DOLZA

d/ 624 (02) CUR

APPENDICE

ALL'

ARTE DI FABBRICARE

CORSO COMPLETO DI ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

PER GL'INGEGNERI, PER GLI ARCHITETTI, PEI PERITI IN COSTRUZIONE
E PEI PERITI MISURATORI

APPENDICE

ALL'

ARTE DI FABBRICARE

LA RESISTENZA DEI MATERIALI

esposta nei suoi più generali rapporti

COI LAVORI DELLA MODERNA INGEGNERIA

STUDIO

DEL PROGETTO DI UN TRONCO DI STRADA FERRATA

per quanto spetta

AL SUO ANDAMENTO ED AI MOVIMENTI DI TERRA

METODO PRATICO

PER DETERMINARE LE PRINCIPALI DIMENSIONI

DELLE ARCATE DEI PONTI IN MURATURA

VOLUME DELLO SPICCHIO CILINDRICO

e volumi compresi

FRA LE SUPERFICIE D'INTRADOSSO ED I PIANI D'IMPOSTA

delle vôlte a padiglione, delle vôlte a botte con teste di padiglione e delle vôlte a schifo

PER

CURIONI GIOVANNI

Professore di costruzioni civili, stradali ed idrauliche nella R. Scuola di applicazione per gli Ingegneri di Torino

TORINO

Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO Editore

4, via Alfieri, 4

1873

Proprietà letteraria e artistica, con riserva della traduzione.

Stabilimento Tipografico e di Stereotipia A. F. Negro
via Riberi, 2, vicino al Tempio Israelitico.

I grandi perfezionamenti che ognor si verificano nelle costruzioni ed il continuo apparire di edifizi con tipi affatto nuovi, ci hanno persuasi essere nostro dovere di non lasciar cadere nell'abbandono il lavoro da noi pubblicato sull'*Arte di fabbricare* e di mantenerlo al livello dei moderni progressi dell'arte edificatoria.

Perciò ci siamo indotti a pubblicare un'Appendice alla citata opera e di esporre in essa i moderni ritrovati della scienza delle costruzioni; i complementi di quelle quistioni alle quali non fu possibile dare sufficiente sviluppo nell'*Arte di fabbricare;* ed i processi, sopra casi particolari, per la redazione di progetti completi di diverse ed importanti costruzioni.

Lo scopo di quest'Appendice, precisamente come quello dell'*Arte di fabbricare* con cui ha relazione, è teorico-pratico, e, mentre i giovani costruttori troveranno in essa quelle nozioni teoriche che varranno per mantenerli al corrente dei progressi della scienza delle costruzioni, potranno apprendere con qual ordine, con quali metodi e con quale criterio si deve passare dalla teoria alla pratica nell'esecuzione di progetti per opere di pubblica e di privata utilità.

La vastità degli argomenti che hanno attinenza colla scienza

delle costruzioni, i rapidi progressi che ad ogni istante si fanno in ogni ramo dell'arte edificatoria e la pochezza delle nostre forze, ci fanno temere di non poter riuscire come sarebbe a desiderarsi nel disimpegno dell'arduo assunto, a cui ci accingiamo di buona volontà e senza trepidanza, persuasi di poter in qualche modo giovare agli studiosi e di avere l'indulgenza del benigno lettore, il quale vorrà badare alla bontà dello scopo propostoci, anzichè all'insufficienza dei mezzi che saremo per spiegare nell'arrivarvi.

G. Curioni.

LA RESISTENZA DEI MATERIALI

ESPOSTA NEI SUOI PIÙ GENERALI RAPPORTI

COI LAVORI DELLA MODERNA INGEGNERIA

CAPITOLO I.

Nozioni preliminari.

1. **Cenni storici intorno alle teorie sulla resistenza dei materiali.** — La *Resistenza dei materiali*, scienza di numerose ed importanti applicazioni pratiche, ha per oggetto di determinare le azioni interne sviluppate nei diversi elementi di una costruzione qualunque da forze estrinseche ad essa applicate, di verificare se le dette azioni sono inferiori a quelle che è permesso cimentare senza mettere a repentaglio la sicurezza dell'opera, ed anche di trovare quelle forme e quelle dimensioni che, colla massima economia possibile, danno sufficienti garanzie di stabilità tanto nel complesso quanto nelle varie parti di un edifizio qualsiasi.

Risalendo alle epoche dell'antichità più remota, in cui si fecero i primi tentativi di costruzioni, si trovano alcune tracce sullo studio empirico delle proprietà meccaniche della materia; i primi costruttori non mancarono di rendersi conto dell'influenza delle dimensioni e delle forme dei materiali che impiegavano nei loro lavori; e l'architettura antica, guidata da un istinto meccanico generalmente assai giusto, ha adottato certe regole, alcune delle quali ancora sono seguite dalla moderna ingegneria.

Galileo Galilei, per essere stato il primo ad applicare la geometria

ed il calcolo alla risoluzione di alcuni problemi riferentisi al modo di resistere dei solidi con asse rettilineo, e principalmente delle travi orizzontalmente disposte e caricate di pesi, deve essere proclamato il fondatore delle teorie sulla resistenza dei materiali, e pare che, in una visita all'arsenale di Venezia, abbia egli fatto le prime osservazioni che lo portarono a questo studio. Fin dall'anno 1609, il profondo indagatore dei misteri della natura scriveva ad un suo amico di avere trovato tutte le conclusioni e relative dimostrazioni sulle forze e resistenze dei legni di diverse lunghezze, grossezze e figure; quanto più sono deboli nel mezzo che agli estremi; quanto maggior peso possono sopportare se questo è distribuito su tutta la loro lunghezza, anzichè essere applicato in un sol luogo; quale figura dovrebbero presentare onde essere da per tutto egualmente gagliardi; e costituire tutti questi ritrovati una scienza molto necessaria nel fabbricare macchine ed ogni sorta di edifizio, nè esservi alcuno che ne abbia trattato.

La teoria di Galileo si trova nel suo dialogo secondo, giornata terza, anno 1638 (1); e, volendo il grande autore considerare la resistenza alla rottura dei solidi inflessi, ossia dei solidi sollecitati da forze perpendicolari alla loro lunghezza, incomincia dal caso particolare di un solido parallelepipedo o cilindrico (*Fig.* 1) orizzontalmente incastrato per un solo estremo e caricato di un peso all'altro estremo. Essendo evidentemente la sezione d'incastro A B quella in cui vi ha maggior pericolo di rottura, ammette che siano eguali le resistenze al distacco nei diversi punti di questa sezione, e che quindi la resistenza risultante Q passi pel centro E della sezione stessa; mette questa risultante in equilibrio col peso P, facendo agire queste due forze alle due estremità di una leva angolare C A E, in cui $\overline{AC}$ è il braccio orizzontale della potenza P, ed $\overline{AE}$ il braccio verticale della resistenza Q; e così deduce l'equazione d'equilibrio fra la forza estrinseca P e l'azione molecolare Q. Questo metodo seguìto da Galileo nella deduzione dell'indicata equazione d'equilibrio è fondato sulle seguenti due ipotesi: che la sezione d'incastro A B tenda rotare intorno alla orizzontale tutta proiettata nel suo punto più basso A; e che la resistenza alla rottura, riferita all'unità di superficie, sia costante in qualsiasi punto della stessa sezione.

Dal semplicissimo caso del solido parallelepipedo o cilindrico orizzontalmente incastrato per un solo estremo e caricato d'un peso al-

(1) *Opere di Galileo Galilei*, edite nel 1744, t. III, p. 63, articolo 556.

l'altro estremo, Galileo viene a quelli più importanti delle travi orizzontalmente collocate su due appoggi e caricate di pesi nel loro mezzo od anche di pesi uniformemente distribuiti sulla loro lunghezza; deduce quindi parecchie conseguenze sul modo più conveniente di disporre le travi e sulla maggior resistenza che, a parità di volume, presentano i cilindri vuoti paragonati ai cilindri pieni; finalmente stabilisce i primi fondamenti della teoria dei solidi di egual resistenza.

Mentre i principii posti da Galileo sulla resistenza dei corpi venivano commentati ed anche applicati dal P. Fambri, da Vincenzo Viviani e dal P. Grandi, il cui lavoro (1), assai commendevole sotto il punto di vista geometrico, è stato inscritto nell'edizione del 1744 delle opere complete di Galileo, Roberto Hooke, in seguito ad alcune indagini sul modo di resistere delle molle di acciaio, fin dal 1678 enunciò la legge della proporzionalità degli allungamenti e degli accorciamenti agli sforzi che li producono ed alle azioni molecolari che essi sviluppano, d'onde l'aforismo *ut tensio sic vis;* e fece persino rimarcare che le sbarre elastiche inflesse oppongono una resistenza all'estensione nelle parti in cui diventano convesse ed una resistenza alla compressione nelle altre in cui diventano concave.

