ciascuno dei due appoggi A e B. La forza Q_1 è una quantità nota che si calcola colla formola (13) del numero 34 e la forza V_1 è il peso P applicato nei punti E ed E' simmetricamente disposti per rapporto al punto D. Per un punto qualunque M fra D ed E, il valore di Z non è altro che la somma algebrica delle proiezioni sulla Mz (tangente in M alla curva DB) della forza verticale

— P applicata in E, della forza orizzontale Q_1 applicata in B e della forza verticale P applicata pure in B, e quindi si ha

$$Z = -Q_1 \cos\phi \qquad (5).$$

Il momento M_x è la somma algebrica dei momenti, per rapporto al punto M, della forza — P applicata in E e delle forze Q_1 e P applicate in B, e quindi, per essere

$$\overline{MI} = r \operatorname{sen}\phi,$$

$$\overline{OI} = r(\cos\phi - \cos\alpha),$$

$$\overline{HE} = r \operatorname{sen}\beta,$$

$$\overline{OH} = r(\cos\beta - \cos\alpha).$$

$$\overline{BO} = r \operatorname{sen}\alpha,$$

il detto momento M_x risulta

$$M_x = Pr(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta) - Q_1 r(\cos\phi - \cos\alpha) \qquad (6).$$

Per un punto qualunque M_1 dell'arco EB, si ha il valore di Z nella somma delle proiezioni delle due forze Q_1 e P applicate in B sulla retta $M_1 z_1$ (tangente in M_1 alla curva DB); cosicchè risulta la formola

$$Z = P \operatorname{sen}\phi - Q_1 \cos\phi \qquad (7),$$

nella quale ϕ rappresenta l'ascissa angolare M_1CD del punto M_1. Per fare il momento M_x relativamente al punto M_1, bisogna considerare le sole due forze P e Q_1 applicate in B, di maniera che si ha

$$M_x = Pr(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi) - Q_1 r(\cos\phi - \cos\alpha) \qquad (8),$$

nella quale ϕ è sempre l'ascissa angolare M_1CD del punto M_1.

Ai limiti $\zeta = 0$ e $\zeta = a$, fra i quali si devono prendere i due integrali che si trovano nella formola (1), corrispondono rispettivamente i valori particolari 0 ed α di ϕ. Siccome le quantità Z ed M_x sono espresse da una differente funzione di ϕ, nel passare dai punti dell'arco DE a quelli dell'arco EB, è necessario che ciascuno di detti integrali venga diviso in due, il primo fra i limiti $\phi = 0$ e $\phi = \beta$, il secondo fra i limiti $\phi = \beta$ e $\phi = \alpha$. Finalmente, ammettendo che la centina sia omogenea e di sezione retta costante, ne risulta che sono pure costanti i due prodotti $E_1\Omega$ ed $E_1 I_x$. Sostituendo i valori di ζ, di $d\upsilon$, di $d\sigma$, di Z e di M_x nei due termini del secondo membro della (1), avendo riguardo a quanto or ora si è detto, e, osservando che

$$a = r \operatorname{sen} \alpha, \tag{9},$$

abbiamo

$$\int_0^a \frac{Z}{E_1\Omega} \frac{d\upsilon}{d\zeta} d\zeta = \frac{r}{E_1\Omega} \left(P \int_\beta^\alpha \operatorname{sen}^2\phi \, d\phi + Q_1 \int_0^\alpha \operatorname{sen}\phi \cos\phi \, d\phi \right),$$

$$\int_0^a (a-\zeta) \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta = \frac{r^3}{E_1 I_x} \left\{ + P \left[\begin{array}{l} + \operatorname{sen}\alpha \displaystyle\int_0^\alpha (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi) \, d\phi \\ - \operatorname{sen}\beta \displaystyle\int_0^\beta (\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi) \, d\phi \\ - \displaystyle\int_\beta^\alpha (\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}^2\phi) \, d\phi \end{array} \right] \right.$$

$$\left. - Q_1 \int_0^\alpha \left[\begin{array}{l} - \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cos\phi \\ + \cos\alpha \operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\phi \cos\phi \end{array} \right] d\phi \right\}.$$

Ma si ha

$$\int d\phi = \phi,$$

$$\int \cos\phi \, d\phi = \operatorname{sen}\phi,$$

$$\int \operatorname{sen}\phi \, d\phi = -\cos\phi,$$

$$\int \operatorname{sen}\phi \cos\phi \, d\phi = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\phi,$$

$$\int \operatorname{sen}^2\phi \, d\phi = \frac{1}{2}(\phi - \operatorname{sen}\phi\cos\phi),$$

e quindi si deduce

$$\int_0^a \frac{Z}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\xi}d\xi = \frac{1}{2}\frac{r}{E_1\Omega}\left[P(\alpha-\beta-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\beta\cos\beta)+Q_1\operatorname{sen}^2\alpha\right],$$

$$\int_0^a (a-\zeta)\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi = \frac{r^3}{E_1 I_x}\left\{+P\left[\begin{array}{l}+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\alpha\operatorname{sen}^2\alpha-\beta\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\\ +\frac{3}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\beta\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\\ -\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta\end{array}\right]\right.$$

$$\left.+Q_1\left(\alpha\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\alpha-\cos\alpha+1\right)\right\};$$

cosicchè la formola determinatrice di Δf risulta

$$\Delta f = \left[-\frac{1}{2}\frac{r}{E_1\Omega}\left[P(\alpha-\beta-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\beta\cos\beta)+Q_1\operatorname{sen}^2\alpha\right] + \frac{r^3}{E_1 I_x}\left\{ -P\left[+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)+\alpha\operatorname{sen}^2\alpha-\beta\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \right.\right.\right.$$
$$\left.\left. +\frac{3}{2}\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\beta\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta \right.\right.$$
$$\left.\left. -\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta \right] \right.$$
$$\left. -Q_1\left(\alpha\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha-\frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\alpha-\cos\alpha+1\right) \right\} \Bigg] \quad (10).$$

Ponendo in questa formola i valori noti di r, Ω, I_x, E_1, α, β, P e Q_1, si ottiene la variazione Δf della saetta della centina sotto l'azione di due pesi P, simmetricamente applicati per rapporto alla sua sezione di mezzo.

45. **Variazione di saetta per una centina caricata di un peso uniformemente distribuito sulla lunghezza intiera del suo asse.** — Siccome la centina si trova nelle condizioni espresse nel numero 32, e siccome è essa simmetricamente caricata, serve ancora la formola (1) del numero precedente per la determinazione della variazione Δf della sua saetta.

Sia M (*Fig.* 30) un punto qualunque dell'asse della centina ed E e una parte infinitesima dell'asse medesimo fra i due punti B ed M, si indichino con

ϕ l'angolo M C D che la sezione retta qualunque corrispondente al punto M fa colla verticale C v, con

β l'angolo E C D

e si conservino alle lettere q, r, α, Ω, I_x ed E_1 i significati che già loro vennero attribuiti in questo capitolo e segnatamente nel numero 40.

Il peso elementare applicato all'arco infinitesimo E e è

$$q\,r\,d\beta,$$

ed il braccio di questo peso per rapporto all'orizzontale proiettata nel punto M vale

$$r(\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\phi).$$

La componente verticale della reazione di ciascun appoggio risulta

$$q\,r\,\alpha,$$

ed il braccio di questa forza per rapporto alla detta orizzontale è

$$r(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi).$$

La componente orizzontale della stessa reazione è una quantità nota Q che si deduce applicando le formole del numero 40, ed avente per braccio, rispetto alla orizzontale proiettata in M, l'espressione

$$r(\cos\phi - \cos\alpha).$$

La forza Z si ottiene proiettando il peso applicato all' arco M B non che le due componenti verticale ed orizzontale della reazione dell'appoggio B sulla tangente all'arco circolare D B nel punto M, e quindi si ha

$$Z = \int_{\phi}^{\alpha} q\,r\operatorname{sen}\phi\,d\beta - q\,r\,\alpha\operatorname{sen}\phi - Q\cos\phi,$$

ossia, integrando e riducendo

$$Z = -\,q\,r\,\phi\operatorname{sen}\phi - Q\cos\phi.$$

Il momento M_x è la somma algebrica dei momenti, per rapporto al punto M, del peso applicato all'arco M B e delle due accennate componenti delle reazioni dell'appoggio B, cosicchè si ha

$$M_x = -\int_{\phi}^{\alpha} q\,r^2(\operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\phi)d\beta + q\,r^2\alpha(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi) - Q\,r(\cos\phi - \cos\alpha),$$

ossia integrando e riducendo

$$M_x = -q r^2 (\cos\phi - \cos\alpha + \phi \operatorname{sen}\phi - \alpha \operatorname{sen}\alpha) - Q r (\cos\phi - \cos\alpha).$$

Sostituendone i due termini della citata formola determinatrice di Δf i trovati valori di Z e di M_x, non che quelli di ζ, $d\upsilon$, $d\sigma$ ed a dati dalle formole (2), (3), (4) e (9) del precedente numero, ed osservando che ai limiti $\zeta = 0$ e $\zeta = a$ corrispondono rispettivamente i limiti 0 ed α dell'ascissa angolare ϕ, abbiamo per una centina omogenea e di sezione retta costante

$$\int_0^a \frac{Z}{E_1 \Omega} \frac{d\upsilon}{d\zeta} d\zeta = \frac{r}{E_1 \Omega} \left(q r \int_0^\alpha \phi \operatorname{sen}^2\phi \, d\phi + Q \int_0^\alpha \operatorname{sen}\phi \cos\phi \, d\phi \right),$$

$$\int_0^a (a-\zeta) \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta = -\frac{r^3}{E_1 I_x} \left\{ \begin{array}{l} + q r \displaystyle\int_0^\alpha \left[\begin{array}{l} -\operatorname{sen}\alpha (\cos\alpha + \alpha \operatorname{sen}\alpha) \\ + \operatorname{sen}\alpha \cos\phi \\ + (\cos\alpha + \alpha \operatorname{sen}\alpha) \operatorname{sen}\phi \\ + \operatorname{sen}\alpha . \phi \operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\phi \cos\phi \\ - \phi \operatorname{sen}^2\phi \end{array} \right] d\phi \\ + Q \displaystyle\int_0^\alpha \left[\begin{array}{l} -\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha \cos\phi \\ + \cos\alpha \operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\phi \cos\phi \end{array} \right] d\phi \end{array} \right\}.$$

Gli integrali moltiplicati per il fattore costante Q sono quelli stessi che nelle espressioni delle somme

$$\int_0^a \frac{Z}{E_1 \Omega} \frac{d\upsilon}{d\zeta} d\zeta \qquad \text{e} \qquad \int_0^a (a-\zeta) \frac{M_x}{E_1 I_x} \frac{d\sigma}{d\zeta} d\zeta$$

del numero precedente trovansi moltiplicati pel fattore costante Q_1. È adunque inutile occuparsi di questi integrali, giacchè già si conoscono, e basta procurarsi quelli moltiplicati pel fattore $q r$. Gli integrali indefiniti occorrenti per fare le somme moltiplicate per $q r$ sono

i primi quattro del numero precedente, e di più i due $\int \varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi$ e $\int \varphi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi$ dati da

$$\int \varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi = -\varphi \cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi \qquad (f),$$

$$\int \varphi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4}\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\varphi \qquad (g).$$

(*f*) Il valore di $\int \varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi$ assai facilmente si fa col metodo dell'integrazione per parti, e si ha

$$\int \varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\varphi = -\int \varphi \, d\cos\varphi = -\varphi\cos\varphi + \int \cos\varphi \, d\varphi = -\varphi\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi.$$

(*g*) Il valore di $\int \varphi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi$ si fa coll'integrazione per parti, e successivamente si ottiene

$$\int \varphi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi = -\int \varphi \operatorname{sen}\varphi \, d\cos\varphi = -\varphi \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + \int \cos\varphi . \, d\varphi \operatorname{sen}\varphi$$

$$= -\varphi \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + \int \cos\varphi \, (\operatorname{sen}\varphi \, d\varphi + \varphi \cos\varphi \, d\varphi)$$

$$= -\varphi \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + \int \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi + \int \varphi \, (1 - \operatorname{sen}^2\varphi) \, d\varphi$$

$$= -\varphi \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi + \frac{1}{2}\varphi^2 - \int \varphi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi.$$

Considerando l'equazione costituita dal primo e dall'ultimo membro di questa successione di eguaglianze e ricavando da essa il valore di $\int \varphi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi$, troviamo appunto

$$\int \varphi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4}\varphi^2 - \frac{1}{2}\varphi \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2\varphi.$$

Facendo ora le integrazioni che si trovano nelle espressioni delle due somme $\int_0^a \frac{Z}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\xi}d\xi$ e $\int_0^a (a-\zeta)\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi$, otteniamo

$$\int_0^a \frac{Z}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\xi}d\xi = \frac{1}{2}\frac{r}{E_1\Omega}\left[qr\left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha + \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\alpha\right) + Q\,\mathrm{sen}^2\alpha\right],$$

$$\int_0^a (a-\zeta)\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi = \frac{r^3}{E_1 I_x}\left\{+qr\left[\begin{array}{l} +\alpha^2\left(\frac{1}{4}+\mathrm{sen}^2\alpha\right) \\ -\alpha\,\mathrm{sen}\alpha\left(1-\frac{5}{2}\cos\alpha\right) \\ -\cos\alpha-\frac{9}{4}\mathrm{sen}^2\alpha+1\end{array}\right]\right.$$

$$\left. +Q\left(\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha-\frac{3}{2}\mathrm{sen}^2\alpha-\cos\alpha+1\right)\right\}.$$

Ponendo i trovati valori di $\int_0^a \frac{Z}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\xi}d\xi$ e di $\int_0^a (a-\zeta)\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}d\xi$ nella formola determinatrice della variazione di saetta Δf, ossia nella formola (1) del numero precedente, abbiamo

$$\Delta f = \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\frac{r}{E_1\Omega}\left[qr\left(\frac{1}{2}\alpha^2-\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\alpha\right)+Q\,\mathrm{sen}^2\alpha\right] \\ +\frac{r^3}{E_1 I_x}\left\{-qr\left[\begin{array}{l}+\alpha^2\left(\frac{1}{4}+\mathrm{sen}^2\alpha\right)-\alpha\,\mathrm{sen}\alpha\left(1-\frac{5}{2}\cos\alpha\right) \\ -\cos\alpha-\frac{9}{4}\mathrm{sen}^2\alpha+1\end{array}\right]\right. \\ \left. -Q\left(\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha-\frac{3}{2}\mathrm{sen}^2\alpha-\cos\alpha+1\right)\right\}\end{array}\right],$$

e questa formola, quando in essa si pongano i valori noti di r, Ω, I_x, E, α, β, q e Q, serve pel calcolo della variazione Δf della saetta della centina sotto l'azione di un peso uniformemente distribuito sulla lunghezza intiera del suo asse.

Trascurando nell'ultima formola il termine

$$-\frac{1}{2}\frac{r}{E\Omega}\left[qr\left(\frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\alpha\right) + Q\cos^2\alpha\right],$$

il quale rappresenta di quanto influiscono le componenti delle forze sollecitanti, dirette secondo l'asse della centina, sulla variazione di saetta, si cade sulla formola (12) del numero 170 delle prime quattro edizioni di quel volume dell'*Arte di fabbricare*, nel quale trattasi della resistenza dei materiali e della stabilità delle costruzioni.

46. **Variazione di saetta per una centina caricata di un peso uniformemente distribuito sulla intiera lunghezza della sua corda.** — La determinazione, che ora ci proponiamo di fare, è in tutto analoga a quella del precedente numero, e quindi riesce facile raggiungere lo scopo seguendo la via già stata adottata per il caso di una centina caricata di un peso uniformemente distribuito sulla lunghezza intiera del suo asse.

Essendo p il peso il quale corrisponde all'unità di lunghezza della corda, abbiamo: che il peso applicato all'arco MB (*Fig.* 30) vale

$$pr(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi);$$

che il braccio di questo peso per rapporto alla orizzontale proiettata nel punto M è

$$\frac{1}{2}r(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi);$$

che la componente verticale della reazione dell'appoggio B risulta

$$pr\operatorname{sen}\alpha;$$

che il braccio di questa forza per rapporto alla detta orizzontale è

$$r(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi);$$

e che il braccio della componente orizzontale Q dalla stessa reazione vale

$$r\,(\cos\phi - \cos\alpha).$$

La forza Z, proiezione di tutte le forze applicate alla centina da M in B sulla tangente all'asse D B in M, ammette il valore

$$Z = p\,r\,(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen}\phi - p\,r\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\phi - Q\cos\phi\,;$$

ed il momento M_x, il cui valore è dato dalla somma algebrica dei momenti di tutte le forze sollecitanti la centina da M in B, viene dato da

$$M_x = -\frac{1}{2}p\,r^2(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi)^2 + p\,r^2(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen}\alpha - Q\,r(\cos\phi - \cos\alpha).$$

Questi valori di Z e di M_x sono suscettivi di semplificazione, e riducendo si trova

$$Z = -p\,r\operatorname{sen}^2\phi - Q\cos\phi,$$

$$M_x = \frac{1}{2}p\,r^2\,(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\phi) - Q\,r\,(\cos\phi - \cos\alpha).$$

Ponendo nei due termini della formola determinatrice di Δf, ossia della formola (1) del numero 44 questi valori di Z e di M_x unitamente a quelli di ζ, $d\upsilon$, $d\sigma$ ed a dati dalle formole (2), (3), (4) e (9) dello stesso numero, e non dimenticando che ai limiti $\zeta = 0$ e $\zeta = a$ corrispondono rispettivamente i limiti 0 ed α dell'ascissa angolare ϕ, abbiamo per una centina omogenea e di sezione retta costante

$$\int_0^{\alpha} \frac{Z}{E_1\Omega}\frac{d\upsilon}{d\zeta}\,d\zeta = \frac{r}{E_1\Omega}\left(p\,r\int_0^{\alpha}\operatorname{sen}^3\phi\,d\phi + Q\int_0^{\alpha}\operatorname{sen}\phi\cos\phi\,d\phi\right),$$

$$\int_0^{a} (a-\zeta)\,\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta = \frac{r^3}{E_1 I_x}\left\{\begin{array}{l} +\dfrac{1}{2}p\,r\displaystyle\int_0^{\alpha}\left[\begin{array}{l}(\operatorname{sen}^3\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen}\phi\\ -\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}^2\phi + \operatorname{sen}^3\phi)\end{array}\right]d\phi \\ -Q\displaystyle\int_0^{\alpha}\left[\begin{array}{l}(-\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\phi\\ +\cos\alpha\operatorname{sen}\phi - \operatorname{sen}\phi\cos\phi)\end{array}\right]d\phi \end{array}\right\}.$$

Gli integrali, moltiplicati per il fattore costante Q, sono quelli stessi che, nelle espressioni delle somme

$$\int_0^a \frac{Z}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\xi}d\zeta \quad \text{e} \quad \int_0^a (a-\zeta)\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}d\zeta$$

del numero 44, trovansi moltiplicati pel fattore costante Q_1. Questi integrali già sono noti, e quindi dobbiamo solamente occuparci di quelli moltiplicati pel fattore pr. Si hanno adunque nel numero 44 gli integrali indefiniti di cui dobbiamo servirci, ad eccezione del $\int \text{sen}^3\phi\, d\phi$ dato da

$$\int \text{sen}^3\phi\, d\phi = -\frac{1}{3}\cos\phi(3-\cos^2\phi) \qquad (h).$$

(h) L'integrazione per parti assai facilmente conduce ad ottenere il valore di $\int \text{sen}^3\varphi\, d\varphi$, e successivamente si ottiene

$$\int \text{sen}^5\varphi\, d\varphi = \int \text{sen}^3\varphi.\,\text{sen}\,\varphi\, d\varphi = -\int \text{sen}^2\varphi.\, d\cos\varphi$$

$$= -\text{sen}^3\varphi\cos\varphi + \int \cos\varphi.\, d\text{sen}^3\varphi = -\text{sen}^3\varphi\cos\varphi + 2\int \text{sen}\varphi\cos^2\varphi d\varphi.$$

$$= -\text{sen}^3\varphi\cos\varphi + 2\int \text{sen}\,\varphi(1-\text{sen}^2\varphi)\, d\varphi$$

$$= -\text{sen}^3\varphi\cos\varphi - 2\cos\varphi - 2\int \text{sen}^5\varphi\, d\varphi.$$

Effettuando le integrazioni contenute nelle espressioni delle due somme $\int_0^a \frac{Z}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\xi}\,d\xi$ e $\int_0^a (a-\xi)\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi$, si trova

$$\int_0^a \frac{Z}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\xi}\,d\xi = \frac{1}{2}\frac{r}{E_1\Omega}\left[2\,pr\left(\frac{1}{3}\cos^3\alpha - \cos\alpha + \frac{2}{3}\right) + Q\,\mathrm{sen}^2\alpha\right],$$

$$\int_0^a (a-\xi)\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\xi}\,d\xi = \frac{r^3}{E_1 I_x}\left\{\begin{array}{l} +pr\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}\,\alpha\,\mathrm{sen}\alpha\left(\mathrm{sen}^2\alpha - \frac{1}{2}\right) \\ +\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^2\alpha\left(\frac{7}{6}\cos\alpha - 1\right) \\ -\frac{1}{3}\left(\cos\alpha - 1\right) \end{array}\right] \\ +Q\left(\alpha\,\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha - \frac{3}{2}\,\mathrm{sen}^2\alpha - \cos\alpha + 1\right) \end{array}\right\};$$

Ricavando il valore di $\int \mathrm{sen}^3\varphi\,d\varphi$ dall'equazione che si ottiene col primo e coll'ultimo membro di questa successione di eguaglianze, si ottiene

$$\int \mathrm{sen}^3\varphi\,d\varphi = -\frac{1}{3}\cos\varphi\,(\mathrm{sen}^2\varphi + 2),$$

ossia ancora, sostituendo a $\mathrm{sen}^2\varphi$ il suo valore $1 - \cos^2\varphi$,

$$\int \mathrm{sen}^3\varphi\,d\varphi = -\frac{1}{3}\cos\varphi\,(3 - \cos^2\varphi).$$

cosicchè, sostituendo nella citata formola (1) del numero 44, si ottiene

$$\Delta f = \left[-\frac{1}{2}\frac{r}{E_1\Omega}\left[2pr\left(\frac{1}{3}\cos^3\alpha - \cos\alpha + \frac{2}{3}\right) + Q\,\mathrm{sen}^2\alpha\right] + \frac{r^3}{E_1 I_x}\left\{ -pr\left[\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\left(\mathrm{sen}^2\alpha - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\alpha\left(\frac{7}{6}\cos\alpha - 1\right) - \frac{1}{3}(\cos\alpha - 1)\right] - Q\left(\alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha - \frac{3}{2}\mathrm{sen}^2\alpha - \cos\alpha + 1\right)\right\}\right]$$

per formola determinatrice della variazione di saetta Δf nel caso di una centina caricata di un peso uniformemente distribuito sull'intiera lunghezza della sua corda.

47. **Variazione di saetta prodotta in una centina da una dilatazione o da una contrazione lineare indipendente dai carichi.** — Se per una causa qualunque, quale può essere un cangiamento di temperatura, ha luogo in una centina una dilatazione o una contrazione del materiale di cui essa consta, tutte le sue dimensioni hanno tendenza ad aumentare o a diminuire, e la sua saetta è pure sottoposta a variazioni di lunghezza. Su queste variazioni poi influisce principalmente il fatto che i due appoggi, opponendosi al cangiamento della corda, fanno nascere due forze orizzontali Q eguali e contrarie, applicate ai due estremi della centina, le quali la costringono ad incurvarsi maggiormente ed a prendere una maggiore saetta se vi ha dilatazione, a comportarsi in senso inverso se vi ha contrazione.

La penultima formola del numero 12, quando in essa si cangi v_0 in f, è quella che serve a determinare nel caso particolare la variazione di saetta Δf, cosicchè abbiamo

$$\Delta f = \tau f - \int_0^a \frac{Z}{E_1\Omega}\frac{dv}{d\zeta}\,d\zeta - \int_0^a (a-\zeta)\frac{M_x}{E_1 I_x}\frac{d\sigma}{d\zeta}\,d\zeta.$$

Essendo i valori di a, ζ, dv e $d\sigma$ quelli stessi del numero 44, ed essendo

$$Z = -Q\cos\phi,$$

$$M_x = -Qr(\cos\phi - \cos\alpha),$$

giacchè, quando si considera una dilatazione o una contrazione indipendente dai carichi, le forze estrinseche sollecitanti la centina si riducono alle sole reazioni orizzontali Q degli appoggi, il valore di Δf evidentemente si deduce da quello dei precedenti numeri 44, 45 e 46, tralasciando i termini che non contengono il fattore Q e tenendo conto del termine τf. Si ha adunque

$$\Delta f = \tau f - \frac{Qr}{E_1}\left[\frac{1}{2\Omega}\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{r^2}{I_x}\left(\alpha\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha - \frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\alpha - \cos\alpha + 1\right)\right]$$

per formola determinatrice della variazione di saetta Δf prodotta in una centina da una dilatazione o da una contrazione lineare indipendente dai carichi. Il valore di τ che entra in questa formola è il coefficiente di dilatazione lineare stato definito nel numero 5, Q è la reazione di ciascun appoggio da calcolarsi colla formola (1) del numero 37, f è la saetta primitiva dell'asse della centina, ed r, α, Ω, I_x ed E_1 hanno gli stessi significati che loro vennero attribuiti nei precedenti numeri.

48. **Come si possono ottenere le variazioni di saetta delle centine sottoposte all'azione di forze qualunque e di una dilatazione o di una contrazione prodotta da altre cause.** — Il procedimento che si è adottato per ottenere la variazione di saetta nel caso particolare del numero 44, mette in evidenza come si possano anche trovare le variazioni di saetta per le centine sollecitate da due forze orizzontali, o da due coppie simmetricamente disposte ed applicate rispetto alla sezione culminante.

Ora, quando si ha una centina posta nelle condizioni espresse nel numero 32 e sollecitata da forze simmetricamente disposte ed applicate rispetto alla sezione culminante della centina stessa, a ciascuna di queste forze si possono sostituire le due componenti, una verticale e l'altra orizzontale applicate al centro di superficie della sezione sulla quale essa agisce, ed una coppia. Questa sostituzione

dà evidentemente luogo a tanti sistemi di due forze verticali, di due forze orizzontali e di due coppie, simmetriche e simmetricamente applicate rispetto alla sezione culminante, quanti erano i sistemi di due forze primitive; e, per ciascuno di questi sistemi di due forze orizzontali, di due forze verticali e di due coppie, si possono calcolare le variazioni di saetta. La somma algebrica delle variazioni di saetta così ottenute e di quella corrispondente ad una dilatazione o ad una contrazione indipendente dalle dette forze costituisce la totale variazione di saetta della centina. Non occorre dire: che i valori di Δf, ossia delle variazioni di saetta, possono risultare positivi o negativi; che i primi rappresentano un innalzamento ed i secondi un abbassamento del punto più elevato dell'asse della centina.

Il problema presenta maggior difficoltà allorquando la centina non è sollecitata da forze simmetriche e simmetricamente applicate rispetto alla sezione culminante. Il suo vertice non solo subisce uno spostamento nel senso verticale, ma anche uno spostamento nel senso orizzontale, ed è colle formole state stabilite nei numeri 11 e 12 che si possono determinare le variazioni di coordinate corrispondenti al punto più elevato dell'asse. Per avere da queste formole risultati in armonia con tutti quelli ottenuti nel corso di questo capitolo, convien trascurare gli effetti dello scorrimento trasversale, ossia i termini che contengono il coefficiente di elasticità trasversale E_t, e per trovare le dette variazioni di coordinate, torna generalmente utile di sostituire ad ogni forza data le sue due componenti, una verticale e l'altra orizzontale, supposte trasportate nel centro di superficie della sezione su cui opera la loro risultante, e la coppia derivante da tale trasporto. Considerando le componenti verticali, le componenti orizzontali e le coppie così ottenute siccome successivamente operanti ciascuna ad esclusione di tutte le altre, colle citate formole si determineranno gli spostamenti da esse prodotti nel punto più elevato dell'asse, e le due somme algebriche degli spostamenti verticali e degli spostamenti orizzontali parziali daranno i due spostamenti complessivi, indicanti le variazioni di coordinate del punto culminante dell'asse della centina. Per causa di una dilatazione o di una contrazione derivante da cause indipendenti dalle forze date, la saetta della centina subirà pure una variazione di lunghezza, ed una siffatta variazione algebricamente deve essere aggiunta all'indicata somma degli spostamenti verticali, per avere la totale variazione di saetta dell'asse della centina.

CAPITOLO VII.

Stabilità delle centine.

49. **Assunto del presente capitolo.** — Una volta determinate le reazioni degli appoggi di una centina, si conoscono tutte le forze estrinseche che la sollecitano, e si può quindi passare ad instituire le relative equazioni di stabilità. Queste equazioni, applicate ad una sezione retta qualunque della centina, devono esprimere che le massime resistenze riferite all'unità di superficie, che in essa possono trovarsi provocate per tensione, per pressione e per scorrimento, devono rispettivamente essere eguali a quelle che permanentemente e stabilmente possono sopportare i materiali costituenti la centina senza l'apparizione di indizi di snervamento e di rottura anche remota; e quindi eccoci naturalmente portati a determinare la massima resistenza longitudinale e la massima resistenza trasversale, riferite all'unità di superficie, per una sezione retta qualunque della centina.

Queste resistenze massime riferite all'unità di superficie si potrebbero determinare coi metodi che abbiamo dati nello studio della *Resistenza dei materiali esposta nei suoi più generali rapporti coi lavori della moderna ingegneria*, nel volume I dell'*Appendice all'Arte di fabbricare;* ma noi qui le dedurremo direttamente pel caso particolare delle centine sollecitate da forze contenute nel piano determinato dal loro asse e con sezioni rette tagliate da questo piano secondo un asse principale centrale d'inerzia. Dopo questa deduzione instituiremo le equazioni di stabilità per una determinata sezione retta della centina, convenientemente discutendo quelle relative alla tensione ed alla pressione. Finalmente accenneremo ai procedimenti che conducono alla determinazione della sezione pericolosa ed allo stabilimento delle relative equazioni di stabilità.

50. **Massima resistenza trasversale e massima resistenza longitudinale, riferite all'unità di superficie, in una sezione retta qualunque di una centina.** — Per quanto si è trovato nel numero 4 di questo lavoro sulle *Deformazioni dei corpi elastici studiate nei loro più generali rapporti coi lavori della moderna ingegneria*, i valori di x_1, y_1, z_1, $\theta\cos\psi$, $\theta\,\mathrm{sen}\,\psi$ e φ, dati dalle formole (3), (4), (5), (8), (9) e (10), rappresentano gli spostamenti di una sezione

retta qualsiasi di un solido elastico qualunque rispetto ad una sezione retta vicinissima.

Pel caso di una centina posta nelle condizioni state indicate nel precedente numero, avendosi (Num. 10 e 11)

$$X = 0, \qquad M_y = 0, \qquad M_z = 0, \qquad \psi = 0,$$

le accennate sei formole si riducono alle tre

$$y_1 = \frac{Y}{E_t \Omega} d\sigma \tag{1},$$

$$z_1 = \frac{Z}{E_l \Omega} d\sigma \tag{2},$$

$$\theta = \frac{M_x}{E_l I_x} d\sigma \tag{3},$$

nelle quali

E_l ed E_t sono rispettivamente i coefficienti di elasticità longitudinale e di elasticità trasversale della materia di cui la centina è formata,

$d\sigma$ la parte G'G dell'asse compresa fra le due sezioni rette vicinissime C'D' e CD (*Fig.* 36),

Ω la superficie della sezione retta CD,

I_x il momento d'inerzia della stessa sezione rispetto alla orizzontale passante pel suo centro di superficie G,

Y la somma algebrica delle componenti, parallele alla Gy, di tutte le forze applicate alla parte di centina IKCD,

Z la somma algebrica delle componenti, parallele a Gz, delle stesse forze,

M_x la somma algebrica dei momenti di queste forze rispetto alla orizzontale proiettata nel punto G.

Sotto l'azione della forza Y, la sezione retta CD passerebbe in C_1D_1 e quindi, parallelamente all'asse d'inerzia contenuto nel piano di sollecitazione ossia parallelamente all'asse Gy, scorrerebbe della quantità $\overline{CC_1} = \overline{DD_1} = \overline{GG_1} = y_1$. Sotto l'azione della forza Z, la

stessa sezione retta passerebbe dalla posizione C_1D_1 all'altra parallela C_2D_2, e quindi, conservandosi ancora normale all'asse Gz, subirebbe parallelamente a quest'asse lo spostamento $\overline{G_1G_2} = z_1$. Finalmente sotto l'azione del momento M_x, la detta sezione, già trasportata come si è indicato, prenderebbe un movimento di rotazione attorno alla orizzontale passante pel suo centro di superficie G_2 e si porterebbe in una posizione C_3D_3 inclinata alla sua posizione primitiva dell'angolo $C_3H_1y = C_3G_2C_2$, cui corrisponde l'arco θ di raggio eguale all'unità.

Incominciando dal considerare la resistenza trasversale, ossia quella provocata dalla forza Y a motivo dello spostamento che subisce la sezione CD col passare in C_1D_1, abbiamo che essa, per un elemento superficiale ω della detta sezione, è data da (Num. 2)

$$E_1 \omega y_1 \frac{1}{d\sigma}$$

ossia, ponendo per y_1 il suo valore dato dalla (1), dà

$$Y \frac{\omega}{\Omega}.$$

La resistenza trasversale provocata nell'intiera sezione CD è la somma di quest'ultima espressione estesa all'intiera superficie Ω, e quindi vale la stessa forza Y; e la resistenza trasversale S_y, riferita all'unità di superficie, è data da

$$S_y = \frac{Y}{\Omega} \qquad (4).$$

Questa resistenza è costante per tutti i punti della sezione retta considerata, ed il suo segno è quello stesso della forza Y. Quando la forza Y è positiva, lo scorrimento della sezione CD nel suo passaggio in C_1D_1 ha luogo da G verso y e la resistenza S_y risulta positiva; quando la forza Y è negativa, lo scorrimento della sezione CD ha luogo da G verso y' e l'indicata resistenza ha valore negativo.

Se ora ci facciamo ad esaminare la resistenza longitudinale, ossia quella provocata dalla forza Z e dal momento M_x a motivo del passaggio della sezione retta considerata dalla posizione C_1D_1 alla posizione C_3D_3, abbiamo: che il piano rappresentato nella retta C_3D_3

taglia quello determinato dalla retta C_1D_1 secondo la orizzontale proiettata nel punto H_1; e che importa determinare la posizione di questa orizzontale, giacchè, quando essa taglia il perimetro della sezione considerata, separa su quest' ultima la parte in cui è provocata resistenza all'estensione da quella in cui è provocata resistenza alla compressione. La posizione dell'indicata orizzontale assai facilmente si determina col cercare la sua distanza $\overline{G_1H_1} = V$ dal centro di superficie G_1. Nel triangolo $H_1G_1G_2$, rettangolo in G_1, il cateto $\overline{G_1G_2}$ vale z_1 e la tangente dell'angolo piccolissimo $G_2H_1G_1 = C_3H_1y$ si può ritenere siccome eguale a θ, cosicchè si ha

$$V = \frac{z_1}{\theta};$$

e, ponendo per z_1 e θ i loro valori dati dalle formole (2) e (3), risulta

$$V = \frac{I_x Z}{\Omega M_x} \qquad (5).$$

Il segno della distanza V dipende dai segni delle due quantità Z ed M_x; quando queste due quantità hanno lo stesso segno, il valore di V è positivo e deve essere portato da G_1 verso y; quando invece hanno segno contrario, il valore di V risulta negativo e deve essere portato in opposta direzione ossia da G_1 verso y'. Non occorre dire: che la forza Z si assume come positiva o come negativa secondo che opera nella direzione Gz o in direzione contraria; che il momento M_z è positivo quando tende produrre rotazione da z verso y o, ciò che torna lo stesso, da ζ verso v, e che invece è negativo quando tende operare nel senso contrario.

Sia ora CEDF (*Fig.* 37) quella sezione retta della centina, la quale sulla figura 36 trovavasi rappresentata colla sua posizione iniziale in DC e che, a motivo dell'azione della forza Y, abbiamo detto passare in D_1C_1; siano xGx' ed yGy' i due assi principali centrali d'inerzia di questa sezione; e proponiamoci di trovare la posizione della orizzontale proiettata nel punto H_1 per rapporto agli assi ora indicati. Per raggiungere lo scopo basta evidentemente prendere $\overline{GH} = \overline{G_1H_1} = V$ e condurre per H la retta LM parallela ad xCx'. Se la retta LM taglia il perimetro CEDF della sezione retta considerata, trovansi provocate resistenze longitudinali di diffe-

rente natura nelle due parti in cui essa è divisa, ossia tensione nell' una, pressione nell' altra, e la retta NP, sulla quale esistono tutti i punti della sezione in cui non trovasi provocata alcuna resistenza longitudinale, ne costituisce l'*asse neutro*. Se invece la retta LM non taglia il perimetro CEDF (*Fig.* 38), non varia la natura della resistenza longitudinale provocata nei diversi punti della sezione retta da esso limitata, sulla quale trovasi cimentata o la sola resistenza all'estensione o la sola resistenza alla compressione.

Considerando sulla sezione retta CEDF (*Fig.* 37) un punto qualunque m, e dicendo v la sua distanza $\overline{nm}$ della retta xx', si ha: che questo punto dista dalla retta LM di $\overline{pm} = \overline{HG} + \overline{nm} = V + v$; che, per il fatto del passaggio della sezione retta considerata dalla posizione C_1D_1 (*Fig.* 36) alla posizione C_2D_2, si può ritenere che il detto punto abbia descritto un piccolo arco circolare rappresentato in m_1m_2, di centro H_1, di raggio $\overline{H_1m_1} = \overline{pm} = V + v$ e di lunghezza $(V+v)\theta$; che questo arco descritto dal punto m, atteso la sua picciolezza, si può considerare come lo spostamento dello stesso punto nella direzione dell'asse Gz. Ma, essendo ω un elemento superficiale in m, la resistenza longitudinale ad esso corrispondente è (Num. 2)

$$E_1\omega(V+v)\theta\frac{1}{d\sigma},$$

e quindi la resistenza longitudinale S_z riferita all'unità di superficie provocata nel punto m è data in

$$S_z = E_1(V+v)\theta\frac{1}{d\sigma}.$$

Ponendo in quest'equazione il valore di θ dato dalla (3), risulta

$$S_z = (V+v)\frac{M_x}{I_x},$$

e, sostituendo a V il suo valore dato dalla (5), si ottiene

$$S_z = \frac{Z}{\Omega} + \frac{vM_x}{I_x} \qquad (6).$$

Nella deduzione di questa formola abbiamo considerati come positivi i valori di v diretti secondo la Gy', ossia quelli riferentisi a punti posti sotto la orizzontale xx', e quindi bisogna considerare come negativi i valori di v diretti secondo la Gy, ossia quelli riferentisi a punti posti sopra la stessa orizzontale. Tenendo poi conto tanto dei segni di v quanto di quelli di Z e di M_x (i quali ultimi si assumeranno, come già si è dichiarato in questo numero), i valori di S_z possono risultare positivi o negativi; rappresentano tensioni i valori positivi, pressioni i valori negativi di S_z.

L'ipotesi, colla quale si ammette che la sezione retta C D (*Fig.* 36) si sposti relativamente alla sezione retta C' D', in modo da passare in C_3D_3 con tutti i suoi punti in uno stesso piano, ed anche le ultime due formole mettono in evidenza: che nel caso in cui la retta L M (*Fig.* 37) taglia il perimetro della sezione retta C E D F, la massima tensione e la massima pressione, riferite all'unità di superficie, hanno luogo nei due punti del perimetro situati uno da una parte e l'altra dall'altra della xx', i quali maggiormente distano dalla retta medesima; e che nel caso in cui la retta L M (*Fig.* 38) non taglia il perimetro C E D F, la massima resistenza longitudinale, riferita alla unità di superficie, ha luogo in quel punto del perimetro stesso il quale maggiormente dista dalla L M.

Quando la retta L M (*Fig.* 37) taglia il perimetro C E D F, se sono D ed C i due punti del perimetro, uno da una parte e l'altro dall'altra della xx', i quali maggiormente distano da questa retta, e se chiamansi

v_i il valore particolare di v che corrisponde al punto D, ossia la distanza $\overline{GD}$,

v_e il valore assoluto di v relativo al punto C, ossia la distanza $\overline{GC}$,

S_{zi} la resistenza longitudinale riferita all'unità di superficie in D, ed

S_{ze} la resistenza longitudinale riferita all'unità di superficie in E, l'applicazione dell'ultima formola ai due punti D ed E ci conduce a trovare

$$S_{zi} = \frac{Z}{\Omega} + \frac{v_i M_x}{I_x} \qquad (7),$$

$$S_{ze} = \frac{Z}{\Omega} - \frac{v_e M_x}{I_x} \qquad (8).$$

Tenendo conto dei segni della forza Z e del momento M_x nella maniera già indicata in questo numero, i valori di S_{zi} e di S_{ze} risulteranno di segno contrario, quello positivo rappresenterà tensione, e quello negativo rappresenterà pressione.

Quando invece la retta L M (*Fig.* 38) non taglia il perimetro CEDF, se è D il punto di questo il quale maggiormente dista dalla L M stessa, e se chiamansi

v_m la distanza $\overline{GD}$ dalla xx',

S_{zm} la massima resistenza longitudinale riferita all' unità di superficie,

l'applicazione della formola (6) dà

$$S_{zm} = \frac{Z}{\Omega} + \frac{v_m M_x}{I_x} \qquad (9).$$

In ogni caso particolare si terrà conto dei segni della forza Z, del momento M_x e della distanza v_m, seguendo le norme già state indicate in questo numero. Rappresentano tensioni i valori positivi e pressioni i valori negativi di Z_{zm}.

51. **Equazioni per verificare quale stabilità ha luogo in una determinata sezione retta di una centina.** — Incomincieremo ad occuparci della stabilità relativa alla resistenza longitudinale, e distingueremo quattro casi: quello in cui Z ed M_x hanno valori positivi; quello in cui è positivo il valore di Z e negativo il valore di M_x; quello in cui è negativo il valore di Z e positivo il valore di M_x; e finalmente quello in cui sono negative ambedue le quantità Z e M_x. Per ogni sezione poi, di cui vogliamo conoscere il grado di stabilità sotto il rapporto della resistenza longitudinale, determineremo subito le lunghezze V, v_i e v_e, e, a seconda della materia costituente la centina, assumeremo gli adatti coefficienti di rottura R' ed R'', il primo relativo alla tensione ed il secondo relativo alla pressione. Porremo le equazioni esprimenti che i prodotti dei detti coefficienti di rottura pei relativi coefficienti di stabilità n' ed n'' devono rispettivamente eguagliare le massime resistenze longitudinali, riferite all' unità di superficie, provocate per estensione e per compressione; e, ricavando da esse i coefficienti n' ed n'', potremo aver un'idea precisa del grado di stabilità della centina nella sezione considerata.

Quando sono positivi la forza Z ed il momento M_x, la sezione retta C D (*Fig.* 39) spostasi, relativamente alla sezione retta

vicinissima C'D', passando in C_3D_3; ed il valore di V, dato dalla formola (5) del numero precedente, risulta positivo. Se $V > v_e$, trovasi provocata la resistenza all'estensione sull'intiera sezione retta considerata; e, se $V < v_e$, ha luogo tensione su una parte di questa sezione e pressione su un'altra parte. — Quando

$$V > v_e,$$

la massima tensione riferita all'unità di superficie trovasi provocata all'intradosso; essa è data dal secondo membro dell'equazione (7) del numero precedente, e si ha l'equazione di stabilità

$$n'R' = \frac{Z}{\Omega} + \frac{v_i M_x}{I_x} \qquad (1),$$

dalla quale sarà facile dedurre il valore di n'. — Se

$$V < v_e,$$

ha luogo la tensione massima, riferita all'unità di superficie, dalla parte dell'intradosso, e la pressione massima, pure riferita all'unità di superficie, dalla parte dell'estradosso; questa tensione e questa pressione sono rispettivamente date dai secondi membri delle equazioni (7) ed (8) del numero precedente; e le equazioni di stabilità, la prima relativa alla tensione e la seconda relativa alla pressione, risultano

$$n' R' = \frac{Z}{\Omega} + \frac{v_i M_x}{I_x} \qquad (2),$$

$$n''R'' = -\left(\frac{Z}{\Omega} - \frac{v_e M_x}{I_x}\right) \qquad (3),$$

da cui sarà facile ricavare i valori dei coefficienti n' ed n''. Innanzi al complesso dei due termini del secondo membro dell'equazione (3) si è messo il segno —, perchè, rappresentando esso una pressione ed essendo quindi negativo, non si potrebbe altrimente eguagliare

al prodotto essenzialmente positivo $n''R''$, e quest'osservazione è generale per tutte le equazioni di stabilità relative alla pressione. — Se, essendo $V < v_e$, si ha

$$V + v_i > v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' < R'',$$

immediatamente si può conchiudere: che, a motivo dell'ineguaglianza $V + v_i > v_e - V$, la massima resistenza longitudinale riferita all'unità di superficie è quella per tensione provocata all'intradosso, anzichè quella per pressione provocata all'estradosso; che il secondo membro dell'equazione (2) è maggiore del secondo membro dell'equazione (3); che, a motivo dell'ineguaglianza $R' < R''$, il numero per cui bisogna dividere il secondo membro della (2) onde dedurre il valore di n' è minore del numero per cui bisogna dividere il secondo membro della (3) per trovare n''; che il valore di n' è indubitatamente maggiore di quello di n''; e che finalmente basta calcolare il valore del coefficiente n' coll'equazione (2) per avere un'idea della stabilità della centina nella sezione considerata. — Analogamente se, essendo $V < v_e$, risulta

$$V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' > R'',$$

subito si vede che il valore di n'' che si ricaverebbe dall'equazione (3) deve risultare maggiore del valore di n' che si ricaverebbe dall'equazione (2), e come per conseguenza si può avere una giusta idea della stabilità della centina nella sezione considerata col dedurre il valore di n'' dall'equazione (3). — Se, essendo $V < v_e$, risulta

$$V + v_i > v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' > R'',$$

immediatamente si deduce: che, per l'ineguaglianza $V + v_i > v_e - V$, la massima resistenza longitudinale riferita all'unità di superficie è ancora quella per tensione provocata all'intradosso, anzichè quella per pressione provocata all'estradosso; che il secondo membro dell'equazione (2) deve essere più grande del secondo membro dell'equazione (3); che, per essere $R' > R''$, il numero pel quale bisogna dividere il secondo membro della (2) onde dedurre il valore di n' è

più grande di quello per cui si deve dividere il secondo membro della (3) onde trovare n''; che importa fare le due divisioni per decidere quale è il maggiore dei due coefficienti di stabilità n' ed n''; e che per conseguenza è necessario risolvere ambedue le equazioni di stabilità (2) e (3) onde farsi una giusta idea del grado di stabilità della centina nella sezione presa in considerazione. — Analogamente se, essendo $V < v_e$, si trova

$$V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' < R'',$$

è necessario fare la divisione del secondo membro dell'equazione (2) per R' e del secondo membro dell'equazione (3) per R'' onde decidere quale dei due coefficienti di stabilità n' ed n'' è il maggiore; di modo che anche in questo caso non si può avere una giusta idea della stabilità della centina nella sezione considerata senza la risoluzione, per rapporto ad n' ed n'', di ambedue le equazioni (2) e (3).

Quando è positiva la forza Z e negativo il momento M_x, la sezione retta CD (*Fig.* 40) spostasi, relativamente alla sezione retta vicinissima C'D', passando in C_3D_3; e risulta negativo il valore di V, a cui conduce la formola (5) del numero precedente. Se $-V > v_i$, è provocata la resistenza all'estensione sull'intiera sezione retta che si considera; e, se $-V < v_i$, ha luogo tensione su una parte di questa sezione e pressione su un'altra parte. — Quando

$$-V > v_i,$$

la massima tensione, riferita all'unità di superficie, è provocata all'estradosso; essa è data dal secondo membro dell'equazione (8) del numero precedente, e si ha l'equazione di stabilità

$$n' R' = \frac{Z}{\Omega} - \frac{v_e M_x}{I_x} \qquad (4),$$

colla quale sarà agevole trovare il valore del coefficiente di stabilità n'. — Se

$$-V < v_i,$$

ha luogo la massima pressione, riferita all'unità di superficie, dalla parte dell'intradosso, e la massima tensione, pure riferita all'unità di superficie, dalla parte dell'estradosso, queste pressione e tensione sono rispettivamente date dai secondi membri delle equazioni (7) ed (8) del precedente numero; e le equazioni di stabilità, la prima relativa alla pressione e la seconda relativa alla tensione, risultano

$$n''R'' = -\left(\frac{Z}{\Omega} + \frac{v_i M_x}{I_x}\right) \qquad (5),$$

$$n' R' = \frac{Z}{\Omega} - \frac{v_e M_x}{I_x} \qquad (6),$$

dalle quali facilmente si potranno dedurre i valori dei due coefficienti di stabilità n'' ed n'. — Con ragionamenti in tutto analoghi a quelli stati fatti nel precedente caso di Z e di M_x positivi e di $V < v_e$, si viene a conchiudere per il caso della forza **Z** positiva, del momento M_x negativo e di $-V < v_i$: che, per

$$V + v_i > v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R'' < R',$$

il coefficiente di stabilità n'' è sicuramente maggiore del coefficiente di stabilità n', cosicchè basta considerare la sola equazione di stabilità (5); che, per

$$V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R'' > R',$$

il coefficiente di stabilità n' è indubitatamente maggiore del coefficiente di stabilità n'', e che quindi basta considerare la sola equazione di stabilità (6); che, tanto per

$$V + v_i > v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R'' > R',$$

quanto per

$$V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R'' < R',$$

bisogna ricavare dalle equazioni di stabilità (5) e (6) i due coefficienti n'' ed n', e ritenere che il maggiore dei due è quello che dà una giusta idea del grado di stabilità della centina nella sezione considerata.

Quando la forza Z è negativa e positivo il momento M_x, la sezione retta CD (*Fig.* 41), a motivo della resistenza longitudinale provocata fra C'D' e CD, spostasi passando in C_3D_3; ed il valore di V, che si deduce dalla formola (5) del numero precedente, risulta negativo. Se $-V > v_i$ trovasi provocata la resistenza alla compressione sull'intiera sezione retta considerata; e, se $-V < v_i$, ha luogo tensione su una parte di questa sezione e pressione su un'altra parte. — Quando

$$-V > v_i,$$

la massima pressione, riferita all'unità di superficie, trovasi provocata all'estradosso; essa è data dal secondo membro dell'equazione (8) del numero precedente, e si ha l'equazione di stabilità

$$n'' R'' = -\left(\frac{Z}{\Omega} - \frac{v_e M_x}{I_x}\right) \qquad (7),$$

dalla quale si potrà ricavare il valore del coefficiente di stabilità n''. — Se

$$-V < v_i,$$

ha luogo la massima tensione, riferita all'unità di superficie, dalla parte dell'intradosso, e si verifica la massima pressione, pure riferita all'unità di superficie, dalla parte dell'estradosso; questa tensione e questa pressione sono rispettivamente date dai secondi membri delle equazioni (7) ed (8) del precedente numero; e le due equazioni di stabilità, una relativa alla tensione e l'altra relativa alla pressione, per la determinazione dei due coefficienti di stabilità n' ed n'', sono

$$n' R' = \frac{Z}{\Omega} + \frac{v_i M_x}{I_x} \qquad (8),$$

$$n'' R'' = -\left(\frac{Z}{\Omega} - \frac{v_e M_x}{I_x}\right) \qquad (9),$$

Ragionando come nel caso di X e di M_x positivi e di $V < v_e$, nel caso attuale della forza Z negativa, del momento M_x positivo e di $-V < v_i$ si può stabilire: che, per

$$V + v_i > v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' < R'',$$

il coefficiente di stabilità n' è maggiore del coefficiente di stabilità n'' e che basta quindi considerare la sola equazione di stabilità (8); che, per

$$V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' > R'',$$

il coefficiente di stabilità n'' è più grande del coefficiente di stabilità n', e che per conseguenza è sufficiente prendere in considerazione la sola equazione di stabilità (9); che, tanto per

$$V + v_i > v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' > R'',$$

quanto per

$$V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' < R'',$$

non si può avere un'idea precisa della stabilità della centina nella sezione considerata senza ricavare dalle equazioni (8) e (9) i valori dei coefficienti n' ed n''.

Finalmente se è negativa la forza Z e se è pure negativo il momento M_x, la sezione retta CD (*Fig.* 42), a motivo della resistenza longitudinale provocata fra C'D' e CD, si sposta passando in C_3D_3; e la formola (5) del numero precedente conduce ad un valore positivo di V. Se $V > v_e$, è cimentata la resistenza alla pressione su tutta la sezione retta considerata; e, se $V < v_e$, è provocata la resistenza alla tensione su una parte di questa sezione e la resistenza alla pressione sull'altra parte. — Quando

$$V > v_e,$$

la massima pressione, riferita all'unità di superficie, ha luogo all'in-

tradosso, e quindi è data dal secondo membro dell'equazione (7) del numero precedente, e l'equazione di stabilità adatta al caso è la

$$n''R'' = -\left(\frac{Z}{\Omega} + \frac{v_i M_x}{I_x}\right) \qquad (10),$$

da cui si potrà dedurre il valore del coefficiente di stabilità n''. — Quando

$$V < v_e,$$

ha luogo dalla parte dell'intradosso la massima pressione e dalla parte dell'estradosso la massima tensione, riferite all'unità di superficie; tali pressione e tensione sono rispettivamente date dai secondi membri delle equazioni (7) ed (8) del numero precedente; e quindi le equazioni di stabilità, la prima riferentesi alla pressione e la seconda riferentesi alla tensione, risultano

$$n''R'' = -\left(\frac{Z}{\Omega} + \frac{v_i M_x}{I_x}\right) \qquad (11),$$

$$n'R' = \frac{Z}{\Omega} - \frac{v_e M_x}{I_x} \qquad (12),$$

dalle quali si potranno ricavare i valori dei due coefficienti di stabilità n' ed n''. — Ragionando come si è fatto nel caso di Z e di M_x positivi e di $V < v_e$, si deduce che, per il caso di Z e di M_x negativi e per $V < v_e$, convengono le seguenti conclusioni: che quando

$$V + v_i > v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R'' < R',$$

il coefficiente di stabilità n'' è senza alcun dubbio maggiore del coefficiente di stabilità n', per guisa che si può considerare la sola equazione di stabilità (11); che, quando

$$V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R'' > R',$$

il coefficiente di stabilità n' è sicuramente maggiore del coefficiente

di stabilità n'', di modo che è la sola equazione di stabilità (12) quella che dà la giusta idea della stabilità della centina nella sezione considerata; che, sia per

$$V + v_i > v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R'' > R',$$

sia per

$$V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R'' < R',$$

non si può avere un'idea precisa della stabilità della centina nella sezione che si considera, senza dedurre i valori dei due coefficienti di stabilità n'' ed n' dalle equazioni (11) e (12).

L'equazione di stabilità relativa alla resistenza trasversale in una determinata sezione retta della centina, indicando con n^{IV} il coefficiente di stabilità e con R^{IV} il coefficiente di rottura per scorrimento trasversale, risulta:

$$n^{IV} R^{IV} = \frac{Y}{\Omega'} \qquad (13),$$

quando la forza Y è positiva; ed

$$n^{IV} R^{IV} = -\frac{Y}{\Omega'} \qquad (14),$$

quando la forza Y è negativa.

Il valore di Ω' da porsi nell'equazione di stabilità relativa alla resistenza trasversale potrebbe essere l'intiera superficie resistente dalla sezione considerata, giacchè sembra ammissibile che, quando la resistenza longitudinale provocata in una data sezione retta trovasi nei limiti di quella che stabilmente e permanentemente essa può sopportare, si possa, stando nei medesimi limiti, provocare in tale sezione anche la resistenza trasversale. Molti costruttori però, per misure di non riprovevole prudenza, usano sovente fare in modo che ogni sezione retta presenti tanta superficie, da potersi in essa distinguere due parti, una atta a stabilmente e permanentemente sopportare da sola la resistenza longitudinale, e l'altra capace a sopportare pure nello

stesso modo la resistenza trasversale. Così, nelle travi e nelle centine con sezione a doppio T, quasi sempre ammettono che valgano le tavole per raggiungere il primo scopo, e che serva la parete verticale per ottenere il secondo.

52. **Modo di applicare le equazioni di stabilità per determinare una dimensione di una data sezione retta di una centina.** — Incominciando dalla resistenza longitudinale, ci conviene sempre distinguere i quattro casi della forza Z e del momento M_x positivi, della forza Z positiva e del momento M_x negativo, della forza Z negativa e del momento M_x positivo, della forza Z e del momento M_x negativi.

Quando, tanto la forza Z, quanto il momento M_x, sono positivi, nella sezione retta CD (*Fig.* 39), a cui la forza ed il momento suddetti si riferiscono, o è solamente provocata la resistenza alla tensione, oppure su una sua parte verso l' intradosso trovasi provocata la resistenza alla tensione, e su una parte minore verso l'estradosso la resistenza alla compressione. Trovati i valori di v_i, Ω ed I_x in funzione della dimensione incognita, che diremo u, si sostituiranno le loro espressioni, unitamente alle quantità n', R', Z ed M_x, nell'equazione di stabilità (1) del numero precedente, e l'equazione risultante si risolverà per rapporto ad u, il cui valore rappresenterà la voluta dimensione della sezione retta considerata, affinchè essa si trovi in buone condizioni di stabilità per rapporto alla tensione. Ottenuto il valore di u, si dedurranno quelli di v_i, di v_e, di Ω e di I_x, e colla formola (5) del numero 50 si calcolerà la distanza $\overline{GH} = V$. — Se

$$V > v_e,$$

nella sezione considerata ha luogo tensione tanto all' intradosso quanto all'estradosso, la massima resistenza longitudinale, riferita all'unità di superficie, provocata nella sezione per la quale venne dedotto il valore di u, è la tensione che si verifica all'intradosso nel punto della sezione medesima che maggiormente dista dalla orizzontale passante pel suo centro di superficie, ossia è quella a cui si ebbe riguardo nell'instituire l'equazione determinatrice del valore di u, e quindi questo valore è quello che veramente conviene adottare. — Se

$$V < v_e, \qquad V + v_i > v_e - V, \qquad \text{ed} \qquad R' < R'',$$

nella sezione, per cui venne dedotto il valore di u, ha luogo tensione all'intradosso e pressione all'estradosso. La massima resistenza longitudinale, riferita all'unità di superficie, è la tensione provocata all'intradosso nel punto del perimetro che maggiormente dista dalla orizzontale passante pel centro di superficie della sezione stessa, ossia è quella a cui si ebbe riguardo nell'instituire l'equazione che ha servito a dedurre il valore di u; e siccome, per rapporto alla resistenza della materia costituente la centina, ossia per essere $R' < R''$, è maggiore il pericolo di rottura per tensione anzichè per pressione, l'equazione stata adottata per la determinazione di u è quella che realmente corrisponde al minimo grado di stabilità che si può avere nella sezione considerata, ossia è quella sola che deve essere adottata per trovare il valore di u. — Ma nei tre casi in cui, essendo $V < v_e$, si ha

$$V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' > R'',$$

$$V + v_i > v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' > R'',$$

$$V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' < R'',$$

oltre di esprimere le quantità v_i, Ω ed I_x in funzione dell'incognita u, bisognerà esprimere in funzione della stessa incognita anche la lunghezza v_e; e, oltre il trovato valore di u risultante dall' applicazione dell' equazione (1) del numero precedente, se ne dedurrà un secondo applicando l'equazione (3) dello stesso numero. Dei due valori della stessa incognita, che così si otterranno, si adotterà quello che, soddisfacendo ad una delle due equazioni col valore del limite stato ammesso pel coefficiente di stabilità, conduce a trovare coll'altra un coefficiente di stabilità minore dell' indicato limite, e generalmente quello che assegna maggior superficie resistente alla sezione retta considerata.

Quando è positiva la forza Z e negativo il momento M_x, nella sezione retta CD (*Fig.* 40), alla quale la forza ed il momento indicati si riferiscono, o è cimentata la sola resistenza alla tensione, oppure su una parte verso l'intradosso è messa in giuoco la resistenza alla pressione e su una parte maggiore verso l'estradosso è messa in giuoco la resistenza alla tensione. Fatte le espressioni delle quantità v_e, Ω ed I_x in funzione della dimensione incognita u, si sosti-

tuiranno esse unitamente alle quantità n', R', Z ed M_x nell'equazione di stabilità (4) del precedente numero, e la risultante equazione si risolverà per rapporto ad u, il cui valore rappresenterà la chiesta dimensione della sezione retta considerata, affinchè in essa abbia luogo stabilità per rapporto alla tensione. Trovato il valore di u, si dedurranno quelli di v_i, v_e, Ω ed I_x, e, colla formola (5) del numero 50, si calcolerà la distanza $\overline{GH} = V$, la quale sarà negativa. — Ragionando come si è fatto pel caso di Z e di M_x positivi, si trova: che se

$$-V > v_i$$

il valore di u, che definitivamente conviene adottare, è quello ottenuto applicando, come si è fatto, la formola (4) del numero precedente; che se

$$-V < v_i, \qquad V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R'' > R',$$

lo stesso valore di u è pur quello che definitivamente conviene adottare; e che, essendo sempre $-V < v_i$, se risulta

$$V + v_i > v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R'' < R',$$

$$V + v_i > v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' > R',$$

$$V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R'' < R',$$

oltre i valori di v_e, Ω ed I_x, bisognerà fare, in funzione di u, anche quello di v_i, e ricavare il valore di u non solo dalla citata equazione (4) del numero precedente, ma anche dall'equazione (5) dello stesso numero. Si otterranno così due valori di u, generalmente differenti, e sarà facile decidere quale dei due si deve adottare, affinchè il valore massimo del coefficiente di stabilità non ecceda nella sezione considerata il limite prestabilito.

Quando la forza Z è negativa e positivo il momento M_x, nella sezione retta CD (*Fig.* 41), alla quale si riferiscono la detta forza ed il detto momento, o trovasi soltanto provocata la resistenza alla pressione, oppure in una sua parte verso l'estradosso è cimentata la

resistenza alla pressione ed in una parte minore verso l'intradosso la resistenza alla tensione. Fatte le espressioni delle quantità v_e, Ω ed I_x in funzione della dimensione incognita u della sezione retta considerata, si sostituiranno esse, unitamente alle quantità note n'', R'', Z ed M_x, nell'equazione di stabilità (7) del precedente numero; e, dall'equazione che così risulterà, si ricaverà il valore di u, il quale sarà la voluta dimensione della sezione retta considerata, affinchè sia essa in buone condizioni di stabilità per rapporto alla pressione. Col trovato valore di u si dedurranno quelli di v_i, v_e, Ω ed I_x, e colla formola (5) del numero 50 si calcolerà la distanza $\overline{GH} = V$, la quale risulterà negativa. — Se

$$-V > v_i,$$

il valore di u che definitivamente conviene adottare è quello ottenuto nel modo or ora indicato; se

$$-V < v_i, \qquad V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' > R'',$$

lo stesso valore di u è pur quello che conviene adottare nella sezione retta considerata; e se, essendo $-V < v_i$, si ha

$$V + v_i > v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' < R'',$$

$$V + v_i > v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' > R'',$$

$$V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R' < R'',$$

si esprimerà in funzione dell'incognita u anche la lunghezza v_i, si risolverà per rapporto a quest'incognita l'equazione di stabilità (8) del precedente numero, e dei due differenti valori di u che si saranno ottenuti, uno applicando l'equazione (7) e l'altro applicando l'equazione (8) dell'or citato numero, si adotterà quello per cui il valore massimo del coefficiente di stabilità nella sezione considerata non eccede il limite prestabilito.

Quando finalmente, per una data sezione retta C D (*Fig.* 42), sono negativi tanto la forza Z quanto il momento M_x, trovasi in essa

provocata o la sola resistenza alla pressione, oppure la resistenza alla pressione in una sua parte verso l'intradosso e la resistenza alla tensione in una parte minore verso l'estradosso. Si sostituiranno nell'equazione di stabilità (10) del numero precedente i valori di v_i, Ω ed I_x della sezione considerata in funzione dell' incognita u, e si procederà quindi alla determinazione dell'incognita medesima. Ottenuto questo valore di u sarà agevole dedurre quelli di v_i, v_e, Ω ed I_x, e calcolare, mediante la formola (5) del numero 50 la distanza $\overline{GH} = V$, la quale risulterà positiva. — Se, paragonando il valore di V con quello di v_e, trovasi

$$V > v_e,$$

il valore di u, calcolato come precedentemente si è detto, rappresenta quello che definitivamente conviene assumere per la dimensione incognita della sezione considerata; e lo stesso ha luogo quando si ha

$$V < v_e, \qquad V + v_i > v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R'' < R'.$$

Nei casi invece in cui, essendo $V < v_e$, si ha

$$V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R'' > R',$$

$$V + v_i > v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R'' > R',$$

$$V + v_i < v_e - V \qquad \text{ed} \qquad R'' < R',$$

importa esprimere anche la distanza v_e in funzione dell'incognita u e dedurre questa non solo dall'equazione di stabilità (10) del numero precedente, ma ben anche dall'equazione di stabilità (12) dello stesso numero. Quello verrà adottato dei due trovati valori di u, per cui il valore massimo del coefficiente di stabilità relativo alla resistenza longitudinale nella sezione considerata non eccede il limite prestabilito.

Una volta determinata la dimensione u coll'applicare nel modo indicato le equazioni di stabilità relative alla resistenza longitudinale, si deve anche prendere in considerazione la stabilità per rap-

porto alla resistenza trasversale, ricorrendo alle equazioni (13) e (14) del numero precedente. Si adotterà l'equazione (13) quando la forza Y ha un valore positivo, l'equazione (14) quando il valore della detta forza è negativo. Se si crede di non dover distinguere nella sezione che si considera la parte che da sola dovrebbe essere capace di presentare la voluta resistenza allo scorrimento trasversale dall'altra che da sola dovrebbe dare la necessaria stabilità sotto il punto di vista della resistenza longitudinale (Num. 51), l'equazione di stabilità relativa alla resistenza trasversale può servire a determinare il coefficiente di stabilità n^{IV} e quindi a verificare se la dimensione u, stata determinata considerando la resistenza longitudinale, dà sufficienti garanzie di sicurezza anche per rapporto alla resistenza trasversale. Se invece si crede, come usano i più prudenti costruttori, di fare l'indicata distinzione, si esprimerà il valore di Ω' in funzione di una dimensione u' di quella parte della sezione retta che da sola dovrebbe essere capace di dare sufficiente garanzia di sicurezza sotto il punto di vista della resistenza trasversale, e, assuntisi convenientemente i valori di n^{IV} e di R^{IV}, secondo che il valore di Y è positivo o negativo, si impiegherà l'equazione (13) o l'equazione (14) per la determinazione dell'incognita u'.

53. **Determinazione delle sezioni pericolose di una centina.** — Tre sono le sezioni pericolose che dobbiamo considerare in una centina qualsiasi: quella in cui c'è maggior pericolo di rottura per tensione; quella in cui c'è maggior pericolo di rottura per pressione; e quella in cui c'è maggior pericolo di rottura per scorrimento trasversale.

Incomincieremo ad occuparci della determinazione delle sezioni pericolose per rapporto alla tensione ed alla pressione. Per raggiungere lo scopo converrà distinguere nella centina le parti per cui sono positivi i valori della forza Z e del momento M_x, quelle per le quali sono positivi i valori della forza Z e negativi i valori del momento M_x, quelle cui corrispondono valori negativi della forza Z e valori positivi del momento M_x, e finalmente quelle per cui tanto le forze Z quanto i momenti M_x sono negativi. Stando al caso delle centine coll'asse primitivo circolare, le forze Z ed i momenti M_x sono funzioni dell'ascissa angolare ϕ (Capit. VI), ed i valori di v_i, v_e, Ω ed I_x o sono costanti, o, quando la centina fosse di sezione variabile, si potranno pure esprimere in funzione della detta incognita.

Considerando una parte della centina nella quale hanno valori positivi la forza Z ed il momento M_x, se ne determina la sezione

pericolosa per rapporto alla tensione col cercare qual è il valore particolare φ' di φ cui corrisponde il maggior valore del coefficiente di stabilità n', oppure, quando suppongasi che la centina sia omogenea, qual è il valore φ' di φ che dà il maggior valore dell'espressione

$$\frac{Z}{\Omega} + \frac{v_i M_x}{I_x} \qquad (1).$$

Trovato il valore di φ', si fa differenza $V - v_e$ in funzione della variabile φ, ed osservasi come si comporta, per rapporto al segno, il valore di questa differenza fra i limiti dell'angolo φ corrispondenti alla parte di centina che si considera. Quando appaia che tale differenza si conserva positiva, vuol dire che non trovasi punto provocata la resistenza allo schiacciamento nell'indicata parte di centina, e che quindi non è il caso di procedere alla determinazione della sezione pericolosa per rapporto alla pressione. Se invece la detta differenza, pei valori di φ compresi negli indicati limiti, può risultare negativa, si cerca ancora il valore particolare φ'' di φ, a cui corrisponde il più gran valore positivo dell'espressione

$$-\left(\frac{Z}{\Omega} - \frac{v_e M_x}{I_x}\right) \qquad (2).$$

L'angolo φ'' così determinato indica qual è la sezione pericolosa per rapporto alla pressione.

Per una tal parte della centina, alla quale corrispondono valori positivi della forza Z e valori negativi del momento M_x, la sezione pericolosa sotto il punto di vista della resistenza alla tensione si determina, nell'ipotesi dell'omogeneità della materia della centina, col trovare quel valore particolare φ' di φ il quale corrisponde al più grande dei valori dell'espressione

$$\frac{Z}{\Omega} - \frac{v_e M_x}{I_x} \qquad (3)$$

nei limiti dell'angolo φ determinanti la parte di centina che si considera. Trovato il valore di φ', si fa, in funzione dell'angolo φ,

l'espressione $-V-v_i$, ed osservasi come essa si comporta fra i definiti limiti. Se quest'espressione si conserva sempre positiva, è segno che nella considerata parte della centina non trovasi punto provocata la resistenza alla compressione, e che quindi non è il caso di procedere alla ricerca della corrispondente sezione pericolosa. Che se l'espressione $-V-v_i$ può diventare negativa, è giuocoforza conchiudere che verso l'intradosso è provocata la resistenza alla pressione e si determina la sezione pericolosa per rapporto a questa cercando qual è il valore particolare ϕ'' di ϕ che, sempre nei limiti della parte di centina considerata, attribuisce il più gran valore all'espressione

$$-\left(\frac{Z}{\Omega}+\frac{v_i M_x}{I_x}\right) \qquad (4),$$

Per una data parte della centina alla quale corrispondono valori negativi della forza Z e valori positivi del momento M_x, si determina la sezione pericolosa per rapporto alla resistenza alla pressione col cercare qual è il valore particolare ϕ'' di ϕ per cui si ha, nei limiti della parte di centina che si considera, il più gran valore dell'espressione

$$-\left(\frac{Z}{\Omega}-\frac{v_e M_x}{I_x}\right) \qquad (5).$$

Ottenuto il valore di ϕ'', convien fare, in funzione di ϕ, l'espressione $-V-v_i$, onde poter osservare come essa si comporta fra gli indicati limiti. Qualora si riconosca che quest'espressione non può avere che valori positivi, è certo che dalla parte dell'intradosso non trovasi provocata resistenza alla trazione, e che per conseguenza è inutile procedere alla ricerca della corrispondente sezione pericolosa. Che se l'espressione $-V-v_i$ può, fra gli indicati limiti, risultare negativa, dalla parte dell'intradosso è anche provocata la resistenza alla tensione, e si determina la sezione pericolosa ad essa relativa col cercare qual è quel valore particolare ϕ' di ϕ che attribuisce il più gran valore all'espressione

$$\frac{Z}{\Omega}+\frac{v_i M_x}{I_x} \qquad (6).$$

Finalmente per una siffatta parte della centina, alla quale corrispondono valori negativi, tanto della forza Z, quanto del momento M_x si trova la sezione pericolosa per rapporto alla resistenza alla pressione col cercare qual è quel valore particolare φ'' di φ per cui acquista il più gran valore l'espressione

$$-\left(\frac{Z}{\Omega}+\frac{v_i M_x}{I_x}\right) \qquad (7).$$

Trovato l'angolo φ'', si fa, in funzione dell'ascissa angolare φ, l'espressione $V - v_e$, e si studia come variano i suoi segni fra i limiti di φ definiti dalla parte considerata della centina. Se la differenza $V - v_e$ conservasi positiva, non è il caso di procedere alla ricerca della sezione pericolosa per rapporto alla tensione, giacchè, tanto all'intradosso, quanto all'estradosso è provocata la resistenza alla pressione. Se invece l'indicata differenza può avere valori negativi, dalla parte dell'estradosso è provocata la resistenza alla tensione, e si determina la relativa sezione pericolosa trovando qual è quel valore particolare φ' di φ al quale corrisponde, sempre nei limiti della parte di centina considerata, il più gran valore dell'espressione

$$\frac{Z}{\Omega}-\frac{v_e M_x}{I_x} \qquad (8).$$

Ponendo l'indice m per indicare i più grandi valori delle espressioni (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) ed (8), ossia i valori delle espressioni (1), (3), (6) ed (8) quando si ponga in esse l'angolo φ' ed i valori delle espressioni (2), (4), (5) e (7) quando si sostituisca in esse l'angolo φ'', si ha che le equazioni di stabilità riferentisi alle sezioni pericolose sotto il punto di vista della resistenza longitudinale, sono: per le parti di centina in cui Z ed M_x sono positivi

$$n' R' = \left(\frac{Z}{\Omega}+\frac{v_i M_x}{I_x}\right)_m,$$

$$n'' R'' = -\left(\frac{Z}{\Omega}-\frac{v_e M_x}{I_x}\right)_m;$$

per le parti di centina in cui è positivo il valore di Z e negativo quello di M_x

$$n' R' = \left(\frac{Z}{\Omega} - \frac{v_e M_x}{I_x}\right)_m,$$

$$n'' R'' = -\left(\frac{Z}{\Omega} + \frac{v_i M_x}{I_x}\right)_m;$$

per le parti di centina cui corrispondono valori negativi di Z e valori positivi di M_x

$$n'' R'' = -\left(\frac{Z}{\Omega} - \frac{v_e M_x}{I_x}\right)_m,$$

$$n' R' = \left(\frac{Z}{\Omega} + \frac{v_i M_x}{I_x}\right)_m;$$

e per le parti di centina cui corrispondono valori negativi di Z e di M_x

$$n'' R'' = -\left(\frac{Z}{\Omega} + \frac{v_i M_x}{I_x}\right)_m,$$

$$n' R' = \left(\frac{Z}{\Omega} - \frac{v_e M_x}{I_x}\right)_m.$$

Applicando queste equazioni di stabilità alle parti in cui, a motivo dei cangiamenti dei segni delle forze Z e dei momenti M_x, si è divisa la centina, sarà facile dedurre i coefficienti di stabilità n' ed n'' per ciascuna di queste parti, e farsi così un'idea del grado di stabilità che in esse ha luogo, allorquando è quistione di una centina già progettata. Le due sezioni, in cui c'è maggior pericolo di rottura per tensione e per pressione, sono rispettivamente quelle per le quali si hanno il più gran valore del coefficiente di stabilità n' ed il più gran valore del coefficiente di stabilità n''.

Ci resta ancora la determinazione della sezione pericolosa per rapporto alla resistenza trasversale. Distingueremo perciò le parti della centina in cui il valore di Y è positivo da quello in cui lo stesso valore è negativo, ed ammetteremo l'omogeneità della materia. Essendo Y una funzione dell'ascissa angolare ϕ, si determinerà la sezione pericolosa per una parte della centina per cui il valore di Y si conserva positivo cercando qual è quel valore particolare ϕ^{IV} di ϕ, al quale corrisponde il più gran valore dell'espressione

$$\frac{Y}{\Omega'} \qquad (9).$$

Analogamente, si troverà la sezione pericolosa per una parte della centina per la quale il valore di Y è negativo, determinando qual è quel valore particolare ϕ^{IV} di ϕ cui corrisponde al più gran valore dell'espressione

$$-\frac{Y}{\Omega'} \qquad (10).$$

Il valore di Ω' da porsi nelle ultime espressioni, a seconda del punto di vista da cui parte il costruttore (Num. 51), può essere o l'intiera sezione retta della centina o solamente una sua parte.

Adottando l'indice m per indicare i più grandi valori delle espressioni (9) e (10), riesce facile scrivere le equazioni di stabilità relative alle sezioni pericolose per rapporto alla resistenza trasversale. Nelle parti di centina per cui la forza Y ha valore positivo, si ha

$$n^{IV}R^{IV} = \left(\frac{Y}{\Omega'}\right)_m ;$$

e nelle parti di centina in cui la forza Y ha valore negativo, risulta

$$n^{IV}R^{IV} = -\left(\frac{Y}{\Omega'}\right)_m .$$

Applicando queste ultime due equazioni ad una centina già pro-

gettata, si può dedurre il valore massimo del coefficiente n^{IV} per ciascuna delle parti in cui essa trovasi divisa a motivo dei cangiamenti di segno della forza Y. La sezione della centina, in cui c'è maggior pericolo di rottura per scorrimento trasversale, è quella alla quale corrisponde il più grande di tutti i valori del coefficiente n^{IV}.

Le equazioni di stabilità, che in questo numero si sono date, potrebbero anche servire per determinare le dimensioni delle sezioni rette maggiormente pericolose di centine di cui si volesse dare il progetto. In questo caso però, essendo v_i, v_e, Ω, Ω' e I_x funzioni della dimensione incognita, anche i valori di φ', φ'' e φ^{IV} finiscono per risultare funzioni di questa, e le citate equazioni di stabilità riescono generalmente così complicate da essere assai difficile la loro risoluzione. Segue da ciò che, nel progettare le centine, usasi generalmente: o fare il progetto basandosi su esempli di centine già esistenti e che fanno buona prova, e sottoporlo quindi ad un calcolo di verificazione di stabilità; o fissare diverse sezioni rette facenti fra di loro angoli non maggiori di 5°, oppure, tutto al più, non maggiori di 10°, e calcolare le dimensioni incognite colle norme state date nei precedenti numeri 51 e 52.

STUDIO DEL PROGETTO

DI

UN PONTE IN FERRO CON ARCHI

---

1. **Norme generali ed indicazione delle operazioni da farsi per lo studio del progetto di un ponte in ferro con archi.** — Allorquando è fissata la località in cui un ponte vuol essere stabilito, per convenientemente studiarne il progetto importa innanzi tutto acquistare una conoscenza perfetta delle accidentalità del letto, delle sponde e delle attinenze tutte del corso d'acqua da attraversarsi, tanto nel senso planimetrico, quanto nel senso altimetrico. Perciò è necessario un rilevamento accurato, per dedurre da esso un piano atto ad indicare con esattezza l'andamento del corso d'acqua per una conveniente lunghezza a monte ed a valle dell'opera da costruirsi, la larghezza dell'alveo, le accidentalità del terreno e le direzioni dei due tronchi di strada che mettono capo al ponte. Mediante una livellazione longitudinale, bisogna determinare la pendenza del corso d'acqua, e quest'operazione, se è possibile, si deve ripetere in diverse epoche prima di dar mano all'incominciamento dei lavori, onde conoscere le variazioni che si possono presentare, sia nella pendenza, sia nella maniera con cui essa si distribuisce. Nè bastano le operazioni di livellazione longitudinale; ma sono anche indispensabili alcune livellazioni trasversali per dedurre i corrispondenti profili e per arrivare a conoscere, almeno approssimativamente, la forma della superficie del fondo. Le indicate operazioni di livellazione poi si devono anche estendere ad alcuni punti dell'asse stradale, onde poter avere la posizione altimetrica della strada per rapporto a quella

del corso d'acqua. Tutte queste operazioni si conducono a termine colle norme state date in quel volume dell' *Arte di fabbricare*, nel quale parlasi delle operazioni topografiche.

Determinati così gli elementi che influiscono sulle principali dimensioni del ponte, bisogna procurare di conoscere la natura del terreno sul quale esso deve essere stabilito onde adattarvi un conveniente sistema di fondazioni; ed una tale conoscenza facilmente si acquista mediante appositi sondaggi (*Arte di fabbricare, Lavori generali di architettura civile, stradale ed idraulica*, Num. 156).

Eseguite le indicate operazioni, le quali hanno per precipuo scopo di somministrare i dati di prima importanza per lo studio conveniente e regolare del ponte, conviene accingersi alle operazioni di tavolino, e, prima di ogni altra, si presenta quella della determinazione della *luce libera*, ossia della larghezza dello spazio affatto sgombro che bisogna lasciare sotto il ponte, affinchè la corrente, in qualunque stato e principalmente nelle sue massime piene, possa per essa trovare uno sfogo regolare senza compromettere la stabilità dell'edifizio e senza danno al buon regime dell' acqua nel tronco superiore. La destinazione poi che il ponte deve ricevere facilmente conduce a stabilire quale larghezza si deve ad esso assegnare.

Stabilita la luce libera del ponte, fissata la sua larghezza e determinato, a seconda dell'altezza di cui si può disporre e della qualità dei materiali che voglionsi impiegare, il numero dei suoi piedritti e quindi la corda e la saetta di ciascuna arcata, il costruttore deve accingersi allo studio della composizione dell' opera, prefiggendosi, per un ponte in ferro con archi, la forma dei piedritti, degli archi, dei timpani e delle travi longitudinali ad essi sovrastanti, scegliendo la disposizione da darsi alle travi trasversali ed ai pezzi di collegamento dei diversi archi di una stessa arcata, fissando il sistema da adottarsi per la coperta e per lo stabilimento del suolo stradale, e finalmente combinando come devono essere fatti i cuscinetti d'imposta, come devono essere disposti i mezzi d'ormeggio, come devono essere eseguite le diverse unioni e come ogni cosa deve essere ultimata. Per fare bene questo studio di composizione, dovrà il costruttore servirsi di schizzi accurati od anche di disegni regolarmente eseguiti.

Dopo lo studio della composizione del ponte, si presenta la quistione di assegnare dimensioni convenienti alle diverse sue parti, avendo già quelle del complesso. Bisognerà perciò che il costruttore assuma prima quelle dimensioni che sono subordinate alle esigenze, alla

destinazione ed anche al carattere architettonico della costruzione, e che, pei diversi pezzi, lasci incognite solamente quelle le quali si possono determinare colla teoria della resistenza dei materiali. Tenendo conto delle forze da cui le varie parti dell'opera sono sollecitate e delle condizioni nelle quali esse si trovano, si potranno determinare le dimensioni incognite in guisa che siavi il voluto grado di stabilità. Presentandosi alcune parti della costruzione, per le quali tutte le dimensioni si trovano determinate indipendentemente da considerazioni sulla resistenza dei materiali, si potranno esse sottoporre a calcoli atti ad indicare il grado di stabilità che in esse si verifica.

Una volta trovate le dimensioni di tutte le parti del ponte, riesce facile determinare i quantitativi dei materiali e delle opere tutte, e quindi l'ammontare della spesa occorrente per la sua ultimazione.

Riassumendo, si può dire che le operazioni da farsi per lo studio del progetto di un ponte in ferro con archi, le quali operazioni sono pur quelle da farsi per lo studio di un ponte qualunque, si riducono:

1° Alla determinazione della luce libera del ponte e delle principali dimensioni dipendenti dalla sua destinazione e dalla località in cui deve essere costrutto;

2° Alla composizione del ponte, per quanto si riferisce alle maniere di ben combinare le diverse parti fra di loro;

3° Ai calcoli per assicurarsi che la costruzione sarà per presentare la necessaria stabilità.

4° Alla valutazione dei quantitativi dei materiali, delle opere tutte e dell'ammontare della spesa occorrente per la sua costruzione.

Tutte queste operazioni saranno dettagliatamente esposte in quattro distinti capitoli, applicandole al caso di un ponte con archi di ferro, da costruirsi su un fiume il quale, convenientemente incassato e con andamento regolare, corre nell'interno di una vasta e popolata città. Si supporrà: che questo ponte faccia parte di un piano d'ingrandimento e di abbellimento della città stessa, nel quale è proposto di costrurre, lungo le sponde del fiume e per una considerevole lunghezza, due larghi arginali fiancheggiati da nuove fabbriche; e che sia esso destinato a congiungere le due parti della città in corrispondenza degli sbocchi al fiume di due ampie vie coi loro assi nella stessa direzione.

CAPITOLO I.

Determinazione della luce libera e delle altre principali dimensioni del ponte.

2. **Rilievi locali.** — La figura 43 rappresenti la proiezione orizzontale, nella scala del $\frac{1}{1000}$, del terreno nella località in cui si vuol costrurre il ponte; e A B C D sia quella sezione trasversale che, con sufficiente esattezza, si può ritenere siccome rappresentante una sezione media costante, comune a tutto il tratto del fiume lungo il quale si vogliono costruire gli arginali. La direzione dell'asse del ponte debba essere E F; e sia questa direzione perpendicolare a quella della corrente. I livelli delle acque minime, delle acque medie e delle acque massime siano definiti dalle rette G H, B C ed I K. La prima di queste rette sia distante di metri 2,36 dal punto più basso L del profilo trasversale dell'alveo del fiume; la seconda poi e la terza delle rette medesime si trovino rispettivamente elevate sulla prima di metri 1,10 e di metri 3,90. Finalmente le distanze orizzontali e le quote altimetriche (per rapporto ad un piano orizzontale A M assunto di metri 12 al di sopra del livello delle acque magre) necessarie a ben definire la sezione trasversale media del fiume nella località in cui si vuol costrurre il ponte, siano quali risultano dalla citata figura, e quali appaiono dal registro che qui presentiamo.

Distanze dei vertici del profilo trasversale della sponda destra	Distanze parziali	Ordinate	Distanze dei vertici del profilo trasversale della sponda destra	Distanze parziali	Ordinate
m		m		m	
0,00		0,00		10,00	
	m 9,80		m 126,00		m 14,35
9,80		2,70		10,00	
	7,20		136,00		14,30
17,00		6,23		10,00	
	8,10		146,00		14,18
25,10		10,90		10,00	
	10,90		156,00		14,20
36,00		12,00		10,00	
	10,00		166,00		14,12
46,00		12,84		10,00	
	10,00		176,00		13,37
56,00		13,02		10,00	
	10,00		186,00		13,02
66,00		13,25		6,50	
	10,00		192,50		12,00
76,00		13,63		5,40	
	10,00		197,90		10,50
86,00		13,96		10,60	
	10,00		208,50		8,64
96,00		14,28		10,30	
	10,00		218,80		2,15
106,00		14,36		5,70	
	10,00		224,50		— 1,50
116,00		14,34			

La pendenza media del fiume nel tratto, che deve essere fiancheggiato dagli arginali, siasi trovata di $0^m,00015$ per ogni metro, ossia del 0,15 per 1000; ed i sondaggi abbiano portato a conchiudere che, fino a metri 4,80 sotto il livello delle acque magre, esistono materie sciolte, mobili e di poca consistenza, ma che al di sotto di questa profondità si trova roccia resistente sulla quale si possono senz'altro stabilire le fondazioni.

3. **Portata del fiume in epoca di acque massime.** — Per ottenere questa portata si possono impiegare le due equazioni (*Arte di fabbricare, Costruzioni civili, stradali ed idrauliche*, Num. 137)

$$\frac{\chi}{\Omega} 1 = \alpha \left(1 + \beta \frac{\chi}{\Omega}\right) v^2 \qquad (1),$$

$$Q = \Omega v \qquad (2),$$

date da Darcy e Bazin, nelle quali

I rappresenta la pendenza del corso d'acqua,

Ω l'area, in metri quadrati, di quella parte della sezione trasversale del fiume per cui cammina l'acqua,

χ la lunghezza, in metri, del perimetro bagnato, ossia di quella parte del perimetro della stessa sezione il quale resta sotto il livello dell'acqua,

v la velocità media dell'acqua, espressa in metri,

Q la portata, espressa in metri cubi e riferita al minuto secondo,

α e β due coefficienti numerici i quali, nel caso in cui l'acqua scorra entro terra, si possono rispettivamente assumere eguali a 0,00028 ed a 1,25.

Per ottenere le due quantità χ ed Ω, è necessario conoscere le lunghezze $\overline{Ia}$ e $\overline{Kd}$ le quali, risguardando Bc ed fg come linee rette, assai facilmente si deducono per la similitudine delle due coppie di triangoli IaB ed Ibc, Kdf e Keg, ossia ancora considerando il punto I siccome il punto di passaggio fra le due rette Bc ed ab, ed il punto K come il punto di passaggio fra le due rette fg e de. Chiamando però

x la distanza $\overline{Ia}$ ed

x' la distanza $\overline{Kd}$, espresse in metri,

osservando (*Fig.* 43) che

$$\overline{ab} = 8^{m},10,$$

$$\overline{de} = 10\ ,30,$$

$$\overline{NG} = 12\ ,00,$$

$$\overline{OG} = 3\ ,90,$$

$$\overline{ah} = \overline{di} = \overline{ON} = 12 - 3,90 = 8^{m},10,$$

$$\overline{aB} = 10,90 - 8,10 = 2^{m},80,$$

$$\overline{bc} = 8,10 - 6,23 = 1\ ,87,$$

$$\overline{df} = 8,64 - 8,10 = 0\ ,54,$$

$$\overline{eg} = 8,10 - 2,15 = 5\ ,95,$$

ed applicando le formole state date nel numero 47 della *Geometria pratica applicata all'arte del costruttore*, troviamo

$$x = \frac{8{,}10 \times 2{,}80}{2{,}80 + 1{,}87} = 4^{m},86,$$

$$x' = \frac{10{,}30 \times 0{,}54}{0{,}54 + 5{,}95} = 0\ ,86.$$

e quindi devonsi ritenere di metri 4,86 e di metri 0,86 le due distanze $\overline{Ia}$ e $\overline{Kd}$.

Come risulta dalle distanze marcate sulla figura 43, si ha: che la totale larghezza $\overline{IK}$ della sezione per cui passano le acque massime è data da

$$\overline{IK} = \overline{Ia} + \overline{ad} + \overline{Kd} = 4{,}86 + (208{,}50 - 25{,}10) + 0{,}86 = 189^{m},12;$$

che le quote scritte sotto l'orizzontale AM, diminuite di $\overline{ON}$, ossia di metri 8,10, dànno le altezze delle dette acque massime sui diversi vertici della sezione trasversale; che per conseguenza queste altezze, a partire dalla sponda destra, risultano

10,90 — 8,10 = 2^{m},80	14,35 — 8,10 = 6^{m},25
12,00 — 8,10 = 3 ,90	14,30 — 8,10 = 6 ,20
12,84 — 8,10 = 4 ,74	14,18 — 8,10 = 6 ,08
13,02 — 8,10 = 4 ,92	14,20 — 8,10 = 6 ,10
13,25 — 8,10 = 5 ,15	14,12 — 8,10 = 6 ,02
13,63 — 8,10 = 5 ,53	13,37 — 8,10 = 5 ,27
13,96 — 8,10 = 5 ,86	13,02 — 8,10 = 4 ,92
14,28 — 8,10 = 6 ,18	12,00 — 8,10 = 3 ,90
14,36 — 8,10 = 6 ,26	10,50 — 8,10 = 2 ,40
14,34 — 8,10 = 6 ,24	8,64 — 8,10 = 0 ,54;

e che l'altezza media si può ritenere di metri 4,96.

Per essere le altezze delle acque massime piccole in confronto della larghezza per la quale esse si estendono, si può ammettere, con sufficiente approssimazione pel genere di determinazione di cui stiamo occupandoci: che la sezione per cui queste acque passano sia un rettangolo avente metri 189,12 per lato orizzontale e metri 4,96 per lato verticale; che il perimetro bagnato sia lo stesso lato orizzontale; e che quindi risultino

$$\Omega = 189{,}12 \times 4{,}96 = 938^{mq},0352,$$

$$\frac{\Omega}{\chi} = 4{,}96.$$

Ponendo ora il valore di I che è 0,00015, i valori noti di α e di β, e questi valori di Ω e di $\frac{\Omega}{\chi}$ nelle equazioni (1) e (2), otteniamo dalla prima

$$v = 1^{m},46;$$

dalla seconda

$$Q = 1369^{mc},531;$$

cosicchè la velocità media delle acque in tempi di piena è di metri 1,46, e la portata di metri cubi 1369 per ogni minuto secondo.

4. **Distanza fra le facce interne dei due arginali.** — Ammettendo che gli arginali, sull'una e sull'altra riva del fiume, debbano estendersi di 500 metri tanto a monte quanto a valle del ponte: e considerando la parte di fiume PQSR (*Fig.* 44), che si troverà a valle fra gli arginali PQ ed RS, come un canale in cui si verificano le leggi del moto uniforme, fra la portata, la pendenza, le dimensioni della sezione retta e la velocità media dell' acqua, avremo le relazioni di Darcy e Bazin, già state riportate nel precedente numero. Essendo dunque quantità note la portata Q e la pendenza I, potremo prestabilirci un innalzamento ammissibile nelle acque massime a motivo del restringimento di sezione che sarà prodotto dagli ar-

ginali, e quindi determinare la distanza a cui converrà che siano questi costrutti. Nel caso concreto abbiamo

$$Q = 1369^{mc},$$

$$I = 0{,}00015;$$

possiamo supporre che l'innalzamento ammissibile nelle acque massime per il restringimento di sezione che sarà prodotto dagli arginali sia di metri 0,40; cosicchè, ritenendo che la sezione bagnata nel tronco di fiume PQSR sia un rettangolo avente per lato orizzontale la distanza domandata D e per lato verticale l'altezza media di metri 4,96, stata dedotta nel precedente numero, aumentata dell'indicato innalzamento di metri 0,40, avremo

$$\frac{\Omega}{\chi} = 4{,}96 + 0{,}40 = 5{,}36,$$

$$\Omega = 5{,}36 \times D.$$

Sostituendo i valori noti di α, di β e di I nelle citate equazioni di Darcy e Bazin, non che questi valori di $\frac{\Omega}{\chi}$ e di Ω, otteniamo le due equazioni

$$804 = 345.\, v^2,$$

$$1369 = 5{,}36.\, D\, v.$$

Ricavando il valore di v dalla prima, si ottiene

$$v = 1^{m},53$$

e ponendolo nella seconda, si deduce

$$D = 166^{m},93;$$

cosicchè si può ritenere che converrà assegnare agli arginali, da porsi a monte ed a valle del ponte, la distanza di metri 167.

a metri 0,50 sopra del livello delle acque minime, vogliasi porre una risega colla sporgenza di metri 0,15, tanto lungo i muri degli arginali, quanto lungo le spalle e le pile, assegneremo la scarpa di $\frac{1}{15}$ alle facce dei primi poste verso acqua, e la scarpa di $\frac{1}{25}$ alle facce delle seconde; la luce libera del ponte verrà divisa in tre scompartimenti, e quindi vi saranno in esso due pile e tre arcate.

Gli arginali, come si è trovato nel numero 4, tutto al più faranno elevare le acque di massime piene di metri 0,40 a valle del ponte, e quindi si può ritenere che sia per verificarsi il seguente stato di cose: di raggiungere le acque massime un'altezza di

$$3{,}90 + 0{,}40 = 4^{m},30$$

sul livello delle acque minime, ed un'altezza di

$$4{,}30 - 0{,}50 = 3^{m},80$$

sul piano della detta risega. La distanza di 167 metri fra le facce degli arginali si potrà assumere ad eguale distanza fra il livello delle acque massime ed il livello delle acque minime, e quindi questa distanza si troverà di metri 2,15 al disopra dell' ultimo indicato livello e di metri 1,65 al disopra del piano della risega. Per essere poi di $\frac{1}{15}$ la scarpa delle facce degli angoli, avremo che al livello del punto A (*Fig.* 46) la distanza delle facce degli arginali sarà

$$167 - 2 \times \frac{1}{15} 1{,}65 = 166^{m},78.$$

La luce libera sotto il ponte, pei risultamenti ottenuti nel precedente numero, deve essere almeno di metri 146,62; ma una luce di qualche poco maggiore può essere accettata siccome favorevole al deflusso delle acque in piena. Ora, ammettendo, come appare dalla figura 46, che le facce verso acqua delle due spalle debbano trovarsi, al livello del punto B ossia al livello della risega, distanti di m. 156,50, cioè di quanto si estendono le acque magre, ed assumendo per ciascuna

pila la grossezza $\overline{CD}$ di metri 4,20, avremo che la luce libera del ponte al livello or ora indicato riescirà

$$156{,}50 - 2 \times 4{,}20 = 148^{m},10.$$

All'altezza poi di metri 1,65 sul piano della risega, questa larghezza risulterà

$$148{,}10 + 6 \times \frac{1}{25} 1{,}65 = 148^{m},496,$$

cosicchè, essendo essa un po' maggiore del valore di l stato trovato nel precedente numero che corrisponde ad una sopraelevazione di pelo di metri 0,23, avverrà che giammai potrà verificarsi, contro ed a monte del ponte, la totale sopraelevazione di metri 0,63 (Num. 5), la quale può essere considerata come il limite superiore di quella che effettivamente potrà avvenire dopo la costruzione del ponte.

Risulta dal sin qui detto che in epoche di piene le acque raggiungeranno: a valle degli arginali, che tengono dietro al ponte, la linea EF (*Fig.* 45) alta metri 3,90 sul livello delle acque magre; fra i muri di questi arginali, la linea KI elevata di circa m. 0,40 sulla EF; contro ed a monte del ponte la linea GD col punto G elevato di circa metri 0,23 sul punto K ed estendentesi fino in D per una lunghezza di circa 6300 metri al di sopra del ponte medesimo; e finalmente a monte del punto D la linea CD elevata di metri 3,90 sul livello delle acque magre.

Il ponte dovrà essere fatto in guisa che le acque massime non possano arrivare fino alle imposte delle arcate, ed otterremo lo scopo facendo in modo che le sommità delle fasce dalle quali devono essere coronate le spalle e le pile siano su una linea EFG (*Fig.* 46) alta di

$$3{,}90 + 0{,}63 = 4^{m},53$$

sul livello delle acque minime, e di

$$4{,}53 - 0{,}50 = 4^{m},03$$

sul piano della risega.

Sopra la detta fascia, la cui sommità può essere raggiunta dalle acque massime, e che supporremo alta metri 0,50, esisterà una fascia minore la quale deve corrispondere al vivo dei piedritti, e la luce libera del ponte in corrispondenza di questa fascia minore sarà data da

$$148{,}10 + 6 \times \frac{1}{25}(4{,}03 - 0{,}50) = 148{,}9472.$$

Le centine delle arcate, onde ottenere che le pressioni alle imposte passino pei loro punti di mezzo, saranno collocate su cuscinetti semicilindrici, e gli assi orizzontali di due cuscinetti di una stessa centina saranno posti alla distanza di metri 50. Il piano poi, nel quale si trovano tutti questi assi, si stabilirà all'altezza di metri 5,55 sul livello delle acque magre prima dell'esistenza del ponte, e quindi di metri 5,05 sul livello della risega.

L'asse di ciascuna centina verrà primitivamente progettato circolare colla corda di 50 metri e colla saetta di 6 metri; ed il suolo stradale si stabilirà all'altezza di metri 12,78 al di sopra del livello delle acque magre, ossia di metri 12,28 sul piano della risega.

Ogni arcata consterà di sei centine distanti di metri 1,60 da mezzo a mezzo; e la totale larghezza del ponte sarà di 11 metri, cosicchè le cornici di coronamento ed il parapetto saranno portati da mensole in sporgenza sulle centine di fronte. Dell' indicata larghezza saranno dati, metri 5,60 alla carreggiata, metri 2,40 a ciascun marcapiede e metri 0,30 a ciascun aggetto della cornice dal mezzo di ciascun parapetto.

CAPITOLO II.

Descrizione e composizione del ponte.

7. **Fondazioni.** — Per quanto si è detto sul finire del numero 2, esistono fino a metri 4,80 sotto il livello delle acque magre materie sciolte, mobili e di poca consistenza, e quindi si trova roccia resistente sulla quale si possono stabilire le fondazioni. Segue da ciò che il sistema di fondazioni il quale sembra più conveniente in questo caso, tanto per le pile e per le spalle, quanto pei muri degli

arginali, è quello dei *cassoni senza fondo* da collocarsi in apposite escavazioni praticate fino a raggiungere la roccia, tanto alti da trovarsi colla loro base superiore di alcuni centimetri sopra il livello delle acque magre, e da riempirsi di calcestruzzo per la massima parte della loro altezza. Nel caso concreto si propongono cassoni di lamiera di ferro formati con cinque filari orizzontali, e convenientemente consolidati da nervature orizzontali, facenti anche l'ufficio di copri-giunti, non che da traverse interne quando sono un po' lunghi.

Nella figura 47, mediante la proiezione orizzontale e mediante la sezione prodotta dal piano verticale XY passante per l'asse del ponte, si dà un' idea della forma e della disposizione dei cassoni per la fondazione di una spalla e dei muri di sostegno degli arginali.

Il cassone per la spalla è rappresentato in A, la sua sezione orizzontale è un rettangolo privato dei due vertici che devono trovarsi verso acqua col raccordare i lati mediante quadranti circolari. La parete la quale deve trovarsi dalla parte del detto muro di sostegno è verticale, e tutte le altre pareti sono egualmente inclinate, in modo da risultare la base superiore più piccola della base inferiore. Servono a consolidare il sistema quattro nervature orizzontali, costituite da ferri a T situati in corrispondenza dei giunti orizzontali delle lamiere, e sei tiranti orizzontali disposti, tre ad $\frac{1}{5}$ e gli altri tre ai $\frac{3}{5}$ dell' altezza del cassone a partire dalla sua base inferiore. Due di questi tiranti corrispondono alla metà della lunghezza del cassone; e gli altri quattro sono ripartiti in corrispondenza dei raccordamenti delle parti rettilinee colle parti arrotondate. Ciascun tirante è fermato da due ferri a T i quali si sovrappongono, e che dànno quindi nel loro complesso un corpo con sezione a croce.

Atteso la grande altezza dei muri di sostegno degli arginali, conviene costruirli con contrafforti ed archi di scarico verso terra; e quindi, per convenientemente fondarli, è necessario pensare alle fondazioni del muro continuo e dei contrafforti. Per le fondazioni del muro continuo faremo uso di cassoni B colle loro pareti verticali, consolidate, non solo da nervature a T poste orizzontalmente in corrispondenza delle giunture delle lamiere, ma anche da tiranti, come quelli già stati indicati pei cassoni delle spalle. Ogni cassone dovrà servire per la fondazione della parte di muro continuo, compresa fra mezzo e mezzo degli intervalli esistenti fra

due contrafforti successivi, ed avrà due tiranti di consolidamento, disposti nel senso della larghezza a metà della sua lunghezza, come chiaramente appare dalla figura 47. I cassoni B non si potranno mettere a contatto perfetto l'uno coll'altro, ma converrà lasciare fra essi uno spazio C, unirli, per quanto è possibile, mediante ferri orizzontali a T, e porre delle tavole t, le quali, unitamente alle pareti vicine di due cassoni attigui, limitino il detto spazio. — Fra i cassoni A e B esisterà pure uno spazio E; e, mediante le tavole t', si otterrà una specie di cassa, la quale, per la massima parte della sua altezza, si potrà riempire di calcestruzzo.

I cassoni, per la fondazione dei contrafforti, sono quelli rappresentati in D, con pareti verticali. Questi cassoni, per quanto sarà possibile, si collegheranno ai cassoni B, e gli spazi F fra quelli e questi lateralmente si limiteranno mediante le tavole t''.

Il cassone G, per la fondazione di una pila, è rappresentato nella figura 48 mediante la metà della sua proiezione orizzontale e mediante la sezione trasversale, secondo il piano verticale di traccia orizzontale XY. La sezione orizzontale di questo cassone è un rettangolo con due semicircoli alle estremità, e le sue pareti sono inclinate in modo da risultare la base superiore più piccola della base inferiore. Pel consolidamento di questo cassone, oltre le quattro nervature orizzontali in corrispondenza dei giunti dei filari di lamiere, esistono sei tiranti disposti nel senso della larghezza, i quali hanno la stessa disposizione e la stessa forma di quelli dei cassoni per le spalle.

I cassoni pei muri degli arginali, per le pile e per le spalle sono destinati ad essere riempiti di calcestruzzo per la massima parte della loro altezza. Dopo questo riempimento sarà facile esaurire l'acqua che in essi ancor si trova ed eseguire la muratura di pietrame con rivestimento di pietra da taglio fino all'altezza della risega. Se poi il filare più alto di lamiera fosse unito al filare sottostante mediante chiavarde, tornerà agevole staccarlo dal cassone e lasciare nell'acqua solamente i quattro filari inferiori. Finalmente converrà eseguire gettate di grossi massi di pietra attorno alle pile e, quando lo si riconosca necessario, anche contro le spalle e contro i muri degli arginali.

8. **Muri degli arginali.** — I muri di sostegno degli arginali, come già si è detto nel precedente numero e come in sezione trasversale appare dalla figura 49, saranno costrutti con contrafforti ed archi di scarico.

Il muro continuo M presenterà verso acqua ed al disopra del piano della risega la scarpa di $\frac{1}{15}$, e dalla parte opposta, ossia verso terra, avrà parete verticale. I contrafforti, con sezione orizzontale rettangolare costante, porteranno gli archi di scarico distribuiti in cinque piani in modo da essere eguali fra di loro le altezze $\overline{ae}$, $\overline{fg}$, $\overline{hi}$, $\overline{kl}$, ed $\overline{mn}$.

I muri di sostegno, di cui stiamo parlando, si costruiranno con pietrame, ma presenteranno verso acqua un rivestimento di pietra da taglio. Superiormente si coroneranno con una cornice pure di pietra da taglio; e sopra la cornice, come appare dalla citata figura 49, vi sarà un parapetto con zoccolo, cimasa, pilastrini ed interposto pluteo, il tutto fatto con pietra da taglio adatta a questo genere di lavoro.

9. **Spalle del ponte.** — Il progetto di una spalla trovasi ampiamente rappresentato nelle figure 49, 50, 51, 52, 53, 54 e 55. La figura 49 è il prospetto di una spalla osservata nel senso della corrente; e la figura 50 ne è la metà del prospetto in direzione perpendicolare. La figura 51 è una parte della sezione prodotta dal piano di profilo XY, e la figura 52 una parte della sezione orizzontale secondo UV, ma osservata dal basso all'alto. Nelle figure 53, 54 e 55 sono rispettivamente rappresentate le sezioni secondo la spezzata QRST, secondo il piano di profilo NO e secondo la orizzontale IK.

Considerando una spalla indipendentemente dalle sue fondazioni, ossia per quanto trovasi sopra il piano delle riseghe, tre parti principali si possono in essa distinguere: quella che dal detto piano si eleva fin sotto le imposte delle centine; quella che corrisponde alle imposte ora indicate; e quella che si innalza fino al suolo stradale. La prima parte ha la scarpa di $\frac{1}{25}$ sulle facce viste; è arrotondata nel passaggio dal fianco alle fronti; ed una fascia *s* le serve di coronamento. La seconda parte è inclinata in modo da poter ricevere i cuscinetti d'imposta delle centine; nel passaggio dal fianco alle fronti presenta pure una superficie arrotondata; e superiormente è ornata da una cimasa *t*. La terza parte sorge verticalmente, presentandosi all' osservatore con due facce, una parallela e l'altra obbliqua, alla fronte del ponte. Questa terza parte termina con una cornice e con un parapetto, i quali sono la continuazione di quelli portati dai muri di sostegno degli arginali. Un avancorpo serve a separare, sulle fronti, le indicate tre parti da quella che va a collegarsi coi muri degli arginali.

Verso terra la spalla si prolunga, mediante contrafforti, fino a raggiungere la linea più avanzata dei muri di sostegno degli arginali; il contrafforto A (*Fig.* 53 e 55) non s' innalza fino alla metà dell'altezza $\alpha\lambda$; ed un sol ordine di archi di scarico esiste fra i contrafforti A, B e B'. La faccia $\alpha\gamma$ è sulla continuazione di quella dei muri di sostegno degli arginali, ma a circa metà altezza esiste la risega $\gamma\delta$, la quale, unitamente all'inclinazione della $\varepsilon\eta$ conduce ad avere superiormente una larghezza di spalla assai minore della larghezza $\alpha\beta$ al piano della risega.

Senza parlare delle più minute particolarità delle spalle in ordine alla loro forma ed alla decorazione, le quali tutte abbastanza chiaramente risultano dalle citate figure, ci limiteremo ad indicare che nella parte destinata a ricevere le imposte degli archi esistono le incavature C (*Fig.* 50 e 53) pel collocamento dei cuscinetti d'imposta, e le camere D (*Fig.* 53, 54 e 55) per l'ormeggio dei timpani.

Nella materiale struttura delle spalle, come risulta dalle figure 49, 50, 51, 52, 53 e 54, si adotterà la muratura di pietrame con pietra da taglio in tutte le parti viste.

10. **Pile del ponte.** — Le figure 56, 57, 58 e 59 dànno la completa rappresentazione di una pila del ponte. Nella figura 56 se ne ha il mezzo prospetto, quando sia essa osservata nel senso della corrente; e nella figura 57 se ne ha l'altro mezzo prospetto in direzione perpendicolare. La figura 58 è la metà della sezione trasversale della pila in corrispondenza del mezzo della posizione di una centina; e la figura 59 è la metà della sezione longitudinale secondo l'asse della pila stessa.

Considerando una pila per quanto trovasi sopra il piano delle riseghe, precisamente come per le spalle, si possono in essa distinguere tre parti principali: quella che dal piano indicato si eleva fin sotto le imposte delle centine; quella che corrisponde alle imposte; e finalmente quella che innalzasi fino al suolo stradale. La prima delle indicate tre parti ha sezione orizzontale rettangolare con semicircoli alle estremità; esternamente presenta la scarpa di $\frac{1}{25}$ ed è coronata con una fascia *s*. La seconda parte, inclinata in modo conveniente per ricevere le imposte delle centine ed arrotondata alle estremità, termina con una cimasa *t*. La terza parte, verticalmente innalzandosi, si presenta, a chi la osserva nel senso della corrente, con tre facce, una parallela e due oblique alla fronte del ponte, e superiormente porta una cornice la quale, col sovrastante parapetto,

corre al livello di quella dei muri di sostegno degli arginali e delle spalle dal ponte.

Tutte le particolarità delle pile in ordine alla loro forma ed alla loro ornamentazione chiaramente risultano dalle citate figure, e quindi ci accontenteremo di accennare alle incavature C (*Fig.* 57 e 58) pel collocamento dei cuscinetti d'imposta, ed alle camere D (*Fig.* 58 e 59) per l'ormeggio dei timpani.

La struttura delle pile non è diversa da quella delle spalle. Le loro parti visibili devono essere in pietra tagliata, e di pietrame il loro nucleo interno.

11. **Centine.** — Già si è detto nel numero 6, che ciascuna arcata consta di sei centine, e che quindi sono diciotto le centine tutte da impiegarsi nella costruzione del ponte.

Ogni centina C, come risulta dalla figura 60, rappresentante il mezzo prospetto di un'arcata addossata ad una spalla e la quarta parte della sua proiezione orizzontale (supposta tolta la coperta), ha per asse un arco circolare, è perfettamente simmetrica rispetto al piano verticale passante pel suo punto culminante, presenta altezza crescente dalla chiave all'imposta, e la sua sezione retta è quella di un doppio T simmetrico. Le tavole d'intradosso e d'estradosso sono unite mediante ferri d'angolo alla lamiera che ne forma la parete verticale, la quale è rinforzata da ventiquattro nervature *a* costituite da ferri a T e condotte da punti dell'estradosso aventi fra loro la stessa distanza orizzontale. Robusti cuscinetti semicilindrici di ghisa servono d'imposte; e le centine, armate alle loro estremità da corrispondenti gusci pure di ghisa e rinforzate da numerose lamiere, sono rese adatte ad essere poste sugli indicati cuscinetti ed a sopportare le grandi reazioni che da essi possono derivare.

Le differenti centine di una stessa arcata devono essere ben collegate fra di loro in senso perpendicolare ai piani verticali determinati dai loro assi; ed in apposito numero, parlando di tutti i collegamenti, si dirà anche di quelli delle centine di una stessa arcata fra di loro.

12. **Timpani e longarine.** — Per passare dall'estradosso di una arcata al suolo stradale, è necessario combinare un ben inteso sistema di pezzi, i quali riuniscano ciascuna centina allá corrispondente trave longitudinale o longarina, che corre parallelamente alle fronti del ponte. Nel caso concreto si è ideato: di munire la centina (*Fig.* 60) di una lamiera verticale V unita alla tavola superiore mediante ferri d'angolo; di porre una longarina L con sezione a T, colla tavola in alto e colla sua superficie superiore all'altezza dello spigolo inferiore

cd della cornice che corona le spalle e le pile; e di stabilire fra la centina e la longarina un sistema triangolare formato con ferri ad U.

Essendo *b* (*Fig.* 86) il centro della sezione retta del cuscinetto semicilindrico d'imposta, *de* quella linea la quale indica il livello raggiunto dalla superficie superiore della longarina ed *fg* la linea d'estradosso di mezza centina, ecco in qual maniera si è combinato il sistema triangolare dei timpani. Tirata la verticale *bv* del punto *b*, si sono condotte le linee $0k$ ed $0'i$, la prima di poco sotto la *de*, la seconda di poco sopra la *fg*, ed assai vicine fra di loro in corrispondenza del mezzo della centina. La lunghezza $\overline{0k}$, eguale alla semicorda della centina, ossia di 25 metri, si è divisa in venticinque parti eguali, e quindi pei punti di divisione 1, 2, 3, 4, ..., 15 e 16 si sono condotte altrettanti verticali fino ad incontrare la curva $0'i$ nei punti 1', 2', 3', 4', ..., 15' e 16'. La verticale 00' e quelle indicate con numeri dispari si sono divise per metà nei punti 0'', 1'', 3'', 5'', 7'', 9'', 11'', 13'' e 15''; e questi punti, assieme a quelli aventi numeri pari sulla retta $0k$ e sulla curva $0'i$, hanno dato i vertici in cui concorrono i varii pezzi costituenti i timpani. Questi pezzi sono: il ritto verticale 00''0'; quelli i cui assi costituiscono la linea poligonale 0'' 1'' 3'' 5'' 7'' 9'' 11'' 13'' 15''; quelli concorrenti in 1'' diretti secondo 1''0, 1''2, 1''2' ed 1''0'; quelli concorrenti in 3'' nelle direzioni 3''2, 3''4, 3''4' e 3''2'; e così analogamente tutte le quaderne di pezzi che, concorrendo nei punti 5'', 7'', 9'', 11'', 13'' e 15'', vanno a passare pei due punti della linea $0k$ e pei due punti della curva $0'i$ i quali sono immediatamente a sinistra ed a dritta delle verticali 5 5''5', 7 7''7', 9 9''9', 11 11''11', 13 13''13', 15 15''15'. Oltre la verticale del punto 17, essendo la linea $0k$ assai vicina alla curva $0'k$, il timpano si riduce ad una lamiera continua che è la prosecuzione di quelle a cui devono essere inchiodati i ferri già indicati.

I ferri ad U, costituenti i pezzi dei timpani, sono disposti per coppie, in modo da serrare fra di loro la lamiera verticale della longarina, quella che si trova sopra l'estradosso della centina ed apposite piastre di collegamento situate nei punti di concorso 1'', 3'', 5'', 7'', 9'', 11'', 13'' e 15''. Queste piastre, come risulta dalla figura 60, sono foggiate a guisa di stelle, e, nel senso dei pezzi che ad esse sono inchiodati, si estendono a partire dal punto di concorso degli assi dei pezzi medesimi di circa $\frac{1}{4}$ della loro lunghezza. La sola piastra in 1'' (*Fig.* 86) si estende a circa metà della lunghezza 1''0''.

13. **Travi trasversali e mensole.** — Sulle longarine sono disposte le travi trasversali con sezione a doppio T simmetrico, inchiodate sovr' esse nei siti in cui le attraversano, poste in corrispondenza dei punti (*Fig.* 86) 0, 1, 2, 3, ... e quindi distanti di un metro da mezzo a mezzo. La lamiera verticale di ciascuna longarina di fronte si prolunga al disopra della sua tavola orizzontale di oltre il doppio dell' altezza delle travi tasversali, e su questo prolungamento sono attaccate tante mensole quante sono le dette travi. Queste mensole devono servire a sostenere una parte dei marciapiedi, la cornice di coronamento ed il parapetto del ponte fra le spalle e le pile.

Risulta dalla figura 60, e principalmente dalla proiezione orizzontale, in qual modo sono disposte le travi trasversali. La figura 61, mediante piccole porzioni del prospetto, della sezione trasversale e longitudinale, mette in evidenza: come le travi trasversali sono collegate alle loro estremità colle longarine di fronte; e come a queste ultime si trovano unite le mensole. Le travi trasversali T sono fermate alle longarine di fronte, con cantonali o ferri d'angolo; e queste longarine si presentano a guisa di travi nella cui sezione vi sono quella di una lamiera verticale, quelle di due ferri d'angolo verso la fronte, quelle di un ferro d'angolo e di un ferro a U dalla parte opposta. Le mensole M sono formate da lamiere con contorno curvilineo, e tali lamiere da ambe le parti e per tutto il loro contorno sono rinforzate da ferri d'angolo. Quelli di questi ferri d'angolo, i quali sono disposti secondo il maggiore dei lati verticali della lamiera or indicata, sono i mezzi destinati ad unire le mensole alla longarina di fronte.

14. **Cornice di coronamento e parapetto del ponte.** — La cornice di coronamento è di ghisa, ha la stessa altezza del listello e del superiore piano inclinato della cornice di pietra da taglio sulle spalle e sulle pile, ed è inchiavardata alle estremità delle mensole sulle loro tavole superiori. Questa cornice è costituita da vari pezzi con lunghezza eguale al doppio della distanza che esiste fra mezzo e mezzo di due mensole successive, ossia di 2 metri; ed è in corrispondenza dell'unione di questi pezzi che ha luogo la fissazione del parapetto alla cornice e quindi anche alle mensole del ponte.

La figura 61, mediante piccole porzioni dell'elevazione di fronte, della sezione trasversale e dell'elevazione posteriore, fa conoscere la forma dell'indicata cornice C, il modo di fissarla alle mensole, non che la maniera di fermarvi il parapetto; e per meglio comprendere quest'ultimo particolare serve la figura 62, la quale altro non è che

una sezione orizzontale secondo il piano determinato dalla retta X Y (*Fig.* 61). I ritti del parapetto sono costituiti da due ferri con sezione a T; devono essi portare, superiormente due ferri d'angolo orizzontali coronati da una lamiera, ed inferiormente due ferri a T pure orizzontali; fra i ferri d'angolo superiori ed i ferri a T inferiori deve trovarsi una parete reticolata. Supponendo ora che a questi ultimi venga tolto il gambo dove sono attraversati dai ritti, e che la parete reticolata sia costituita da ferri piatti di tale spessore da potersi leggiermente piegare senza inconveniente, ne risulta che la distanza dei due ferri a T componenti ciascuno dei ritti suddetti deve esser tale da comprendere almeno tre lamiere, e che quindi la parte di ogni ritto, la quale è destinata ad essere fissata alla cornice, necessariamente deve essere fatta con tre lamiere serrate ed inchiavardate fra le tavole dei due ferri a T. I gambi di questi ferri si fanno entrare entro apposite incavature alle estremità dei diversi pezzi della cornice, ed in tale posizione ciascun ritto si inchiavarda colle pareti trasversali *p* (*Fig.* 62) degli adiacenti pezzi della cornice.

La figura 68 rappresenta una piccola porzione del prospetto e della sezione trasversale del parapetto, dove concorrono un ritto verticale, la traversa superiore e due pezzi del traliccio: ed analogamente la figura 69 rappresenta una piccola parte del prospetto, e della sezione trasversale del parapetto dove si riuniscono un ritto verticale, la traversa inferiore e due pezzi del traliccio.

15. **Coperta del ponte e suolo stradale.** — La coperta del ponte è fermata con lamiere foggiate a guisa di piccole vôlte a botte con teste di padiglione, e con monta assai depressa. Queste lamiere hanno base rettangolare, e tutto all'ingiro sono munite di un bordo piano pel facile loro posamento in opera.

La figura 64, mediante una proiezione orizzontale e due sezioni verticali, una parallela alle fronti del ponte secondo il piano V X e l'altra in direzione perpendicolare secondo il piano Y Z, mette in evidenza quanto si riferisce alla coperta. Le travi trasversali *t* sono fra loro collegate a distanze eguali dai ferri *l* con sezione a T e le superficie superiori delle tavole di questi ferri si trovano nel piano delle superficie superiori delle tavole delle travi trasversali. Questa disposizione di cose permette di collocare e di inchiodare i bordi delle lamiere curve sulle tavole delle travi trasversali e degli indicati ferri a T; ma, per aggiungere maggior rigidità al sistema, conviene che altri ferri *l'* ed *l''*, pure con sezione a T, siano disposti sopra i bordi delle dette lamiere ed assieme a questi inchiodati alle tavole delle sottostati travi *t* ed *l*.

La coperta del ponte sopra le mensole è pure costituita da lamiere curve della stessa forma di quelle già indicate. Queste lamiere, come risulta dalla figura 61, sono inchiodate alle tavole superiori delle mensole, alle tavole superiori delle longarine di fronte ed al lato orizzontale di un ferro d'angolo *a* inchiavardato alla parete posteriore della cornice.

Come risulta dalla figura 63, rappresentante la metà della sezione longitudinale non che la quarta parte della proiezione orizzontale di un'arcata, e della figura 67, rappresentante la metà della sezione trasversale, esiste sulla coperta precedentemente descritta uno strato, convenientemente compresso, di sabbia, e vien quindi il pavimento stradale in pietra da taglio. La carreggiata presenta un profilo a schiena con conci parallelepipedi; i marciapiedi sono piani e coperti da lastre di pietra. Fra la carreggiata ed i marciapiedi si trova una cordonata *c*, e sotto questa cordonata una specie di incavatura o canaletto per lo scolo delle acque piovane. Queste acque poi da appositi sfogatoi sono scaricate sotto il ponte. La figura 70, mercè una proiezione orizzontale ed una sezione normale alle fronti dell'edifizio secondo la retta Y Z, rappresenta uno di tali sfogatoi. Esso consiste in una piastra *p* di ghisa, con fenditure pel passaggio dell'acqua, seguìta da una camera C e quindi da un tubo *t* pure di ghisa, attraversante la coperta. Le incavature esistenti fra i marciapiedi e la carreggiata devono essere divise in varie parti con lievi pendenze verso gli indicati sfogatoi.

16. **Cuscinetti d'imposta ed estremità delle centine.** — Nella figura 71, mediante la proiezione orizzontale, mediante l'elevazione, mediante una sezione prodotta nel solo cuscinetto dal piano verticale determinato dall'asse della corrispondente centina e mediante la sezione secondo la Y Z nella sola estremità della centina stessa, si ha quanto occorre per acquistare un' idea precisa dell' importante particolare relativo al collocamento delle arcate sulle pile e sulle spalle.

Il cuscinetto d'imposta consta della parte fissa *f* e della parte mobile *m*. La prima parte è quella che deve essere stabilita sulle spalle e sulle pile nelle incavature C (*Fig.* 50, 53, 57 e 58). Essa è munita al di sotto di un risalto o dente (*Fig.* 71), e superiormente presenta quattro nervature le quali comprendono fra loro uno spazio parallelepipedo. Il detto risalto inferiore è destinato a fissare la prima parte sulla muratura, e lo spazio parallelepipedo ora indicato ha per iscopo di contenere la seconda parte, alla quale è unito il perno semi-cilindrico. Questa seconda parte è collocata sopra tre coppie di cunei

c le cui teste attraversano apposite aperture praticate in quelle nervature della parte *f*, le quali sono parallele al piano verticale determinato dall'asse della centina. I due cunei di una stessa coppia fanno nel loro complesso un parallelepipedo rettangolo; e le tre coppie di cunei di ciascun cuscinetto hanno per iscopo di servire allo stabilimento delle centine sui loro appoggi.

Le estremità delle centine sono costituite da un semi-collare o guscio di ghisa *g*, col quale fa corpo una piastra *p*. L'unione del semi-collare all'estremo di una centina puo essere fatto mediante più lamiere sovrapposte, tagliate come chiaramente appare dal disegno, ed inchiavardate alla piastra *p* ed alla parete verticale. Così facendo, si realizza l'idea di far passare la reazione degli appoggi nel mezzo e presso il mezzo della sezione d'imposta, e l'estremo di ogni centina si rende suscettivo di poter con sicurezza sopportare le grandi pressioni a cui trovasi sottoposto.

17. **Collegamenti delle centine e dei timpani di una stessa arcata.** — Accuratamente bisogna assicurarsi che siano ben solidarie fra di loro le differenti parti di una stessa arcata, e si raggiunge l'intento mediante appositi collegamenti da farsi fra una centina e l'altra, fra un timpano e l'altro. Le travi traversali già in parte soddisfanno a questa bisogna per quanto si riferisce ai timpani; esse però non bastano, ed è necessario stabilire altri collegamenti che si possono fare in differenti guise, e che nel caso concreto si progettarono quali risultano dalle figure 60, 63, 65, 66, 67, 76, 77, 78, 79 e 80.

Come si vede dalla figura 63, che rappresenta una porzione della sezione longitudinale del ponte, i collegamenti delle centine sono fatti in corrispondenza delle nervature *a* ed *a'*, le quali servono a dare incartamento alle pareti verticali delle centine stesse. Questi collegamenti sono di due sistemi: si estendono all'intiera altezza delle centine quelli che corrispondono alla nervatura *a*, uniscono le centine nel mezzo della loro altezza quelli fatti fra le nervature *a'*.

La figura 77, la quale rappresenta una sezione retta fatta in una centina di fronte e nella centina successiva presso una delle nervature *a*, mette in evidenza le disposizioni adottate nei collegamenti del primo sistema. Essi sono fatti mediante i ferri *b* aventi sezione a T ed uniti alle nervature mediante le lamiere *c* con contorno semicircolare da una parte e disposte due a due in modo da serrare fra di loro le nervature ed i gambi dei ferri *b*. La figura 65, la quale non è altro che la sezione secondo X Y (*Fig.* 77), serve a meglio delucidare l'unione di questi collegamenti alle centine.

I collegamenti del secondo sistema sono semplicemente formati con due ferri aventi sezione a T, disposti uno da una parte e l'altro dall'altra delle nervature *a'* ed inchiodati alle nervature stesse. La figura 66, in cui si ha una sezione analoga a quella rappresentata nella figura 65, basta per porre in evidenza questo secondo sistema di collegamento delle centine di una stessa arcata.

I sistemi di collegamento dei timpani sono pure due. Il più semplice consiste nell'unirli, mediante ferri orizzontali, in corrispondenza dei punti di concorso (*Fig.* 86) 3'', 7'', 11'' e 15''.

L'altro sistema si riduce: a considerare in ogni centina i punti di concorso 1'', 5'', 9'' e 13''; ad unire, mediante ferri inclinati, i punti di concorso 1'' di ogni centina coi punti 0, 2, 2' e 0' delle centine vicine; ed a procedere analogamente per il punto di concorso 5'' relativamente ai punti 4, 6, 6' e 4', per il punto di concorso 9'' relativamente ai punti 8, 10, 10' e 8', e per il punto di concorso 13'' relativamente ai punti 12, 14, 14' e 12'.

La figura 76, la quale rappresenta una porzione della proiezione orizzontale di una centina di fronte e della centina successiva colle corrispondenti parti di timpani e coi relativi collegamenti, una porzione della sezione longitudinale fra le dette centine e la sezione secondo il piano verticale R S, pone in evidenza il primo sistema di collegamento dei timpani. Esso si riduce unicamente, per ciascuno dei punti di concorso 3'', 7'', 11'' e 15'', a due ferri d'angolo orizzontali ed inchiodati a cantonali che a loro turno si trovano solidamente uniti ai timpani.

Il secondo degli indicati sistemi di collegamento dei timpani risulta: da quella parte della figura 60, la quale rappresenta una porzione della proiezione orizzontale del ponte, supposta tolta la coperta; da quella parte della figura 63, la quale rappresenta una porzione della sezione longitudinale; e dalla figura 78, nella quale si ha una porzione della proiezione orizzontale del timpano di fronte e del timpano successivo coi corrispondenti collegamenti, una porzione della sezione longitudinale fra i detti timpani e la sezione secondo il piano verticale R S. I pezzi inclinati per questo sistema di collegamento sono altrettanti ferri d'angolo che due a due s'incrocciano; e l'unione di questi ferri d'angolo ai timpani può essere fatta mediante corti ferri a T. — La figura 79 rappresenta il particolare dell'unione dei detti pezzi di collegamento in uno dei vertici inferiori dei timpani; essa è fatta pei pezzi concorrenti nel punto 12' (*Fig.* 86), e, per ben far comprendere questo particolare, si è disposta

la figura in modo da essere perpendicolare al piano orizzontale di proiezione quel ferro *e* (*Fig.* 79) dei timpani sul quale si proiettano due dei ferri di collegamento di cui stiamo ragionando. Questa figura mette in evidenza come all'estremo dei due ferri ad U formanti il pezzo *e* siano inchiodati da una parte e dall'altra due ferri *f* con sezione T; e come ai gambi di questi ferri sian inchiodati i pezzi di collegamento *g*. — Questa stessa maniera di unione conviene pei pezzi di collegamento in uno dei vertici superiori dei timpani. — La figura 80 è principalmente destinata a far vedere come i pezzi inclinati pel collegamento dei timpani concorrono nei punti (*Fig.* 86) 1″, 5″, 9″ e 13″; essa è fatta pei pezzi concorrenti nel punto 13″, e per maggior chiarezza, l'elevazione è girata in modo da essere perpendicolare al piano orizzontale di proiezione uno dei due pezzi *e* (*Fig.* 80) dei timpani i quali superiormente sono attaccati alla longarina. Nell'unione dei ferri con sezione ad U alla lamiera *h* esistono i ferri *f* con sezione a T, ed è ai gambi di questi ultimi che si trovano inchiodate le estremità dei pezzi inclinati *g*.

18. **Copri-giunti.** — I copri-giunti, che principalmente conviene considerare nel ponte che stiamo descrivendo, sono essenzialmente di cinque sorta. Abbiamo nelle centine (*Fig.* 60) quelli destinati a porre l'una in prosecuzione dell'altra le lamiere costituenti le pareti verticali, quelli che servono a congiungere le lamiere formanti le tavole inferiori, e quelli da impiegarsi per un'analoga unione delle lamiere componenti le tavole superiori. Abbiamo, nelle pareti verticali V superiori all'estradosso delle centine e nelle pareti verticali delle longarine, i copri-giunti che servono a porre, l'una in continuazione dell'altra, le lamiere che le compongono. Finalmente sono necessari copri-giunti pei ferri d'angolo da adoperarsi nelle centine, nelle pareti V superiori al loro estradosso e nelle longarine L. — I copri-giunti per le pareti verticali delle centine ci sono somministrati dalle stesse nervature *a*; non occorre aggiungere parola sulla loro forma e sulla loro disposizione, e quindi ci limiteremo ad un breve cenno sulle altre quattro sorta di copri-giunti.

I copri-giunti per le lamiere delle tavole inferiori delle centine si possono collocare nei siti indicati colla lettera *f* nella figura 60; conviene assegnare ad essi una spessezza eguale a quella della lamiera interrotta e porli solamente dalla parte dell'intradosso colla forma e col sistema di chiodatura risultante dalla figura 72, la quale abbastanza chiaramente fa vedere questo particolare mediante due proiezioni, una verticale e l'altra orizzontale, ma osservata dal basso all'alto.

I copri-giunti per le lamiere delle tavole superiori delle centine si possono porre nei siti i quali, nella figura 60, sono indicati dalla lettera *g*. La loro spessezza sarà di qualche poco maggiore od almeno eguale a quella della lamiera interrotta; ciascuno di essi sarà diviso in due parti da porsi sopra l'estradosso, una da una parte e l'altra dall'altra della parete verticale: la loro forma poi ed il sistema di chiodatura risultano dalla figura 73, che fa vedere questo particolare mediante un'elevazione ed una proiezione orizzontale dall'alto al basso.

I copri-giunti da impiegarsi nella lamiera verticale V (*Fig.* 60), che serve per l'unione dei pezzi dei timpani alla centina, si possono collocare nei siti indicati dalla lettera *h*; e può convenire di porre nei luoghi segnati alla lettera *i* i copri-giunti delle pareti verticali delle longarine L. Gli uni e gli altri di questi copri-giunti saranno disposti per coppie, cioè uno da una parte e l'altro dall'altra della lamiera verticale, ossia nella maniera indicata dalla figura 74, mediante una elevazione e mediante una sezione orizzontale secondo il piano YZ.

In quanto ai copri-giunti per tutti i ferri d'angolo della centina e della longarina, si possono essi disporre nei punti *k*, *l*, *m* ed *n*, come lo indica la figura 60, assegnando loro la forma e le disposizioni che, mediante una elevazione e mediante una proiezione orizzontale dal basso all'alto, risultano dalla figura 75.

Dove i timpani, per la piccola distanza fra l'estradosso delle centine e le longarine, sono ridotti ad una parete continua, esistono i doppi copri-giunti *o* e *p* (*Fig.* 60); e, senza aggiungere altre spiegazioni, ognuno può immaginarsi il sistema di chiodatura che in questo caso può riuscire più conveniente.

19. **Ormeggi dei timpani sulle spalle e sulle pile.** — Le arcate dei grandi ponti metallici devono avere un certo collegamento colle spalle e colle pile; ma questo collegamento deve essere tale da permettere i piccoli spostamenti e le variazioni di lunghezza che, nelle centine e nei timpani, possono verificarsi pei cangiamenti di temperatura. I metodi che si possono seguire per raggiungere l'intento sono diversi, ed ecco in qual maniera abbiamo risoluto il problema nel caso particolare.

Parlando delle spalle del ponte (Num. 9), abbiamo accennato come esistano in esse le camere D (*Fig.* 53, 54 e 55) per l'ormeggio dei timpani. Quest'ormeggio ha luogo a due differenti livelli: al livello della metà dell'altezza massima dei timpani, ed al livello delle longarine. I particolari tutti che ad esso si riferiscono chiaramente risultano dalla figura 81, la quale rappresenta le proiezioni verticali e le proiezioni orizzon-

tali, tanto dell'ormeggio superiore, quanto dell'ormeggio inferiore. — L'ormeggio superiore si ottiene mediante prolungamenti delle pareti verticali delle longarine, mediante aste orizzontali A, e mediante i perni verticali P attraversanti il cielo della camera D. L'estremità *a* delle indicate aste sono unite a snodo coi prolungamenti *b* delle corrispondenti longarine, e le estremità *c* sono appiattite con fori oblunghi attraversati dalle estremità superiori del perno P. Queste estremità sono munite di capocchia, mentre le estremità inferiori sono lavorate a vite colle corrispondenti chiocciole. Le aste A ed i perni P sono eguali in numero a quelle delle centine di una stessa arcata, e quindi sono sei. Una guida *d* si estende su tutte le estremità appiattite delle aste A, ed una seconda guida *e*, divisa in due parti a motivo dell'esistenza del risalto *r* (*Fig.* 53, 54 e 55), attraversando i sei perni, si trova a combacio del cielo della camera D per la quasi totalità della sua lunghezza. Le aste A, le loro estremità *c*, le guide *d* e le capocchie dei perni sono adagiate in scanalature praticate sotto le superficie superiori delle spalle, e onde impedire che queste scanalature si riempiano di sabbia, sono esse coperte con piastre di ghisa. Negli incontri delle scanalature parallele all'asse del ponte colla scanalatura normale, a motivo dell'esistenza delle capocchie, non può servire la coperta con piastre di ghisa, ma importa far uso di ferri concavi foggiati a guisa di piccola vôlta a padiglione. — L'ormeggio inferiore è fatto in modo analogo all'ormeggio superiore. Le lamiere di mezzo di quei ritti dei timpani i quali si trovano presso le spalle, a metà della loro altezza, sono prolungate e quindi unite a snodo alle aste orizzontali A′ eguali per sezione e forma alle aste A. Queste aste A′ si trovano colle loro estremità *c*′ quasi al livello del pavimento della camera D, e sono attraversate dai perni P′ fissati nella muratura, colle loro estremità superiori a vite e muniti di chiocciola. Una guida *d*′, divisa in due parti, come la guida *e*, si estende su tutte le estremità appiattite delle aste A′.

Gli ormeggi superiori ed inferiori dei timpani sulle pile sono rappresentati nella figura 82 mediante le loro proiezioni verticali ed orizzontali. Questi ormeggi, combinati precisamente come quelli sulle spalle, presentano la sola diversità che deriva dal trovarsi in una stessa pila gli ormeggi delle due arcate adiacenti, ossia il concorso di due aste ad uno stesso perno.

Il sistema di ormeggio di cui abbiamo parlato riesce eminentemente semplice; convenientemente serrando le chiocciole, dà le più

ampie garanzie di sicurezza; a motivo degli snodi ad un estremo di ogni asta e dei ferri oblunghi all'altro estremo, permette le variazioni di lunghezza causate da cangiamenti di temperatura, e finalmente, in grazia dei pozzi che si devono lasciare alle estremità delle camere d'ormeggio, risulta di facile esplorazione e di comodo maneggio.

La figura 83 è destinata a far vedere la forma dei fori oblunghi nelle estremità in cui le aste sono attraversate dai perni; la figura 84 è la proiezione orizzontale dei collari f ed f' (*Fig.* 81 ed 82) sui quali hanno appoggio le estremità c e c' delle aste A ed A'; la figura 85 rappresenta una sezione orizzontale nel mezzo delle estremità a ed a' delle stesse aste.

CAPITOLO III.

Determinazione delle dimensioni delle varie parti del ponte.

20. **Assunto del presente capitolo.** — La determinazione delle dimensioni delle diverse parti del ponte deve essere fatta in modo da soddisfare allo scopo ed alla destinazione delle parti stesse, e colla condizione che vi si trovi un conveniente grado di stabilità sotto l'azione dei massimi sforzi cui potranno trovarsi sottoposte.

Nel fare queste determinazioni bisogna vedere in qual modo e con qual ordine gli sforzi si trasmettono da un pezzo all'altro, quando si incominci col considerare il sovraccarico massimo che può trovarsi sul ponte, ed attenersi a questo stesso ordine nello stabilire le dimensioni d'ogni singola parte. Segue da ciò che converrà occuparsi innanzi tutto della determinazione delle dimensioni delle parti più elevate della costruzione e discendere man mano finchè si giunge alle fondazioni.

21. **Dimensioni del parapetto.** — L'altezza dei parapetti di ferro, misurata al disopra della faccia superiore della cornice di ghisa, è di metri 1,05, e ciascuna delle dodici parti come A (*Fig.* 60), compresa fra il parapetto di pietra insistente ad una spalla o ad una pila ed il piano verticale determinato dall'asse b del perno dell'imposta vicina, è lunga metri 0,70.

I ritti q distano 2 metri da asse ad asse; la parte di essi, la quale entra nella cornice, è di metri 0,25; e la loro totale lunghezza è di

metri 1,284. Ciascuno di questi ritti è costituito da due ferri eguali con sezione a T, cui corrispondono le dimensioni di metri 0,14 nella larghezza della tavola, di metri 0,07 nella somma della sporgenza del gambo e della spessezza della tavola, di metri 0,008 per spessezza media della tavola e del gambo.

I ritti q', posti presso i parapetti di pietra, sono costituiti da due ferri d'angolo. La loro lunghezza è come quella dei ritti q; i loro bracci hanno la lunghezza di metri 0,074 l'uno, e di metri 0,07 l'altro; la loro grossezza media è di metri 0,008.

Il coronamento r del parapetto consta d'una lamiera orizzontale e di due ferri d'angolo. La lamiera orizzontale ha la larghezza di metri 0,17 e la spessezza di metri 0,008. I ferri d'angolo hanno bracci eguali, lunghi metri 0,082 colla spessezza media di m. 0,008.

Il collegamento inferiore s è fatto colli stessi ferri a T che compongono i ritti.

La parete reticolata è costituita da ferri piatti, ed i lati della loro sezione retta sono di metri 0,052 e di metri 0,006.

In quanto ai chiodi da impiegarsi per l'unione dei diversi pezzi dei parapetti, si può ritenere che il diametro del loro fusto debba essere: di metri 0,016 per quelli che devono attraversare i ritti q, o il coronamento r, o il collegamento inferiore s; di metri 0,012 per quelli che devono contemporaneamente attraversare due pezzi della parete reticolata.

Stabilite le dimensioni dei vari pezzi componenti i parapetti di ferro, col prendere soltanto norma dallo scopo per cui si devono questi costruire e dalla conoscenza dei ferri che si trovano in commercio per soddisfare alle esigenze delle costruzioni, si può verificare se essi saranno in condizioni di stabilità sufficientemente buone sotto l'azione dei massimi sforzi a cui dovranno trovarsi sottoposti. Questi sforzi, eccezion fatta da circostanze eccezionali, si riducono alla pressione che un vento impetuoso può esercitare contro i parapetti con tendenza a rovesciarli facendo piegare i ritti, i quali si possono considerare come solidi incastrati nella loro sezione orizzontale posta al livello del piano superiore della cornice e sollecitati da una forza perpendicolare al loro asse.

Ammettendo che su ogni ritto operi la pressione, la quale ha luogo sulla porzione di parapetto compresa fra i mezzi degl'intervalli esistenti fra il ritto considerato ed i due fra cui questo si trova, e supponendo che, per essere reticolata la sua parete, la massima pressione del vento si possa ragguagliare a chilogrammi 125 per

ogni metro quadrato di parete supposta piena, si ha: che la superficie sulla quale ha luogo la pressione corrispondente ad un ritto è un rettangolo lungo metri 2 e alto metri 1,05; che questa pressione è data da

$$2 \times 1{,}05 \times 125 = 262^{c_g},50;$$

che, essendo essa uniformemente distribuita sulla superficie premuta, si può ritenere siccome applicata alla metà dell'altezza del ritto, ossia alla distanza di metri 0,525 dalla sezione d'incastro; e che il momento di questa pressione rispetto alla detta sezione vale

$$262{,}50 \times 0{,}525 = 137{,}8125.$$

Ora, trovandosi provocata nel ritto la resistenza alla flessione da una forza perpendicolare al suo asse, essendo la sua sezione retta simmetrica rispetto alla perpendicolare xx' (*Fig.* 87) al piano di sollecitazione condotta pel centro di superficie G, l'equazione di stabilità da applicarsi nel caso particolare è la

$$n''R'' = \frac{v\mu_m}{I_x}.$$

Le lettere che si trovano in quest'equazione rappresentano: n'' il coefficiente di stabilità, il quale costituisce l'incognita da determinarsi; R'' il coefficiente di rottura per pressione del ferro, il qual coefficiente mediamente è dato da

$$R'' = 30000000$$

per ogni metro quadrato; v la distanza GA data da

$$v = \overline{GB} + \overline{BA} = 0{,}011 + 0{,}07 = 0^m,081;$$

μ_m il momento inflettente massimo, ossia quello relativo alla sezione d'incastro, il cui valore è

$$\mu_m = 137{,}8125;$$

ed I_x il momento d'inerzia della sezione retta del ritto. Essendo

$$\overline{CD} = 0^m,14,$$

$$\overline{HI} = 0\ ,008,$$

$$\overline{FH} + \overline{IM} = 0\ ,132,$$

$$\overline{CE} = 0\ ,022,$$

$$\overline{FK} = 0\ ,038,$$

$$\overline{AL} = 0\ ,162,$$

si ha

$$I_x = \frac{1}{12}\left(0{,}008 \times \overline{0{,}162}^3 + 0{,}132 \times \overline{0{,}038}^3 - 0{,}14 \times \overline{0{,}022}^3\right),$$

d'onde

$$I_x = 0{,}000003238716.$$

Sostituendo nell'equazione di stabilità i valori noti di R'', v, μ_m ed I_x e ricavando il valore di n'', si ottiene

$$n'' = 0{,}115,$$

il quale, per essere minore della frazione $\frac{1}{5} = 0{,}2$, ci porta a conchiudere che i parapetti di ferro presentano sufficienti garanzie di stabilità.

Stando al trovato valore del coefficiente di stabilità n'', si potrebbe dire essere suscettiva di qualche diminuzione la sezione retta dei ritti. Osservando però che i parapetti sono, nei ponti per strade carreggiabili, le parti le quali più delle altre sono esposte agli insulti dei passanti, crediamo utile di ritenere le dimensioni prestabilite, quantunque conducano esse ad avere maggior stabilità di quella strettamente necessaria.

22. **Dimensioni della cornice.** — La cornice di ghisa B (*Fig.* 60), quando si consideri una sola fronte ed una sola arcata, consta di 25 pezzi eguali come t, ciascuno colla lunghezza di 2 metri, e di due pezzi minori, come u, presso i piedritti. Ciascuno di questi ultimi ha un'estremità tagliata in sbieco, ed è di metri 0,70 la sua lunghezza massima.

In quanto all'angolo che quella faccia di ciascuno dei pezzi minori, la quale trovasi al contatto del piedritti, fa col piano di fronte, riesce facile determinarlo col seguente procedimento. Una pila, al disopra del coronamento del cappuccio, ammette la sezione orizzontale, rappresentata nella figura 88, determinata col descrivere la semi-circonferenza ABD di diametro $\overline{AB} = 2^m,20$, col prendere sulla EF, parallela ad AB e tangente in D alla detta circonferenza, le due lunghezze $\overline{DE}$ e $\overline{DF}$, eguali fra loro ed eguali a metri 0,50, e col tirare le due rette $\overline{AE}$ ed $\overline{FB}$. Assumendo di metri 0,35 l'aggetto delle cornici di coronamento dei piedritti sui piani verticali determinati dalle rette AE, EF ed FB, e solo di metri 0,20 l'aggetto della cornice di ghisa sul piano verticale determinato dalla retta ABG, se conduciamo la retta F'B' distante di metri 0,35 dalla FB e quindi la retta B'G' distante di metri 0,20 dalla BG, abbiamo in B'BG l'angolo dimandato. Immaginando abbassata da F la perpendicolare FH sulla AB, risulta

$$\overline{HF} = 1^m,10;$$

$$\overline{BH} = \overline{BC} - \overline{FD} = 0^m,60,$$

$$\text{tang FBH} = \frac{1,10}{0,60};$$

e quindi si ha

$$\text{FBH} = 61°23',$$
$$\text{FBG} = 180° - \text{FBH} = 118°37'.$$

Se ora dal punto B' si abbassano le due perpendicolari $\overline{B'I}$ e $\overline{B'K}$ sulle BF e BG, risultano i due triangoli rettangoli B'IB e B'KB, e, per essere

$$\overline{B'I} = 0^m,35$$
$$\overline{B'K} = 0,\ 20,$$

se chiamansi

χ l'angolo IBB' e

χ' l'angolo KBB',

si hanno le equazioni

$$\chi + \chi' = 118°37', \qquad (1),$$
$$\text{sen}\,\chi = \frac{0,35}{\overline{BB'}},$$
$$\text{sen}\,\chi' = \frac{0,20}{\overline{BB'}}.$$

Dividendo la seconda di queste equazioni per la terza, e sostituendo nell'equazione risultante il valore di χ' dato dalla prima, si ottiene

$$\frac{\operatorname{sen}\chi}{\operatorname{sen}(118°\,37' - \chi)} = \frac{0{,}35}{0{,}20}.$$

Se ora si fanno sparire i denominatori e se sviluppasi il seno della differenza $118°\,37' - \chi$, risulta l'equazione

$$0{,}20 \operatorname{sen}\chi = 0{,}35 \operatorname{sen} 118°\,37' \cos\chi - 0{,}35 \cos 118°\,37' \operatorname{sen}\chi,$$

la quale, dividendo per $\cos\chi$ onde ridurla a contenere la sola linea trigonometrica $\operatorname{tang}\chi$, dà

$$\operatorname{tang}\chi = \frac{0{,}35 \operatorname{sen} 118°\,37'}{0{,}20 + 0{,}35 \cos 118°\,37'},$$

d'onde risulta

$$\chi = 83°\,58'\,50''.$$

Ponendo nella (1) questo valore dell'angolo $IBB' = \chi$, immediatamente si deduce quello dell'angolo $KBB' = \chi'$, e si ha

$$\chi' = 34°\,38'\,10''$$

per valore dell'angolo sotto il quale dev'essere tagliata l'estremità di ciascuno dei dodici pezzi della cornice di ghisa, i quali devono trovarsi addossati ai piedritti.

È pur facile determinare la lunghezza anteriore $B'L'$ di ciascuno dei dodici pezzi estremi della cornice di ghisa, giacchè questa lunghezza è la differenza fra $\overline{BL}$ e $\overline{BK}$. Ma

$$\overline{BL} = 0^m{,}70,$$

$$\overline{BK} = \frac{0{,}20}{\operatorname{tang} 34°\,38'\,10''} = 0^m{,}29,$$

e quindi

$$\overline{B'L'} = 0{,}70 - 0{,}29 = 0^m{,}41.$$

La larghezza totale bc (*Fig.* 61) della cornice di ghisa è di metri 0,48; cosicchè risultano di metri 0,28, tanto la larghezza $\overline{de}$ della

sua faccia superiore, quanto la larghezza $\overline{fg}$ della sua faccia inferiore. L'altezza della parete posteriore df è di metri 0,25; il dente verticale o parte gh, per cui la cornice copre le mensole sulla fronte, è di metri 0,07, e di metri 0,018 la grossezza di tutte le sue pareti. La parete inferiore fg, come in sezione orizzontale secondo il piano determinato dalla retta XY appare dalla figura 62, trovasi soppressa per la massima parte della lunghezza della cornice; ed essa esiste solamente di seguito alla parete verticale df (*Fig.* 61) per una larghezza $\overline{ik}$ (*Fig.* 62) di metri 0,045, non che in corrispondenza delle mensole, onde poter facilmente operare l'unione della cornice alle mensole stesse. La larghezza di queste ultime parti della parete inferiore è di metri 0,22, e ogni pezzo di cornice presenta tre di queste parti, una nel mezzo lunga metri 0,22 e una per ciascun'estremità lunga metri 0,11, cosicchè le due parti estreme di due pezzi attigui della cornice fanno appunto la lunghezza di metri 0,22.

La cornice si sovrappone alle mensole e solidamente si ferma su queste mediante chiavarde in numero di quattro per ogni mensola; e, per unire fra loro due pezzi della cornice, si adoperano cinque chiavarde. Il diametro del fusto di queste deve essere di metri 0,02, e le disposizioni che ad esse conviene assegnare chiaramente risultano dalle figure 61 e 62.

23. **Dimensioni della carreggiata e dei marciapiedi.** — Come risulta dai dati del numero 6, la larghezza totale del ponte fra mezzo e mezzo dei parapetti di ferro è di metri 10,40. Per metri 5,60 trovasi questa larghezza assegnata alla carreggiata, e per metri 4,80 ai due marciapiedi.

Il profilo della carreggiata, nel senso trasversale, è un arco circolare, il cui punto di mezzo ed i cui punti estremi trovansi rispettivamente elevati di metri 0,50 e 0,37 sopra il piano orizzontale determinato dalle facce superiori delle tavole delle travi trasversali. Il pavimento della carreggiata consiste in un lastricato di buona pietra colla media spessezza di metri 0,18.

Il profilo trasversale di ciascun marciapiede, contato fino al mezzo del vicino parapetto di ferro, ossia per una larghezza di metri 2,40, è una linea retta in lieve pendìo verso il mezzo del ponte, ed i due estremi di questa retta, la cui distanza orizzontale è di metri 2,40, sono rispettivamente elevati di metri 0,47 e 0,50 sul piano orizzontale definito dalle facce superiori delle travi trasversali. Le lastre formanti il pavimento dei marciapiedi hanno la spessezza di metri 0,10. La cordonata c (*Fig.* 63 e 67) posta alla separazione fra la carreg-

giata ed un marciapiede è costituita da conci di pietra aventi la larghezza di metri 0,40 e l'altezza di metri 0,22.

Una parte di ciascun marciapiede è portata dalle mensole, le quali si trovano in risalto sulle centine frontali del ponte. Questa parte, contata dal piano verticale secondo il quale le mensole M (*Fig.* 61) sono unite alla trave longitudinale L fino al mezzo del parapetto di ferro, ha la lunghezza di metri 1,08; e l'altezza della faccia superiore della mensola sul piano orizzontale determinato dalla faccia superiore delle tavole superiori delle travi trasversali è di metri 0,25; cosicchè resta pure 0,25 l'altezza massima del pavimento dei marciapiedi sul piano determinato dalla faccia superiore delle mensole.

24. **Dimensioni della coperta del ponte.** — Questa coperta è costituita da lamiere incurvate a guisa di vôlte a botte con teste di padiglione, munite di un bordo piano all'ingiro, largo metri 0,05, colla grossezza uniforme di metri 0,006 e colla saetta d'incurvamento di metri 0,06.

Quelle delle indicate lamiere, le quali si trovano in corrispondenza delle mensole, hanno rispettivamente, di metri 0,98 i due lati paralleli, e di metri 0,92 i due lati perpendicolari all'asse del ponte. Le tavole superiori delle mensole, la tavola superiore della trave longitudinale L (*Fig.* 61) ed il ferro d'angolo *a* inchiavardato alla faccia posteriore della cornice di ghisa, costituiscono i mezzi che servono a sostenere queste lamiere, le quali si pongono in opera mediante chiodature da farsi in corrispondenza dei bordi piani. Nel caso concreto si possono impiegare 34 chiodi per ogni lamiera, ossia 4 nei vertici, 8 intermedi per ciascuno dei lati maggiori, e 7 intermedi per ciascuno dei lati minori. Il diametro del fusto di questi chiodi si può assumere di metri 0,012.

Ciascuna delle dodici lamiere, poste in corrispondenza delle mensole e che si trovano alle estremità delle arcate, ha i lati di metri 0,70 e 0,92, e, per un intiero lato perpendicolare all'asse del ponte, è sostenuta dalla gola della cornice dei piedritti risvoltata sui fianchi.

Le altre lamiere, le quali hanno appoggio sulle travi trasversali, sono tutte eguali, ed i loro lati ammettono rispettivamente la lunghezza di metri 0,98 in senso parallelo, e di metri 1,58 in senso perpendicolare all'asse del ponte. Esse sono inchiodate alle tavole superiori delle travi trasversali *t* (*Fig.* 64), alle tavole dei ferri a T indicati in *l*, ed alle tavole dei copripunti *l'* ed *l''*. Sono sufficienti 46 chiodi per ogni lamiera, ossia 4 nei vertici, 8 intermedi per cia-

scuno dei lati minori e 13 intermedi per ciascuno dei lati maggiori. Il diametro del fusto di questi chiodi si può ancora assumere di metri 0,012.

Si può ora verificare se le lamiere costituenti la coperta del ponte sono in buone condizioni di stabilità. Nel fare questa verificazione non si può procedere con metodi rigorosi, giacchè, essendo qui il caso di lamiere elastiche e curve, le quali tutto all'ingiro hanno appoggio su basi estese, bisognerebbe tentare la risoluzione d'un problema nuovo, che certamente sarebbe per presentare gravissime difficoltà. Conviene accontentarsi di un metodo approssimato, indubitatamente favorevole alla stabilità, e supporre che ogni lamiera della coperta sia un arco elastico mantenuto fermo alle sue due estremità e caricato di un peso uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale. Egli è poi evidente che basta considerare una delle lamiere sopportate dalle travi trasversali, giacchè, a parità di spessezza, sono queste in condizioni di stabilità meno favorevoli di quelle che si trovano in corrispondenza delle mensole. Premesso questo, se immaginasi nella parte curva di una delle indicate lamiere la sezione prodotta da un piano verticale parallelo all'asse del ponte, è questa sezione una porzione di corona circolare; la corda del suo asse si può ritenere siccome data da $0{,}98 - 0{,}10 + 0{,}006 = 0^{m},886$, e la saetta dell'asse medesimo data da $0^{m},06$. L'arco adunque che si deve considerare ha monta assai depressa, e quindi si può ritenere siccome un arco equilibrato. Segue da ciò che, dicendo

c la semi-corda dell'arco,

m la sua monta,

p il peso che insiste sull'unità di lunghezza di proiezione orizzontale dell'arco medesimo per una lunghezza di generatrice eguale all'unità,

la massima resistenza T riferita all'unità di superficie nella sua sezione più bassa è data da (*Arte di fabbricare*, *Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni*, Num. 175)

$$T = \frac{pc^2}{2m}\sqrt{1 + \frac{4m^2}{c^2}} \qquad (1).$$

Le lunghezze rappresentate dalle due lettere c ed m sono rispettivamente $0^{m},443$ e $0^{m},06$; di modo che rimane solo da ottenere il peso p. Questo peso consta di due parti, del massimo sovraccarico che vi può essere sul suolo stradale, il quale sovraccarico, trattan-

dosi di un ponte per strada carreggiabile, non può superare i 600 chilogrammi per metro quadrato, del peso del pavimento di pietra e del sottostante letto di sabbia. La grossezza del pavimento di pietra è di metri 0,18, e si può ritenere che sia di metri 0,22 la grossezza media dello strato di sabbia; cosicchè, ammettendo che sia di 2600 chilogrammi il peso del metro cubo di pietra, e di 2000 chilogrammi il peso del metro cubo di sabbia, si ha che il carico permanente, riferito all'unità di lunghezza di proiezione orizzontale dell'arco, è dato dalla somma dei due numeri

$$1 \times 1 \times 0{,}18 \times 2600 = 468^{cg}.$$
$$1 \times 1 \times 0{,}22 \times 2000 = 440.$$

Sommando il sovraccarico di 600 chilogrammi coi due carichi permanenti or ora trovati, si ottiene il valore di p, e quindi si ha

$$p = 1508^{cg}.$$

Se ora si sostituiscono i valori noti di c, di m e di p nella formola (1), risulta

$$T = 2555^{cg}.$$

Riesce ora facile accertarsi se l'arco, il quale porta il trovato carico massimo, si trova in buone condizioni di stabilità, e, per raggiungere l'intento, basta ricavare il valore del coefficiente di stabilità n'' dall'operazione

$$n''R'' = \frac{T}{\Omega}, \qquad (1)$$

nella quale

R'' è il coefficiente di rottura per pressione del ferro riferito al metro quadrato,

Ω la superficie della sezione retta dell'arco considerato.

Nel caso concreto, potendosi ritenere

$$R'' = 30000000^{cg},$$

ed essendo

$$\Omega = 1 \times 0{,}006 = 0^{mq},006,$$

si deduce dall'equazione (2)

$$n'' = 0{,}014,$$

cosicchè, essendo il coefficiente di stabilità n'' assai minore della frazione $0{,}2 = \frac{1}{5}$, vi sono nella coperta del ponte, e per rapporto alla sua grossezza, le più ampie garanzie di sicurezza.

La spinta orizzontale Q dell'arco considerato, lungo l'unità nel senso delle generatrici, è data dalla formola (*Arte di fabbricare, Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni,* Num. 175)

$$Q = \frac{pc^2}{2m};$$

cosicchè, se ad una lamiera della coperta immaginasi sostituito un arco avente la corda e la monta già indicata, e la lunghezza di metri 1,48, si potrà calcolare la spinta Q' che un tal arco produce mediante la formola

$$Q' = 1{,}48\frac{pc^2}{2m}.$$

Le lettere p, c ed m hanno gli stessi significati e gli stessi valori che già loro furono attribuiti, e quindi si trova

$$Q' = 3450^{cs}.$$

Si oppongono a questa spinta i tredici chiodi intermedi disposti su uno dei bordi di maggior lunghezza della lamiera colla loro resistenza allo scorrimento trasversale, e l'equazione di stabilità che serve per verificare se questa chiodatura trovasi in buone condizioni è la

$$n^{iv} R^{iv} = \frac{Q'}{n\pi\nu^2},$$

dove

R^{iv} è il coefficiente di rottura del ferro nel senso trasversale, il qual coefficiente si può assumere di chilogrammi 24000000 per ogni metro quadrato,

Q' la forza che provoca la resistenza allo scorrimento, stata trovata di 3450 chilogrammi,

n il numero dei chiodi che resistono alla forza Q', stato assunto eguale a 13,

ν il raggio del fusto di questi chiodi, fissato di metri 0,006,

π il noto rapporto della circonferenza al diametro eguale a 3,1416.

Sostituendo questi valori nell'ultima equazione e ricavando il valore di n^{IV}, si trova

$$n^{IV} = 0{,}101,$$

cosicchè, essendo questo coefficiente di stabilità assai minore di $0{,}02 = \frac{1}{5}$, si può ritenere che le chiodature fatte, come si è detto, indubitatamente presentano le più ampie garanzie di sicurezza.

Per essere le lamiere della coperta foggiate a guisa di vôlte a botte con teste di padiglione, e per essere inchiodate anche lungo i bordi di minore lunghezza, la vera pressione alle imposte e la vera forza che opera per rompere le chiodature saranno minori di quelle ottenute col metodo di calcolo stato adottato, ed i chiodi che a quest'ultima si opporranno saranno in maggior numero di quello supposto, in guisa che, anche sotto questi rapporti, la resistenza della coperta del ponte sarà maggiore di quella definita dai trovati coefficienti di stabilità. Ad ogni modo, avuto riguardo alla circostanza che tali lamiere continuamente devono trovarsi in presenza di cause provocanti l'ossidazione, che si possono anche considerare come mezzi per dare al sistema costituente il ponte un robusto collegamento nelle sue parti più elevate, crediamo conveniente di non diminuirne ulteriormente la grossezza, nè di porre i chiodi a distanze maggiori di quelle state indicate.

25. **Dimensioni di alcuni ferri destinati a sopportare ed a consolidare la coperta del ponte.** — Si vuol qui parlare dei ferri di angolo *a* (*Fig.* 61) a cui sono inchiodate le lamiere costituenti la coperta in corrispondenza delle mensole; dei ferri a T, indicati colla lettera *l* sulla figura 64, ai quali sono inchiodati i bordi di minor lunghezza delle lamiere costituenti la parte di coperta in corrispondenza delle travi trasversali; e dei ferri di consolidamento *l'* ed *l''*.

Ai ferri d'angolo *a* (*Fig.* 61) si può assegnare la grossezza di metri 0,008 coi bracci eguali e lunghi metri 0,08. Questi ferri di angolo saranno inchiavardati alla parete posteriore *df* della cornice di ghisa, e si potranno impiegare, per ogni metro della loro lunghezza, otto chiavarde col diametro di metri 0,02.

I ferri a T, indicati sulla figura 64 colla lettera *l*, avranno metri 0,12 per lunghezza della tavola, metri 0,10 per altezza dell'intiera sezione, e metri 0,008 per spessezza della tavola e del gambo. I piccoli ferri d'angolo, per unire questi ferri a T alle travi trasversali,

avranno la spessezza di metri 0,005, la loro lunghezza sarà di metri 0,09, e di metri 0,07 la sporgenza di ciascun braccio. Ciascuno di questi piccoli ferri d'angolo sarà unito, mediante due chiodi, alle travi trasversali, ed i ferri *l* saranno chiusi alla loro estremità fra due di tali ferri mediante due altri chiodi. Il diametro del fusto di questi chiodi sarà di metri 0,016.

I ferri, indicati sulla figura 64 colla lettera *l'* ed *l''*, i quali servono da coprigiunto fra due lamiere successive della coperta, nel mentre contribuiscono a consolidare il sistema, hanno pure sezione a T. Sarà di metri 0,12 la larghezza delle loro tavole, di metri 0,055 la intiera altezza della sezione e di metri 0,008 la grossezza della tavola e del gambo.

26. **Dimensioni delle mensole.** — La totale lunghezza delle mensole M (*Fig.* 61) è di metri 1,28; l'altezza della loro sezione trasversale si conserva di metri 0,37 per una lunghezza di metri 0,39, e quindi va diminuendo in modo da ridursi a metri 0,14 all'estremità sottostante alla cornice di ghisa; la loro distanza è di 1 metro. Si incominci dal supporre che la lamiera formante la parete verticale di ciascuna mensola debba avere la spessezza di metri 0,01; che eguale spessezza vogliasi assegnare ai ferri d'angolo che ne assecondano il perimetro sull'una e sull'altra faccia; che questi siano simmetrici coi bracci lunghi metri 0,10; e che mediante 31 chiodi si trovino uniti alla parete verticale suddetta. Per fermare una mensola alla trave longitudinale L vi siano 12 chiodi; 8 di essi attraversino la parete verticale e 4 le tavole orizzontali della trave suddetta. Il diametro del fusto di tutti questi chiodi sia di metri 0,02. E con questi dati si voglia procedere alla verificazione della stabilità delle mensole colla facoltà di modificare le dimensioni dei ferri che le compongono quando non si trovino convenienti.

Per poco che si rifletta alle condizioni in cui saranno per trovarsi, allorquando il ponte sarà costrutto, le mensole M, ossia quelle che sottostanno ai ritti *q* (*Fig.* 60) del parapetto, agevolmente si comprende come ciascuna di esse, senza molto scostarsi dalla realtà, si potrà considerare quale un solido orizzontalmente incastrato in un estremo e caricato di un peso uniformemente distribuito su una parte della sua lunghezza, non che di due pesi applicati presso la sua estremità libera. Si può ritenere qual peso uniformemente distribuito su una parte della lunghezza quello derivante dal sovraccarico massimo che potrà trovarsi sui marciapiedi, dalla coperta, dal sovrastante pavimento, dal peso proprio della mensola. Sono invece

da considerarsi come pesi applicati presso l'estremità libera quelli provenienti dalla cornice di ghisa e dal parapetto. Se adunque vuolsi verificare la stabilità di una mensola, si deve considerare un solido rettilineo A B (*Fig.* 89) caricato di un peso p per ogni unità di lunghezza del tratto $\overline{AC}$, di un peso P nel punto D, di un peso P' nel punto D' (*a*).

Incominciando dal peso p, è da osservarsi: che la parte $\overline{AC}$ di mensola sulla quale esso si trova, ha la lunghezza di 1 metro; e che concorrono a formarlo il sovraccarico massimo che si può trovare sul marciapiede, il peso del pavimento in lastroni di pietra, il peso dello strato di materiali su cui questi lastroni sono collocati, il peso della coperta in lamiera di ferro ed il peso proprio della mensola. Ammettendo che sui marciapiedi possa accumularsi un sovraccarico massimo di 600 chilogrammi per ogni metro quadrato, assumendo 2600 chilogrammi per peso d'un metro cubo della pietra formante il pavimento dei marciapiedi, 2000 chilogrammi per peso di un metro cubo dei materiali posti fra i lastroni di pietra e la coperta di lamiere curve, e 7770 chilogrammi per peso di un metro cubo di ferro, si trova che sull'indicata lunghezza d'un metro della mensola esiste un carico composto come segue:

Peso corrispondente al sovraccarico	Cg. 600,00
» del pavimento in lastre di pietra	» 260,00
Da riportarsi	Cg. 860,00

(*a*) Un'osservazione che si potrebbe fare sul metodo di calcolo che stiamo per seguire sta in ciò che una lamiera della coperta trasmette l'azione del peso che porta, non soltanto su due mensole, ma anche sulla trave longitudinale L (*Fig.* 61) e sul ferro d'angolo *a*, ed essere quindi più esatto il supporre: che ciascuna di due mensole vicine porti il peso p_1 corrispondente a ciascuna delle parti A D N e B C O (*Fig.* 90) della lamiera A B C D; che la trave longitudinale L porti il peso p_2 corrispondente alla parte C D N O; e che il ferro d'angolo *a* porti il peso p_2 corrispondente alla parte A B O N. Se però osservasi che un peso Q applicato in un dato punto di un solido orizzontalmente incastrato per un estremo produce lo stesso memento inflettente massimo di un peso doppio supposto uniformemente distribuito fra il punto d'applicazione del peso Q e la sezione d'incastro, agevolmente si comprende come il metodo di calcolo da noi proposto sia accettabile non solo per la sua semplicità, ma anche pei risultamenti a cui sarà per condurre, giacchè, invece di trascurare il peso p_2 applicato al ferro d'angolo *a* ed operante in C (*Fig.* 89) presso l'estremo della mensola, consideriamo il peso $2p_2$ uniformemente distribuito sulla larghezza $\overline{AC}$.

	Riporto Cg.	860,00
Peso dei materiali posti fra il pavimento e la coperta di lamiere di ferro	»	240,00
» dei bordi piani di una lamiera della coperta in corrispondenza dei marciapiedi (*b*) . .	»	8,39
» della parte cilindrica della stessa lamiera .	»	2,33
» dei fusi cilindrici della stessa lamiera . .	»	32,02
» delle capocchie dei chiodi occorrenti per porre in opera una lamiera (*c*)	»	1,10
» della parete verticale della mensola . . .	»	27,42
» dei ferri d'angolo superiori ed inferiori della mensola	»	59,05
» delle capocchie dei chiodi che uniscono i detti ferri d'angolo della mensola alla parete verticale	»	1,40
» di una lamiera di riporto posta fra i ferri di angolo superiori della mensola e la coperta	»	16,03
	Totale Cg.	1247,74

(*b*) Per determinare il peso d'una delle lamiere curve della coperta in corrispondenza delle mensole, si sono considerate tre parti distinte, il bordo piano ABCDEFGH (*Fig.* 90) che esiste all'ingiro per inchiodare la lamiera ai ferri sottostanti, la parte cilindrica che in proiezione orizzontale è rappresentata nel rettangolo IKLM, e la parte proiettata nei due rettangoli EIMH ed FKLG, la quale, constando di quattro fusi cilindrici, costituisce una vôlta a padiglione su pianta quadrata. Il volume di ciascuna delle indicate parti si calcolò moltiplicando la superficie normale alla grossezza della lamiera per la grossezza medesima. La superficie corrispondente alla parte piana si ottenne moltiplicando il perimetro medio fra i due ABCD ed EFGH per la larghezza del bordo; la superficie per la parte cilindrica proiettata in IKLM si calcolò moltiplicando lo sviluppo della sezione retta per $\overline{IK} = \overline{EF} - \overline{FG}$; finalmente la superficie per l'altra parte si determinò prendendo il quadruplo del valore di S dato dalla formola

$$S = \frac{a\,(c^2 + m^2)}{2c}.$$

Questa formola, di cui si ha la deduzione nel numero 89 di quel volume dell'*Arte di fabbricare* nel quale trattasi della *Geometria pratica applicata all'arte del costruttore*, dà la superficie di un fuso cilindrico, avente per direttrice un arco circolare di lato a, di semi-corda c e di monta m.

(*c*) Per trovare il volume delle capocchie dei chiodi, si è supposto ch'esse siano emisferiche e che il loro diametro sia i $\frac{5}{4}$ del diametro di fusto dei chiodi a cui appartengono.

Questo peso, che stando alle sole unità e di chilogrammi 1248, si può supporre uniformemente distribuito, e costituisce appunto il valore di *p*.