Analoga alla teoria di Galileo è quella di Leibnitz (2), nella quale si ammette pure che, pel solido prismatico orizzontalmente incastrato in un estremo e caricato d'un peso all'altro estremo, l'asse di equilibrio o di rotazione sia nel punto più basso A della sezione d'incastro A B. In quanto alla resistenza alla rottura, riferita all'unità di superficie, in ciascun punto dell'indicata sezione, si suppone che essa sia proporzionale alla distanza di questo punto dal definito asse di rotazione; e quindi, secondo Leibnitz, pel caso del solido parallelepipedo con due facce laterali verticali, orizzontalmente incastrato in un estremo e caricato d'un peso all'altro estremo, il braccio verticale $\overline{AE}$ della leva angolare C A E (*Fig.* 2), alle cui estremità sono applicate la potenza e la resistenza, è i due terzi dell'altezza della sezione A B.

Mariotte, poco tempo prima che Leibnitz facesse conoscere la sua teoria, si accinse ad alcune esperienze sopra la resistenza di pezzi d legno e di vetro. Queste esperienze lo portarono a conchiudere: che le parti dei corpi anche i più duri si distendono più o meno sotto l'azione dei differenti pesi, e presso a poco proporzionalmente ai pesi

(1) *Geometrica demonstratio Vivianorum problematum*, anno 1699.

(2) *Demonstrationes novæ de resistentia solidorum*, Acta eruditorum Lipsiæ, 1684, p. 319.

stessi; che spariscono gli allungamenti al cessare dell'azione dei pesi da cui vennero prodotti; che nei corpi inflessi, per esempio in un bastone che viene piegato, vi sono parti compresse verso la concavità e parte allungate verso la convessità; che assai probabilmente le resistenze sviluppate dalle parti compresse sono eguali a quelle sviluppate dalle parti allungate; e finalmente che le parti in cui ha luogo estensione si rompono, perchè il loro spostamento eccede il limite superiore degli spostamenti che esse possono sopportare. In seguito a queste esperienze, considerando sempre il caso semplicissimo del solido prismatico orizzontalmente incastrato per un estremo, caricato d'un peso all'altro estremo e con sezione retta simmetrica rispetto alla orizzontale passante pel suo centro di superficie, Mariotte dice di collocare definitivamente in E (*Fig.* 3), ossia a metà altezza della sezione d'incastro A B, la orizzontale costituente l'asse di rotazione, detta anche *linea delle fibre invariabili* od *asse neutro*. Ritenendo poi che le tensioni e le pressioni, riferite all'unità di superficie, provocate nella sezione A B rispettivamente al di sopra ed al di sotto della orizzontale rappresentata nel punto E, variassero per ciascun punto proporzionalmente alla sua distanza dalla stessa orizzontale, Mariotte si propose di stabilire l'equazione dei momenti fra la forza P e le due resistenze orizzontali q, le quali, pel caso della sezione rettangolare con due lati orizzontali e due verticali, passano pei punti G ed F, determinati col prendere $\overline{EG} = \overline{EF} = \frac{2}{3}\overline{EB} = \frac{2}{3}\overline{EA}$; ma, passando dai risultati d'esperienza e da quanto si era proposto di fare alle formole, in una maniera singolare si lasciò indurre nell'errore di duplicare nel medesimo tempo un braccio ed una forza per duplicarne il prodotto (1), e venne a trovare gli stessi risultati, cui in seguito si arrivò colla teoria di Leibnitz, di maniera che da molti autori si ritiene siccome riducentisi ad una sola le due teorie di questi insigni scienziati.

Varignon, partendo dall'idea che la proporzionalità degli allungamenti alle forze traenti, stata ammessa da Hooke e da Mariotte, avrebbe potuto non essere favorevolmente accolta da tutti, presentò nell'anno 1702 una memoria all'Accademia delle scienze di Parigi (2), ed in questo lavoro, assumendo, pei solidi inflessi, l'asse di equilibrio come Galileo e Leibnitz, e quindi non tenendo conto delle compressioni,

(1) *Traité du Mouvement des eaux*, 1684, 5ª parte, secondo discorso, 13° alinea.

(2) *Mémoire sur la résistance des solides pour tout ce qu'on peut faire d'hypothèses touchant la force ou la ténacité des fibres des corps à rompre.*

diede una formola generale in cui la resistenza sviluppata dalle loro fibre in una sezione retta qualunque è una funzione indeterminata degli allungamenti delle fibre stesse.

Vent'anni dopo Mariotte venne Giacomo Bernoulli, il quale, lasciandosi cogliere nello stesso essere del semplice al doppio (1), affermò di più che la posizione da attribuirsi all'asse neutro era affatto indifferente.

Parent, dopo aver pubblicato diverse memorie relative alla teoria geometrica della resistenza dei solidi (2), corresse nell'anno 1713 (3) gli errori di Mariotte e di Bernoulli; pel caso del solido prismatico orizzontalmente incastrato in un estremo e caricato d'un peso P all'altro estremo, dimostrò che la somma delle resistenze provocate nelle fibre compresse doveva essere eguale alla somma delle resistenze provocate nelle fibre allungate, e quindi scoprì la vera proprietà atta a determinare l'asse neutro; eguagliò la somma dei momenti di tutte queste resistenze intorno a quest'asse al momento del peso P; e mise in evidenza la falsità dei risultamenti a cui arrivavasi colle teorie di Mariotte e di Bernoulli.

Bilfinger, pochi anni dopo (4), fece la stessa osservazione critica, e, attribuendo a Mariotte l'idea prima di prendere in considerazione le compressioni, necessarie per l'equilibrio quanto le estensioni, rettificò come Parent la conclusione che mal dedusse il gran fisico francese.

Coulomb, senza probabilmente conoscere il lavoro di Parent del 1713, scrisse nel 1773 una memoria (5), nella quale trovansi poste le vere basi della teoria della resistenza dei materiali e della stabilità delle costruzioni. Dal lemma di statica, allora poco conosciuto quantunque evidente, sulla nullità delle somme algebriche delle componenti secondo tre assi coordinati ortogonali in un sistema qualunque di forze, seppe dedurre che nei solidi rettilinei orizzontalmente disposti e sollecitati verticalmente vi doveva essere, attraverso qualsiasi sezione trasversale, eguaglianza fra la somma delle tensioni orizzontali delle fibre

(1) *Véritable hypothèse de la résistance des solides*, Accademia delle scienze di Parigi, 1705; oppure *Jacobi Bernoulli opera omnia*, t. II, p. 976.

(2) *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*, anni 1704, 1707, 1708 e 1710.

(3) *De la véritable mécanique des résistances relatives des solides, et réflexions sur le système de M. Bernoulli de Bâle*, 1713.

(4) *De solidorum resistentia specimen*, Accademia di Saint-Pétersbourg, 1729, t. IV, p. 178.

(5) *Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture*, Savants étrangers, 1773, t. VII.

allungate e la somma delle pressioni pure orizzontali delle fibre compresse, e coll'equazione risultante giunse a determinare per una sezione qualunque l'asse neutro ossia la linea per cui dovevano passare le fibre le quali non variavano di lunghezza. Eguagliando poi il momento del peso, applicato all'estremità di un solido orizzontalmente incastrato all'altra estremità, alla somma dei momenti delle tensioni e delle pressioni delle fibre, presi questi momenti rispetto all'asse neutro della sezione d'incastro, giunse all'equazione d'equilibrio fra il detto peso e le resistenze sviluppate nell'indicata sezione. Coulomb, non ammettendo, come fece Galileo, l'ipotesi della rottura simultanea di tutte le fibre senza preventiva estensione, fece osservare che, se in un solido inflesso non trovavasi verificata fino all'istante della rottura la legge della proporzionalità delle tensioni e delle pressioni delle fibre ai loro allungamenti ed accorciamenti, l'asse finale di rotazione poteva passare fuori del mezzo anche per le sezioni simmetriche rispetto alla orizzontale passante pel loro centro di superficie; ma che non era accettabile l'ipotesi dell'asse di rotazione in basso, giacchè, come già aveva veduto anche Parent, una linea senza spessezza era assolutamente incapace di sopportare una pressione finita.

Nella citata memoria di Coulomb del 1773 si fece anche cenno della resistenza trasversale, ed il grande autore osservò che la valutazione da lui data della resistenza di un solido orizzontale incastrato per un estremità e sollecitato all'altra da un peso non era vera che quando le componenti verticali delle resistenze sviluppate nei diversi punti di ciascuna sezione, la cui somma è necessariamente eguale al detto peso, non influiscono che assai poco sulla tendenza colla disgiunzione; condizione che è soddisfatta, dice Coulomb, allorquando il braccio di leva del peso è molto maggiore della spessezza del solido.

La resistenza alla torsione per la prima volta venne studiata da Coulomb (1), ma solamente sui corpi cilindrici a base circolare.