Il peso P da supporsi applicato in D (*Fig.* 89) è quello che corrisponde alla parte di cornice di ghisa portata da una mensola, e per conseguenza lunga 1 metro, a cui bisogna ancora aggiungere il peso di 1 metro lineare del ferro d'angolo *a*, non che quelli dei chiodi e delle chiavarde di collegamento. Stando alle dimensioni state indicate nei numeri 22 e 25, ed assumendo 7200 chilogrammi per peso del metro cubo di ghisa, il peso P si compone come segue:

Peso delle pareti della cornice di ghisa . .	Cg.	146,45
» della piccola parete inferiore insistente alle mensole	»	7,42
» delle pareti di testa di due parti successive della cornice di ghisa	»	24,91
» del ferro d'angolo inchiavardato alla parete posteriore della cornice di ghisa . .	»	11,44
» delle teste delle chiavarde per fermare la cornice sulla mensola, per unire due pezzi successivi di cornice e per attaccare il ferro d'angolo alla cornice (*d*)	»	3,83
Totale	Cg.	194,05

Ritenendo le sole unità, si ha adunque che il peso P è di chilogrammi 194. La verticale passante pel centro di gravità del sistema formato dalla considerata parte di cornice e dal ferro d'angolo ad essa unito, come risulta dalla sola ispezione della figura 61, non può scostarsi molto dall'estremità libera della mensola, e quindi senz'altro si può ritenere che il punto D (*Fig.* 89) coincida col punto B.

Rimane ancora da trovarsi il peso P′ della parte di parapetto so-

(*d*) Nel fare il volume delle teste delle chiavarde si è supposto che ciascuna di esse fosse un prisma retto, avente per base un esagono regolare col diametro eguale ai $\frac{5}{3}$ del diametro del fusto e coll'altezza eguale a questo stesso diametro. La medesima cosa si è fatta per le chiocciche, giacchè si può ritenere che una di queste colla parte di fusto che l'attraversa faccia appunto una testa di chiavarda.

stenuta da una mensola, la qual parte, per essere i ritti q (*Fig.* 60) distanti di 2 metri, ha pure quest'ultima lunghezza. Per le dimensioni state stabilite nel numero 21, il peso P' si compone come segue:

Peso di un ritto colla parte di esso che si trova nella cornice di ghisa	Cg.	41,83
» del coronamento	»	59,92
» del collegamento inferiore	»	52,35
» della parete reticolata	»	27,43
» delle teste dei chiodi attraversanti i ritti, il coronamento ed il collegamento inferiore	»	2,21
» delle teste dei chiodi attraversanti la parete reticolata	»	0,45
Totale	Cg.	184,19

Ritenendo le sole unità, il peso P' risulta adunque di chilogrammi 184, e questo peso si può considerare siccome applicato alla distanza di metri 0,10 dall'estremo libero della mensola, cosicchè la distanza $\overline{AD'}$ risulta di metri 1,18.

Nella mensola si trova provocata la resistenza alla flessione, e quindi l'equazione di stabilità da applicarsi, onde scoprire in quali condizioni di sicurezza essa si trova, è la

$$n''R'' = \frac{v\mu}{I_x} \qquad (1)$$

in cui n'' è il coefficiente di stabilità, R'' il coefficiente di rottura per pressione, μ il momento inflettente relativo ad una sezione verticale qualunque della mensola, v la semi-altezza ed I_x il momento d'inerzia per rapporto alla orizzontale passante pel centro di superficie di questa sezione. L'ultima equazione si dovrebbe applicare per la sezione pericolosa, ossia per la sezione a cui corrisponde il valore massimo del coefficiente di stabilità n'', o, ciò che ritorna lo stesso, il valore massimo dell'espressione $\frac{v\mu}{I_x}$. Siccome però risulta difficile trovare analiticamente questo valore massimo, giacchè, per una sezione qualunque della parte EFHG (*Fig.* 91) di mensola, sono variabili le tre quantità v, I_x e μ, prenderemo il partito di considerare alcune sezioni determinate della parte indicata, e di calcolare il valore di n'' che corrisponde a ciascuna di esse. Le sezioni che con-

sidereremo saranno le 1K, I'K', I''K'', EF ed LM rispettivamente distanti dalla sezione estrema GH di

$$\overline{GI} = 0^m,23, \qquad \overline{GI'} = 0^m,45,$$

$$\overline{GI''} = 0,\ 67, \qquad \overline{GE} = 0,\ 89,$$

$$GL = 1^m,18.$$

La sezione EF corrisponde alla separazione della parte di mensola che ha sezione verticale variabile da quella che ha sezione verticale costante, e la sezione LM è quella che corrisponde al piano verticale *mn* (*Fig.* 61) in cui finiscono i ferri d'angolo che uniscono la mensola alla trave longitudinale L.

Essendo la curva FH (*Fig.* 91) un arco di circolo col suo centro in O sulla verticale FEO, colla semi-corda $\overline{HN} = 0^m,89$ e colla saetta $\overline{NF} = 0,23$, riesce facile determinare il suo raggio $\overline{OH}$, dato dalla formola (*Arte di fabbricare, Geometria pratica applicata all'arte del costruttore*, Num. 24)

$$r = \frac{m^2 + c^2}{2m},$$

nella quale c, m ed r rappresentano rispettivamente la semi-corda, la saetta ed il raggio dell'arco. Sostituendo in questa formola i valori noti di c e di m, i quali sono rispettivamente di metri 0,89 e di metri 0,23, troviamo

$$r = 1^m,623,$$

cosicchè il raggio $\overline{OH}$ dell'arco circolare FH risulta di metri 1,623.

Trovato il raggio dell'arco, riesce facile determinare le lunghezze $\overline{PK}$, $\overline{P'K'}$ e $\overline{P''K''}$ delle perpendicolari alla corda, e serve allo scopo la formola (*Arte di fabbricare, Geometria pratica applicata all'arte del costruttore*, Num. 11)

$$y = \sqrt{r^2 - d^2} - h,$$

nella quale le nuove lettere d, h ed y rappresentano rispettivamente la distanza della perpendicolare alla corda che vuolsi determinare dal punto N, la lunghezza $\overline{ON}$ e la lunghezza della perpendicolare. Nel caso particolare abbiamo

$$h = 1,623 - 0,23 = 1^m,393,$$

e quindi l'applicazione dell'ultima formola conduce a trovare:

$$\text{per } d = \overline{NP} = 0{,}89 - 0{,}23 = 0^{m},66$$
$$y = \overline{PK} = 0^{m},09;$$

$$\text{per } d = \overline{NP'} = 0{,}89 - 0{,}45 = 0^{m},44$$
$$y = \overline{P'K'} = 0^{m},17;$$

$$\text{per } d = \overline{NP''} = 0{,}89 - 0{,}67 = 0^{m},22$$
$$y = \overline{P''K''} = 0^{m},21.$$

Aggiungendo ai trovati valori di y l'altezza $\overline{GH} = 0^{m},14$ della sezione estrema della mensola, si ottengono le altezze $\overline{IK}$, $\overline{I'K'}$ ed $\overline{I''K''}$, cosicchè le altezze delle sezioni verticali, cui intendiamo applicare l'equazione di stabilità (1), sono

$$\overline{IK} = 0{,}09 + 0{,}14 = 0^{m},23$$
$$\overline{I'K'} = 0{,}17 + 0{,}14 = 0,\ 31$$
$$\overline{I''K''} = 0{,}21 + 0{,}14 = 0,\ 35$$
$$\overline{EF} = 0^{m},37$$
$$\overline{LM} = 0,\ 37.$$

Siccome le sezioni verticali della mensola sono simmetriche rispetto alle orizzontali passanti pei loro centri di superficie, i valori di v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 da porsi invece di v nell'equazione (1) sono le metà delle altezze ora indicate; cosicchè si ha:

per la sezione IK . . . $v_1 = 0^{m},115$;
» I'K' . . . $v_2 = 0,\ 155$;
» I''K''. . . $v_3 = 0,\ 175$;
» EF . . . $v_4 = 0,\ 185$;
» LM . . . $v_5 = 0,\ 185$.

Il momento d'inerzia I_x delle sezioni considerate, stando alle indicazioni poste sulla figura 92 e considerando i soli ferri d'angolo come resistenti alla flessione, è dato dalla formola (*Arte di fabbricare, Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni*, Num. 97)

$$I_x = \frac{1}{12}\left(a b^3 - a' b'^3 - a'' b''^3 - a''' b^3\right).$$

Nel caso particolare non variano da una sezione all'altra i valori

di a, a', a'' ed a''', i quali, per le dimensioni state stabilite nel principio di questo numero, sono

$$a = 0{,}20 + 0{,}01 = 0^{m},21,$$
$$a' = 0{,}20 - 0{,}02 = 0,\ 18,$$
$$a'' = 0^{m},02,$$
$$a''' = 0,\ 01.$$

Variano invece i valori di b, b' e b''. Per la sezione IK si ha

$$b = 0^{m},23, \quad b' = 0{,}23 - 0{,}02 = 0^{m},21, \quad b'' = 0{,}23 - 0{,}20 = 0^{m},03.$$

Per la sezione I'K' risulta

$$b = 0^{m},31, \quad b' = 0{,}31 - 0{,}02 = 0^{m},29, \quad b'' = 0{,}31 - 0{,}20 = 0^{m},11.$$

Per la sezione I''K'' si ottiene

$$b = 0^{m},35, \quad b' = 0{,}35 - 0{,}02 = 0^{m},33, \quad b'' = 0{,}35 - 0{,}20 = 0^{m},15.$$

Per le due sezioni EF ed LM sono eguali i due valori di b, di b' e di b'', e si trova

$$b = 0^{m},37, \quad b' = 0{,}37 - 0{,}02 = 0^{m},35, \quad b'' = 0{,}37 - 0{,}20 = 0^{m},17.$$

Ponendo i valori noti di a, a', a'', a''', b, b' e b'' nella formola determinatrice di I_x, si giunge ai seguenti valori dei momenti d'inerzia I_{x_1}, I_{x_2}, I_{x_3}, I_{x_4} ed I_{x_5} delle sezioni considerate:

per la sezione IK . . . $I_{x_1} = 0{,}00006382$;
» I'K' . . . $I_{x_2} = 0{,}00012846$;
» I''K''. . . $I_{x_3} = 0{,}00016990$;
» EF . . . $I_{x_4} = 0{,}00019290$;
» LM . . . $I_{x_5} = 0{,}00019290$.

Dobbiamo ora determinare i valori μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 e μ_5 dei momenti inflettenti per le sezioni (*Fig.* 91) IK, I'K', I''K'', EF ed LM. Essendo di un metro la lunghezza $\overline{AC}$ sulla quale si trova il peso uniformemente distribuito ed avendosi

$$\overline{AI} = \overline{AG} - \overline{GI} = 1{,}28 - 0{,}23 = 1^{m},05,$$

nel fare il momento inflettente relativo alla sezione IK non si deve considerare il detto peso, ma sibbene i soli pesi P e P'. Il braccio del peso $P = 194^{cg}$ per rapporto alla detta sezione è $\overline{IG} = 0^{m},23$, ed il braccio del peso $P' = 184^{cg}$ per rapporto alla stessa sezione è $\overline{ID'} = 0{,}23 - 0{,}10 = 0^{m},13$. Il valore di μ_1 risulta adunque

$$\mu_1 = 194 \times 0{,}23 + 184 \times 0{,}13 = 68{,}54.$$

Nel calcolare il momento inflettente μ_2, relativo alla sezione retta I'K', bisogna considerare: il carico uniformemente distribuito sulla lunghezza $\overline{I'C}$, la quale è data da $\overline{I'C} = \overline{I'G} - \overline{CG} = 0,45 - 0,28 = 0^m,17$; il carico P la cui distanza da $\overline{I'K'}$ è $\overline{I'G} = 0^m,45$; il carico P' la cui distanza pure da $\overline{I'K'}$ è $\overline{I'D'} = \overline{I'I} + \overline{ID'} = 0,22 - 0,13 = 0^m,35$. E quindi il momento μ_2 risulta

$$\mu_2 = \frac{1}{2} 1248\,(0,17)^2 + 194 \times 0,45 + 184 \times 0,35 = 184,88.$$

Il momento inflettente μ_3 per la sezione retta I''K'', essendo $\overline{I''C} = \overline{I''G} - \overline{CG} = 0,67 - 0,28 = 0^m,39$ la lunghezza su cui si trova il sovraccarico, $\overline{I''G} = 0^m67$ il braccio del peso P ed $\overline{I''D'} = \overline{I''I} + \overline{ID'} = 0,44 + 0,13 = 0^m,57$ il braccio del peso P', è dato da

$$\mu_3 = \frac{1}{2} 1248\,(0,39)^2 + 194 \times 0,67 + 184 \times 0,57 = 329,56.$$

Si ottiene il momento inflettente μ_4 per la sezione EF, aumentando di $\overline{EI''}$ ossia di metri 0,22 le lunghezze state considerate nel fare il valore di μ_3, e quindi si ha

$$\mu_4 = \frac{1}{2} 1248\,(0,61)^2 + 194 \times 0,89 + 184 \times 0,79 = 549,81.$$

Finalmente si ha il momento inflettente μ_5 per la sezione LM, accrescendo di $\overline{LE} = 0^m,29$ le lunghezze state considerate nel fare il valore di μ_4, cosicchè risulta

$$\mu_5 = \frac{1}{2} 1248\,(0,91)^2 + 194 \times 1,18 + 184 \times 1,08 = 944,37.$$

Convenientemente sostituendo i trovati valori di v, di I_x e di μ nell'equazione di stabilità (1), assumendo di chilogrammi 30000000 il coefficiente di rottura R'' riferito al metro quadrato e calcolando i valori n''_1, n''_2, n''_3, n''_4 ed n''_5 del coefficiente di stabilità n'', si trova

per la sezione IK . . . $n''_1 = 0,004$,
» I'K' . . . $n''_2 = 0,007$,
» I''K''. . . $n''_3 = 0,011$,
» EF . . . $n''_4 = 0,018$,
» LM . . . $n''_5 = 0,030$.

Questi valori dei coefficienti di stabilità sono di molto inferiori al valore limite $\frac{1}{5} = 0,2$ che si può adattare in pratica; cosicchè le

mensole, oltre di essere in buone condizioni per rapporto alla resistenza alla flessione, presentano un tale eccesso di stabilità da essere il caso di diminuire le dimensioni dei ferri che le compongono. Prima però di decidere su questa modificazione di progetto, occupiamoci delle condizioni di stabilità in cui si trova la parete verticale d'una mensola per rapporto alla resistenza allo scorrimento trasversale.

L'equazione di stabilità relativa alla resistenza trasversale è

$$n^{IV} R^{IV} = \frac{N}{\Omega} \qquad (2),$$

dove n^{IV} è il coefficiente di stabilità, R^{IV} il coefficiente di rottura, N lo sforzo che provoca la resistenza allo scorrimento trasversale, Ω la superficie della sezione su cui questa resistenza è provocata. E nel caso concreto applicheremo quest'equazione alle stesse cinque sezioni IK, I'K', I''K'', EF ed LM, alle quali già fu applicata l'equazione (1).

Siccome supponiamo che la parete verticale debba essere tale da essere capace di sopportare da sola la resistenza allo scorrimento trasversale, i valori particolari Ω_1, Ω_2, Ω_3, Ω_4 ed Ω_5 di Ω risultano

per la sezione IK . . . $\Omega_1 = 0^{mq},0023$,
» I'K' . . . $\Omega_2 = 0,\ 0031$,
» I''K''. . . $\Omega_3 = 0,\ 0035$,
» EF . . . $\Omega_4 = 0,\ 0037$,
» LM . . . $\Omega_5 = 0,\ 0037$.

I valori particolari N_1, N_2, N_3, N_4 ed N_5 di N si ottengono prendendo la somma di tutti i pesi applicati alla mensola dal suo estremo alle sezioni che si considera, e quindi si ottiene:

per la sezione IK . . . $N_1 = 194 + 184 = 378^{Cg}$;
» I'K' . . . $N_2 = 378 + 1248.0,17 = 590^{Cg},16$;
» I''K''. . . $N_3 = 378 + 1248.0,39 = 864,\ 72$;
» EF . . . $N_4 = 378 + 1248.0,61 = 1139,\ 28$;
» LM . . . $N_5 = 378 + 1248.0,91 = 1513,\ 68$.

Sostituendo i valori trovati di N e di Ω nell'equazione (2), assumendo di chilogrammi 24000000 il coefficiente di rottura R^{IV} e deducendo i coefficienti di stabilità n^{IV}_1, n^{IV}_2, n^{IV}_3, n^{IV}_4 ed n^{IV}_5 per le sezioni considerate, troviamo:

per la sezione IK . . . $n^{IV}_1 = 0{,}007$;
» I'K' . . . $n^{IV}_2 = 0{,}008$;
» I''K''. . . $n^{IV}_3 = 0{,}010$;
» EF . . . $n^{IV}_4 = 0{,}013$;
» LM . . . $n^{IV}_5 = 0{,}017$.

Questi coefficienti di stabilità sono pure di molto inferiori al valore limite 0,2 che si può prudenzialmente ammettere nelle costruzioni metalliche, e quindi concorrono a favorire l'idea già esternata, che cioè convenga fare una variazione di progetto delle mensole diminuendo le dimensioni dei ferri che le compongono.

Assumiamo metri 0,008 per grossezza della parete verticale e dei ferri d'angolo, e metri 0,08 per lunghezza dei lati di questi ultimi. Accontentiamoci di verificare la stabilità per rapporto alla flessione e per rapporto allo scorrimento trasversale nella sezione LM, giacchè i risultati dei calcoli che già vennero instituiti abbastanza provano come sia questa la sezione che presenta il maggior pericolo di rottura e di più, operando in favore della stabilità, suppponiamo che i valori di μ_5 e di N_5 siano quelli stessi risultanti dalla prima ipotesi sulle dimensioni dei ferri componenti le mensole. Essendo (*Fig.* 92)

$$a = 0{,}16 + 0{,}008 = 0^m{,}168,$$
$$a' = 0{,}16 - 0{,}016 = 0,\ 144,$$
$$a'' = 0^m{,}016,$$
$$a''' = 0,\ 008,$$
$$b = 0,\ 37,$$
$$b' = 0,\ 37 - 0{,}016 = 0^m{,}354,$$
$$b'' = 0,\ 37 - 0,\ 16 = 0,\ 21,$$

si ha

$$v = 0^m{,}185,$$
$$I_x = 0{,}000130683,$$
$$\Omega = 0^{mq}{,}00296;$$

e ricavando dalle equazioni (1) e (2) i valori particolari n''_5 ed n^{IV}_5 dei coefficienti di stabilità n'' ed n^{IV} coll'assumere i già prestabiliti valori di R'' ed R^{IV}, troviamo

$$n''_5 = 0{,}045,$$
$$n^{IV}_5 = 0{,}021.$$

Questi valori dei coefficienti di stabilità n''_5 ed n^{IV}_5 accennano ancora ad un eccesso di sicurezza e quindi alla possibilità di diminuire

ulteriormente le grossezze dei ferri componenti le mensole. Crediamo però che le ultime dimensioni, di metri 0,008 nella grossezza dei detti ferri e di metri 0,08 nella lunghezza dei lati dei ferri d'angolo, si possono definitivamente adottare, giacchè diminuendole ancora potrebbe darsi che le mensole non avessero più nelle loro pareti quel incartamento che è neccessario onde mantenerle nella perfetta posizione verticale.

Ma non basta essere certi della sicurezza delle mensole nelle varie sezioni, ed importa anche di assicurarsi che le loro unioni colla trave longitudinale L (*Fig.* 61) sono fatte in modo conveniente e con sufficienti garanzie di stabilità. Nel caso particolare osserviamo: che per unire una mensola alla detta trave vi sono due ferri d'angolo, i quali stringono nel loro mezzo la parete verticale, e che l'unione di questa parete ai ferri d'angolo è fatta mediante tre chiodi, e che ciascuna delle tavole della mensola è unita alle tavole della trave L mediante due chiodi. I chiodi che uniscono la parete verticale ai ferri d'angolo hanno i loro assi rappresentati nei punti (*Fig.* 93) T, U e V su una stessa retta XY, la quale dista di metri 0,045 dall'estremo della mensola; gli assi dei due chiodi che uniscono la tavola superiore della mensola alla trave longitudinale L (*Fig.* 61 e 93) sono rappresentati in Q ed analogamente sono rappresentati in S gli assi degli altri due chiodi che uniscono la tavola inferiore della mensola colla stessa trave longitudinale. Sotto l'azione del momento delle forze applicate alla trave a dritta della sezione XY, avviene: che tende avvenire rotazione attorno alla orizzontale passante pel suo centro di superficie, e che quindi nel chiodo di mezzo V non è provocata alcuna resistenza; che in due sezioni di ciascuno dei due chiodi T ed U è provocata la resistenza trasversale; e che in una sezione di ciascuno dei quattro chiodi che uniscono le tavole della mensola alla trave longitudinale L è pure provata la resistenza trasversale. Essendo i chiodi T ed U (*Fig.* 93) equidistanti dall'asse di rotazione V, si può ritenere che per l'uno e per l'altro sia eguale la resistenza trasversale provocata; e lo stesso si può dire dei chiodi Q e di S. Premesso questo, diciamo:

R la resistenza trasversale provocata nei due chiodi Q e nei due chiodi S;

R' la resistenza trasversale cimentata nel chiodo T e nel chiodo U;

e la distanza di ciascuna delle forze R da V;

e' la distanza di ciascuna delle forze R' pure da V;

M il momento delle forze applicate alla mensola a dritta della sezione XY.

Prendendo l'equazione dell'equilibrio di rotazione attorno a V, abbiamo:

$$M = 2Re + 2R'e' \qquad (3).$$

Le incognite che si trovano in quest'equazione sono le due resistenze R ed R', e quindi è essa insufficiente per la loro determinazione. Se però ammettiamo che le resistenze provocate nei chiodi siano proporzionali alle distanze degli assi dei chiodi stessi dall'asse di rotazione V, abbiamo quest'altra equazione:

$$\frac{R}{R'} = \frac{e}{e'} \qquad (4),$$

la quale assieme alla (3) si presta alla determinazione delle due resistenze R ed R'.

Non tenendo conto della diminuzione di peso della mensola a motivo della diminuzione stata apportata nelle dimensioni dei ferri che la compongono, e quindi supponendo ancora che il peso distribuito in modo uniforme sul metro di lunghezza sia di chilogrammi 1248, ciò che riesce di lieve vantaggio per la stabilità, abbiamo che il momento M consta del momento del peso che si trova uniformemente distribuito a dritta della sezione XY sulla lunghezza di metri 0,965, del momento del peso $P = 194^{cg}$ operante col braccio di metri 1,235 e del momento del peso $P' = 184^{cg}$ col braccio di metri 1,135. Il valore di M risulta adunque

$$M = \frac{1}{2} 1248\,(0{,}965)^2 + 194 \times 1{,}235 + 184 \times 1{,}135 = 1030.$$

I valori di e e di e' sono rispettivamente di metri 0,185 e di metri 0,088; e quindi le equazioni (3) e (4) diventano

$$0{,}37\,R + 0{,}176\,R' = 1030,$$
$$R = \frac{185}{88} R'.$$

Ricavando da queste due equazioni i valori delle incognite R ed R', otteniamo:

$$R = 2270,$$
$$R' = 1080.$$

Proponiamoci ora di determinare quale diametro dovrebbero avere i chiodi Q (*Fig.* 61 e 93) destinati ad unire la tavola superiore di una mensola alla trave longitudinale L. Questi chiodi sono in numero di due, e nella sezione retta di ciascuno di essi è provocata

la resistenza trasversale $\frac{1}{2}$R. Se adunque chiamiamo:

ρ il raggio del fusto di ciascuno dei detti chiodi, espresso in metri,

n^{IV} il coefficiente di stabilità relativo allo scorrimento trasversale, ed

R^{IV} il relativo coefficiente di rottura riferito al metro quadrato, ci risulta l'equazione di stabilità

$$n^{IV}R^{IV} = \frac{R}{2\pi\rho^2},$$

dalla quale, assumendo $R^{IV} = 24000000^{Cg}$, $\rho = 0^{m},01$ e $\pi = 3,1416$, si deduce

$$n^{IV} = 0,15;$$

cosicchè, essendo questo coefficiente di stabilità assai prossimo al limite 0,2 che si suole adottare in pratica, si può ritenere che convenga assegnare il diametro di metri 0,02 al fusto dei chiodi in Q ed S.

Per ciascuno dei chiodi T ed U è provocata la resistenza trasversale in due sezioni. Assegnando adunque al loro fusto il diametro di metri 0,02, come si è visto potersi fare pei chiodi Q ed S, si ha la stessa superficie resistente di questi ultimi con provocazione di assai minore resistenza trasversale, giacchè R' non arriva ad essere la metà di R. E quindi risulta che i due chiodi T ed U presentano le più ampie garanzie di sicurezza.

Nel chiodo V, trovandosi esso col suo asse sull'asse della rotazione prodotta dal momento M, non è provocata alcuna resistenza. Questo chiodo contribuisce solo a mantenere la parete verticale della mensola serrata fra i ferri d'angolo destinati a produrne l'unione colla trave longitudinale L.

Ai fusti dei chiodi che uniscono gli ultimi indicati ferri d'angolo alla parete verticale della trave longitudinale L, i cui assi due a due sono proiettati in A, B, C e D, si può pure assegnare il diametro di metri 0,02. Così facendo, si è sicuri di avere le più ampie garanzie di sicurezza; sia perchè la superficie resistente che presentano questi chiodi, che sono in numero di otto, è maggiore di quella presentata dai tre chiodi T, U e V; sia perchè il coefficiente di rottura per quelli si può assumere più grande del coefficiente di rottura conveniente a questi, giacchè nei primi è provocata la resistenza longitudinale, mentre nei secondi è messa in giuoco la resistenza trasversale; sia perchè le tavole orizzontali e la parete verticale della trave longitudinale L, fra cui trovasi aggiustata l'estre-

mità di ogni mensola, non possono a meno di dare qualche reazione contro il momento M, la qual reazione contribuisce a diminuire le resistenze provocate nei chiodi.

Riassumendo quanto si è conchiuso sulle dimensioni dei ferri componenti le mensole, possiamo stabilire che saranno di metri 0,008 le grossezze delle pareti verticali e dei ferri d'angolo, di metri 0,08 i lati dei ferri d'angolo e di metri 0,02 i diametri dei fusti dei chiodi.

27. **Dimensioni delle travi longitudinali di fronte e dei ferri che vi connettono le travi trasversali e le mensole.** — Le travi longitudinali di fronte sono quelle alle quali si trovano attaccate le mensole, ed ecco quali sono le principali dimensioni che ad esse si possono assegnare. La totale altezza della loro sezione retta si può assumere di metri 0,386, e di metri 0,10 i lati dei tre ferri d'angolo. Al ferro ad U si può assegnare l'altezza di metri 0,285 e la larghezza di metri 0,10. Finalmente la grossezza della parete verticale, quella dei ferri d'angolo e quella dei ferri ad U può essere di metri 0,008. I chiodi, da impiegarsi per chiodature da farsi fra questa trave ed i pezzi che ad essa devono trovarsi uniti, avranno il loro fusto col diametro di metri 0,02.

I cantonali o ferri d'angolo che servono per unire le travi trasversali alle travi longitudinali di cui stiamo discorrendo saranno lunghi metri 0,102, coi lati di metri 0,07 e colla spessezza di metri 0,005. Dimensioni maggiori avranno i ferri d'angolo che hanno per iscopo di unire le mensole alle dette travi longitudinali, giacchè sarà di metri 0,37 la loro lunghezza, di metri 0,08 i loro lati e di metri 0,008 la loro grossezza.

28. **Dimensioni delle travi trasversali.** — Le travi trasversali sono ferri semplici con sezione a doppio T simmetrico, e la loro lunghezza è di metri 7,97. Tanto la larghezza, quanto l'altezza della sezione si possono assumere di metri 0,12; e si possono assegnare metri 0,008 per grossezza media del gambo e delle tavole. La tavola superiore di ogni trave trasversale sarà unita mediante due chiodi al ferro ad U della trave L (*Fig.* 61); con due chiodi sarà pure posta la tavola inferiore della stessa trave trasversale sulla tavola inferiore della trave L; due chiodi serviranno a serrare la parete verticale della trave T fra i cantonali stati indicati nel precedente numero; e quattro altri chiodi fermeranno i cantonali stessi sulla parete verticale della trave L. Il diametro del fusto di tutti questi chiodi sarà di metri 0,016. Dove le travi trasversali appoggiano sui timpani, vi sarà un sistema di collegamento mediante quattro chiodi, aventi pure il fusto col diametro di metri 0,016.

Per poco che si rifletta alle condizioni in cui si trovano le travi trasversali, agevolmente si comprende come esse sono solidi rettilinei orizzontalmente collocati su sei appoggi, con una specie di incastramento sulle estremità e sugli appoggi intermedii, e caricati di un peso uniformemente distribuito sulla loro proiezione orizzontale. Noi però, per amore di semplicità nei calcoli e facendo un lieve favore alla stabilità, ammetteremo che gli accennati incastramenti non abbiano punto luogo e che ciascuna trave trasversale sia unicamente collocata sui suoi appoggi. Il peso uniformemente distribuito sulla lunghezza intiera di una trave trasversale deriva dal sovraccarico massimo che può trovarsi sul ponte, dalla coperta di lamiere curve, dal sovrastante pavimento, dal ferro a T (*Fig* 64) che corre nel senso della trave trasversale, dal peso della trave trasversale stessa. Considerando poi in quest'ultima la lunghezza di 1 metro ed adottando i valori già stati indicati nel numero 26 pei pesi del metro cubo di pietra, del metro cubo dei materiali posti fra i cunei di pietra e la coperta di lamiera e del metro cubo di ferro, si ottiene·

Peso corrispondente al sovraccarico . .	Cg.	600,00
» del pavimento in cunei di pietra . . .	»	468,00
» del materiale posto fra il pavimento e la coperta di lamiera di ferro	»	456,63
» corrispondente alla coperta ed alle relative chiodature	»	46,34
» del ferro a T superiore alla trave trasversale	»	10,38
Totale	Cg.	1581,35.

Cosicchè il peso p riferito all'unità di lunghezza della trave trasversale si può ritenere di chilogrammi 1581,35.

Per vedere ora in quali condizioni di stabilità si trova una trave trasversale, importa determinare i momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti agli appoggi, i momenti inflettenti e gli sforzi di taglio per una sezione qualunque di ogni scompartimento, le sezioni per le quali sono massimi i momenti inflettenti e gli sforzi di taglio; e sono queste appunto le determinazioni alle quali immediatamente ci accingiamo.

Considerando in una trave orizzontalmente collocata su più appoggi e caricata di un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza due scompartimenti successivi, e dicendo

a' la lunghezza del primo scompartimento a sinistra,

a'' la lunghezza del secondo scompartimento,

p' il peso corrispondente all'unità di lunghezza del primo,

p'' il peso corrispondente all'unità di lunghezza del secondo,

m' il momento inflettente per la sezione corrispondente al primo appoggio a sinistra,

m'' il momento inflettente per la sezione corrispondente all'appoggio di mezzo,

m''' il momento inflettente per l'appoggio di destra,

abbiamo la rimarchevole relazione,

$$m'a' + 2m''(a' + a'') + m'''a'' + \frac{1}{4}(p'a'^3 + p''a''^3) = 0$$

(*Arte di fabbricare, Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni*, Num 114), la quale, convenientemente applicata, serve a determinare i momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti agli appoggi.

Nel caso particolare che stiamo trattando, si ha:

$$a' = a'' = 1^{m},60$$
$$p' = p'' = p,$$

e quindi l'ultima equazione si riduce a

$$m' + 4m'' + m''' + 1{,}28.p = 0 \qquad (1).$$

I momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti ai due appoggi estremi sono nulli, e quindi rimangono da determinarsi i momenti inflettenti per le sezioni riferentisi ai mezzi del secondo, del terzo, del quarto e del quinto appoggio. Siccome poi le travi trasversali sono simmetriche e simmetricamente caricate rispetto alla loro sezione di mezzo, sono eguali fra di loro i momenti inflettenti per le sezioni che corrispondono al secondo ed al quinto appoggio, come pure sono eguali fra di loro i momenti inflettenti per le sezioni che corrispondono al terzo ed al quarto appoggio. Se adunque chiamiamo

m_2 il momento inflettente per la sezione che corrisponde al mezzo del secondo e del quinto appoggio, ed

m_3 quello per la sezione che corrisponde al mezzo del terzo e del quarto appoggio,

applicando l'equazione (1), prima col considerare il primo ed il secondo scompartimento, e poi col considerare il secondo ed il terzo, abbiamo le equazioni

$$4m_2 + m_3 + 1{,}28.p = 0$$
$$m_2 + 5m_3 + 1{,}28.p = 0.$$

Queste due equazioni di primo grado fra le due incognite m_2 ed m_3 conducono ad ottenere:

$$m_2 = -\frac{5,12}{19}p$$

$$m_3 = -\frac{3,84}{19}p;$$

cosicchè, conoscendo noi il valore di p, possiamo dire che son noti i due momenti inflettenti m_2 ed m_3.

Per determinare i momenti inflettenti relativi ad una sezione qualunque di ognuno dei cinque scompartimenti, serve la formola (*Arte di fabbricare, Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni*, Num. 116)

$$\mu = m' + \left(\frac{1}{2}pa + \frac{m'' - m'}{a}\right)z - \frac{1}{2}pz^2 \qquad (2),$$

nella quale

a rappresenta la lunghezza dello scompartimento che si considera,

p il peso riferito alla sua unità di lunghezza,

m' il momento inflettente per la sezione della trave relativa all'appoggio di sinistra, ed

m'' il momento inflettente per la sezione della trave relativa all'appoggio di destra dello stesso scompartimento,

z la distanza di una sezione qualunque della trave nello scompartimento che si considera dalla sezione corrispondente all'appoggio di sinistra,

μ il momento inflettente per la sezione definita dall'ascissa z.

Applicando l'ultima formola coll'avere riguardo ai trovati valori dei momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti agli appoggi e per $a = 1^m,60$, se indichiamo rispettivamente con

μ_1, μ_2 e μ_3 i momenti inflettenti per una sezione qualsiasi del primo, del secondo e del terzo scompartimento, e con

z_1, z_2 e z_3 la rispettiva distanza di ognuna di queste tre sezioni da quella riferentesi all'appoggio di sinistra dello scompartimento che si considera,

troviamo:

$$\left.\begin{aligned} \mu_1 &= p\left(\frac{12}{19}z_1 - \frac{1}{2}z_1^2\right) \\ \mu_2 &= p\left(-\frac{5,12}{19} + \frac{16}{19}z_2 - \frac{1}{2}z_2^2\right) \\ \mu_3 &= p\left(-\frac{3,84}{19} + 0,8\,z_3 - \frac{1}{2}z_3^2\right) \end{aligned}\right\} \qquad (3).$$

Non occorre trovare i momenti inflettenti per una sezione qualunque del quarto, e del quinto scompartimento, giacchè questi momenti sono eguali per sezioni simmetricamente disposte rispetto al mezzo della trave.

Se ora facciamo le derivate dei valori di μ_1, μ_2 e μ_3 per rapporto a z_1 z_2 e z_3, e se queste derivate eguagliamo a zero, otteniamo le equazioni determinanti i valori particolari z_{1m}, z_{2m} e z_{3m} delle ascisse z_1, z_2 e z_3 corrispondenti in ciascun scompartimento alla sezione intermedia cui corrisponde il momento inflettente massimo. Queste equazioni risultano

$$\frac{12}{19} - z_{1m} = 0$$

$$\frac{16}{19} - z_{2m} = 0$$

$$0{,}8 \quad z_{3m} = 0,$$

e da esse immediatamente ricaviamo

$$z_{1m} = 0^m{,}63$$
$$z_{2m} = 0,\ 84$$
$$z_{3m} = 0,\ 80.$$

Se poniamo i trovati valori di z_{1m}, z_{2m} e z_{3m} invece di z_1, z_2 e z_3 nelle formole (3), otteniamo quei valori μ_{1m}, μ_{2m} e μ_{3m} di μ_1, μ_2 e μ_3 che rappresentano rispettivamente i massimi momenti inflettenti per una sezione intermedia del primo, del secondo e del terzo scompartimento. Questi valori sono dati da

$$\mu_{1m} = \frac{72}{361} p,$$

$$\mu_{2m} = \frac{30{,}72}{361} p,$$

$$\mu_{3m} = \frac{2.24}{19} p.$$

Il valore assoluto del momento inflettente massimo, che può aver luogo in una trave trasversale, è uno dei valori assoluti dei momenti m_2, m_3, μ_{1m}, μ_{2m} e μ_{3m}. Riducendo ad avere il denominatore 361 anche i valori di m_2, m_3 e μ_{3m}, tosto si scorge che il valore assoluto maggiore è quello di m_2, ossia quello del momento inflettente per la sezione corrispondente al secondo ed al quinto appoggio. Questa sezione adunque è quella pericolosa per rapporto alla flessione, e quindi nulla di più facile quanto il verificare qual grado

di stabilità presenta una trave trasversale. Bisogna perciò applicare la nota equazione di stabilità:

$$n''R'' = \frac{v\mu_m}{I_x} \qquad (4),$$

in cui, a motivo delle prestabilite dimensioni della sezione retta della trave, si deve porre

$$v = 0^m,06,$$

$$I_x = \frac{1}{12}\left[0,12\,(0,12)^3 - 0,112\,(0,104)^3\right] = 0,0000067813.$$

Il valore di μ_m non è altro che il valore assoluto di m_2 quando in esso si ponga il trovato valore di p, cosicchè risulta.

$$\mu_m = \frac{5,12}{19}\,1581,35;$$

ed il valore di R'' è di chilogrammi 30000000. Sostituendo i valori di v, μ_m, I_x ed R'' nell'equazione (4), si deduce·

$$n'' = 0,132.$$

Questo coefficiente di stabilità, essendo minore di $\frac{1}{5} = 0,2$, accenna esserci nelle travi trasversali sufficienti garanzie di stabilità per rapporto alla resistenza longitudinale, e siccome il coefficiente di stabilità stato calcolato non è molto lontano dal coefficiente di stabilità limite, crediamo conveniente di ritenere per le travi trasversali le dimensioni state indicate nel principio di questo numero.

Verificata la stabilità per rapporto alla resistenza longitudinale, conviene occuparsi della resistenza allo scorrimento trasversale. Incomincieremo perciò col determinare gli sforzi di taglio per una sezione qualunque del primo, del secondo e del terzo scompartimento della trave. Si sa che gli sforzi di taglio sono le prime derivate dei momenti inflettenti coi segni cangiati (*Arte di fabbricare, Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni*, Num. 117), e quindi, dicendo N_1, N_2 ed N_3 gli sforzi di taglio che vogliamo trovare, ci risulta

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= p\left(z_1 - \frac{12}{19}\right) \\ N_2 &= p\left(z_2 - \frac{16}{19}\right) \\ N_3 &= p\,(z_3 - 0,8) \end{aligned}\right\} \qquad (5).$$

Non è necessario trovare gli sforzi di taglio per una sezione qualunque del quarto e del quinto scompartimento, giacchè questi momenti sono eguali per sezioni simmetricamente collocate rispetto al mezzo della trave.

Importa ora trovare gli sforzi di taglio per sezioni infinitamente vicine a quelle corrispondenti agli appoggi a dritta ed a sinistra degli appoggi stessi. Chiamando perciò

N'_1, N'_2 ed N'_3 quelli a dritta del primo, del secondo e del terzo appoggio,

otterremo i loro valori cangiando nelle formole (5) N_1 in N'_1, N_2 in N'_2 ed N_3 in N'_3, e facendo in esse $z_1 - z_2 = z_3 = 0$. Così operando si trovano i seguenti valori:

$$N'_1 = -\frac{12}{19}p,$$

$$N'_2 = -\frac{16}{19}p,$$

$$N'_3 = \frac{15,2}{19}p.$$

Analogamente, dicendo:

N''_1, N''_2 ed N'''_3 gli sforzi di taglio a sinistra del secondo, del terzo e del quarto appoggio,

otterremo i loro valori, ponendo nelle formole (5) N''_1 invece di N_1, N''_2 invece di N_2 ed N''_3 invece di N_3, e facendo di più $z_1 = z_2$ $z_3 = 1^m,60$. Operando in questa maniera si giunge a

$$N''_1 = \frac{18,4}{19}p,$$

$$N''_2 = \frac{14,4}{19}p,$$

$$N''_3 = \frac{15,2}{19}p.$$

Risulta dalle equazioni (5) che gli sforzi di taglio per le sezioni dei diversi scompartimenti sono rappresentati dalle ordinate di linee rette, il massimo di questi sforzi di taglio è uno dei valori corrispondenti agli appoggi; e non è altro che il valore di N''_1. La sezione pericolosa per rapporto agli sforzi di taglio corrisponde adunque al secondo o al quinto appoggio, ed il valore assoluto dello sforzo di taglio massimo è dato dall'espressione $\frac{18,4}{19}p$. Ora, per deter-

minare il grado di stabilità della trave per rapporto alla resistenza trasversale, applicheremo la formola

$$n^{IV} R^{IV} = \frac{N_m}{\Omega},$$

nella quale porremo

$$R^{IV} = 24000000^{Cg}$$

$$N_m = \frac{18,4}{19} p \quad \frac{18.4}{19} 1581,35,$$

$$\Omega = 0,12 \times 0,12 - 0,112 \times 0,104 \quad 0^{mq},002752.$$

Ricavando il valore di n^{IV}, si ottiene

$$n^{IV} = 0,023,$$

di maniera che, essendo il coefficiente di stabilità n^{IV} assai minore di $\frac{1}{5} = 0,02$, la trave presenta le più ampie garanzie di sicurezza per rapporto alla resistenza trasversale.

Le dimensioni, state indicate nel principio di questo numero per la sezione retta delle travi trasversali, assegnano loro sufficiente stabilità, tanto per rapporto alla resistenza longitudinale quanto per rapporto alla resistenza trasversale. Queste dimensioni, quando si volesse stare allo strettamente necessario, si potrebbero forse diminuire; noi però, penetrati dell'importanza delle travi trasversali per collegare fra loro i timpani sovrastanti alle diverse centine, crediamo che non sia affatto fuor di proposito l'abbondare un po' nella loro robustezza, e quindi crediamo opportuno di non apportare modificazione alcuna alle loro dimensioni.

29. **Pressioni delle travi trasversali sui loro appoggi, e pesi applicati ai nodi superiori dei timpani.** — La pressione che una trave orizzontalmente collocata su più appoggi e caricata di un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza esercita su uno qualunque degli appoggi, si ottiene (*Arte di fabbricare, Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni*, Num. 118) facendo la differenza fra gli sforzi di taglio immediatamente a sinistra ed a dritta dell'appoggio che si considera. Se adunque chiamiamo

R_1, R_2 ed R_3 le pressioni che una trave trasversale del ponte di cui studiamo il progetto esercita sul primo, sul secondo e sul terzo appoggio, avremo:

$$R_1 = -N'_1 = \frac{12}{19} p,$$

$$R_2 = N''_1 - N'_2 = \frac{34,4}{19} p,$$

$$R_3 = N''_2 - N'_3 = \frac{29,6}{19} p.$$

La maggiore di queste reazioni è la R_2 ossia quella che ha luogo sul secondo appoggio, essa non è la sola, e conviene ancora considerare la pressione proveniente dal peso proprio della trave trasversale, quella proveniente dal peso del coprigiunto inferiore l (*Fig* 64), quella proveniente dal peso del coprigiunto superiore l'', e finalmente quella derivante dal peso dei cantonali che uniscono le travi l alle travi trasversali e dal peso delle capocchie dei chiodi per quest'unione. Trascurando il peso delle capocchie dei chiodi destinati ad unire le travi l alla trave trasversale mediante i cantonali, giacchè questo peso è assolutamente trascurabile, abbiamo, che essendo il peso proprio della trave trasversale uniformemente distribuito sulla sua lunghezza, l'espressione della pressione da essa prodotta sul secondo appoggio deve essere analoga all'espressione di R_2, ossia il coefficiente numerico $\frac{34,4}{19}$ moltiplicato per il peso q dell'unità di lunghezza di trave; che il valore di q per le dimensioni state indicate nel principio di questo numero è di chilogrammi 21,38, e che i pesi dei coprigiunti e dei cantonali risultano:

Peso del coprigiunto inferiore . . .	Cg	13,18
» del coprigiunto superiore .	»	10,38
» dei cantonali	»	1,89
Totale	Cg.	25,45.

Aggiungendo a questo peso il valore di R_2 dopo aver fatto in esso $p = 1581,35$, e la pressione prodotta dal peso proprio della trave data da $\frac{34,4}{19}$ 21,38, otteniamo che la pressione massima R_m esercitata da una trave trasversale, la qual pressione massima ha luogo sul secondo e sul quinto appoggio, è data da

$$R_m = 2927^{cg}.$$

Le travi trasversali, una sì e l'altra no, corrispondono ai nodi superiori dei timpani, e quindi facendo per ora astrazione dei tim-

pani insistenti alle centine di fronte, si può dire che sono i nodi superiori dei timpani della seconda e della quinta centina quelli che portano i carichi maggiori. Siccome poi nel mezzo dei pezzi orizzontali dei timpani hanno pure appoggio le travi trasversali, risulta che si possono ritenere siccome dati da

$$R_m + \frac{1}{2} R_m = 4390^{cg},5$$

i carichi gravitanti su ciascuno dei due nodi 0 e 16 (*Fig.* 86); da

$$2R_m = 5854^{cg}$$

ciascuno dei carichi gravitanti sui nodi 2, 4, 6, 8, 10, 12 e 14.

Calcolando i pezzi dei timpani in modo che siano stabili nell'ipotesi degli accennati carichi sui nodi superiori, si avrà eccesso di stabilità per quelli insistenti alle due centine di mezzo, ma lo stesso non si può ancora dire per quelli che corrispondono alle due centine di fronte. Sui timpani insistenti a queste centine, operano non solo le azioni che loro sono trasmesse dalle travi trasversali, ma ben anche quelle derivanti dalle mensole attaccate alla trave longitudinale o longarina di fronte L (*Fig* 61), e quindi importa accertarsi quali sono i pesi operanti sui nodi superiori dei timpani stessi. Questi pesi sono costituiti:

Dal peso totale insistente ad una mensola che corrisponde ad un nodo superiore dei timpani, il qual peso, per quanto risulta dal numero 26, è di . . . . . Cg. 1626;

Dal peso totale insistente ad una mensola che corrisponde al mezzo di uno dei pezzi orizzontali dei timpani, il qual peso, pure per quanto risulta dal numero 26, è di » 1442,

Dalla pressione che due travi trasversali esercitano su una centina di fronte, la qual pressione è data dai $2 \frac{12}{19} (p+q)$ ossia da . . . . . » 2025;

Dal peso di 2 metri della trave longitudinale o longarina di fronte L, alla quale sono attaccate le mensole, il qual peso risulta di . . . . . » 172;

Dal peso dei cantonali che uniscono le mensole e le travi trasversali alla detta trave longitudinale, il qual peso è di » 15.

Sommando tutti questi pesi si ottiene quello insistente ad uno dei nodi intermedii superiori dei timpani di fronte, ed è esso dato da

chilogrammi 5280; cosicchè i nodi dei timpani di fronte coi numeri 2, 4, 6, 8, 10, 12 e 14 (*Fig* 86) risultano meno caricati di quelli cogli stessi numeri nei timpani insistenti alla seconda ed alla quinta centina. In quanto ai nodi coi numeri 0 e 16 nei timpani di fronte, si può ritenere che sopportino una pressione che sia i $\frac{3}{4}$ 5280 3960^{cg}, e quindi anche minore di quella che opera sui nodi cogli stessi numeri nei timpani posti sopra la seconda e la quinta centina.

Se adunque si suppongono caricati del peso di chilogrammi 4390,5 i nodi dei timpani coi numeri 0 e 16, e del peso di chilogrammi 5854 i nodi coi numeri 2, 4, 6, 8, 10, 12 e 14, e se con queste ipotesi si assegnano ai differenti pezzi dei timpani stessi dimensioni in accordo con un conveniente grado di stabilità, indubitatamente vi sarà qualche eccesso di stabilità nei timpani delle due centine di fronte e delle due centine di mezzo.

30. **Determinazioni relative all'asse della centina.** — L'asse della centina è un arco circolare colla corda di 50 metri e colla saetta di 6 metri. Chiamando

r il suo raggio $\overline{CA} = \overline{CB}$ (*Fig.* 94),

α l'angolo ACB corrispondente alla metà del detto arco,

c la semi-corda $\overline{AD}$, ed

m la monta $\overline{DB}$,

si ha (*Arte di fabbricare, Geometria pratica applicata all'arte del costruttore*, Num 24)

$$r = \frac{c^2 + m^2}{2m}$$

$$\text{sen } \alpha = \frac{c}{r}.$$

Ponendo nella prima di queste formole

$$c = 25^m, \qquad m = 6^m,$$

si deduce

$$r = 55^m,083,$$

e quindi dalla seconda si ricava

$$\alpha = 26^o\ 59'\ 29''.$$

31. **Determinazioni relative all'arco sul quale sono posti i punti di attacco dei pezzi dei timpani colla centina.** — Tutti i punti degli attacchi inferiori dei pezzi dei timpani si trovano collocati su

un arco di circolo, il quale dista di metri 0,475 dall'asse della centina in corrispondenza del giunto di chiave, e di metri 0,675 in corrispondenza del giunto d'imposta. Se adunque sui prolungamenti di $\overline{CB}$ e di $\overline{CA}$ (*Fig.* 94) si portano rispettivamente le lunghezze $\overline{BG} = 0^m,475$ ed $\overline{AF} = 0^m,675$, e se si descrive un arco circolare col suo centro sulla retta GCX e passante pei due punti G ed F, è questo l'arco di cui stiamo parlando e pel quale sono necessarie alcune determinazioni e principalmente quella relativa al suo raggio.

Immaginando abbassata da F la perpendicolare FE sulla direzione DA, dal triangolo FEA, in cui l'angolo EFA è quello stato indicato con α nel precedente numero, si ha

$$\overline{EA} = 0,675 \times \text{sen } 26° 59' 29'' = 0^m,306$$
$$\overline{EF} = 0,675 \times \cos 26° 59' 29'' = 0\ ,601.$$

La semicorda $\overline{FH}$ dell'arco, di cui si ha la metà in GF, evidentemente è eguale ad $\overline{ED} = \overline{AD} + \overline{EA}$, cosicchè risulta

$$\overline{FH} = 25^m,306.$$

Mentre la monta $\overline{HG}$, essendo eguale a $\overline{DB} + \overline{BG} - \overline{EF}$, è data da

$$\overline{HG} = 5^m,874.$$

Conoscendosi ora la semi-corda e la monta dell'arco sul quale sono collocati gli attacchi inferiori dei pezzi dei timpani, si può dedurre il suo raggio colla prima delle formole del precedente numero, e chiamando R questo raggio, si ottiene

$$R = 57^m,454.$$

32. **Determinazione dei punti d'attacco dei pezzi dei timpani colle centine e colle corrispondenti longarine.** — Considerando i pezzi dei timpani di una mezza centina, si ha, che i loro punti di attacco alla longarina corrispondono ai punti 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16 della retta orizzontale $0h$ (*Fig.* 86); che i punti d'attacco alla centina corrispondono ai punti 0', 2', 4', 6', 8', 10', 12', 14' e 16' dell'arco $0'i$, il quale non è altro che l'arco FG (*Fig* 94) a cui si riferiscono le determinazioni del numero precedente, e che la minima distanza $\overline{hi}$ (*Fig.* 86) fra la retta e l'arco or indicati è di metri 0,05.

Assumendo il punto h per origine delle coordinate, la orizzontale $h0x$ per asse delle ascisse e la verticale hy per asse delle ordinate,

si ha che i punti 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16 sono determinati dalla loro ascisse ossia dalle loro distanze dal punto h, e risulta:

Che l'ascissa del punto	0	è di	25	metri,
»	2	»	23	»
»	4	»	21	»
»	6	»	19	»
»	8	»	17	»
»	10	»	15	»
»	12	»	13	»
»	14	»	11	»
»	16	»	9	»

I punti 0′, 2′, 4′, 6′, 8′, 10′, 12′, 14′ e 16′ sono determinati dalle loro coordinate, le loro ascisse sono rispettivamente quelle già indicate dei punti 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16, e le loro ordinate si possono dedurre colla formola

$$y = d + R - \sqrt{R^2 - x^2}.$$

In questa formola

d rappresenta la distanza $\overline{ih} = 0^m,05$,

R il raggio dell'arco $\overline{0'i}$ che, in conformità del risultato ottenuto nel precedente numero, vale $57^m,454$,

x le ascisse dei diversi punti di cui vogliamo le ordinate, ed

y le ordinate richieste.

Applicando l'ultima formola troviamo:

Che al punto	0′	di ascissa	25^m	corrisponde l'ordinata di	$5^m,775$,
»	2′	»	23	»	4, 855,
»	4′	»	21	»	4, 026,
»	6′	»	19	»	3, 283;
»	8′	»	17	»	2, 623,
»	10′	»	15	»	2, 043,
»	12′	»	13	»	1, 540:
»	14′	»	11	»	1, 113;
»	16′	»	9	»	0, 759.

33. **Determinazione dei punti di concorso dei pezzi dei timpani.** — Questi punti sono quelli che sulla figura 86 sono individuati coi numeri 0″, 1″, 3″, 5″, 7″, 9″, 11″, 13″ e 15″. Le loro

ascisse sono le distanze dei punti 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15 dall'origine h delle coordinate, e le ordinate sono rispettivamente le metà delle verticali $\overline{00'}$, $\overline{11'}$, $\overline{33'}$, $\overline{55'}$, $\overline{77'}$, $\overline{99'}$, $\overline{1111'}$, $\overline{1313'}$ e $\overline{1515'}$ Le lunghezze di queste verticali poi si calcolano facilmente colla formola del precedente numero e col porre in essa i noti valori di d e di R, non che le ascisse or ora indicate. Facendo questi calcoli, si trova·

Che al punto 0″ di ascissa	25^m	corrisponde l'ordinata di	2^m,887,
»	1″	»	24	»	2, 651,
»	3″	»	22	»	2, 214
»	5″	»	20	»	1, 822,
»	7″	»	18	»	1, 471,
»	9″	»	16	»	1, 161,
»	11″	»	14	»	0, 891;
»	13″	»	12	»	0, 658;
»	15″	»	10	»	0, 463.

34. **Angoli che gli assi dei pezzi dei timpani attaccati alle longarine fanno colla verticale.** — Sia AB (*Fig* 95) la retta, sulla quale si trovano i punti d attacco dei pezzi dei timpani con una longarina, F uno qualunque di questi punti, FL ed FM gli assi dei due pezzi dei timpani concorrenti in F, L ed M le loro estremità in corrispondenza dei punti di mezzo delle ordinate $\overline{EH}$ e $\overline{GK}$. Indicando rispettimente con α e β i due angoli MFI ed LFI alterni interni di FMG ed FLE, dai triangoli rettangoli MGF ed LEF, immediatamente si deduce

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{\overline{FG}}{\overline{GM}}, \qquad \text{tang}\,\beta = \frac{\overline{FE}}{\overline{EL}} \qquad (1).$$

Nel caso concreto si ha: che

$$\overline{FG} = \overline{FE} = 1^m;$$

che $\overline{GM}$ e $\overline{EL}$ sono le ordinate dei punti di concorso dei pezzi dei timpani già stati determinati nel numero precedente; che pel punto d'attacco 0 (*Fig.* 86) esiste il solo angolo α, che pel punto d'attacco 16 esiste il solo angolo β, e che pei punti d'attacco intermedi si hanno contemporaneamente i due angoli α e β. Conviene ancora osservare che, per essere i triangoli 01″2, 23″4, 45″6, 67″8, 89″10, 1011″12, 1213″14 e 1415″16 isosceli sulle basi $\overline{02}$, $\overline{24}$, $\overline{46}$, $\overline{68}$,

$\overline{8\,10}$, $\overline{10\,12}$, $\overline{12\,14}$ e $\overline{14\,16}$, l'angolo β di un vertice dev'essere eguale all'angolo α del vertice precedente.

Applicando le formole (1) per trovare gli angoli α e β pei pezzi dei timpani concorrenti nei punti 0, 2, 4, 6, 8, 10 12, 14 e 16, troviamo i risultamenti contenuti nella seguente tavola.

Indicazione dei vertici	Indicazione dei pezzi dei timpani	Angoli α	Indicazione dei pezzi dei timpani	Angoli β
0	0 1″	20° 39′ 49″		
2	2 - 3″	24 18 9	2 - 1″	20° 39′ 49″
4	4 - 5″	28 45 36	4 3″	24 18 9
6	6 - 7″	34 11 57	6 - 5″	28 45 36
8	8 - 9″	40 43 37	8 - 7″	34 11 57
10	10-11″	48 17 56	10 - 9″	40 43 37
12	12-13″	56 38 6	12-11″	48 17 56
14	14-15″	65 7 56	14-15″	56 38 6
16			16-17″	65 7 56.

35. **Angoli che gli assi dei pezzi dei timpani attaccati alle centine fanno colla verticale.** — Sia CD (*Fig* 95) l'arco circolare sul quale sono disposti i punti d attacco dei pezzi dei timpani con una centina, I uno qualunque di questi punti, IL ed IM gli assi dei due pezzi dei timpani concorrenti in I, L ed M le loro estremità in corrispondenza dei punti di mezzo delle ordinate $\overline{EH}$ e $\overline{GK}$.

Indicando rispettivamente con

γ e δ i due angoli LIF ed MIF,

ed immaginando condotte dai due punti L ed M due perpendicolari sulla FI, dai triangoli rettangoli INL ed IOM, si deduce

$$\operatorname{tang}\gamma = \frac{\overline{LN}}{\overline{IN}}, \qquad \operatorname{tang}\delta = \frac{\overline{MO}}{\overline{IO}}.$$

Ma si ha

$$\overline{LN} = \overline{MO} = 1^{m},$$
$$\overline{IN} = \overline{IF} - \overline{FN} \quad \overline{IF} - \overline{EL},$$
$$\overline{IO} - \overline{IF} - \overline{FO} = \overline{IF} - \overline{GM},$$

cosicchè le formole determinatrici di tang γ e di tang δ, diventano

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\gamma &= \frac{1}{\overline{IF} - \overline{EL}} \\ \operatorname{tang}\delta &= \frac{1}{\overline{IF} - \overline{GM}} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Osservando che $\overline{IF}$ è l'ordinata del punto d'attacco dei considerati pezzi dei timpani colla centina, che $\overline{EL}$ e $\overline{GM}$ sono le ordinate dei punti di concorso degli stessi pezzi, che pel punto d'attacco 0′ (*Fig.* 86) esiste il solo angolo δ, che pel punto d'attacco 16′ si ha il solo angolo γ, e che per tutti i punti d'attacco intermedi si hanno contemporaneamente i due angoli δ e γ, rammentando che le ordinate di tutti i punti d'attacco dei pezzi dei timpani colla centina si hanno alla fine del numero 32, e che le ordinate di tutti i punti di concorso degli stessi pezzi si hanno nel numero 33, l'applicazione delle formole (1) facilmente conduce ai risultati contenuti nella tavola che segue·

Indicazione dei vertici	Indicazione dei pezzi dei timpani	Angoli γ	Indicazione dei pezzi dei timpani	Angoli δ
0′			0′ - 1″	17° 45′ 10″
2′	2′ - 1″	24° 24′ 35″	2′ - 3″	20 44 33
4′	4′ - 3″	28 54 0	4′ - 5″	24 24 17
6′	6′ 5″	34 23 25	6′ - 7″	28 54 0
8′	8′ - 7″	40 58 20	8′ - 9″	34 22 52
10′	10′ - 9″	48 36 14	10′-11″	40 57 35
12′	12′-11″	57 0 59	12′-13″	48 36 14
14′	14′-13″	65 33 30	14′-15″	56 59 47.
16′	16′-15″	73 32 15		

36. **Angoli che gli assi dei pezzi dei timpani, i quali uniscono i punti di concorso, fanno colla verticale.** — Sia LM (*Fig.* 95) l'asse di uno di questi pezzi fra i due punti di concorso successivi L ed M, e vogliasi trovare l'angolo LMK che esso fa colla parte inferiore MK della verticale GK passante pel suo estremo di destra.

Chiamando

ε l'angolo domandato LMK,

ed immaginando prolungata la orizzontale LN fino in P, dal triangolo MPL rettangolo in P, si deduce

$$\text{tang}\,\varepsilon = \frac{\overline{LP}}{\overline{MP}}.$$

Ma si ha

$$\overline{LP} = 2^m,$$
$$\overline{MP} = \overline{EL} - \overline{GM};$$

cosicchè la formola determinatrice di ε diventa

$$\text{tang}\,\varepsilon = \frac{2}{\overline{EL} - \overline{GM}} \qquad (1).$$

Pel lato 0″1″ (*Fig.* 86), come risulta dalla figura 96 in cui questo lato è rappresentato in $\overline{VT}$ ed in cui VR è orizzontale, si ha

$$\text{tang}\,\varepsilon \quad \frac{\overline{VR}}{\overline{TR}},$$

e, per essere

$$\overline{VR} = 1^m,$$
$$\overline{TR} = \overline{SV} - \overline{XT},$$

la formola determinatrice di tang ε risulta

$$\text{tang}\,\varepsilon = \frac{1}{\overline{SV} \quad \overline{XT}} \qquad (2).$$

Ponendo nella formola (1) i valori noti delle ordinate $\overline{EL}$ e $\overline{GM}$ dei punti di concorso dei pezzi dei timpani (Num 33) col considerare ordinatamente due successivi di questi punti, e nella formola (2) i valori noti di SV ed XT, si ottengono i seguenti risultati, le cui indicazioni sono riferite alla figura 86.

Indicazione dei vertici	Indicazione dei pezzi dei timpani	Angoli ε
1″	0″ 1″	76° 43′ 16″
3″	1″ 3″	77 40 28
5″	3″ - 5″	78 53 48
7″	5″ - 7″	80 3 35
9″	7″ - 9″	81 11 21
11″	9″-11″	82 17 51
13″	11″-13″	83 22 9
15″	13″-15″	84 25 53.

37. **Lunghezze degli assi dei pezzi dei timpani.** Considerando uno qualunque dei quadrilateri come FMIL (*Fig* 95), coi due vertici F ed I sulla stessa verticale nei punti d'attacco dei pezzi dei timpani alla longarina ed alla centina e cogli altri due vertici nei punti di concorso M ed L immediatamente a dritta ed a sinistra della verticale FI, si vede come si trovano in esso gli assi di cinque

differenti pezzi dei timpani. Due di questi assi concorrono nell'attacco superiore F, due nell'attacco inferiore I ed un quinto unisce il punto di concorso L col punto di concorso M.

Chiamando

d e d' le lunghezze $\overline{FM}$ ed $\overline{IM}$ degli assi dei pezzi posti a dritta della verticale FI,

s ed s' le lunghezze $\overline{FL}$ ed $\overline{IL}$ degli assi dei pezzi posti a sinistra della stessa verticale,

si ha

$$d = \sqrt{\overline{FG}^2 + \overline{GM}^2},$$

$$d' = \sqrt{\overline{FG}^2 + \overline{OI}^2},$$

$$s = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{EL}^2},$$

$$s' = \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{NI}^2}$$

Ma nel caso concreto risulta

$$\overline{FG} = \overline{EF} = 1^m,$$
$$\overline{OI} = \overline{FI} - \overline{GM},$$
$$\overline{NI} = \overline{FI} - \overline{EL};$$

e quindi le formole determinatrici di d, d', s ed s' si riducono a

$$\left.\begin{aligned} d &= \sqrt{1 + \overline{GM}^2} \\ d' &= \sqrt{1 + (\overline{FI} - \overline{GM})^2} \\ s &= \sqrt{1 + \overline{EL}^2} \\ s' &= \sqrt{1 + (\overline{FI} - \overline{EL})^2} \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

Le lunghezze $\overline{FI}$ che entrano in queste formole sono le ordinate dei punti d'attacco dei pezzi dei timpani alle centine, e le lunghezze $\overline{EL}$ e $\overline{GM}$ sono le ordinate dei punti di concorso degli stessi pezzi, e quindi queste lunghezze già si trovano inscritte nelle tavole dei numeri 32 e 33.

Applicando le primé due delle formole (1) per calcolare le lunghezze degli assi dei pezzi dei timpani posti a dritta delle verticali (*Fig.* 86) 0 0′, 2 2′, 4 4′, 6 6′, 8 8′, 10 10′, 12 12′ e 14 14′, si trovano i risultati contenuti nella tavola che segue·

Lunghezze d	Lunghezze d'
$\overline{01}'' = 2^m,833$	$\overline{0'1}'' = 3^m,280$
$\overline{23}''$ 2, 430	$\overline{2'3}'' = 2,\ 823$
$\overline{45}'' = 2,\ 078$	$\overline{4'5}'' = 2,\ 420$
$\overline{67}'' = 1,\ 780$	$\overline{6'7}'' = 2,\ 070$
$\overline{89}'' = 1,\ 533$	$\overline{8'9}'' = 1,\ 771$
$\overline{10\,11}'' = 1,\ 338$	$\overline{10'11}'' = 1,\ 525$
$\overline{12\,13}'' = 1,\ 197$	$\overline{12'13}'' = 1,\ 333$
$\overline{14\,15}'' = 1,\ 102$	$\overline{14'15}'' = 1,\ 192.$

Analogamente, applicando la terza e la quarta delle formole (1) per avere le lunghezze degli assi dei pezzi dei timpani posti a sinistra delle verticali 22', 44', 66', 88', 10 10', 12 12', 14 14' e 16 16', si ottengono i risultamenti contenuti in questa seconda tavola

Lunghezze s	Lunghezze s'
$\overline{21}'' = 2^m,833$	$\overline{2'1}''$ $2^m,420$
$\overline{43}''$ 2, 430	$\overline{4'3}'' = 2,\ 069$
$\overline{65}'' = 2,\ 078$	$\overline{6'5}'' = 1,\ 770$
$\overline{87}'' = 1,\ 780$	$\overline{8'7}'' = 1,\ 525$
$\overline{10\,9}'' = 1,\ 533$	$\overline{10'9}'' = 1,\ 333$
$\overline{12\,11}'' = 1,\ 338$	$\overline{12'11}'' = 1,\ 192$
$\overline{14\,13}'' = 1,\ 197$	$\overline{14'13}''$ 1, 097
$\overline{16\,15}'' = 1,\ 102$	$\overline{16'15}'' = 1,\ 043.$

Le lunghezze s sono eguali alle lunghezze d, e la ragione sta nell'essere i triangoli 01''2, 23''4, 45''6, 67''8, 89''10, 1011''12, 1213''14, 1415''16 isosceli per costruzione sulle basi $\overline{02}$, $\overline{24}$, $\overline{46}$, $\overline{68}$, $\overline{810}$, $\overline{1012}$, $\overline{1214}$ e $\overline{1416}$.

Rimangono ancora da calcolarsi le lunghezze degli assi di quei pezzi dei timpani i quali uniscono i punti di concorso. Considerando di tali lunghezze quella appartenente al quadrilatero qualunque FMIL (*Fig* 95) rappresentata in $\overline{LM}$ ed indicandola colla lettera m, si ha

$$m = \sqrt{\overline{EG}^2 + \overline{PM}^2}$$

Questa formola poi, per essere

$$\overline{EG} = 2^m$$
$$\overline{PM} = \overline{EL} - \overline{GM},$$

si riduce a

$$m = \sqrt{4 + (\overline{EL} - \overline{GM})^2} \qquad (2);$$

e, siccome $\overline{EL}$ e $\overline{GM}$ sono ordinate note dei punti di concorso (Num. 33), si possono con questa formola determinare le lunghezze (*Fig* 86) $\overline{1''3''}$, $\overline{3''5''}$, $\overline{5''7''}$, $\overline{7''9''}$, $\overline{9''11''}$, $\overline{11''13''}$, $\overline{13''15''}$ La lunghezza $\overline{0''1''}$ non si può determinare colla stessa formola, giacchè la distanza orizzontale fra i due punti 0'' ed 1'' è soltanto di 1 metro. Considerando il triangolo 00'1'' rappresentato in STU nella fig 96, immaginando per V la orizzontale $\overline{VR}$ ed indicando ancora con m la distanza $\overline{VT}$, si ha

$$m = \sqrt{\overline{VR}^2 + \overline{RT}^2}$$

Siccome poi

$$\overline{VR} = 1^m$$
$$\overline{RT} = \overline{SV} - \overline{XT},$$

la formola determinatrice di m può essere scritta

$$m = \sqrt{1 + (\overline{SV} - \overline{XT})^2} \qquad (3),$$

nella quale $\overline{SV}$ ed $\overline{XT}$ sono le ordinate note dei punti 0'' ed 1'' (*Fig* 86).

Applicando le formole (2) e (3) per trovare la lunghezza degli assi dei pezzi dei timpani che uniscono i punti 0'', 1'', 3'', 5'', 7'', 9'', 11'' 13'' e 15'', si ottengono i seguenti risultati

Lunghezze m
$\overline{0''1''} = 1^m,027$
$\overline{1''3''} = 2,047$
$\overline{3''5''} = 2,038$
$\overline{5''7''} = 2,031$
$\overline{7''9''} = 2,024$
$\overline{9''11''} = 2,018$
$\overline{11''13''} = 2,013$
$\overline{13''15''} = 2,009.$

38. **Come si può verificare l'esattezza di tutti i calcoli stati indicati nei numeri 32, 33, 34, 35, 36 e 37 per la completa determinazione dei timpani.** — Tutti i calcoli stati instituiti per la

determinazione delle coordinate dei punti in cui concorrono i pezzi dei timpani, quelli per trovare gli angoli che gli assi di questi pezzi fanno colla verticale e quelli per trovare le lunghezze degli assi dei pezzi stessi, dipendono successivamente gli uni dagli altri, e quindi un errore fatto nelle prime determinazioni può avere grande influenza nelle determinazioni successive. Segue da ciò che è sommamente importante di procacciarsi dei mezzi per riconoscere se i risultati ottenuti sono accettabili e tali da potersi impiegare in altre ricerche.

Dalla figura 95 e dal triangolo LFM, chiamando

ϕ l'angolo FLM,

evidentemente risulta

$$\operatorname{sen}\phi = \frac{\overline{FM}}{\overline{LM}} \operatorname{sen} LFM$$

$$KML - ELM \quad ELF + FLM \quad IFL + FLM,$$

ossia, per essere

$$\overline{FM} = d, \qquad \overline{LM} = m,$$
$$IFL = \beta, \qquad KML = \varepsilon,$$
$$LFM = \alpha + \beta,$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sen}\phi = \dfrac{d}{m} \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \varepsilon \quad \beta + \phi \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Calcolati adunque gli angoli ϕ col trarre partito dei valori noti di d, di m, di α e di β mediante la prima di queste equazioni, si possono nuovamente dedurre i valori degli angoli ε colla seconda. Se questi valori saranno eguali a quelli ottenuti coi calcoli indicati nel numero 36, si possono ritenere siccome accettabili tutte le determinazioni relative ai pezzi dei timpani, i cui assi appartengono ai lati dei triangoli posti sopra la linea poligonale 0″ 1″ 3″ 5″ 7″ 9″ 11″ 13″ 15″.

Dalla stessa figura 95 e dal triangolo MLI, chiamando

ψ l'angolo ILM,

si ottengono le equazioni

$$\operatorname{sen}\psi = \frac{\overline{IM}}{\overline{LM}} \operatorname{sen} LIM,$$

$$KML = ELM = 180° - HLM = 180° - HLI - ILM,$$

le quali, per essere

$$\overline{IM} = d', \qquad \overline{LM} = m,$$
$$HLI = \gamma, \qquad KML = \varepsilon,$$
$$LIM = \gamma + \delta$$

diventano

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\psi &= \frac{d'}{m}\operatorname{sen}(\gamma+\delta) \\ \varepsilon &= 180^\circ - \gamma - \psi \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Conoscendosi d', m, γ e δ, la prima di queste formole serve alla deduzione degli angoli ψ; e, mediante la seconda, è dopo possibile calcolare di nuovo i valori degli angoli ε. Se questi valori si trovano in accordo con quelli stati ottenuti nel numero 36, si può conchiudere che sono accettabili tutte le determinazioni relative ai pezzi dei timpani, i cui assi appartengono ai lati dei triangoli posti sotto la linea poligonale $0''\ 1''\ 3''\ 5''\ 7''\ 9''\ 11''\ 13''\ 15''$

Le formole (1) e (2) furono applicate per la deduzione degli angoli ε, e, tanto le prime, quanto le seconde, effettivamente hanno condotto a risultamenti in accordo con quelli ottenuti col metodo di calcolo indicato nel numero 36.

Un altro metodo, che serve a confermare l'esattezza di tutti i risultati riferiti nei numeri 32, 33, 34, 35, 36 e 37, consiste nel calcolare tutti gli angoli coi vertici nei punti 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16, nel determinare tutti gli angoli attorno ai punti $0''$, $1''$, $3''$, $5''$, $7''$, $9''$, $11''$, $13''$, $15''$, nel verificare se la somma di tutti quelli posti sotto la retta hx e coi vertici in ciascuno dei primi punti è di 180°; e nel verificare se la somma di tutti quelli situati attorno a ciascuno dei secondi punti è di 360°.

Si possono anche determinare gli angoli di tutti i triangoli rettilinei costituiti dagli assi dei pezzi dei timpani, e la somma degli angoli di ciascuno di questi triangoli deve fare 180°

39 **Dimensioni dei pezzi dei timpani concorrenti nei punti 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16.** — Considerando le diverse parti, in cui la longarina di una centina intermedia è divisa dai punti di attacco dei pezzi dei timpani, come appartenenti al sistema dei timpani stessi, abbiamo che nel punto d attacco 0 (*Fig* 86) concorrono il pezzo verticale $0\text{-}0''$, il pezzo inclinato $0\text{-}1''$ ed il pezzo orizzontale 0-2; che nei punti d attacco 2, 4, 6, 8, 10, 12 e 14 concorrono due pezzi orizzontali e due inclinati; che nel punto d'attacco

16 concorrono il pezzo orizzontale 16-14, il pezzo inclinato 16-15″ ed il pezzo orizzontale 16-17. Il pezzo verticale 0-0′ ha sezione retta a T come quella rappresentata nella figura 97; i pezzi inclinati hanno sezione retta a doppio U, come risulta dalla figura 98; ed i pezzi orizzontali hanno pure sezione retta a T del genere di quella rappresentata nella figura 99.

Considerando i punti d'attacco o nodi (*Fig* 86) 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16 siccome punti d applicazione delle forze rappresentate dai pesi su essi gravitanti e dalle resistenze longitudinali opposte dai pezzi in essi concorrenti, abbiamo che nel nodo 0 concorrono tre forze incognite, le quali sono le resistenze opposte dai tre pezzi 0-0″, 0-1″ e 0-2″, che in ciascuno dei nodi 2, 4, 6, 8, 10, 12 e 14 concorrono pure tre forze incognite quando si supponga cognita la resistenza longitudinale opposta dal pezzo orizzontale situato a sinistra; e che nel nodo 16 concorrono solo due forze incognite quando si supponga conosciuta quella del pezzo orizzontale 16-14. Segue da ciò che, trattandosi per ciascun nodo di forze contenute in uno stesso piano, fra le quali la statica dei corpi ripidi non può somministrare che due equazioni esprimenti che devono essere nulle le somme algebriche delle forze secondo due direzioni perpendicolari, il problema di determinare le resistenze provocate nei pezzi dei timpani concorrenti nei nodi 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 e 14 riesce indeterminato, per determinarlo è imperiosa necessità di tener conto dell'elasticità dei pezzi, ed ecco le equazioni necessarie per le determinazioni costituenti lo scopo di questo numero.

Per un nodo qualunque A (*Fig.* 100), in cui concorrono i due pezzi orizzontali AB ed AE, ed i due pezzi inclinati AC ed AD, chiamando

T, T_1, T_2 e T_3 le resistenze longitudinali rispettivamente opposte dai pezzi AB, AC, AD ed AE,

P il peso ad esso applicato,

α e β i due angoli DAV e CAV,

L_1, L_2 ed L_3 le lunghezze dei pezzi AC, AD ed AE,

Ω_1, Ω_2 ed Ω_3 le superficie delle loro sezioni rette,

si hanno le relazioni

$$\left.\begin{array}{l} T_1 \operatorname{sen}\beta - T_2 \operatorname{sen}\alpha \quad T_3 = -T \\ T_1 \cos\beta + T_2 \cos\alpha = -P \\ \dfrac{L_1}{\Omega_1} T_1 \cos\alpha - \dfrac{L_2}{\Omega_2} T_2 \cos\beta + \dfrac{L_3}{\Omega_3} T_3 \operatorname{sen}(\alpha+\beta) \quad 0 \end{array}\right\} \quad (1),$$

le quali servono a determinare le tre resistenze T_1, T_2 e T_3 quando siano note tutte le altre quantità α, β, T, P, L_1 L_2, L_3, Ω_1, Ω_2 ed Ω_3 (*e*). I valori positivi di T_1, T_2 e T_3 rappresentano resistenze alla tensione ed i valori negativi resistenze alla pressione.

(*e*) La deduzione delle formole (1 può essere fatta come segue: essendo A (*Fig.* 101) un nodo qualunque, concorrano in esso i tre pezzi AC, AD ed AE, e di più sia esso sollecitato dalla forza orizzontale T e della forza verticale P Si chiamino

T', T'' e T''' le resistenze longitudinali opposte dai tre pezzi AC, AD ed AE, ossia le forze con cui questi pezzi operano sul nodo A nei sensi AC, AD ed AE,

α', α'' ed α''' gli angoli che gli assi di questi pezzi fanno coll'orizzontale AO,

L', L'' ed L''' le loro lunghezze,

Ω', Ω'' ed Ω''' le superficie delle loro sezioni rette,

l', l'' ed l''' le loro variazioni di lunghezza sotto l'azione delle forze T e P,

E', E'' ed E''' i loro coefficienti di elasticità.

La statica dei corpi rigidi ci dice che devono essere nulle le somme algebriche delle componenti di tutte le forze applicate al punto A secondo due direzioni perpendicolari, per esempio, secondo la orizzontale AO e secondo la verticale AV; cosicchè si hanno le due equazioni

$$\left.\begin{aligned} T + T' \cos\alpha' + T'' \cos\alpha'' + T''' \cos\alpha''' = 0 \\ V + T' \operatorname{sen}\alpha' + T'' \operatorname{sen}\alpha'' + T''' \operatorname{sen}\alpha''' = 0 \end{aligned}\right\} \quad (I).$$

Ma, a motivo delle variazioni di lunghezza che di necessità si verificheranno nei pezzi AC, AD ed AE sotto l'azione delle due forze T e P, il punto A subirà con leggiero spostamento passando in A', e, abbassate dal punto A' le perpendicolari Ac, Ad ed Ae su AC, AD ed AE, si può ritenere: che $\overline{Ac}$ sia la variazione di lunghezza l' avvenuta nel pezzo AC; che $\overline{Ad}$ sia la variazione di lunghezza l''' avvenuta nel pezzo AD; e che $\overline{Ae}$ sia la variazione di lunghezza l''' avvenuta nel pezzo AE. Se adunque chiamiamo

δ la distanza $\overline{AA'}$ e

φ l'angolo A'AO,

per essere

$$\begin{aligned} \cos A'AC &= \cos(\varphi - \alpha') \\ \cos A'AD &= \cos(\alpha'' - \varphi) = \cos(\varphi - \alpha'') \\ \cos A'AE &= \cos(\alpha''' - \varphi) = \cos(\varphi - \alpha'''), \end{aligned}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} l' &= \delta \cos(\varphi - \alpha') \\ l'' &= \delta \cos(\varphi - \alpha'') \\ l''' &= \delta \cos(\varphi - \alpha'''). \end{aligned}$$

Le formole (1), in quanto non possono essere applicate senza la preventiva conoscenza delle superficie Ω_1, Ω_2 ed Ω_3, non servono alla determinazione diretta di una delle dimensioni della sezione retta dei pezzi dei timpani, ma solo tornano acconce per trovare le resistenze

Dividendo la prima di queste equazioni successivamente per la seconda e per la terza, troviamo

$$\frac{l'}{l''} = \frac{\cos(\varphi \quad \alpha')}{\cos(\varphi - \alpha'')},$$

$$\frac{l'}{l'''} = \frac{\cos(\varphi \quad \alpha')}{\cos(\varphi - \alpha''')}.$$

Sviluppando i coseni che si trovano nei secondi membri e dividendo dopo per $\cos\varphi$ i numeratori ed i denominatori degli stessi secondi membri, otteniamo

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{l' \cos\alpha' \quad l' \cos\alpha''}{l' \operatorname{sen}\alpha'' \quad l'' \operatorname{sen}\alpha'},$$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{l''' \cos\alpha' \quad l' \cos\alpha'''}{l' \operatorname{sen}\alpha''' \quad l''' \operatorname{sen}\alpha'}.$$

Eguagliando poi i due valori di tang φ, facendo andar via i denominatori dall'equazione risultante, raccogliendo i termini moltiplicati per l', l'' ed l''', ed osservando che

$$\operatorname{sen}\alpha''' \cos\alpha'' - \operatorname{sen}\alpha'' \cos\alpha''' = \operatorname{sen}(\alpha''' - \alpha''),$$
$$\operatorname{sen}\alpha' \cos\alpha''' \quad \operatorname{sen}\alpha''' \cos\alpha' = \operatorname{sen}(\alpha' - \alpha'''),$$
$$\operatorname{sen}\alpha'' \cos\alpha' \quad \operatorname{sen}\alpha' \cos\alpha'' = \operatorname{sen}(\alpha'' - \alpha'),$$

giungiamo all'equazione

$$l' \operatorname{sen}(\alpha''' \quad \alpha') + l'' \operatorname{sen}\alpha' \quad \alpha''') + l''' \operatorname{sen}(\alpha'' \quad \alpha') = 0 \qquad \text{(II)}.$$

Ricordando ora che nei solidi elastici, sollecitati da forze dirette secondo i loro assi, le variazioni di lunghezza sono direttamente proporzionali alle resistenze provocate nei solidi stessi ed alle loro lunghezze primitive, ed in ragione inversa della loro sezione retta, abbiamo

$$l' = \frac{T' L'}{E' \Omega'},$$

$$l'' = \frac{T'' L''}{E'' \Omega''},$$

$$l''' = \frac{T''' L'''}{E''' \Omega'''};$$

e quindi l'equazione (II) diventa

$$\left.\begin{aligned} &\frac{L'}{E'\Omega'} T' \operatorname{sen}(\alpha''' - \alpha'') + \frac{L''}{E''\Omega''} T'' \operatorname{sen}(\alpha' \quad \alpha''') + \\ &\frac{L'''}{E'''\Omega'''} T''' \operatorname{sen}(\alpha'' - \alpha') = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III)}.$$

Essendo note le quantità T, V, α', α'', α''', L', L'', L''', Ω', Ω'', Ω''' ed

longitudinali che in essi si trovano provocate. Ottenute queste resistenze riesce facile instituire le equazioni di stabilità; e dai coefficienti a cui esse condurranno si potrà prendere norma per decidere se sono o no accettabili le dimensioni prestabilite, o se si devono modificare.

Le equazioni di stabilità pei pezzi A C ed A D sono rispettivamente

$$n_1 R_1 - \frac{T_1}{\Omega_1} \quad (2),$$

$$n_2 R_2 = \frac{T_2}{\Omega_2} \quad (3),$$

in cui n_1 ed n_2 sono i coefficienti di stabilità, R_1 ed R_2 i coefficienti di rottura. I coefficienti R_1 ed R_2 saranno di chilogrammi 30000000 nei casi in cui T_1 e T_2 rappresentano tensioni; saranno invece

$$R_1 = \frac{30000000}{m_1},$$

$$R_2 = \frac{30000000}{m_2},$$

i coefficienti di elasticità E' E'' ed E''', solamente le tre incognite T', e T'' T''' saranno contenute nelle tre equazioni (I) e (III), e quindi queste incognite si possono dire determinate.

Venendo al caso concreto dei pezzi dei timpani concorrenti nei nodi posti sulla orizzontale hx (*Fig.* 86), in cui il pezzo AC (*Fig.* 100) fa l'angolo $CAV = \beta$ colla verticale A V ed il pezzo A D l'angolo $DAV = \alpha$ colla stessa verticale, in cui il pezzo A E è orizzontale ed in cui tutti i pezzi concorrenti nel nodo A sono formati dello stesso materiale, ossia di ferro, abbiamo

$$\alpha' = 90° - \beta,$$
$$\alpha'' = 90° + \alpha,$$
$$\alpha''' = 180°,$$
$$E' = E'' = E''',$$

e, sostituendo questi valori di α', α'', α''', E', E'' ed E''' nelle equazioni (1) e (2) col trasportare nei secondi membri le forze T e V, e col cangiare rispettivamente T', T'' e T''' in T_1, T_2 e T_3, L', L'' ed L''' in L_1, L_2 ed L_3, Ω', Ω'' ed Ω''' in Ω_1, Ω_2 ed Ω_3, otteniamo

$$T_1 \operatorname{sen} \beta \quad T_2 \operatorname{sen} \alpha \quad T_3 = -T,$$
$$T_1 \cos \beta + T_2 \cos \alpha = -P,$$
$$\frac{L_1}{\Omega_1} T_1 \cos \alpha - \frac{L_2}{\Omega_2} T_2 \cos \beta + \frac{L_3}{\Omega_3} T_3 \operatorname{sen} (\alpha + \beta) = 0,$$

le quali sono appunto le relazioni (1 da cui si è detto doversi dedurre le resistenze longitudinali dei pezzi dei timpani concorrenti nei nodi posti sull'orizzontale hx (*Fig* 86)

nei casi in cui T_1 e T_2 rappresentano pressioni. I coefficienti m_1 ed m_2 sono i così detti coefficienti di riduzione, i cui valori si possono desumere dalla tavola stata riportata nel numero 35 di quel volume dell'*Arte di fabbricare* intitolato *Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni*, e che servono a tener conto della minor resistenza dei pezzi compressi molto lunghi, e quindi soggetti ad inflettersi leggiermente, in confronto di quelli in cui non può questo fatto avverarsi.

Il pezzo AE, oltre di trovarsi sotto l'azione di una forza diretta secondo il suo asse, è anche sollecitato da una forza perpendicolare ossia da un peso applicato nel suo punto di mezzo M, e quindi nel determinare il grado di stabilità di questo pezzo bisogna anche tener conto della resistenza alla flessione provocata dal detto peso. Segue da ciò che pel pezzo AE si hanno due equazioni di stabilità, una relativa alla resistenza longitudinale e l altra relativa alla resistenza trasversale, e che queste equazioni sono

$$\left.\begin{array}{ll} n_3 R_3 & \dfrac{T_3}{\Omega_3} + \dfrac{v\mu_m}{I_x} \\ n'''_3 R'''_3 & \dfrac{N_m}{\Omega_3} \end{array}\right\} \qquad (4).$$

Le lettere n_3 ed n'''_3 rappresentano rispettivamente i coefficienti di stabilità per rapporto alla resistenza longitudinale ed alla resistenza trasversale, R_3 è il coefficiente di rottura relativo alla resistenza longitudinale da assumersi eguale a chilogrammi 30000000; ed R'''_3 il coefficiente di rottura relativo alla resistenza trasversale da prendersi eguale a chilogrammi 24000000. Supponendo poi che la sezione retta del pezzo AE sia quella rappresentata nella figura 99, che G sia il centro di superficie di questa sezione e che XX′ sia la orizzontale passante per questo centro, si ha che la lunghezza v è $\overline{GH}$, e che I_x è i momento d'inerzia della sezione retta del pezzo per rapporto a XX′. Chiamando poi y la distanza $\overline{FG}$, si ha (*f*)

(*f*) Per ottenere la formola (5) si incomincia a fare i momenti, per rapporto alla retta XX′, delle due parti di sezione retta rappresentata nella figura 99, le quali sono una sopra e l'altra sotto la retta XX′. Il primo di questi momenti è

$$e'y\,\frac{1}{2}y + e''y.\frac{1}{2}y + (e \quad e' - e'')f'\left(y - \frac{f'}{2}\right),$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{ef'^2 + e'(f^2 - f'^2) + e''f'(f' + 2f')}{ef' + e'(f - f') + e''f''} \quad (5)$$

$$v = f \quad y \quad (6),$$

$$I_x \quad \frac{1}{3}\left[ey^3 - (e - e' - e'')(y - f')^3 + e'(f \quad y)^3 + e''(f' + f'' \quad y)^3\right] (7).$$

Le lettere N_m e μ_m rappresentano rispettivamente lo sforzo di taglio massimo ed il momento inflettente massimo pel pezzo AE (*Fig* 100), e, operando in favore della stabilità col considerare questo pezzo siccome collocato su due appoggi, se indicati con R_m il peso applicato nel suo mezzo M, si ha

$$N_m = \frac{1}{2}R_m \quad (8),$$

$$\mu_m = \frac{1}{4}R_m L_3 \quad (9).$$

Stabilite tutte le formole che possono occorrere per verificare se trovansi in buone condizioni di stabilità i pezzi dei timpani concorrenti nei nodi posti sulla orizzontale *hx* (*Fig* 86), possiamo passare alla loro applicazione considerando successivamente i pezzi colle loro estremità nei punti 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16.

ed il secondo vale

$$e'(f - y) \quad \frac{1}{2}(f - y) + (f' + f' \quad y)e'' \quad \frac{1}{2}(f' + f' - y).$$

Eguagliando fra di loro questi momenti, onde esprimere che la retta XX' passa pel centro di superficie G, si ottiene un'equazione contenente l'incognita y. Ricavando quest'incognita dopo avere raccolto i termini moltiplicati per e, e' ed e'' della parte tutta cognita e della parte formante fattore, si ottiene precisamente la formola (5), atta a determinare y, ossia la posizione del centro di superficie della sezione considerata.

La formola (6) è per se stessa evidente. La lunghezza v deve essere l'ordinata massima, per rapporto alla retta XX', del perimetro della sezione; e, siccome per essere la maggior parte della superficie della sezione concentrata verso l'alto, deve essere $\overline{FG}$ minore di $\overline{GH}$, risulta che quest'ultima lunghezza costituisce il valore di v, il quale è per conseguenza eguale alla differenza $f - y$.

Il momento d'inerzia I_x si deduce sommando il momento d'inerzia della parte di sezione posta sopra col momento d'inerzia dalla parte di sezione posta sotto la retta XX', ed osservando che il momento d'inerzia di un rettangolo rispetto ad un suo lato vale $\frac{1}{3}$ di questo stesso lato moltiplicato per il cubo del lato perpendicolare.

Pezzi concorrenti nel nodo 0. — Nel nodo 0 (*Fig* 86) concorrono il pezzo verticale 0-0″, il pezzo inclinato 0-1″ ed il pezzo orizzontale 0-2.

Il pezzo verticale 0-0″ (*Fig.* 97) ha sezione retta definita dalle dimensioni

$$a \quad 0^m,148, \qquad \frac{1}{2}a' = 0^m,065, \qquad \frac{1}{2}a'' = 0^m,005,$$

$$b \quad 0,200, \qquad b' \quad 0^m,195, \qquad b'' = 0,130.$$

Risulta

$$\Omega_1 \quad 0^{mq},00295,$$

e si ha

$$L_1 = 2^m,887,$$
$$\beta = 0^o.$$

Il pezzo inclinato 0-1″ ha per dimensioni della sua sezione retta

$$c \quad 0^m,108, \qquad \frac{1}{2}c' \quad 0^m,044, \qquad \frac{1}{2}c'' = 0^m,006,$$

$$d = 0,112, \qquad d' = 0,100;$$

la superficie di questa sezione è

$$\Omega_2 = 0^{mq},0024,$$

e si ha

$$L_2 = 2^m,833,$$
$$\alpha = 20^o\,39'\,49''.$$

Le dimensioni della sezione retta del pezzo orizzontale 0-2 sono

$$e \quad 0^m,208, \qquad e' = 0^m,008, \qquad \frac{1}{2}e'' = 0^m,008,$$

$$f = 0,340, \qquad f' = 0,008, \qquad f'' \quad 0,092;$$

la superficie di questa sezione retta è

$$\Omega_3 = 0^{mq},005792,$$

e si ha

$$L_3 = 2^m$$

Supponendo che il nodo 0 (*Fig* 86) sia perfettamente libero alla sua sinistra, ossia dalla parte del piedritto, si ha

$$T = 0, \qquad P = 4390^{cg},5,$$

e l'applicazione delle equazioni (1) conduce ai seguenti valori di T_1, T_2 e T_3 rappresentanti rispettivamente le resistenze opposte dai tre pezzi 0-0″, 0-1″ e 0-2

$$T_1 \quad -2579^{cg},$$
$$T_2 \quad 1935,$$
$$T_3 = \quad 683.$$

I valori negativi di T_1 e di T_2 indicano che, tanto nel pezzo verticale 0-0'', quanto nel pezzo inclinato 0-1'', è provocata la resistenza alla pressione. Viceversa il valore positivo di T_3 accenna come nel pezzo orizzontale 0-2, e per le forze operanti sul nodo 0, è provocata la resistenza alla trazione.

Siamo ora in grado di determinare i coefficienti di stabilità pei tre pezzi concorrenti nel nodo 0. Pel pezzo 0-0'' si ha

$$m_1 = 1{,}7,$$
$$R_1 = \frac{30000000}{1{,}7},$$

e l'equazione di stabilità (2) conduce a trovare

$$n_1 = 0{,}050.$$

Pel pezzo 0-1'', essendo

$$m_2 = 2{,}2,$$
$$R_2 = \frac{30000000}{2{,}2},$$

l'equazione di stabilità (3) dà

$$n_2 = 0{,}059.$$

Pel pezzo 0-2, le formole (5), (6) e (7) dànno

$$y = 0^{m},095,$$
$$v = 0,\ 245,$$
$$I_x = 0{,}000058273483;$$

essendo poi

$$R_m = 2927^{cg},$$

ricavasi dalle formole (8) e (9)

$$N_m = 1463^{cg},5$$
$$\mu_m = 1463^{cg\ m},5;$$

e le due equazioni di stabilità (4) conducono ad ottenere

$$n_3 = 0{,}205,$$
$$n^{iv}{}_3 = 0{,}011.$$

Osservasi che le dimensioni c', c'', d e d' della sezione retta del pezzo inclinato si conservano costantemente le stesse per tutti gli altri pezzi inclinati che ancora si avranno da considerare in questo numero; e che i valori di R_m, N_m e μ_m, per essere equidistanti i nodi, non cangiano da un pezzo orizzontale all'altro.

Pezzi concorrenti nel nodo 2. — Hanno capo nel nodo 2, il pezzo orizzontale 2-0, i pezzi inclinati 2-1″ e 2-3″, il pezzo orizzontale 2-4.

La resistenza alla trazione opposta dal pezzo 2-0 è il valore di T_3 stato ottenuto col considerare i pezzi concorrenti nel nodo 0, ed il peso P è quello corrispondente ad uno dei nodi intermedi posti su hx (Num. 29). Segue da ciò che si ha

$$T = 683^{cg}, \qquad P = 5854^{cg}.$$

Pei pezzi inclinati 2-1″ e 2-3″, si ha

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0^{mq},0024;$$
$$L_1 = 2^{m},833,$$
$$L_2 = 2,\ 430;$$
$$\beta = 20^{o}\ 39'\ 49'',$$
$$\alpha = 24\ 18\ 9.$$

Il pezzo orizzontale 2-4 ha sezione retta a T come quella rappresentata nella figura 99 e colle dimensioni

$$e = 0^{m},208, \qquad e' = 0^{m},008, \qquad \frac{1}{2}e'' = 0^{m},008,$$
$$f = 0,\ 320, \qquad f' = 0,\ 008, \qquad f'' = 0,\ 092.$$

La superficie Ω_3 della sezione retta e la lunghezza del pezzo sono date da

$$\Omega_3 = 0^{mq},005632,$$
$$L_3 = 2^{m}.$$

Applicando coi riferiti valori di T, P, Ω_1, Ω_2, Ω_3, L_1, L_2, L_3, β ed α le equazioni (1), si giunge ad ottenere

$$T_1 = -3085^{cg},$$
$$T_2 = -3255,$$
$$T_3 = \ \ 934;$$

cosicchè trovasi provocata, a motivo delle forze operanti sul nodo 2, la resistenza alla pressione nei pezzi inclinati 2-1″ e 2-3″, la resistenza alla trazione nel pezzo orizzontale 2-4.

Possiamo ora accingerci a determinare i coefficienti di stabilità pei pezzi concorrenti nel nodo 2. Pel pezzo 2-1″ si ha

$$m_1 = 2,2$$
$$R_1 = \frac{30000000}{2,2},$$

e quindi si ricava dall'equazione di stabilità (2)

$$n_1 = 0,094.$$

Pel pezzo 2-3'' risulta

$$m_2 = 1{,}9,$$
$$R_2 = \frac{30000000}{1{,}9},$$

e l'equazione di stabilità (3) conduce a

$$n_2 = 0{,}086.$$

Le equazioni (5), (6) e (7), applicate alla sezione retta del pezzo 2-4, danno

$$y = 0^m{,}088,$$
$$v = 0,\ 232,$$
$$I_x = 0{,}000049154403;$$

e le equazioni (4) portano ad ottenere

$$n_3 = 0{,}236,$$
$$n'^{v}_{3} = 0{,}011.$$

Pezzi concorrenti nel nodo 4. — Sono attaccati al nodo 4 il pezzo orizzontale 4-2, i pezzi inclinati 4-3'' e 4-5'', il pezzo orizzontale 4-6.

La resistenza alla trazione opposta dal pezzo 4-2 è rappresentata dal valore di T_3 stato ottenuto considerando i pezzi concorrenti nel nodo 2, e quindi si ha

$$T = 934^{cg}, \qquad P = 5854^{cg}.$$

I pezzi inclinati 4-3'' e 4-5''' non differiscono, in quanto a dimensioni delle sezioni rette dei due ferri ad U che li compongono, da quelli concorrenti nei nodi 1 e 2; la distanza dei ferri ad U però è di metri 0,100 e non di metri 0,080 e quindi si ha

$$c = 0^m{,}110.$$

I valori di Ω_1, Ω_2, L_1, L_2, β ed α sono

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0^{mq}{,}0024;$$
$$L_1 = 2^m{,}430,$$
$$L_3 = 2,\ 078;$$
$$\beta = 24°\ 18'\ 9''$$
$$\alpha = 28\ 45\ 36.$$

Il pezzo orizzontale 4-6 ha sezione retta a T colla forma di quella rappresentata nella figura 99 e colle dimensioni

$$e = 0^m{,}210, \qquad e' = 0^m{,}010, \qquad \frac{1}{2}e'' = 0^m{,}008,$$
$$f = 0,\ 300, \qquad f' = 0^m{,}008, \qquad f'' = 0,\ 092.$$

L'area Ω_3 della sezione retta e la lunghezza del pezzo sono date da

$$\Omega_3 = 0^{mq},006072,$$
$$L_3 = 2^m.$$

L'applicazione delle equazioni (1) cogli indicati valori di T, P, Ω_1, Ω_2, Ω_3, L_1, L_2, L_3, β ed α, conduce poi ad ottenere

$$T_1 = -3278^{Cr},$$
$$T_2 = -3269,$$
$$T_3 = 1156.$$

I segni delle forze T_1, T_2 e T_3 mettono in evidenza come, anche pei pezzi concorrenti nel nodo 4 e per le forze ad esso applicate, è provocata la resistenza alla pressione nei due pezzi inclinati e la resistenza alla trazione nel pezzo orizzontale 4-6.

Siamo ora in grado di verificare in quali condizioni di stabilità si trovano i pezzi concorrenti nel nodo 4. Pel pezzo 4-3″ si ha

$$m_1 = 1,9,$$
$$R_1 = \frac{30000000}{1,9};$$

e dall'equazione (2) si deduce

$$n_1 = 0,087.$$

Pel pezzo 4-5″, essendo

$$m_2 = 1,66,$$
$$R_2 = \frac{30000000}{1,66},$$

risulta dall'equazione (3)

$$n_2 = 0,075.$$

Pel pezzo 4-6, le equazioni (5), (6) e (7) danno

$$y = 0^m,095,$$
$$v = 0,205,$$
$$I_x = 0,000048679149;$$

e dalle equazioni (4) si ottengono i coefficienti

$$n_3 = 0,212,$$
$$n^{IV}{}_3 = 0,010.$$

Pezzi concorrenti nel nodo 6. — Concorrono nel nodo 6, il pezzo orizzontale 6-4, i pezzi inclinati 6-5″ e 6-7″, ed il pezzo orizzontale 6-8.

Considerando i pezzi concorrenti nel nodo 4, si è trovato che la resistenza alla trazione opposta dal pezzo 6-4 è di chilogrammi 1156, cosicchè le forze note applicate al nodo 6 sono

$$T = 1156^{cs}, \qquad P = 5854^{cs}.$$

Le superficie delle sezioni rette, le lunghezze e gli angoli colla verticale dei pezzi 6-5″ e 6-7″ sono

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0^{mq},0024$$
$$L_1 = 2^{m},078,$$
$$L_2 = 1,\ 780,$$
$$\beta = 28^{o}\ 45'\ 36'',$$
$$\alpha = 34\ 11\ 57.$$

Il pezzo orizzontale 6-8 mantiene la sezione retta a T (*Fig.* 99); le dimensioni di questa sezione retta sono

$$e = 0^{m},210, \qquad e' = 0^{m},010, \qquad \frac{1}{2}e'' = 0^{m},008,$$
$$f = 0,\ 280, \qquad f' = 0,\ 008, \qquad f'' = 0,\ 092;$$

la superficie della sezione medesima è

$$\Omega_3 = 0^{mq},005872;$$

e la lunghezza L_3 è sempre 2 metri.

L'applicazione delle equazioni (1) conduce a trovare che, agli indicati valori di T, P, Ω_1, Ω_2, Ω_3, L_1, L_2 ed L_3, corrispondono le resistenze

$$T_1 = -3354^{cs},$$
$$T_2 = -3523,$$
$$T_3 = \ \ 1528,$$

le quali, pei segni da cui sono affette, accennano che nei due pezzi inclinati è sempre provocata la resistenza alla pressione e che nel pezzo orizzontale 6-8 è cimentata dalle forze applicate al nodo 6 la resistenza alla trazione.

Per verificare in quali condizioni di stabilità si trovano i tre pezzi cui corrispondono i valori di T_1, T_2 e T_3 or ora ottenuti, bisogna dedurre i relativi coefficienti di stabilità. Pel pezzo 6-5'' si ha

$$m_1 = 1{,}66,$$

$$R_1 = \frac{30000000}{1{,}66},$$

e dall'equazione di stabilità (2) si ricava

$$n_1 = 0{,}077.$$

Pel pezzo 6-7'' si ha invece

$$m_2 = 1{,}48$$

$$R_2 = \frac{30000000}{1{,}48},$$

e quindi dall'equazione di stabilità (3) si deduce

$$n_2 = 0{,}072.$$

Pel pezzo 6-8 le equazioni (5), (6) e (7) conducono ad ottenere

$$y = 0^{m},081,$$
$$v = 0,\ 199,$$
$$I_x = 0{,}000039646405,$$

ed applicando le equazioni di stabilità (4) si arriva ai coefficienti

$$n_3 = 0{,}255,$$
$$n''_3 = 0{,}010.$$

Pezzi concorrenti nel nodo 8. — Si riuniscono nel nodo 8 il pezzo orizzontale 8-6, i due pezzi inclinati 8-7'' ed 8-9'', il pezzo orizzontale 8-10.

La resistenza alla trazione che oppone il pezzo 8-6 è data dal valore di T_3, al quale ha condotto la considerazione dei pezzi concorrenti nel nodo 6, e quindi si ha

$$T = 1528^{Cg}, \qquad P = 5854^{Cg}.$$

Pei pezzi inclinati 8-7'' e 8-9'' si ha

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0^{mq},0024,$$
$$L_1 = 1^m,780,$$
$$L_2 = 1,\ 533,$$
$$\beta = 34°\ 11'\ 57'',$$
$$\alpha = 40\ 43\ 37.$$

Il pezzo orizzontale 8-10 ammette per dimensioni della sua sezione retta (*Fig.* 99)

$$e = 0^m,210, \qquad e' = 0^m,010, \qquad \frac{1}{2}e'' = 0,010,$$
$$f = 0,\ 260, \qquad f' = 0,\ 010, \qquad f'' = 0,090.$$

Risulta

$$\Omega_3 = 0^{mq},0064,$$

e si ha

$$L_3 = 2^m.$$

Applicando le equazioni (1) col porre in esse gli ultimi citati valori di T, P, Ω_1, Ω_2, Ω_3, L_1, L_2, L_3, β ed α, si ottengono i seguenti valori di T_1, T_2 e T_3

$$T_1 = -3981^{cg},$$
$$T_2 = -3379,$$
$$T_3 = \ 1507.$$

Risulta poi dai segni di queste forze che sono compressi i due pezzi inclinati 8-7'' ed 8-9''; che è disteso, sotto l'azione delle forze applicate al nodo 8, il pezzo orizzontale 8-10.

Se poi si viene alle equazioni di stabilità, risulta: pel pezzo 8-7''

$$m_1 = 1,48,$$
$$R_1 = \frac{30000000}{1,48},$$
$$n_1 = 0,082;$$

pel pezzo 8-9''

$$m_2 = 1,33,$$
$$R_2 = \frac{30000000}{1,33},$$
$$n_2 = 0,062.$$

L'applicazione delle formole (5), (6) e (7) al pezzo 8-10 dà

$$y = 0^{m},070,$$
$$v = 0,\ 190,$$
$$I_x = 0,\ 00003409;$$

e dalle due equazioni di stabilità (4) si deduce

$$n_3 = 0,280$$
$$n^{IV}{}_3 = 0,010.$$

Pezzi concorrenti nel nodo 10. — Questi sono il pezzo orizzontale 10-8, i due pezzi inclinati 10-9″ e 10-11″ ed il pezzo orizzontale 10-12.

La resistenza alla trazione opposta dal pezzo 10-8 è il valore di T_3 stato ottenuto determinando le resistenze provocate nei pezzi concorrenti nel nodo 8, e si ha

$$T = 1507^{Cg}, \qquad P = 5854^{Cg}.$$

Pei pezzi inclinati 10-9″ e 10-11″ si ha

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0^{mq},0024,$$
$$L_1 = 1^{m},533,$$
$$L_2 = 1,\ 338,$$
$$\beta = 40^{o}\ 43'\ 37'',$$
$$\alpha = 48\ 17\ 56;$$

ed il pezzo orizzontale 10-12 ammette le dimensioni stesse del pezzo precedente 8-10, cosicchè

$$\Omega_3 = 0^{mq},0064$$
$$L_3 = 2^{m}.$$

Ponendo nelle formole (1) gli indicati valori di T, P, Ω_1, Ω_2, Ω_3, L_1, L_2, L_3, β ed α, e deducendo i valori di T_1, T_2 e T_3 si giunge a

$$T_1 = -4532^{Cg},$$
$$T_2 = -3638,$$
$$T_3 = \ \ 1263.$$

I segni poi da cui sono affette queste tre forze accennano che sono compressi i due pezzi inclinati; e che sotto l'azione delle forze applicate al nodo 10 è disteso il pezzo orizzontale 10-12.

Passando alle equazioni di stabilità, si ottiene: pel pezzo 10-9''

$$m_1 = 1{,}33,$$

$$R_1 = \frac{30000000}{1{,}33},$$

$$n_2 = 0{,}084;$$

pel pezzo 10-11''

$$m_2 = 1{,}21,$$

$$R_2 = \frac{30000000}{1{,}21},$$

$$n_2 = 0{,}061.$$

I valori di y, v ed I_x sono quelli stessi stati assegnati al pezzo 8-10, e le due equazioni di stabilità (4) dànno

$$n_3 = 0{,}278,$$
$$n'''_3 = 0{,}010.$$

Pezzi concorrenti nel nodo 12. — Il pezzo orizzontale 12-10, i due pezzi inclinati 12-11'' e 12-13'', ed il pezzo orizzontale 12-14, sono quelli che concorrono nel nodo 12.

Il pezzo 12-10 opera sul nodo che si considera a guisa di una forza traente da 12 verso 10, ed il valore di questa forza è quello di T_3 stato ottenuto col considerare i pezzi concorrenti nel nodo 10, cosicchè le forze date sono

$$T = 1263^{cg}, \qquad P = 5854^{cg}.$$

I pezzi inclinati 12-11'' e 12-13'' non differiscono, nella sezione retta dei pezzi ad U che li compongono, da quelli concorrenti nei nodi precedenti; ma la distanza di questi pezzi si è portata a metri 0,012, cosicchè si ha

$$c = 0^m{,}112.$$

Gli elementi poi da impiegarsi nel calcolo delle forze T_1, T_2 e T_3 sono: pei pezzi 12-11'' e 12-13''

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0^{mq}{,}0024,$$
$$L_1 = 1^m{,}338,$$
$$L_2 = 1,\ 197,$$
$$\beta = 48^\circ\ 17'\ 56'',$$
$$\alpha = 56\ \ 38\ \ 6;$$

pel pezzo orizzontale 12-14 (*Fig.* 99)

$$e = 0^{m},212, \qquad e' = 0^{m},012, \qquad \frac{1}{2}e'' = 0,010,$$

$$f = 0,\ 250, \qquad f' = 0,\ 010, \qquad f'' = 0,090,$$

$$\Omega_3 = 0^{mq},0068,$$

$$L_3 = 2^{m}.$$

Ponendo nelle equazioni (1) gli ultimi valori di T, P, Ω_1, Ω_2, Ω_3, L_1, L_2, L_3, β ed α, si ottengono i seguenti valori delle forze T_1, T_2 e T_3

$$T_1 = -4929^{Cg},$$

$$T_2 = -4683,$$

$$T_3 = \ \ 1495.$$

I segni dei valori di T_1 e T_2 indicano che i pezzi inclinati sono compressi e che il pezzo orizzontale 12-14 (*Fig.* 86) è disteso.

In quanto a stabilità, risulta: pel pezzo 12-11''

$$m_1 = 1,21,$$

$$R_1 = \frac{30000000}{1,21},$$

$$n_1 = 0,082;$$

pel pezzo 12-13''

$$m_2 = 1,17,$$

$$R_2 = \frac{30000000}{1,17},$$

$$n_2 = 0,076.$$

Pel pezzo 12-14 si deduce dalle formole (5), (6) e (7)

$$y = 0^{m},071,$$

$$v = 0,\ 179,$$

$$I_x = 0,000034695987;$$

e le equazioni (4) dànno

$$n_3 = 0,259,$$

$$n^{IV}{}_3 = 0,009.$$

Pezzi concorrenti nel nodo 14. — I pezzi riunentisi nel nodo 14

sono: il pezzo orizzontale 14-12, i pezzi inclinati 14-13'' e 14-15'', ed il pezzo orizzontale 14-16.

Il pezzo orizzontale 14-12 agisce sul nodo 14 a guisa di una forza traente il cui valore è quello del T_3 ultimo trovato, e quindi le forze date sono

$$T = 1495^{cg}, \qquad P = 5854^{cg}.$$

Per calcolare le forze T_1, T_2 e T_3 è necessario conoscere anche i valori di Ω_1, Ω_2, Ω_3, L_1, L_2, L_3, β ed α pei pezzi concorrenti nel nodo 14, e si ha: pei due pezzi inclinati 14-13'' e 14-15''

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0^{mq},0024.$$
$$L_1 = 1^{m},197.$$
$$L_2 = 1.\ 102.$$
$$\beta = 56°\ 38'\ 6'',$$
$$\alpha = 65\ \ 7\ 56;$$

pel pezzo orizzontale 14-16, le cui dimensioni sono quelle stesse del pezzo precedente 12-14,

$$\Omega_3 = 0^{mq},0068,$$
$$L_3 = 2^{m}.$$

Applicando, cogli indicati valori di T, P, Ω_1, Ω_2, Ω_3, L_1, L_2, L_3, β ed α le equazioni (1), si ottengono per le forze T_1, T_2 e T_3 i valori

$$T_1 = -6724^{cg},$$
$$T_2 = -5127,$$
$$T_3 = \ \ 531.$$

I segni poi, dai quali sono preceduti i valori di queste forze, accennano: che sono compressi i due pezzi inclinati concorrenti nel nodo 14; che è disteso il pezzo orizzontale 14-16.

Passando alla verificazione della stabilità, risulta: che pel pezzo 14-13''

$$m_1 = 1,17,$$
$$R_1 = \frac{30000000}{1,17},$$
$$n_1 = 0,109;$$

che pel pezzo 14-15''

$$m_2 = 1,15,$$
$$R_2 = \frac{30000000}{1,15},$$
$$n_2 = 0,082.$$

I valori di y, v ed I_x pel pezzo orizzontale 14-16 sono quelli stessi già dedotti pel pezzo 12-14, e le equazioni di stabilità (4) dànno

$$n_3 = 0{,}254,$$
$$n^{IV}{}_3 = 0{,}009.$$

Pezzi concorrenti nel nodo 16. — Concorrono nel nodo 16 il pezzo orizzontale 16-14, il pezzo inclinato 16-15″ ed il pezzo orizzontale 16-17.

Essendo nota la tensione sopportata dal pezzo 16-14, la quale non è altro che il valore di T_3 ultimo trovato, e conoscendosi il peso applicato nel nodo 16, che è di chilogrammi 4390,5, le incognite da determinarsi sono soltanto due, gli sforzi cioè diretti secondo 16-15″ e 16-17. Le equazioni adunque, somministrate dalla statica dei corpi rigidi per l'equilibrio delle forze concorrenti nel detto nodo, sono sufficienti per la completa determinazione delle forze incognite, le quali sono i valori di T_1 e di T_3 dati dalle prime due delle equazioni (1) quando in esse si facccia $T_2 = 0$.

I dati del problema sono

$$T = 531^{Cg}, \qquad P = 4390^{Cg},5,$$
$$\beta = 65° 7' 56'';$$

e le due prime delle equazioni (1), quando in esse siasi fatto $T_2 = 0$, dànno

$$T_1 = -10441,$$
$$T_3 = -8942.$$

Essendo i valori di T_1 e di T_3 preceduti dal segno meno, si deve conchiudere che è provocata la resistenza alla pressione in ambedue i pezzi 16-15″ e 16-17.

Passando alla verificazione della stabilità, pel pezzo 16-15″ si ha

$$m_1 = 1{,}15,$$
$$R_1 = \frac{30000000}{1{,}15},$$

e risulta

$$n_1 = 0{,}167.$$

Pel pezzo orizzontale 16-17, nel quale è provocata la sola resistenza alla pressione, si deduce

$$n_3 = 0{,}044.$$

Raccogliendo i trovati valori dei coefficienti di stabilità, per meglio farci un'idea del modo con cui variano da un pezzo all'altro, si hanno i risultati contenuti nella seguente tavola:

Indicazione dei nodi	*Coefficienti di stabilità*			
	n_1	n_2	n_3	n''_3
0	0,050	0,059	0,205	0,011
2	0,094	0,086	0,236	0,011
4	0,087	0,075	0,212	0,010
6	0,077	0,072	0,255	0,010
8	0,082	0,062	0,280	0,010
10	0,084	0,061	0,278	0,010
12	0,082	0,076	0,259	0,009
14	0,109	0,082	0,254	0,009
16	0,167		0,044	

I valori dei coefficienti n_1, essendo tutti minori della frazione $\frac{1}{5} = 0{,}2$, accennano come nei pezzi 0-0″, 2-1″, 4-3″, 6-5″, 8-7″, 10-9″, 12-11″, 14-13″ e 16-15″ vi sono le più ampie garanzie di sicurezza. I valori dei coefficienti n_2 indicano come maggior sicurezza ancora vi sia in quasi tutti i pezzi inclinati 0-1″, 2-3″, 4-5″, 6-7″, 8-9″, 10-11″, 12-13″ e 14-15″. Per contro i valori di n_3, eccezion fatta dell'ultimo, essendo tutti maggiori della frazione 0,2, manifestano come nei pezzi orizzontali 0-2, 2-4, 4-6, 6-8, 8-10, 10-12, 12-14, 14-16 non vi siano quelle ampie misure di sicurezza, per rapporto alla resistenza longitudinale, alle quali si attengono generalmente i più prudenti costruttori. Osservando però: che le pressioni verticali, supposte applicate ai nodi, si possono ritenere siccome maggiore di quelli reali a motivo del quasi incastramento che esiste all'estremità delle travi trasversali; che, anche nel caso in cui si verifichino queste pressioni, esse hanno solamente luogo sui nodi dei timpani insistenti alla seconda ed alla quinta centina; che le diverse parti della longarina sulla quale si trovano gli attacchi superiori dei pezzi dei timpani non sono staccate l'una dall'altra, come si è ammesso implicitamente nei calcoli, ma solidarie per modo che ha luogo una specie di incastramento nei nodi; che i pezzi inclinati due a due dànno un appoggio esteso alla detta longarina; che tutte queste circostanze sono in favore della stabilità, giacchè pongono le longarine in condizioni assai migliori di quelle da noi supposte; e che nessuno dei coefficienti di stabi-

lità n_3 raggiunge la frazione $\frac{1}{3} = 0{,}333$, la quale si suole risguardare come il limite superiore dei coefficienti di stabilità adottabili nelle parti maggiormente cimentate dalle costruzioni metalliche, si possono senz'altro ammettere le dimensioni prestabilite pei diversi pezzi orizzontali dei timpani. La circostanza dell'incastramento delle diverse parti della longarina in corrispondenza dei nodi è quella che esercita maggior influenza sul far diminuire i valori dei coefficienti di stabilità n_3; nell'ipotesi di un vero incastramento il valore di μ_m si riduce alla metà di quello da noi assunto e, siccome nel secondo membro della prima delle equazioni (4) il termine $\frac{v\,\mu_m}{I_x}$ è quello che ha maggior influenza, tutti i valori di n_3 risultano minori della frazione $\frac{1}{5} = 0{,}2$. — I valori di n''_3 mettono in evidenza le favorevolissime condizioni di stabilità in cui si trovano i pezzi orizzontali dei timpani per rapporto alla resistenza trasversale.

I chiodi, per la formazione delle longarine e per l'unione dei pezzi dei timpani alle medesime, hanno tutti il fusto col diametro di metri 0,02.

40. **Varianti al progetto dei pezzi orizzontali dei timpani, ossia al progetto delle longarine sulle quali si trovano gli attacchi dei pezzi inclinati.** — Qualora, in seguito ai valori dei coefficienti di stabilità n_3 stati trovati nel precedente numero, e senza aver riguardo alle considerazioni state fatte sulle cause che influiscono a far sì che le longarine alle quali sono attaccate le estremità superiori dei pezzi dei timpani si trovino in condizioni di stabilità assai migliori di quelle indicate dai detti coefficienti, si creda conveniente di variare il progetto delle longarine medesime, si può operare questa variazione in diversi modi, dei quali accenniamo i principali.

I pesi o pressioni verticali applicate nei punti di mezzo 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 e 15 delle diverse parti della longarina sono le forze che maggiormente influiscono sui valori dei coefficienti di stabilità n_3 a motivo della flessione che essi provocano nei pezzi 0-2, 2-4, 4-6, 6-8, 8-10, 10-12, 12-14 e 14-16. Basta dunque cercare d'opporsi a questa flessione per far diminuire i coefficienti di stabilità, e si può raggiungere l'intento ponendo nei timpani i pezzi verticali 1-1', 3-3', 5-5', 7-7', 9-9', 11-11', 13-13' e 15-15'. L'indicato mezzo avrebbe forse l'inconveniente di rendere meno eleganti i timpani; la sua efficacia però è incontestabile; adottandolo e rifacendo i calcoli del numero precedente nell'ipotesi dell'esistenza di questi pezzi verticali, si

verrebbe a conoscere come esso porterebbe a diminuire le dimensioni delle sezioni rette di tutti i pezzi inclinati concorrenti nei nodi 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16.

Un altro sistema di variante al progetto della longarina consisterebbe nell'adottare per le diverse sue parti la sezione a doppio T simmetrico, come quella risultante dalla figura 102. I ferri d'angolo inferiori I si potrebbero però applicare solamente alle centine intermedie di ogni arcata, giacchè per le centine di fronte le pressioni operanti sui nodi e sulla longarina sono minori (Num. 29) di quelle state considerate nel calcolo del numero precedente, e giacchè la sezione retta della trave longitudinale L non si riduce unicamente alla sezione a T rappresentata nella figura 99, ma sibbene al complesso di questa e dell'altra (*Fig* 103) che corrisponde alla trave longitudinale cui sono unite le mensole e le travi traversali (*Fig.* 60, 61, 63, e 67). Colla sezione a doppio T (*Fig.* 102) si ottiene di portare il centro di superficie G e quindi la orizzontale XX' a metà altezza della sezione retta della trave, di far diminuire la distanza $\overline{GH} = v$ che nel caso della sezione retta rappresentata nella figura 99 è assai grande, di far crescere il momento d'inerzia I_x e quindi di ottenere per due motivi la diminuzione del coefficiente di stabilità n_3 che entra nella prima delle formole (4) del numero precedente. Non occorre dire che non vi ha alcun bisogno di porre i ferri d'angolo I per l'intiera lunghezza della longarina; basta che essi si estendano per una certa lunghezza a dritta e a sinistra dei mezzi degli intervalli esistenti fra i nodi 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16, o tutto al più fino contro i pezzi inclinati dei timpani, giacchè, supposte appoggiate le diverse parti della longarina, è soltanto nel mezzo o presso il mezzo che occorre far diminuire il valore di n_3 colla diminuzione di v e coll'aumento di I_x.

Per dimostrare poi come il secondo sistema di variante sia applicabile al caso concreto, abbiamo determinati i coefficienti di stabilità pei diversi pezzi componenti la longarina, nell'ipotesi che siansi ad essi applicati i ferri d'angolo inferiori I con dimensioni identiche a quelle dei ferri d'angolo superiori S.

Nel fare questa determinazione poi abbiamo ammesso che gli sforzi longitudinali sopportati dai detti pezzi siano i valori di T_3 stati trovati nel precedente numero, ciò che non è rigorosamente vero, giacchè la terza delle equazioni (1) del numero precedente mette in evidenza che, variando la sezione retta Ω_3, devono variare i valori di T_1, T_2 e T_3. Atteso però la poca influenza della forza T_3 sul va-

lore del coefficiente di stabilità n_3, siamo sicuri che quest'ipotesi non può condurci lungi dal vero, e che si può avere piena confidenza nei valori dei coefficienti di stabilità che stiamo per indicare.

Assumendo costantemente

$$R_3 = 30000000^{cg},$$
$$\mu_m = 1463^{cg.m},5,$$

calcolando le distanze v, le superficie Ω_3 ed i momenti d'inerzia I_x mediante le formole

$$v = \frac{1}{2}h,$$
$$\Omega_3 = gh - g'h' - g''h'',$$
$$I_x = \frac{1}{12}(gh^3 - g'h'^3 - g''h''^3);$$

e ponendo i valori noti di R_3, T_3, Ω_3, v, μ_m ed I_x nella prima delle equazioni (4) del numero precedente, abbiamo: che pel pezzo 0-2

$$g = 0^m,208, \quad \frac{1}{2}g' = 0^m,092, \quad \frac{1}{2}g'' = 0^m,008$$
$$h = 0,\ 340, \quad h' = 0,\ 324, \quad h'' = 0,\ 140,$$
$$v = 0^m,17,$$
$$\Omega_3 = 0^{mq},008864,$$
$$I_x = 0,000123161899,$$
$$T_3 = 683^{cg},$$

cosicchè risulta

$$n_3 = 0,070,$$

che pel pezzo 2-4

$$g = 0^m,208, \quad \frac{1}{2}g' = 0^m,092, \quad \frac{1}{2}g'' = 0^m,008,$$
$$h = 0,\ 320, \quad h' = 0,\ 304, \quad h'' = 0,\ 120,$$
$$v = 0^m,16,$$
$$\Omega_3 = 0^{mq},008704,$$
$$I_x = 0,000114156885,$$
$$T_3 = 934^{cg},$$

per cui si deduce

$$n_3 = 0{,}072,$$

che pel pezzo 4-6

$$g \quad 0^m{,}210, \qquad \frac{1}{2}g' = 0^m{,}092, \qquad \frac{1}{2}g'' = 0^m{,}008,$$

$$h = 0,\ 300, \qquad h' - 0,\ 284, \qquad h'' \quad 0,\ 100,$$

$$v = 0^m{,}15,$$
$$\Omega_3 \quad 0^{mq}{,}009164,$$
$$I_x = 0{,}000119936672,$$
$$T_3 = 1156^{cg},$$

e quindi

$$n_3 = 0{,}065,$$

che pel pezzo 6-8

$$g \quad 0^m{,}210, \qquad \frac{1}{2}g' \quad 0^m{,}092, \qquad \frac{1}{2}g'' - 0^m{,}008,$$

$$h = 0,\ 280, \qquad h' \quad 0,\ 264, \qquad h'' \quad 0,\ 080,$$

$$v = 0^m{,}14,$$
$$\Omega_3 = 0^{mq}{,}008944,$$
$$I_x = 0{,}000101347925,$$
$$T_3 = 1528^{cg},$$

per cui si trova

$$n_3 = 0{,}073;$$

che pel pezzo 8-10 essendo

$$g = 0^m{,}210, \qquad \frac{1}{2}g' \quad 0^m{,}090, \qquad \frac{1}{2}g'' \quad 0^m{,}010,$$

$$h = 0,\ 260, \qquad h' \quad 0,\ 240, \qquad h'' = 0,\ 060,$$

$$v = 0^m{,}13,$$
$$\Omega_3 = 0^{mq}{,}0102,$$
$$I_x = 0{,}000100193333.$$
$$T_3 = 1507^{cg},$$

risulta

$$n_3 \quad 0{,}068;$$

che pel pezzo 10-12, il quale ha le stesse dimensioni del pezzo 8 10 mentre $T_3 = 1263^{cg}$, si trova

$$n_3 = 0{,}067,$$

che pel pezzo 12-14, al quale corrispondono

$$g = 0^m{,}212, \qquad \frac{1}{2}g' = 0^m{,}090, \qquad \frac{1}{2}g'' \quad 0^m{,}010,$$

$$h \quad 0,\ 250, \qquad h' - 0,\ 230, \qquad h'' - 0,\ 050,$$

$$v = 0^m{,}125,$$
$$\Omega_3 = 0^{mq}{,}0106,$$
$$I_x = 0{,}000093328333,$$
$$T_3 = 1495^{cg},$$

si ha

$$n_3 = 0{,}070;$$

che pel pezzo 14-16, avente le stesse dimensioni del pezzo 12-14 e per cui $T_3 = 531^{cg}$, si trova

$$n_3 = 0{,}067.$$

I trovati valori dei coefficienti di stabilità n_3 sono di molto minori della frazione $0{,}2 = \frac{1}{5}$, e quindi mettono in evidenza come l'aggiunta dei due ferri d'angolo I sia sufficiente per dare le più ampie garanzie di sicurezza. I valori di questi coefficienti di stabilità, essendo di molto maggiori della frazione 0,2, accennano ad una stabilità forse eccessiva, per cui, tenendo conto delle osservazioni state fatte alla fine del numero 39 relativamente alla specie di incastramento che ha luogo nei diversi nodi che congiungono le longarine ai pezzi discendenti dei timpani, non dubitiamo punto di costruirle con sezione a T nel modo espresso dalla figura 99.

41 **Determinazione delle dimensioni dei pezzi dei timpani che riuniscono fra loro i punti di concorso e di quelli che dai punti di concorso vanno alla centina** — Nel punto 0″ (*Fig* 86) concorrono i due pezzi verticali 0″0 e 0″0′ ed il pezzo inclinato 0″1″, in ciascuno dei punti 1″, 3″, 5″, 7″, 9″, 11″ e 13″ si riuniscono sei pezzi, due che salgono alla longarina, due che discendono alla centina e due che vanno ai punti di concorso adiacenti a quello

che si considera, nel punto 15'' concorrono soltanto cinque pezzi, giacchè non esiste alcun punto di concorso al di là di 15''

I punti o nodi 0'', 1'', 3'', 5'', 7'', 9'', 11'', 13'' e 15'' si possono considerare siccome i punti d'applicazione di forze rappresentate dalle resistenze longitudinali opposte dai pezzi in essi concorrenti, e quindi, essendo note le resistenze opposte dai pezzi superiori alla linea dei punti suddetti, abbiamo: che nel nodo 0'' concorrono due forze incognite le quali sono le resistenze longitudinali opposte dai pezzi 0''0' ed 0''1''; che in ciascuno dei nodi 1'', 3'', 5'', 7'' 9'', 11'' e 13'' concorrono tre forze incognite, due rappresentanti le resistenze longitudinali opposte dai pezzi discendenti alla centina ed una la resistenza longitudinale opposta dal pezzo di destra della linea dei punti di concorso, e che finalmente nel nodo 15'' concorrono solamente due forze incognite rappresentanti le resistenze longitudinali opposte dai due pezzi inclinati 15''-14' e 15''-16' Siccome le forze operanti su ciascuno dei nodi indicati sono poste in uno stesso piano, bisogna tener conto dell'elasticità dei pezzi onde determinare le forze incognite operanti sui nodi 1'' 3'', 5'', 7'', 9'', 11'' e 13''; e questo si fa colle equazioni che immediatamente passiamo ad indicare.

Per un nodo qualunque A (*Fig* 104), in cui concorrono i sei pezzi AL, AM, AN, AC, AD ed AE, chiamando

P_1, P_2 e P_3 le resistenze longitudinali opposte dai primi tre pezzi,

T_1, T_2 e T_3 le resistenze longitudinali opposte dagli altri tre,

α e β i due angoli MAU ed LAU degli assi dei pezzi AM ed AL colla verticale UAV,

γ e δ i due angoli DAV ed CAV degli assi dei pezzi AD ed AC colla stessa verticale,

ε ed ε' i due angoli NAV ed EAU,

L_1, L_2 ed L_3 le lunghezze dei tre pezzi AC, AD ed AE,

Ω_1, Ω_2 ed Ω_3 le superficie delle loro sezioni rette, si hanno le relazioni

$$\left.\begin{aligned} T_1 \operatorname{sen}\delta - T_2 \operatorname{sen}\gamma - T_3 \operatorname{sen}\varepsilon' &= P_1 \operatorname{sen}\beta - P_2 \operatorname{sen}\alpha - P_3 \operatorname{sen}\varepsilon \\ T_1 \cos\delta + T_2 \cos\gamma - T_3 \cos\varepsilon' &= P_1 \cos\beta + P_2 \cos\alpha - P_3 \cos\varepsilon \\ \frac{L_1}{\Omega_1} T_1 \operatorname{sen}(\varepsilon' + \gamma) - \frac{L_2}{\Omega_2} T_2 \operatorname{sen}(\varepsilon' - \delta) + \frac{L_3}{\Omega_3} T_3 \operatorname{sen}(\gamma + \delta) &= 0 \end{aligned}\right\} (1),$$

le quali si prestano alla determinazione delle tre resistenze T_1, T_2

e T_3 quando siano note le quantità α, β, γ, δ, ε, ε', P_1, P_2, P_3, L_1, L_2, L_3, Ω_1, Ω_2, Ω_3 (*g*). In quanto poi ai valori di T_1, T_2 e T_3 devesi ritenere che essi rappresentano resistenze alla tensione quando sono positivi, e resistenze alla pressione quando risultano negativi.

Per applicare le equazioni (1) è necessario conoscere le superficie Ω_1, Ω_2 ed Ω_3, e quindi queste equazioni non possono servire per la determinazione diretta di una delle sezioni rette dei pezzi dei timpani, ma soltanto per calcolare le resistenze longitudinali in essi provocate. Avute queste resistenze, riesce facile instituire le equazioni di stabilità e dedurre i coefficienti per decidere se sono o se non sono accettabili le dimensioni prestabilite e se si devono modificare.

(*g*) La deduzione delle equazioni (1) può essere fatta col metodo già stato seguìto nella nota (*e*) per trovare le equazioni (1) del numero 39. Immaginando per A (*Fig.* 104) la orizzontale A O, indicando con T', T'' e T''' le resistenze longitudinali opposte dai tre pezzi A C, A D ed A E, conservando alle lettere α', α'', α''', L', L'', L''', Ω', Ω'', Ω''', E', E'' ed E''' i significati che loro furono attribuiti nella citata nota (*e*), e dicendo λ', λ'' e λ''' gli angoli che le direzioni A L, A M ed A N delle forze P_1, P_2 e P_3 fanno colla A O, contati questi angoli nel senso della freccia *f*, abbiamo: che i valori di T e di V, i quali si trovano nelle equazioni (1) della nota (*e*), risultano

$$T = P_1 \cos \lambda' + P_2 \cos \lambda'' + P_3 \cos \lambda'''$$
$$V = P_1 \operatorname{sen} \lambda' + P_2 \operatorname{sen} \lambda'' + P_3 \operatorname{sen} \lambda''';$$

che quindi le citate equazioni (I), esprimenti le condizioni d'equilibrio di tutte le forze applicate al punto A, si riducono a

$$P_1 \cos \lambda' + P_2 \cos \lambda'' + P_3 \cos \lambda''' + T' \cos \alpha' + T'' \cos \alpha'' + T''' \cos \alpha''' = 0$$
$$P_1 \operatorname{sen} \lambda' + P_2 \operatorname{sen} \lambda'' + P_3 \operatorname{sen} \lambda''' + T' \operatorname{sen} \alpha' + T'' \operatorname{sen} \alpha'' + T''' \operatorname{sen} \alpha''' = 0;$$

e che non cangia punto l'equazione (III) della nota (*e*) risultante dal tener conto dello spostamento subìto dal punto A, cosicchè si ha ancora

$$\frac{L'}{E'\Omega'} T' \operatorname{sen} (\alpha''' - \alpha'') + \frac{L''}{E''\Omega''} T'' \operatorname{sen} (\alpha' - \alpha''') + \frac{L'''}{E'''\Omega'''} T''' \operatorname{sen} (\alpha'' - \alpha') = 0.$$

Essendo cognite le quantità P_1, P_2, P_3, λ', λ'', λ''', α', α'', α''', L', L'', L''', Ω', Ω'', Ω''' ed i coefficienti di stabilità E', E'' ed E''', soltanto le tre resi-

Le equazioni di stabilità pei pezzi AC, AD ed AE sono rispettivamente

$$\left.\begin{aligned} n_1 R_1 &= \frac{T_1}{\Omega_1} \\ n_2 R_2 &= \frac{T_2}{\Omega_2} \\ n_3 R_3 &= \frac{T_3}{\Omega_3} \end{aligned}\right\} \qquad (2),$$

nelle quali n_1, n_2 ed n_3 sono i coefficienti di stabilità, ed R_1, R_2 ed R_3 i coefficienti di rottura relativi alla resistenza longitudinale. I coefficienti di rottura si assumeranno di chilogrammi 30000000 per metro

stenze T′, T″ e T‴ entrano come incognite nelle ultime tre equazioni, le quali valgono per conseguenza a determinarle.

Passando al caso concreto dei pezzi dei timpani riuuentisi in uno dei punti di concorso (*Fig.* 86) 1″, 3″, 5″, 7″, 9″, 11″ e 13′, in cui i pezzi (*Fig.* 104) AL, AM ed AN fanno rispettivamente colla verticale UAV gli angoli LAU $= \beta$, MAU $= \alpha$ ed NAV $= \varepsilon$, mentre i pezzi AC, AD ed AE fanno rispettivamente colla stessa verticale gli angoli CAV $= \delta$, DAV $= \gamma$ ed EAU $= \varepsilon'$, abbiamo

$$\begin{aligned} \lambda' &= 270^\circ - \beta, \\ \lambda'' &= 270^\circ + \alpha, \\ \lambda''' &= 90^\circ - \varepsilon, \\ \alpha' &= 90^\circ - \delta, \\ \alpha'' &= 90^\circ + \gamma, \\ \alpha''' &= 270^\circ - \varepsilon' \end{aligned}$$

Sostituendo poi questi valori di λ', λ'', λ''', α', α'' ed α''' nelle ultime tre equazioni, osservando che $E' = E'' = E'''$, e cangiando rispettivamente T′, T″ e T‴ in T_1, T_2 e T_3, L′, L″ ed L‴ in L_1, L_2 ed L_3, Ω′, Ω″ ed Ω‴ in Ω_1, Ω_2 ed Ω_3, otteniamo

$$\begin{aligned} &T_1 \operatorname{sen} \delta - T_2 \operatorname{sen} \gamma - T_3 \operatorname{sen} \varepsilon' = P_1 \operatorname{sen} \beta - P_2 \operatorname{sen} \alpha - P_3 \operatorname{sen} \varepsilon, \\ &T_1 \cos \delta + T_2 \cos \gamma \quad T_3 \cos \varepsilon' = P_1 \cos \beta + P_2 \cos \alpha \quad P_3 \cos \varepsilon, \\ &\frac{L_1}{\Omega_1} T_1 \operatorname{sen} (\varepsilon' + \gamma) - \frac{L_2}{\Omega_2} T_2 \operatorname{sen} (\varepsilon' - \delta) + \frac{L_3}{\Omega_3} T_3 \operatorname{sen} (\gamma + \delta) = 0; \end{aligned}$$

le quali sono appunto le equazioni (1) già state indicate per la deduzione delle forze T_1, T_2 e T_3.

quadrato, tuttavolta che si riferiranno a pezzi in cui è provocata la resistenza alla trazione. Nei pezzi invece, nei quali è provocata la resistenza alla pressione, i coefficienti di rottura saranno dati dall'ultimo indicato numero diviso per un coefficiente di riduzione maggiore del l'unità, onde tenere in qualche modo conto dell'inflessione che può in essi verificarsi quando il rapporto della lunghezza alla minima dimensione della loro sezione retta eccede un certo limite. L'applicazione delle equazioni (1) metterà in evidenza che sono appunto compressi quei pezzi dei timpani che dai punti di concorso discendono alla centina, e quindi, chiamando rispettivamente m_1 ed m_2 i coefficienti di riduzione per pezzi AC ed AD, si avrà

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{30000000}{m_1} \\ R_2 &= \frac{30000000}{m_2} \end{aligned}\right\} \qquad (3).$$

I valori dei coefficienti m_1 ed m_2 si possono desumere dalla tavola stata riportata nel numero 35 del volume dell *Arte di fabbricare*, intitolato *Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni.*

Le equazioni occorrenti per verificare la stabilità dei pezzi dei timpani che riuniscono fra di loro i punti di concorso e di quelli che da questi punti discendono alla centina, sono le (1), (2) e (3) or ora stabilite, e quindi possiamo passare alla loro applicazione considerando successivamente i pezzi concorrenti nei nodi (*Fig* 86) 0″, 1″, 3″, 5″, 7″, 9″, 11″, 13″ e 15″, ritenendo che le dimensioni delle loro sezioni rette siano quelle dei pezzi concorrenti negli stessi nodi e superiori alla linea poligonale 0′ 1″ 3″ 5″ 7″ 9″ 11″ 13″ 15″

Pezzi concorrenti nel nodo 0″. — Questi pezzi sono in numero di tre, i due pezzi verticali 0″-0 e 0″-0′ ed il pezzo inclinato 0″-1″.

La pressione alla quale trovasi sottoposto il pezzo verticale 0″-0 rappresenta la forza cognita applicata al nodo 0″, e le incognite da determinarsi sono le due resistenze opposte dagli altri due pezzi; cosicchè bastano per questa determinazione le due equazioni somministrate dalla statica dei corpi rigidi per l'equilibrio delle forze attorno al punto 0″, ossia le prime due delle equazioni (1). Queste equazioni, dicendo T_2 e T_3 le resistenze opposte dai pezzi 0″-0′ e 0″-1″ ed essendo ε' l'angolo 0 0″ 1″, si riducono a

$$T_3 \operatorname{sen} \varepsilon' = 0,$$
$$T_2 - T_3 \cos \varepsilon' = P_1,$$

e quindi, giacchè

$$P_1 = -2579^{cg},$$

si ottiene

$$T_3 = 0,$$
$$T_2 = -2579^{cg}.$$

Questi valori di T_2 e di T_3 dicono che nel pezzo verticale 0''-0 è provocata la resistenza alla pressione, mentre nel pezzo inclinato 0''-1'' non trovasi provocata alcuna resistenza.

Assegnando al pezzo verticale 0''-0' la stessa sezione retta del pezzo superiore 0''-0, corrisponde a quello lo stesso coefficiente di stabilità di questo, e si ha quindi $n_2 = 0{,}050$.

Il pezzo inclinato 0''-1'', quantunque indicato dal calcolo siccome non sopportante alcun sforzo, pure non deve essere soppresso. Esso ha l'importante ufficio di ritegno nel punto di mezzo del ferro molto lungo 0-0', e sotto questo punto di vista ha non poca influenza sulla sicurezza dei timpani.

Pezzi concorrenti nel nodo 1''. — Concorrono in questo nodo i sei pezzi 1''-2, 1''-0, 1''-0'', 1''-0', 1''-2' e 1''-3''.

Le resistenze alla pressione opposte dai due primi pezzi costituiscono le forze note applicate al nodo 1'', le forze incognite sono le resistenze opposte degli ultimi tre dagli indicati pezzi, e si hanno come dati dal problema: gli angoli

$$\alpha = \beta = 20^\circ\, 39'\, 49''$$
$$\gamma = 24^\circ\, 24'\, 35'', \qquad \delta = 17^\circ\, 45'\, 10'',$$
$$\varepsilon = 76\ 43\ 16, \qquad \varepsilon' = 77\ 40\ 28;$$

le forze

$$P_1 = -3085^{cg}, \qquad P_2 = -1935^{cg}, \qquad P_3 = 0;$$

le lunghezze

$$L_1 = 3^m{,}280, \qquad L_2 = 2^m{,}420 \qquad L_3 = 2^m{,}047;$$

e le superficie

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0^{mq},0024.$$

Ponendo queste quantità nelle equazioni (1) si ottengono i seguenti valori di T_1, T_2 e T_3

$$T_1 = -2125^{cg},$$
$$T_2 = -2711,$$
$$T_3 = \quad 901.$$

I segni dei valori di T_1, di T_2 e di T_3 indicano come nei pezzi 1''-0' ed 1''-2', aventi i loro estremi sulla centina, sia provocata la resistenza alla pressione, e come nel pezzo 1''-3'' sia provocata la resistenza alla trazione.

La verificazione della stabilità si opera mediante le equazioni (2). Oltre i valori già indicati di R_3, Ω_1, Ω_2, Ω_3, T_1, T_2 e T_3, si ha

$$m_1 = 2,53, \qquad m_2 = 1,89,$$
$$R_1 = \frac{30000000}{2,53}, \qquad R_2 = \frac{30000000}{1,89},$$

ed i coefficienti n_1, n_2 ed n_3 risultano

$$n_1 = 0,075, \qquad n_2 = 0,071, \qquad n_3 = 0,013.$$

Pezzi concorrenti nel nodo 3''. — Si riuniscono in questo nodo i sei pezzi 3''-4, 3''-2, 3''-1'', 3''-2', 3''-4' e 3''-5''.

Le resistenze alla pressione opposte dai due primi pezzi e la resistenza alla trazione opposta dal terzo, sono le forze note applicate al vertice 3''; mentre le forze incognite sono le resistenze opposte dagli altri tre pezzi. Si hanno poi come dati del problema: gli angoli

$$\alpha = \beta = 24° 18' 9'',$$
$$\gamma = 28° 54' 0'', \qquad \delta = 20° 44' 33'',$$
$$\varepsilon = 77\ 40\ 28, \qquad \varepsilon' = 78\ 53\ 48;$$

le forze

$$P_1 = -3278^{cg}, \qquad P_2 = -3255^{cg}, \qquad P_3 = 901^{cg};$$

le lunghezze

$$L_1 = 2^m,823, \qquad L_2 = 2^m,069, \qquad L_3 = 2^m,038;$$

e le superficie

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0^{mq},0024.$$

Mettendo questi dati nelle equazioni (1), si arriva a trovare i seguenti valori delle forze T_1, T_2 e T_3

$$T_1 = -3080^{cg},$$
$$T_2 = -3407,$$
$$T_3 = 1473.$$

I valori negativi di T_1 e di T_2 indicano che nei pezzi 3''-2' e 3''-4' è provocata la resistenza alla pressione, ed il valore positivo di T_3 accenna come nel pezzo 3''-5'' è provocata la resistenza alla trazione.

Venendo alla verificazione della stabilità, oltre i valori noti di R_3, Ω_1, Ω_2, Ω_3, T_1, T_2 e T_3, si ha

$$m_1 = 2,18 \qquad m_2 = 1,68,$$
$$R_1 = \frac{30000000}{2,18}, \qquad R_2 = \frac{30000000}{1,68},$$

ed i coefficienti di stabilità, dati dalle equazioni (2), risultano

$$n_1 = 0,093, \qquad n_2 = 0,080, \qquad n_3 = 0,021.$$

Pezzi concorrenti nel nodo 5''. — I pezzi, i quali concorrono nel nodo 5'', sono i sei 5''-6, 5''4, 5''-3'', 5''-4', 5''-6' e 5''-7''.

Le forze note applicate a questo vertice sono rappresentate dalle pressioni provocate nei due primi e della tensione provocata nel terzo degli indicati pezzi. Le forze incognite sono le resistenze opposte dagli altri tre pezzi. Nel caso concreto poi si ha:

$$\alpha = \beta = 28^\circ\ 45'\ 36'',$$
$$\gamma = 34^\circ\ 23'\ 25'', \qquad \delta = 24^\circ\ 24'\ 17'',$$
$$\varepsilon = 78\ 53\ 48, \qquad \varepsilon' = 80\ 3\ 35;$$

$$P_1 = -3354^{cg}, \quad P_2 = -3269^{cg}, \quad P_3 = 1473^{cg};$$
$$L_1 = 2^m,420, \quad L_2 = 1^m,770, \quad L_3 = 2^m,031;$$
$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0^{mq},0024.$$

Ponendo questi elementi nelle equazioni (1) e ricavando le incognite T_1, T_2 e T_3, si ottiene

$$T_1 = -3511^{cg},$$
$$T_2 = -3124,$$
$$T_3 = 1825.$$

Essendo negativi i valori di T_1 e T_2 e positivo il valore di T_3, bisogna conchiudere che nei due pezzi 5''-4' e 5''-6' è provocata la resistenza alla pressione e che nel pezzo 5''-7'' è cimentata la resistenza alla tensione.

In quanto al grado di stabilità dei tre pezzi 5''-4', 5''-6' e 5''-7'', riesce facile valutarlo mediante le equazioni (2). Oltre i valori noti di R_3, Ω_1, Ω_2, Ω_3, T_1, T_2 e T_3, si ha

$$m_1 = 1,87, \qquad m_2 = 1,51,$$
$$R_1 = \frac{30000000}{1,87}, \qquad R_2 = \frac{30000000}{1,51},$$

ed i coefficienti di stabilità che si ricavano dalle citate equazioni risultano

$$n_1 = 0,091, \quad n_2 = 0,066, \quad n_3 = 0,025.$$

Pezzi concorrenti nel nodo 7'' — Questi pezzi sono 7''-8, 7''-6, 7''-5'', 7''-6', 7''-8' e 7''-9''.

Le pressioni provocate nei primi due e la tensione provocata nel terzo dei pezzi indicati rappresentano le forze note applicate al nodo che consideriamo; e le resistenze provocate negli altri tre pezzi sono le forze incognite. Per determinare poi queste incognite si hanno: gli angoli

$$\alpha = \beta = 34^\circ\ 11'\ 57'',$$
$$\gamma = 40^\circ\ 58'\ 20'', \qquad \delta = 28^\circ\ 54'\ 0'',$$
$$\varepsilon = 80\ \ 3\ 35, \qquad \varepsilon' = 81\ 11\ 21;$$

le forze

$$P_1 = -3981^{cg}, \qquad P_2 = -3523^{cg}, \qquad P_3 = 1825^{cg};$$

le lunghezze

$$L_1 = 2^{m},070, \qquad L_2 = 1^{m},525, \qquad L_3 = 2^{m},024;$$

e le superficie

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0^{mq},0024.$$

Sostituendo nelle equazioni (1) si deducono i seguenti valori di T_1, T_2 e T_3

$$T_1 = -4375^{cg},$$
$$T_2 = -3152,$$
$$T_3 = 2034.$$

Essendo negativi i valori di T_1 e T_2 e positivo il valore di T_3, si deve conchiudere: che è provocata la resistenza alla pressione nei due pezzi 7''-6' e 7''-8'; che è provocata la resistenza alla trazione nel pezzo 7''-9''.

Per la verificazione della stabilità, oltre i valori noti di R_3, Ω_1, Ω_2, Ω_3, T_1, T_2 e T_3, si ha

$$m_1 = 1,65, \qquad m_2 = 1,32,$$
$$R_1 = \frac{30000000}{1,65}, \qquad R_2 = \frac{30000000}{1,32},$$

ed i coefficienti di stabilità dati dalle equazioni (2) risultano

$$n_1 = 0,100, \qquad n_2 = 0,058, \qquad n_3 = 0,028.$$

Pezzi concorrenti vel nodo 9''. — Concorrono nel punto 9'' i sei pezzi 9''-10, 9''-8, 9''-7'', 9''-8', 9''-10' e 9''-11''; ed i dati del problema per ricavare le resistenze T_1, T_2 e T_3 provocate negli ultimi tre pezzi sono: gli angoli

$$\alpha = \beta = 40^{\circ}\,43'\,37'',$$
$$\gamma = 48^{\circ}\,36'\,14'', \qquad \delta = 34^{\circ}\,22'\,52'',$$
$$\varepsilon = 81\ 11\ 21, \qquad \varepsilon' = 82\ 17\ 51;$$

le forze

$$P_1 = -4532^{cg}, \qquad P_2 = -3379^{cg}, \qquad P_3 = 2034^{cg};$$

le lunghezze

$$L_1 = 1^m,771, \qquad L_2 = 1^m,333, \qquad L_3 = 2^m,018;$$

e le superficie

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0^{mq},0024.$$

Sostituendo questi dati nelle equazioni (1) e risolvendole per rapporto a T_1, T_2 e T_3, si ottengono i valori

$$\begin{aligned} T_1 &= -5085^{cg}, \\ T_2 &= -2797, \\ T_3 &= \ \ 2013; \end{aligned}$$

cosicchè nei due pezzi 9″-8′ e 9″-10′ è provocata la resistenza alla pressione, mentre nel pezzo 9″-11′ è cimentata la resistenza alla trazione.

Per avere un'idea del grado di stabilità dei tre pezzi in cui sono provocate le resistenze T_1, T_2 e T_3, bisogna ricavare i valori dei coefficienti di stabilità n_1, n_2 ed n_3 dalle equazioni (2). Questi coefficienti, per essere

$$m_1 = 1,48. \qquad m_2 = 1,21,$$

$$R_1 = \frac{30000000}{1,48}, \qquad R_2 = \frac{30000000}{1,21},$$

risultano

$$n_1 = 0,104, \qquad n_2 = 0,047, \qquad n_3 = 0,068.$$

Pezzi concorrenti nel nodo 11″. — I sei pezzi 11″-12, 11″-10, 11″-9″, 11″-10′, 11″-12′ e 11″-13″ sono quelli che si annodano nel punto 11″. Sono note le resistenze provocate nei primi tre dei pezzi suddetti; sono incognite quelle provocate negli altri tre, e si possono queste ricavare dalle equazioni (1), giacchè si hanno: gli angoli

$$\alpha = \beta = 48^\circ\ 17'\ 6'',$$

$$\gamma = 57^\circ\ 0'\ 59'', \qquad \delta = 40^\circ\ 57'\ 35'',$$

$$\varepsilon = 82\ 17\ 51, \qquad \varepsilon' = 83\ 22\ 9;$$

le forze

$$P_1 = -4929^{Cg}, \qquad P_2 = -3638^{Cg}, \qquad P_3 = 2013^{Cg};$$

e lunghezze

$$L_1 = 1^m,525, \qquad L_2 = 1^m,192, \qquad L_3 = 2^m,013;$$

e le superficie

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0^{mq},0024.$$

Sostituendo questi dati nelle citate equazioni (1), si ricavano i seguenti valori delle incognite T_1, T_2 e T_3

$$T_1 = -5639^{Cg},$$
$$T_2 = -2803,$$
$$T_3 = 1619.$$

I valori negativi di T_1 e di T_2 indicano che nei pezzi 11''-10' e 11''-12' è provocata la resistenza alla pressione. Per contro il valore positivo di T_3 accenna come è cimentata la resistenza alla trazione nel pezzo 11''-13''.

Passando a ricavare i valori dei coefficienti di stabilità dalle equazioni (2) ed osservando che

$$m_1 = 1,32, \qquad m_2 = 1,17,$$
$$R_1 = \frac{30000000}{1,32}, \qquad R_2 = \frac{30000000}{1,17},$$

si giunge a trovare

$$n_1 = 0,103, \qquad n_2 = 0,046, \qquad n_3 = 0,023.$$

Pezzi concorrenti nel nodo 13''. — I pezzi che si riuniscono nel nodo 13'' sono 13''-14, 13''-12, 13''-11'', 13''-12', 13''-14' e 13''-15''. Le resistenze provocate nei primi tre di questi pezzi costituiscono le forze note applicate al nodo considerato; le resistenze opposte degli altri tre sono le incognite da determinarsi. Conoscendosi gli angoli

$$\alpha = \beta = 56^\circ\ 38'\ 6'',$$
$$\gamma = 65^\circ\ 33'\ 30'', \qquad \delta = 48^\circ\ 36'\ 14'',$$
$$\varepsilon = 83\ 22\ 9, \qquad \varepsilon' = 84\ 25\ 53,$$

le forze

$$P_1 = -6724^{cg}, \qquad P_2 = -4683^{cg}, \qquad P_3 = 1619^{cg},$$

le lunghezze

$$L_1 = 1^m,333, \qquad L_2 = 1^m,097, \qquad L_3 = 2,009,$$

e le superficie

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0^{mq},0024,$$

dalle equazioni (1) si deducono i seguenti valori delle incognite T_1, T_2 e T_3

$$T_1 = -7223^{cg},$$
$$T_2 = -3755,$$
$$T_3 = 1313.$$

I due pezzi 13''-12' e 13''-14' sono compressi, giacchè è negativo il valore della resistenza longitudinale in essi provocata; e viceversa, il pezzo 13''-15'' è disteso, giacchè è positivo il valore della resistenza longitudinale che gli corrisponde.

Per farsi un concetto del grado di stabilità dei tre pezzi a cui si riferiscono le resistenze T_1, T_2 e T_3 or ora trovate, osservasi che

$$m_1 = 1,20, \qquad m_2 = 1,15;$$

che

$$R_1 = \frac{20000000}{1,20}, \qquad R_2 = \frac{30000000}{1,15};$$

e che le equazioni (2) dànno

$$n_1 = 0,120, \qquad n_2 = 0,060, \qquad n_3 = 0,018.$$

Pezzi concorrenti nel nodo 15''. — In questo nodo concorrono solamente i cinque pezzi 15''-16, 15''-14, 15''-13'', 15''-14' e 15''-16'. Essendo note le resistenze provocate nei primi tre di questi pezzi, restano a determinarsi solo due resistenze incognite, ossia le due T_1 e T_2 corrispondenti ai pezzi 15''-14' e 15''-16'. Segue da ciò che le due prime delle equazioni (1), dopo aver fatto in esse $T_3 = 0$, sono sufficienti per la determinazione di T_1 e T_2. Per essere

$$\alpha = \beta = 65° 7' 56'',$$
$$\gamma = 73° 32' 15'', \qquad \delta = 56° 59'' 47'',$$
$$\varepsilon = 84° 25' 53'',$$
$$P_1 = -10441^{Cg}, \qquad P_2 = -5127^{Cg}, \qquad P_3 = 1313^{Cg},$$

le due prime delle equazioni (1) conducono a trovare

$$T_1 = -10705^{Cg},$$
$$T_2 = -2971.$$

Siccome poi i valori di T_1 e di T_2 sono ambedue negativi, è segno che nei corrispondenti pezzi 15''-14' e 15''-16' è provocata la resistenza alla pressione.

Il grado di stabilità in cui si trovano questi pezzi si deduce ricavando i valori di n_1 e di n_2 dalle equazioni (2); e siccome si ha

$$m_1 = 1{,}17, \qquad m_2 = 1{,}14,$$
$$R_1 = \frac{30000000}{1{,}17}, \qquad R_2 = \frac{30000000}{1{,}14},$$

ricavasi dalle dette equazioni

$$n_1 = 0{,}174, \qquad n_2 = 0{,}047.$$

Raccogliendo i valori dei coefficienti di stabilità si può formare la seguente tabella

Indicazione dei nodi	*Coefficienti di stabilità*		
	n_1	n_2	n_3
0''		0,050	
1''	0,075	0,071	0,013
3''	0,093	0,080	0,021
5''	0,091	0,066	0,025
7''	0,100	0,058	0,028
9''	0,104	0,047	0,028
11''	0,103	0,046	0,023
13''	0,120	0,060	0,018
15''	0,174	0,047	

dalla quale immediatamente si deduce che, per essere i coefficienti n_1 minori della frazione $\frac{1}{5} = 0{,}2$, i pezzi dei timpani 1''-0', 3''-2', 5''-4',

7''-6', 9''-8', 11''-10', 13''-12' e 15''-14', si trovano in buone condizioni di stabilità; che in condizioni migliori si trovano i pezzi 0''-0', 1''-2', 3''-4', 5''-6', 7''-8', 9''-10', 11''-12', 13''-14' e 15''-16', ai quali corrispondono i coefficienti n_2; e che nei pezzi 0''-1'', 1''-3'', 3''-5'', 5''-7'', 7''-9'', 9''-11'', 11''-13'' e 13''-15'', a cui corrispondono i coefficienti n_3, la stabilità è ancora di molto avvantaggiata. I valori dei coefficienti n_2 ed n_3 mettono anche in evidenza come si potrebbero diminuire le dimensioni delle sezioni rette dei ferri a cui si riferiscono; diminuzione che si potrebbe fare riducendo di qualche poco la spessezza dei ferri stessi.

42. **Verificazione dei calcoli stati instituiti nei numeri 39 e 41.** — Le resistenze provocate nei diversi pezzi dei timpani furono dedotte mediante calcoli non difficili, ma assai laboriosi e tali che i loro risultamenti dipendono successivamente gli uni dagli altri. Segue da ciò: che un errore commesso in un'operazione indubitatamente avrebbe influito sui risultati delle operazioni seguenti; e che quindi è sommamente importante di avere un metodo per verificare l'esattezza dei calcoli stati instituiti nei numeri 39 e 41. Ora, se consideriamo il sistema (*Fig.* 111) 0 16 15'' 13'' 11'' 9'' 7'' 5'' 3'' 1'' 0'', deve esso trovarsi in equilibrio sotto l'azione dei pesi operanti sui nodi superiori 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16, delle reazioni dei pezzi 0''-0', 1''-0', 1''-2', 3''-2', 3''-4', 5''-4', 5''-6', 7''-6', 7''-8', 9''-8', 9''-10', 11''-10', 11''-12', 13''-12', 13''-14', 15''-14' e 15''-16', e della reazione orizzontale della parte di longarina posta a sinistra del punto 16. Tutte queste forze si trovano in uno stesso piano, e quindi le due somme algebriche delle loro componenti secondo due assi ortogonali e la somma algebrica dei loro momenti rispetto ad un punto devono essere nulle. Se queste tre condizioni saranno soddisfatte, potremo conchiudere che i calcoli, stati instituiti per la determinazione delle resistenze provocate nei diversi pezzi dei timpani, presentano sufficienti garanzie di esattezza, diversamente converrà rifare i calcoli. Per accertarci poi in modo facile e spedito se le indicate tre condizioni sono soddisfatte, possiamo costruire il poligono delle forze ed un poligono funicolare pel sistema considerato, e verificare se ambedue questi poligoni risultano chiusi (*h*).

(*h*) Supponenao che ad un corpo siano applicate le forze (*Fig.* 105) F_1, F_2, F_3, F_4, ... poste in uno stesso piano, chiamiamo *poligono delle forze* un poligono $A_0\ A_1\ A_2\ A_3\ A_4$.... i cui lati $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$.... sono equipollenti, ossia rispettivamente eguali in grandezza, direzione e

Incominciando colla costruzione del poligono delle forze, a partire dall'origine A (*Fig.* 111), porteremo successivamente le forze verticali **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7**, **8** e **9** equipollenti di quelle applicate ai nodi 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16; costruiremo dopo la forza orizzontale **10** equipollente di quella applicata al punto 16, e quindi successivamente le forze **11**, **12**, **13**, **14**, **15**, **16**, **17**, **18**, **19**, **20**, **21**, **22**, **23**, **24**, **25**, **26** e **27** equipollenti di quelle applicate ai nodi 15″, 13″, 11″, 9″, 7″, 5″, 3″, 1″ e 0″. Nel fare questa costruzione si è adottata la scala di metri 0,004 per ogni 1000 chilogrammi, e siccome le prime nove forze venivano a cadere su una

senso, alle forze F_1, F_2, F_3, F_4, ... Diciamo poi *poligono funicolare* un poligono $B_1\ B_2\ B_3\ B_4$, ... avente i suoi vertici sulle direzioni delle forze date e che, supposto materiale ed articolato, può essere sostituito al corpo a motivo degli sforzi longitudinali, ossia delle tensioni e delle pressioni che si verificano secondo i suoi lati.

Se supponiamo dato in intensità e direzione lo sforzo esercitato dal lato B_1B_0 del poligono funicolare sul vertice B_1, se prendiamo la $O\,A_0$ equipollente del detto sforzo e la A_0A_1 equipollente di F_1, e se uniamo il punto A_1 col punto O, siccome vi dev'essere equilibrio fra le tre forze operanti sul punto B_1, abbiamo in A_1O la direzione che deve avere il lato B_1B_2 del poligono funicolare, l'intensità ed il verso dello sforzo che questo lato esercita sul vertice B_1. Analogamente, costruendo il triangolo $O\,A_1\,A_2$ coi lati $O\,A_1$ ed A_1A_2 rispettivamente equipollenti dello sforzo esercitato dal lato B_2B_1 sul vertice B_2 e della forza F_2, otteniamo in A_2O la direzione da darsi al lato B_2B_3 del poligono funicolare, l'intensità ed il verso dello sforzo che questo stesso lato esercita sul vertice B_2. Continuando collo stesso medoto a costruire il triangolo $O\,A_2A_3$ col lato $O\,A_2$ equipollente allo sforzo esercitato dal lato B_3B_2 sul vertice B_3 e col lato A_2A_3 equipollente di F_3, abbiamo in A_3O la direzione da assegnarsi al lato B_3B_4 del poligono funicolare, l'intensità e il verso dello sforzo esercitato da questo stesso lato sul vertice B_3, e analogamente, costruendo il triangolo $O\,A_3\,A_4$ col lato $O\,A_3$ equipollente dello sforzo esercitato dal lato B_4B_3 sul vertice B_4 e col lato A_3A_4 equipollente di F_4, troviamo in A_4O la direzione che conviene al lato B_4B_5 del poligono funicolare, non che l'intensità ed il verso dello sforzo esercitato da questo lato sul vertice B_4.

Se ora confrontiamo il poligono delle forze col poligono funicolare, risulta che i lati A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ... del poligono delle forze sono equipollenti, ossia eguali in grandezza, direzione e senso alle forze F_1, F_2, F_3, F_4, ... del poligono funicolare; che le rette $O\,A_0$, $O\,A_1$, $O\,A_2$, $O\,A_3$, $O\,A_4$, ... le quali partono da uno stesso punto O per andare ai vertici del poligono delle forze sono rispettivamente parallele ai lati B_0B_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4,

stessa verticale, tanto lunga da non poter essere contenuta nella tavola, si è preso il partito di dividere il poligono delle forze in due parti separate dall'orizzontale $\Omega\Omega'$. Costruendo come si è detto il poligono delle forze, l'estremità dell'ultima forza **27** si confonde sensibilmente coll'origine A e quindi si può ritenere che, nei limiti dell'esattezza attendibile da operazioni grafiche, questo poligono risulta chiuso.

Costrutto il poligono delle forze e scelto un punto O per polo, conduciamo i raggi O**1**, O**2**, O**3**, ... , O**26** ed O**27**, e passiamo alla costruzione del poligono funicolare. Assumeremo perciò sulla

B_4B_5, ... del poligono funicolare; che ogni lato del poligono funicolare è parallelo a quella delle rette passanti per O che va al vertice, in cui termina una ed incomincia l'altra delle due forze, fra le quali si trova il lato considerato, e che quindi ogni lato del poligono funicolare ha il vertice corrispondente nel poligono delle forze. Se poi chiamiamo *polo* il punto O e *raggi* le rette OA_0, OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, ... abbiamo che i lati del poligono funicolare sono ordinatamente paralleli ai raggi del poligono delle forze.

Il polo O varia col cangiare la direzione B_0B_1 del primo lato del poligono funicolare e col cangiare lo sforzo che si suppone applicato al vertice B_1. Da questo cangiamento poi, come pure da quello della posizione del vertice B_1, ne consegue quello dei lati successivi del poligono funicolare. Deriva da questo fatto che per un dato sistema di forze F_1, F_2, F_3, F_4, ... poste in un piano si può costrurre un poligono funicolare ad esso corrispondente, facendo prima il poligono delle forze A_0 A_1 A_2 A_3 A_4, ... assumendo nel piano di questi il polo O, conducendo i raggi OA_0, OA_1, OA_2, OA_3, OA_4, ... e tirando quindi ordinatamente le rette B_0B_1, B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, B_4B_5, ... rispettivamente parallele ai detti raggi e limitate alle direzioni delle forze onde ottenere la linea poligonale $B_0B_1B_2B_3B_4B_5$, ...

La forza F_5 (*Fig.* 106) la quale, unita alle forze F_1, F_2, F_3 ed F_4, è capace di porre il sistema in equilibrio, è data in intensità, direzione e verso dal lato A_4A_0 che chiude la linea poligonale $A_0A_1A_2A_3A_4$, e questa forza deve passare per vertice B_5 del poligono funicolare in cui s'incontrano le due rette condotte per B_4 e per B_1 con direzioni rispettivamente parallele ai raggi OA_4 ed OA_0.

Segue ancora da ciò che, se più forze F_1, F_2, F_3, F_4 ed F_5 si fanno equilibrio in un piano, devono essere chiusi il poligono delle forze od il poligono funicolare; cosicchè trattandosi di verificare se furono ben determinate più forze le quali devono farsi equilibrio, si può costruire il poligono delle forze ed un poligono funicolare corrispondente. Se ambedue questi poligoni risultano chiusi, si può ritenere che le forze furono ben determinate, diversamente è segno che avvenne qualche errore nelle loro ricerche.

direzione della forza **1** applicata al nodo 0 il punto I per primo vertice di questo poligono, condurremo per esso la retta I II parallela al raggio O**1** limitandola nel punto II incontro colla direzione della forza **2**, tracceremo la retta II III parallela al raggio O**2** fino ad incontrare in III la direzione della forza **3**, e così continueremo a condurre ordinatamente dall'ultimo vertice trovato del poligono funicolare una parallela al raggio successivo a quello ultimo considerato. Con questa costruzione si trova il poligono i cui vertici sono indicati coi numeri romani I II III... XXV XXVI XXVII; e siccome i punti definiti dai numeri I e XXVII sensibilmente si confondono assieme, si conchiude che anche il poligono funicolare è chiuso.

Essendosi trovato che sono chiusi tanto il poligono delle forze quanto il poligono funicolare relativi al sistema 0 16 15″ 13″ 11″ 9″ 7″ 5″ 3″ 1″ 0″ sotto l'azione delle forze indicate coi numeri **1**, **2**, **3**, ... **25**, **26** e **27**, possiamo ritenere che i calcoli stati instituiti per la determinazione delle resistenze provocate nei differenti pezzi dei timpani sono esatti, o che tutto al più sono affetti da piccoli errori che il procedimento grafico stato indicato non ha saputo svelare. I risultati numerici che abbiamo ottenuto nei numeri 39 e 41 si possono adunque ritenere come accettabili per il genere di quistione che stiamo trattando.

43. **Osservazioni sui calcoli stati fatti nei numeri 39 e 41.** — I metodi di calcolo stati seguìti nei numeri 39 e 41 per la determinazione delle resistenze longitudinali provocate nei diversi pezzi dei timpani suppongono: che i nodi 0 e 0″ (*Fig.* 86) non siano uniti ai tiranti orizzontali che servono per fermare i timpani ai piedritti; che i punti 0′, 2′, 4′, 6′, 8′, 10′, 12′, 14′ e 16′ siano ritegni immobili dei pezzi dei timpani in essi concorrenti; che i punti 0″, 1″, 3″, 5″, 7″, 9″, 11″, 13″ e 15″ siano pure ritegni immobili dei pezzi inclinati dei timpani superiori alla linea poligonale 0″ 1″ 3″ 5″ 7″ 9″ 11″ 13″ 15″; e che tutti i pezzi dei timpani siano articolati. Nel caso concreto nessuna di queste circostanze realmente si verifica e quindi i risultamenti delle calcolazioni da noi instituite non si possono ritenere come esatti e come conformi alla realtà dei fatti. Aggiungasi ancora esservi alcun che di arbitrario nell'ordine di considerare i diversi nodi per la deduzione delle resistenze sviluppate nei pezzi dei timpani, giacchè facilmente si comprende come, invece di incominciare dal nodo 0, avrebbesi potuto incominciare col nodo 16, e questo solo fatto avrebbe potuto bastare per indurre delle modificazioni nei risultamenti dei calcoli.

Una risoluzione più esatta del problema si avrebbe supponendo fissi i punti d'attacco dei timpani alla centina (ciò che si può ammettere, giacchè per la stabilità dell'opera non può la centina subire che piccolissime diformazioni) ed applicando le equazioni delle deformazioni dei corpi elastici, oppure il teorema del minimo lavoro per calcolare le tensioni e le pressioni sopportate dai differenti pezzi dei timpani, le mutue loro azioni e le coppie corrispondenti alla mancanza di articolazioni nei punti in cui si riuniscono. Seguendo questa via però, si devono ricavare più incognite da più equazioni del primo grado, ed il numero di quelle e di queste risulta così grande che la risoluzione del problema tuttocchè facile finchè si tratta di esporla con parole, diventa, se non impraticabile, sicuramente lunghissima nel caso concreto.

In vista di ciò non dubitiamo di asserire che i metodi di calcolo stati esposti nei numeri 39 e 41 sono i soli che possono tornare convenienti per la quistione che stiamo svolgendo, la quale, sia per non potersi tener conto del vero modo con cui si ripartiscono i carichi sulle diverse parti del ponte, sia per essere impossibile di valutare esattamente le influenze delle svariate unioni sulla trasmissione delle mutue azioni dei pezzi, non può essere risoluta fuorchè con metodi approssimati, i quali, se non valgono ad appagare la scrupolosa esigenza della teoria, sono però sufficienti nelle pratiche applicazioni. Aggiungasi ancora che alcune delle ipotesi state ammesse sulle condizioni dei pezzi dei timpani, come quella dell'indipendenza dai piedritti e degli snodi nei punti di concorso, sono tali da condurre a risultamenti in favore anzichè in danno della loro stabilità.