L'interessante memoria di Coulomb non valse per qualche tempo a far abbandonare le antiche teorie, e Girard, nel 1798 (2), credendo sempre come Bernoulli che la posizione da attribuirsi all'asse delle fibre invariabili fosse indifferente, ammise ancora poterglisi assegnare la posizione statagli fissata da Galileo e da Leibnitz.

Il lavoro di Coulomb fu studiato e compreso solamente nel nostro

(1) *Recherches théoriques et expérimentales sur la force de torsion et l'élasticité des fils de métal*, Accademia delle scienze di Parigi, 1784.

(2) *Traité analytique de la résistance des solides, et des solides d'égale résistance.*

secolo ed ancora a poco a poco, giacchè Duleau, in una sua memoria del 1813 e stata pubblicata nel 1820 (1), credette di poter determinare l'asse neutro eguagliando la somma dei momenti delle tensioni alla somma dei momenti delle pressioni, adottando così una regola erronea che assegna a questa retta una posizione ben differente dalla vera nelle sezioni che essa non divide in due parti simmetriche.

Molti altri eminenti autori, e fra questi Barlow e Tredgold, caddero in errore sulla determinazione dell'asse neutro nelle sezioni non simmetriche per non comprendere il semplice e razionale principio di Parent e di Coulomb; e pare che tale principio sia anche sfuggito all'illustre fisico Young, il quale, fin dal 1807, diede alcune formole esatte sulla resistenza dei solidi, introducendo pel primo un coefficiente di elasticità, ma non occupandosi che di solidi caricati di pesi e con sezioni divisibili in due parti simmetriche da una retta orizzontale.

Lo stesso Young si occupò, non solo della resistenza all'estensione, alla compressione ed all'inflessione, ma anche della resistenza allo scorrimento trasversale, detta anche *resistenza di taglio* e della resistenza alla torsione.

Navier adottò sul principio la teoria di Mariotte ed ammise con Bernoulli essere affatto indifferente la posizione dell'asse neutro; nell'anno 1819 insegnò alla scuola di ponti e strade di Parigi a determinare l'asse neutro col citato metodo erroneo di Duleau; e fu nel corso di lezioni da lui fatte nell'anno 1824 che corresse ogni errore determinando l'asse neutro per le sezioni di qualsiasi figura coll'eguagliare fra di loro, non più le due somme dei momenti, ma le somme delle resistenze stesse delle fibre allungate ed accorciate, ed insegnando come, pei solidi rettilinei sollecitati da forze perpendicolari alla loro lunghezza, un tale asse passi pel centro di gravità della sezione a cui si riferisce, allorquando sono essi omogenei e finchè si trovano sotto l'azione di forze estrinseche non capaci di alterare la loro elasticità, ossia finchè tali forze sono proporzionali agli effetti che producono.

Navier pubblicò nell'anno 1826 l'interessante sua opera intitolata *Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines;* in essa, in modo netto e completo, distingue la resistenza alla rottura per flessione e per torsione dalla resistenza alla flessione ed alla torsione senza rottura; nè gli sfuggì affatto la resistenza allo scorrimento trasversale, giacchè considera una tale resistenza dove

(1) *Essai théorique et expérimental sur la résistance du fer forgé.*

parla della rottura di un solido prismatico di piccola lunghezza, orizzontalmente incastrato per un estremo e caricato d'un peso che suppone applicato in un sito vicinissimo alla sezione d'incastro.

A Navier è dovuto il merito d'aver osservato che l'equazione differenziale della curva elastica piana, già prima di lui stata studiata dagli insigni matematici Giacomo Bernoulli (1), Eulero (2) e Lagrange (3), facilmente può essere integrata sotto forma finita nei casi più frequenti e più utili della pratica, in cui trattasi di inflessioni piccole e tali da potersi prendere pei bracci definitivi delle forze inflettenti quelli che loro rispettivamente spettano nell'ipotesi di nessuna deformazione nei solidi sui quali agiscono. Con quest'osservazione, Navier si mise in grado di trattare e di risolvere parecchi problemi di grande importanza sulla flessione dei solidi rettilinei, dei solidi leggiermente incurvati e dei solidi aventi per asse un arco circolare, i quali problemi notevolmente contribuirono al progresso della scienza delle costruzioni. Nella citata opera dell'illustre professore trovansi risoluti alcuni degli importanti problemi, in cui il calcolo delle resistenze deve essere preceduto da quello delle flessioni o più generalmente dagli spostamenti subìti dai punti dei solidi considerati; e, ad un tale ordine di problemi appartengono: quelli in cui le flessioni fanno sensibilmente crescere certe componenti delle forze estrinseche e sopra tutto i loro bracci; quelli assai numerosi nei quali sono incognite alcune forze sollecitanti, giacchè esse consistono in reazioni di appoggi o d'incastramenti ed in mutue azioni di diversi pezzi assieme uniti, le quali forze non sono date *a priori*, nè si possono determinare coi soli teoremi della statica dei corpi rigidi. Anche il problema della flessione piana di un solido avente per asse una curva piana qualunque venne considerato da Navier, il quale, per deformazioni piccolissime, seppe ridurne la soluzione alle quadrature.

Quanti precedettero Navier nello studio della resistenza dei materiali per soddisfare alle esigenze delle costruzioni, e Navier stesso, si fermarono, principalmente per quanto concerne alla flessione, ai casi di solidi sollecitati da forze contenute in uno stesso piano passante pei loro assi e tagliante le diverse sezioni secondo una retta di sim-

(1) *Véritable hypothèse de la résistance des solides*, Accademia delle scienze di Parigi, anno 1705.

(2) *De curvis elasticis* in seguito all'opera *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, anno 1744.

(3) *Sur la force des ressorts pliés*, Accademia di Berlino, 1769.

metria contenente il loro centro di superficie e quindi secondo un loro asse principale centrale d'inerzia, e conchiusero: che la flessione avveniva nel piano stesso delle forze, detto *piano di sollecitazione;* che l'asse neutro era perpendicolare al piano di sollecitazione, e quindi orizzontale quando questo era verticale. Persy, professore alla scuola dell'artiglieria e del genio di Metz, osservò, nel 1834 (1), che l'unica equazione dei momenti attorno la linea delle fibre invariabili, supposta perpendicolare al piano di sollecitazione, non bastava per assicurare l'equilibrio fra le forze estrinseche e le azioni molecolari attraverso una sezione qualunque, salvo nel caso in cui la detta linea era uno degli assi principali centrali d'inerzia della sezione considerata. Il signor Barré de Saint-Venant dimostrò nell'anno 1843 (2) che era necessario instituire due equazioni dei momenti delle forze; che, per amore di semplicità, conveniva prendere questi momenti attorno i due assi principali centrali d'inerzia della sezione considerata; che, quando nè l'uno nè l'altro degli indicati momenti era nullo, la flessione era *deviata*, ossia aveva luogo in un piano diverso da quello di sollecitazione pei solidi rettilinei aventi gli assi principali centrali d'inerzia delle loro sezioni rette in due piani fra loro perpendicolari; che pei solidi aventi per asse iniziale una curva piana, come pure per quelli rettilinei non aventi tutti gli assi principali centrali delle loro sezioni in due medesimi piani ortogonali passanti pei loro assi, aveva contemporaneamente luogo flessione e torsione, disponendosi il loro asse, primitivamente piano, secondo una curva a doppia curvatura; che riusciva assai facile porre le equazioni di resistenza; e finalmente che queste equazioni conducevano a risultati ben differenti da quelli che si ottenevano quando non si teneva conto dell'indicata deviazione.

Dopo il citato lavoro stato pubblicato da Navier nell'anno 1826, le dottrine sulla resistenza dei materiali non hanno mai cessato di fare notevoli e rapidi progressi; esse furono coltivate e profondamente studiate da molti distinti fisici ed ingegneri; ed in questi ultimi tempi grandemente vennero perfezionate con due scopi ben distinti. Da una parte, in seguito ai profondi studii di Navier (3), di Couchy (4), di Pois-

(1) *Cours lithographié à Metz*, n. 42 e 43, p. 24.

(2) *Comptes rendus*, 30 ottobre e 6 novembre 1843, t. XVII, p. 946, 949 e 1024.

(3) *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Mémoires de l'Institut, t. VII.