44. **Componenti orizzontali e verticali delle azioni esercitate dai pezzi dei timpani sulle centine.** — Siano AC e BC (*Fig.* 107) due pezzi dei timpani riunentisi sulla centina nel punto C dell'arco DCE, siano $\Omega\Omega'$ e UU' la orizzontale e la verticale passante per C, si chiamano

γ e δ i due angoli ACU' e BCU',

T la pressione provocata nel pezzo AC, ossia l'azione con cui esso opera sulla centina dall'alto al basso,

T' la pressione analoga pel pezzo BC,

O e V le due componenti orizzontale e verticale di T,

O' e V' le analoghe componenti di T'.

Assumendo come positive le componenti orizzontali, le quali sono dirette verso l'esterno della centina, e come negative quelle dirette

dall'infuori all'indentro, considerando come positive le componenti verticali dirette dall'alto al basso ed intendendo che T e T′ siano i valori assoluti delle azioni dei due pezzi AC e BC sulla centina, abbiamo

$$O = -T \operatorname{sen} \gamma,$$
$$V = T \cos \gamma,$$
$$O' = T' \operatorname{sen} \delta$$
$$V' = T' \cos \delta.$$

L'applicazione di queste formole alle azioni esercitate dai pezzi dei timpani nei punti (*Fig.* 86) 0′, 2′, 4′, 6′, 8′, 10′, 12′, 14′ e 16′, pei quali si hanno i valori di γ e δ nel numero 35, ed i valori di T e T′ nel numero 41, conduce ai valori di O, V, O′ e V′ contenuti nella seguente tavola

Punti d'attacco dei pezzi dei timpani colla centina	Azioni esercitate dai pezzi dei timpani sulla centina			
	O	V	O′	V′
0′	0Cg	2579Cg	648Cg	2024Cg
2′	— 1120	2469	1091	2880
4′	— 1647	2983	1451	3197
6′	— 1764	2578	2114	3830
8′	— 2067	2380	2871	4197
10′	— 2098	1850	3696	4259
12′	— 2351	1526	5419	4777
14′	— 3419	1554	8977	5831
16′	— 2849	841.		

Facendo le somme algebriche di O e di O′ non che quelle di V e di V′ pei diversi vertici, si hanno le forze orizzontali Σ e le forze verticali W ad essi applicate, e quindi risultano gli elementi contenuti nella tavola che segue

Punti d'attacco dei pezzi dei timpani colla centina	Componenti orizzontali e verticali delle azioni dei timpani sulla centina	
	Σ	W
0′	648Cg	4603Cg
2′	— 29	5349
4′	— 196	6180
6′	350	6408

8′	804	6577
10′	1598	6109
12′	3068	6303
14′	5558	7385
16′	—2849	841.

Le azioni verticali dei timpani sulla centina sono tutte positive e quindi tutte operano dall'alto al basso. Le azioni orizzontali sono, alcune positive ed alcune negative, e quindi quelle operano dall'indentro all'infuori della centina e queste operano dall'infuori all'indentro.

45. **Dimensioni delle piastre di collegamento dei pezzi dei timpani nei punti 1″, 3″, 5″, 7″, 9″, 11″, 13″ e 15″** (*Fig.* 86). — Come già si è detto nel numero 12, le piastre o lamiere, alle quali sono inchiodati i pezzi dei timpani concorrenti nei vertici della poligonale 1″ 3″ 5″ 7″ 9″ 11″ 13″ 15″, hanno forma di stelle, e si estendono nel senso dei pezzi che sono ad esse inchiodati, a partire dai vertici suddetti, per $\frac{1}{4}$ della lunghezza dei pezzi stessi. Fa però eccezione a questa regola la piastra posta in 1″, la quale dal punto 1″ al punto 0″ si estende fino alla metà della loro distanza.

Queste piastre, dove ricevono i pezzi dei timpani, sono larghe metri 0,172. Fanno però eccezione a questa regola le due piastre corrispondenti ai punti di concorso 13″ e 15″; la prima di esse ha le larghezze di metri 0,160 dove riceve i pezzi 13″-14 e 13″-14′, e la larghezza di metri 0,162 dove riceve il pezzo 13″-15″; la seconda ha la stessa larghezza di metri 0,162 in corrispondenza del pezzo 15″-13″ e la larghezza di metri 0,160 in corrispondenza degli altri quattro pezzi. Le stesse piastre fra un pezzo e l'altro sono sagomate a contorni parabolici, e le loro grossezze sono: di metri 0,008 per le due poste in 1″ e 3″; di metri 0,010 per le quattro situate in 5″, 7″, 9″ e 11″; di metri 0,012 per le due corrispondenti ai vertici 13″ e 15″. I chiodi, per l'unione dei pezzi dei timpani a queste piastre, hanno il loro fusto col diametro di metri 0,016.

46. **Dimensioni dei ferri per attaccare i collegamenti dei timpani nel senso trasversale.** — Questi ferri, eccezion fatta di quelli posti in corrispondenza dei punti (*Fig.* 86) 3″, 7″, 11″ e 15″, hanno tutti sezione a T colla tavola larga metri 0,09, col gambo sporgente metri 0,10 e colla spessezza nella tavola e nel gambo di metri 0,006. Quelli, ai quali sono inchiodati i pezzi dei collegamenti

trasversali inclinati in corrispondenza dei punti 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 2', 6', 10' e 14' hanno tutti la lunghezza media di metri 0,20. Quelli invece cui sono inchiodati i collegamenti trasversali inclinati in corrispondenza dei punti 0', 4', 8' e 12' hanno la lunghezza media un po' maggiore ossia di metri 0,22. I ferri poi, per attaccare ai timpani i collegamenti trasversali inclinati in corrispondenza dei punti 1'', 5'', 9'' e 13'', ammettono le lunghezze medie risultanti dalla tavola che segue:

Indicazione dei punti d'attacco	Indicazione dei collegamenti trasversali	Lunghezze dei ferri a T pegli attacchi
1''	1''-0	0^{m},643
	1''-0'	0, 755
	1''-2	0, 643
	1''-2'	0, 525
5''	5''-4	0^{m},455
	5''-4'	0, 540
	5''-6	0, 455
	5''-6'	0, 378
9''	9''-8	0^{m},318
	9''-8'	0, 378
	9''-10	0, 318
	9''-10'	0, 268
13''	13''-12	0^{m},234
	13''-12'	0, 268
	13''-14	0, 245
	13''-14'	0, 227.

In corrispondenza dei punti 3'', 7'', 11'' e 15'', i collegamenti trasversali sono costituiti da ferri d'angolo orizzontalmente disposti, e questi ferri d'angolo sono uniti ai punti mediante cantonali o piccoli ferri d'angolo lunghi metri 0,10, con un lato lungo metri 0,13, coll'altro lato lungo metri 0,11 e colla grossezza di metri 0,006. Fra questi cantonali è serrata una piccola lamiera colle tre dimensioni di metri 0,10, 0,11 e 0,006.

I chiodi per l'unione ai timpani di tutti i pezzi, di cui abbiamo parlato in questo numero, hanno tutti il fusto col diametro di metri 0,016.

47. **Dimensioni dei ferri pei collegamenti trasversali dei timpani.** — I collegamenti trasversali, disposti in forma di croci secondo le rette 1″0, 1″0′, 1″2, 1″2′, 5″4, 5″4′, 5″6, 5″6′, 9″8, 9″8′, 9″10, 9″10′, 13″12, 13″12′, 13″14 e 13″14′, sono fatti con ferri d'angolo di lati eguali aventi la lunghezza di metri 0,042 e la grossezza di metri 0,006. La lunghezza di ciascuno di questi ferri poi, quando si suppongano essi e tutti i pezzi dei timpani ridotti ai loro assi, si può valutare considerandola come la diagonale di un paralellepipedo rettangolo avente un lato lungo come la distanza fra mezzo e mezzo di due mensole successive, ossia di 1 metro; il secondo lato lungo come la distanza esistente fra mezzo e mezzo di due centine successive, ossia di metri 1,60; ed il terzo lato lungo come la differenza di livello esistente fra le estremità della proiezione verticale, presa nella figura 86, del pezzo che si considera. Calcolando in questo modo le lunghezze dei pezzi dei collegamenti trasversali inclinati, troviamo:

Pei pezzi disposti secondo	1″ 0	metri	3,254;
»	1″ 0′	»	3,649;
»	1″ 2	»	3,254;
»	1″ 2′	»	2,900;
»	5″ 4	»	2,625;
»	5″ 4′	»	2,901;
»	5″ 6	»	2,625;
»	5″ 6′	»	2,386;
»	9″ 8	»	2,216;
»	9″ 8′	»	2,387;
»	9″ 10	»	2,216;
»	9″ 10′	»	2,083;
»	13″ 12	»	1,998;
»	13″ 12′	»	2,083;
»	13″ 14	»	1,998;
»	13″ 14′	»	1,941.

Queste lunghezze, nella materiale confezione dei pezzi, devon essere diminuite di metri 0,08, giacchè la spessezza delle lamiere e la riunione di più pezzi in un sol punto non permettono di assegnare loro quelle lunghezze che hanno, quando si considerano soltanto i loro assi.

I ferri costituenti i collegamenti trasversali inclinati dei timpani

sono due a due inchiodati nei loro incontri, e fra essi trovasi interposta una porzione di lamiera colla spessezza di metri 0,006 e con forma parallelogrammica determinata dall'angolo secondo i quali i pezzi s'incontrano.

I pezzi pei collegamenti orizzontali dei timpani in corrispondenza dei punti 3″, 7″, 11″ e 15″ sono pure ferri d'angolo, i loro lati sono eguali e di metri 0,065, la loro grossezza è di metri 0,006, e la loro lunghezza di metri 1,52.

I chiodi, per le chiodature dei pezzi di collegamento dei timpani ai pezzi d'attacco e fra di loro, hanno tutti il fusto col diametro di metri 0,016.

48. **Pesi gravitanti sui punti d'attacco dei pezzi dei timpani colle centine a cagione dei timpani stessi e dei ferri per attaccarvi i collegamenti trasversali.** — Nella determinazione di questi pesi abbiamo supposto: che sul punto 0′ (*Fig.* 86) graviti il peso della parte di timpano posto a sinistra della verticale 1 1′; che sui punti 2′, 4′, 6′, 8′, 10′, 12′ e 14′ operino i pesi delle parti di timpano situate fra le verticali 1 1′ e 3 3′, 3 3′ e 5 5′, 5 5′ e 7 7′, 7 7′ 9 9′, 9 9′ ed 11 11′, 11 11′ e 13 13′, 13 13′ e 15 15′; e che finalmente sul punto 16′ graviti il peso della parte di timpano compresa fra le verticali 15 15′ e 16 16′. Nel fare questi pesi abbiamo tenuto conto di tutti i ferri di collegamento dei pezzi dei timpani tra di loro, dei ferri attaccati ai timpani per ottenere i collegamenti trasversali e delle capocchie dei chiodi. Per peso del metro cubo di ferro abbiam assunto chilogrammi 7770; e siamo giunti ai risultamenti che qui presentiamo.

Pel punto 0′

Volume del pezzo orizzontale 0-1 . . .	Mc.	0,005792
» del pezzo verticale 0-0′	»	0,017036
» del pezzo inclinato 0-1″	»	0,006799
» del pezzo inclinato 0″-1″	»	0,002465
» del pezzo inclinato 0′-1″	»	0,007872
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 0	»	0,000456
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale superiore in 1″ . .	»	0,001466
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 0′	»	0,000502
Da riportarsi	Mc.	0,042388

	Riporto Mc.	0,042388
Volume dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale inferiore	»	0,001721
» della parte di lamiera d'attacco in 1'' posta a sinistra della verticale 11'	»	0,003241
» delle capocchie dei chiodi di collegamento	»	0,001420
	Totale Mc.	0,048770,

ed a questo volume corrisponde il peso di chilogrammi 379.

Pel punto 2'

Volume del pezzo orizzontale 2-1 . .	Mc.	0,005792
» del pezzo orizzontale 2-3	»	0,005632
» del pezzo inclinato 2-1''	»	0,006799
» del pezzo inclinato 2-3''	»	0,005832
» del pezzo inclinato 1''-3''	»	0,004913
» del pezzo inclinato 2'-1''	»	0,005881
» del pezzo inclinato 2'-3''	»	0,006775
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 2	»	0,000456
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale superiore in 1'' . .	»	0,001466
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale inferiore in 1'' . .	»	0,001197
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 2'	»	0,000456
» della parte di lamiera d'attacco in 1'' posta a destra della verticale 1 1'	»	0,002850
» della parte di lamiera d'attacco in 3'' posta a sinistra della verticale 3 3'	»	0,002836
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale orizzontale in 3'' . .	»	0,000347
» delle capocchie dei chiodi di collegamento	»	0,001350
	Totale Mc.	0,052582,

al qual volume corrisponde il peso di chilogrammi 409.

Pel punto 4'

Volume	del pezzo orizzontale 4-3 . . .	Mc. 0,005632
»	del pezzo orizzontale 4-5 . . .	» 0,006072
»	del pezzo inclinato 4-3''	» 0,005832
»	del pezzo inclinato 4-5''	» 0,004987
»	del pezzo inclinato 3''-5''	» 0,004891
»	del pezzo inclinato 4'-3''	» 0,004966
»	del pezzo inclinato 4'-5''	» 0,005808
»	dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 4	» 0,000456
»	dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale superiore in 5'' . .	» 0,001037
»	dei pezzi d'attacco del collegamento traversale inferiore in 5'' . . .	» 0,001231
»	dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 4'	» 0,000502
»	della parte di lamiera d'attacco in 3'' posta a destra della verticale 33'	» 0,002449
»	della parte di lamiera d'attacco in 5'' posta a sinistra della verticale 55'	» 0,003059
»	dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale orizzontale in 3'' . .	» 0,000347
»	delle capocchie dei chiodi di collegamento	» 0,001241
	Totale	Mc. 0,048510,

ed a questo volume corrisponde il peso di chilogrammi 377.

Pel punto 6'

Volume	del pezzo orizzontale 6-5 . . .	Mc. 0,006072
»	del pezzo orizzontale 6-7	» 0,005872
»	del pezzo inclinato 6-5''	» 0,004987
»	del pezzo inclinato 6-7''	» 0,004272
»	del pezzo inclinato 5''-7''	» 0,004874
»	del pezzo inclinato 6'-5''	» 0,004248
»	del pezzo inclinato 6'-7''	» 0,004968
»	dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 6	» 0,000456
	Da riportarsi	Mc. 0,035749

Riporto Mc. 0,035749

Volume dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale superiore in 5″ . . » 0,001037
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale inferiore in 5″ . . . » 0,000862
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 6′ . . . . . » 0,000456
» della parte di lamiera d'attacco in 5″ posta a destra della verticale 5 5′ » 0,002617
» della parte di lamiera d'attacco in 7″ posta a sinistra della verticale 7 7′ » 0,002595
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale orizzontale in 7″ . . » 0,000347
» delle capocchie dei chiodi di collegamento . . . . . » 0,001191

Totale Mc. 0,044854,

ed a questo volume corrisponde il peso di chilogrammi 349.

Pel punto 8′

Volume del pezzo orizzontale 8-7 . . . Mc. 0,005872
» del pezzo orizzontale 8-9 . . . . » 0,006400
» del pezzo inclinato 8-7″ . . . . » 0,004272
» del pezzo inclinato 8-9″ . . . . » 0,003679
» del pezzo inclinato 7″-9″ . . . . » 0,004858
» del pezzo inclinato 8′-7″ . . . . » 0,003660
» del pezzo inclinato 8′-9″ . . . . » 0,004250
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 8 . . . . . » 0,000456
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale superiore in 9″ . . » 0,000725
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale inferiore in 9″ . . . » 0,000862
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 8′ . . . . . » 0,000502
» della parte di lamiera d'attacco in 7″ posta a dritta della verticale 7 7′ » 0,002210

Da riportarsi Mc. 0,037746

	Riporto Mc.	0,037746
Volume della parte di lamiera d'attacco in 9″ posta a sinistra della verticale 9 9′	»	0,002222
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale orizzontale in 7″ . .	»	0,000347
» delle capocchie dei chiodi di collegamento	»	0,001092
	Totale Mc.	0,041407,

al qual volume corrisponde il peso di chilogrammi 322.

Pel punto 10′

Volume del pezzo orizzontale 10-9 . .	Mc.	0,006400
» del pezzo orizzontale 10-11 . . .	»	0,006400
» del pezzo inclinato 10-9″	»	0,003679
» del pezzo inclinato 10-11″ . . .	»	0,003211
» del pezzo inclinato 9″-11″ . . .	»	0,004843
» del pezzo inclinato 10′-9″ . . .	»	0,003199
» del pezzo inclinato 10′-11″ . . .	»	0,003660
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 10	»	0,000456
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale superiore in 9″ . .	»	0,000725
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale inferiore in 9″ . .	»	0,000611
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 10′	»	0,000456
» della parte di lamiera d'attacco in 9″ posta a destra della verticale 9 9′	»	0,001882
» della parte di lamiera d'attacco in 11″ posta a sinistra della verticale 11 11′	»	0,001892
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale orizzontale in 11″ . .	»	0,000347
» delle capocchie dei chiodi di collegamento	»	0,001062
	Totale Mc.	0,038823,

ed il volume corrispondente a questo peso risulta di chilogr. 302.

Pel punto 12'

Volume	del pezzo orizzontale 12-11 . .	Mc.	0,006400
»	del pezzo orizzontale 12-13 . . .	»	0,006800
»	del pezzo inclinato 12-11'' . . .	»	0,003211
»	del pezzo inclinato 12-13'' . . .	»	0,002873
»	del pezzo inclinato 11''-13'' . . .	»	0,004831
»	del pezzo inclinato 12'-11'' . . .	»	0,002861
»	del pezzo inclinato 12'-13'' . . .	»	0,003199
»	dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 12	»	0,000456
»	dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale superiore in 13'' . .	»	0,000534
»	dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale inferiore in 13'' . .	»	0,000611
»	dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 12'	»	0,000502
»	della parte di lamiera d'attacco in 11'' posta a destra della verticale 11 11'	»	0,001595
»	della parte di lamiera d'attacco in 13'' posta a sinistra della verticale 13 13'	»	0,001937
»	dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale orizzontale in 11'' .	»	0,000347
»	delle capocchie dei chiodi di collegamento	»	0,001003
		Totale Mc.	0,037160,

ed a questo volume corrisponde il peso di chilogrammi 289.

Pel punto 14'

Volume	del pezzo orizzontale 14-13 . .	Mc.	0,006800
»	del pezzo orizzontale 14-15 . . .	»	0,006800
»	del pezzo inclinato 14-13'' . . .	»	0,002873
»	del pezzo inclinato 14-15'' . . .	»	0,002645
»	del pezzo inclinato 13''-15'' . . .	»	0,004822
»	del pezzo inclinato 14'-13'' . . .	»	0,002633
»	del pezzo inclinato 14'-15'' . . .	»	0,002861
»	dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 14	»	0,000456
		Da riportarsi Mc.	0,029890

Riporto Mc. 0,029890

Volume dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale superiore in 13″ . . » 0,000559
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale inferiore in 13″ . . » 0,000518
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale in 14′ . . . . . » 0,000456
» della parte di lamiera d'attacco in 13″ posta a destra della verticale 13 13′ » 0,001611
» della parte di lamiera d'attacco in 15″ posta a sinistra della verticale 15 15′ » 0,001626
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale orizzontale in 15″ . » 0,000347
» delle capocchie dei chiodi di collegamento . . . . . » 0,000953

Totale Mc. 0,035960,

ed il peso corrispondente risulta di chilogrammi 279.

Pel punto 16′

Volume del pezzo orizzontale 16-15 . . Mc. 0,006800
» della metà del pezzo orizzontale 16-17 » 0,003400
» del pezzo inclinato 16-15″ . . . » 0,002645
» del pezzo inclinato 16′-15″ . . . » 0,002503
» della parte di lamiera d'attacco in 15″ posta a destra della verticale 15 15′ » 0,000897
» dei pezzi d'attacco del collegamento trasversale orizzontale in 15″ . » 0,000347
» delle capocchie dei chiodi di collegamento. . . . . » 0,000477

Totale Mc. 0,017069,

ed a questo volume corrisponde il peso di chilogrammi 133.

Riassumendo, si ha che i pesi W′ gravitanti sui punti d'attacco dei pezzi dei timpani con mezza centina sono quali risultano dalla seguente tavola:

Indicazione dei punti d'attacco	Pesi W' su essi gravitanti
0′	379Cg
2′	409
4′	377
6′	349
8′	322
10′	302
12′	289
14′	279
16′	133.

49. **Pesi gravitanti sui punti d'attacco dei pezzi dei timpani colle centine, a cagione dei collegamenti trasversali.** — Nel cercare questi pesi abbiamo supposto: che nel punto 0′ (*Fig.* 86) operi il peso dei collegamenti trasversali inclinati disposti nel senso delle rette 1″0 ed 1″0′; che sul punto 2′ si facciano sentire le azioni dei pesi dei collegamenti trasversali inclinati disposti nel senso delle rette 1″2 ed 1″2′, non che la metà di quella del collegamento orizzontale corrispondente al punto 3″; che sul punto 4′ gravitino, oltre la metà del peso dell'ultimo indicato collegamento orizzontale, anche i pesi dei collegamenti trasversali inclinati disposti secondo le rette 5″4 e 5″4′; che così analogamente sui punti 6′, 8′, 10′, 12′ e 14′ si trovino i pesi di due collegamenti trasversali e quello della metà di un collegamento orizzontale; e finalmente che sul punto 16′ vi sia il solo carico corrispondente colla metà del peso del collegamento trasversale orizzontale posto in 15″.

Passando alla determinazione di questi pesi, si ha:

Pel punto 0′

Il volume del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 1″0 di . . Mc. 0,003056
» del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 1″0′ di . . » 0,003415
» delle capocchie dei chiodi di collegamento di . . . . . » 0,000179

Totale Mc. 0,006650,

e quindi il peso di chilogrammi 52;

Pel punto 2'

Il volume del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 1''2 di . . Mc. 0,003056
» del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 1''2' di . . . » 0,002714
» del collegamento orizzontale corrispondente al punto 3'' di . . . . » 0,001131
» delle capocchie dei chiodi di collegamento di . . . . . » 0,000179

Totale Mc. 0,007080,

e quindi il peso di chilogrammi 55;

Pel punto 4'

Il volume del collegamento orizzontale corrispondente al punto 3'' di . . . Mc. 0,001131
» del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 5 4'' di . . . » 0,002455
» del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 5''4' di . . » 0,002715
» delle capocchie dei chiodi di collegamento . . . . . » 0,000179

Totale Mc. 0,006480,

e quindi il peso di chilogrammi 50;

Pel punto 6'

Il volume del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 5''6 di . . Mc. 0,002455
» del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 5''6' di . . . » 0,002233
» del collegamento orizzontale corrispondente al punto 7'' di . . . » 0,001131
» delle capocchie dei chiodi di collegamento di . . . . . » 0,000179

Totale Mc. 0,005998,

e quindi il peso di chilogrammi 47;

Pel punto 8'

Il volume del collegamento orizzontale corrispondente al punto 7'' di . . . Mc. 0,001131
» del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 9''8 di . . . » 0,002074
» del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 9''8' di . . » 0,002234
» delle capocchie dei chiodi di collegamento di . . . . . » 0,000179

Totale Mc. 0,005618,

e quindi il peso di chilogrammi 44;

Pel punto 10'

Il volume del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 9''10 di . . Mc. 0,002074
» del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 9''10' di . . » 0,001950
» del collegamento orizzontale corrispondente al punto 11'' di . . » 0,001131
» delle capocchie dei chiodi di collegamento di . . . . . » 0,000179

Totale Mc. 0,005334,

e quindi il peso di chilogrammi 41;

Pel punto 12'

Il volume del collegamento orizzontale corrispondente al punto 11'' di . . Mc. 0,001131
» del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 13''12 di . . » 0,001870
» del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 13''12' di . . » 0,001950
» delle capocchie dei chiodi di collegamento di . . . . . » 0,000179

Totale Mc. 0,005130,

e quindi il peso di chilogrammi 40.

Pel punto 14′

Il volume del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 13″ 14 di . Mc. 0,001870
» del collegamento trasversale inclinato disposto secondo 13″ 14′ di . . » 0,001817
» del collegamento orizzontale corrispondente al punto 15″ di . . » 0,001131
» delle cappocchie dei chiodi di collegamento di . . . . . » 0,000179

Totale Mc. 0,004997,

e quindi il peso di chilogrammi 39.

Pel punto 16′ il solo peso di chilogrammi 9 corrispondente al collegamento trasversale orizzontale in 15″.

Raccogliendo i pesi che, a cagione dei collegamenti trasversali, operano sui punti d'attacco dei pezzi dei timpani con una mezza centina, possiamo formare la seguente tavola:

Indicazione dei punti d'attacco	Pesi W″ su essi gravitanti
0′	52^{Cg}
2′	55
4′	50
6′	47
8′	44
10′	41
12′	40
14′	39
16′	9.

Nel fare i volumi, dai quali abbiamo dedotti i pesi contenuti in questa tavola, si è ammesso che i ferri dei collegamenti trasversali inclinati siano lunghi come risulta dalla tavola del numero 47. Così facendo si sono ottenuti pesi di qualche poco maggiori dei veri, ma, per avere una parte almeno di compenso, si sono trascurati i pesi delle piccole lamiere di riporto poste agli incontri dei pezzi medesimi.

50. **Determinazione degli angoli che le sezioni rette, passanti pei punti d'attacco dei pezzi dei timpani colla centina fanno colla verticale.** — Se immaginiamo condotte pei punti (*Fig.* 86 *e*

112) 0′, 2′, 4′, 6′, 8′, 10′, 12′, 14′ e 16′ altrettante normali all'asse della centina, queste normali fanno colla verticale angoli differenti, e sono questi appunto gli angoli che qui ci proponiamo di determinare, giacchè dei medesimi dobbiamo far uso nei calcoli da instituirsi per la determinazione delle spinte orizzontali delle centine e nei calcoli relativi alla loro stabilità.

Già si è detto nel numero 30 che l'asse di una centina è un arco circolare di raggio (*Fig.* 108) $\overline{CA} = \overline{CB} = 55^{m},083$; e nel successivo numero 31 si è stabilito che i punti d'attacco dei pezzi dei timpani con ciascuna centina si trovano su un arco circolare, la cui metà è rappresentata in F G, determinato col prendere $\overline{BG} = 0^{m},475$ ed $\overline{AF} = 0^{m}675$ ed avente quindi per raggio $\overline{OF} = \overline{OG} = 57^{m},454$.

Se ora consideriamo un punto qualunque M su quest'ultimo arco e se conduciamo la retta M C al centro C dell'arco A B, l'angolo $MCI = \beta$ rappresenta in modo generale uno qualunque degli angoli che vogliamo determinare; e, essendo M H una retta orizzontale e quindi perpendicolare ad Iy, si ha

$$\text{tang}\,\beta = \frac{\overline{MH}}{\overline{CH}}.$$

Ma, essendo Ix l'orizzontale condotta pel punto I a distanza di metri 0,05 da G, $\overline{IH}$ l'ordinata y del punto M ed $\overline{MH}$ l'ascissa x dello stesso punto, abbiamo

$$\overline{CH} = \overline{IC} - \overline{IH} = \overline{IG} + \overline{GB} + \overline{BC} - \overline{IH} = 55{,}6083 - y$$

$$\text{tang}\,\beta = \frac{x}{55{,}6083 - y} \qquad (1),$$

Se ora sostituiamo in questa formola i valori noti delle ascisse x e delle ordinate y (Num. 32) ricaviamo i seguenti valori di β:

Indicazione dei punti d'attacco	Angoli β colla verticale
0′	26° 38′ 30″
2′	24 22 44
4′	22 9 8
6′	19 57 24
8′	17 47 19
10′	15 38 39
12′	13 31 10
14′	11 24 43
16′	9 19 6.

51. **Distanze degli attacci inferiori dei pezzi dei timpani dagli assi delle centine.** — Le azioni esercitate dai pezzi dei timpani sulle centine non sono applicate agli assi di queste, ed importa tener conto di tale circostanza nei calcoli da instituirsi per la determinazione della spinta orizzontale e per la verificazione della stabilità delle centine stesse.

Per valutare la distanza $\overline{MN} = c$ (*Fig.* 108) di uno qualunque M dei punti d'attacco dei timpani colla corrispondente centina dall'asse AB, osservasi: che

$$c = \overline{MC} - \overline{NC};$$

che

$$\overline{MC} = \sqrt{\overline{MH}^2 + \overline{CH}^2};$$

che (Num. 50)

$$\overline{MH} = x, \qquad \overline{CH} = 55{,}6083 - y;$$

che (Num. 30)

$$\overline{NC} = 55^m{,}083;$$

e che quindi

$$c = \sqrt{x^2 + (55{,}6083 - y)^2} - 55{,}083 \qquad (1).$$

Sostituendo ora in questa formola i valori di x e di y rispettivamente corrispondenti a punti (*Fig.* 86) 0′, 2′, 4′, 6′, 8′, 10′, 12′, 14′ e 16′, troviamo i valori di c registrati nella tavola che presentiamo:

Indicazione dei punti d'attacco	Distanze c dall'asse della centina
0′	$0^m{,}669$
2′	0, 638
4′	0, 610
6′	0, 585
8′	0, 562
10′	0, 543
12′	0, 526
14′	0, 511
16′	0, 499.

52. **Determinazione di alcuni angoli e di alcuni archi occorrenti per tener conto del peso delle centine nella ricerca delle loro spinte orizzontali.** — Questi angoli sono quelli che la sezione infima *ab* (*Fig.* 112) e le sezioni determinate dai punti 1′, 3′, 5′, 7′, 9′, 11′, 13′ e 15′ fanno colla verticale. L'angolo domandato per la sezione *ab* già fu trovato nel numero 30 ed esso vale 26° 59′ 29″; gli angoli per le sezioni corrispondenti ai punti 1′, 3′, 5′, 7′, 9′, 11′, 13′ e 15′ si possono trovare colla formola (1) del numero 50. Facendo i calcoli e raccogliendo i risultati finali, si ottengono gli elementi contenuti nella tavola che segue:

Punti determinanti le sezioni	Angoli β colla verticale
a	26° 59′ 29″
1′	25 30 19
3′	23 15 40
5′	21 3 3
7′	18 52 10
9′	16 42 49
11′	14 34 46
13′	12 27 50
15′	10 21 49.

Se ora ordinatamente si sottrae ciascuno di questi angoli dal precedente, si ottengono quelli che fanno fra di loro le coppie di sezioni rette determinate dai punti *a* ed 1′, 1′ e 3′, 3′ e 5′, 5′ e 7′, 7′ e 6′, 9′ ed 11′, 11′ e 13′, 13′ e 15′; e questi angoli risultano come appare dalla tavola seguente:

Punti determinanti le sezioni	Angoli di due sezioni successive fra di loro
a e 1′	1° 29′ 10″
1′ e 3′	2 14 39
3′ e 5′	2 12 37
5′ e 7′	2 10 53
7′ e 9′	2 9 21
9′ e 11′	2 8 3
11′ e 13′	2 5 56
13′ e 15′	2 6 1.

L'angolo che la sezione determinata dal punto 15′ fa con quella determinata dal punto 16′ è la differenza fra l'ultimo angolo contenuto nella prima tavola di questo numero e l'ultimo angolo contenuto nella tavola del numero 50, e risulta di 1° 2′ 43″. Il doppio di quest'angolo, ossia 2° 5′ 26″, è quello che fanno fra di loro le sezioni rette determinate dai due punti 15′ e *c* egualmente inclinate da una parte e dall'altra della sezione determinata dal punto 16′.

Siamo ora in grado di trovare le lunghezze L delle parti di asse di una centina, comprese fra le definite sezioni e rappresentate sulla figura di EI, I III, III V, V VII, VII IX, IX XI, XI XIII, XIII XV e XV F. Queste parti sono archi circolari col raggio r di metri 55,083 e quindi, conoscendosi le loro ampiezze A, riesce facile la loro determinazione coll'uso di tavole numeriche o mediante la formola

$$L = \frac{A}{180^\circ}\,\pi r.$$

(*Arte di fabbricare, Geometria pratica applicata all'arte del costruttore*, Num. 20 e 24). I risultati che si ottengono con questi calcoli sono inscritti nella seguente tavola:

Indicazione delle parti dell'asse	Sviluppi L
E I	1^m,429
I III	2, 157
III V	2, 125
V VII	2, 097
VII IX	2, 072
IX XI	2, 052
XI XIII	2, 034
XIII XV	2, 019
XV F	2, 010.

53. **Pesi delle parti di centina comprese fra le sezioni rette determinate dai punti** (*Fig.* 112) **1′ e 3′, 3′ e 5′, 5′ e 7′, 7′ e 9′, 9′ ed 11′, 11′ e 13′, 13′ e 15′, 15′ e** *c*. — Per trovare questi pesi è necessario prestabilirsi quelle dimensioni della sezione retta della centina che non sono vincolate dalle relazioni geometriche che esistono fra gli archi (*Fig.* 108) FG, AB e DE, e convenientemente dedurre quelle che da tali relazioni dipendono.

Nel prestabilire le prime dimensioni, occorre osservare che esse non siano molto lontane da quelle che definitivamente possono convenire per la centina in quistione. Per raggiungere l'intento valgono, la conoscenza dei ferri che si adoperano per questo genere di lavoro, l'osservazione su centine già costrutte poste in analoghe circostanze di quella di cui si sta studiando il progetto e più d'ogni altra cosa quel certo criterio pratico acquistato dall'esame di opere esistenti e dei loro disegni. Nel caso concreto, adottando per la centina la sezione a doppio T simmetrico (*Fig.* 109) tanto per rapporto all'orizzontale xx' quanto per rapporto alla retta yy', abbiamo assunte le seguenti dimensioni

$$e = 0^{m},400, \qquad e' = 0^{m},090,$$
$$e'' = 0,\ 010, \qquad e''' = 0,\ 012.$$

I ferri d'angolo A' per l'unione della lamiera verticale V colla centina hanno, nella loro sezione retta, le stesse dimensioni dei ferri d'angolo A, e la detta lamiera verticale non conserva altezza e spessezza costanti da un estremo all'altro; ma, avuto riguardo alle piccole variazioni che questi elementi subiscono ed al genere d'approssimazione che è solo permesso di sperare nella determinazione costituente lo scopo di questo numero, si è creduto conveniente di supporre che l'altezza e la spessezza indicate abbiamo rispettivamente i loro valori massimi di metri 0,34 e di metri 0,012.

Se ora osserviamo che la lunghezza $\overline{GB}$ è data per le sezioni rette corrispondenti ai punti (*Fig.* 112) 2', 4', 6', 8', 10', 12', 14' e 16' dai valori di c contenuti nella tavola del numero 51, che la lunghezza $\overline{BC}$ costantemente si conserva di metri 0,100 e che l'altezza a (*Fig.* 109) in una sezione retta qualunque della centina è il doppio di $\overline{GC}$, abbiamo

$$a = 2\,(c - 0{,}100) \qquad (1).$$

Ponendo in questa formola i valori noti di c, troviamo le altezze di sezione retta della centina contenute nella tavola che segue (*Fig.* 112):

Indicazione dei punti determinanti le sezioni rette	Altezze a delle sezioni rette della centina
2′	1^{m},076
4′	1, 020
6′	0, 970
8′	0, 924
10′	0, 886
12′	0, 852
14′	0, 822
16′	0, 798.

Le superficie Ω delle sezioni rette della centina, comprese quelle della lamiera (*Fig.* 109) V e dei ferri d'angolo A′, variano dall'una all'altra dipendentemente dal valore di a e, pei dati precedentemente stabiliti, si ha la formola

$$\Omega = 0{,}024792 + 0{,}012 . a \qquad (2)$$

la quale, applicata alle sezioni rette determinate dai punti (*Fig.* 112) 2′, 4′, 6′, 8′, 10′, 12′, 14′ e 16′, conduce ai riultamenti registrati nella seguente tavola:

Indicazione dei punti determinanti le sezioni rette	Superficie Ω delle sezioni rette
2′	0^{mq},037704
4′	0, 037032
6′	0, 036432
8′	0, 035880
10′	0, 035424
12′	0, 035016
14′	0, 034656
16′	0, 034368.

Moltiplicando successivamente le superficie Ω or ora indicate per le lunghezze L degli archi I III, III V, V VII, VII IX, IX XI, XI XIII, XIII XV e XV F inscritti nella terza tavola del numero 52, otteniamo approssimativamente i volumi delle parti di centina (e relativa lamiera V coi suoi ferri d'angolo A′) comprese fra le sezioni rette determinate dai punti 1′ e 3′, 3′ e 5′, 5′ e 7′, 7′ e 9′, 9′ ed 11′, 11′ e 13′, 13′ e 15′, 15′ e c. Moltiplicando poi tali volumi, espressi in metri cubi, pel peso di un metro cubo di ferro,

ossia per 7770 chilogrammi, abbiamo i pesi W''' delle parti stesse. Questi pesi risultano:

Di chilogrammi	632	per la parte di centina	I III;
»	611	»	III V;
»	594	»	V VII;
»	578	»	VII IX;
»	565	»	IX XI;
»	553	»	XI XIII;
»	544	»	XIII XV;
»	537	»	XV F.

Osserviamo che nel calcolo di questi pesi non abbiamo tenuto conto delle capocchie dei chiodi e dei coprigiunti dove esistono interruzioni di lamiere, perchè, trattandosi di una determinazione approssimata per falsa posizione, è affatto inutile il tener conto di quelle circostanze, le quali non possono a meno di esercitare un'influenza minima sui finali risultamenti. Notiamo ancora che maggiore esattezza si sarebbe ottenuta nella determinazione dei volumi se, invece di moltiplicare le aree delle sezioni rette corrispondenti ai punti 2', 4', 6', 8', 10', 12', 14' e 16' per le lunghezze degli archi I III, III V, V VII, VII IX, IX XI, XI XIII, XIII XV e XV F, si fosse trovata la curva, luogo geometrico dei centri di gravità di tutte le sezioni della centina supposte come quella rappresentata nella figura 109, e se le indicate aree si fossero moltiplicate per le parti di detta curva comprese fra le sezioni rette determinate dai punti 1', 3', 5', 7', 9', 11', 13', 15' e *c*. Il metodo da noi seguìto ci ha condotti a trovare volumi e quindi pesi minori di quelli che avressimo ottenuti colla considerazione dell'ultima indicata curva, ma le discrepanze non possono essere che lievi e tali da non doversi aver riguardo in calcoli che sono fondati su dati approssimativi e pei quali non si può pretendere che una grossolana approssimazione.

54. **Dimensioni dei pezzi componenti le imposte delle centine.** — Le estremità delle centine, come appare dalla figura 71, sono formate da un semi-collare o guscio di ghisa col quale fa corpo una piastra della stessa sostanza. Questa piastra e la parete verticale della centina sono strette fra più lamiere sovrapposte.

La totale lunghezza del corpo costituito dal semi-collare e dalla piastra è di metri 0,80. Il guscio ha per direttrice della sua super-

ficie cilindrica una semi-circonferenza col diametso di metri 0,49; dalla parte verso la quale riceve l'estremo della centina pres nta la superficie laterale di un mezzo prisma a base ottangonale regolare e le distanze minime fra questa superficie e quella cilindrica indicata sono di metri 0,055. La lunghezza del guscio nel senso delle sue generatrici è di metri 0,42; la larghezza della piastra nel senso dell'altezza della centina è di metri 0,60, e di metri 0,032 la sua spessezza.

Le lamiere sovrapposte, le quali serrano fra di loro la parete verticale della centina e la piastra di ghisa, sono in numero di ventisei, tredici da una parte e tredici dall'altra parte della parete suddetta. Indicando le lamiere poste da una stessa parte ordinatamente coi numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 e 13 a partire da quella di maggior lunghezza in contatto colla lamiera verticale della centina, abbiamo: che la lamiera col numero 1 ha la spessezza di metri 0,01, e che tutte le altre hanno la spessezza di metri 0,015; che la lamiera col numero 1 ha la lunghezza massima di metri 2, che per la lunghezza di metri 1,50 occupa lo spazio compreso fra la parete verticale ed i ferri d'angolo, che per la rimanente lunghezza di metri 0,50 si restringe simmetricamente rispetto al mezzo con cinque rientranze ad angolo retto in modo da avere la larghezza minima di metri 0,24; che la lamiera col numero 2 ha la lunghezza massima di metri 1,90, che per la lunghezza di metri 1,30 si estende fino ai ferri d'angolo, e che per la rimanente lunghezza di metri 0,60 si restringe simmetricamente rispetto al mezzo mediante sei rientranze ad angolo retto fatte in modo da conservare all'estremo la larghezza minima di metri 0,361; che la lamiera al numero 3 ha la lunghezza massima di metri 1,80, che per la lunghezza di metri 1,30 si mantiene colla sua larghezza precisamente fra i ferri d'angolo, e che per la restante lunghezza di metri 0,50 simmetricamente si restringe rispetto al mezzo mediante cinque rientranze ad angolo retto fatte in modo da esservi all'estremo la larghezza minima di metri 0,482; che le lamiere coi numeri 4, 5, 6 e 7 ammettono rispettivamente le lunghezze massime di metri 1,70, 1,60, 1,50 ed 1,40, che per la lunghezza di metri 1,30 si mantengono colle loro larghezze precisamente fra i ferri d'angolo e che per le restanti lunghezze di metri 0,40, 0,30, 0,20 e 0,10 simmetricamente si restringono rispetto al mezzo mediante rientranze ad angolo retto in numero di quattro, di tre, di due e di una in modo da conservare le larghezze minime di metri 0,603, 0,724, 0,845 e 0,966; che final-

mente le lamiere coi numeri 8, 9, 10, 11, 12 e 13 si mantengono colle loro larghezze fra le lamiere componenti le tavole della centina, e che ammettono rispettivamente le lunghezze di metri 1,30, 1,20, 1,10, 1,00, 0,90 e 0,80. Le estremità inferiori delle indicate lamiere sono determinate: dalle dimensioni già riferite del pezzo costituito dal guscio e dal collare di ghisa; dalla larghezza minima di metri 0,72 che ammette la centina in corrispondenza della sua estremità inferiore; e dalla larghezza massima di metri 1,144 che la centina stessa acquista nella sezione retta distante metri 0,17 dall'estremità or ora indicata. Si passa poi dalla larghezza di metri 0,72 all'altra maggiore di metri 1,144 mediante due smussature piane simmetricamente inclinate per rapporto alla tangente all'asse della centina nel suo punto più basso.

Le chiavarde per stringere fra di loro tutti i pezzi componenti le estremità delle centine hanno il diametro di metri 0,024, e le loro teste si possono considerare come prismi a base esagonale regolare col diametro di metri 0,04 e coll'altezza di metri 0,02.

55. **Peso di un'imposta di una centina.** — Nella determinazione di questo peso bisogna considerare: la parte di centina e la parte di lamiera verticale per gli attacchi inferiori dei pezzi dei timpani coi relativi ferri d'angolo, comprese fra la sezione estrema *ab* e la sezione retta determinata dal punto 1'; le lamiere tutte di riporto all'estremità inferiore; e finalmente il guscio di ghisa coll'annessa piastra. Avuto riguardo alle dimensioni di queste parti, otteniamo i seguenti risultati:

Volume della parte superiore all'estradosso della centina per attaccarvi i pezzi dei timpani	Mc.	0,008895
» della parte di centina posta sotto la sezione retta determinata dal punto 1'	»	0,034663
» delle ventisei lamiere di riporto .	»	0,468540
» delle teste delle chiavarde . . .	»	0,005113
Totale della parte di ferro	Mc.	0,517211;
Volume del guscio e della piastra di ghisa	Mc.	0,033637.

Moltiplicando il primo dei trovati volumi per 7770 ed il secondo per 7200, ossia pei pesi in chilogrammi del metro cubo di ferro e del metro cubo di ghisa, troviamo:

Che il peso della parte di ferro è di chilogrammi 4019;
» di ghisa » 242;

e che quindi il peso totale di un'imposta di una centina risulta di chilogrammi 4261.

56. **Dimensioni dei ferri componenti i collegamenti trasversali delle centine.** — Questi collegamenti per la parte di centina compresa fra la sezione infima *ab* e la sezione *cd* (*Fig.* 112), sono situati in corrispondenza delle sezioni rette determinate dai punti II, IV, VI, VIII, X, XII, XIV e XVI.

I ferri con sezione a T, pei collegamenti i quali corrispondono alle sezioni rette determinate dai punti II, VI, X e XVI, hanno metri 0,16 per la larghezza della tavola, metri 0,08 per sporgenza del gambo e metri 0,01 per grossezza della tavola e del gambo. Le lamiere, con contorno semi-circolare da una parte, hanno grossezza di metri 0,01, e questo contorno riesce tangente ai tre ferri a T che si trovano serrati fra due lamiere compagne. La totale lunghezza di questi collegamenti è di metri 1,568, e le loro altezze risultano:

Di metri 1,032 pel collegamento nel punto II;
» 0,926 » VI;
» 0,842 » X;
» 0,778 » XIV.

Deducendo metri 0,02 dalle altezze trovate si hanno quelle delle lamiere con contorno semi-circolare, e la metà di questa differenza rappresenta la loro larghezza. Il diametro del loro semi-circolo si ottiene togliendo dalle riportate totali altezze metri 0,18.

I ferri con sezione a T, pei collegamenti trasversali delle centine in corrispondenza delle sezioni rette determinate dai punti IV, VIII, XII, e XVI, sono inchiodati ad altri ferri a T attaccati alle centine e che servono da nervature. I primi ferri a T hanno lunghezza di metri 1,548, larghezza di tavola di metri 0,14, sporgenza del gambo di metri 0,065 e grossezza di metri 0,01. Gli altri che servono da nervature hanno la tavola larga metri 0,16, il gambo sporgente metri 0,08 e la grossezza di metri 0,01. La loro altezza dipende da quella della centina, e risulta:

Che quest'altezza è di metri 0,976 nel punto IV;
» 0,880 » VIII;
» 0,808 » XII;
» 0,754 » XVI.

Le lamiere di riporto, che si trovano fra le centine ed i ferri a T per unirvi i collegamenti trasversali, hanno altezze eguali a quelle dei ferri a T medesimi diminuite di metri 0,18, larghezze di metri 0,16 e grossezze di metri 0,01.

Tutti i chiodi pei collegamenti trasversali delle centine hanno il fusto col diametro di metri 0,02.

57. **Pesi dei collegamenti trasversali per la parte di centina compresa fra le sezioni rette** *ab* e *cd* (*Fig.* 112). — I collegamenti di cui vogliamo ora trovare i pesi sono quelli già indicati nel precedente numero, posti in corrispondenza delle sezioni rette determinate dai punti II, IV, VI, VIII, X, XII, XIV, XVI, ed ecco i risultati che vi corrispondono.

Pel collegamento nel punto II

Volume dei ferri a T disposti orizzontalmente Mc. 0,007294
» dei ferri a T inchiodati alla centina » 0,004762
» delle lamiere con contorno semicircolare » 0,009080
» delle lamiere di riporto . . . . . » 0,002726
» delle capocchie dei chiodi . . . . » 0,000695

Totale Mc. 0,024557,

al qual volume corrisponde il peso di chilogrammi 191.

Pel collegamento nel punto IV

Volume dei ferri a T disposti orizzontalmente Mc. 0,006347
» dei ferri a T inchiodati alla centina » 0,004685
» delle lamiere di riporto . . . . » 0,002547
» delle capocchie dei chiodi . . . » 0,000238

Totale Mc. 0,013817,

ed il peso che corrisponde a questo volume è di chilogrammi 107.

Pel collegamento nel punto VI

Volume dei ferri a T disposti orizzontalmente Mc. 0,007294
» dei ferri a T inchiodati alla centina » 0,004253
» delle lamiere con contorno semicircolare » 0,007675
» delle lamiere di riporto . . . . » 0,002387
» delle capocchie dei chiodi . . . » 0,000655

Totale Mc. 0,022264,

ed il peso che vi corrisponde risulta di chilogrammi 173.

Pel collegamento nel punto VIII

Volume dei ferri a T disposti orizzontalmente Mc. 0,006347
» dei ferri a T inchiodati alla centina » 0,004224
» delle lamiere di riporto . . . . » 0,002240
» delle capocchie dei chiodi . . . » 0,000238

Totale Mc. 0,013049,

ed il peso relativo a questo volume è di chilogrammi 101.

Pel collegamento nel punto X

Volume dei ferri a T disposti orizzontalmente Mc. 0,007294
» dei ferri a T inchiodati alla centina » 0,003850
» delle lamiere con contorno semicircolare » 0,006630
» delle lamiere di riporto . . . . » 0,002118
» delle capocchie dei chiodi . . . » 0,000576

Totale Mc. 0,020468,

ed il peso corrispondente a questo volume è di chilogrammi 159.

Pel collegamento nel punto XII

Volume dei ferri a T disposti orizzontalmente Mc. 0,006347
» dei ferri a T inchiodati alla centina » 0,003878
» delle lamiere di riporto . . . . » 0,002010
» delle capocchie dei chiodi . . . » 0,000199

Totale Mc. 0,012434,

al qual volume corrisponde il peso di chilogrammi 97.

Pel collegamento nel punto XIV

Volume dei ferri a T disposti orizzontalmente	Mc.	0,007294
» dei ferri a T inchiodati alla centina .	»	0,003542
» delle lamiere a contorno semicircolare	»	0,005874
» delle lamiere di riporto	»	0,001914
» delle capocchie dei chiodi	»	0,000576
Totale	Mc.	0,019200,

ed il peso corrispondente a questo volume risulta di chilogrammi 149.

Pel collegamento nel punto XVI

Volume dei ferri a T disposti orizzontalmente	Mc.	0,006347
» del ferri a T inchiodati alla centina .	»	0,003619
» delle lamiere di riporto	»	0,001837
» delle capocchie dei chiodi	»	0,000199
Totale	Mc.	0,012002,

al qual volume corrisponde il peso di chilogrammi 93.

Riassumendo, abbiamo che i pesi W^{IV} dei collegamenti posti in corripondenza dei punti II, IV, VI, VIII, X, XII, XIV e XVI, risultano come appare dalla tavola che segue:

Pel collegamento in	II	chilogrammi	191;
»	IV	»	107;
»	VI	»	173;
»	VIII	»	101;
»	X	»	159;
»	XII	»	97;
»	XIV	»	149;
»	XVI	»	93.

58. **Forze verticali operanti sulla parte di centina** *abdc* (*Fig.* 112) **e producenti spinte sui piedritti.** — Queste forze sono date dai valori di W (Num. 44), dai valori di W′ (Num. 48), dai valori di W″ (Num. 49), dai valori di W‴ (Num. 53) ai quali bisogna aggiungere il valore di W_o''' del peso di un'imposta di una centina ottenuto nel numero 55, e finalmente dai valori di W^{IV} del numero

precedente. I pesi W, W' e W'' operano coi loro punti d'applicazione nei piani delle sezioni rette 0'0''', 2'2''', 4'4''', 6'6''', 8'8''', 10'10''', 12'12''', 14'14''' e 16'16'''; ma questi punti d'applicazione sono lungi dal coincidere coi punti 0, II, IV, VI, VIII, X, XII, XIV e XVI dell'asse della centina. I pesi W''' per le otto parti di centina 1'1''' 3'''3', 3'3''' 5'''5', 5'5''' 7'''7', 7'7''' 9'''9', 9'9''' 11'''11', 11'11''' 13'''13', 13'13''' 15'''15' e 15'15''' *dc* si possono considerare, con un'approssimazione più che sufficiente per il problema che stiamo risolvendo, siccome operanti, non solo nei piani delle sezioni rette 2'2''', 4'4''', 6'6''', 8'8''', 10'10''', 12'12''', 14'14''' e 16'16''', ma anche nei punti II, IV, VI, VIII, X, XII, XIV e XVI. Il peso W_o''' di un'imposta si può approssimativamente ritenere come applicato in un punto dell'asse della centina fra 0 e I; e finalmente i pesi W^{IV} sono effettivamente applicati in II, IV, VI, VIII, X, XII, XIV e XVI.

Riservandoci, per ciascuno dei pesi W, W' e W'' che non sono o che non si possono supporre applicati ai centri delle sezioni su cui operano, di tener conto dell'azione di una coppia che nasce dal trasporto dei pesi stessi ai centri delle sezioni rispettive, ed analogamente di considerare l'effetto di una coppia che nasce dal trasporto del peso W_o''' nel punto 0 dell'asse della centina, possiamo conchiudere che le forze verticali P operanti sulla parte di centina *abdc* e producenti spinte sui piedritti si riassumono come risulta dalla tavola che segue:

Indicazione dei punti d'applicazione della forza P	Forze P
0	9295^{Cg}
II	6636
IV	7325
VI	7571
VIII	7622
X	7176
XII	7282
XIV	8396
XVI	1613.

59. **Determinazione delle spinte orizzontali dovute alle forze verticali P.** — Considereremo separatamente le forze verticali che trovansi inscritte nella tabella del numero precedente; ciascuna di queste forze si supporrà applicata in modo simmetrico da una parte

e dall'altra del piano verticale passante pel mezzo della centina, e con quest'ipotesi si calcoleranno le spinte orizzontali corrispondenti adottando la formola (*Deformazioni dei corpi elastici studiate nei loro più generali rapporti coi lavori della moderna ingegneria*, Num. 34).

$$Q_1 = P\frac{-\frac{1}{\Omega}(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta) + \frac{r^2}{I_x}\left[(\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\beta) + 2\cos\alpha(\cos\beta + \beta\cos\beta - \cos\alpha - \alpha\operatorname{sen}\alpha)\right]}{\frac{1}{\Omega}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1 + 2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right.}.$$

Le lettere che vi sono in questa formola rappresentano:

r il raggio dell'asse della centina;

α l'angolo corrispondente alla metà dell'asse della centina;

β l'angolo, colla verticale, determinante la sezione alla quale trovasi applicato il peso che si considera;

P questo peso;

Ω la superficie della sezione retta della centina ed

I_x il suo momento d'inerzia rispetto alla orizzontale passante pel suo centro di superficie;

Q_1 la spinta orizzontale domandata.

Le quantità r ed α sono costanti per una stessa centina e nel caso concreto si ha

$$r = 55^m,083,$$
$$\alpha = 26^o\ 59'\ 29''.$$

Le quantità Ω ed I_x si devono pure supporre costanti nell'applicazione della formola determinatrice di Q_1, ed in questo caso particolare abbiamo ammesso che l'altezza media della centina sia la media aritmetica fra l'altezza $0^m,75$ in chiave e l'altezza $1^m,15$ all'imposta. Quest'altezza media risulta di metri 0,95, e, ritenendo che la sezione retta HIKL (*Fig.* 109) della centina sia determinata dall'altezza suddetta e dai valori di e, e', e'' ed e''' che trovansi nel numero 53, abbiamo

$$\Omega = 0^{mq},028312,$$
$$I_x = 0,004346553309.$$

Il denominatore della formola che vogliamo impiegare per la determinazione di Q_1, essendo funzione di quantità costanti, è pure

costante qualunque sia il peso che si considera; e questo denominatore, calcolato una volta per sempre coi citati valori di r, α, Ω ed I_x risulta (per la centina in quistione) eguale al numero 4170,44.

Venendo ora alla determinazione delle spinte Q_1, abbiamo:

Per il peso applicato in 0 (*Fig.* 112)

$$P = 9295^{Cg}$$
$$\beta = 26^{\circ}\,38'\,30'',$$

e quindi

$$Q_1 = 581^{Cg};$$

Per il peso applicato in II

$$P = 6636^{Cg}$$
$$\beta = 24^{\circ}\,22'\,44'',$$

e

$$Q_1 = 3096^{Cg};$$

Per il peso applicato in IV

$$P = 7325^{Cg}$$
$$\beta = 22^{\circ}\,9'\,8'',$$

d'onde

$$Q_1 = 6945^{Cg};$$

Per il peso applicato in VI

$$P = 7571^{Cg}$$
$$\beta = 19^{\circ}\,57'\,24'',$$

cosicchè

$$Q_1 = 9409^{Cg};$$

Per il peso applicato in VIII

$$P = 7622^{Cg}$$
$$\beta = 17^{\circ}\,47'\,19'',$$

e quindi

$$Q_1 = 12205^{Cg};$$

Per il peso applicato in X

$$P = 7176^{Cg}$$
$$\beta = 15^{\circ}\,38'\,39'',$$

e

$$Q_1 = 13870^{Cg};$$

Per il peso applicato in XII

$$P = 7282^{cs}$$
$$\beta = 13° 31' 10'',$$

d'onde

$$Q_1 = 16258^{cs};$$

Per il peso applicato in XIV

$$P = 8396^{cs}$$
$$\beta = 11° 24' 43'',$$

e quindi

$$Q_1 = 21441^{cs};$$

Finalmente per il peso applicato in XVI

$$P = 1613^{cs}$$
$$\beta = 9° 19' 6'',$$

e

$$Q_1 = 4390^{cs}.$$

Sommando tutti i trovati valori di Q_1, otteniamo la totale spinta orizzontale che una centina produce contro i piedritti a motivo delle forze verticali P applicate alla parte *abdc* ed alla sua simmetrica rispetto al piano verticale passante pel suo mezzo. Facendo questa somma si trova

$$Q_1 = 88195^{cs}.$$

60. **Forze orizzontali operanti sulla parte di centina** *abdc* (*Fig.* 112) **e spinte orizzontali ad esse dovute.** — Queste forze sono quelle inscritte ed indicate colla lettera Σ nella seconda colonna della seconda tabella del numero 44. I loro punti d'applicazione si trovano nei piani delle sezioni rette 0'0''', 2'2''', 4'4''', 6'6''', 8'8''', 10'10''', 12'12''', 14'14''' e 16'16'''; ma non coincidono coi punti 0, II, IV, VI, VIII, X, XII, XIV e XVI in cui questi piani tagliano l'asse della centina. Segue da ciò che, supponendo le dette forze applicate nei punti or ora indicati, bisognerà in seguito tener conto per ciascuna di esse di una coppia nella valutazione della spinta definitiva.

Per calcolare la spinta orizzontale dovuta alle indicate forze nel-

l'ipotesi che esse siano rispettivamente applicate ai suindicati punti dell'asse e che la centina sia simmetricamente sollecitata, ci serviremo della formola (*Deformazioni dei corpi elastici studiate nei loro più generali rapporti coi lavori della moderna ingegneria*, Num. 35).

$$Q_1 = S \frac{+\frac{1}{\Omega}(\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\beta) + \frac{r^2}{I_x}\left[\beta(1+2\cos\beta\cos\alpha) - \operatorname{sen}\beta\cos\beta - 2\operatorname{sen}\beta\cos\alpha\right]}{\frac{1}{\Omega}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1+2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]}$$

nella quale S rappresenta le forze Σ suindicate, mentre le lettere r, α, β, Ω ed I_x hanno i significati medesimi che loro furono attribuiti nel precedente numero.

Per l'applicazione dell'ultima citata formola osserviamo che i valori di r, α, Ω, I_x e del denominatore sono quelli già stati dichiarati nel precedente numero, cosicchè si ha:

Per la forza orizzontale applicata in 0

$$S = 648^{cg}$$
$$\beta = 26^\circ\,38'\,30'',$$

e quindi

$$Q_1 = 630^{cg};$$

Per la forza orizzontale applicata in II

$$S = -29^{cg}$$
$$\beta = 24^\circ\,22'\,44'',$$

d'onde

$$Q_1 = -22^{cg};$$

Per la forza orizzontale applicata in IV

$$S = -196^{cg}$$
$$\beta = 22^\circ\,9'\,8'',$$

e

$$Q_1 = -118^{cg};$$

Per la forza orizzontale applicata in VI

$$S = 350^{cg}$$
$$\beta = 19^\circ\,57'\,24'',$$

e quindi

$$Q_1 = 160^{Cg};$$

Per la forza orizzontale applicata in VIII

$$S = 804^{Cg}$$
$$\beta = 17^{\circ}\,47'\,19'',$$

d'onde

$$Q_1 = 254^{Cg};$$

Per la forza orizzontale applicata in X

$$S = 1598^{Cg}$$
$$\beta = 15^{\circ}\,38'\,39'',$$

e

$$Q_1 = 372^{Cg};$$

Per la forza orizzontale applicata in XII

$$S = 3068^{Cg}$$
$$\beta = 13^{\circ}\,31'\,10'',$$

e quindi

$$Q_1 = 472^{Cg};$$

Per la forza orizzontale applicata in XIV

$$S = 5558^{Cg}$$
$$\beta = 11^{\circ}\,24'\,43'',$$

d'onde

$$Q_1 = 528^{Cg};$$

Per la forza orizzontale applicata in XVI

$$S = -2849^{Cg}$$
$$\beta = 9^{\circ}\,19'\,6'',$$

e

$$Q_1 = -150^{Cg}.$$

Facendo la somma algebrica di tutti i valori di Q_1 trovati in questo numero, otteniamo la totale spinta orizzontale Q_0 che una centina produce contro i piedritti a motivo delle forze orizzontali

$S = \Sigma$ applicate alla parte *abcd* ed alla sua simmetrica rispetto al piano verticale passante pel suo mezzo. Questa somma dà

$$Q_o = 2126^{Cg}.$$

61. **Coppie operanti sulla parte di centina** *abdc* (*Fig.* 112) **e producenti spinte sui piedritti.** — Il peso W_ρ''' di un'imposta di una centina si è supposto, nella deduzione della corrispondente spinta orizzontale, applicato al punto 0, mentre in realtà trovasi ad una certa distanza da questo punto. Segue da ciò: che, per non turbare l'equilibrio del sistema, abbiamo implicitamente supposte applicate in 0 (*Fig.* 112 e 119) due forze eguali e contrarie a W_o'''; che abbiamo finora considerata la forza W_o''' in 0; e che ci resta da considerare la coppia prodotta dalle due forze W_o''' e $-W_o'''$, la prima applicata al centro di gravità G del corpo costituente l'imposta e la seconda in 0. Per conoscere poi l'intensità di questa coppia è necessario determinare la posizione della verticale passante pel punto G, ciò che non si può fare in modo esatto se non con operazioni lunghe e difficili, sia per la differente densità del ferro e della ghisa, sia per la forma del guscio, sia per esser tutte le lamiere racchiuse fra due superficie cilindriche non parallele verso l'intradosso e verso l'estradosso della centina. Se invece ci accontentiamo di un metodo approssimato, come quello che generalmente si segue nella ricerca dei centri di gravità dei volumi componenti gli sterri e gli interri, questa determinazione riesce relativamente spedita, e si finisce per trovare che la distanza $\overline{OG_1}$, ossia il braccio della coppia suindicata, risulta di metri 0,40 (*i*), e che

(*i*) Ecco in che consiste il metodo che abbiamo seguìto per la determinazione della distanza $\overline{OG_1}$ (*Fig.* 119). Disegnata nella scala del $\frac{1}{20}$ l'elevazione di un'imposta e tirata la orizzontale A'X, abbiamo condotto da A, B, C, D, D_1, E, F, U ed I altrettante verticali fino ad incontrare la A'X in A', B', C', D', D'_1 E', F', H' ed I'. Fatto questo, abbiamo calcolate le aree delle sezioni rette KL, FM, NP, QR (esclusa la parte riferentesi alla centina), IJ (per la sola parte riferentesi alla centina), ST, HU e VI che, non tenendo conto del vano semi-cilindrico *abc*, furono ordinatamente trovate di centimetri quadrati 2880, 4576, 4408, 2725, 2507, 302, 48, 60 e 60. Assumendo 2 millimetri per rappresentare 1 decimetro quadrato, abbiamo portato le aree suddette in A'A'', B'B'', C'C'', D'D'',D'Δ'', $D'\Delta''_1 = D'_1D''_1$, E'E'', H'H'' ed I'I'' perpendicolarmente alla A'X, e quindi abbiamo tirato le rette

quindi il valore della coppia corrispondente al peso $W_o''' = 4261^{Cg}$ è $1704^{Cg.m}$.

Nel determinare le spinte orizzontali, di cui si fa cenno nel numero 59, si è supposto che i pesi P siano applicati nei punti (*Fig.* 112) 0, II, IV, VI, VIII, X, XII, XIV e XVI, senza tener conto della circostanza che la parte $P' = W + W' + W''$ (Num. 44, 48, 49 e 58)

A''B'', B''C'', C''D'', $\Delta''_1 D''_1$, $\Delta''E''$, F'H'' ed H''I''. Ammessa la regola delle sezioni ragguagliate (*Arte di fabbricare, Geometria pratica applicata all'arte del costruttore,* Num. 215), che cioè i volumi compresi fra le sezioni KL ed FM, FM ed NP, NP e QR, QR ed IJ (per la sola parte riferentesi alla centina), QR ed ST (esclusa la parte riferentesi alla centina), F ed HU, HU e VI, siano dati dalla semi-somma delle aree delle due sezioni estreme per la loro distanza, risultano tali volumi rispettivamente proporzionali alle aree delle figure A'B' B''A'', B'C' C''B'', C'D' D''C'', D'D'_1 $D''_1\Delta''_1$, D'E' E''Δ'', F'H' H'' ed H'I' I''H''; ed i centri di superficie g'_1, g'_2, g'_3, g'_4, g'_5, g'_6 e g'_7 di queste figure determinano le verticali sulle quali si trovano i pesi delle parti d'imposta KLMF, FMPN, NPRQ, QRJI (per la sola parte riferentesi alla centina), QRTS (esclusa la parte riferentesi alla centina), FUH ed HUIV, nell'ipotesi che si faccia astrazione della diversità di peso specifico fra il ferro e la ghisa.

Calcolando col metodo delle sezioni ragguagliate, i volumi indicati risultano:

Di metri cubi 0,067850 il primo KLMF;
» 0,277606 il secondo FMPN;
» 0,178325 il terzo NPRQ;
» 0,010059 il quarto QRJI (per la sola parte riferentesi alla centina);
» 0,089425 il quinto QRTS (esclusa la parte riferentesi alla centina);
» 0,001185 il sesto FUH;
» 0,005058 il settimo HUIV.

E quindi si ha un volume totale di metri cubi 0,629508. Se ora da questo volume totale togliamo quello del vano semi-cilindrico *abc* che è di metri cubi 0,037699, otteniamo per volume di un'imposta metri cubi 0,591809. Il volume di un'imposta ottenuto col metodo delle sezioni ragguagliate è un po' maggiore di quello stato ottenuto nel numero 55, giacchè, assieme comprendendo la parte di ferro e quella di ghisa, risultò soltanto di metri cubi 0,550848. La discrepanza proviene in gran parte da ciò che nell'applicare il metodo delle sezioni ragguagliate si è supposto che le parti di centina comprese fra le sezioni rette NP e QR, QR ed ST siano terminate

di ciascuno di questi pesi è effettivamente applicata nei punti 0′, 2′, 4′, 6′, 8′, 10′, 12′, 14′ e 16′. Se adunque supponiamo che sia MN (*Fig.* 110) la sezione trasversale determinata da uno qualunque dei punti suddetti e che sia O il punto in cui il piano di questa sezione incontra l'asse della centina, coll'ammettere che la parte P′ del peso P sia applicata in O, mentre effettivamente è applicata

lateralmente da una superficie continua, mentre realmente sono terminate da superficie poliedriche inscritte nelle prime. Così facendo abbiamo supposto che il peso dell'imposta della centina sia distante dal punto 0 più di quanto è realmente, e quindi abbiamo fatto cosa in favore della stabilità, giacchè abbiamo aumentato il braccio della coppia dérivante dal trasporto di questo peso nel punto ora indicato.

Il peso corrispondente al volume del vano semi-cilindrico ha il suo punto d'applicazione nel punto g_8, determinato col prendere in $\overline{A\,g_8}$ la distanza del centro di superficie del semicircolo *abc* dal suo centro A, la qual distanza è di metri 0,104. Il punto g_8 si è proiettato in g'_8 sull'orizzontale A′ X.

Portando sulle verticali determinate dai punti g'_1, g'_2, g'_3, g'_4, g'_5, g'_6, g'_7 e g'_8 lunghezze proporzionali ai pesi, o, giacchè si suppone l'imposta omogenea, lunghezze proporzionali ai volumi delle corrispondenti parti dell'imposta medesima, abbiamo ottenuto le forze **1**, **2**, **3**, **4**, **5**, **6**, **7** ed **8**; siamo quindi passati alla costruzione del poligono delle forze che tutto è rappresentato nella retta $\alpha\beta$ e del relativo poligono funicolare I II III IV V VI VII VIII IX (Nota *h*) coi suoi lati paralleli ai raggi emananti dal polo Ω. Dove la retta condotta per VIII parallelamente al raggio Ω**8** incontra la retta condotta per I parallelamente al raggio Ω**9** abbiamo il punto IX, il quale determina la verticale IX G passante pel centro di gravità dell'imposta considerata.

Dobbiamo ora portare a posto il punto 0 (*Fig.* 112), ossia il centro della sezione retta determinata dal punto 0′, e questo è facile a farsi quando si conosca la lunghezza dell'arco EO. Ora si sa che l'angolo della sezione *ab* colla verticale (Num. 52) è di 26° 59′ 29″, e che l'angolo della sezione 0′ 0‴ pure colla verticale (Num. 50) è di 26° 38′ 30″. L'angolo che i piani delle indicate sezioni fanno fra di loro è adunque di 0° 20′ 59″, e la lunghezza del corrispondente arco EO (di raggio 55^m,083) risulta di metri 0,336. Portando questa lunghezza da A in 0 sulla figura 119 nella scala di $\frac{1}{20}$, conducendo l'orizzontale $\overline{0\,G_1}$ fino ad incontrare la verticale IX G e misurando la detta orizzontale che risulta di metri 0,40, otteniamo il domandato braccio della coppia risultante dalle due forze W_o''' e $-W_o'''$, la prima operante sulla verticale determinata dal punto G e la seconda sulla verticale determinata dal punto 0.

in M, abbiamo implicitamente accettata l'esistenza della coppia prodotta dalle due forze P′ e — P′, la prima applicata in M e la seconda in O. Il braccio di questa coppia è la orizzontale $\overline{ML}$, cosicchè dal triangolo MLO rettangolo in M, in cui $\overline{MO} = c$ (Num. 51) ed $MOL = \beta$ (Num. 50), risulta

$$\overline{ML} = c \operatorname{sen} \beta.$$

Facendo adunque il prodotto dei diversi valori di P′ pei corrispondenti valori di $c \operatorname{sen} \beta$ e riassumendo i risultati in una tabella, troviamo (*Fig.* 112):

Indicazione delle sezioni rette	Coppie derivanti dai pesi $P' = W + W' + W''$
0′ 0″′	— 1578$^{Cg.m}$
2′ 2″′	— 1531
4′ 4″′	— 1520
6′ 6″′	— 1359
8′ 8″′	— 1192
10′ 10″′	— 945
12′ 12″′	— 816
14′ 14″′	— 779
16′ 16″′	— 79.

Analogamente, nel determinare le spinte orizzontali di cui parlasi nel numero 60, si è ammesso che le forze orizzontali S, le quali non sono altro che le forze Σ del numero 44, siano applicate nei punti 0, II, IV, VI, VIII, X, XII, XIV e XVI, mentre in realtà sono applicate nei punti 0′, 2′, 4′, 6′, 8′, 10′, 12′, 14′ e 16′. Segue da ciò che, per una qualunque delle forze S applicata in M (*Fig.* 110) e supposta applicata in O, si deve tener conto di una coppia prodotta dalle due forze + S e — S, la prima operante in M e l'altra in O, il cui braccio è $\overline{OL}$. Ma dal triangolo rettangolo MLO, in cui $\overline{MO} = c$ (Num. 51) ed $MOL = \beta$ (Num. 50), risulta

$$\overline{OL} = c \cos \beta;$$

cosicchè riesce facile ottenere le coppie derivanti dalle forze $S = \Sigma$ moltiplicando i loro valori pei rispettivi bracci $c \cos \beta$. Facendo queste operazioni, si ottengono i risultamenti raccolti nella tavola che segue (*Fig.* 112):

Indicazione delle sezioni rette	Coppie derivanti dalle forze orizzontali $S = \Sigma$
0′ 0‴	— 387 Cg.m
2′ 2‴	17
4′ 4‴	111
6′ 6‴	— 192
8′ 8‴	— 430
10′ 10‴	— 836
12′ 12‴	— 1569
14′ 14‴	— 2784
16′ 16‴	1403.

Componendo per ciascuna delle sezioni considerate le relative coppie col fare le somme algebriche dei corrispondenti momenti, otteniamo i valori di μ inscritti nella seguente tavola:

Indicazione delle sezioni rette	Valori delle coppie μ
0′ 0‴	— 261 Cg.m
2′ 2‴	— 1514
4′ 4‴	— 1409
6′ 6‴	— 1551
8′ 8‴	— 1622
10′ 10‴	— 1781
12′ 12‴	— 2385
14′ 14‴	— 3563
16′ 16‴	1324.

62. **Determinazione delle spinte orizzontali dovute alle coppie** μ. — Ciascuna delle coppie, di cui abbiamo i momenti nell'ultima tavola del precedente numero, si supporrà operare in modo simmetrico da una parte e dall'altra del piano verticale passante pel mezzo della centina, e la spinta orizzontale corrispondente si calcolerà mediante la formola (*Deformazioni dei corpi elastici studiate nei loro più generali rapporti coi lavori della medesima ingegneria*, Num. 36)

$$Q_1 = \mu \frac{2\frac{r}{I_x}(\operatorname{sen}\beta - \beta\cos\alpha)}{\frac{1}{\Omega}(\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha) + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1+2\cos^2\alpha) - 3\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]},$$

nella quale μ rappresenta i momenti suindicati, mentre le lettere r, α, β, Ω ed I_x hanno i significati medesimi che loro furono attribuiti nel numero 59.

Osserviamo poi che i valori delle quantità r, α, Ω ed I_x ed il denominatore dell'ultima formola sono quelli stessi già stati adoperati nei numeri 59 e 60, cosicchè per ciascuna delle sezioni rette determinate dai punti (*Fig.* 112) 0′, 2′, 4′, 6′, 8′, 10′, 12′, 14, e 16′ dovremo soltanto tener conto della variabilità dell'angolo β e del momento μ. Applicando l'ultima formola troviamo:

Per la coppia relativa alla sezione retta 0′ 0‴

$$\mu = -261^{\text{Cg.m}}$$
$$\beta = 26° 38' 30''$$

e

$$Q_1 = -11^{\text{Cg}};$$

Per la coppia relativa alla sezione retta 2′ 2‴

$$\mu = -1514^{\text{Cg.m}}$$
$$\beta = 24° 22' 44'',$$

e quindi

$$Q_1 = -310^{\text{Cg}};$$

Per la coppia relativa alla sezione retta 4′ 4‴

$$\mu = -1409^{\text{Cg.m}}$$
$$\beta = 22° 9' 8'',$$

d'onde

$$Q_1 = -279^{\text{Cg}};$$

Per la coppia relativa alla sezione retta 6′ 6‴

$$\mu = -1551^{\text{Cg.m}}$$
$$\beta = 19° 57' 24'',$$

e

$$Q_1 = -292^{\text{Cg}};$$

Per la coppia relativa alla sezione retta 8′ 8‴

$$\mu = -1585^{\text{Cg.m}}$$
$$\beta = 17° 47' 19'',$$

e quindi

$$Q_1 = -284^{\text{Cg}};$$

Per la coppia relativa alla sezione retta 10′ 10″′

$$\mu = -1781^{Cg.m}$$
$$\beta = 15° 38' 39'',$$

d'onde

$$Q_1 = -285^{Cg};$$

Per la coppia relativa alla sezione retta 12′ 12″′

$$\mu = -2385^{Cg.m}$$
$$\beta = 13° 31' 10'',$$

per cui

$$Q_1 = -341^{Cg};$$

Per la coppia relativa alla sezione retta 14′ 14″′

$$\mu = -3563^{Cg.m}$$
$$\beta = 11° 24' 43'',$$

e quindi

$$Q_1 = -441^{Cg};$$

Per la coppia relativa alla sezione retta 16′ 16″′

$$\mu = 1324^{Cg.m}$$
$$\beta = 9° 19' 16'',$$

d'onde

$$Q_1 = 137^{Cg}.$$

Sommando algebricamente tutti i valori di Q_1 inscritti in questo numero, otteniamo la totale spinta orizzontale che una centina produce contro i piedritti a motivo delle coppie d'intensità μ applicate alla parte *abcd* ed alla sua simmetrica rispetto al piano verticale passante pel suo mezzo. Chiamando Q_c questa spinta abbiamo

$$Q_c = -2106^{Cg}.$$

63. **Determinazione dei punti in cui la curva** (*Fig.* 86) 0′ 8′ 16′ *i* **è incontrata dalla verticale passante pei punti** 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, e *h*. — Questi punti si possono determinare mediante le loro coordinate per rapporto agli assi ortogonali *hx* ed *hy*. Riesce facile trovare le loro ascisse, giacchè i punti suddetti distano di 1 metro l'uno dall'altro; per ottenere le ordinate, conviene ricorrere alla formola determinatrice di *y* stata stabilita

nel numero 32 coi valori di d e di R che nello stesso numero si sono indicati. Facendo i calcoli otteniamo:

Che al punto d'ascissa	$\overline{h\,17} = 8^m$	corrisponde l'ordinata	0^m,614;
»	$\overline{h\,18} = 7$	»	0, 478;
»	$\overline{h\,19} = 6$	»	0, 364;
»	$\overline{h\,20} = 5$	»	0, 268;
»	$\overline{h\,21} = 4$	»	0, 189;
»	$\overline{h\,22} = 3$	»	0, 128;
»	$\overline{h\,23} = 2$	»	0, 085;
»	$\overline{h\,24} = 1$	»	0, 059;
»	0	»	0, 050.

Gli ultimi otto punti, di cui or ora abbiamo riportato le ascisse e le ordinate per rapporto agli assi hx ed hy, sono indicati sulla figura 112 in 18′, 19′, 20′, 21′, 22′, 23′, 24′ ed i.

64. **Determinazione degli angoli che le sezioni rette della centina passanti pei punti** (*Fig.* 112) c, 18′, 19′, 20′, 21′, 22′, 23′, 24′ **ed** i **fanno colla verticale.** — Già abbiamo trovato: nel numero 50, che l'angolo colla verticale della sezione retta della centina 16′-16‴ è di 9° 19′ 6″; nel numero 52, che l'angolo della sezione retta cd colla sezione retta 15′ 15‴ è di 2° 5′ 26″. Il punto c fu determinato in modo da essere l'angolo di 15′ 15‴ con 16′ 16‴ eguale a quello di 16′ 16‴ con cd, e quindi l'angolo della sezione retta cd colla verticale è dato da

$$9^\circ\,19'\,6'' - \frac{1}{2}\,2^\circ\,5'\,26'' = 8^\circ\,16'\,23''.$$

Per ottenere gli angoli che le sezioni rette 18′ 18‴, 19′ 19‴, 20′ 20‴, 21′ 21‴, 22′ 22‴, 23′ 23‴, 24′ 24‴ ed hk fanno pure colla verticale, ricorriamo alla formola (1) del numero 50 e, pei valori già trovati (Num. 63) delle ascisse e delle ordinate dei punti 18′, 19′, 20′, 21′, 22′, 23′, 24′ ed h, giungiamo ai seguenti risultati:

Indicazione delle sezioni	Angoli β colla verticale
18′ 18‴	7° 14′ 10″
19′ 19‴	6 11 55
20′ 20‴	5 9 46
21′ 21‴	4 7 42

22′ 22″′	3	5	43
23′ 23″′	2	3	47
24′ 24″′	1	1	53
hk	0	0	0.

65. **Pressione massima verticale trasmessa dalle travi trasversali alla parte di centina** (*Fig.* 110) *cdkh*. — Queste travi trasversali sono in numero di nove, ossia quelle corrispondenti ai punti (*Fig.* 86) 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 ed *h*. Si può ammettere che ciascuna delle prime otto trasmetta all'indicata parte di centina l'intera pressione R_m stata trovata di chilogrammi 2927 (Num. 29) e che l'ultima trasmetta solamente la metà di questa pressione medesima. Se adunque chiamiamo Π l'intiera pressione massima verticale trasmessa dalle travi trasversali alla parte di centina (*Fig.* 112) *cdkh*, abbiamo

$$\Pi = 24879^{Cg},5.$$

66. **Peso portato dalla parte di centina** (*Fig.* 112) *cdkh* **a motivo dei ferri d'angolo della longarina e dell'interposta lamiera costituente la parte piena dei timpani.** — Già si è supposto (Num. 48) che la metà della parte di longarina (*Fig.* 86) 16-17 sia portata dal nodo 16: cosicchè il peso che qui ci proponiamo di determinare è la somma di quello corrispondente a metri 8,50 di lunghezza di due ferri d'angolo, aventi lati lunghi metri 0,10 e grossi metri 0,01, con quello della lamiera di altezza variabile e di spessezza $0^m,12$, compresa fra i detti ferri d'angolo e gli altri due che sono inchiodati superiormente all'estradosso della centina. L'altezza massima di questa lamiera è di metri 0,89 e di metri 0,25 la sua altezza minima; le altezze intermedie sono determinate dalla orizzontale e dalla curva circolare che superiormente ed inferiormente ne dànno il contorno.

Cercando i volumi dei ferri d'angolo e della lamiera indicati, non che quello delle capocchie dei chiodi, dai quali questa lamiera si trova attraversata, abbiamo ottenuto:

Volume dei ferri d'angolo	Mc. 0,032300
» della lamiera	» 0,045086
» delle capocchie dei chiodi . . .	» 0,002244
Totale	Mc. 0,079630;

cosicchè, essendo di 7770 chilogrammi il peso del metro cubo di ferro, il peso Π corrispondente al trovato volume risulta di chilogrammi 619.

67. **Distanze dei punti** 18′, 20′, 22′ e 24′ **dall'asse della centina.** — Queste distanze sono i valori di c da calcolarsi mediante la formola (1) del numero 51, e sostituendo successivamente in essa per x e per y le ascisse e le ordinate dei punti 18′, 20′, 22′ e 24 inscritte nel numero 63, troviamo i risultamenti della tavola che segue:

Indicazione dei punti per cui si vogliono le distanze dall'asse della centina	Distanze c dall'asse della centina
18′	0^m,490
20′	0, 482
22′	0, 478
24′	0, 475.

68. **Determinazione di alcuni angoli e di alcuni archi occorrenti per valutare il peso della parte di centina** (*Fig.* 112) *cd kh*. — Questi angoli sono quelli che le sezioni rette *cd*, 19′ 19‴, 21′ 21‴, 23′ 23‴ ed *hk* fanno colla verticale, già ottenuti nel numero 64; e quegli altri che le sezioni rette *cd* e 19′ 19‴, 19′ 19‴ e 21′ 21‴, 21′ 21‴ e 23′ 23‴, 23′ 23‴ ed *hk* fanno fra di loro. I primi degli indicati angoli sono riportati nella tavola che segue:

Indicazione delle sezioni	Angoli β colla verticale
cd	8° 16′ 23″
19′ 19‴	6 11 55
21′ 21‴	4 7 42
23′ 23‴	2 3 47
hk	0 0 0.

Gli altri si ottengono togliendo successivamente da ognuno degli angoli qui riportati quello che immediatamente lo segue; cosicchè si giunge ai risultati contenuti in questa tavola:

Indicazione delle sezioni	Angoli di due sezioni successive fra di loro
cd e 19′ 19‴	2° 4′ 18″
19′ 19‴ e 21′ 21‴	2 4 13
21′ 21‴ e 23′ 23‴	2 3 55
23′ 23‴ e *hk*	2 3 47.

Questi ultimi angoli servono per determinare gli sviluppi delle parti di asse della centina F XIX, XIX XXI, XXI XXIII e XXIII H, le quali sono archi circolari col raggio r di metri 55,083 e colle loro ampiezze definite dagli angoli medesimi. Tali sviluppi risultano quali sono riportati nella tavola che qui si presenta:

Indicazione delle parti dell'asse	Sviluppi L
F XIX	1^m,992
XIX XXI	1, 990
XXI XXIII	1, 985
XXIII H	1, 983.

69. **Peso della parte di centina** (*Fig.* 112) *cdkh*. — Nel fare questo peso comprenderemo anche quello dei ferri d'angolo posti sull'estradosso della centina, e, precisamente come già si è fatto nel numero 53 per una determinazione affatto analoga, calcoleremo l'altezza a della centina nelle sezioni rette determinate dai punti 18′, 20′, 22′ e 24′ e quindi la superficie Ω di queste stesse sezioni, onde passare ai volumi ed ai pesi delle parti *cd* 19′′′19′, 19′19′′′ 21′′′21′, 21′21′′′ 23′′′23′ e 23′23′′′ *kh*.

Le altezze a si calcolano colla formola (1) del numero 53, e si ottengono i risultati contenuti nella seguente tavola:

Indicazione dei punti determinanti le sezioni rette	Altezze a delle sezioni rette delle centine
18′	0^m,780
20′	0, 764
22′	0, 756
24′	0, 751.

Le superficie Ω si determinano con una formola analoga alla formola (2) del citato numero 53. Tenendo conto del fatto che già si è considerata nel numero 66 la lamiera costituente la parte piena dei timpani, e che per conseguenza le superficie Ω si riducono soltanto a quelle della centina propriamente detta e dei ferri d'angolo superiori all'estradosso, il termine costante del secondo membro della citata formola deve essere diminuito di 0,00408 a motivo della mancanza della lamiera verticale V (*Fig.* 109) e quindi la formola determinatrice di Ω risulta

$$\Omega = 0{,}020712 + 0{,}012\, a.$$

Applicando questa formola pei valori di a sopraindicati, abbiamo ottenuti i risultamenti inscritti nella tavola che segue:

Indicazione dei punti determinanti le sezioni rette	Superficie Ω delle sezioni rette
18′	0^{mq},030072
20′	0, 029880
22′	0, 029784
24′	0, 029712.

Moltiplicando successivamente le superficie Ω or ora indicate per le lunghezze L degli archi (*Fig.* 112) F XIX, XIX XXI, XXI XXIII e XXIII H inscritti nella terza tavola del numero precedente, otteniamo approssimativamente i volumi delle parti di centina e ferri d'angolo (*Fig.* 109) A′ fra le sezioni rette determinate dai punti (*Fig.* 112) c e 19′, 19′ e 21′, 21′ e 23′, 23′ ed h. Questi volumi risultano:

Per la parte di centina cd 19‴19′ di metri cubi 0,059903;
» 19′19‴ 21‴21′ » 0,059461;
» 21′21‴ 23‴23′ » 0,059121;
» 23′23‴ hh » 0,058919.

Il volume totale della parte di centina $cdhh$ è adunque di metri cubi 0,237404 ed il peso corrispondente Π″ di chilogrammi 1845.

Le osservazioni del numero 53, sul metodo stato seguìto per trovare i pesi in detto numero dedotti, convengono pure pel metodo or ora stato adottato nella ricerca del peso della parte di centina $cdhh$.

70. **Dimensioni dei ferri componenti i collegamenti trasversali per la parte di centina** (*Fig.* 112) $cdhh$. — Questi ferri hanno quasi tutte le loro dimensioni identiche a quelle già state indicate nel numero 56 pei collegamenti analoghi nella parte di centina $abdc$; e solamente le dimensioni nel senso normale all'asse della centina sono quelle che variano siccome dipendenti dall'altezza della sezione della centina stessa.

I collegamenti in corrispondenza delle sezioni rette determinate dai punti XVIII e XXII sono di quelli fatti con ferri a T e con lamiere di contorno semi-circolare, e le altezze di questi collegamenti nel senso normale all'asse della centina, risultano:

Di metri 0,736 pel collegamento nel punto XVIII;
» 0,712 » XXII.

Deducendo metri 0,02 dalle altezze trovate, si hanno quelle della lamiere con contorno semi-circolare, e la metà di questa differenza rappresenta la loro larghezza. I diametri dei semi-circoli risultano dalla sottrazione di metri 0,18 dalle totali altezze indicate.

I collegamenti, in corrispondenza delle sezioni rette determinate dai punti XX XXIV, sono di quelli fatti con soli ferri orizzontali aventi sezione a T e collegati a nervature inchiodate alla centina. Le altezze di queste nervature nel senso normale all'asse della centina sono:

Di metri 0,720 in corrispondenza del punto XX;
» 0,706 » XXIV.

Le riferite altezze in XVIII, XX, XXII e XXIV, diminuite di metri 0,10, determinano quelle delle lamiere di riporto fra le pareti verticali delle centine e le nervature per attaccarvi i collegamenti.

71. **Peso dei collegamenti trasversali per la parte di centina** (*Fig.* 112) *cdkh.* — I collegamenti, di cui vogliamo qui determinare il peso, sono quelli già stati indicati nel precedente numero, e posti in corrispondenza dei punti XVIII, XX, XXII e XXIV; ed i loro pesi risultano dalla specifica che presentiamo:

Pel collegamento nel punto XVIII

Volume dei ferri a T disposti orizzontalmente	Mc.	0,007294
» dei ferri a T inchiodati alla centina .	»	0,003341
» delle lamiere con contorno semicircolare	»	0,005397
» delle lamiere di riporto	»	0,001779
» delle capocchie dei chiodi . . .	»	0,000536
Totale	Mc.	0,018347.

Pel collegamento del punto XX

Volume dei ferri a T disposti orizzontalmente	Mc.	0,006347
» dei ferri a T inchiodati alla centina	»	0,003456
» delle lamiere di riporto	»	0,001728
» delle capocchie dei chiodi	»	0,000199
Totale	Mc.	0,011730.

Pel collegamento nel punto XXII

Volume dei ferri a T disposti orizzontalmente	Mc.	0,007294
» dei ferri a T inchiodati alla centina	»	0,003226
» delle lamiere con contorno semicircolare	»	0,005132
» delle lamiere di riporto	»	0,001702
» delle capocchie dei chiodi . . .	»	0,000496
Totale	Mc.	0,017850.

Pel collegamento nel punto XXIV

Volume dei ferri a T disposti orizzontalmente	Mc.	0,006347
» dei ferri a T inchiodati alla centina	»	0,003389
» della lamiera di riporto	»	0,001683
» delle capocchie dei chiodi . . .	»	0,000199
Totale	Mc.	0,011618.

Sommando i volumi parziali dei quattro collegamenti considerati otteniamo metri cubi 0,059545, ed il peso corrispondente II''' risulta di chilogrammi 463.

72. **Peso per ogni unità di lunghezza della proiezione orizzontale della parte** (*Fig.* 112) **FH dell'asse della centina.** — Si può assumere come peso totale gravitante sulla proiezione orizzontale della parte di centina, il cui asse è l'arco circolare FH, la somma dei quattro pesi II, II', II'' II''' (Num. 65, 66, 69 e 71) e quindi il peso di chilogrammi 27806.

Il raggio dell'arco indicato è di metri 55,083 e di 8° 16' 23'' la sua ampiezza, di maniera che la sua proiezione orrizzontale, essendo data da

$$55{,}083 \operatorname{sen} 8° 16' 23'',$$

risulta di metri 7,926.

Dividendo il peso totale 27806^{cg} per 7^{m},926, otteniamo nel quoziente il peso p riferito all'unità di lunghezza della proiezione orizzontale della parte FH dell'asse della centina, e giungiamo a

$$p = 3508^{cg}.$$

73. **Determinazione della spinta orizzontale dovuta al carico distribuito sulla parte (*Fig.* 112) *cdkh* della centina e sulla sua simmetrica rispetto al mezzo della centina stessa.** — Nella determinazione di questa spinta ammetteremo che il carico sia uniformemente distribuito in ragione di 3508 chilogrammi per ogni metro di proiezione orizzontale dell'asse della centina, ciò che è quasi conforme al vero atteso la piccola saetta della porzione di centina che consideriamo, e atteso l'eguaglianza o quasi eguaglianza nelle distanze dei punti d'applicazione dei pesi non distribuiti in modo continuo.

Premesso questo, la formola da adottarsi per questa determinazione (*Deformazioni dei corpi elastici studiate nei loro più generali rapporti coi lavori della moderna ingegneria*, Num. 41) sarà

$$Q' = pr \frac{-\frac{1}{2}\frac{1}{\Omega}\left(2\,\mathrm{sen}^2\alpha - \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}^2\gamma\right)\mathrm{sen}\,\gamma + \frac{r^2}{I_x}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2}+\mathrm{sen}^2\gamma\right)\gamma\cos\alpha + \frac{3}{2}\cos\alpha\,\mathrm{sen}\,\gamma\cos\gamma \\ +2\left(\frac{3}{2}\,\mathrm{sen}^2\alpha - \alpha\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha - 1\right)\mathrm{sen}\,\gamma - \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}^3\gamma\end{array}\right]}{\frac{1}{\Omega}(\alpha + \mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha) + \frac{r^2}{I_x}\left[\alpha(1+2\cos^2\alpha) - 3\,\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha\right]},$$

nella quale le lettere r, α, Ω, I_x ed il denominatore hanno i valori già stati dichiarati nel numero 59, mentre la lettera γ rappresenta l'ampiezza dell'arco FH di 8° 16' 23'' e p il peso riferito all'unità di lunghezza di proiezione orizzontale del detto arco, stato trovato nel numero precedente di chilogrammi 3508.

Sostituendo nell'ultima riportata formola i numeri alle lettere, troviamo

$$Q' = 85279^{cg}.$$

74. **Spinta orizzontale massima della seconda e della quinta centina di ogni arcata contro i piedritti, e reazione orizzontale massima dei piedritti contro ciascuna di queste centine.** — Abbiamo indicato nei numeri 59, 60, 62 e 73 quali sono le spinte prodotte dalla seconda e dalla quinta centina di un'arcata contro i piedritti per le forze verticali operanti nei punti (*Fig.* 112) 0, II,

IV, VI, VIII, X, XII, XIV e XVI, per le forze orizzontali applicate negli stessi punti, per le coppie derivanti dal fatto che in realtà le dette forze non sono applicate nei punti suindicati e pel peso portato dalla parte di centina *cdkh* (supposto questo peso uniformemente distribuito sulla proiezione orizzontale dell'arco FH).

Per il principio dell'accumulazione degli effetti la spinta totale deve essere la somma algebrica delle quattro spinte suindicate, e quindi, indicando questa spinta con Q, si trova

$$Q = 173494^{cg}.$$

Il valore di Q, nel mentre rappresenta la spinta orizzontale massima della seconda e della quinta centina contro i piedritti, giacchè si è calcolata nell'ipotesi del massimo sovraccarico sul ponte, dà anche la reazione massima del piedritto contro l'una e contro l'altra delle indicate centine.

75. **Pressione verticale massima della seconda e della quinta centina di ogni arcata sui piedritti, e reazione verticale massima dei piedritti contro ciascuna di queste centine.** — Concorrono a formare l'indicata pressione la somma dei valori di P registrati nella colonna del numero 58, la qual somma è di chilogrammi 62916, ed il peso corrispondente alla parte di centina *cdkh* (*Fig.* 112), il quale si è trovato (Num. 72) di chilogrammi 27806. La pressione verticale domandata è la somma dei due pesi suddetti, e quindi, indicandola con U, si ha

$$U = 90722^{cg}.$$

Il valore di U, nel mentre è la pressione verticale massima che tanto la seconda quanto la quinta centina di ogni arcata esercita sui piedritti, giacchè si è calcolato nell'ipotesi del massimo carico sul ponte, rappresenta anche la reazione verticale massima degli appoggi contro ciascuna delle centine indicate.

76. **Forze estrinseche sollecitanti una mezza centina.** — Considerando l'asse di una mezza centina e supponendo ridotto alla orizzontale proiettata nel punto E (*Fig.* 112 e 113) il semi-cilindro del cuscinetto d'imposta, abbiamo: che nel punto E sono applicate la forza orizzontale Q (Num. 74) e la forza verticale U (Num. 75); che nei punti 0, II, IV, VI, VIII, X, XII, XIV e XVI sono rispet-

tivamente applicate le forze verticali P_0, P_2, P_4, P_6, P_8, P_{10}, P_{12}, P_{14} e P_{16}, non che le forze orizzontali S_0, S_2, S_4, S_6, S_8, S_{10}, S_{12}, S_{14} ed S_{16}; che sulle sezioni rette determinate dai punti suddetti operano le coppie μ_0, μ_2, μ_4, μ_6, μ_8, μ_{10}, μ_{12}, μ_{14} e μ_{16} coi versi marcati dalle frecce alle quali sono apposte le lettere indicanti i momenti corrispondenti; che le forze ed i momenti accennati operano sulla parte di centina il cui asse è EF; e che la parte di centina, il cui asse è FH, trovasi caricata di un peso uniformemente distribuito sulla proiezione orizzontale dell'asse medesimo.

Raccogliendo le forze ed i momenti accennati, si può compilare la seguente tavola:

Forze orizzontali S	Forze verticali P	Momenti μ delle coppie
$S_0 = 648$	$P_0 = 9295$	$\mu_0 = -261^{Cgxm}$
$S_2 = -29$	$P_2 = 6636$	$\mu_2 = -1514$
$S_4 = -196$	$P_4 = 7325$	$\mu_4 = -1409$
$S_6 = 350$	$P_6 = 7571$	$\mu_6 = -1551$
$S_8 = 804$	$P_8 = 7622$	$\mu_8 = -1622$
$S_{10} = 1598$	$P_{10} = 7176$	$\mu_{10} = -1781$
$S_{12} = 3068$	$P_{12} = 7282$	$\mu_{12} = -2385$
$S_{14} = 5558$	$P_{14} = 8396$	$\mu_{14} = -3563$
$S_{16} = -2849$	$P_{16} = 1631$	$\mu_{16} = 1324.$

Il peso uniformemente distribuito sulla proiezione orizzontale dell'arco FH è il valore di p stato trovato nel numero 72, ossia di 3508 chilogrammi per ogni metro della proiezione orizzontale stessa. I valori di Q e di U sono rispettivamente di 173494 chilogrammi e di 90722 chilogrammi.

77. **Verificazione della stabilità della centina, e dimensioni dei ferri di cui è composta.** — Per accertarsi se la centina trovasi in buone condizioni di stabilità, considereremo le sezioni rette determinate dai punti (*Fig.* 113) II, IV, VI, VIII, X, XII, XIV, XVI, XVIII, XX, XXII, XXIV ed H, ed avremo riguardo alla resistenza longitudinale non solo, ma anche alla resistenza trasversale in esse provocate. Determineremo per le indicate sezioni le resistenze longitudinali S_{zi} ed S_{ze} riferite all'unità di superficie all'intradosso ed all'estradosso, e la resistenza trasversale S_y pure riferita all'unità di superficie, adottando (*Deformazioni dei corpi elastici studiate nei loro*

più generali rapporti coi lavori della medesima ingegneria, Num. 50 le ormole

$$S_{zi} = \frac{Z}{\Omega} + \frac{v_i M_x}{I_x} \qquad (1),$$

$$S_{ze} = \frac{Z}{\Omega} - \frac{v_e M_x}{I_x} \qquad (2),$$

$$S_y = \frac{Y}{\Omega} \qquad (3).$$

Considerando la centina propriamente detta per cui una sezione retta qualunque ha la forma di quella rappresentata in HIKL (*Fig.* 109), abbiamo: che v_i e v_e sono eguali fra di loro ed alla metà dell'altezza $\overline{CM}$; che Ω rappresenta la metà della superficie della sezione stessa ed I_x il momento d'inerzia rispetto alla orizzontale xx' passante pel suo centro di superficie G; che Y e Z sono rispettivamente le somme algebriche delle componenti parallele e perpendicolari al piano della sezione stessa delle forze applicate alla centina dal suo estremo E (*Fig.* 114) fino alla sezione suddetta; e che M_x è la somma algebrica dei momenti delle stesse forze rispetto alla orizzontale suindicata.

Trovati i valori di S_{zi}, S_{ze} ed S_y riesce facile dedurre i valori dei relativi coefficienti di stabilità. Trattandosi di ferro, per cui il coefficiente di rottura per trazione R′ si può assumere eguale al coefficiente di rottura per pressione R″, ossia di chilogrammi 30000000 per metro quadrato, se si indica con S_{zm} il maggiore dei valori assoluti di S_{zi} e di S_{ze} per una determinata sezione, il corrispondente coefficiente di stabilità n relativo alla resistenza longitudinale sarà

$$n = \frac{S_{zm}}{30000000} \qquad (4).$$

Analogamente se si indica, per la stessa sezione, con S_{ym} il valore assoluto di S_y, siccome il coefficiente di rottura per scorrimento trasversale si può assumere di chilogrammi 24000000 per ogni metro quadrato, si ottiene che il relativo coefficiente di stabilità n^{IV} è dato da

$$n^{IV} = \frac{S_{ym}}{24000000} \qquad (5).$$

Per verificare la stabilità della centina importa determinare innanzi tutto le lunghezze v_i e v_e, le superficie Ω, i momenti d'inerzia I_x, le forze Y e Z ed i momenti M_x per le sezioni rette che intendiamo considerare.

Le lunghezze v_i e v_e altro non sono che le metà dei valori di a stati trovati nei numeri 53 e 69, e quindi per le diverse sezioni che intendiamo considerare si hanno i risultati contenuti nella seguente tavola:

Indicazione dei punti dell'asse determinanti le sezioni rette	Semi-altezze delle sezioni v_i e v_e
II	$0^m,538$
IV	0, 510
VI	0, 485
VIII	0, 462
X	0, 443
XII	0, 426
XIV	0, 411
XVI	0, 399
XVIII	0, 390
XX	0, 382
XXII	0, 378
XXIV	0, 376
H	0, 375.

Le superficie Ω delle sezioni rette della centina variano colle altezze a delle sezioni stesse; per le dimensioni state stabilite nel numero 53, sono esse date dalla formola

$$\Omega = 0{,}016912 + 0{,}012.a \qquad (6);$$

e quindi, pei valori di a che si trovano nella prima tabella dell'ultimo citato numero e del numero 69, si ottengono i valori di Ω che qui immediatamente si riportano

Indicazione dei punti dell'asse determinanti le sezioni rette	Superficie Ω delle sezioni rette
II	$0^{mq},029824$
IV	0, 029152
VI	0, 028552

VIII	$0^{mq},028000$
X	0, 027544
XII	0, 027136
XIV	0, 026776
XVI	0, 026488
XVIII	0, 026272
XX	0, 026080
XXII	0, 025984
XXIV	0, 025924
H	0, 025912.

Anche i momenti d'inerzia I_x delle sezioni rette della centina variano coll'altezza a delle sezioni stesse, e, tenendo conto delle dimensioni state stabilite nel numero 53, questi momenti sono dati dalla formola

$$I_x = \frac{1}{12}\Big[0{,}40.a^3 - 0{,}188\,(a - 0{,}024)^3 - 0{,}18\,(a - 0{,}044)^3 - 0{,}02\,(a - 0{,}244)^3\Big] \qquad (7),$$

la quale, applicata per i valori di a contenuti nella prima tavola del numero 53 e del numero 69, conduce ai seguenti valori di I_x:

Indicazione dei punti dell'asse determinanti le sezioni rette	Momenti d'inerzia I_x delle sezioni rette
II	0,005768253141
IV	0,005107872469
VI	0,004556905069
VIII	0,004081554133
X	0,003711242461
XII	0,003396777685
XIV	0,003132341725
XVI	0,002929476157
XVIII	0,002788337749
XX	0,002662122133
XXII	0,002592767701
XXIV	0,002554218616
H	0,002545714376.

Passando alla determinazione delle forze Y e Z, consideriamo l'asse EH (*Fig.* 114) di una mezza centina e su esso le due parti EF ed FH, la prima riferentesi alla parte di centina la quale è sollecitata in punti dati dalle forze verticali P, dalle forze orizzontali S e dai momenti μ; la seconda alla parte di centina caricata di un peso che noi abbiamo supposto uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale. Prendiamo sulla seconda parte un punto qualunque M, immaginiamo per questo punto la sezione retta della centina e pel centro M di quest'ultima i due assi My ed Mz rispettivamente diretti secondo la normale e secondo la tangente alla curva HE nel punto M. Essendo

r il raggio $\overline{OE}$ dell'arco EH,

γ l'angolo FOH, ossia la metà dell'ampiezza di quella parte dell'asse della totale centina alla quale corrisponde il carico uniformemente distribuito,

β l'angolo MOH che la sezione retta determinata dal punto M fa colla verticale,

Q ed U le reazioni orizzontale e verticale dell'appoggio in E,

P ed S le due forze, una verticale e l'altra orizzontale, applicate ad uno stesso punto della parte EF dell'asse della centina,

p il peso riferito all'unità di lunghezza della proiezione orizzontale dell'arco FH,

abbiamo: che le componenti delle forze Q ed U secondo My, sono rispettivamente

$$-Q \operatorname{sen} \beta \text{ ed } U \cos \beta;$$

che le componenti delle forze S e P nelle stesse direzioni risultano

$$S \operatorname{sen} \beta \text{ e } -P \cos \beta;$$

che il peso distribuito in modo uniforme sulla proiezione orizzontale dell'arco FM è dato da

$$pr(\operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} \beta),$$

e che quindi la componente di questo peso secondo My vale

$$-pr(\operatorname{sen} \gamma - \operatorname{sen} \beta) \cos \beta.$$

Indicando col simbolo Σ una somma di pesi P o di forze S dall'estremo E dell'asse della centina ad un punto qualunque M, il valore di Y risulta dalla formola:

$$Y = (U - \Sigma P)\cos\beta - (Q - \Sigma S)\operatorname{sen}\beta - pr(\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\beta)\cos\beta \quad (8).$$

Analogamente, le componenti delle cinque forze Q, U, S, P e $pr(\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\beta)$ secondo M_z sono rispettivamente

$$\begin{aligned} &-Q\cos\beta \\ &-U\operatorname{sen}\beta \\ &\quad S\cos\beta \\ &\quad P\operatorname{sen}\beta \\ &\quad pr(\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\beta)\operatorname{sen}\beta, \end{aligned}$$

e quindi la forza Z si può dedurre dalla formola:

$$Z = -(U - \Sigma P)\operatorname{sen}\beta - (Q - \Sigma S)\cos\beta + pr(\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\beta)\operatorname{sen}\beta \quad (9).$$

Osservando ora che (Num. 30, 64, 74, 75 e 72)

$$\begin{aligned} r &= 55^{m},083 \\ \gamma &= 8^{\circ}\,16'\,23'' \\ Q &= 173494^{cg} \\ v &= 90722 \\ p &= 3508, \end{aligned}$$

che gli angoli β sono quelli raccolti nelle tavole dei numeri 50 e 64, e che le forze P e S occorrenti per la formazione delle somme ΣP e ΣS come quelle inscritte nella tabella del numero precedente, l'applicazione delle formole determinatrici di Y e di Z per le sezioni rette corrispondenti ai punti (*Fig.* 113) II, IV, VI, VIII, X, XII, XIV, XVI, XVIII, XX, XXII, XXIV ed H conduce ai risultamenti contenuti nella tavola che segue:

Indicazione dei punti dell'asse determinanti le sezioni rette	Forze Y	Forze Z
II	— 3235^{Cg}	— 188332^{Cg}
IV	— 2774	— 185736
VI	— 2653	— 182792
VIII	— 2747	— 179667
X	— 2502	— 176171
XII	— 2332	— 171457
XIV	— 3156	— 164317
XVI	796	— 166873
XVIII	1422	— 166288
XX	2513	— 165439
XXII	1536	— 164865
XXIV	517	— 164578
H	0	— 164542.

Non occorre dire che l'ultimo termine delle due formole determinatrici di Y e di Z si trascura nel calcolare queste forze per le sezioni rette determinate dai punti posti sulla parte EF dell'asse della centina.

Ci rimane ancora la determinazione dei momenti M_x, e quindi di stabilire la formola acconcia per tale determinazione. Conservando alle lettere r, β, γ, Q, U, P, S e p i significati che hanno nelle formole (8) e (9), dicendo

α l'angolo EOH (*Fig.* 114), ossia la metà dell'ampiezza dell'asse totale della centina,

β' l'angolo NOH relativo al punto qualunque N dell'asse della centina al quale sono applicate le due forze P ed S, e

μ il momento della coppia operante su questa sezione,

ed assumendo i momenti per rapporto alla orizzontale proiettata nel punto M, abbiamo: che il momento della forza Q è dato da

$$-Qr(\cos\beta - \cos\alpha);$$

che il momento della forza U vale

$$Ur(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta);$$

che il momento della forza S è

$$Sr(\cos\beta - \cos\beta'),$$

e che quindi il momento di tutte le forze S applicate da E in M risulta

$$r\Sigma S(\cos\beta - \cos\beta');$$

che il momento della forza P vale

$$-Pr(\operatorname{sen}\beta' - \operatorname{sen}\beta),$$

e che quindi il momento di tutte le forze P operanti da E in M è dato da

$$-r\Sigma P(\operatorname{sen}\beta' - \operatorname{sen}\beta);$$

che il momento di tutte le coppie μ operanti da E in M è espresso da

$$\Sigma\mu;$$

che il momento del peso uniformemente distribuito sulla proiezione orizzontale dell'arco MF vale

$$-\frac{1}{2}pr^2(\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\beta)^2;$$

e che finalmente la formola determinatrice di M_x risulta

$$M_x = r\left\{\begin{array}{l} U(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta) - Q(\cos\beta - \cos\alpha) - \Sigma P(\operatorname{sen}\beta' \\ -\operatorname{sen}\beta) + \Sigma S(\cos\beta - \cos\beta') - \frac{1}{2}pr(\operatorname{sen}\gamma - \operatorname{sen}\beta)^2 \end{array}\right\} - \Sigma\mu \quad (10)$$

Ponendo in questa formola i valori noti di r, γ, Q, U e p non che l'angolo $\alpha = 26°\,59'\,29''$ (Num. 30), componendo, cogli angoli β inscritti nelle tabelle dei numeri 50 e 64 e coi valori di P, S e μ riportati nella tabella del numero precedente, le somme $\Sigma P(\operatorname{sen}\beta' - \operatorname{sen}\beta)$, $\Sigma S(\cos\beta - \cos\beta')$ e $\Sigma\mu$, si giunge ai valori di M_x contenuti nella seguente tavola (*Fig.* 113):

Indicazione dei punti dell'asse determinanti le sezioni rette	Momenti M_x
II	-2940^{Cgxm}
IV	— 3437
VI	— 3330
VIII	— 2522
X	— 3775
XII	— 4613
XIV	— 6509
XVI	— 5505
XVIII	466
XX	6387
XXII	10421
XXIV	12461
H	12668.

L'ultimo termine della formola determinatrice di M_x si trascura quando si considerano punti posti sulla parte EF dell'asse della centina.

Sostituendo ora i valori trovati di v_i, v_e, Ω, I_x, Y, Z ed M_x nelle formole (1), (2) e (3), otteniamo per le sezioni rette determinate dai punti II, IV, VI, VIII, X, XII, XIV, XVI, XVIII, XX, XXII, XXIV ed H le resistenze longitudinali S_{zi}, riferite all'unità di superficie, all'intradosso, le resistenze longitudinali S_{ze}, riferite all'unità di superficie, all'estradosso, le resistenze trasversali S_y pure riferite all'unità di superficie, e queste resistenze, espresse in tonnellate, risultano come appare dalla tabella che qui presentiamo:

Indicazione dei punti dell'asse determinanti le sezioni rette	Resistenze riferite al metro quadrato		
	S_{zi}	S_{ze}	S_y
II	-6589^t	-6041^t	-108^t
IV	— 6714	— 6028	— 95
VI	— 6756	— 6048	— 93
VIII	— 6702	— 6131	— 98
X	— 6847	— 5945	— 91
XII	— 6897	— 5740	— 86
XIV	— 6992	— 5284	— 117
XVI	— 7050	— 5550	30
XVIII	— 6265	— 6395	54
XX	— 5427	— 7261	96
XXII	— 4826	— 7864	59
XXIV	— 4514	— 8182	20
H	— 4484	— 8216	0.

Dai valori di S_{zi} ed S_{ze} riesce facile dedurre il valore di S_{zm}, giacchè per ciascuna sezione questo è il più grande dei due primi. Ponendo i valori di S_{zm} e di S_y, espressi in chilogrammi, nelle formole (4) e (5) si possono dopo dedurre i coefficienti di stabilità n relativi alla resistenza longitudinale ed i coefficienti di stabilità n^{IV} relativi alla resistenza trasversale. Facendo questi calcoli troviamo

Indicazione dei punti dell'asse determinanti le sezioni rette	Coefficienti di stabilità	
	n	n^{IV}
II	0,22	0,004
IV	0,22	0,004
VI	0,22	0,004
VIII	0,22	0,004
X	0,23	0,004
XII	0,23	0,004
XIV	0,23	0,005
XVI	0,23	0,001
XVIII	0,21	0,002
XX	0,24	0,004
XXII	0,26	0,002
XXIV	0,27	0,001
H	0,27	0

I valori dei coefficienti di stabilità n, essendo tutti maggiori della frazione $0,2 = \frac{1}{5}$, accennano come non siavi nella centina sufficiente stabilità per rapporto alla resistenza longitudinale, e come per conseguenza importi pensare al modo di conseguirla. I valori dei coefficienti di stabilità n^{IV} invece, essendo tutti maggiori dell'indicata frazione, non lasciano dubbio sulla stabilità della centina per rapporto alla resistenza trasversale.

Un'obbiezione che si potrebbe muovere contro il metodo stato seguìto per la determinazione dei coefficienti di stabilità consiste nel non aver distinto due parti nelle considerate sezioni rette della centina, quella costituita dalle tavole e dai ferri d'angolo determinata colla condizione che da sola sia capace di assicurare la stabilità per rapporto alla resistenza longitudinale, e quella formata dalla sola parete verticale atta a sopportare da sola, in modo permanente e stabile, la resistenza allo scorrimento trasversale. I motivi che ci

hanno indotti al procedimento stato seguìto in questo numero sono principalmente due: quello della nostra convinzione che un solido, non ancora snervato per rapporto alla resistenza longitudinale, deve ancora presentare, se non tutta, almeno quasi tutta la resistenza trasversale di cui è capace; quello di aver trascurato, nel valutare le resistenze della nostra centina, la lamiera V (*Fig.* 109) ed i ferri d'angolo A', i quali indubitatamente non possono a meno di esercitare un'assai benefica influenza sul suo modo di resistere.

78. **Determinazione del numero delle lamiere componenti le tavole delle centine.** — I valori dei coefficienti di stabilità n, stati dedotti nel precedente numero, hanno svelato come sia insufficiente una sola lamiera per la formazione delle tavole delle centine; cosicchè importa trovare quante lamiere occorrono affinchè si abbia, in tutte le sezioni, n eguale o minore di $\frac{1}{5} = 0{,}2$.

I risultamenti dei calcoli del numero precedente hanno messo in evidenza: come sia provocata la resistenza alla pressione tanto all'intradosso quanto all'estradosso della centina; come in quelle sezioni in cui tanto Z quanto M_x sono negativi debba essere soddisfatta l'equazione di stabilità 10 del muro 51 del lavoro inserto in questo volume sulle *Deformazioni dei corpi elastici studiate nei loro più generali rapporti coi lavori della moderna ingegneria*, mentre in quelle sezioni in cui è negativo il valore di Z e positivo il valore di M_x deve essere soddisfatta l'equazione di stabilità (7) dello stesso numero.

Premesso questo, se conservansi alle lettere v_i, v_e, Ω, I_x, Z ed M_x i significati che loro furono attribuiti nel precedente numero, se ammettesi che non variino i valori di Z e di M_x per l'aggiunta di qualche lamiera nelle tavole, se chiamansi A le superficie eguali da aggiungersi in (*Fig.* 120) HLMN ed IKOP al disopra ed al disotto delle sezioni già state considerate nel numero precedente per avere in esse il conveniente grado di stabilità, e se si suppone che le dette superficie A siano concentrate nelle linee HL ed IK, le equazioni le quali devono essere soddisfatte risultano evidentemente: per le sezioni in cui sono negativi i valori di Z e di M_x

$$n''R'' = -\left(\frac{Z}{\Omega + 2A} + \frac{v_i M_x}{I_x + 2A\, v_i^2}\right) \qquad (1);$$

per le sezioni in cui è negativo il valore di Z e positivo quello di M_x

$$n''R'' = -\left(\frac{Z}{\Omega + 2A} - \frac{v_e M_x}{I_x + 2A v_e^2}\right) \qquad (2).$$

Applicando queste equazioni per $n''R'' = \frac{1}{5}\,30000000 = 6000000$, per le sezioni rette determinate dai punti (*Fig.* 112 e 113) II, IV, VI, VIII, X, XII, XIV e XVI la (1), e per le sezioni rette determinate dai punti XVIII, XX, XXII, XXIV ed H la (2), si potrebbero ricavare i valori di A loro corrispondenti.

Osservasi però: che occorrono almeno due lamiere per ogni tavola, giacchè, come abbiamo visto nel numero precedente, una sola lamiera non dà sufficienti garanzie di stabilità; che la superficie della sezione retta di una lamiera è $0{,}40 \times 0{,}012 = 0^{mq},0048$; che la sezione di chiave è quella maggiormente pericolosa, giacchè vi corrisponde il maggior valore di n; e che, applicando l'equazione (2) a questa sezione col fare

$$\begin{aligned} v_e &= 0^{m},375 \\ \Omega &= 0^{mq},025912 \\ A &= 0{,}0048 \\ I_x &= 0{,}002545714376 \\ Z &= -164542^{cg} \\ M_x &= 12668^{cg.m} \end{aligned}$$

si deduce

$$n'' = 0{,}195.$$

Questo valore del coefficiente di stabilità n'' è prossimo ma minore di $0{,}2 = \frac{1}{5}$, e quindi si può conchiudere che le tavole delle centine devono essere formate di due lamiere, come appare dalla figura 115. Verso le imposte si avrà un po' d'eccesso di stabilità, alla chiave e presso la chiave saremo prossimi a quel giusto grado di sicurezza che importa avere nelle costruzioni metalliche.

L'aver supposto, nella deduzione delle formole (1) e (2), che le superficie HLMN (*Fig.* 116) ed IKOP siano concentrate sulle linee HL ed IK, conduce ad ammettere che la materia costituente le tavole si trovi vicina allo strato delle fibre invariabili più di quanto è

realmente, e quindi ad operare in favore della stabilità, giacchè quest'ipotesi ci fa considerare la centina siccome dotata d'una resistenza minore di quella che effettivamente può sviluppare.

L'aggiunta di due lamiere, una alla tavola superiore e l'altra alla tavola inferiore di ogni centina, corrisponde all'aggiunta di un peso che si può supporre uniformemente distribuito sul suo asse e ad un aumento nei valori della superficie Ω e del momento d'inerzia I_x stati ammessi nel dedurre ai numeri 59, 60, 62 e 73 le spinte Q_v, Q_o, Q_c e Q'. Segue da ciò che devono variare le componenti orizzontali e verticali delle reazioni degli appoggi e quindi le forze Y e Z, il momento M_x e le forze S_{zi}, S_{ze}, S_{zm} ed S_y; cosicchè naturali si presentano e l'incertezza sulle vere condizioni di stabilità dell'opera ed il dubbio che i coefficienti di stabilità risultino maggiori dell'assegnato limite 0,2.

Per togliere tale incertezza e tale dubbio basta osservare: che l'aggiunta delle dette lamiere corrisponde ad un peso assai piccolo in confronto del carico totale gravitante su ciascuna centina; che le formole, da cui si sono dedotte le indicate spinte, e principalmente quelle derivanti da forze verticali che sono le più influenti, sono tali da somministrare valori quasi indipendenti dalle variazioni di sezione della centina; che perciò le temute variazioni nelle forze Q, Y, Z, nel momento M_x, nelle forze S_{zi}, S_{ze} e S_y e nei coefficienti di stabilità n ed n^{iv} non possono essere che assai piccole e giammai tali da compromettere la sicurezza dell'opera; e finalmente che queste piccole variazioni si devono annoverare fra quelle cause per le cui influenze nei risultamenti finali voglionsi adottare i coefficienti di stabilità.

79. **Chiodature delle centine.** — Cinque differenti chiodature conviene considerare nelle centine: quella per unire le tavole ai ferri d'angolo; quella per serrare la parete verticale fra i ferri di angolo suddetti; quella pei copri-giunti delle tavole; quella pei copri-giunti dei ferri d'angolo; e finalmente quella pei copri-giunti della parete verticale. Per tutte queste chiodature si possono adoperare chiodi col fusto del diametro di metri 0,024.

Le chiodature, per unire le tavole ai ferri d'angolo, si dovrebbero determinare in relazione alla resistenza allo scorrimento longitudinale provocata nella superficie di separazione fra quelle e questi; e, siccome questa resistenza non è costante per tutta la centina, ne deriverebbe di dover porre i chiodi a distanze disuguali. Questa pratica, per quanto mi consta, non è ancora seguìta dai costruttori,

i quali usano sempre fare queste chiodature con chiodi a distanze eguali; cosicchè noi pure, attenendoci a questa norma e conformandoci alle disposizioni state usate in alcuni classici ponti con archi di ferro ed in condizioni quasi identiche a quelle del ponte di cui stiamo studiando il progetto, stabiliremo che le chiodature di ogni tavola ai corrispondenti ferri d'angolo debbano essere fatte con due file di chiodi posti, in ogni fila, alla distanza di circa metri 0,10 l'uno dall'altro. Abbiamo poi detto circa e non metri 0,10 precisi, per la ragione che ciascuna centina trovasi divisa in venticinque scompartimenti dai copri-giunti della parete verticale; che questi scompartimenti non sono tutti precisamente della stessa lunghezza, e che il numero dei chiodi da impiegarsi per l'unione delle tavole ai ferri d'angolo deve essere regolato per ciascuno degli scompartimenti medesimi in modo che la distanza dei chiodi di una stessa fila sia per quanto si può prossima a metri 0,10.

Le chiodature, per serrare la parete verticale di una centina fra i ferri d'angolo, sono subordinate a quelle già indicate per unire la tavola agli stessi ferri, giacchè, come chiaramente appare dalla figura 76, queste chiodature si devono fare in modo che i chiodi dell'una corrispondano ai mezzi degl'intervalli dell'altra.

Le chiodature per i copri-giunti delle tavole si possono fare in modo che la resistenza allo scorrimento trasversale dei chiodi posti da una stessa parte di ogni giuntura sia eguale alla resistenza longitudinale che potrebbe presentare la lamiera nella superficie interrotta. Siccome poi il coefficiente di rottura del ferro nel senso trasversale è i $\frac{4}{5}$ del coefficiente di rottura nel senso longitudinale, ne deriva che la somma delle superficie delle sezioni rette dei detti chiodi deve essere i $\frac{5}{4}$ della superficie della sezione retta d'una lamiera. Quest'ultima superficie è di metri quadrati 0,0048, e quindi per determinare il numero x degli indicati chiodi si ha l'equazione

$$\pi r^2 . x = \frac{5}{4} 0{,}0048 \qquad (1),$$

dalla quale, per $r = 0^m{,}012$, si deduce $x > 13$. Come risulta dalle figure 72 e 73, le quali in via d'abbozzi rappresentano rispettivamente la metà di un coprigiunto della tavola inferiore ed un coprigiunto della tavola superiore, si devono porre quattro chiodi per

ogni fila trasversale, e quindi convien porre $x = 16$. I coprigiunti della tavola inferiore saranno adunque fatti come in proiezione orizzontale appare dalla figura 117, ed i coprigiunti della tavola superiore, come risulta dalla figura 118. La lunghezza degli uni e degli altri sarà di metri 0,82, e la loro grossezza sarà di metri 0,012, ossia eguale a quella delle lamiere componenti le tavole.

I ferri d'angolo, i quali servono per l'unione delle tavole alle pareti verticali delle centine, hanno i loro lati di metri 0,10 e la grossezza di metri 0,01; e quindi la superficie interrotta fra due ferri d'angolo posti l'uno di seguito all'altro è di metri quadrati 0,0019. I coprigiunti saranno pure ferri d'angolo; ma dovendo stare fra quelli or ora indicati, avranno i loro lati soltanto di metri 0,09. La loro grossezza poi sarà di metri 0,012 affinchè la superficie della loro sezione retta non risulti minore di metri 0,0019. In quanto al numero y dei chiodi posti da una stessa parte della giuntura, si può esso determinare coll'equazione analoga alla (1)

$$\pi r^2 . y = \frac{5}{4} 0{,}0019,$$

e col fare in essa $r = 0^m{,}012$. Risolvendo quest'equazione per rapporto ad y, otteniamo $y > 5$, e, come lo dimostra la figura 75, la quale in abbozzo rappresenta appunto la disposizione delle chiodature dei ferri d'angolo, dovendo essere y un numero pari, assumeremo questo numero eguale a 6 e porremo i chiodi come in proiezione orizzontale appare dalla figura 118bis. La lunghezza di questi copri-giunti sarà di metri 0,72.

Le chiodature, fra le pareti verticali delle centine ed i ferri a T, i quali, oltre di servire da nervature in corrispondenza delle sezioni rette determinate dai punti (*Fig.* 112) II, IV, VI, VIII, X, XII, XIV, XVI, XVIII, XX, XXII e XXIV, fanno pure ufficio di coprigiunti dove esistono interruzioni di continuità nelle lamiere componenti le dette pareti, dovrebbero essere fatte ponendo i chiodi a distanze disuguali; giacchè, pel fatto della flessione provocata nella centina, i chiodi più affaticati sono quelli posti alle estremità del copri-giunto AB (*Fig.* 120), e la resistenza provocata negli altri va diminuendo a misura che si trovano più vicini all'asse. Noi però non ci allontaneremo dalla regola generalmente seguìta nelle chiodature delle lamiere; porremo i chiodi di una stessa fila a distanze

eguali di metri 0,10, ma procureremo di ottenere la necessaria stabilità in quelli da collocarsi alle estremità del coprigiunto ponendo i due *a* e *b* per ciascun estremo tanto da una parte quanto dall'altra del gambo della nervatura AB. Adottando questa disposizione, otteniamo: che la superficie resistente pei due chiodi ultimi indicati è di metri quadrati 0,0018; che la corrispondente superficie interrotta nella parete verticale della centina è di metri quadrati 0,0012; e che per conseguenza si trovano questi chiodi in buone condizioni di stabilità, giacchè la superficie resistente da essi presentata è maggiore dei $\frac{5}{4}$ di quella della corrispondente lamiera interrotta. La diminuzione della resistenza, che può essere provocata negli altri chiodi a misura che si avvicinano all'asse della centina, permette di averli pure in buone condizioni di stabilità, quantunque la superficie resistente che ad essi corrisponde sia minore della relativa superficie interrotta nella parete verticale.

80. **Principali dimensioni dei cuscinetti d'imposta.** — La parte fissa *f* (*Fig.* 71) di questi cuscinetti ha le seguenti dimensioni: metri 1,20 di lato orizzontale, metri 1,80 di lato disposto normalmente all'asse della centina, e metri 0,36 di altezza. Il risalto inferiore, mediante il quale i cuscinetti sono fermati sui piedritti, ha le sue tre dimensioni di metri 1,20, di metri 0,20 e di metri 0,10; ed il fondo ammette le due differenti spessezze, di metri 0,20 dove la parte mobile entra nella cassa della parte fissa, e di metri 0,10 esternamente a questa stessa cassa, le cui tre dimensioni sono di metri 0,42, di metri 1,02 e di metri 0,16. Tutte le nervature hanno la grossezza di metri 0,06.

La parte mobile *m* è divisa in due, in quella prismatica ed in quella semi-cilindrica. La parte prismatica ha spessezza di metri 0,18 colle altre due dimensioni, tali da poter essa entrare nella cassa suindicata. La parte semi-cilindrica ha il diametro di metri 0,49 e la lunghezza di metri 0,42.

I prismi, formati da ciascuna coppia di cunei da interporsi fra la parte fissa e la parte mobile dei cuscinetti, hanno sezione quadrata col lato di metri 0,10, e la loro lunghezza è di metri 0,62.

81. **Principali dimensioni degli ormeggi dei timpani.** — Gli ormeggi sulle spalle sono fatti mediante aste cilindriche di ferro col diametro di metri 0,07 e colla lunghezza, comprese le parti appiattite, di metri 3,20 (*Fig.* 81). Per gli ormeggi sulle pile, le aste orizzontali hanno pure il diametro di metri 0,07, ma la loro lunghezza è soltanto di metri 1,98 (*Fig.* 82).

Il diametro dei perni verticali degli ormeggi superiori è di metri 0,08, e di metri 0,95 la loro totale lunghezza. I perni per gli ormeggi inferiori hanno forma conica; è di metri 0,07 il diametro della base minore, di metri 0,085 il diametro della base maggiore, e di metri 0,85 la loro totale lunghezza.

Le piastre *e*, *d* e *d'* sono tali che ciascuna di esse attraversa i perni degli ormeggi di tre timpani successivi; le dimensioni della loro sezione retta sono di metri 0,20 e di metri 0,045, e la loro lunghezza è di metri 3,50. I collari *f* hanno il diametro esterno di metri 0,20 e la spessezza di metri 0,045.

82. **Principali dimensioni dei cassoni per fondazioni.** — Tanto i cassoni per fondare le pile, quanto quelli per fondare le spalle, hanno l'altezza di metri 5,20. La lamiera che ne forma le pareti ha la grossezza di metri 0,006; ed i ferri a T, destinati a consolidarle esternamente ed a servire per un conveniente concatenamento esterno, ammettono la larghezza di metri 0,15 nella tavola, la sporgenza di metri 0,10 nel gambo e la grossezza media di metri 0,007.

I cassoni per le fondazioni delle spalle (*Fig.* 47) hanno alla loro base la lunghezza di metri 17,20 e la largezza di metri 6,40. Quelli invece per le fondazioni delle pile (*Fig.* 48) sono lunghi metri 16,40 e larghi metri 6,20. Le pareti di questi cassoni, eccetto quella dei cassoni per le spalle la quale trovasi verso terra, non sono verticali, ma inclinate, e la corrispondente scarpa è determinata dalla frazione $\frac{1}{25}$.

I cassoni B (*Fig.* 47) avranno la stessa altezza e saranno costrutti con ferri identici, per forma e dimensioni delle sezioni rette, a quelli già indicati pei cassoni delle spalle e delle pile. La larghezza di questi cassoni sarà di metri 2,70 e di metri 5,50 la loro lunghezza contata da mezzo a mezzo degli intervalli C fra un cassone ed il suo vicino.

I cassoni D pei contrafforti, i quali, in quanto ad altezza ed a ferri che li compongono, saranno come quelli già indicati (non contando gli intervalli F), avranno la lunghezza $\overline{ab}$ di metri 1,75 e di metri 2,05 la lunghezza $\overline{bc}$.

Gli intervalli C, E ed F fra i diversi cassoni saranno larghi metri 0,35.

83. **Spinta delle terre contro i muri di sostegno degli arginali.** — Come si è indicato al numero 6, l'altezza del suolo stradale sul piano ABCD (*Fig.* 46) delle riseghe è di metri 12,28; e, per

quanto risulta al numero 22, la grossezza della copertina di pietra esistente sui muri di sostegno degli arginali, immediatamente sotto il parapetto, è eguale all'altezza delle cornici di ghisa sopra le arcate, ossia di metri 0,32. Segue da ciò che l'altezza verso terra dei muri di sostegno suindicati si può ritenere di metri 11,96. Questi muri devono resistere all'azione delle terre che vi appoggiano contro, e quindi importa innanzi tutto determinare l'intensità, la direzione ed il punto d'applicazione dell'azione suddetta.

Considereremo perciò una lunghezza di parete spinta eguale all'unità, e supporremo che la sua altezza $\overline{AB} = Y_1$ (*Fig.* 121) sia, non di metri 11,96, ma, in cifra rotonda, di metri 12. Assumeremo 1800 chilogrammi per peso Π del metro cubo di terra, 34° per angolo ϕ del suo naturale declivio e 600 chilogrammi pel massimo sovraccarico p che può trovarsi su ogni metro quadrato della superficie superiore del terreno. Considereremo questa superficie come orizzontale e, ammettendo che il prisma di massima spinta sia quello rappresentato in ABD, determineremo l'angolo $DAO = \Psi$, la massima spinta R_m contro la parete verticale AB, le componenti orizzontale e verticale Q_m e V_m di questa massima spinta e la distanza Z_m del suo punto d'applicazione dal punto A mediante le formole

$$\operatorname{tang}\Psi = \operatorname{tang}\phi + \frac{1}{\cos\phi}\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$R_m = \frac{1}{2} Y_1 (\Pi Y_1 + 2p) \frac{\cos\phi}{\cos 2\phi} \frac{\operatorname{tang}\Psi - \operatorname{tang}\phi}{\operatorname{tang} 2\phi \operatorname{tang}^2\Psi + \operatorname{tang}\Psi},$$

$$Q_m = R_m \cos\phi,$$

$$V_m = R_m \operatorname{sen}\phi,$$

$$Z_m = \frac{Y_1}{3} \frac{\Pi Y_1 + 3p}{\Pi Y_1 + 2p},$$

facili a dedursi da quelle che si trovano nel numero 216 di quel volume dell'*Arte di fabbricare* nel quale trattasi della resistenza dei materiali e della stabilità delle costruzioni, col supporre che l'angolo d'attrito ϕ' della terra colla muratura sia eguale all'angolo d'attrito ϕ di terra con terra. Facendo in queste formole

$$\phi = 34°,$$
$$Y_1 = 12^m,$$
$$\Pi = 1800^{cs}.$$
$$p = 600,$$

troviamo

$$\text{tang}\,\Psi = 1{,}527,$$
$$R_m = 35364^{cs},$$
$$Q_m = 29318,$$
$$V_m = 19775$$
$$Z_m = 4^m{,}11.$$

84. **Dimensioni dei muri di sostegno degli arginali.** — Come chiaramente risulta dalle figure 49 e 55, questi muri presentano esternamente una scarpa, e verso terra sono rinforzati da contrafforti o speroni con archi di scarico. La scarpa della faccia esterna tb (*Fig.* 122) è di $\frac{1}{15}$, la grossezza $\overline{st}$ del muro continuo alla sommità si è assunta di metri 1,50, e quindi risulta di metri 2,30 la sua grossezza $\overline{ab}$ al piano della risega. I contrafforti terminano superiormente con un piano inclinato pr; la loro altezza massima $\overline{ap}$ è di metri 11,30, e la loro altezza minima $\overline{qr}$ di metri 10,70. La distanza fra asse ed asse di due contrafforti successivi si è assunta di metri 5,50 e di metri 1,50 la larghezza dei contrafforti medesimi. Gli archi compresi fra due contrafforti successivi sono in numero di cinque; e le distanze $\overline{af}$, $\overline{fh}$, $\overline{hk}$, $\overline{km}$ ed $\overline{mo}$ sono di metri 2,20. Questi archi hanno tutti grossezza costante di metri 0,50, e la loro saetta è di metri 0,80. La sporgenza $\overline{aq} = x$ dei contrafforti dalla parete del muro continuo la quale trovasi verso terra costituisce l'incognita da determinarsi in modo che si abbiano sufficienti garanzie di sicurezza sotto il triplice riguardo dello scorrimento, del rovesciamento e della pressione.

Sporgenza dei contrafforti, affinchè i muri di sostegno degli arginali siano stabili per rapporto allo scorrimento. — Affinchè non possa avvenire scorrimento del muro sulla sua base bq, deve essere soddisfatta la condizione (*Arte di fabbricare, Costruzioni civili, stradali ed idrauliche*, Num. 115)

$$Q'_m = \nu f (V'_m + P) \qquad (1),$$

nella quale Q'_m e V'_m rappresentano rispettivamente le componenti orizzontale e verticale della spinta delle terre contro la parte di muro che si considera, mentre P è il peso di questa stessa parte di muro con quello della terra che essa porta, f il coefficiente d'attrito sulla faccia di scorrimento e ν il coefficiente di stabilità.

Nel caso concreto si può considerare la parte di muro di sostegno compresa fra mezzo e mezzo di due contrafforti successivi, lunga per conseguenza metri 5,50. I valori di Q'_m e di V'_m da porsi nella formola (1), sono allora quelli di Q_m e di V_m del numero precedente moltiplicati per l'ultima indicata lunghezza, e quindi si ha:

$$Q'_m = 161249^{cg}$$
$$V'_m = 108762,5.$$

Per ottenere il peso P bisogna procurarsi: il peso della parte di muro continuo *ubt* per la lunghezza di metri 5,50; il peso dell'altra parte di muro continuo *auts* per la stessa lunghezza; il peso di due mezzi contrafforti, ossia di un contrafforte intiero; il peso dei cinque archi in muratura compresi fra due contrafforti successivi; il peso della terra portata dai cinque archi or ora indicati; e finalmente il peso della terra insistente ai due mezzi contrafforti che si considerano. Incominciando dai volumi delle murature abbiamo; che è di metri cubi 26,40 la parte di muro continuo *ubt*; che risulta di metri cubi 99 l'altra parte di muro continuo *auts*; che, dicendo x la sporgenza $\overline{aq}$ dei contrafforti, il volume di uno d'essi è espresso da $16,5 . x$; e che il volume dei cinque archi è pure una funzione di x data da $10,86 . x$. Il volume adunque della parte di muro di sostegno lunga metri 5,50 è espresso, in metri cubi, da

$$125,40 + 27,36 . x.$$

Venendo al volume della terra che contribuisce ad aumentare la resistenza del muro perchè portata da quest'ultimo, abbiamo: che è espresso da metri cubi $28,136 . x$ il volume della terra portata dagli archi di scarico; e che vale metri cubi $1,50 . x$ il volume della terra insistente a due mezzi speroni. Segue da ciò che il volume della parte di terra concorrente ad aumentare la resistenza del muro è dato dall'espressione

$$29,636 . x.$$

Assumendo 2200 chilogrammi per peso del metro cubo di muratura e 1800 chilogrammi per peso del metro cubo di terra, otteniamo che il valore di P è dato da

$$P = 275880 + 113536{,}8\,.\,x.$$

Finalmente prendendo

$$f = 0{,}67 \quad \text{e} \quad \nu = \frac{1}{2},$$

e sostituendo i trovati valori di Q'_m, V'_m e P nell'equazione (1), ricaviamo che la sporgenza x del contrafforte è data da

$$x = 0^m{,}85.$$

Sporgenza dei contrafforti, affinchè i muri di sostegno degli arginali siano stabili per rapporto al rovesciamento. — L'azione delle terre contro questi muri, non solo tende farli scorrere sulla base qb, ma anche rovesciarli facendoli rotare attorno allo spigolo esterno proiettato nel punto b; e, affinchè il muro si possa dire stabile sotto questo riguardo, deve essere verificata la condizione (*Arte di fabbricare, Costruzioni civili, stradali ed idrauliche*, Num. 115)

$$Q'_m z_m = n^{VI} (V'_m a + P b) \qquad (2),$$

nella quale i prodotti $Q'_m z_m$ è $V'_m a$ rappresentano rispettivamente i momenti delle forze Q'_m e V'_m rispetto alla orizzontale proiettata in b. Il prodotto Pb è la somma dei momenti, rispetto alla stessa orizzontale, del peso del muro e della terra che esso sopporta per la parte compresa fra mezzo e mezzo di due contrafforti successivi, ed n^{VI} è il coefficiente di stabilità per rapporto al rovesciamento.

Nel caso particolare che stiamo trattando, essendo i valori di Q'_m e di V'_m quelli già stati indicati, essendo la lunghezza z_m quella stessa che nel numero precedente si è indicata con Z_m, ed avendosi

$$a = \overline{qb} = 2{,}30 + x,$$

otteniamo

$$Q'_m z_m = 662733^{\text{Cgxm}},39$$
$$V'_m a = 250153{,}75 + 108762{,}5\,.\,x.$$

Per avere il momento Pb bisogna fare, rispetto alla orizzontale proiettata in b: il momento del peso della parte di muro continuo ubt per la lunghezza di metri 5,50; il momento del peso dell'altra parte di muro continuo $auts$ per la stessa lunghezza; il momento del peso di due mezzi contrafforti ossia di un contrafforte intiero; il momento del peso dei cinque archi in muratura compresi fra due contrafforti successivi; il momento del peso della terra portata dai cinque archi or ora cennati; e finalmente il momento del peso della terra insistente ai due mezzi contrafforti già indicati. Per ottenere siffatti momenti di pesi incomincieremo dal fare i relativi momenti di volume, giacchè riesce dopo facile dedurre quelli da questi moltiplicando pei corrispondenti pesi dell'unità di volume. Per il prisma rappresentato nel triangolo ubt abbiamo: che il centro di volume si trova sulla mediana bz del triangolo stesso ed in tale punto da essere $\overline{bv} = \frac{2}{3}\overline{bz}$; che la verticale vy determina su bu il punto y tale da essere $\overline{by} = \frac{2}{3}\overline{bu}$, cosicchè $\overline{by} = \frac{2}{3}0{,}80$; e che il momento del volume $26^{mc},40$ del prisma or ora indicato risulta eguale a 14,08. Per ottenere il momento del volume 99^{mc} del paralellepipedo rappresentato nel rettangolo $auts$, basta osservare che il braccio ad esso relativo è $\overline{bu} + \frac{1}{2}\overline{ua} = 0{,}80 + \frac{1{,}50}{2} = 1^{m},55$, e che quindi il corrispondente momento di volume risulta 153,45. Il volume di un contrafforte è $16{,}5 \,.\, x$, il suo braccio è $\overline{ba} + \frac{1}{2}\overline{aq} = 2{,}30 + \frac{1}{2}x$; e quindi il corrispondente momento di volume risulta $37{,}95 \,.\, x + 8{,}25 \,.\, x^2$. Il volume dei cinque archi portati da due contrafforti successivi è espresso da $10{,}86 \,.\, x$, ed il suo braccio è pure $2{,}30 + \frac{1}{2}x$, di maniera che il relativo momento di volume è dato da $24{,}978 \,.\, x + 5{,}43\, x^2$. Sommando i quattro momenti di volume trovati, otteniamo che l'espressione del momento del volume (rispetto alla orizzontale proiettata nel punto b) della parte di muro di sostegno compresa fra mezzo e mezzo di due contrafforti successivi è data

$$167{,}53 + 62{,}928 \,.\, x + 13{,}68 \,.\, x^2 \qquad (3).$$

Bisogna ora fare i momenti di volume delle terre portate dai cinque archi posti fra due contrafforti successivi e dai due mezzi contrafforti adiacenti. Il volume della terra portata dai cinque archi sud-

detti fu trovato eguale a $28{,}136.x$, il suo braccio è $2{,}30+\frac{1}{2}x$, e quindi il corrispondente momento di volume risulta $64{,}7128.x+14{,}068.x^2$. Il volume della terra insistente a due mezzi contrafforti risultò espresso da $1{,}50.x$, il braccio di questo volume per approssimazione si può assumere eguale a $2{,}30+\frac{1}{2}x$, cosicchè il relativo momento di volume risulta $3{,}45.x+0{,}75.x^2$. Sommando i due momenti di volume or ora trovati, si ottiene l'espressione del momento di volume (rispetto alla orizzontale proiettata in b) della terra portata dagli archi e dai contrafforti fra mezzo e mezzo di due contrafforti successivi, e quest'espressione risulta

$$68{,}1628.x+14{,}818.x^2 \qquad (4).$$

Moltiplicando l'espressione (3) per 2200 e l'espressione (4) per 1800, ossia rispettivamente pei pesi del metro cubo di muratura e del metro cubo di terra, e sommando i due prodotti si ha il momento Pb, e quindi questo momento è dato da

$$Pb=268666+261134{,}64.x+56768{,}4.x^2.$$

Sostituendo i trovati valori di $Q'_m z'_m$, $V'_m a$ e Pb nell'equazione (2), e ponendo $n^{VI}=\frac{1}{2}$, giungiamo ad una equazione del secondo grado in x, la quale ammette due radici reali, una positiva e l'altra negativa. La prima di queste radici, che è appunto quella che soddisfa alla quistione, risulta di metri 1,54; cosicchè la sporgenza dei contrafforti, affinchè il muro sia stabile per rapporto al rovesciamento, deve essere non solo di metri 0,85, come richiederebbe la stabilità sotto il punto di vista dello scorrimento, ma assai maggiore. In cifra rotonda assumeremo la detta sporgenza di metri 1,60.

Verificazione della stabilità dei muri di sostegno degli arginali per rapporto allo schiacciamento. — Per fare questa verificazione, bisogna innanzi tutto trovare il punto d'applicazione della pressione sulla base bq per la parte di muro compresa fra mezzo e mezzo di due contrafforti successivi, e serve per questo scopo la formola (*Arte di fabbricare*, *Costruzioni civili*, *stradali ed idrauliche*, Num. 115)

$$d=\frac{V'_m a+Pb-Q'_m z_m}{V'_m+P} \qquad (5),$$

nella quale V'_m, P, $V'_m a$, Pb e $Q'_m z_m$ hanno i significati già espressi, mentre d è la distanza $\overline{bm'}$ del centro di pressione m' dallo spigolo b intorno al quale tende avvenire la rotazione nel rovesciamento. Nel caso concreto, per essersi assunto $x = 1^m,60$ risultano

$$a = 2{,}30 + 1{,}60 = 3{,}90,$$
$$P = 275880 + 113536{,}8 \times 1{,}60 = 457538^{cg},88,$$
$$V'_m a = 250153{,}75 + 108762{,}5 \times 1{,}60 = 424173^{cg\times m},75,$$
$$Pb = 368666 + 261134{,}64 \times 1{,}60 + 56768{,}4\,(1{,}60)^2 = 931808^{cg\times m},528;$$

cosicchè, pei valori già trovati di V'_m e di $Q'_m z_m$, si deduce

$$d = 1^m,22.$$

Il punto d'applicazione della pressione sulla base bq del muro, o, in altri termini, il punto in cui la risultante di tutte le forze applicate al muro incontra la detta base, dista adunque di metri 1,22 dalla orizzontale proiettata nel punto b.

Determinato il punto d'applicazione della pressione sulla base bq, riesce facile trovare la massima pressione, riferita all'unità di superficie, sulla base medesima, massima pressione la quale ha luogo sulla orizzontale proiettata in b.

Chiamando

a la grossezza $\overline{ab}$ del muro continuo alla base,

b la sporgenza $\overline{aq}$, e

c la larghezza di un contrafforte,

L la distanza di due contrafforti successivi,

N la totale pressione sulla base bq per la parte di muro lungo L,

K' la pressione riferita all'unità di superficie in b, e

K'' la pressione riferita all'unità di superficie in q,

A, B e C tre coefficienti dipendenti dalle lunghezze a, b, c ed L, abbiamo

$$A = La + cb. \tag{6}$$

$$B = \frac{1}{2}\left[La^2 + c(a+b)^2 - ca^2\right] \tag{7}$$

$$C = \frac{1}{3}\left[La^3 + c(a+b)^3 - ca^3\right] \tag{8},$$

e, fra le due pressioni unitarie K′ e K″, si hanno le relazioni (*k*)

$$\left.\begin{aligned} AK' - \frac{B}{a+b}(K' - K'') &= N \\ AK' - \frac{C}{a+b}(K' - K'') &= Nd \end{aligned}\right\} \qquad (9).$$

(*k*) La deduzione delle formole (6), (7) e (8) e quella delle equazioni (9) si può effettuare come segue. S'immagini la parte (*Fig.* 123) ABCEGHFD della base del muro compresa fra mezzo e mezzo di due contrafforti successivi; il punto d'applicazione della pressione che su essa ha luogo sia O; e si osservi che le lettere *a*, *b*, *c*, L e *d* rappresentano rispettivamente le lunghezze $\overline{AN} = \overline{BM}$, $\overline{MC} = \overline{GE}$, $\overline{EC} + \overline{FD}$, $\overline{BA} = \overline{CD}$ ed $\overline{IO}$. Ammettendo che le variazioni della pressione unitaria, nel passare da un punto all'altro della base premuta, siano proporzionali alle distanze dei punti che si considerano dalla retta AB, abbiamo: che la variazione di pressione nel passare dalla retta BA alla retta CD è

$$K' - K'';$$

che le variazioni di pressione, nel passare dalla retta BA alle rette mn ed $m'n'$ (le cui distanze da BA sono $\overline{Bm} = x$ e $\overline{Bm'} = x'$), sono rispettivamente

$$\frac{K' - K''}{a+b}x$$

$$\frac{K' - K''}{a+b}x';$$

e che le pressioni unitarie su mn ed $m'n'$ sono espresse da

$$K' - \frac{K' - K''}{a+b}x$$

$$K' - \frac{K' - K''}{a+b}x'.$$

Immaginando ora condotte due rette m_1n_1 ed $m'_1n'_1$ vicinissime ad mn e ad $m'n'$, le pressioni sulle superficie elementari mnn_1m_1 ed $m'm''m''_1m'_1 + n'n''n''_1n'_1$ risultano

$$L\left(K' - \frac{K' - K''}{a+b}x\right)dx$$

$$c\left(K' - \frac{K' - K''}{a+b}x'\right)dx';$$

Nel caso concreto, avendosi

$$a = 2^{m},30, \qquad b = 1^{m},60,$$
$$c = 1,\ 50, \qquad L = 5,\ 50,$$

i valori di A, B e C risultano

ed i momenti di queste pressioni rispetto alla retta BA sono

$$L\left(K' - \frac{K' - K''}{a+b}\,x\right) x\,dx$$
$$c\left(K' - \frac{K' - K''}{a+b}\,x'\right) x'\,dx'.$$

Ponendo ora le condizioni, che la somma algebrica di tutte le pressioni elementari sulla base premuta deve essere eguale alla pressione totale N, e che la somma algebrica dei momenti delle stesse pressioni elementari rispetto alla retta BA deve eguagliare il momento Nd, si ottengono le due equazioni

$$L\int_0^a \left(K' - \frac{K' - K''}{a+b}\,x\right) dx + c\int_a^{a+b} \left(K' - \frac{K' - K''}{a+b}\,x'\right) dx' = N$$

$$L\int_0^a \left(K' - \frac{K' - K''}{a+b}\,x\right) x\,dx + c\int_a^{a+b} \left(K' - \frac{K' - K''}{a+b}\,x'\right) x'\,dx' = Nd.$$

Integrando e riducendo col porre

$$A = La + cb$$
$$B = \frac{1}{2}\left[La^2 + c\,(a+b)^2 - ca^2\right]$$
$$C = \frac{1}{3}\left[La^3 + c\,(a+b)^3 - ca^3\right],$$

si ottengono le equazioni

$$AK' - \frac{B}{a+b}\,(K' - K'') = N$$
$$BK' - \frac{C}{a+b}\,(K' - K'') = Nd,$$

le quali sono appunto le equazioni (9) da cui abbiamo detto doversi dedurre i valori delle pressioni unitarie K' e K''.

$$A = 15{,}05$$
$$B = 21{,}9875$$
$$C = 45{,}8822.$$

Siccome poi

$$N = V'_m + P = 566301^{cg}$$
$$d = 1^m{,}22,$$

le equazioni (9) dànno

$$K' = 52249^{cg}$$
$$K'' = 13215.$$

Questi risultati mostrano come la massima pressione riferita all'unità di superficie abbia effettivamente luogo lungo la linea AB (*Fig.* 123) della base premuta, e, assumendo 600000 chilogrammi per coefficiente di rottura della muratura riferito al metro quadrato, si deduce che il relativo coefficiente di stabilità n'' vale 0,087. Questo coefficiente è minore della frazione 0,1, la quale, per comune consenso dei prudenti costruttori, costituisce il limite superiore dei coefficienti di stabilità da adottarsi nelle murature, e quindi le dimensioni state assegnate al muro di sostegno degli arginali dànno le più ampie garanzie di sicurezza per rapporto alla resistenza alla pressione.

85. **Principali dimensioni delle fondazioni.** — Le fondazioni si devono fare con calcestruzzo da versarsi nei cassoni di cui si è parlato nei numeri 7 e 82. Si è poi supposto che il terreno resistente s'incontri alla profondità di metri 4,80 sotto il livello delle acque magre, ossia di metri 5,30 sotto il piano della risega, indicato in ABCD sulla figura 46. Lo strato di calcestruzzo da versarsi nel cassone deve avere l'altezza di metri 4,10 (*Fig.* 49, 53, 54, 58 e 59).

La parte di fondazione dell'altezza di metri 1,20, fra lo strato di calcestruzzo suindicato ed il piano della risega, si fa con struttura murale e si riveste, verso acqua, di tre filari di pietra da taglio.

86. **Principali dimensioni delle spalle.** — Per indicare queste dimensioni conviene stabilire a quali altezze sul piano delle riseghe si trovano quelle sezioni orizzontali, in cui hanno luogo cangiamenti bruschi di dimensioni. Riportandosi alle figure 49, 50, 51, 52,

53, 54 e 55, e trascurando le sporgenze degli avancorpi, si giunge ai numeri consegnati nella seguente tavola:

Altezze delle sezioni orizzontali sul piano delle riseghe	Lunghezze	Larghezze delle sezioni o grossezze delle spalle
0m	15m,05	9m,10
3, 53	14, 77	8, 96
4, 03	14, 77	8, 96
4, 18	14, 77	8, 96
5, 83	12, 80	6, 38
6, 50	12, 80	5, 60
11, 58	12, 80	5, 60.

Fra le altezze di metri 3,53 e di metri 4,03 esiste una fascia alta metri 0,50 e sporgente di metri 0,20 dal vivo del muro.

Fra le altezze di metri 5,83 e di metri 6,50 esiste una cornice alta metri 0,67 col totale oggetto di metri 0,30.

Al disopra dell'altezza di metri 11,58 esiste una cornice di coronamento alta metri 0,70 e colla totale sporgenza di metri 0,35.

Venendo agli avancorpi che si trovano addossati alle spalle, riesce facile farsi un'idea precisa delle principali loro dimensioni col riportarsi alle figure 49 e 50, non che al contenuto della tavola che segue, nella quale sono indicate: le altezze sul piano delle riseghe, in cui hanno luogo i principali cangiamenti delle loro sezioni orizzontali; le loro larghezze nel senso parallelo alle fronti del ponte in corrispondenza delle accennate altezze; e finalmente le loro sporgenze sulla parte di spalla che trovasi posta verso il corso d'acqua.

Altezze delle sezioni orizzontali sul piano delle riseghe	Larghezze	Sporgenze
0m	2m,80	0m,55
3, 53	2, 52	0, 55
4, 03	1, 90	0, 30
6, 50	1, 90	1, 24
6, 96	1, 40	1, 00
11, 58	1, 40	1, 00.

Fra le altezze di metri 3,53 e di metri 4,03 si ha una fascia alta metri 0,50, sporgente di metri 0,30; e la suddetta cornice di coro-

namento asseconda colla sua sporgenza l'andamento degli avancorpi.

Le pareti delle spalle fra gli avancorpi ed i muri degli arginali hanno l'inclinazione di $\frac{1}{15}$ e, come risulta dalla figura 54, ciascuno degli avancorpi trovasi da questa parte in sporgenza su una faccia piana, colla pendenza di $\frac{1}{15}$, in modo da essere il risalto di metri 0,93 al piano delle riseghe, e di metri 1 all'altezza di metri 11,58 su uno stesso piano.

Nessun dubbio può essere sollevato intorno alla stabilità delle spalle, e, per convincersi, basta rispettivamente paragonare le dimensioni di una spalla e le forze a cui si trova sottoposta, colle dimensioni state assegnate ai muri degli arginali e colle forze su esse operanti. D'altronde, un semplicissimo calcolo d'approssimazione, fatto col considerare siccome omogenea e parallelepipeda la parte di spalla posta fra le terre ed il piano verticale determinato dalla linea $\lambda\mu$ (*Fig.* 55) e col trascurare la parte sottostante ai cuscinetti d'imposta non che ai due avancorpi, quantunque fondato su ipotesi evidentemente favorevoli alla stabilità, pure conduce a riconoscere stabilissime le spalle per rapporto allo scorrimento, al rovesciamento ed alla pressione. Se poi si tenesse conto delle vere dimensioni delle spalle e anche della spinta delle terre, contrária a quella di un'arcata, tosto si vedrebbe: che la stabilità delle spalle è a tutta prova; che la loro grossezza si potrebbe diminuire, e che le forme e dimensioni progettate, anzichè da esigenze di stabilità, sono motivate dal modo di unire e ben coordinare il ponte coi muri dell'arginale, ed in parte anche dal carattere estetico della costruzione.

La camera D (*Fig.* 53, 54 e 55), che si trova in ogni spalla per l'ormeggio dei timpani, ha lunghezza di metri 10,80, larghezza di metri 1 ed altezza di metri 2. Il suo asse dista di metri 3,20 dal vivo del muro, ed il suo pavimento è stabilito all'altezza di metri 8,45 sul piano delle riseghe. Ciascuno dei due ingrandimenti di ogni camera, i quali sono separati dal maschio *r*, ha la lunghezza di metri 3,65, la larghezza di metri 0,45 e l'altezza di metri 1,20. I pozzi per la discesa in queste camere hanno il diametro di metri 0,70,

87. **Principali dimensioni delle pile.** — Per fare chiaramente risultare queste dimensioni, conviene indicare quali sono le altezze sul piano delle riseghe, alle quali hanno luogo i cangiamenti di sezione orizzontale, quali sono le lunghezze e le grossezze delle pile in corrispondenza di queste differenti sezioni. Questo poi risulta

dalla tavola che immediatamente presentiamo, e dal riferimento dei numeri della tavola stessa alle figure 56, 57, 58 e 59:

Altezze delle sezioni orizzontali sul piano delle riseghe	Lunghezze	Grossezze
0^m	$15^m,05$	$4^m,45$
3, 53	14, 77	4, 17
4, 03	14, 77	4, 17
4, 18	14, 77	4, 17
5, 83	12, 80	2, 20
6, 50	12, 80	2, 20
11, 58	12, 80	2, 20.

Fra le altezze di metri 3,53 e di metri 4,03, fra quelle di metri 5,83 e di metri 6,50, e al di sopra dell'altezza di metri 11,58 esistono la fascia, la cornice e la cornice di coronamento, di cui già si è fatto cenno nel precedente numero.

La camera D per l'ormeggio dei timpani in ogni spalla ha lunghezza di metri 11,60, larghezza di metri 0,80 ed altezza di metri 2. L'altezza del pavimento di questa camera sul piano delle riseghe è di metri 8,42, e di metri 0,80 il diametro del pozzo di discesa.

Le indicate dimensioni delle pile sono tali da assicurare le più ampie garanzie di sicurezza; e, anche nel caso più sfavorevole in cui, oltre la massima azione verticale esercitata dalle centine, si considera il peso della muratura di una pila ed il più gran sovraccarico che su essa può esistere, si trova che il coefficiente di stabilità relativo alla pressione è sempre minore di 0,06, qualunque sia la sezione orizzontale per cui vien esso calcolato.

88. **Principali dimensioni del parapetto.** — L'altezza del parapetto sui muri degli arginali, sulle spalle e sulle pile è di metri 1,05; e quest'altezza è divisa in tre parti: la parte inferiore, che fa da zoccolo, è alta metri 0,30 e grossa metri 0,40; la parte di mezzo ha l'altezza di metri 0,60 e la grossezza di metri 0,30; la parte superiore, che fa da cimasa, ad un'altezza di metri 0,15 accoppia una grossezza di metri 0,40.

Il parapetto, lungo i muri degli arginali e per quelle parti delle spalle che si trovano comprese fra questi ultimi e gli avancorpi delle spalle, è fatto a guisa di pluteo, come risulta dalla figura 49. La grossezza della pietra tenera costituente la parte a trafori è di metri 0,10.

89. **Osservazioni sui disegni del ponte.** — Le dimensioni delle diverse parti di una costruzione qualsiasi dipendono dallo scopo per cui si vuol essa costruire, dalla forma che la medesima deve presentare, dai modi con cui i singoli elementi vogliono essere riuniti; nè si possono eseguire i disegni regolari della medesima senza che tali dimensioni si trovino conseguentemente determinate. Deriva da ciò: che nello studio di rappresentazione delle diverse parti di un progetto bisogna prima incominciare con figure dimostrative; che le figure, le quali ci hanno servito di norma nella descrizione e nello studio di composizione del ponte, non che nella determinazione delle dimensioni delle varie sue parti, furono per l'appunto sinora considerate come semplici abbozzi; e che ora soltanto saremmo in grado di poter dare, mediante disegni, la rappresentazione regolare e completa del progetto di cui abbiamo intrapreso lo studio.

Siccome però le figure dimostrative state presentate sono sufficientemente nitide da bastare a far comprendere il progetto nel suo assieme, ed in tutti i suoi particolari, e siccome per di più queste figure furono eseguite in iscala per tutte quelle dimensioni che dipendono dallo scopo della costruzione, dal carattere estetico della medesima e per tutte quelle che furono assunte onde instituire calcoli di verificazione di stabilità, crediamo che non sia il caso di aggiungere altri disegni e di dichiarare qualora occorra di servirsene per ottenere alcune dimensioni di secondaria importanza non state indicate nel presente capitolo: che sono disegnate nella scala del $\frac{1}{1000}$ la figura 43 e nella scala del $\frac{1}{400}$ la figura 46; che le figure 47 e 48 sono fatte nella scala di $\frac{1}{75}$; che si adottò la scala di $\frac{1}{100}$ per le figure 49, 50, 51, 52, 53 e 54, e la scala di $\frac{1}{200}$ per la figura 55, ed ancora la scala di $\frac{1}{100}$ per le figure 56, 57 58 e 59; che la figura 60 è pure disegnata nella scala di $\frac{1}{100}$, e nella scala di $\frac{1}{20}$ le figure 61 e 62; che la figura 63 è anche fatta nella scala di $\frac{1}{100}$, e nelle scale di $\frac{1}{20}$ le figure 64, 65 e 66; che per la figura 67 si è adoperata la scala di $\frac{1}{100}$, e quella di $\frac{1}{20}$ per le figure 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84 ed 85.

CAPITOLO IV.

Quantitativi dei materiali, delle opere e dell'ammontare della spesa occorrente per la costruzione del ponte.

90. **Materiali ed opere da considerarsi nel fare il costo del ponte.** — Supponendo che si voglia tener conto dei materiali e delle opere occorrenti per la sola costruzione del ponte, si dovranno considerare: le escavazioni per far luogo alle fondazioni delle pile e delle spalle, i cassoni di ferro da porsi in queste escavazioni, il calcestruzzo e la muratura di cui questi cassoni devono essere riempiti; le murature per le spalle e per le pile del ponte, le pietre conce da cui queste murature devono essere rivestite, le pietre per fasce, cornici, ecc.; gli archi metallici, i loro collegamenti, i timpani, le travi trasversali, le longarine di fronte, le mensole, la coperta di lamiera di ferro, i cuscinetti d'imposta, i pezzi d'ormeggio e le cornici di ghisa; i materiali componenti il pavimento stradale; e finalmente le opere tutte di finimento, come parapetti, piastre e tubi per lo scolo delle acque.

91. **Quantitativi dei materiali e delle opere per fondazioni.** — Nella valutazione degli sterri per fondazioni si è ammesso che convenga conservare il perimetro della loro base alla distanza di metri 0,60 da quello della base dei cassoni, giacchè così riuscirà facile il collocamento a sito di questi ultimi, e che le pareti delle escavazioni si possano provvisoriamente mantenere colla scarpa di $\frac{1}{5}$. Basando i calcoli su queste plausibili ipotesi, e supponendo che facciano parte delle spalle anche i contrafforti A, B e B' (*Fig.* 55), si ebbero i risultamenti continuati nella seguente tavola:

Sterro per le fondazioni delle due spalle del ponte	Mc. 1921
Sterro per le fondazioni delle due pile del ponte	» 753
Totale	Mc. 2674.

Nell'ottenere il volume dei cassoni di ferro per le fondazioni delle due spalle e delle due pile, si è tenuto conto delle lamiere formanti le loro pareti, dei ferri a T che servono da coprigiunti esterni, dei ferri a T pei collegamenti interni e delle capocchie dei chiodi; ed i risultati avuti sono i seguenti:

Volume di due cassoni A (*Fig.* 47) . . .	Mc.	3,604
» sei cassoni B	»	3,944
» sei cassoni C	»	1,967
» due cassoni G (*Fig.* 48)	»	3,268
Totale	Mc.	12,783.

Moltiplicando questo volume pel peso del metro cubo di ferro, ossia per chilogrammi 7770, si ottiene che il peso totale dei cassoni di fondazione delle due spalle e delle due pile è di 99324 chilogrammi.

Alle estremità degli spazi C, E ed F (*Fig.* 47), esistenti fra i cassoni che occorrono per la fondazione di ogni spalla, bisogna porre, come già si disse al numero 7, le tavole o meglio i tavoloni indicati in t, t' e t''. Questi tavoloni, che devono essere di essenza forte, per esempio, di quercia, sono complessivamente in numero di trentadue, quando si comprendano anche quelli posti alla separazione fra le fondazioni delle spalle e dei muri continui degli arginali; e si può ritenere che ciascuno di essi abbia la lunghezza di metri 5,20, la larghezza di metri 0,35 e la grossezza di metri 0,10; e quindi il loro totale volume risulta di metri cubi 5,824.

Il calcestruzzo, necessario per riempire i cassoni di fondazione fino all'altezza stata indicata nel numero 85, risulta

Per le fondazioni delle due spalle del ponte .	Mc.	1306
Per le fondazioni delle due pile del ponte . . .	»	740
Totale	Mc.	2046.

Viene ora la parte di fondazione, la quale trovasi fra la superficie superiore del calcestruzzo ed il piano delle riseghe. Questo strato di muratura, alto metri 1,20, si trova esternamente rivestito con tre filari di pietra concia, ed importa distinguere quest'ultima dalla muratura di pietrame. Ammesso che il rivestimento di pietra presenti la media grossezza di metri 0,60, si ha: che, fra muratura di pietrame e rivestimento di pietra concia, occorrono

Per le due spalle	Mc.	384
Per le due pile	»	163
Totale	Mc.	547;

che il rivestimento è

Per le due spalle di	Mc. 34
Per le due pile di	» 52
	Totale Mc. 86;

e che finalmente il volume della sola muratura di pietrame ascende a metri cubi 461.

Riepilogando, abbiamo i seguenti quantitativi di materiali e di opere per fondazioni delle due spalle e delle due pile del ponte:

Sterri subacquei	Metri cubi	2674
Ferro per cassoni	Chilogrammi	99324
Tavoloni di quercia	Metri cubi	5,824
Calcestruzzo	»	2046
Muratura di pietrame	»	461
Pietra concia	»	86

92. **Quantitativi dei materiali e delle opere per la costruzione delle spalle e delle pile fuori di fondazione.** — Per la valutazione di queste opere si sono immaginati sette piani orizzontali, il più basso corrispondente alle riseghe di fondazione, e gli altri sei rispettivamente distanti da questo di metri 3,53, di metri 4,03, di metri 4,18, di metri 5,83, di metri 6,50 e di metri 11,58. Si è supposto che, parallelamente all'asse del ponte, le spalle siano limitate dai piani verticali corrispondenti alle facce laterali più lontane dei due contrafforti B e B' (*Fig.* 55), e si è fatta la determinazione dei volumi di muratura compresi fra i definiti piani considerati due a due. Prima di tutto si sono complessivamente calcolati i volumi della muratura di pietrame e della pietra concia, si è dopo ottenuto il volume della sola pietra, e per differenza si è quindi ricavato quello dell'indicata muratura.

Nel dedurre i volumi delle pietre conce, ad eccezione delle pietre piccole per rivestimenti, si è fatto in modo che risultassero quelli dei minimi parallelepipedi ad esse circoscritti, giacchè è questa una consuetudine generalmente seguìta dalla maggioranza dei costruttori.

Indicando i sette piani accennati colle loro quote (0), (3,53), (4,03), (4,18), (5,83), (6,50) e (11,58) per rapporto al piano determinato dalle riseghe di fondazione, si ha: che, fra i due piani (0) e (3,53), occorrono

In muratura di pietrame e pietra concia per le due spalle . . . . . Mc. 968
In muratura di pietrame e pietra concia per le due pile . . . . . » 426

Totale Mc. 1394,

In pietra concia per rivestimento comune, ossia con bugne non in rilievo nelle due spalle . . Mc. 12,

In pietra concia per bugne in rilievo nelle due spalle » 124
In pietra concia per bugne in rilievo nelle due pile » 172

Totale Mc. 296,

In sola muratura di pietrame , ... » 1086;

che, fra i piani (3,53) e (4,03), sono necessari

In muratura di pietrame e pietra concia per le due spalle . . . . . Mc. 140
In muratura di pietrame e pietra concia per le due pile . . . . . » 67

Totale Mc. 207,

In pietra concia per rivestimento comune nelle due spalle . . . . . Mc. 2,

In pietra concia per una fascia sagomata sugli avancorpi delle spalle . . . . . Mc. 7,

In pietra concia per una fascia piana sulle due spalle Mc. 24
In pietra concia per una fascia piana sulle due pile » 47

Totale Mc. 71,

In sola muratura di pietrame . . . . . Mc. 127;

che, fra i piani (4,03) e (4,18), bisogna impiegare

In muratura di pietrame e pietra concia per le due spalle . . . . . Mc. 41
In muratura di pietrame e pietra concia per le due pile . . . . . » 18

Totale Mc. 59,

In pietra concia per rivestimento comune nelle due spalle . . . . . Mc. 1.

In pietra concia per gli avancorpi e per le imposte sulle due spalle . . . . . Mc. 9
In pietra concia per gli avancorpi e per le imposte sulle due pile . . . . . » 15

Totale Mc. 24,

In sola muratura di pietrame . . . . . Mc. 34;

che, fra i piani (4,18) e (5,83), occorrono

In muratura di pietrame e pietra concia per le due spalle . . . . . Mc. 442
In muratura di pietrame e pietra concia per le due pile . . . . . » 203

Totale Mc. 645,

In pietra concia per rivestimento comune nelle due spalle . . . . . Mc. 9,
In pietra concia per gli avancorpi e per le imposte sulle due spalle . . . . . Mc. 99
In pietra concia per gli avancorpi e per le imposte sulle due pile . . . . . » 162

Totale Mc. 261,

In sola muratura di pietrame . . . . . Mc. 375;

che, fra i piani (5,83) e (6,50), sono necessari

In muratura di pietrame e pietra concia per le due spalle . . . . . Mc. 153
In muratura di pietrame e pietra concia per le due pile . . . . . » 50

Totale Mc. 203,

In pietra concia per rivestimento comune nelle spalle e nelle pile . . . . . Mc. 22,

In pietra concia per gli avancorpi . . . . . Mc. 7,

In pietra concia pei cappelli sagomati sulle spalle e sulle pile . . . . . Mc. 13,

In sola muratura di pietrame . . . . . Mc. 161;

che, fra i piani (6,50) e (11,58), bisogna impiegare

In muratura di pietrame e pietra concia per le due spalle . . . . . Mc. 710
In muratura di pietrame e pietra concia per le due pile . . . . . » 225

Totale Mc. 935,

In pietra concia per rivestimento comune e pei prismi sorgenti sui cappucci delle spalle e delle pile Mc. 414,

In pietra concia per gli avancorpi . . . . . Mc. 21,

In pietra concia per la gola della cornice di coronamento . . . . . Mc. 10,

In pietra concia per gli ormeggi . . . . . Mc. 15,

In sola muratura di pietrame . . . . . Mc. 475.

Non bisogna dimenticare il volume della muratura di mattoni per gli archi di scarico portati dagli speroni A, B e B' (*Fig.* 55), come pure quella pei volti coprenti le camere d'ormeggio delle pile. Facendo i calcoli corrispondenti risulta:

Muratura di mattoni per archi di scarico . . . Mc. 13
Muratura di mattoni per volte delle camere d'ormeggio delle pile . . . . . » 9

Totale Mc. 22.