(4) *Académie de Paris*, anni 1822, 1827. — *Exercices de mathématiques*, anni 1827, 1828, 1829. — *Bulletin de la Société philomathique de Paris*, anno 1844.

son (1), di Lamé (2), di Clapeyron (3), di Duhamel (4), di Barré de Saint-Venant (5), di Green, di Gauss, di Thomson e di molti altri insigni matematici, vennero portate a tal punto da formare un ramo particolare della fisica matematica col nome di *Teoria generale dell'elasticità;* da un'altra parte, gli ordinarii metodi della teoria sulla resistenza dei materiali, accresciuti e perfezionati coi lavori di Navier, di Poncelet, di Clapeyron (6), di Bertot (7), dei signori Bresse (8), Barré de Saint-Venant (9) e Menabrea (10), e di molti altri valenti ingegneri e professori, costituiscono ormai una scienza cui si può dare il nome di *Resistenza dei materiali pei bisogni dell'ingegneria.* Questa scienza, il cui progresso talvolta tenne dietro e talvolta venne provocato dal grande sviluppo dell'arte costruttoria, ha permesso in questi ultimi tempi di creare tipi affatto nuovi di meravigliose ed ardite costruzioni, e giammai l'impiego del calcolo nell'arte dell'ingegnere fu tanto fecondo di utili ritrovati e di importanti applicazioni.

2. **Assunto del presente lavoro.** — La teoria generale dell'elasticità costituisce una scienza, alla quale finora possono mantenersi estranei gli ingegneri pratici senza alcun pregiudizio al lodevole esercizio della loro carriera. I moderni autori, che hanno preso a trattare argomenti riferentisi all'equilibrio ed alla stabilità delle costruzioni, non che i più valenti ingegneri del secolo, continuano ad accettare per buona la teoria della resistenza dei materiali pei bisogni dell'ingegneria, quale di mano in mano venne accresciuta e perfezio-

(1) *Académie de Paris*, 1827, 1829, 1839. — *Annales de chimie et de Physique*, anni 1827, 1828, 1829.

(2) *Académie de Paris*, anno 1828. — *Savants étrangers*, t. IV, n. 40. — *Théorie mathématique de l'élasticité*, anno 1852.

(3) *Académie de Paris*, anno 1828. — *Savants étrangers*, t. IV, n. 40.

(4) *Journal de l'École polytecnique*, anni 1828, 1835. — *Savants étrangers*, t. V.

(5) Appendice alla prima parte della terza edizione dell'opera di Navier, intitolata: *Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, anno 1864.

(6) Memorie presentate all'Accademia delle Scienze di Parigi.

(7) *Annales des ponts et chaussées*, anno 1860.

(8) *Cours de mécanique appliquée, professé à l'école impériale des ponts et chaussées*; prima parte anno 1859, terza parte anno 1865.

(9) Note ed appendice alla prima parte della terza edizione dell'opera di Navier, intitolata: *Résumé des leçons données à l'école des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines*, anno 1864.

(10) Memorie diverse state presentate alla R. Accademia delle Scienze di Torino.

nata da Navier fino a noi, nell'intento di soddisfare ai bisogni ognor crescenti della moderna arte edificatoria. Questa teoria però, perchè sempre stata esposta su casi particolari col considerare separatamente le resistenze elementari all'estensione, alla compressione, alla flessione, allo scorrimento ed alla torsione, si riconosce ormai mancante della generalità valevole a porla in armonìa colle molteplici esigenze dei lavori che vengono affidati agli ingegneri costruttori ed agli ingegneri meccanici; ed una siffatta mancanza di generalità incomincia ad ingenerare lacune e soluzioni imperfette di alcuni importanti problemi pratici.

Assunto di questo nostro lavoro è di esporre la teoria della resistenza dei materiali nei suoi più generali rapporti coi lavori della moderna ingegnerìa. Si incomincierà dallo studiare il caso generale dell'equilibrio e della stabilità di un solido elastico, avente per asse una curva qualunque a doppia curvatura A C B (*Fig.* 4), generato da una figura piana D E F di forma e grandezza costanti o variabili moventesi normalmente e col suo centro di superficie C sulla detta curva, e sollecitato da forze comunque operanti. In seguito si farà vedere come, da questo caso generale, colla massima facilità si possa passare ai numerosi casi particolari che più di frequente si presentano ai meccanici ed ai costruttori. Nell'intento poi di arrivare a formole di pratica applicazione, si supporrà che i solidi considerati siano almeno omogenei nei diversi punti di una stessa sezione retta. Questo nuovo metodo di esporre la teoria della resistenza dei materiali pei bisogni dell'ingegnerìa, oltre di abbracciare tutti i casi che nella pratica si possono presentare, permette di dedurre alcune semplici ed utili conseguenze sulla resistenza dei solidi in cui trovansi contemporaneamente provocate le resistenze allo scorrimento trasversale ed alla torsione, e pone in grado di risolvere in modo facile e completo le diverse quistioni relative alle resistenze cimentate nei piani delle loro sezioni rette.

3. **Resistenze sviluppate in una sezione retta qualsiasi di un solido elastico sottoposto all'azione di forze estrinseche comunque operanti.** — Si consideri un solido elastico avente per asse una curva qualunque A C B (*Fig.* 5), e la generazione geometrica del suo volume sia quale venne definita nel precedente numero. Questo solido si trovi sotto l'azione di forze estrinseche comunque operanti, ma nei limiti di quelle a cui si possono assoggettare i corpi nelle costruzioni stabili e quindi incapaci di snervarlo, e vogliasi innanzi tutto trovare di quale natura sono le resistenze o azioni molecolari che da tali forze vengono provocate in una sezione retta qualunque D E F.

Pel centro di superficie C dell'indicata sezione retta D E F e prima dell'applicazione delle forze estrinseche, s'immaginino tracciati tre assi coordinati ortogonali Cx, Cy e Cz, i due primi contenuti nel piano della stessa sezione, il terzo perpendicolare al detto piano e quindi tangente in C alla curva A C B. Sotto l'azione delle forze estrinseche, i diversi elementi della detta sezione D E F verranno a subire spostamenti assai piccoli, giacchè sono sempre tali le deformazioni che possono sopportare i corpi posti in opera in costruzioni stabili; ed il leggiero spostamento, subìto da un elemento qualunque, si potrà ottenere mediante tre translazioni parallele ai tre assi coordinati e mediante tre rotazioni intorno agli assi stessi, quando suppongasi che questi non seguano gli spostamenti presi dai diversi elementi della sezione retta D E F, ma sibbene che conservino la posizione primitivamente loro assegnata.

Pei due piccoli movimenti di translazione secondo gli assi Cx e Cy e pel piccolo movimento di rotazione intorno all'asse Cz, avviene nell'elemento e uno spostamento nel piano della sezione D E F; a questo spostamento corrisponde una resistenza contenuta nello stesso piano; un tal fatto ha luogo per tutti gli elementi dell'accennata sezione; e quindi nella sezione retta qualunque D E F viene provocata un'azione molecolare o resistenza contenuta nel piano della sezione stessa.

Per il piccolo movimento di translazione nel senso parallelo dell'asse Cz e per i due piccoli movimenti di rotazione intorno agli assi Cx e Cy, l'elemento e subisce uno spostamento perpendicolare al piano della sezione D E F; a questo spostamento corrisponde una resistenza perpendicolare allo stesso piano; un tal fatto si verifica per tutti gli elementi dell'indicata sezione; e quindi, nella sezione retta qualunque D E F, viene provocata un'azione molecolare o resistenza perpendicolare al piano della sezione stessa.

Riepilogando si può dire che, nelle diverse sezioni di un solido elastico sottoposto all'azione di forze estrinseche qualunque, vengono provocate azioni molecolari o resistenze di due differenti specie: le une sono *resistenze trasversali* operanti nei piani delle sezioni che si considerano; le altre sono *resistenze longitudinali* agenti normalmente ai detti piani.

4. Ipotesi sulle quali fondasi la valutazione delle resistenze trasversali e longitudinali provocate in una sezione retta qualunque di un solido elastico. — Per valutare le resistenze trasversali e longitudinali che vengono provocate in un solido elastico da forze estrinseche comunque su esso operanti, si considerino due sue

sezioni rette vicinissime (*Fig.* 6) D E F e D' E' F'. La parte di solido compresa fra queste sezioni s'immagini scomposta in elementi di fibre, ossia in piccoli prismi aventi i loro assi paralleli alla parte $\overline{CC'}$ dell'asse del solido, che unisce i centri di superficie delle dette vicinissime sezioni e terminati alle sezioni stesse da facce elementari corrispondenti di secondo ordine, come *e* ed *e'*. Finalmente, in conformità di quanto sembra confermato da esperienze fatte nei limiti di sforzi a cui praticamente si assoggettano i corpi nelle costruzioni, si ammetta:

1° Che la sezione retta qualsiasi D E F, presa nel solido prima dell'applicazione delle forze estrinseche, si sposti in modo che, dopo la deformazione, i diversi suoi punti si trovino in uno stesso piano ;

2° Che la resistenza trasversale provocata nell'elemento superficiale qualunque *e* dell'indicata sezione, sia proporzionale all'area dello stesso elemento non che allo spostamento trasversale da esso subìto per rapporto all'elemento corrispondente *e'* della sezione retta D' E' F', ed inversamente proporzionale alla distanza $\overline{CC'}$ fra i centri di superficie delle due sezioni vicinissime considerate ;

3° Che la resistenza longitudinale, provocata nell'elemento superficiale qualunque *e*, sia proporzionale all'area dello stesso elemento non che allo spostamento longitudinale da esso subìto relativamente all'elemento corrispondente *e'*, ed ancora inversamente proporzionale alla distanza $\overline{CC'}$ fra i centri di superficie delle due suddette vicinissime sezioni.