Finalmente resta ancora da considerarsi il volume della pietra concia della parte di cornice di coronamento posta sopra la gola già stata valutata, e questo volume risulta di metri cubi 19.

Facendo un riepilogo e comprendendo in una sola categoria la pietra concia per bugne in rilievo, per pietre incavate, per fasce, per cornici, per imposte e per cappucci, otteniamo i seguenti quantitativi per la costruzione delle spalle e delle pile a cominciare dal piano immediatamente sopra le fondazioni fino alla cornice di coronamento inclusa:

Muratura di pietrame . . . . . Metri cubi 2258
Muratura di mattoni per archi . . . . . » 22
Pietra concia per rivestimento comune e pei prismi sorgenti sui cappucci . . . . . » 460

Petra concia per bugne in rilievo, per pietre incavate, per fasce, per cornici, per imposte e per cappucci . . . . . Mc. 729
Pietra concia per gli ormeggi . . . . . » 15.

93. **Quantitativi dei materiali occorrenti per le arcate, pei timpani, pei loro collegamenti, per le travi trasversali, per le mensole, per la coperta metallica del ponte, pei cuscinetti d'imposta, per gli ormeggi e per le cornici.** — Incominciando dai cuscinetti di ghisa, i quali ricevono le imposte delle centine, abbiamo che questi cuscinetti sono in numero di 12 per ogni arcata, e quindi in numero di 36 per l'intiero ponte. Il totale loro volume è di metri cubi 15,891, e, assumendo 7200 chilogrammi per peso del metro cubo di ghisa, risulta che il loro peso è di chilogrammi 114415.

Fra la parte fissa e la parte mobile di ciascun cuscinetto occorrono tre coppie di cunei in acciaio, e quindi per tutto il ponte vi sono 108 di queste coppie. Il loro totale volume è di metri cubi 0,667, e, prendendo 7820 chilogrammi per peso del metro cubo di acciaio, si ottiene che il loro peso è di chilogrammi 5216.

In ciascuna delle due estremità di ogni centina vi è un guscio coll'annessa piastra di ghisa. Nell'intiero ponte vi sono 36 di questi corpi; il loro volume totale è di metri cubi 1,224; ed il loro peso risulta di chilogrammi 8813.

Considerando per ciascuna centina la parete verticale, le due tavole, i ferri d'angolo per collegare queste a quella, i ferri d'angolo e la parete verticale per fermarvi i pezzi dei timpani, le imposte, i coprigiunti, le capocchie dei chiodi e le teste delle chiavarde, si ottiene che il volume del ferro per le diciotto centine dell'intiero ponte è di metri cubi 61,329, e che quindi, assumendo 7770 chilogrammi per peso del metro cubo di ferro, occorrono, per la loro costruzione, chilogrammi 476526.

L'ultimo indicato peso non comprende quello delle nervature disposte normalmente all'asse di ciascuna centina, destinate a servire da coprigiunti per le pareti verticali, ed a consolidare queste stesse pareti. Quelle fra queste nervature, le quali si trovano sulle fronti delle arcate, hanno il volume di metri cubi 0,428 e quindi il peso di chilogrammi 3326.

Le centine di una stessa arcata sono collegate nel senso trasversale in corrispondenza delle nervature suindicate. Comprendendo tutti i pezzi per questi collegamenti, quelli mediante i quali essi

sono uniti alle centine e le capocchie dei chiodi, si ottiene che abbisognano metri cubi 5,920, e quindi chilogrammi 45998 di ferro.

In corrispondenza di ciascuna centina vi sono i timpani, formati da pezzi orizzontali, da pezzi verticali e da pezzi inclinati con piastre di collegamento. Tenendo conto di tutti questi pezzi, delle piastre suddette, delle capocchie dei chiodi, dei coprigiunti, delle lamiere continue poste in corrispondenza delle sommità delle centine e dei pezzi tutti per unire ai timpani i loro collegamenti trasversali, si giunge ad un quantitativo in ferro di metri cubi 15,859, pari a chilogrammi 123224.

I ferri d'angolo pel collegamento dei timpani nel senso trasversale fanno, esclusi i pezzi per attaccarli ai timpani perchè già stati considerati, un volume di metri cubi 1,454, ed il corrispondente peso risulta di chilogrammi 11298.

Le travi trasversali di ferro sostenute dalle longarine superiori dei timpani fanno, coi cantonali e colle capocchie dei chiodi d'unione, un volume di metri cubi 3,421, e quindi il loro peso è di chilogrammi 26581.

Le travi longitudinali di fronte, alle quali sono attaccate le mensole, comprendendo i coprigiunti e le capocchie, fanno complessivamente il volume di metri cubi 3,405, epperciò i ferri per la loro composizione dànno un peso di chilogrammi 26457.

Le mensole state indicate, le quali hanno per iscopo di portare i marciapiedi del ponte, esigono per la loro composizione, le capocchie dei chiodi comprese, metri cubi 3,060, e quindi chilogrammi 23776 di ferro.

I ferri a T, che servono per sostenere e consolidare le lamiere curve costituenti la coperta del ponte, ed il ferro d'angolo il quale corre lungo la cornice di ghisa, fanno il complessivo volume di metri cubi 3,907 e quindi il peso totale di chilogrammi 30357.

Il volume delle lamiere curve formanti la coperta metallica del ponte e quello delle capocchie dei chiodi per inchiodare queste lamiere sui ferri a T già indicati, complessivamente ascendono a metri cubi 9,305; ed il peso corrispondente è di chilogrammi 72300.

La cornice di ghisa portata dalle mensole ha il volume di metri cubi 7,367, ed il suo peso risulta di chilogrammi 53042.

I ferri per gli ormeggi dei timpani sulle spalle e sulle pile, comprendendo le aste, i perni, le guide, le chiavarde, ecc., fanno il complessivo volume di metri cubi 2,687, ed il loro peso risulta di chilogrammi 20878.

Le scanalature, in cui sono collocate le aste per gli ormeggi superiori, sono coperte con piastre di ghisa. Il volume di queste piastre è di metri cubi 0,583, e di chilogrammi 4198 il loro peso.

Finalmente, per fermare nella pietra i perni per gli ormeggi inferiori, si può far uso di zolfo. Il volume del zolfo occorrente per quest'uso sarà di metri cubi 0,099, o ancora, assumendo 1900 chilogrammi per peso del metro cubo di zolfo, di chilogrammi 188.

Riassumendo, abbiamo che, per le arcate, pei timpani, pei collegamenti di quelle e di questi, per le travi trasversali, per le travi longitudinali di fronte, per le mensole, per la coperta di lamiera, per gli ormeggi, pei cuscinetti d'imposta e per le cornici, occorrono:

Di ferro laminato	Quintali	8398,43,
Di ferro battuto	»	208,78,
Di ghisa modellata	»	1804,68,
Di acciaio per cunei	»	52,16,
Di zolfo	»	1,88.

94. **Quantitativi dei materiali e delle opere per il pavimento stradale.** — Nel fare questi quantitativi, considereremo il suolo stradale siccome terminato nel senso normale all'asse del ponte, dai due piani verticali che limitano superiormente le spalle verso terra. Per la spalla rappresentata nella figura 53, questo piano è quello determinato dalla orizzontale proiettata nel punto δ.

Il riempimento di terra e sabbia, da porsi superiormente alla coperta di lamiere curve, alle pile ed alle spalle, ha il volume di metri cubi 362.

I conci di pietra per la correggiata fanno un volume di metri cubi 174.

I conci di maggiori dimensioni per la cordonata, da interporsi alla carreggiata ed ai marciapiedi, dànno un volume di metri cubi 30.

I lastroni di pietra pei marciapiedi, da porsi in opera su uno strato di muratura coll'altezza di circa metri 0,10, devono occupare una superficie di metri quadrati 645.

Riassumendo i quantitativi dei materiali e delle opere pel pavimento stradale, troviamo che occorrono:

Di riempimento in terra di buona qualità e sabbia per giungere dalla coperta di lamiere curve alla superficie di posa delle pietre	Mc.	362

Di cunei in pietra per la carreggiata e per le cordonate . . . . . Mc. 204
Di pavimento di lastroni pei marciapiedi . . . Mq. 645.

95. **Quantitativi delle opere di finimento.** — Queste opere si riducono ai parapetti, alle piastre traforate ed ai tubi per lo scolo delle acque.

Nei parapetti di pietra bisogna distinguere le pietre per zoccoli, dadi e cimase da quella per plutei. Le prime si valutano a volume considerando il minimo parallelepipedo circoscritto; le seconde si valutano a superficie.

Pei zoccoli, dadi e cimase dei parapetti in corrispondenza delle spalle e delle pile occorrono metri cubi 18 di pietra da taglio; per la parte di parapetto, fatta a trafori sopra le spalle, sono necessari metri quadrati 6,25 di pietra tenera convenientemente lavorata.

In corrispondenza delle arcate, il parapetto è fatto mediante ferri laminati, ed occorrono per questo scopo metri cubi 3,656 di ferro, ossia chilogrammi 28407.

Per piastre traforate e tubi di ghisa, aventi per iscopo di scaricare in basso le acque piovane cadute sul ponte, sono necessari metri cubi 0,063, ossia chilogrammi 454 di ghisa.

Possiamo adunque dire che i materiali per opere di finimento si riassumono:

In pietra concia per parapetti . . . Metri cubi 18
In pietra tenera per plutei . . . Metri quadrati 6,25,
In ferro laminato . . . . . Quintali 284,07,
In ghisa modellata . . . . . » 4,54.

96. **Riepilogo dei quantitativi dei materiali e delle opere occorrenti per la costruzione del ponte.** — Raccogliendo le cifre che trovansi alla fine dei numeri 90, 91, 92, 93 e 94, otteniamo i seguenti risultati:

Sterri subacquei per fondazioni . . Metri cubi 2674
Riempimento con terra di buona qualità e sabbia sopra la coperta di lamiere curve, le pile e le spalle per giungere alla superficie di posa dei materiali del pavimento stradale . . . » 362
Muratura di calcestruzzo per fondazioni . . . » 2046

Muratura di pietrame per le spalle e per le pile	Metri cubi	2719
Muratura di mattoni per archi	»	22
Pietra concia per gli ormeggi	»	15
Pietra concia pel pavimento stradale	»	204
Pietra concia pei rivestimenti comuni e pei prismi sorgenti sui cappucci	»	546
Pietra concia pei rivestimenti con bugne in rilievo, per le pietre incavate, per le fasce, per le cornici, per le imposte, pei cappucci e pei parapetti	»	747
Pavimento in lastroni pei marciapiedi,	Metri quadr.	645
Pietra tenera per plutei lavorata a trafori	»	6,25
Tavoloni di quercia da impiegarsi nelle fondazioni	Metri cubi	5,824
Ferro laminato pei cassoni di fondazione, per le centine, pei timpani, pei collegamenti e per le travi trasversali, per le longarine di fronte, per le mensole, per la coperta di lamiere curve e pei parapetti	Quintali	9675,74
Ferro battuto per gli ormeggi	»	208,78
Ghisa modellata pei cuscinetti d'imposta, per le cornici, per le piastre e pei tubi di scolo delle acque	»	1809,22
Acciaio per cunei	»	52,16
Zolfo per fermare nella pietra i perni degli ormeggi inferiori	»	1,88.

97. **Prezzi delle unità di misura dei materiali e delle opere occorrenti per la costruzione del ponte.** — Supporremo che il ponte, di cui fu studiato il progetto, debba essere costrutto presso la città di Torino, e quindi ci atterremo, per quanto è possibile, ai materiali generalmente adoperati ed ai prezzi adottati per gli edifizi che si fanno costruire per conto del Municipio di questa città. Premesso questo, possiamo stabilire il seguente elenco:

Numeri d'ordine	INDICAZIONE DELLE OPERE	Unità di misura	Prezzi elementari ossia prezzo per ogni unità di misura
1	Sterro subacqueo per fondazioni col trasporto delle materie a valle della località in cui dev'essere costrutto il ponte ad una distanza non minore di 50 metri	Metro cubo	3[l],00
2	Riempimento per 1/5 con terra di buona qualità, non soggetta a gonfiare in presenza dell'umidità, e per 4/5 con sabbia ben granita e purgata, sopra la coperta di lamiere curve, le pile e le spalle onde arrivare alla superficie di posa dei materiali pel pavimento stradale	»	1,80
3	Muratura di calcestruzzo	»	24,00
4	Muratura di pietrame, impiegando pietre spaccate di cava	»	17,00
5	Muratura di mattoni per archi	»	26,00
6	Pietra concia di S. Giorio per gli ormeggi .	»	115,00
7	Pietra concia pel pavimento stradale, di granito della Balma, lavorata a grana ordinaria	»	130,00
8	Pietra concia pei rivestimenti comuni e pei prismi sorgenti sui cappucci, di granito di Mentorfano, lavorata a grana fina e cogli spigoli cesellati	»	210,00
9	Pietra concia pei rivestimenti con bugne in rilievo, per le pietre incavate, per le fasce, per le cornici, per le imposte, pei cappucci e pei parapetti, di granito di Mentorfano, lavorata a grana fina e cogli spigoli cesellati	»	300,00
10	Pavimento per marciapiedi, in lastroni di granito della Balma lavorati a grana ordinaria, compreso lo strato di muratura pel loro pesamento in opera	Metro quadrato	18,00
11	Pietra tenera di Saltrio per plutei, lavorata a trafori, a grana fina e cogli spigoli cesellati	»	30,00
12	Tavoloni di quercia da impiegarsi nelle fondazioni	Metro cubo	120,00
13	Ferro laminato pei cassoni di fondazione, per le centine, pei timpani, pei collegamenti e per le travi trasversali, per le longarine di fronte, per le mensole, per la coperta di lamiere curve e pei parapetti	Quintale	60,00
14	Ferro battuto per gli ormeggi	»	95,00
15	Ghisa modellata pei cuscinetti d'imposta, per le cornici, per le lastre di ricoprimento dei condotti per gli ormeggi superiori, per le piastre e pei tubi di scolo delle acque .	»	50,00
16	Acciaio per cunei	»	110,00
17	Zolfo per fermare pezzi metallici nella pietra	»	40,00

Tutti i pezzi indicati in quest'elenco si riferiscono ai materiali dati in opera, ossia ai lavori perfettamente ultimati; cosicchè sarà obbligo dell'assuntore di somministrare senza speciali compensi tutta la mano d'opera, tutti gli apparecchi e macchine e tutti i palchi di servizio che possono occorrere per la costruzione dell'intiero ponte.

98. **Ammontare della spesa occorrente per la costruzione del ponte.** — Moltiplicando i quantitativi stati raccolti nel numero 96 pei corrispondenti prezzi registrati nell'elenco del precedente numero, si ottengono i costi parziali pei diversi lavori, e la somma di tutti questi costi parziali costituisce l'ammontare della totale spesa occorrente per la costruzione del ponte. I dati ed i risultamenti per questa determinazione si trovano nel registro che qui presentiamo:

N° d'ordine	INDICAZIONI DEI MATERIALI E DELLE OPERE	QUANTITÀ	PREZZI per unità di misura	PREZZI parziali	PREZZI totali
	I — Sterri ed interri.				
1	Sterri subacquei per fondazioni	2674^{mc}	3^{l},00	8022^{l},00	
2	Riempimento sopra la coperta di lamiere curve, le pile e le spalle per giungere alla superficie di posa del pavimento stradale	362	1,80	651,60	
				8673,60	8673^{l},60
	II — Murature.				
3	Muratura di calcestruzzo per fondazioni	2046	24,00	49104,00	
4	Muratura di pietrame . . .	2719	17,00	46223,00	
5	Muratura di mattoni . . .	22	26,00	572,00	
				95899,00	95899,00
	III — Pietre conce.				
6	Pietre per gli ormeggi . . .	15	115,00	1725,00	
7	Pietre pel pavimento stradale .	204	130,00	26520,00	
8	Pietre per rivestimenti comuni e pei prismi sorgenti sui cappucci	546	210,00	114660,00	
9	Pietre pei rivestimenti con bugne in rilievo, per le pietre incavate, per le fasce, per le cornici, per le imposte, pei cappucci e pei parapetti . . .	747	300,00	224100,00	
10	Lastroni pei marciapiedi . .	645^{mq}	18,00	11610,00	
11	Pietra pei plutei	6,25	30,00	187,50	
				378802,50	378802,50
			Da riportarsi		483375,10

N° d'ordine	INDICAZIONI DEI MATERIALI E DELLE OPERE	QUANTITÀ	Prezzi per unità di misura	Prezzi parziali	Prezzi totali
				Riporto	483375[l],10
	IV — Metalli.				
12	Ferro laminato	9675[q],74	60[l],00	580544[l],40	
13	Ferro battuto	208, 78	95, 00	19834, 10	
14	Ghisa modellata	1809, 22	50, 00	90461, 00	
15	Acciaio	52, 16	110, 00	5737, 60	
				696577,10	696577,10
	V — Legno e zolfo				
16	Tavoloni di quercia nelle fondazioni	5[mc],824	120,00	698,88	
17	Zolfo per fermare i perni degli ormeggi inferiori	1[q],88	40,00	75,20	
				774,08	774,08
					1180726,28

Alla trovata somma bisogna ancora aggiungere le spese per studi, per sorveglianza e per lavori impreveduti. Si può ritenere che queste spese ammontino ad $\frac{1}{10}$ di quelle già considerate; cosicchè il costo totale del ponte si può stabilire in lire 1298798,91 ossia, in cifra rotonda, in lire 1300000.

INDICE ANALITICO

Deformazioni dei corpi elastici studiate nei loro più generali rapporti coi lavori della moderna Ingegneria.

CAPITOLO I.

Nozioni preliminari.

1. Cenni storici intorno alle teorie sulle deformazioni dei corpi elastici . . . . . *Pag.* 1
2. Assunto del presente lavoro . . . . . » 10
3. Procedimento che può condurre alla risoluzione del problema avente per oggetto lo studio delle deformazioni dei corpi elastici . . . . . » 11

CAPITOLO II.

Deformazioni di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti.

4. Spostamento di una sezione retta qualunque di un solido elastico relativamente ad una sezione retta vicinissima . . . » 12
5. Variazioni di coordinate di un punto qualunque dell'asse di un solido elastico . . . . . » 20
6. Deviazioni delle sezioni rette di un solido elastico . . . . » 31
7. Determinazione delle costanti, le quali rappresentano i movimenti della sezione iniziale . . . . . » 32

CAPITOLO III.

Deformazioni dei corpi elastici nei casi particolari che più di frequente si presentano nella pratica delle costruzioni.

8. Variazioni di coordinate dell'asse primitivamente rettilineo di un solido elastico, sollecitato da forze contenute in un sol piano passante per l'asse medesimo, e deviazioni delle sue sezioni rette . . . . . » 33

9. Condizioni e formole per la flessione piana di un solido elastico con asse primitivamente rettilineo sollecitato da forze contenute in un sol piano passante per l'asse medesimo . . . . . *Pag.* 36
10. Variazioni di coordinate della fibra media di un solido elastico avente per asse primitivo una curva piana, sollecitato da forze contenute nel piano della curva medesima, e deviazioni delle sue sezioni rette . . . . . » 43
11. Condizioni e formole per la flessione piana di un solido elastico avente per asse primitivo una curva piana e sollecitato da forze contenute nel piano della curva medesima . . . . . » 45
12. Determinazione delle costanti, le quali rappresentano il movimento della sezione iniziale . . . . . » 54

CAPITOLO IV.

Determinazione delle forze incognite.

13. Assunto di questo capitolo . . . . . » 58
14. Determinazione delle reazioni degli appoggi per un solido sostenuto alle due estremità da appoggi fissi, i quali impediscono qualsiasi spostamento ai due punti estremi dell'asse . . . . » 59
15. Determinazione delle reazioni degli appoggi per una centina sostenuta alle due estremità da due appoggi fissi, simmetrica e simmetricamente sollecitata . . . . . » 64
16. Determinazione delle reazioni degli appoggi per una centina collocata su un piano che non oppone un ostacolo diretto all'allungamento della sua corda . . . . . » 67
17. Determinazione delle reazioni degli appoggi per una centina incastrata alle due estremità . . . . . » 68
18. Determinazione delle reazioni degli appoggi e della tensione di un tirante parallelo alla corda per una centina appoggiata alle due estremità, simmetrica e simmetricamente sollecitata . » 72
19. Determinazione delle reazioni degli appoggi e delle mutue azioni fra due pezzi, uno con asse rettilineo e l'altro con asse rettilineo o curvilineo, i quali, essendo incastrati per una loro estremità, assieme si uniscono nell'altra . . . . . » 77
20. Risoluzione del problema del numero precedente nei casi di articolazioni in corrispondenza degli appoggi sul ritegno immobile e nel punto di concorso . . . . . » 86
21. Determinazione delle mutue azioni fra più pezzi curvi assieme rilegati . . . . . » 95
22. Generalizzazione dei procedimenti stati seguìti in questo capitolo per la determinazione delle forze incognite in alcuni casi particolari . . . . . » 112

CAPITOLO V.

Osservazioni e teoremi riferentisi al modo con cui le forze esterne entrano nelle formole delle deformazioni dei corpi elastici.

23. Assunto di questo capitolo . . . . . *Pag.* 117
24. Espressioni delle forze X, Y, Z e dei momenti M_x, M_y ed M_z » *ivi*
25. Espressioni delle sei costanti $\Delta\xi_0$, Δv_0, $\Delta\zeta_0$, m_0, n_0 e p_0, determinanti il movimento della sezione iniziale, in funzione delle forze esterne e del coefficiente τ . . . . . » 118
26. Espressioni delle sei quantità $\Delta\xi_i$, Δv_i, $\Delta\zeta_i$, m_i, n_i e p_i, determinanti il movimento di una sezione qualunque in funzione delle forze esterne e del coefficiente τ . . . . . » 119
27. Espressioni delle forze incognite in funzione delle forze date, e conseguenze relative alle deformazioni . . . . . » 120
28. Altro enunciato dei teoremi dei numeri 26 e 27 . . . . . » 122
29. Forze equivalenti . . . . . » *ivi*
30. Proprietà degli archi simmetrici, ma non simmetricamente caricati . . . . . » 123
31. Applicazione della dimostrata proprietà degli archi simmetrici, ma non simmetricamente caricati . . . . . » 129

CAPITOLO VI.

Reazioni e deformazioni delle centine circolari poste su due appoggi fissi.

32. Oggetto di questo capitolo . . . . . » 130

ARTICOLO I. — *Reazioni degli appoggi d'una centina circolare.*

33. Indicazione dei problemi che si vogliono risolvere in questo capitolo » 131
34. Reazioni degli appoggi per una centina sottoposta all'azione di un peso . . . . . » 132
35. Reazioni degli appoggi per una centina sottoposta all'azione di una forza orizzontale . . . . . » 138
36. Reazioni degli appoggi per una centina sottoposta all'azione di una coppia . . . . . » 141
37. Reazioni degli appoggi per una centina sottoposta ad una variazione di lunghezza del suo asse . . . . . » 144
38. Reazioni degli appoggi per una centina sottoposta all'azione di forze discontinue qualunque e ad una variazione di lunghezza prodotta da altre cause . . . . . » 145
39. Reazioni degli appoggi per una centina sottoposta all'azione di forze ripartite in modo continuo . . . . . » 146
40. Reazioni degli appoggi per una centina caricata di un peso

uniformemente distribuito su una parte soltanto o sulla totalità della sua lunghezza . . . . . *Pag.* 147
41. Reazioni degli appoggi per una centina caricata di un peso uniformemente distribuito su una parte soltanto o sulla totalità della proiezione orizzontale del suo asse . . . . . » 150
42. Reazioni degli appoggi per una centina sollecitata da un carico d'acqua su una parte soltanto o sulla totalità della sua lunghezza . . . . . » 153

ARTICOLO II. — *Variazioni di saetta nelle centine circolari con sezione retta costante.*

43. Indicazione dei problemi che si vogliono risolvere in questo articolo . . . . . » 159
44. Variazione di saetta per una centina sottoposta all'azione di due pesi simmetricamente disposti rispetto alla sua sezione culminante . . . . . » *ivi*
45. Variazione di saetta per una centina caricata di un peso uniformemente distribuito sulla lunghezza intiera del suo asse . » 164
46. Variazione di saetta per una centina caricata di un peso uniformemente distribuito sull'intiera lunghezza della sua corda . » 169
47. Variazione di saetta prodotta in una centina da una dilatazione o da una contrazione lineare indipendente dai carichi . . . » 173
48. Come si possono ottenere le variazioni di saetta delle centine sottoposte all'azione di forze qualunque e di una dilatazione o di una contrazione prodotta da altre cause . . . . . » 174

CAPITOLO VII.

Stabilità delle centine.

49. Assunto del presente capitolo . . . . . » 176
50. Massima resistenza trasversale e massima resistenza longitudinale, riferite all'unità di superficie, in una sezione retta qualunque di una centina . . . . . » *ivi*
51. Equazioni per verificare quale stabilità ha luogo in una determinata sezione retta di una centina . . . . . » 182
52. Modo di applicare le equazioni di stabilità per determinare una dimensione di una data sezione retta di una centina . . . » 191
53. Determinazione delle sezioni pericolose di una centina . . . » 196

Studio del progetto di un ponte in ferro con archi.

1. Norme generali ed indicazione delle operazioni da farsi per lo studio del progetto di un ponte in ferro con archi . . . *Pag.* 203

CAPITOLO I.

Determinazione della luce libera e delle altre principali dimensioni del ponte.

2. Rilievi locali . . . . . » 206
3. Portata del fiume in epoca di acque massime . . . . . » 207
4. Distanza fra le facce interne dei due arginali . . . . . » 210
5. Luce libera del ponte . . . . . » 212
6. Principali dimensioni del ponte . . . . . » 213

CAPITOLO II.

Descrizione e composizione del ponte.

7. Fondazioni . . . . . » 216
8. Muri degli arginali . . . . . » 218
9. Spalle del ponte . . . . . » 219
10. Pile del ponte . . . . . » 220
11. Centine . . . . . » 221
12. Timpani e longarine . . . . . » *ivi*
13. Travi trasversali e mensole . . . . . » 223
14. Cornice di coronamento e parapetto del ponte . . . . . » *ivi*
15. Coperta del ponte e suolo stradale . . . . . » 224
16. Cuscinetti d'imposta ed estremità delle centine . . . . . » 225
17. Collegamenti delle centine e dei timpani d'una stessa arcata . » 226
18. Coprigiunti . . . . . » 228
19. Ormeggi dei timpani sulle spalle e sulle pile . . . . . » 229

CAPITOLO III.

Determinazione delle dimensioni delle varie parti del ponte.

20. Assunto del presente capitolo . . . . . » 231
21. Dimensioni del parapetto di ferro . . . . . » *ivi*
22. Dimensioni della cornice . . . . . » 234
23. Dimensioni della carreggiata e dei marciapiedi . . . . . » 237

24. Dimensioni della coperta del ponte . . . . . *Pag.* 238
25. Dimensioni di alcuni ferri destinati a sopportare ed a consolidare la coperta del ponte . . . . . » 242
26. Dimensioni delle mensole . . . . . » 243
27. Dimensioni delle travi longitudinali di fronte e dei ferri che vi connettono le travi trasversali e le mensole . . . . . » 257
28. Dimensioni delle travi trasversali . . . . . » *ivi*
29. Pressioni delle travi trasversali sui loro appoggi, e pesi applicati ai nodi superiori dei timpani . . . . . » 264
30. Determinazioni relative all'asse della centina . . . . . » 267
31. Determinazioni relative all'arco sul quale sono posti i punti di attacco dei pezzi dei timpani colla centina . . . . . » *ivi*
32. Determinazione dei punti d'attacco dei pezzi dei timpani colle centine e colle corrispondenti longarine . . . . . » 268
33. Determinazione dei punti di concorso dei pezzi dei timpani . » 269
34. Angoli che gli assi dei pezzi dei timpani, attaccati alle longarine, fanno colla verticale . . . . . » 270
35. Angoli che gli assi dei pezzi dei timpani, attaccati alle centine, fanno colla verticale . . . . . » 271
36. Angoli che gli assi dei pezzi dei timpani, i quali uniscono i punti di conconrso, fanno colla verticale . . . . . » 272
37. Lunghezze degli assi dei pezzi dei timpani . . . . . » 273
38. Come si può verificare l'esattezza di tutti i calcoli stati indicati nei numeri 32, 33, 34, 35, 36 e 37 per la completa determinazione dei timpani . . . . . » 276
39. Dimensioni dei pezzi dei timpani concorrenti nei punti 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14 e 16 (*Fig.* 86) . . . . . » 278
40. Varianti al progetto dei pezzi orizzontali dei timpani, ossia al progetto delle longarine sulle quali si trovano gli attacchi dei pezzi inclinati . . . . . » 299
41. Determinazione delle dimensioni dei pezzi dei timpani che riuniscono fra loro i punti di concorso, e di quelli che dai punti di concorso vanno alla centina . . . . . » 303
42. Verificazione dei calcoli stati instituiti nei numeri 39 e 41 . » 317
43. Osservazioni sui calcoli stati fatti nei numeri 39 e 41 . . . » 320
44. Componenti orizzontali e verticali delle azioni esercitate dai pezzi dei timpani sulle centine . . . . . » 321
45. Dimensioni delle piastre di collegamento dei pezzi dei timpani nei punti 1″, 3″, 5″, 7″, 9″, 11″, 13″ e 15″ (*Fig.* 86) . . . » 332
46. Dimensioni dei ferri per attaccare i collegamenti dei timpani nel senso trasversale . . . . . » *ivi*
47. Dimensioni dei ferri pei collegamenti trasversali dei timpani . » 325
48. Pesi gravitanti sui punti d'attacco dei pezzi dei timpani colle centine a cagione dei timpani stessi e dei ferri per attaccarvi i collegamenti trasversali . . . . . » 326
49. Pesi gravitanti sui punti d'attacco dei pezzi dei timpani colle centine, a cagione dei collegamenti trasversali . . . . . » 333
50. Determinazione degli angoli che le sezioni rette, passanti pei

punti d'attacco dei pezzi dei timpani colla centina, fanno colla verticale . . . . . *Pag.* 336
51. Distanze degli attacchi inferiori dei pezzi dei timpani dagli assi delle centine . . . . . » 338
52. Determinazione di alcuni angoli e di alcuni archi occorrenti per tener conto del peso delle centine nella ricerca delle loro spinte orizzontali . . . . . » 339
53. Pesi delle parti di centina comprese fra le sezioni rette determinate dai punti (*Fig.* 112) 1′ e 3′, 3′ e 5′, 5′ e 7′, 7′ e 9′, 9′ e 11′, 11′ e 13′, 13′ e 15′, 15′ e *c* . . . . . » 340
54. Dimensioni dei pezzi componenti le imposte delle centine . . » 343
55. Peso di un'imposta di una centina . . . . . » 345
56. Dimensioni dei ferri componenti i collegamenti trasversali delle centine . . . . . » 346
57. Pesi dei collegamenti trasversali per la parte di centina comprese fra le sezioni rette *abdc* (*Fig.* 112) . . . . . » 347
58. Forze verticali operanti sulla parte di centina *abdc* (*Fig.* 112) e producenti spinte sui piedritti . . . . . » 349
59. Determinazione delle spinte orizzontali dovute alle forze verticali P . . . . . » 350
60. Forze orizzontali operanti sulla parte di centina *abdc* (*Fig.* 112) e spinte orizzontali ad esse dovute . . . . . » 353
61. Coppie operanti sulla parte di centina *abdc* (*Fig.* 112) e producenti spinte sui piedritti . . . . . » 356
62. Determinazione delle spinte orizzontali dovute alle coppie . . » 360
63. Determinazione dei punti in cui la curva (*Fig.* 86) 0′ 8′ 16′ *i* è incontrata dalla verticale passante pei punti 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 ed *h* . . . . . » 362
64. Determinazione degli angoli che le sezioni rette della centina passanti pei punti (*Fig.* 112) *c*, 18′, 19′, 20′, 21′, 22′, 23′, 24′ ed *i* fanno colla verticale . . . . . » 363
65. Pressione massima verticale trasmessa dalle travi trasversali alla parte di centina (*Fig.* 112) *cdkh* . . . . . » 364
66. Peso portato dalla parte di centina (*Fig.* 112) *cdkh* a motivo dei ferri d'angolo della longarina e dell'interposta lamiera costituente la parte piena dei timpani . . . . . » *ivi*
67. Distanze dei punti (*Fig.* 112) 18′, 20′, 22′ e 24′ dell'asse della centina . . . . . » 365
68. Determinazione di alcuni angoli e di alcuni archi occorrenti per valutare il peso della parte di centina (*Fig.* 112) *cdkh* . . » *ivi*
69. Peso della parte di centina (*Fig.* 112) *cdkh* . . . . . » 366
70. Dimensioni dei ferri componenti i collegamenti trasversali per la parte di centina (*Fig.* 112) *cdkh* . . . . . » 367
71. Peso dei collegamenti trasversali per la parte di centina (*Fig.* 112) *cdkh* . . . . . » 368
72. Peso per ogni unità di lunghezza della proiezione orizzontale della parte F H (*Fig.* 112) dell'assse della centina . . . . » 369
73. Determinazione della spinta orizzontale dovuta al carico distri-

buito sulla parte (*Fig.* 110) *cdkh* della centina e sulla sua simmetrica rispetto al mezzo della centina stessa . . . . *Pag.* 370
74. Spinta orizzontale massima della seconda e della quinta centina di ogni arcata contro i piedritti, e reazione orizzontale massima dei piedritti contro ciascuna di queste centine . . . . » *ivi*
75. Pressione verticale massima della seconda e della quinta centina di ogni arcata sui piedritti, e reazione verticale massima dei piedritti contro ciascuna di queste centine . . . . . » 371
76. Forze estrinseche sollecitanti una mezza centina . . . . . » *ivi*
77. Verificazione della stabilità delle centine, e dimensioni dei ferri di cui sono composte . . . . . » 372
78. Determinazione del numero delle lamiere componenti le tavole delle centine . . . . . » 382
79. Chiodature delle centine . . . . . » 384
80. Principali dimensioni dei cuscinetti d'imposta . . . . . » 387
81. Principali dimensioni degli ormeggi dei timpani . . . . . » *ivi*
82. Principali dimensioni dei cassoni per fondazioni . . . . . » 388
83. Spinta delle terre contro i muri di sostegno degli arginali . » *ivi*
84. Dimensioni dei muri di sostegno degli arginali . . . . . » 390
85. Principali dimensioni delle fondazioni . . . . . » 398
86. Principali dimensioni delle spalle . . . . . » *ivi*
87. Principali dimensioni delle pile . . . . . » 400
88. Principali dimensioni del parapetto . . . . . » 401
89. Osservazioni sul disegno del ponte . . . . . » 402

CAPITOLO IV.

Quantitativi dei materiali, delle opere e dell'ammontare della spesa occorrente per la costruzione del ponte.

90. Materiali ed opere da considerarsi nel fare il costo del ponte » 403
91. Quantitativi dei materiali e delle opere per fondazioni . . . » *ivi*
92. Quantitativi dei materiali e delle opere per la costruzione delle spalle e delle pile fuori di fondazione . . . . . » 405
93. Quantitativi dei materiali occorrenti per le arcate, pei timpani, pei loro collegamenti, per le travi trasversali, per le mensole, per la coperta metallica del ponte, pei cuscinetti d'imposta, per gli ormeggi e per le cornici . . . . . » 409
94. Quantitativi dei materiali e delle opere per il pavimento stradale » 411
95. Quantitativi delle opere di finimento . . . . . » 412
96. Riepilogo dei quantitativi dei materiali e delle opere occorrenti per la costruzione del ponte . . . . . » *ivi*
97. Prezzi delle unità di misura dei materiali e delle opere occorrenti per la costruzione del ponte . . . . . » 413
98. Ammontare della spesa occorrente per la costruzione del ponte » 415

ERRATA-CORRIGE

Pagina	*linea*	*invece di*	*leggasi*
30	3	$\frac{M_x \cos\alpha'}{I_y}$	$\frac{M_y \cos\alpha'}{I_y}$
51	3	$(^{\circ}\cap - {}^{\mathrm{I}}\cap)\ {}^{\circ}\mathit{uu} - {}^{\circ}\zeta\nabla$	$\Delta\zeta_0 - m_0(\upsilon_1 - \upsilon_0)$
53	8	all'asse del solido	all'asse primitivo del solido
ivi	23	$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{Z}{E_1 \Omega}$	$\int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{Z}{E_1 \Omega} d\zeta$
54	31	x' ed y'	ζ' ed v'
ivi	34	$\Delta x'$ e $\Delta y'$	$\Delta\zeta'$ ed $\Delta v'$
60	11	f	d
64	13	14	15
77	20	i quali	i quali,
121	23	indipendente dalle forze	costante, delle forze
171	12	$\int \mathrm{sen}^5 \varphi\, d\varphi$	$\int \mathrm{sen}^3 \varphi\, d\varphi$
207	penultima	$\frac{\chi}{\Omega} I = \alpha\left(1 + \beta\frac{\chi}{\Omega}\right)v^2$	$\frac{\Omega}{\chi} I = \alpha\left(1 + \beta\frac{\chi}{\Omega}\right)v^2$
257	14	0,285	0,252
303	20	maggiori	minori
338	1	attacci	attacchi
345	21	*ab*	*ab* (*Fig.* 112)
353	16	orizzontale	orizzontale Q_v
ivi	20	Q_1	Q_v
364	6	(*Fig.* 110)	(*Fig.* 112)
365	4	punti	punti (*Fig.* 112)
382	29	(*Fig.* 120)	(*Fig.* 116)

APPENDICE

ALL'

ARTE DI FABBRICARE

CORSO COMPLETO DI ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

PER GL'INGEGNERI, PER GLI ARCHITETTI, PEI PERITI IN COSTRUZIONE
E PEI PERITI MISURATORI

VOLUME SECONDO

TAVOLE

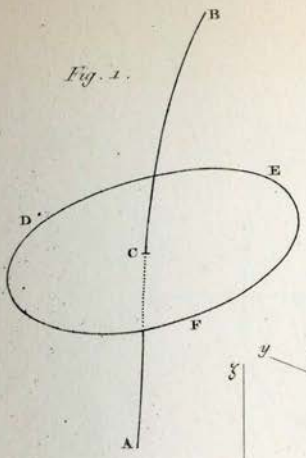


Fig. 1.

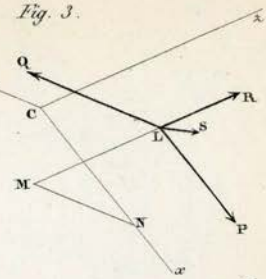


Fig. 3.

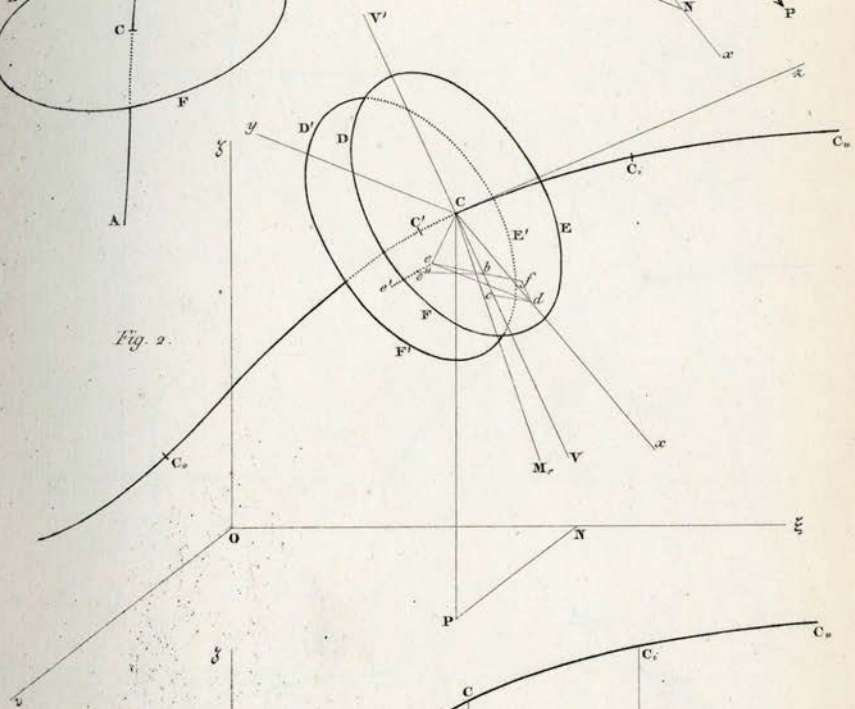


Fig. 2.

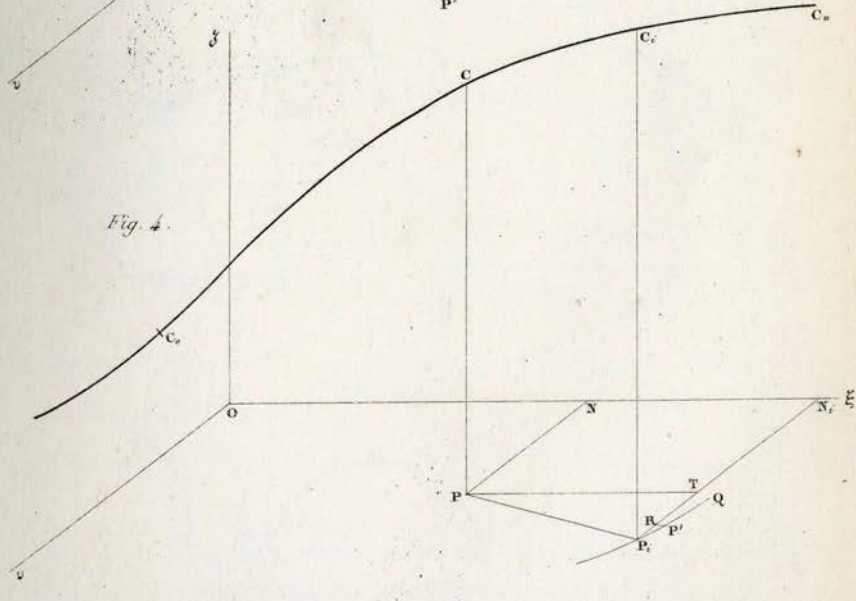


Fig. 4.

Fig. 5.

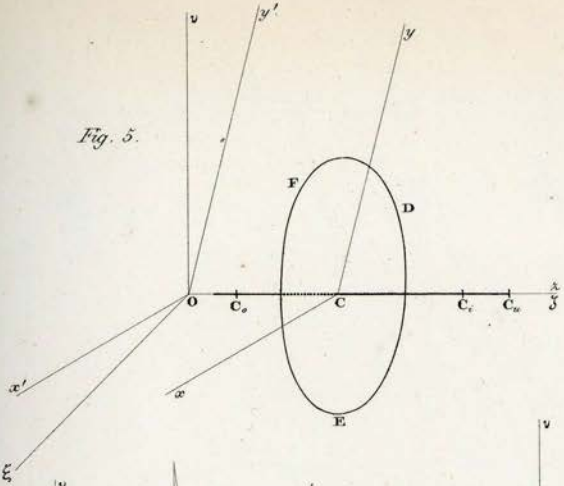


Fig. 6.

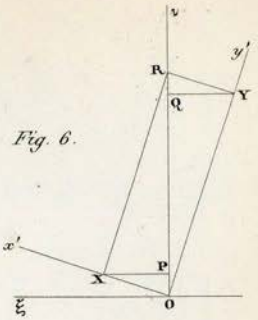


Fig. 7.

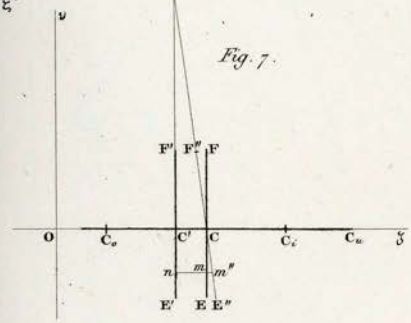


Fig. 8.

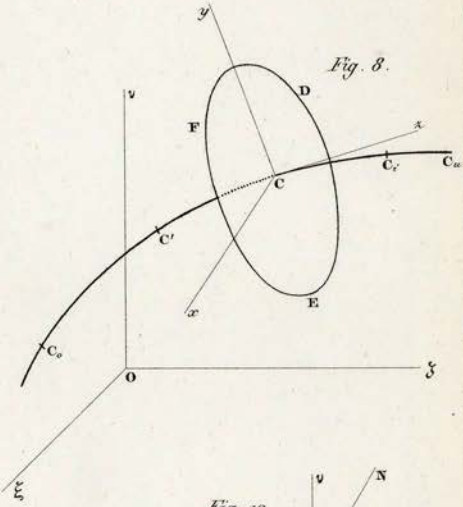


Fig. 9.

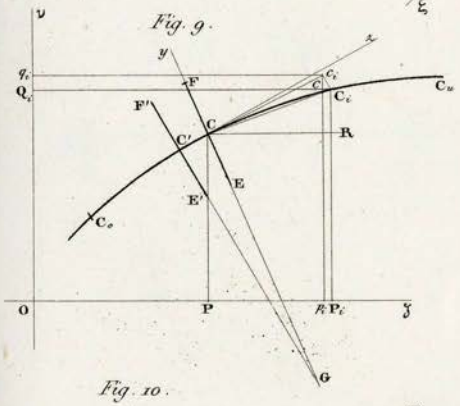


Fig. 12.

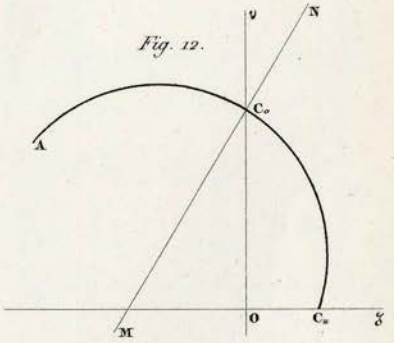


Fig. 10.

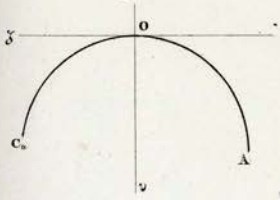


Fig. 11.

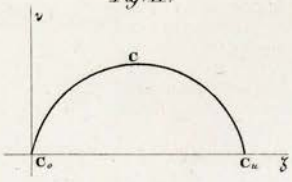


Fig. 13.

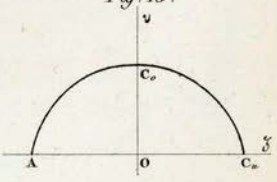


Fig. 14.

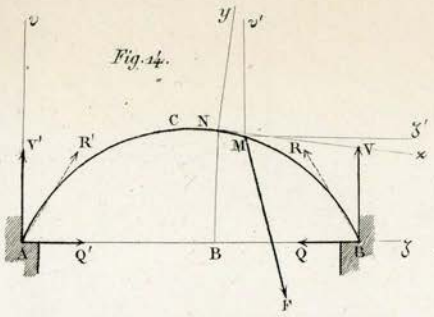


Fig. 15.

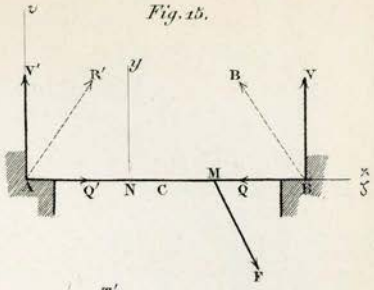


Fig. 16.

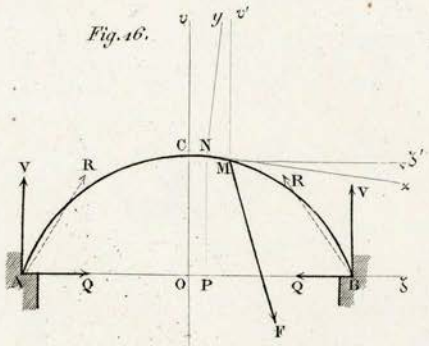


Fig. 17.

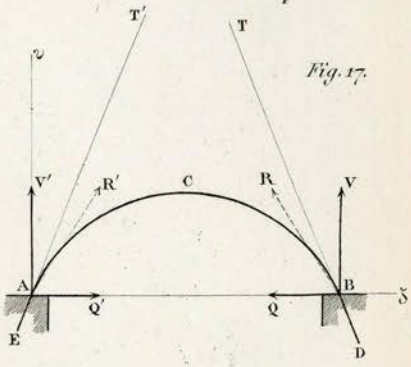


Fig. 18.

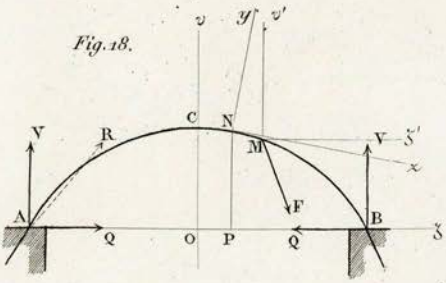


Fig. 19.

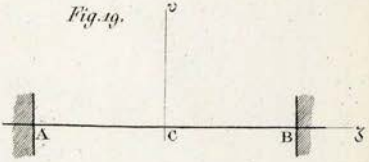


Fig. 20.

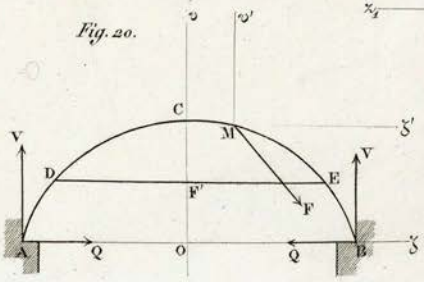


Fig. 21.

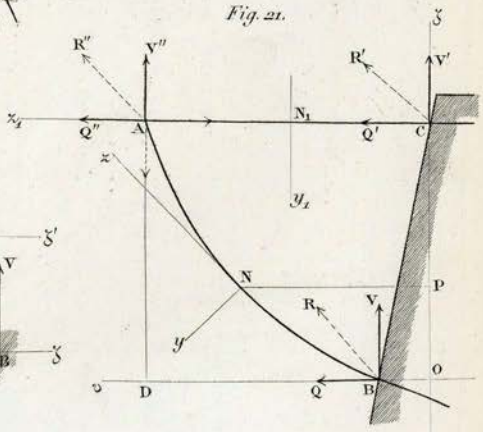


Fig. 14.

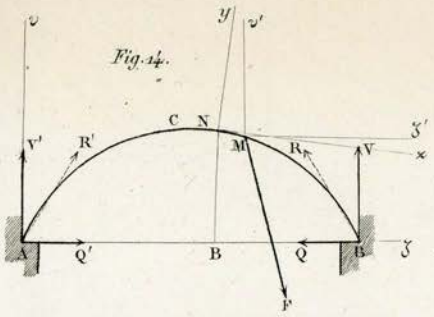


Fig. 15.

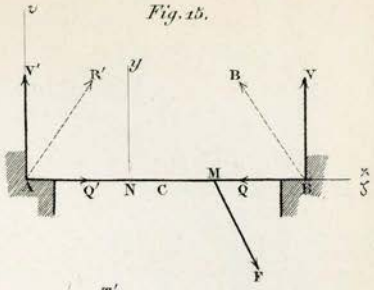


Fig. 16.

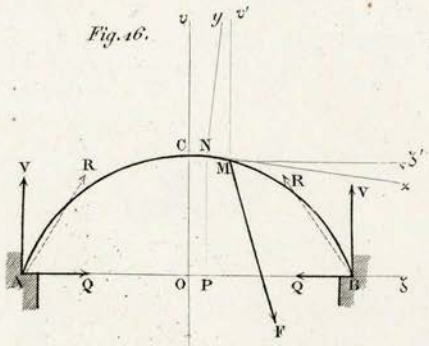


Fig. 17.

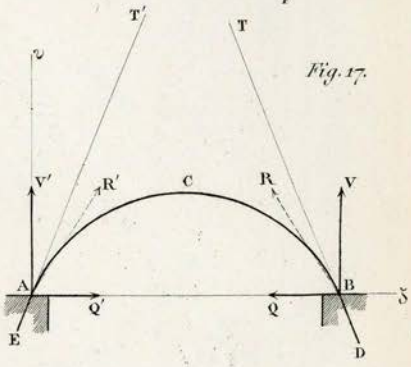


Fig. 18.

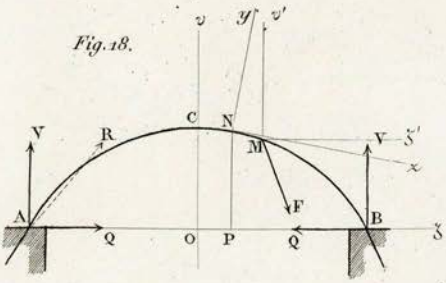


Fig. 19.

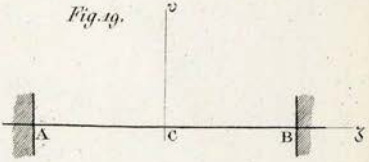


Fig. 20.

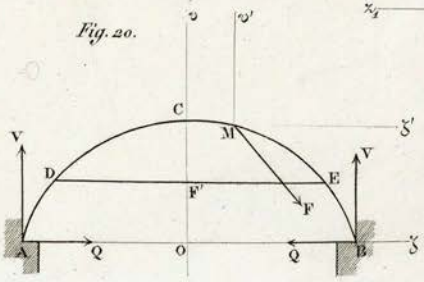
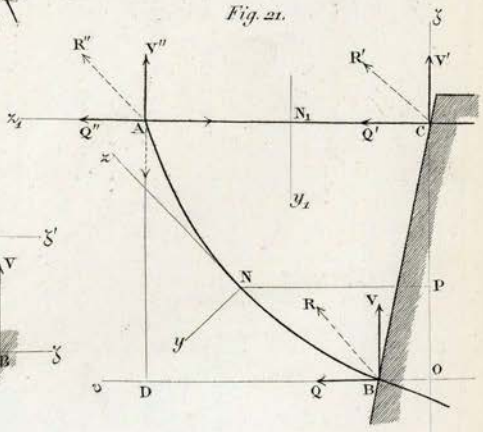


Fig. 21.



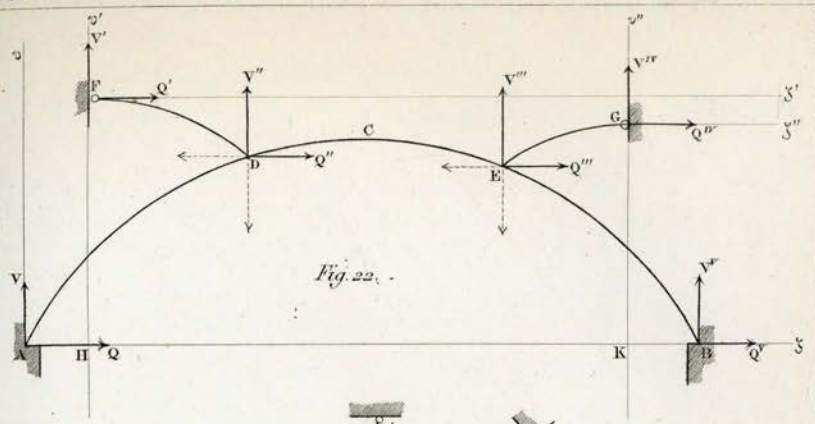


Fig. 22.

Fig. 23.

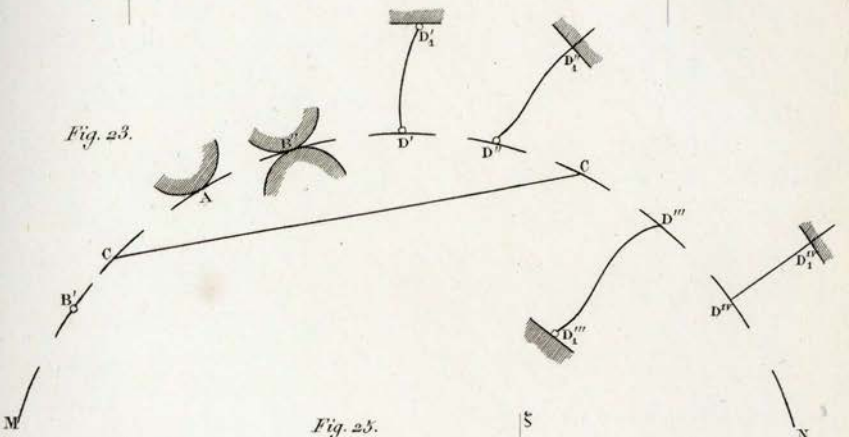


Fig. 25.

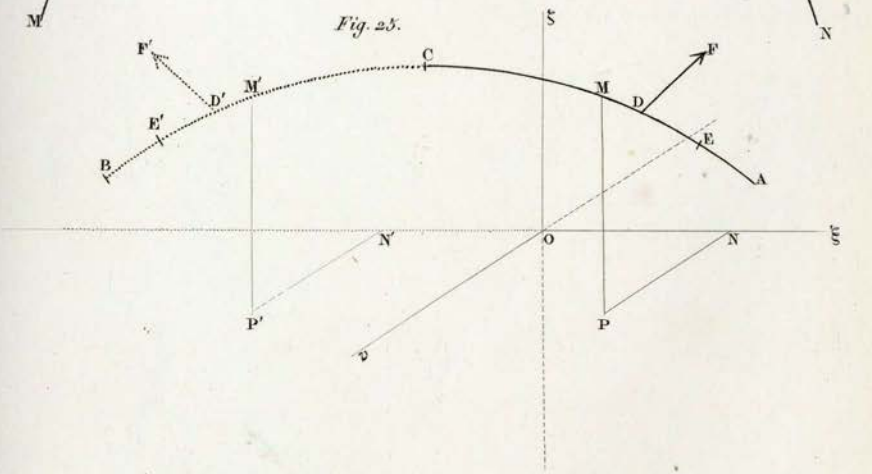


Fig. 26.

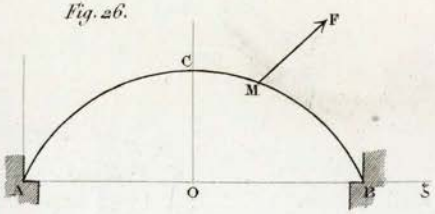


Fig. 24.

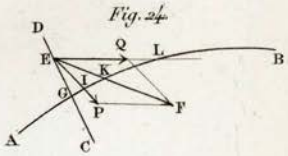


Fig. 27.

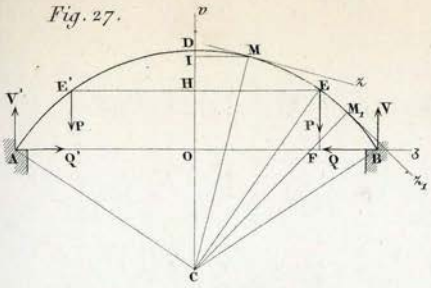


Fig. 28.

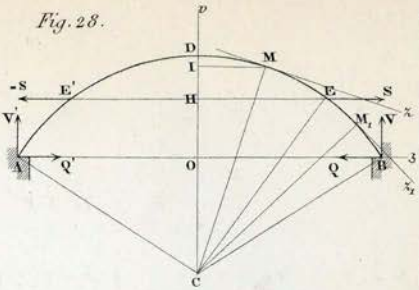


Fig. 29.

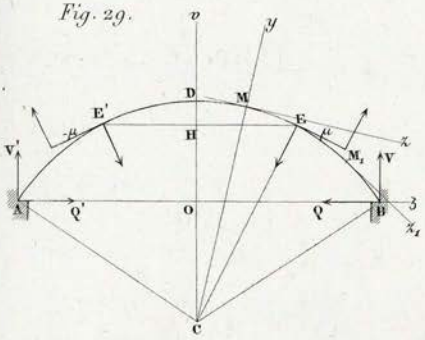


Fig. 30.

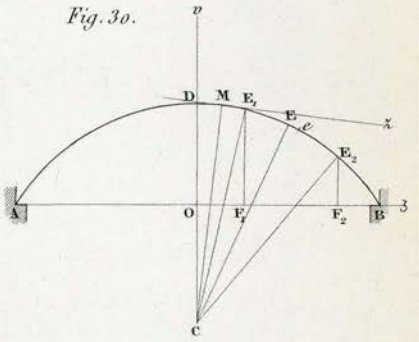


Fig. 31.

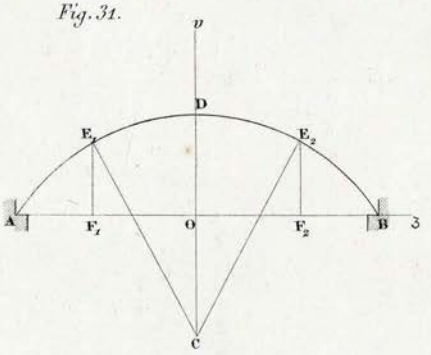
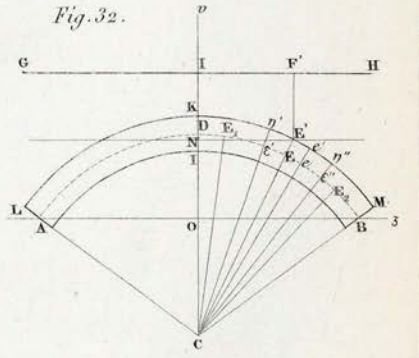


Fig. 32.



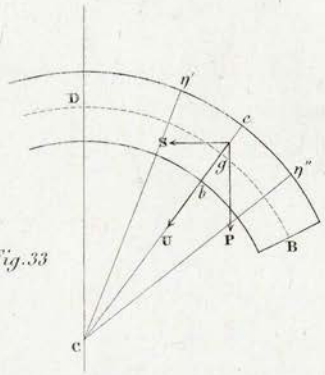


Fig. 33

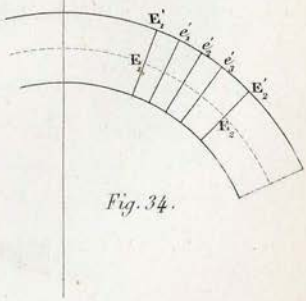


Fig. 34.

Fig.35.

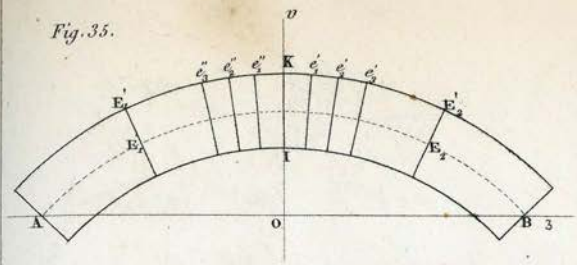


Fig.37.

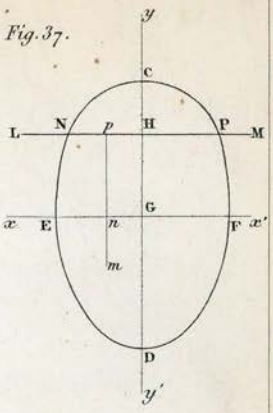


Fig.36.

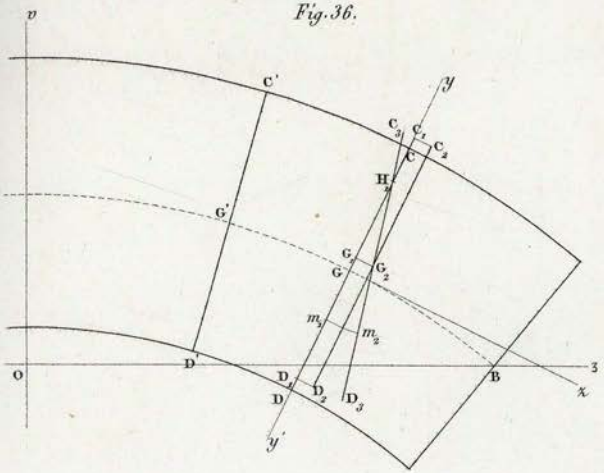


Fig.38.

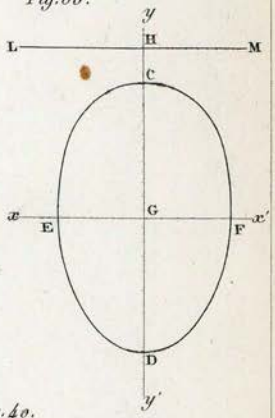


Fig.39.

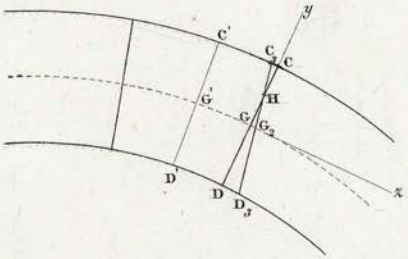
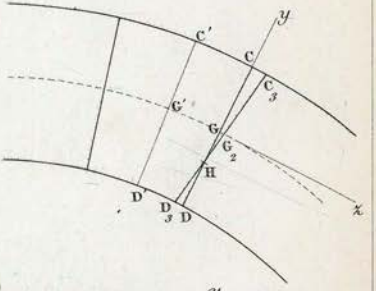


Fig.40.



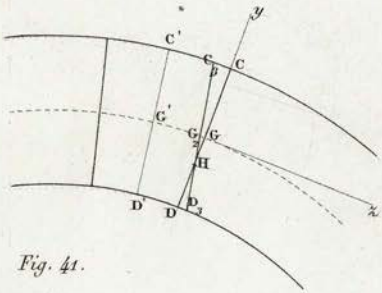


Fig.41.

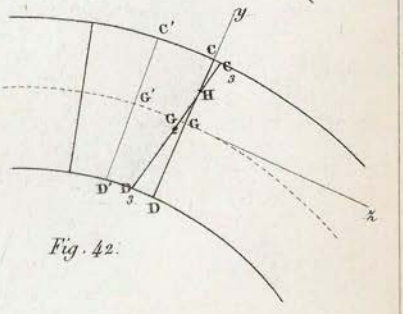
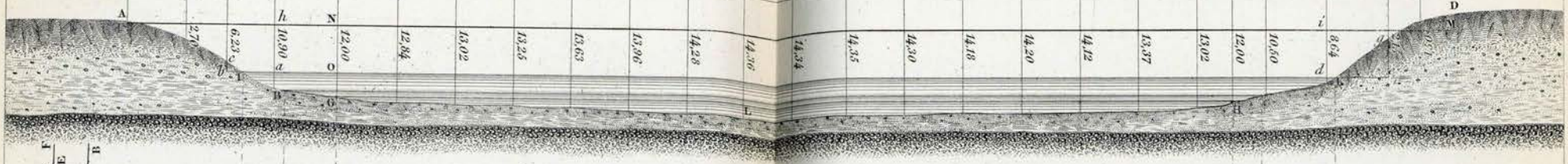


Fig.42.

Distanze progressive	9,80	17,00	25,10	36,00	46,00	56,00	66,00	76,00	86,00	96,00	106,00	116,00	126,00	136,00	146,00	156,00	166,00	176,00	186,00	192,50	197,90	208,50	218,80	224,50
Distanze parziali	9,80	7,20	8,10	10,90	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	10,00	6,50	5,40	10,60	10,30	5,70



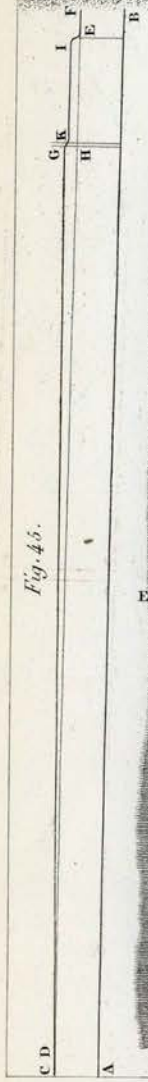


Fig. 45.

Fig. 43.

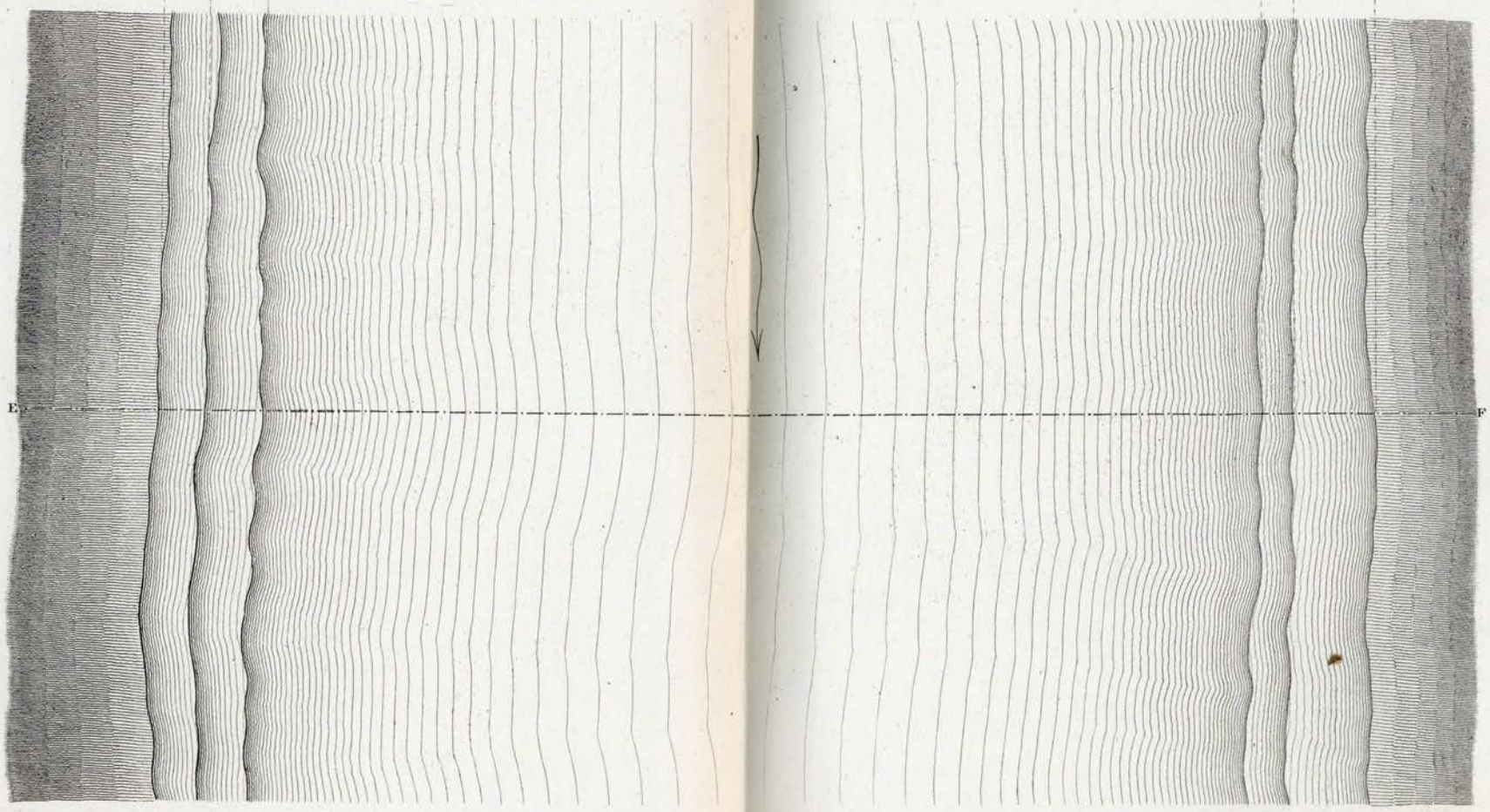
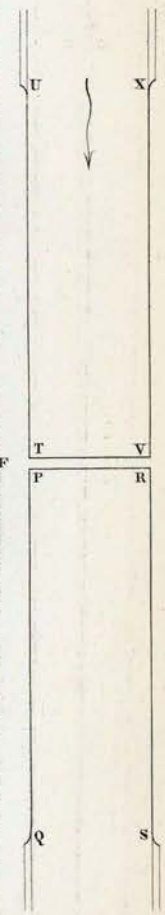


Fig. 44.



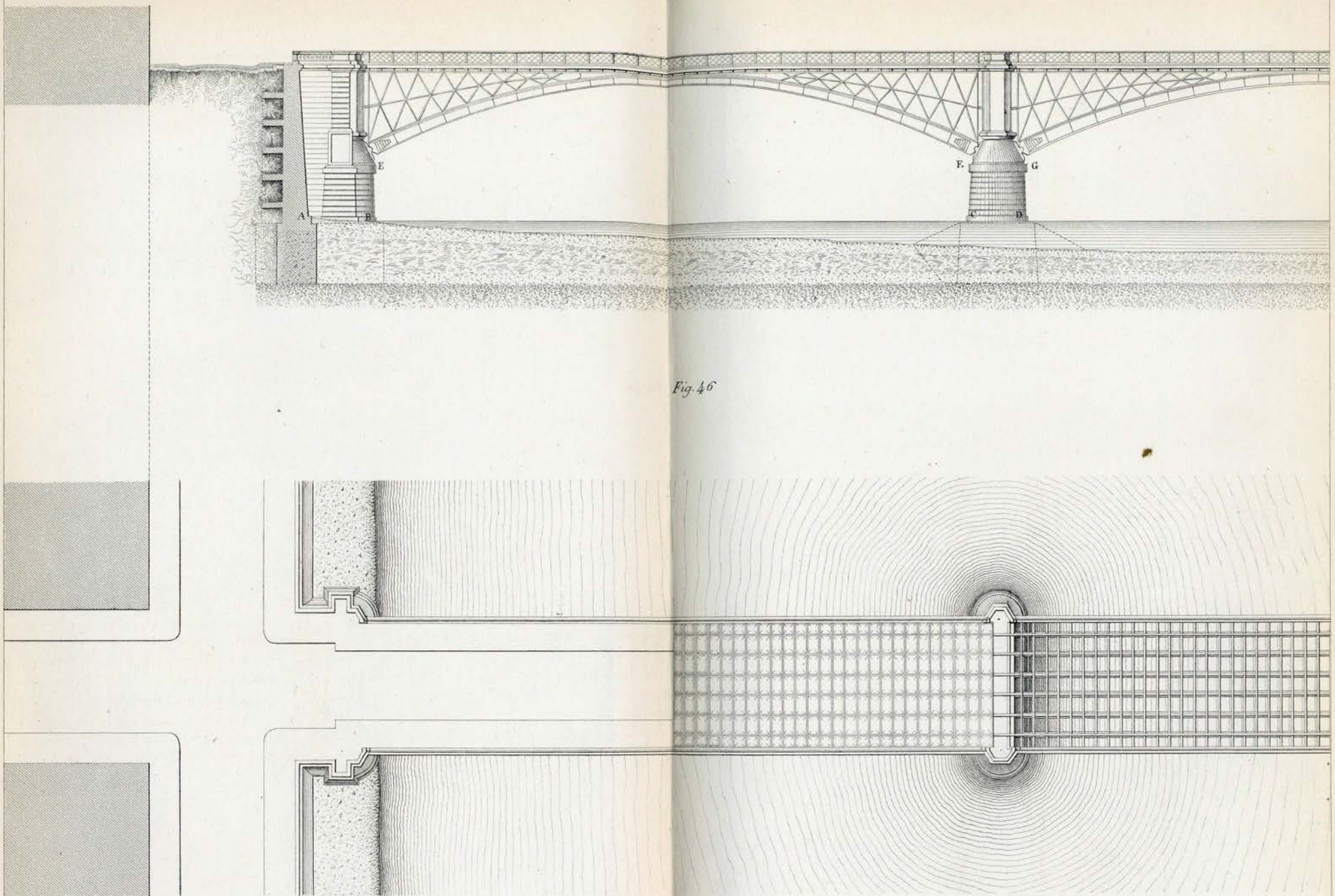
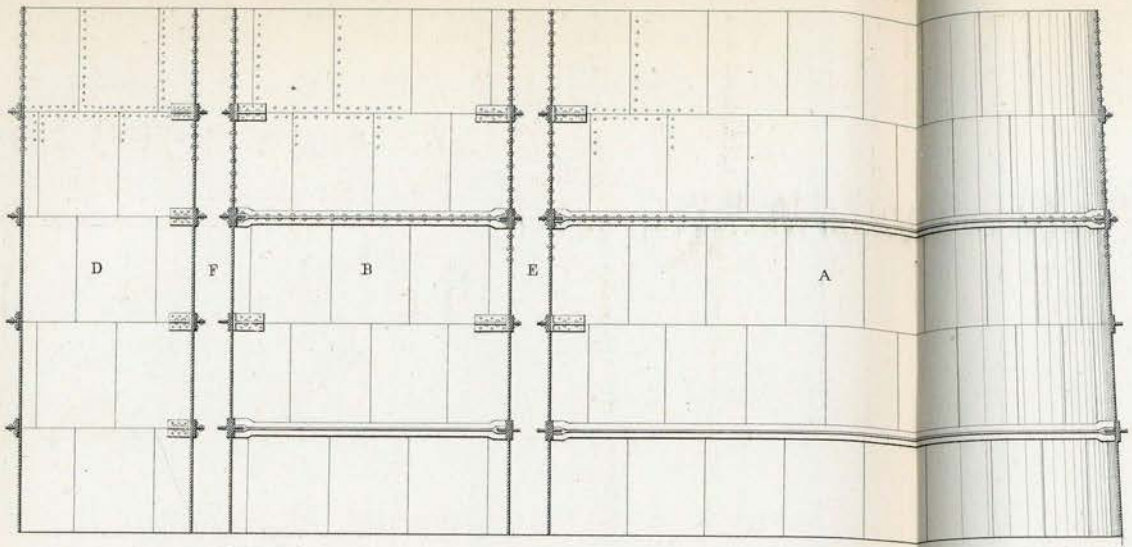


Fig. 46



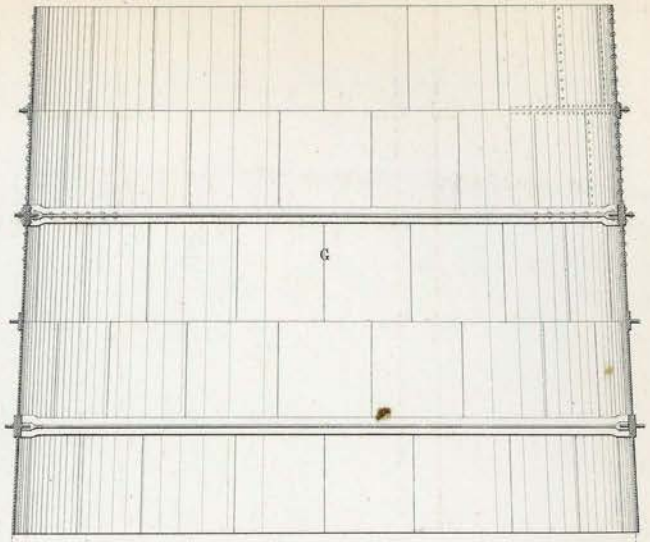


Fig. 47

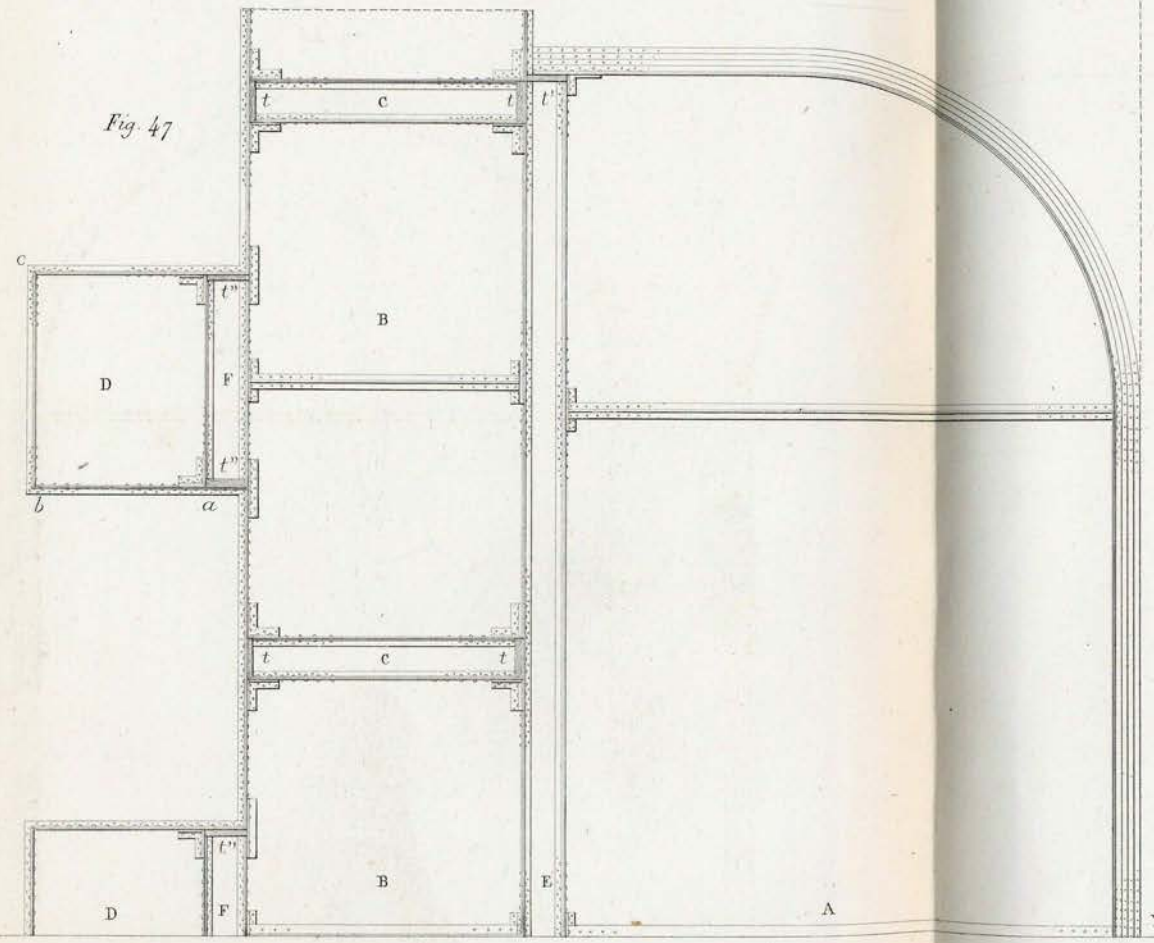


Fig. 48

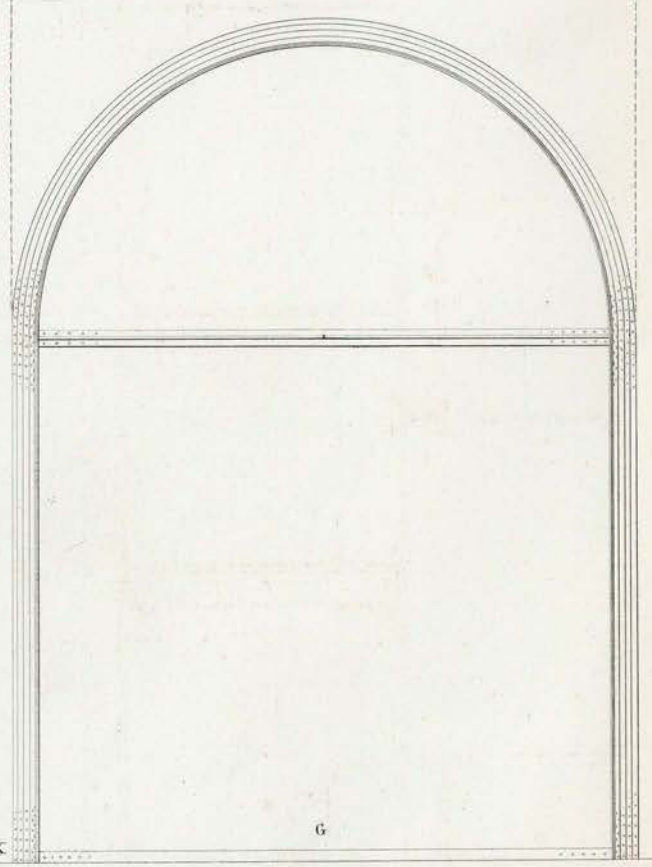


Fig. 49.

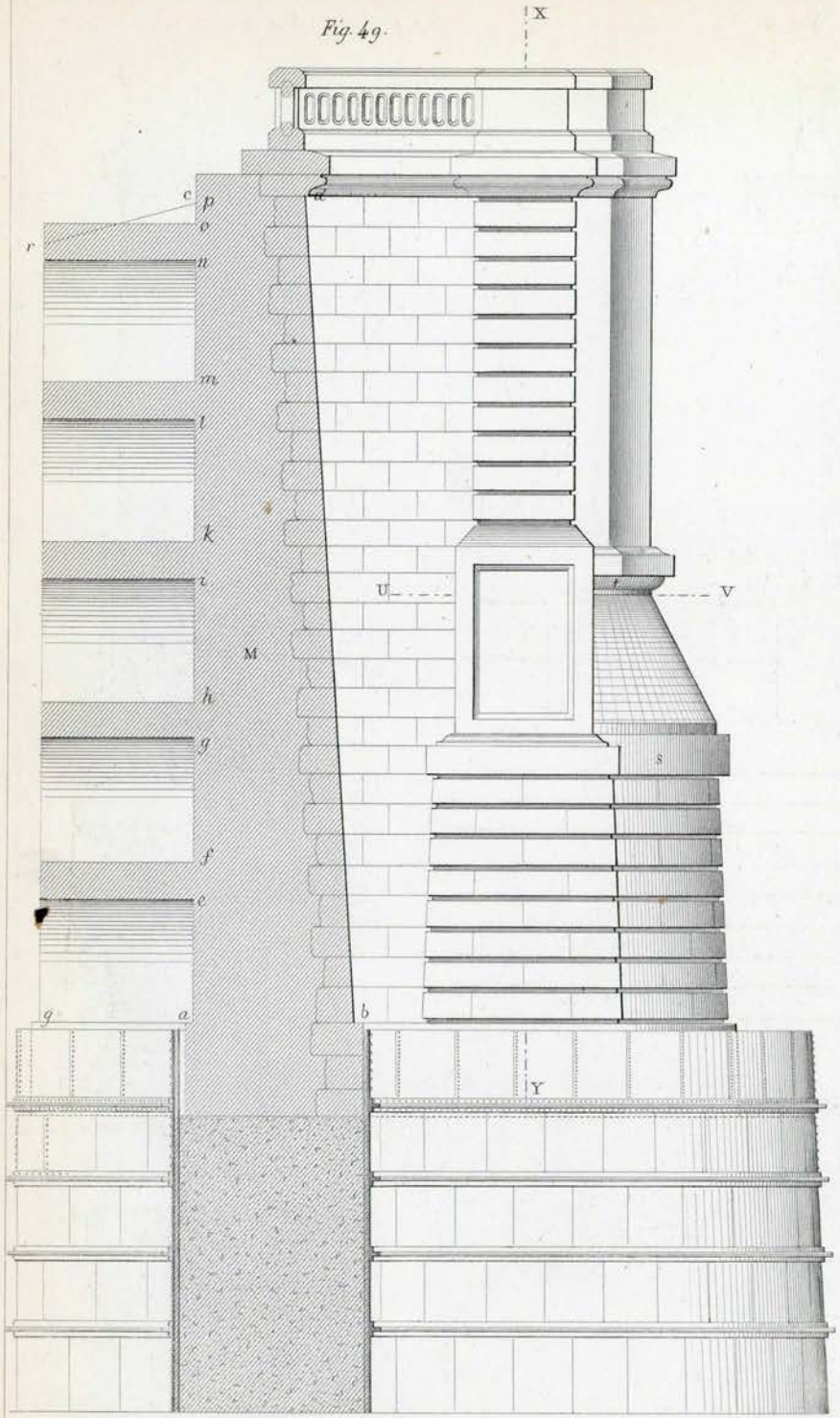


Fig 50.