CAPITOLO II.

Equilibrio e stabilità di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti.

5. Equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le resistenze sviluppate in una sezione retta qualsiasi omogenea di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti. — Sia D E F (*Fig.* 7) una sezione retta qualsiasi omogenea di un solido elastico avente per asse una curva qualunque A C B; C*x*, C*y* e C*z* siano tre assi coordinati ortogonali colla loro origine nel centro di superficie C dell'indicata sezione retta, assunti in modo da essere, i due primi nel piano della stessa sezione e diretti secondo i suoi assi principali centrali d'inerzia, il terzo per conseguenza normale al me-

desimo piano e tangente nel punto C all'asse A C B; e si considerino tutte le forze estrinseche applicate al corpo poste da quella parte della sezione D E F verso la quale trovasi l'asse positivo delle ordinate z.

Essendo

S una qualunque delle indicate forze,

P, Q ed R le sue tre componenti rispettivamente parallele agli assi coordinati Cx, Cy e Cz,

p, q ed r le tre coordinate $\overline{CN}$, $\overline{NM}$ ed $\overline{ML}$ del suo punto d'applicazione L,

X, Y e Z le tre somme algebriche delle componenti, rispettivamente parallele agli assi Cx, Cy e Cz di tutte le forze S,

M_x, M_y ed M_z le tre somme algebriche dei momenti di rotazione di tutte le forze S, presi rispettivamente questi momenti intorno agli assi Cx, Cy e Cz,

Σ una somma estesa a tutte le forze applicate al solido da quella parte della sezione retta D E F verso la quale trovasi l'asse positivo delle ordinate z,

come risulta dalla statica sulla riduzione di un sistema qualunque di forze (*a*), si ha: che i valori delle forze X, Y e Z sono dati da

$$\left.\begin{aligned} X &= \Sigma P \\ Y &= \Sigma Q \\ Z &= \Sigma R \end{aligned}\right\} \quad (1);$$

(*a*) Essendo S (*Fig.* 8) una delle forze che fanno parte di un dato sistema, ed essendo L il suo punto d'applicazione, se all'origine C delle coordinate s'immaginano applicate due forze $+S$ e $-S$, direttamente opposte fra di loro, eguali e parallele alla S, non resta alterato lo stato d'equilibrio del sistema; la forza S applicata in L e la forza $-S$ applicata in C formano una coppia K contenuta in un piano passante per l'origine C; e, nello stesso modo che la forza S applicata in C si può scomporre in tre componenti secondo gli assi coordinati Cx, Cy e Cz, anche la coppia K si può scomporre in tre coppie tendenti a produrre rotazioni intorno agli stessi assi e quindi contenute, una nel piano zCy, l'altra nel piano xCz e la terza nel piano yCx. Le componenti della forza S applicata in C, secondo i tre assi Cx, Cy e Cz, sono rispettivamente P, Q ed R, ossia sono le stesse componenti che corrispondono alla forza S applicata in L; ed i momenti delle tre coppie intorno agli assi Cx, Cy e Cz si ottengono considerando i momenti della forza S applicata in L e della forza $-S$ applicata in C per rapporto agli stessi assi. Ma la forza $-S$, passando per l'incontro C degli stessi assi, non ha rispetto ad essi alcun momento; e quindi i domandati momenti si ottengono considerando la forza S applicata in L o le sue componenti P, Q ed R. Ora, assumendo positive le rotazioni da z verso y intorno all'asse Cx, le rotazioni da x verso z intorno l'asse Cy e le rotazioni da y verso x

che i valori dei momenti M_x, M_y ed M_z si hanno dalle formole

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \Sigma (Q r - R q) \\ M_y &= \Sigma (R p - P r) \\ M_z &= \Sigma (P q - Q p) \end{aligned}\right\} \quad (2);$$

e che, essendo i valori di X, Y, Z, M_x, M_y ed M_z quelli corrispondenti a tutte le forze poste al di sopra della sezione DEF, le tre forze X, Y e Z si devono considerare come applicate al centro di superficie C della sezione DEF, secondo le direzioni Cx, Cy e Cz, ed i tre momenti M_x, M_y ed M_z si devono ritenere come quelli di tre coppie rispettivamente poste nei piani zCy, xCz ed yCx. Te-

intorno l'asse Cz, si ha per le forze P, Q ed R applicate in L: che le sole Q ed R tendono produrre rotazione attorno all'asse Cx e che il complessivo loro momento vale

$$Qr - Rq;$$

che le sole P ed R tendono far rotare intorno all'asse Cy, e che complessivamente hanno intorno a quest'asse il momento

$$Rp - Pr;$$

e finalmente che le sole P e Q hanno momento intorno all'asse Cz e che il complessivo loro momento è

$$Pq - Qp.$$

I ragionamenti fatti sulla forza S si ripetano per tutte le forze del sistema. Le loro componenti applicate all'origine C secondo gli assi Cx, Cy e Cz si possono addizionare algebricamente e comporre in tre forze X, Y e Z; i loro momenti di rotazione si possono pure addizionare algebricamente e comporre in tre momenti M_x, M_y ed M_z; e quindi un sistema qualunque di forze si può ridurre a tre forze X, Y e Z applicate all'origine C di un sistema di assi coordinati, dirette secondo gli assi stessi e date da

$$X = \Sigma P$$
$$Y = \Sigma Q$$
$$Z = \Sigma R,$$

ed a tre coppie di momenti M_x, M_y ed M_z. rispettivamente contenute nei piani zCy, xCz ed yCx, tendenti quindi a produrre rotazioni intorno agli assi Cx, Cy e Cz, e date da

$$M_x = \Sigma (Q r - R q)$$
$$M_y = \Sigma (R p - P r)$$
$$M_z = \Sigma (P q - Q p).$$

Quest'ultime sei equazioni sono appunto le (1) e (2) assunte in questo numero per determinare le tre forze X, Y e Z, ed i tre momenti M_x, M_y ed M_z.

nendo poi conto dei segni delle coordinate p, q ed r, non che di quelli delle forze P, Q ed R, le quali si devono considerare come positive o come negative, secondo che operano nel senso positivo o nel senso negativo degli assi coordinati, si ha: che le forze X, Y e Z sono dirette secondo gli assi coordinati positivi o secondo gli assi coordinati negativi, secondo che risultano precedute dal segno + o dal segno —; che i momenti di rotazione M_x, M_y ed M_z tendono rispettivamente a far rotare la parte di corpo posta sopra la sezione DEF, da z verso y intorno l'asse Cx, da x verso z intorno l'asse Cy e da y verso x intorno l'asse Cz, o viceversa, secondo che risultano positivi o negativi.

Viene ora la quistione di determinare le componenti parallele ai tre assi Cx, Cy e Cz, non che i momenti per rapporto agli assi medesimi delle azioni molecolari o resistenze che dalle forze estrinsiche già considerate vengono provocate nella sezione retta DEF. Perciò supponsi che l'indicata sezione retta trovisi rappresentata nella figura 9, con sopra tracciati i due assi coordinati ortogonali Cx e Cy, e col terzo asse, perpendicolare al suo piano, proiettato nel suo centro di superficie C; la retta UU' sia l'intersezione del piano, in cui trovasi la sezione DEF prima delle azioni delle forze estrinseche, col piano, in cui la stessa sezione viene a passare dopo l'azione delle forze stesse; il primo degli indicati due piani sia rappresentato di profilo nella retta E_1H_1, ed il secondo nella retta E_2H_2; finalmente si chiamino:

ω un elemento superficiale e della sezione retta DEF, ed

Ω la totale superficie della sezione stessa;

x ed y le due coordinate $\overline{Cd}$ e $\overline{de}$ del centro dell'elemento e,

v la distanza $\overline{be}$, del centro di quest'elemento, dalla retta VV' condotta pel centro di superficie C parallelamente alla UU', e

V la distanza $\overline{CG}=\overline{ab}$ del centro di superficie C dalla retta UU';

l la distanza $\overline{CC'}$ (*Fig.* 6) dei centri di superficie delle due sezioni vicinissime DEF e D'E'F';

θ l'arco di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo piccolissimo $H_2U_1H_1$ (*Fig.* 9) del piano in cui passa la sezione DEF dopo l'azione delle forze estrinseche col piano in cui essa trovavasi prima dell'azione delle forze stesse;

φ l'angolo VCx della retta VV' coll'asse delle ascisse Cx;

x_1 ed y_1 i due piccolissimi spostamenti, dell'elemento e, rispettivamente nelle direzioni dei due assi coordinati Cx e Cy (*Fig.* 6 e 9) e nell'ipotesi che la sezione DEF si trovi soltanto sotto l'azione delle tre forze X, Y e Z applicate al suo centro di superficie C,

φ l'arco di raggio eguale all'unità misurante la piccolissima rotazione dello stesso elemento attorno all'asse delle ordinate z, nell'ipotesi che la detta sezione sia soltanto sotto l'azione delle coppie M_x, M_y ed M_z;

E_t ed E_l due coefficienti di elasticità dipendenti dalla materia costituente il solido dove viene tagliato dalla sezione DEF, il primo relativo alla resistenza trasversale ed il secondo relativo alla resistenza longitudinale;

Σ una somma estesa a tutte le superficie elementari ω.

Il centro dell'elemento superficiale qualunque e, a motivo della piccolissima sua rotazione intorno all'asse delle ordinate z, si sposta di $\overline{dd'}=\overline{he'}$ (*Fig.* 10) parallelamente all'asse Cx, e di $\overline{gg'}=\overline{eh}$ parallelamente all'asse Cy. Essendo φ l'arco di raggio eguale all'unità chiudente il piccolo angolo eCe' e dicendo ρ il raggio $\overline{Ce}=\overline{Ce'}$, si ha che l'archetto ee' vale $\rho\varphi$; e, per potersi ritenere il piccolo triangolo ehe' siccome rettilineo e simile al triangolo Cde i cui tre lati sono $\overline{Ce}=\rho$, $\overline{Cd}=x$ e $\overline{de}=y$, si ha

$$\overline{dd'}=\overline{he'}=y\varphi,$$

$$\overline{gg'}=\overline{eh}=x\varphi.$$

Il primo di questi spostamenti si deve considerare come positivo, perchè produce aumento dell'ascissa del punto e; il secondo si deve considerare come negativo, perchè produce diminuzione dell'ordinata dello stesso punto; e quindi i due spostamenti del centro dell'elemento superficiale e parallelamente agli assi Cx e Cy (*Fig.* 6 e 9) sono rispettivamente dati da

$$x_1+y\varphi$$

$$y_1-x\varphi.$$

Lo spostamento poi del centro dello stesso elemento nel senso parallelo all'asse delle z, si può considerare come un archetto circolare piccolissimo e_1e_2 (*Fig.* 9) il raggio $ae=U_1e_1=\overline{ab}+\overline{be}=V+v$, cui corrisponde l'arco θ di raggio eguale all'unità, di maniera che viene esso dato da

$$(V+v)\theta.$$

Per le ipotesi che vennero enunciate nel precedente numero sul modo di valutare le resistenze opposte da un elemento superficiale qua-

lunque e pel segno che conviene attribuire a tali forze resistenti, si ha: che la resistenza trasversale elementare parallela all'asse Cx viene data da

$$-E_t \omega \frac{x_1 + y\varphi}{l} \quad (3);$$

che la resistenza trasversale elementare parallela all'asse Cy vale

$$-E_t \omega \frac{y_1 - x\varphi}{l} \quad (4);$$

e che la resistenza longitudinale elementare, normale al piano della sezione D E F ossia parallela all'asse delle ordinate z, risulta

$$-E_l \omega \frac{(V + v)\theta}{l} \quad (5).$$

La resistenza longitudinale elementare, il cui valore è dato dall'espressione (5), ha rispettivamente per rapporto agli assi Cx e Cy i momenti

$$E_l \omega \frac{(V + v)\theta}{l} y \quad (6),$$

$$-E_l \omega \frac{(V + v)\theta}{l} x \quad (7);$$

e le resistenze trasversali date dalle espressioni (3) e (4), essendo contenute nello stesso piano in cui si trovano gli assi coordinati Cx e Cy, non hanno momento per rapporto a questi assi, ma solamente intorno al terzo asse proiettato nel punto C, ed il momento corrispondente vale

$$-E_t \omega \frac{(x_1 + y\varphi)y - (y_1 - x\varphi)x}{l} \quad (8).$$

Prendendo, per l'intiera sezione retta D E F, le somme delle resistenze elementari date dalle espressioni (3), (4) e (5), e le somme dei momenti elementari rappresentati dalle espressioni (6), (7) e (8), osservando che, nell'ipotesi della sezione omogenea, i coefficienti E_t ed E_l sono costanti per tutti i suoi punti, che sono pure costanti le quantità l, θ, φ, x_1, y_1 e V, che

$$\Sigma \omega = \Omega,$$

che sono nulle le somme $\Sigma\omega x$, $\Sigma\omega y$ e $\Sigma\omega v$. perchè gli assi coordinati Cx e Cy e la retta V V′ passano pel centro di superficie C della sezione considerata, si ottengono: le espressioni

$$\left.\begin{aligned} &-E_t\frac{x_1}{l}\Omega \\ &-E_t\frac{y_1}{l}\Omega \\ &-E_t\frac{V\theta}{l}\Omega \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

delle resistenze sviluppate nella sezione retta D E F parallelamente ai tre assi coordinati Cx, Cy e Cz; le espressioni

$$\left.\begin{aligned} &E_t\frac{\theta}{l}\Sigma\omega v y \\ &-E_t\frac{\theta}{l}\Sigma\omega v x \\ &-E_t\frac{\phi}{l}(\Sigma\omega y^2+\Sigma\omega x^2) \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

dei momenti di rotazione, delle resistenze sviluppate nella stessa sezione retta, intorno ai medesimi assi coordinati Cx, Cy e Cz.

Ora, per l'equilibrio del sistema costituito dalle forze estrinseche, applicate al corpo da quella parte della sezione qualunque D E F verso la quale trovasi l'asse positivo delle ordinate z, e dalle resistenze provocate nella detta sezione, vogliono essere soddisfatte le sei condizioni

$$X-E_t\frac{x_1}{l}\Omega=0$$

$$Y-E_t\frac{y_1}{l}\Omega=0$$

$$Z-E_t\frac{V\theta}{l}\Omega=0$$

$$M_x+E_t\frac{\theta}{l}\Sigma\omega v y=0$$

$$M_y - E_1 \frac{\theta}{l} \Sigma \omega v x = 0$$

$$M_z - E_1 \frac{\varphi}{l} (\Sigma \omega y^2 + \Sigma \omega x^2) = 0,$$

esprimenti, le prime tre che vi ha equilibrio di translazione nel senso dei tre assi coordinati fra le resistenze e le forze estrinseche, e le altre tre che vi ha equilibrio di rotazione fra le resistenze e le forze medesime intorno agli assi stessi. Dalle indicate condizioni d'equilibrio immediatamente si deducono le sei equazioni

$$\left.\begin{aligned}
&E_1 \frac{x_1}{l} \Omega = X \\
&E_1 \frac{y_1}{l} \Omega = Y \\
&E_1 \frac{V\theta}{l} \Omega = Z \\
&E_1 \frac{\theta}{l} \Sigma \omega v y = -M_x \\
&E_1 \frac{\theta}{l} \Sigma \omega v x = M_y \\
&E_1 \frac{\varphi}{l} (\Sigma \omega y^2 + \Sigma \omega x^2) = M_z
\end{aligned}\right\} \quad (11).$$

Alle equazioni (11), le quali, per aver assunto l'origine C degli assi coordinati nel centro di superficie della sezione D E F ed i due assi Cx e Cy nel piano della sezione stessa, sono relativamente semplici, altre semplificazioni si possono apportare per essere gli indicati due assi coordinati diretti secondo gli assi principali centrali d'inerzia della sezione in cui si trovano. Se dal punto d immaginansi tirate le rette dc e df, la prima perpendicolare e la seconda parallela a V V', e se osservasi che gli angoli cCd e def sono eguali all'angolo V C $x = \psi$, dai triangoli rettangoli dfe e dcC si ricavano i seguenti valori di $\overline{ef}$ e di $\overline{dc}$

$$\overline{ef} = y \cos\psi,$$

$$\overline{dc} = x \operatorname{sen}\psi.$$

Sottraendo queste due lunghezze si ottiene il valore di $\overline{b\,e} = v$, per cui si ha

$$v = y \cos\psi - x \operatorname{sen}\psi.$$

Sostituendo il trovato valore di v nella terza e nella quarta delle equazioni (11) ed osservando che l'angolo ψ è costante per rapporto al simbolo Σ, le indicate due equazioni diventano

$$E_1 \frac{\theta}{l} (\cos\psi \,\Sigma\omega y^2 - \operatorname{sen}\psi \,\Sigma\omega x y) = -M_x$$

$$E_1 \frac{\theta}{l} (\cos\psi \,\Sigma\omega x y - \operatorname{sen}\psi \,\Sigma\omega x^2) = M_y.$$

Per essere gli assi coordinati $x'\,C\,x$ ed $y'\,C\,y$ assi principali centrali d'inerzia della sezione D E F, si ha

$$\Sigma\omega x y = 0,$$

e quindi le ultime due equazioni si riducono a

$$E_1 \frac{\theta}{l} \cos\psi \,\Sigma\omega y^2 = -M_x$$

$$E_1 \frac{\theta}{l} \operatorname{sen}\psi \,\Sigma\omega x^2 = -M_y,$$

le quali tengono il posto della quarta e della quinta delle equazioni (11).