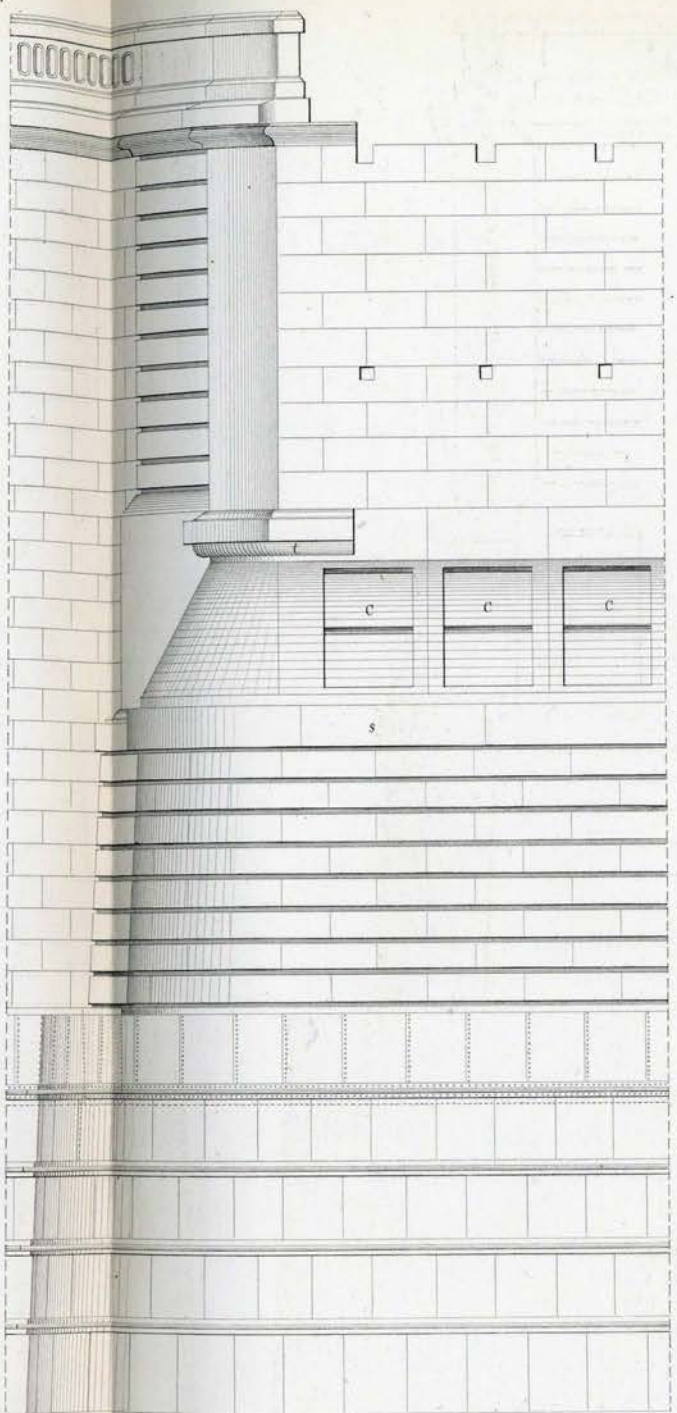


Fig. 51.

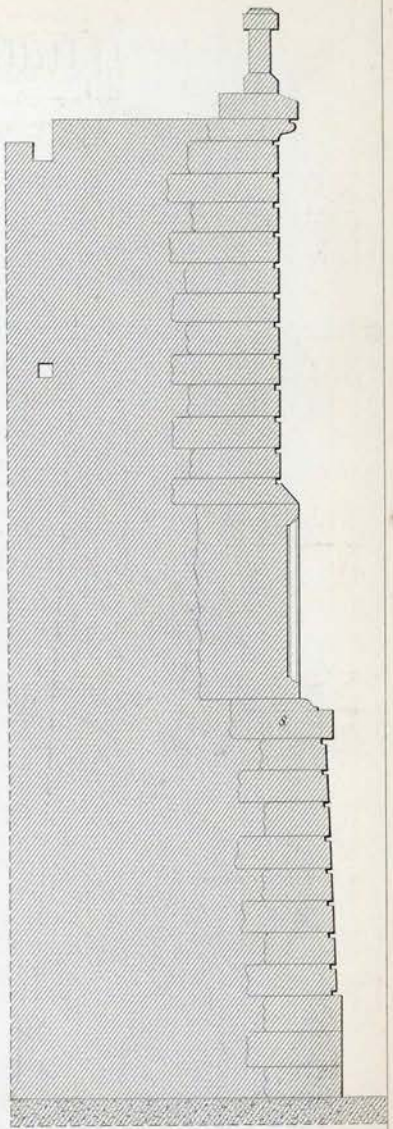


Fig. 52.

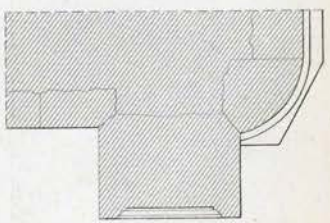


Fig. 56.

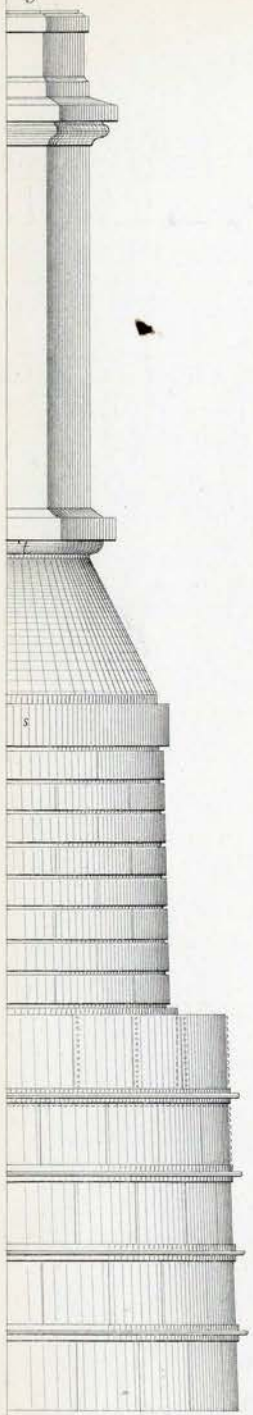


Fig. 57.

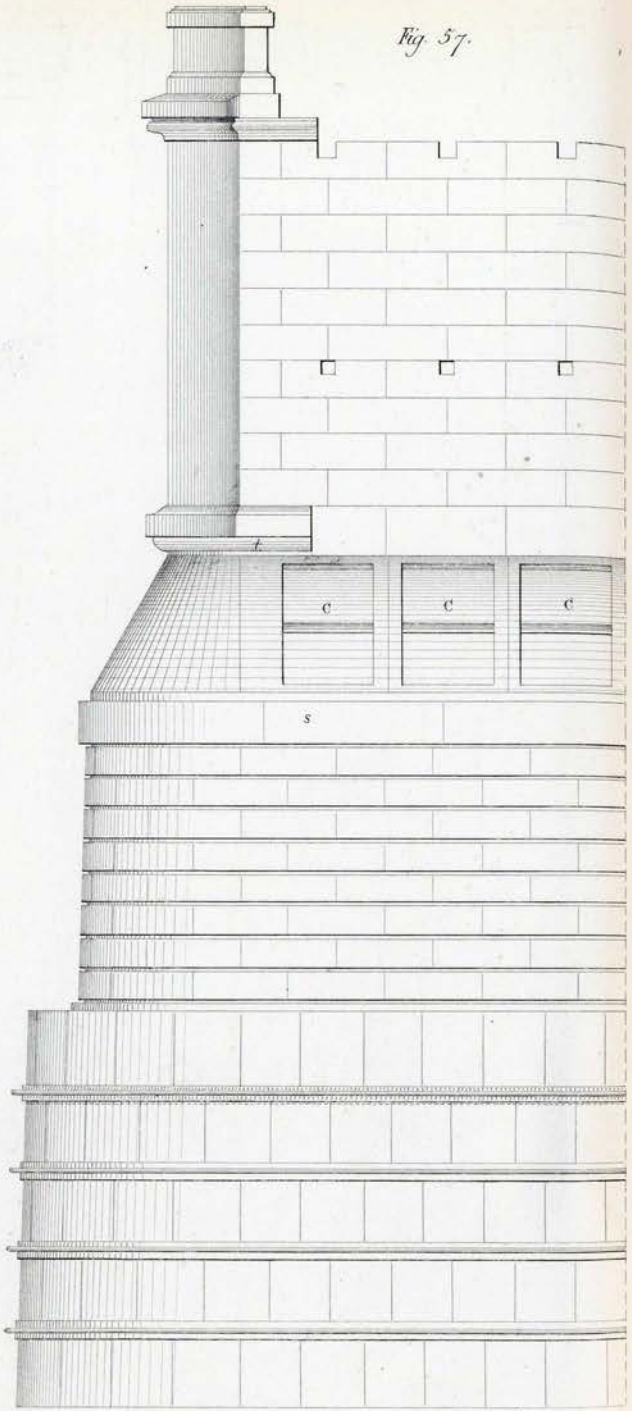


Fig 58.

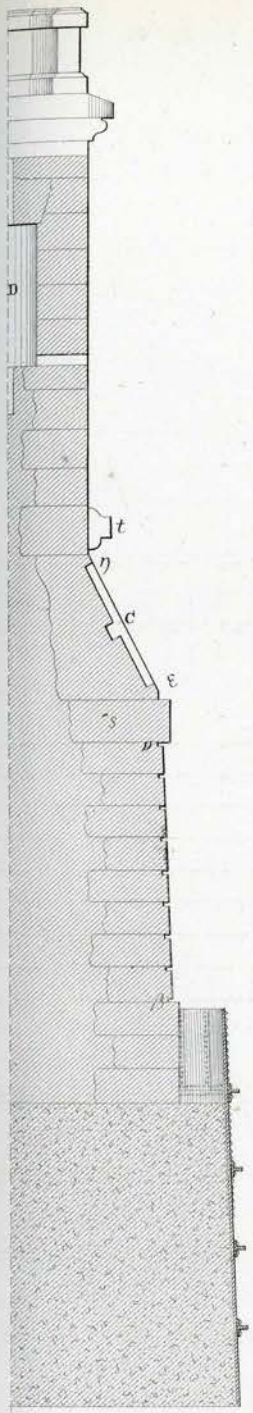


Fig 59.

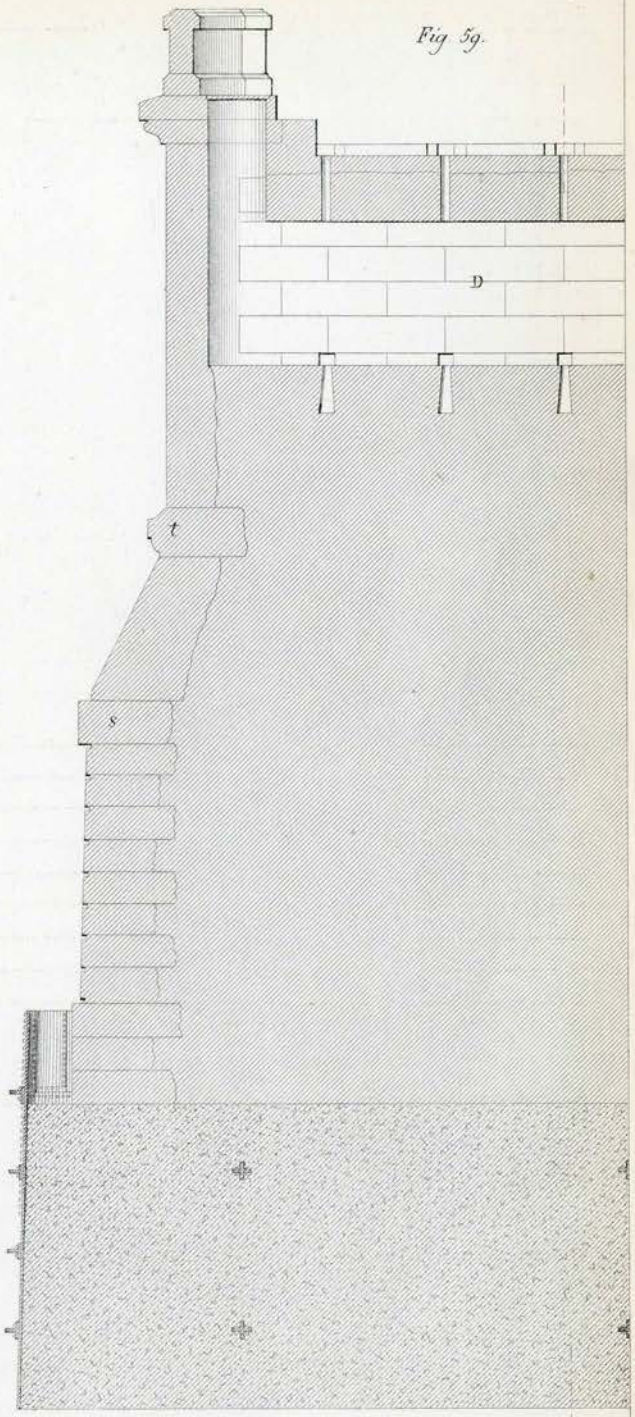


Fig. 60.

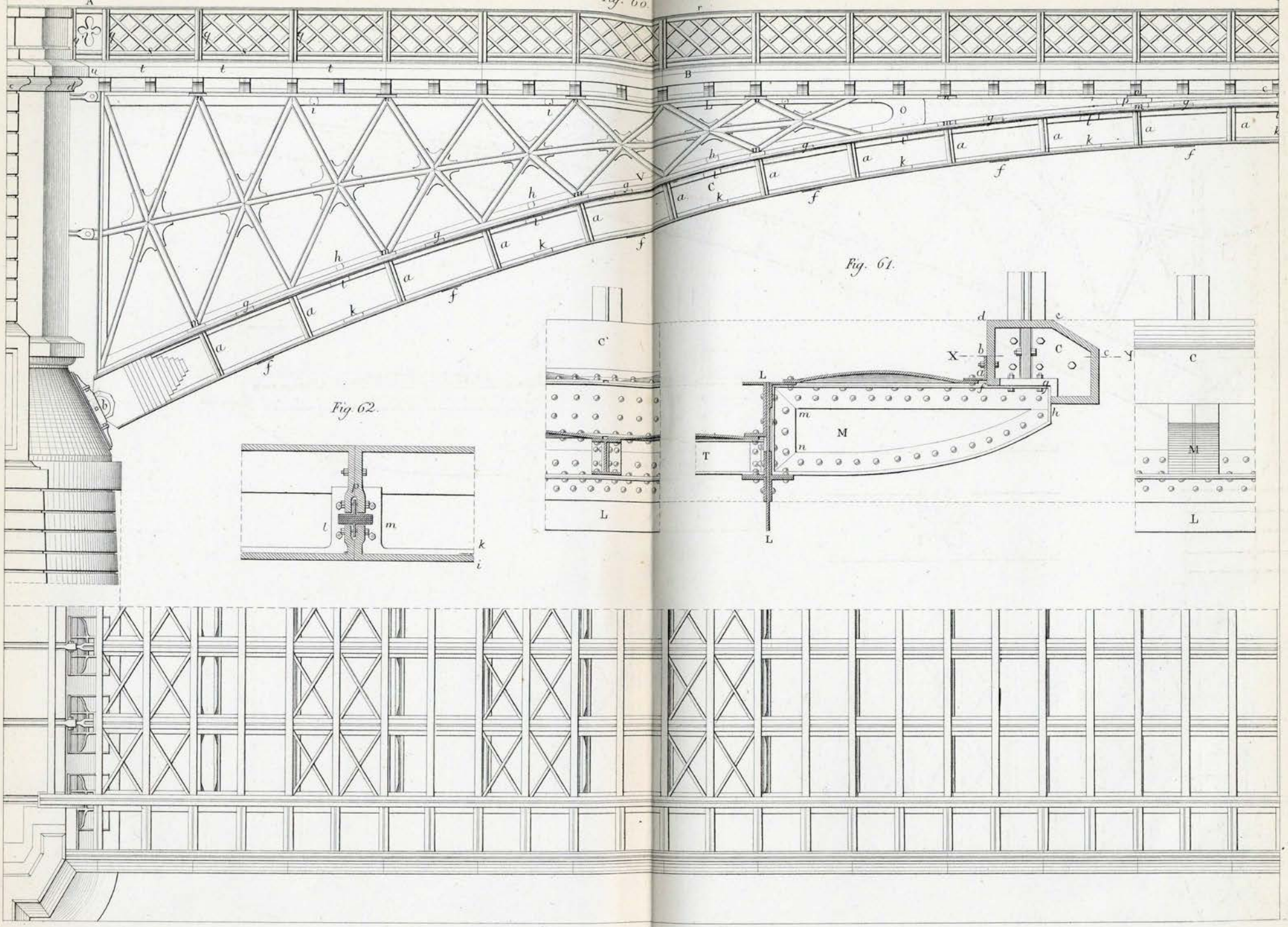


Fig. 61.

Fig. 62.

Fig. 63.

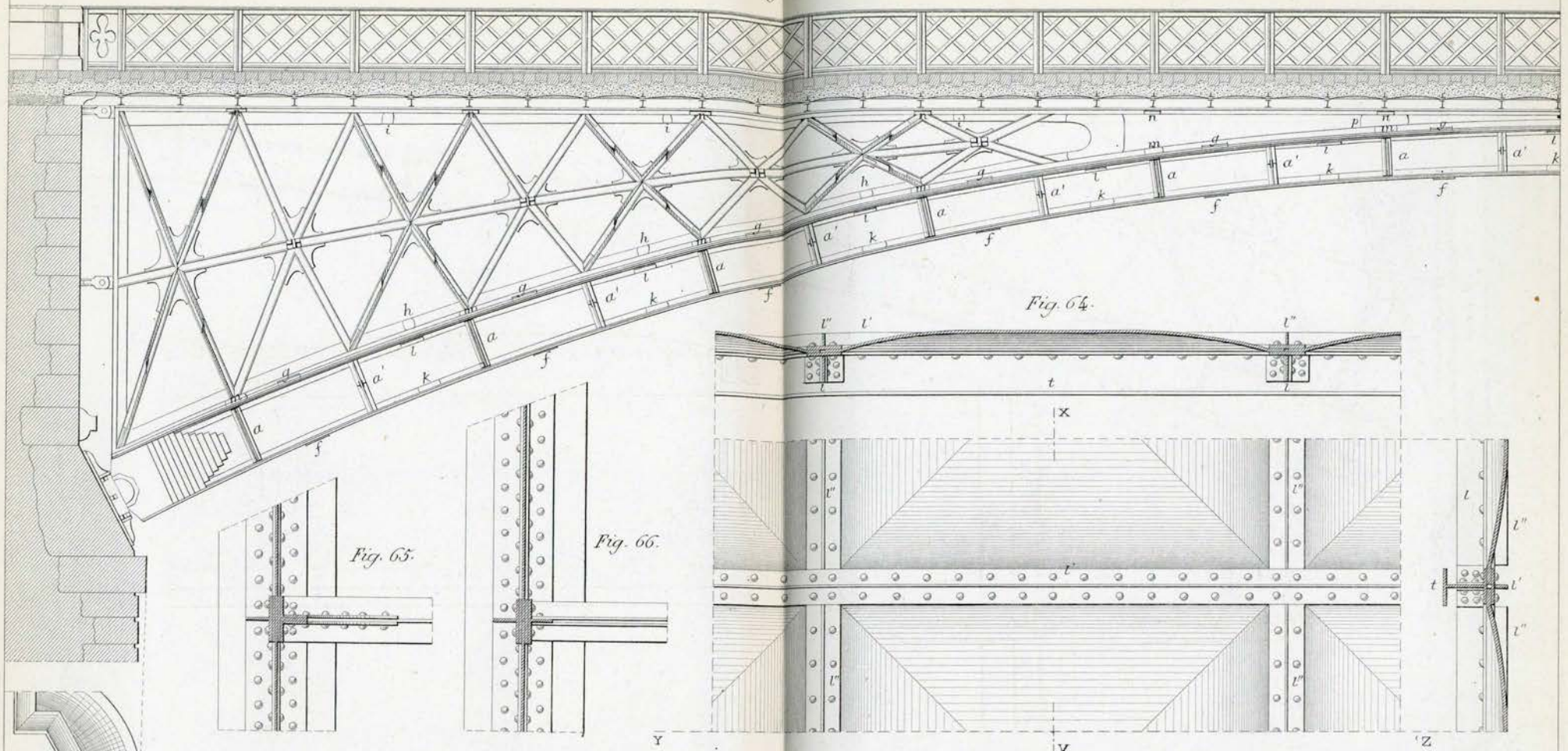
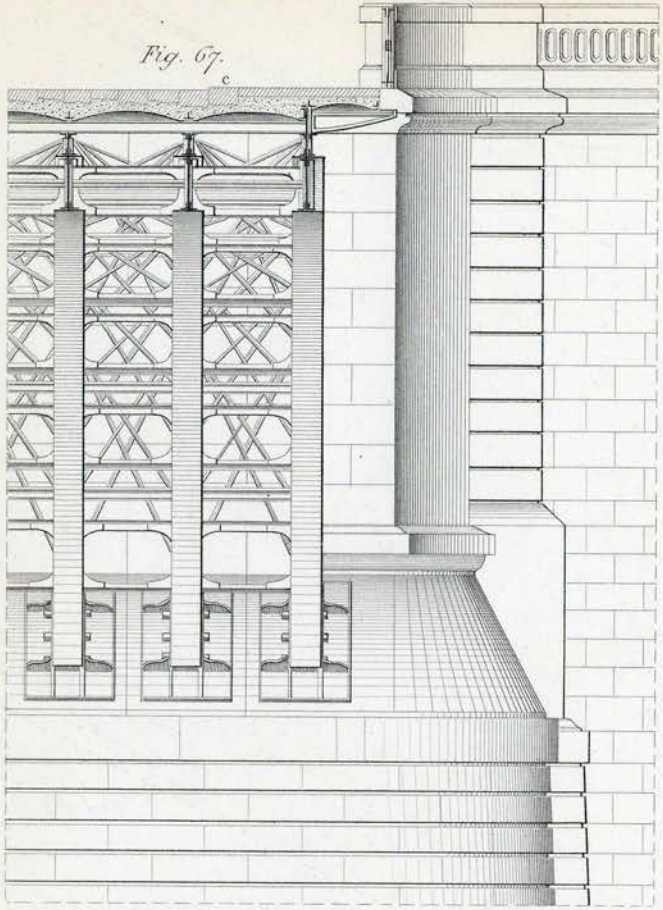


Fig. 64.

Fig. 65.

Fig. 66.

Fig. 67.



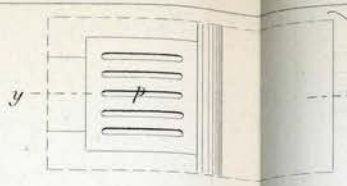


Fig. 70.

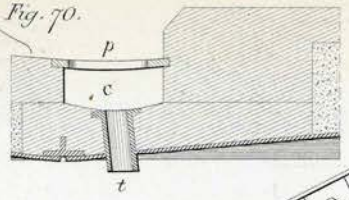


Fig. 71.

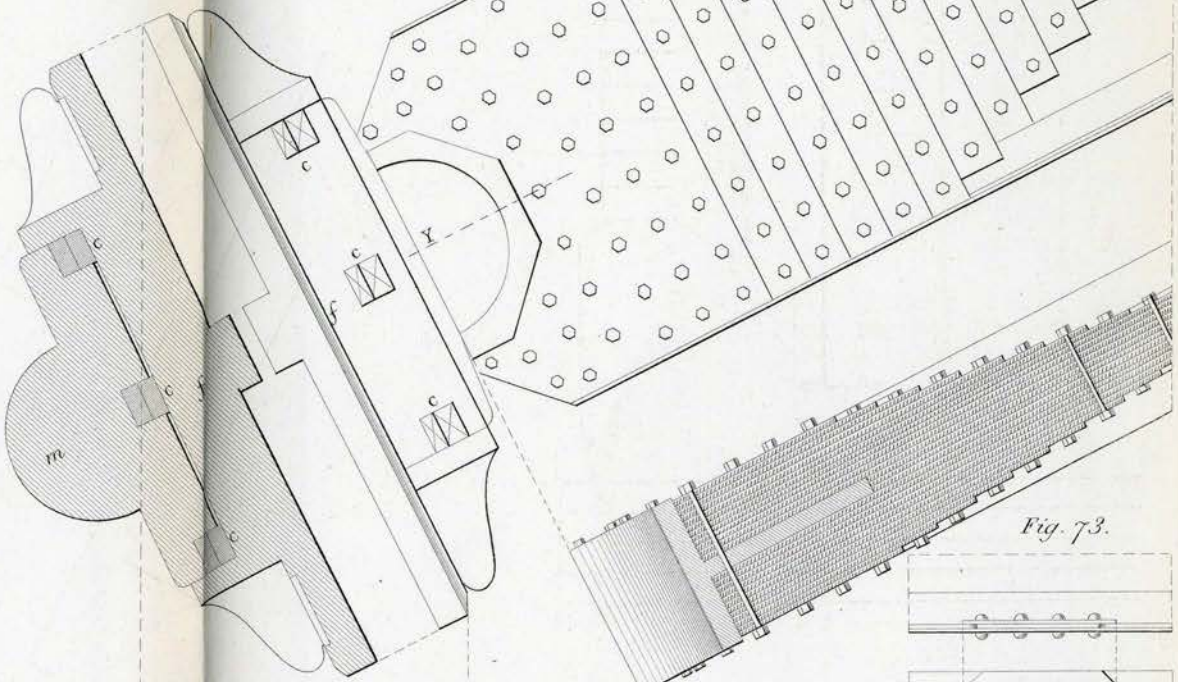


Fig. 73.

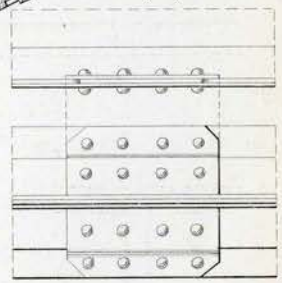


Fig. 68.

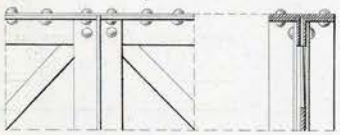


Fig. 69.

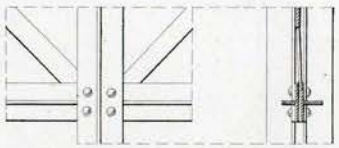


Fig. 74.

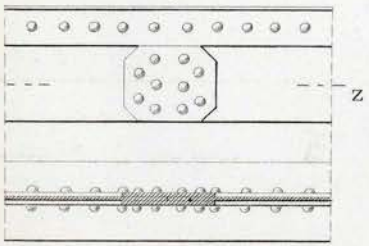
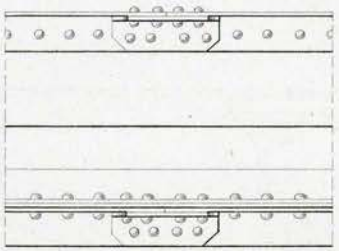


Fig. 75.



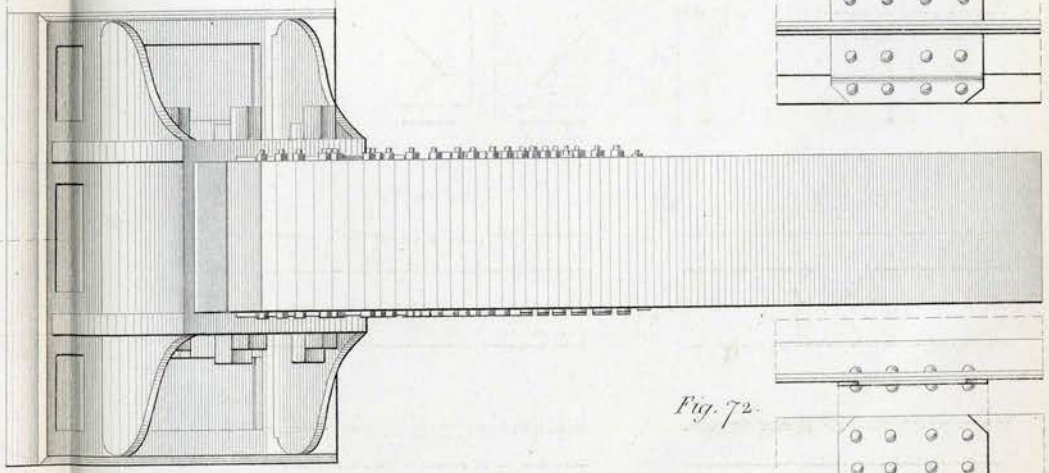


Fig. 72.

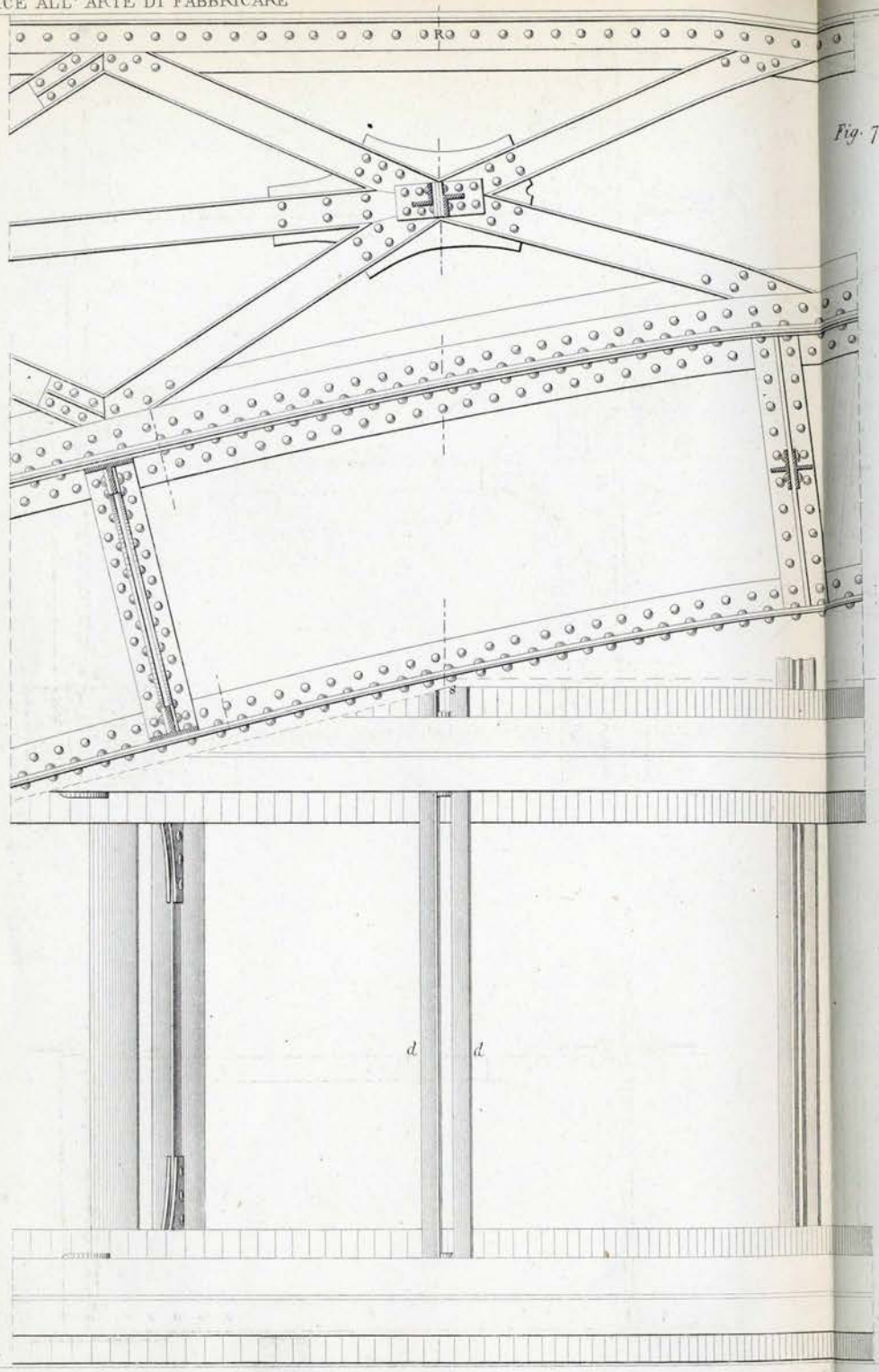


Fig. 76.

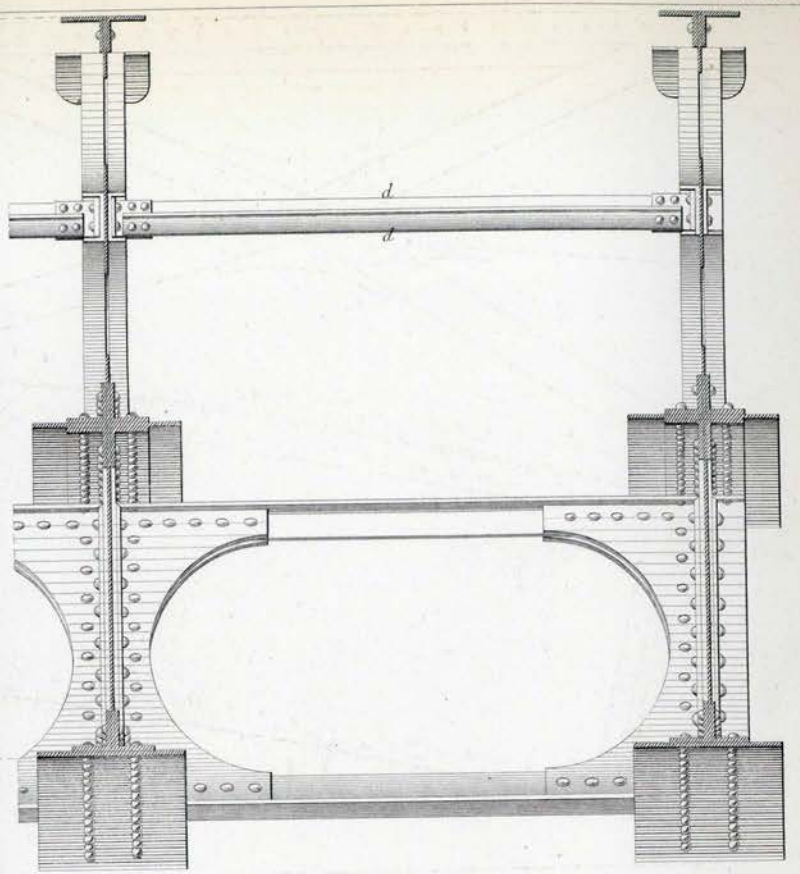
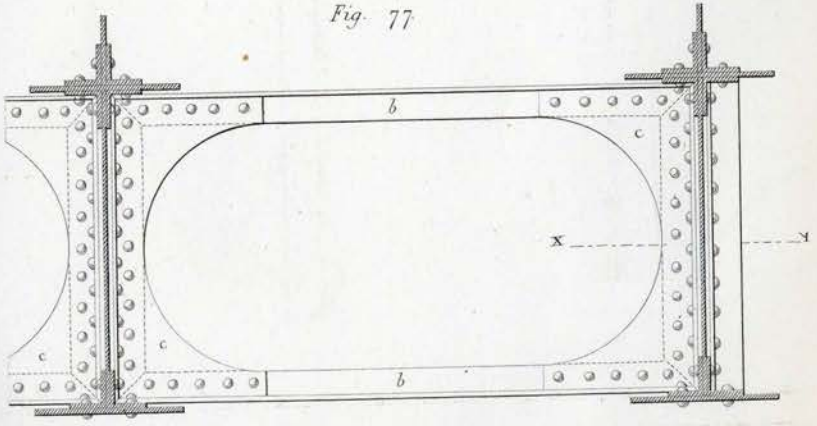


Fig. 77



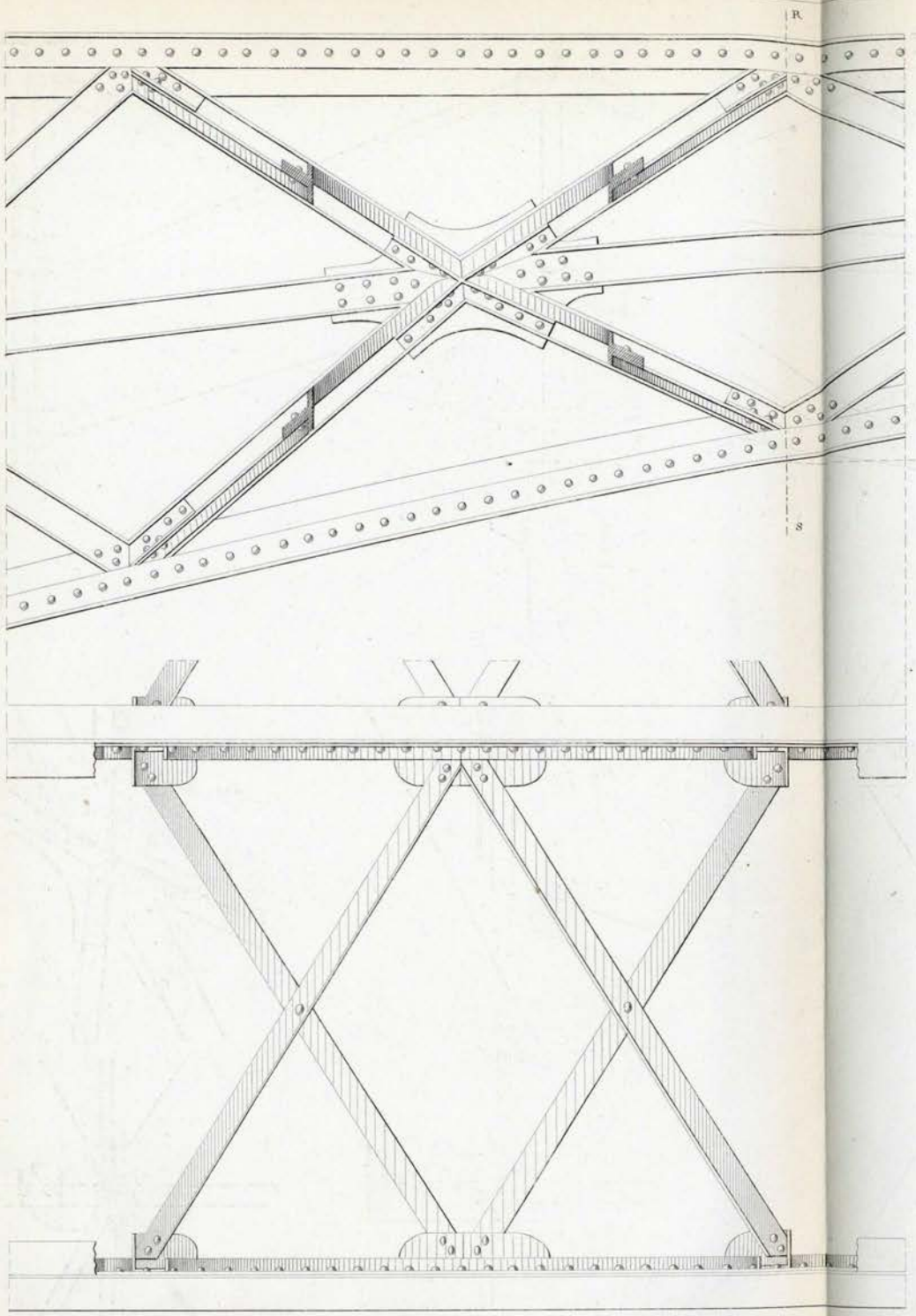


Fig. 78.

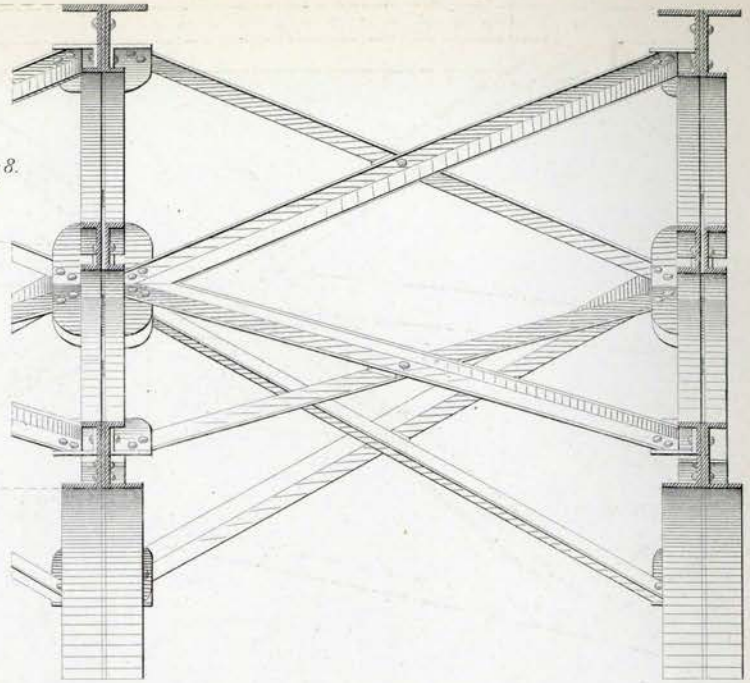


Fig. 79.

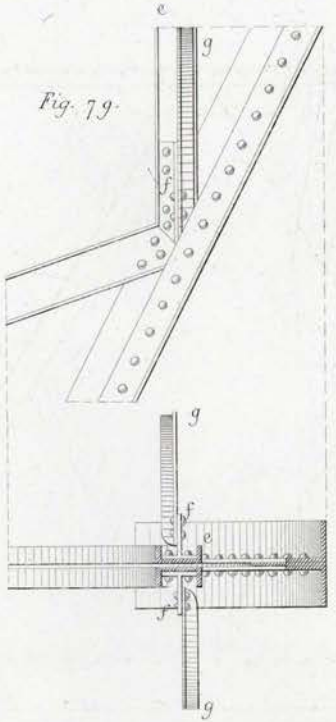


Fig. 80.

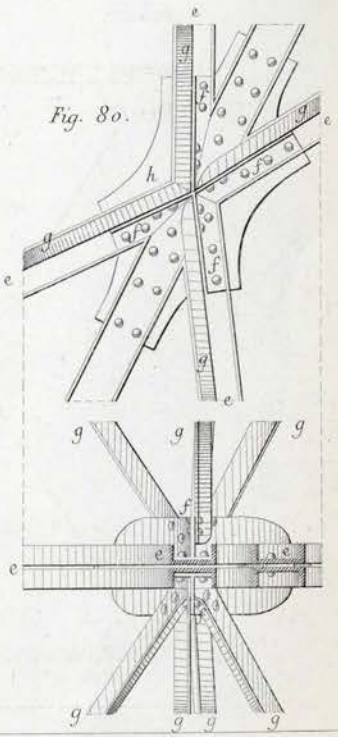


Fig. 81.

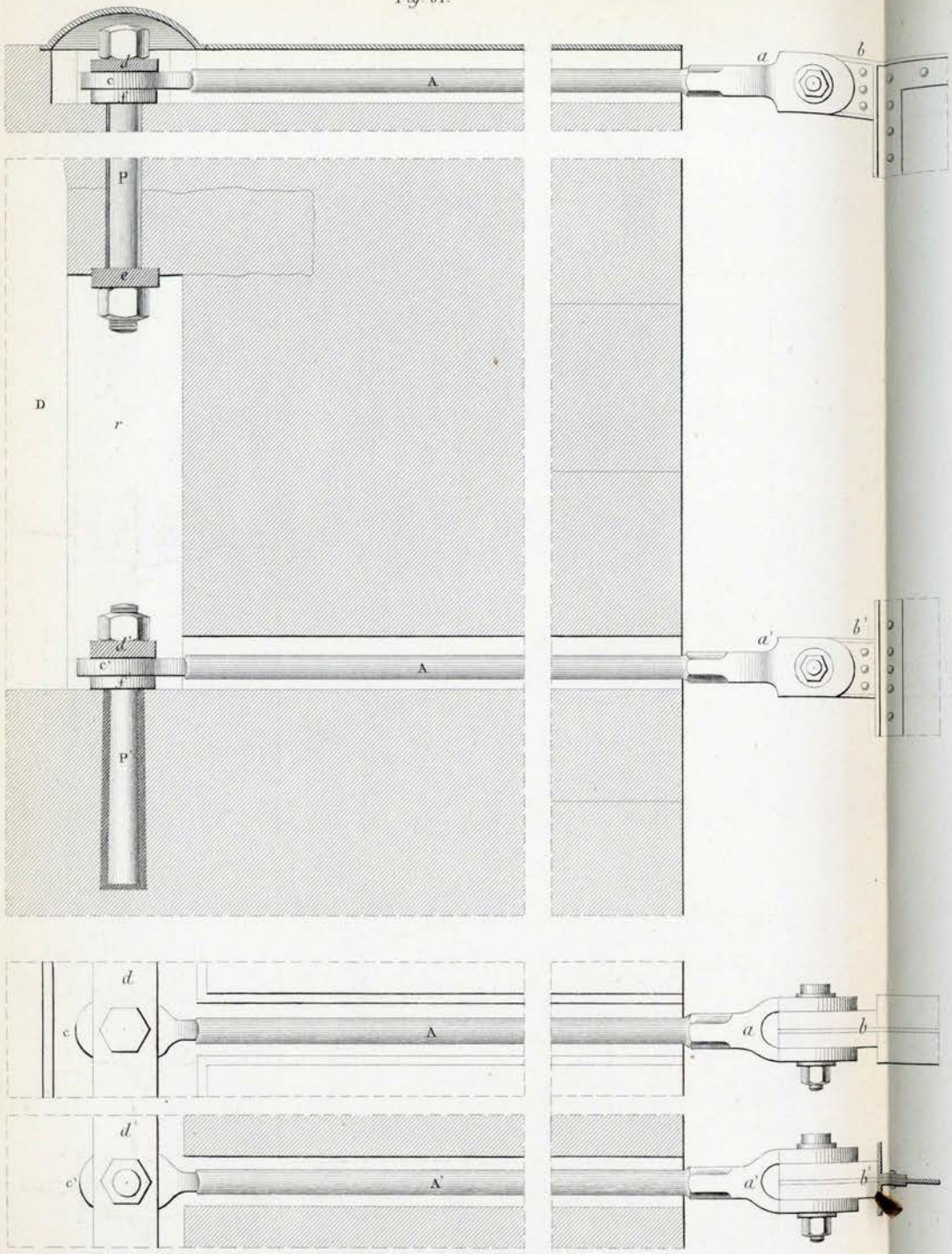


Fig. 82.

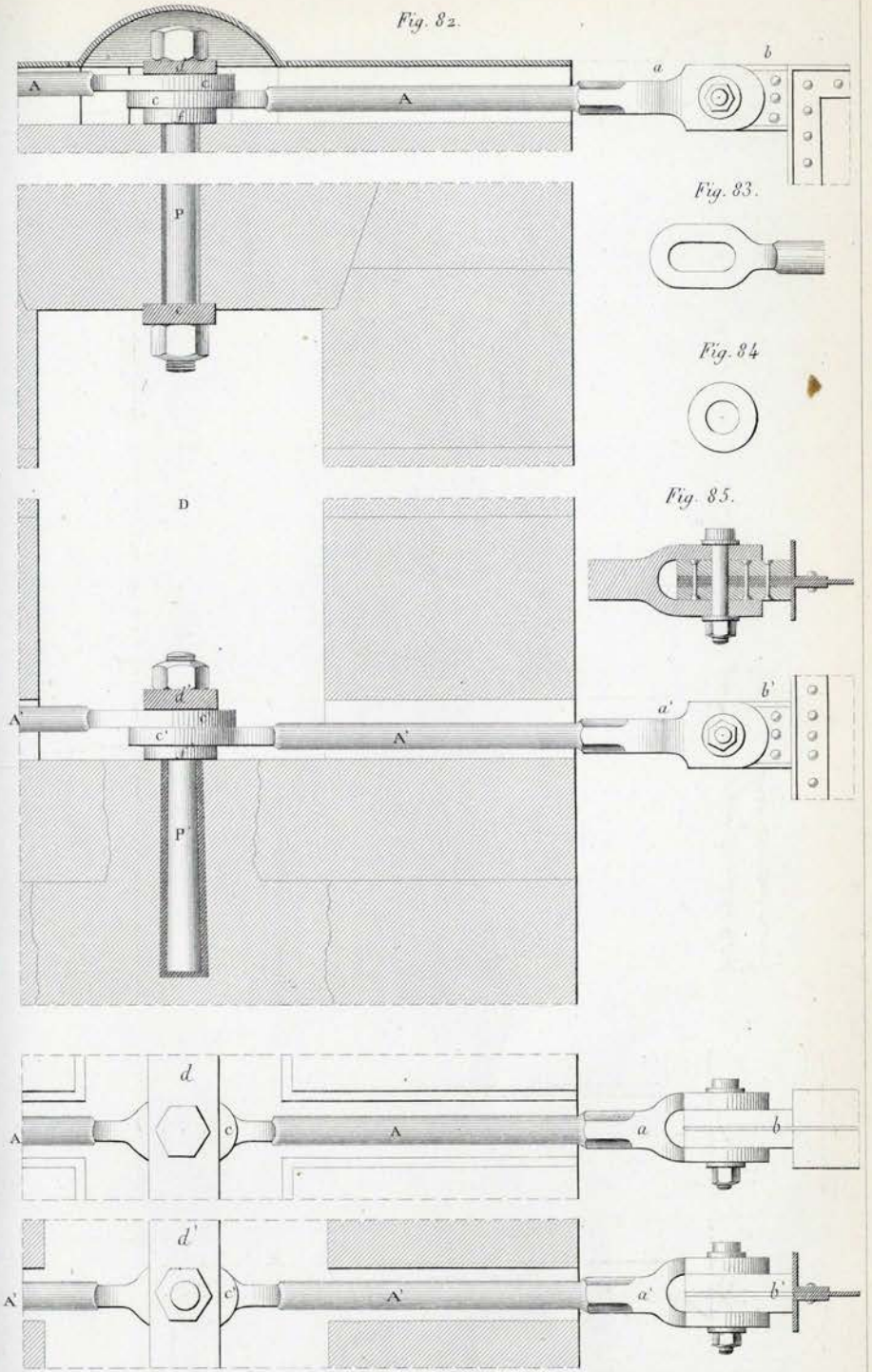


Fig. 83.

Fig. 84

Fig. 85.

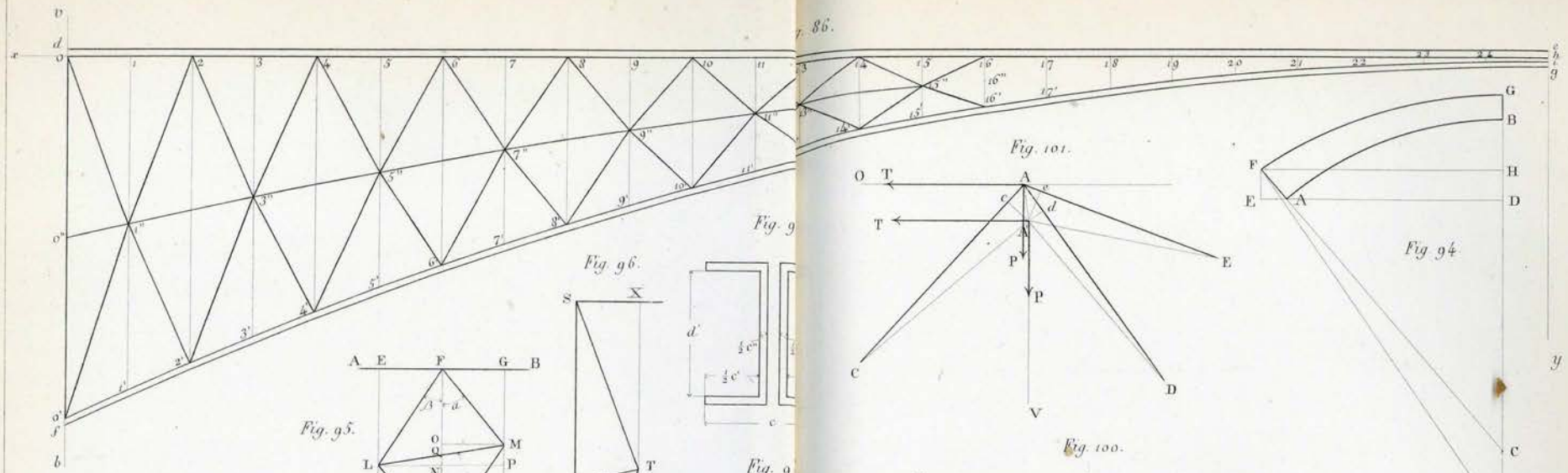


Fig. 86.

Fig. 89.

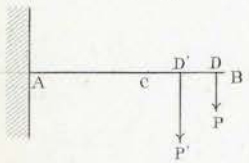


Fig. 95.

Fig. 96.

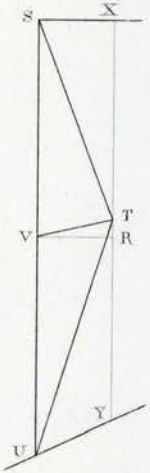


Fig. 97.

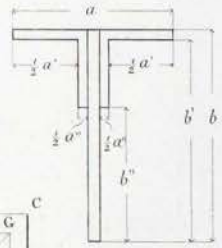


Fig. 101.

Fig. 94.

Fig. 100.

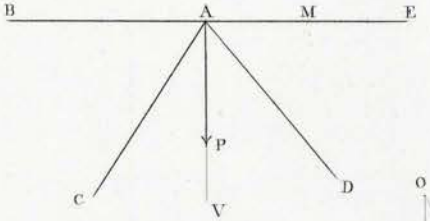


Fig. 92.

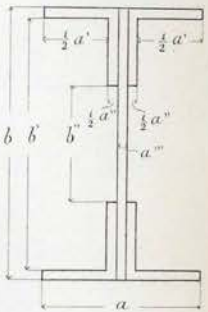


Fig. 93.

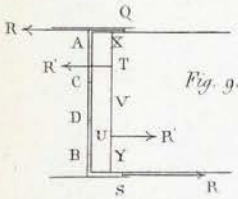


Fig. 87.

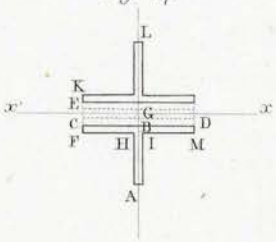


Fig. 102.

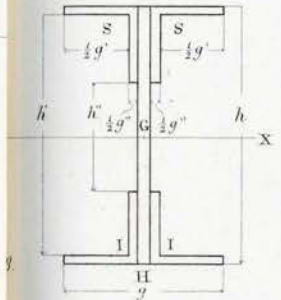


Fig. 103.

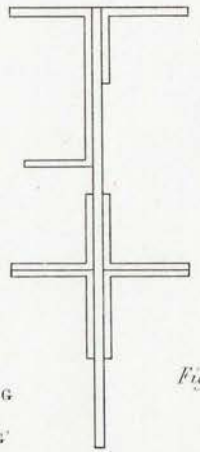
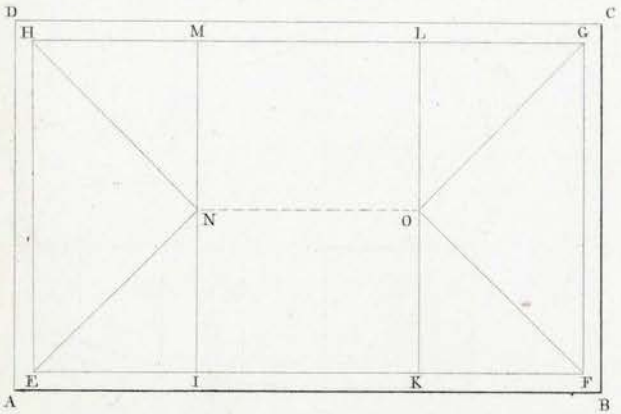


Fig. 90.



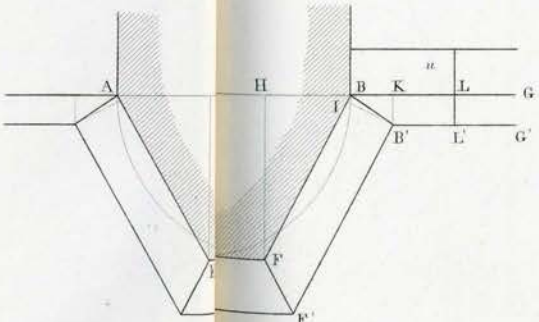


Fig. 91.

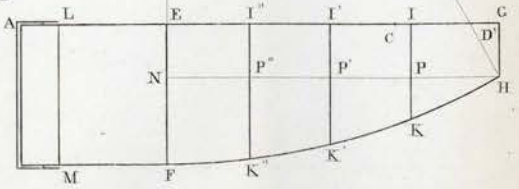


Fig.104

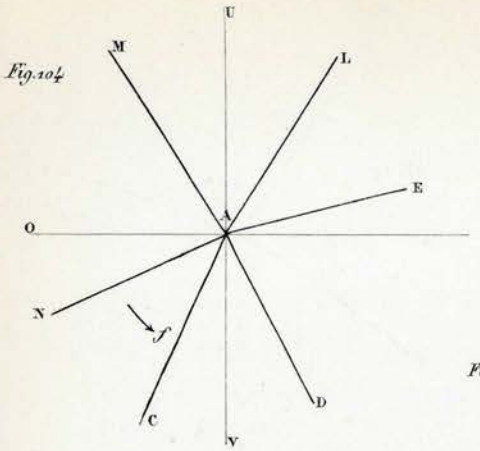
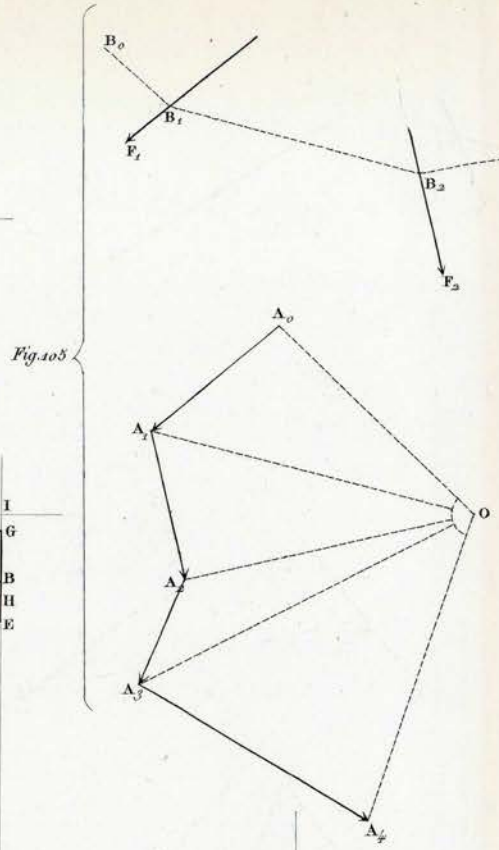


Fig.105



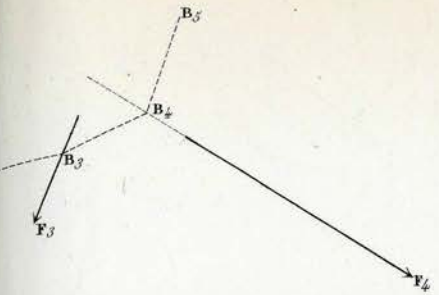


Fig.107

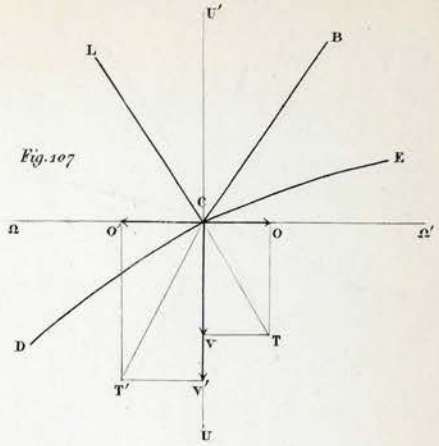


Fig.108

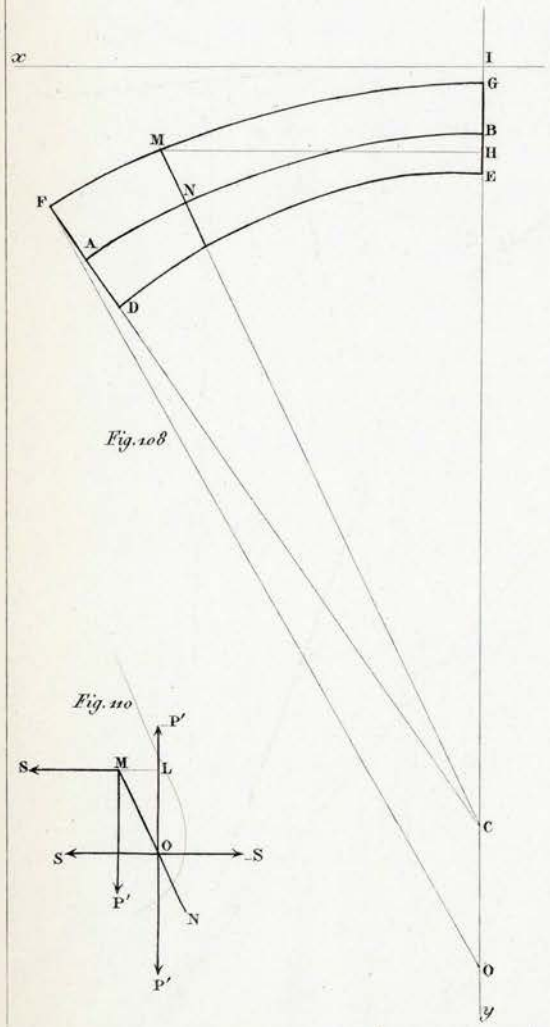


Fig.109.

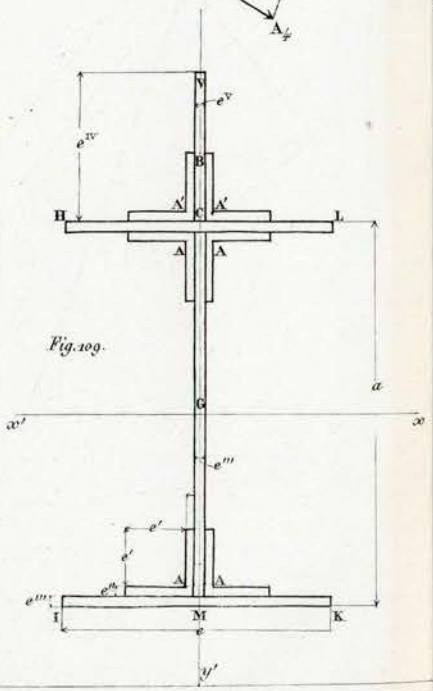
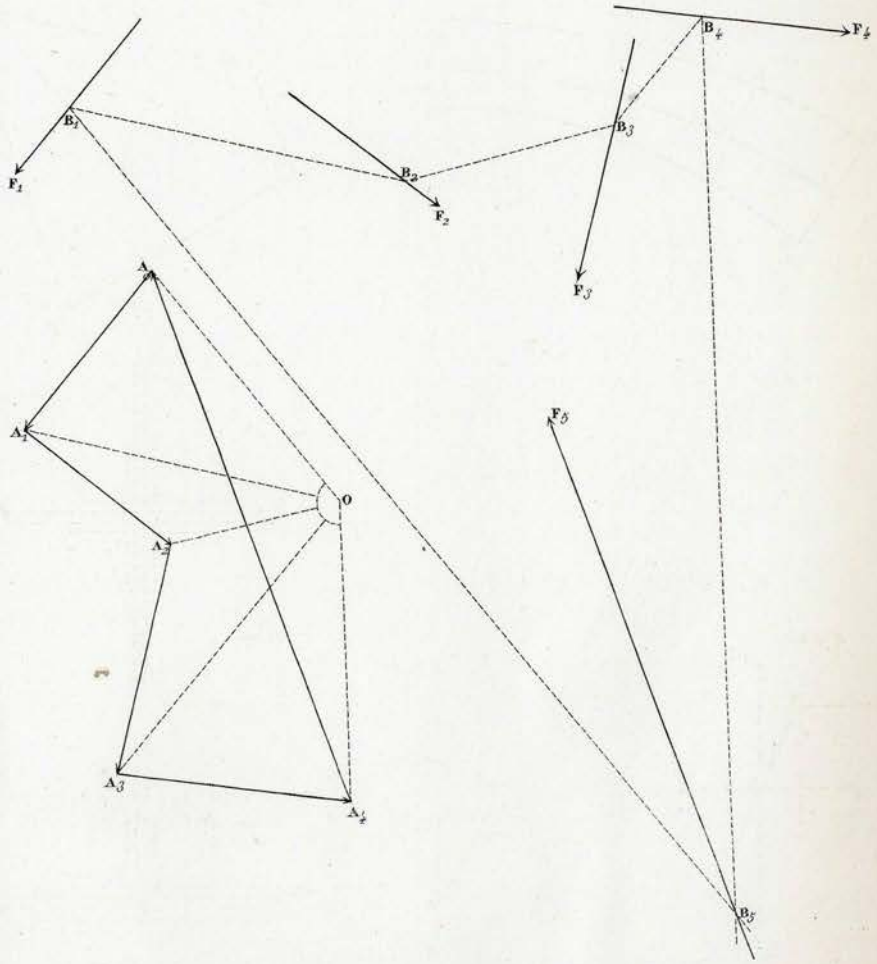


Fig.110

Fig.106



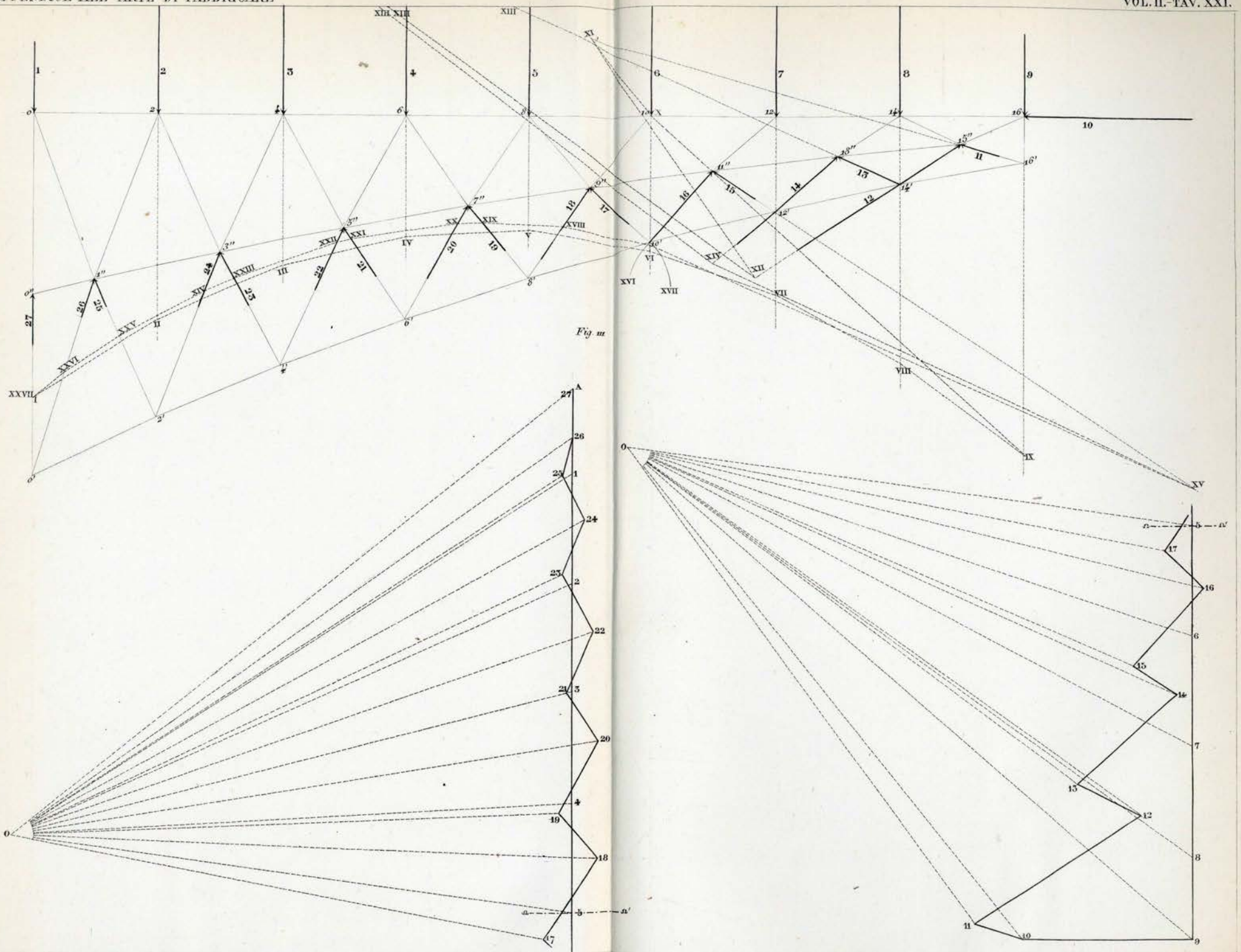


Fig. III

Fig. 118.bis

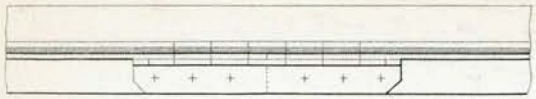


Fig. 112

Fig. 115.

Fig. 116.

Fig. 117.

Fig. 118.

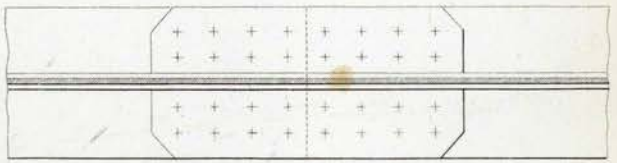
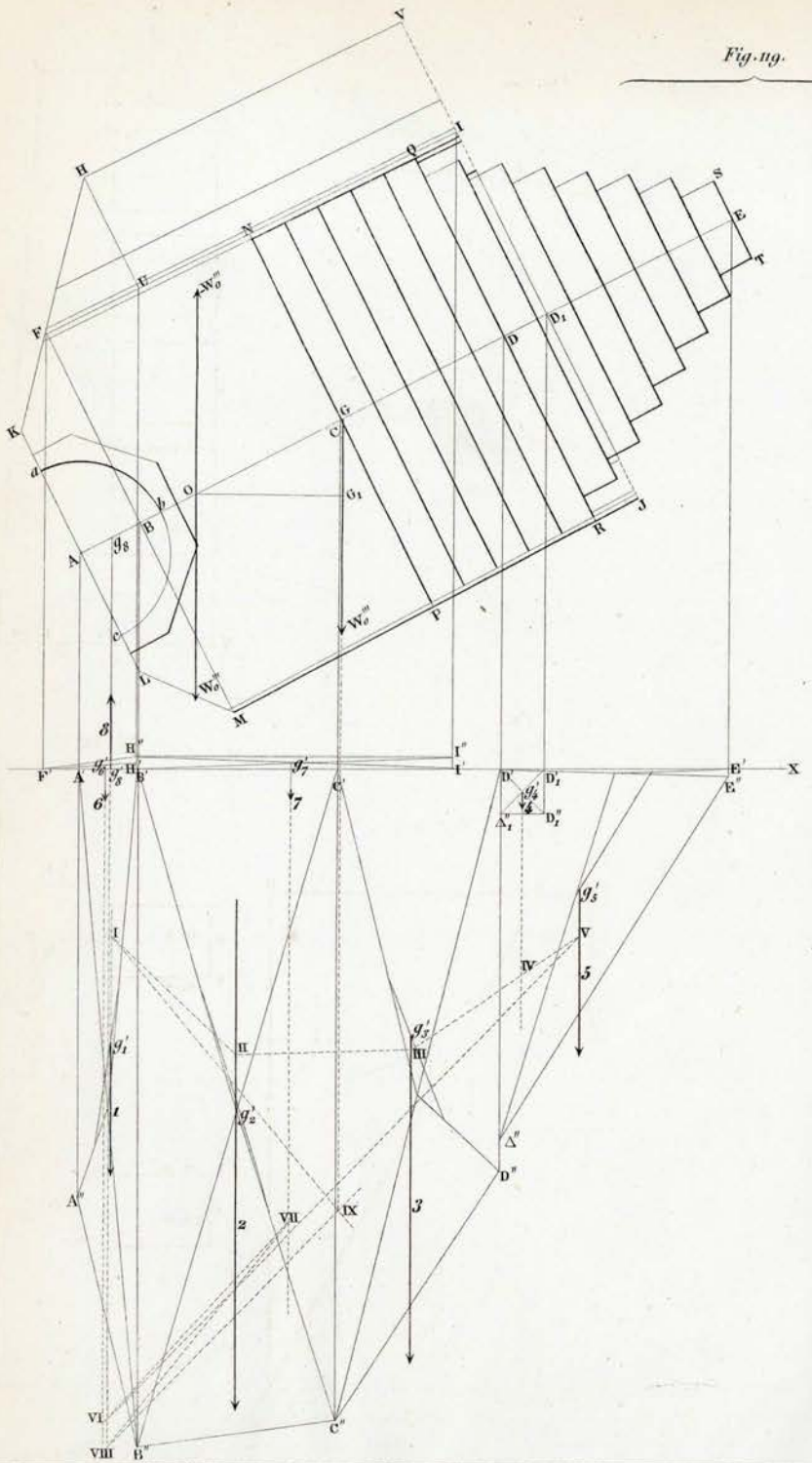


Fig. 113.

Fig. 114.

Fig. 119.



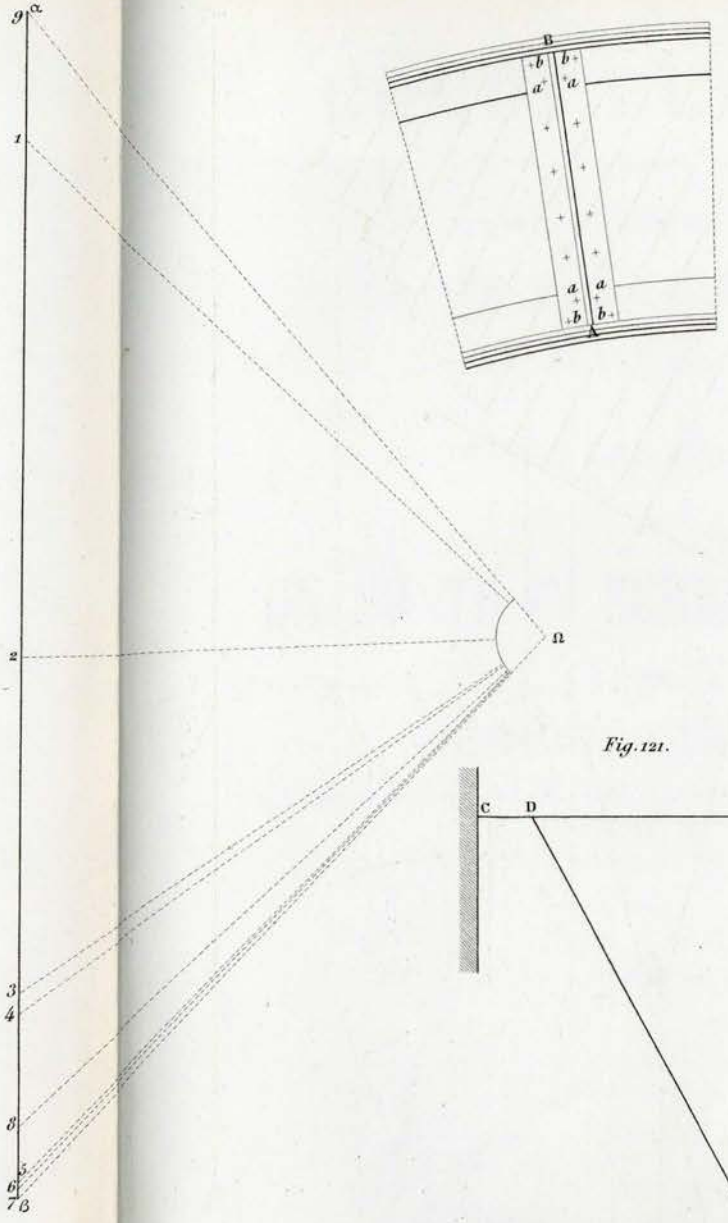


Fig. 120.

Fig. 121.

Fig. 122.

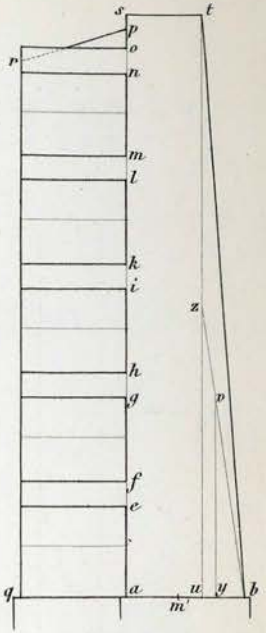
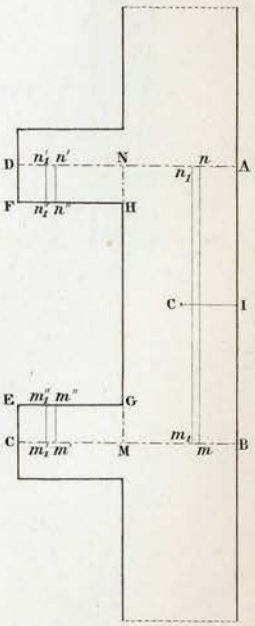


Fig. 123.



DEFORMAZIONI

DEI

CORPI ELASTICI

studiate

NEI LORO PIÙ GENERALI RAPPORTI

COI LAVORI DELLA MODERNA INGEGNERIA

STUDIO DEL PROGETTO

DI

UN PONTE IN FERRO CON ARCHI

PER

CURIONI GIOVANNI

Professore di costruzioni civili, stradali ed idrauliche nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri di Torino.

TORINO

Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO Editore

4, via Alfieri, 4

—

1875

Proprietà letteraria e artistica, con riserva della traduzione.

Stabilimento Tipografico e di Stereotipia A. F. Negro
4, Via Alfieri, 4.

INDICE DELLE FIGURE

Tavola I.

Figura 1, per spiegare il sistema di generazione dei corpi, di cui si vogliono studiare le deformazioni.

Figure 2, 3 e 4, per giungere alle formole determinatrici delle deformazioni di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti.

Tavola II.

Figure 5, 6 e 7, per ottenere le formole determinatrici delle deformazioni di un solido elastico coll'asse primitivamente rettilineo e sollecitato da forze contenute in un sol piano passante per l'asse medesimo.

» 8 e 9, per arrivare alle formole determinatrici delle deformazioni di un solido elastico, avente per asse primitivo una curva piana e sollecitato da forze contenute nel piano della curva medesima.

Figura 10, riferentesi allo studio delle deformazioni delle centine simmetriche e simmetricamente caricate rispetto al punto culminante del loro asse.

Figure 11, 12 e 13, relative alla determinazione delle costanti, le quali rappresentano il movimento della sezione iniziale nei solidi con deformazione piana.

Tavola III.

Figure 14, 15, 16, 17 e 18, riferentisi alla determinazione delle forze incognite, e principalmente delle reazioni degli appoggi per le centine appoggiate ed incastrate alle loro estremità.

Figura 19, relativa alla determinazione delle reazioni degli appoggi per un solido con asse rettilineo incastrato alle sue estremità

» 20, per la determinazione delle reazioni degli appoggi e della tensione di un tirante parallelo alla corda per una centina appoggiata alle due estremità, simmetrica e simmetricamente sollecitata.

» 21, per la determinazione delle reazioni degli appoggi e delle mutue azioni fra due pezzi, uno con asse rettilineo e l'altro con asse rettilineo o curvilineo, i quali, essendo incastrati per una loro estremità, assieme si riuniscono nell'altra.

Figura 57. — Elevazione di una mezza pila su un piano perpendicolare all'asse del ponte — Scala di 1/100.

» 58. — Mezza sezione prodotta in una pila da un piano verticale parallelo all'asse del ponte — Scala di 1/100.

» 59. — Mezza sezione prodotta in una pila da un piano verticale passante per l'asse della camera d'ormeggio — Scala di 1/100.

Tavola XIII.

Figura 60. — Proiezione orizzontale, supponendo tolta la coperta ed elevazione di una mezza arcata del ponte — Scala di 1/100.

» 61. — Particolari dell'unione delle travi trasversali e delle mensole colla longarina di fronte, della posa delle lamiere curve per la coperta sopra le mensole, dell'unione della cornice di ghisa colle mensole, e del sistema d'incastramento dei ritti del parapetto nella cornice stessa — Scala di 1/20.

» 62. — Sezione orizzontale nella cornice di ghisa a circa metà della sua altezza dove esiste l'incastramento di un ritto del parapetto — Scala di 1/20.

Tavola XIV.

Figura 63. — Proiezione orizzontale e sezione longitudinale di una mezza arcata del ponte — Scala di 1/100.

» 64. — Particolari della posa della coperta del ponte sulle travi trasversali — Scala di 1/20.

Figure 65 e 66. — Particolari delle unioni delle centine coi loro collegamenti trasversali — Scala di 1/20.

Tavola XV.

Figura 67. — Metà della sezione fatta in una delle arcate laterali da un piano verticale perpendicolare all'asse del ponte.

Figure 68 e 69. — Particolari delle unioni dei pezzi del parapetto — Scala di 1/20.

Figura 70. — Particolare di una piastra e di un tubo di scolo delle acque piovane — Scala di 1/20.

» 71. — Studio di un cuscinetto d'imposta delle centine — Scala di 1/20.

Figure 72, 73, 74 e 75. — Tipi dei coprigiunti per le tavole delle centine, per le pareti verticali superiori all'estradosso delle centine, per le pareti verticali delle longarine e pei ferri d'angolo.

Tavola XVI.

Figure 76 e 77. — Studio dei collegamenti delle centine e dei timpani — Scala di 1/20.

Tavola XVII.

Figure 78, 79 e 80. — Studio dei collegamenti dei timpani — Scala di 1/20.

Tavola XVIII.

Figura 81. — Particolari degli ormeggi dei timpani sulle spalle — Scala di 1/20.

» 82. — Particolari degli ormeggi dei timpani sulle pile — Scala di 1/20.

Figure 83, 84 e 85. — Altri particolari degli ormeggi dei timpani — Scala di 1/20.

Tavola XIX.

Figura 86, riferentesi alla distribuzione dei pezzi dei timpani ed alla determinazione di parecchi elementi dei timpani stessi.

» 87, relativa alla verificazione della stabilità del parapetto.

» 88, per la determinazione delle dimensioni della cornice di ghisa.

» 89, per la determinazione delle dimensioni delle mensole.

» 90, per la determinazione del peso di una lamiera curva della coperta.

Figure 91, 92 e 93, per la verificazione della stabilità delle mensole.

Figura 94, per alcune determinazioni relative all'asse delle centine.

Figure 95 e 96, per la ricerca di alcuni elementi relativi ai timpani.

» 97, 98 e 99, riferentisi alle dimensioni delle sezioni rette dei differenti pezzi dei timpani.

» 100 e 101, relative alla determinazione delle resistenze longitudinali provocate nei pezzi dei timpani concorrenti nei nodi superiori.

Figura 102, relativa ad una variante nel progetto dei pezzi orizzontali dei timpani.

» 103, rappresentante la forma della sezione trasversale delle longarine di fronte.

Tavola XX.

Figura 104, relativa alla determinazione delle resistenze longitudinali provocate nei pezzi dei timpani riuentisi nei punti di concorso.

Figure 105 e 106, per ispiegare la relazione di corrispondenza che esiste fra il poligono delle forze ed il poligono funicolare.

Figura 107, per dimostrare come si possono ottenere le componenti orizzontali e verticali delle azioni esercitate dai pezzi dei timpani sulle centine.

» 108, per alcune determinazioni relative ai punti d'attacco dei pezzi dei timpani colla centina.

» 109, per alcune determinazioni riferentisi alle centine.