Chiamando ora, per la sezione qualunque D E F,

I_x il momento d'inerzia rispetto all'asse $x\,C\,x'$,

I_y il momento d'inerzia rispetto all'asse $y\,C\,y'$,

I_z il momento d'inerzia polare, ossia il momento d'inerzia rispetto all'asse delle ordinate z proiettato nel punto C,

si ha

$$\Sigma\omega y^2 = I_x$$

$$\Sigma\omega x^2 = I_y$$

$$\Sigma\omega y^2 + \Sigma\omega x^2 = I_z,$$

e quindi le sei equazioni d'equilibrio, del sistema costituito dalle forze estrinsiche applicate al corpo da quella parte della sezione qualunque

D E F verso la quale trovasi l'asse positivo delle ordinate z e dalle resistenze provocate sulla stessa sezione, si riducono a

$$\left.\begin{aligned} E_t \frac{x_1}{l}\Omega &= X \\ E_t \frac{y_1}{l}\Omega &= Y \\ E_t \frac{V\theta}{l}\Omega &= Z \\ E_t \frac{\theta}{l} I_x \cos\psi &= -M_x \\ E_t \frac{\theta}{l} I_y \operatorname{sen}\psi &= -M_y \\ E_t \frac{\varphi}{l} I_z &= M_z \end{aligned}\right\} \quad (12).$$

Le equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le resistenze da esse sviluppate in una sezione retta qualunque di un solido elastico, che, per quanto ci consta, da nessuno vennero date nel caso generale da noi considerato, giacchè sembra che tutti gli autori i quali finora trattarono della resistenza dei materiali pei bisogni dell'ingegneria abbiano preferito di esporla per casi particolari in conformità di quanto noi stessi abbiamo fatto nel nostro volume dell'Arte di fabbricare intitolato *Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni*, costituiscono il fondamento di importanti quistioni, ed immediatamente passiamo ad esporre quelle che possono tornare utili nella pratica dell'ingegnere costruttore.

ARTICOLO I.

Resistenza trasversale.

6. **Scorrimento in un punto qualunque di una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti** — Se considerasi un elemento qualunque superficiale e (*Fig.* 11) della sezione retta qualsiasi D E F, se conservansi alle lettere x, y, x_1, y_1, l, Ω, I_z, E_t, X, Y, M_z e φ i significati che loro vennero attribuiti nel precedente numero, e se chiamansi

s_x il piccolo spostamento $\overline{ei}$ subìto dal centro dell'elemento superficiale e parallelamente all'asse Cx, ed

s_y il piccolo spostamento $\overline{ek}$ subìto dallo stesso elemento nel senso dell'asse Cy,

come risulta dai ragionamenti fatti per la deduzione delle sei equazioni d'equilibrio, si ha

$$s_x = x_1 + y\varphi$$

$$s_y = y_1 - x\varphi.$$

Ora, dalla prima, dalla seconda e dalla sesta delle equazioni (12) del già citato precedente numero, si ottiene

$$x_1 = \frac{l\,X}{E_t\,\Omega},$$

$$y_1 = \frac{l\,Y}{E_t\,\Omega},$$

$$\varphi = \frac{l\,M_z}{E_t\,I_z};$$

di maniera che, sostituendo questi valori di x_1, y_1 e φ in quelli di s_x ed s_y, si ha

$$s_x = \frac{l}{E_t}\left(\frac{X}{\Omega} + \frac{M_z\,y}{I_z}\right) \qquad (1),$$

$$s_y = \frac{l}{E_t}\left(\frac{Y}{\Omega} - \frac{M_z\,x}{I_z}\right) \qquad (2).$$

Il centro dell'elemento e, a motivo del piccolo spostamento s_x nel senso dell'asse Cx e del piccolo spostamento s_y nel senso dell'asse Cy, prova effettivamente uno spostamento risultante rappresentato dalla diagonale del rettangolo, i cui due lati sono gli indicati spostamenti s_x ed s_y, cosicchè, essendo

s l'effettivo spostamento o scorrimento $\overline{ee'}$ del centro dell'elemento e nel piano stesso della sezione DEF,

si ha la formola

$$s = \frac{l}{E_t}\sqrt{\left(\frac{X}{\Omega} + \frac{M_z\,y}{I_z}\right)^2 + \left(\frac{Y}{\Omega} - \frac{M_z\,x}{I_z}\right)^2} \qquad (3).$$

Per ogni punto della detta sezione, si può anche determinare la direzione nella quale lo scorrimento tende inizialmente manifestarsi, e, dicendo

χ l'angolo di questa direzione coll'asse delle ascisse Cx,

dal triangolo rettangolo eie', i cui cateti $\overline{ei}$ ed $\overline{ie'} = \overline{ek}$ sono rispettivamente eguali ai valori di s_x e di s_y dati dalle formole (1) e (2), si deduce

$$\text{Tang } \chi = \frac{Y I_z - M_z \Omega x}{X I_z + M_z \Omega y} \qquad (4).$$

Le formole (1), (2), (3) e (4) contengono nei loro secondi membri le coordinate x ed y, e quindi mettono in evidenza come generalmente variino nei diversi punti della sezione retta considerata D E F gli scorrimenti s_x, s_y ed s, non che gli angoli χ determinanti le direzioni iniziali degli scorrimenti risultanti s coll'asse delle ascisse Cx. Vi ha poi un punto H, nel quale non ha luogo scorrimento alcuno, e, chiamando x_0 ed y_0 le due coordinate di questo punto, si determinano esse eguagliando a zero i valori dei due scorrimenti s_x ed s_y ossia i secondi membri delle equazioni (1) e (2), cangiando x ed y rispettivamente in x_0 ed y_0 e ricavando queste due quantità dalle equazioni risultanti. Così operando trovansi le formole

$$x_0 = \frac{I_z Y}{\Omega M_z} \qquad (5)$$

$$y_0 = -\frac{I_z X}{\Omega M_z}, \qquad (6),$$

le quali, per la sezione qualunque considerata D E F, servono al calcolo delle coordinate x_0 ed y_0 del punto H, nel quale non si verifica alcun scorrimento.

7. **Resistenza trasversale, riferita all'unità di superficie, provocata in un punto qualunque di una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti.** — Le formole (1), (2) e (3) del numero precedente danno gli scorrimenti s_x ed s_y rispettivamente paralleli agli assi coordinati Cx, Cy, e lo scorrimento risultante s pel punto qualunque e (*Fig.* 11) della sezione retta D E F. Moltiplicando questi scorrimenti pel coefficiente d'elasticità trasversale E_t, per la superficie ω dell'elemento superficiale corrispondente al punto e, e dividendo il prodotto per la lunghezza l, si ottengono le espressioni

$$\omega\left(\frac{X}{\Omega}+\frac{M_z y}{I_z}\right),$$

$$\omega\left(\frac{Y}{\Omega}-\frac{M_z x}{I_z}\right),$$

$$\omega\sqrt{\left(\frac{X}{\Omega}+\frac{M_z y}{I_z}\right)^2+\left(\frac{Y}{\Omega}-\frac{M_z x}{I_z}\right)^2}.$$

Le prime due di queste espressioni rappresentano le resistenze opposte dall'elemento ω parallelamente agli assi coordinati Cx e Cy, la terza è la loro risultante. Se ora si dicono

S_x ed S_y le due resistenze riferite all'unità di superficie nel punto e della sezione DEF e parallele ai due assi coordinati Cx e Cy,

S la resistenza risultante pure riferita all'unità di superficie,

basta dividere le ultime tre espressioni per ω onde avere i tre valori di S_x, S_y ed S, cosicchè si hanno le formole

$$S_x=\frac{X}{\Omega}+\frac{M_z y}{I_z} \qquad (1),$$

$$S_y=\frac{Y}{\Omega}-\frac{M_z x}{I_z}, \qquad (2),$$

$$S=\sqrt{\left(\frac{X}{\Omega}+\frac{M_z y}{I_z}\right)^2+\left(\frac{Y}{\Omega}-\frac{M_z x}{I_z}\right)^2} \qquad (3),$$

nelle quali le lettere x, y, Ω, I_z, X, Y ed M_z hanno gli stessi significati che già loro vennero attribuiti nel numero 5.

La tangente trigonometrica dell'angolo che la resistenza S fa coll'asse delle ascisse Cx viene data dal rapporto $\frac{S_y}{S_x}$, ed essendo questo rapporto eguale al rapporto $\frac{s_y}{s_x}$ dei due scorrimenti paralleli agli assi coordinati Cx e Cy, si ha che l'angolo della direzione della forza S coll'asse delle ascisse non è altro che quello che nel precedente numero venne indicato con χ, cosicchè si ha

$$\text{Tang } \chi=\frac{Y I_z-M_z \Omega x}{X I_z+M_z \Omega y} \qquad (4).$$

L'angolo χ dà la direzione dello scorrimento di un punto qualunque della sezione retta considerata; e la resistenza trasversale riferita all'unità di superficie, per lo stesso punto, si esercita in senso opposto a quello dell'or indicata direzione.

Le stabilite formole (1), (2), (3) e (4) fanno vedere come le tre resistenze S_x, S_y, S e l'angolo χ sono funzioni delle coordinate x ed y del punto della sezione retta DEF a cui si riferiscono, e come per conseguenza queste quantità variino nei diversi punti della sezione medesima. Vi ha poi un punto pel quale le tre resistenze S_x, S_y ed S sono nulle. Le coordinate di questo punto si ottengono eguagliando a zero i valori di S_x e di S_y, e per valori di tali coordinate si ottengono quelli stessi che già vennero trovati nel precedente numero per determinare il punto in cui non si verifica alcun scorrimento. Segue da ciò che si hanno le formole

$$x_0 = \frac{I_z Y}{\Omega M_z} \qquad (5),$$

$$y_0 = -\frac{I_z X}{\Omega M_z} \qquad (6),$$

le quali servono a determinare quel punto H della sezione retta considerata, nel quale non viene provocata alcuna resistenza allo scorrimento.

8. **Linee di eguale scorrimento e di eguale resistenza trasversale; centro di scorrimento.** — Elevando al quadrato l'equazione (3) del numero 6, moltiplicando dopo i due suoi membri per $\frac{E_t^2 I_z^2}{l^2 M_z^2}$ e facendo primo il secondo membro, ottiensi l'equazione

$$\left(x - \frac{I_z Y}{\Omega M_z}\right)^2 + \left(y + \frac{I_z X}{\Omega M_z}\right)^2 = \frac{E_t^2 I_z^2}{l^2 M_z^2} s^2 \qquad (1).$$

Analogamente, elevando al quadrato l'equazione (3) del precedente numero 7, moltiplicando dopo i suoi due membri per $\frac{I_z^2}{M_z^2}$ e scrivendo per primo il suo secondo membro, si ha l'altra equazione

$$\left(x - \frac{I_z Y}{\Omega M_z}\right)^2 + \left(y + \frac{I_z X}{\Omega M_z}\right)^2 = \frac{I_z^2}{M_z^2} S^2 \qquad (2).$$

Se ora si suppone che tanto s quanto S siano quantità costanti,

immediatamente si viene a dedurre: che l'equazione (1) è quella di un circolo di raggio $\frac{E_t I_z}{l M_z} s$; che l'equazione (2) è quella di un circolo di raggio $\frac{I_z}{M_z} S$; e che i centri dell'uno e dell'altro circolo si confondono col punto H (*Fig.* 11), in cui sono contemporaneamente nulli i valori dello scorrimento e della resistenza trasversale riferita all'unità di superficie, giacchè le coordinate dei detti centri sono date, da $\frac{I_z Y}{\Omega I_z}$ quella parallela all'asse delle ascisse xx', e da $-\frac{I_z X}{\Omega M_z}$ quella parallela all'asse delle ordinate $y y'$.

Se adunque, una volta determinato il punto H mediante le sue due coordinate

$$x_0 = \frac{I_z Y}{\Omega M_z}$$

$$Y_0 = -\frac{I_z X}{\Omega M_z},$$

si fa centro in esso e si descrive una circonferenza di circolo qualunque M N O, (*Fig.* 12), in tutti i punti della sezione retta D E F, i quali trovansi sulla detta circonferenza, si verifica eguale scorrimento ed eguale resistenza trasversale riferita all'unità di superficie.

Il punto H, che è il centro di tutte le circonferenze costituenti le linee di egual scorrimento e di egual resistenza trasversale, si può chiamare *centro di scorrimento.*

9. **Formole semplicissime per determinare lo scorrimento e la resistenza trasversale, riferita all'unità di superficie, provocata in un punto qualunque di una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti; direzioni degli scorrimenti e delle resistenze trasversali.** — Considerando una linea qualunque di eguale scorrimento e di eguale resistenza trasversale, per esempio, la circonferenza M N O (*Fig.* 12), fra le coordinate $\overline{CP} = x$ e $\overline{PM} = y$ del suo punto qualunque M, fra le coordinate $\overline{CQ} = \frac{I_z Y}{\Omega M_z}$ e $\overline{QH} = -\frac{I_z X}{\Omega M_z}$ del suo centro e fra il raggio $\overline{HM} = r$, esiste la relazione

$$\left(x - \frac{I_z Y}{\Omega M_z}\right)^2 + \left(y + \frac{I_z X}{\Omega M_z}\right)^2 = r^2.$$

Osservando ora che il primo membro di quest'equazione è eguale ai primi membri delle equazioni (1) e (2) del precedente numero, immediatamente si deducono le equazioni

$$\frac{E_t^2 I_z^2}{l^2 M_z^2} s^2 = r^2$$

$$\frac{I_z^2}{M_z^2} S^2 = r^2,$$

le quali conducono a trovare

$$s = \frac{l M_z r}{E_t I_z} \qquad (1)$$

$$S = \frac{M_z r}{I_z} \qquad (2).$$

Queste equazioni sono della massima semplicità, e valgono esse a trovare lo scorrimento s e la resistenza trasversale S riferita all'unità di superficie, provocata in un punto qualunque della sezione retta considerata quando si conosca la sua distanza dal centro di scorrimento H.

Se dalle equazioni (1) e (2) del numero precedente si deducono i valori di $\frac{dy}{dx}$ onde avere le tangenti trigonometriche degli angoli che le tangenti alle linee di egual scorrimento e di egual resistenza allo scorrimento fanno all'asse della ascisse Cx, si ottiene

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y I_z - M_z \Omega x}{X I_z + M_z \Omega y},$$

e quest'equazione, posta a confronto dell'equazione (4) dei numeri 6 e 7, conduce a trovare che

$$\mathrm{Tang}\, \chi = \frac{dy}{dx},$$

ossia che le direzioni degli scorrimenti e delle resistenze trasversali nei diversi punti di una sezione retta qualsiasi passano pei punti a cui si riferiscono e sono tangenti alle corrispondenti linee di egual scorrimento o di egual resistenza trasversale. I valori poi di s e di S hanno lo stesso segno del momento Me e quindi, immaginando condotto per

il centro di scorrimento H due assi Hx_1 ed Hy_1 rispettivamente paralleli a Cx e Cy, si dirà che le rotazioni intorno il punto H tendono manifestarsi da y_1 verso x_1, o viceversa da x_1 verso y_1, secondo che il valore di s risulta positivo o negativo. La direzione della resistenza S è precisamente opposta a quella del corrispondente scorrimento s.

10. **Punti di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale, riferita all'unità di superficie, provocata in una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti; raggio della linea di massimo scorrimento.** — Le formole (1) e (2) del precedente numero mettono in evidenza: come, tanto lo scorrimento s, quanto la resistenza trasversale S, abbiano valori massimi pel più grande valore che può prender r; come i punti di massimo scorrimento siano anche i punti di massima resistenza trasversale; come, per una sezione qualsiasi, il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale si trovi sul suo perimetro; e come questo punto sia quello che maggiormente dista dal centro di scorrimento H (*Fig.* 12.). Può darsi che per una determinata sezione sianvi due o più punti che presentano la stessa massima distanza dal detto centro di scorrimento H. In questo caso, invece di un solo, si hanno due o più punti di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale. Per una sezione qualunque poi, riesce della massima facilità la determinazione dell'unico o dei più punti di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale che essa può presentare, allorquando si conoscono: il centro di superficie C; gli assi principali centrali d'inerzia $x'Cx$ ed $y'Cy$; ed il centro di scorrimento H da determinarsi mediante le sue coordinate x_0 ed y_0 ricavabili dalle formole (5) e (6) del numero 6 o del numero 7.

Per una sezione poligonale qualunque $A_1A_2A_3A_4$..... (*Fig.* 13), si possono determinare i punti di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale col seguente semplicissimo processo: si fa, in una determinata scala, il disegno della sezione data col corrispondente centro di scorrimento H; con un compasso si prendono le distanze dei vertici A_1 A_2, A_3, A_4..... dal detto punto H, e, a partire da un estremo, si portano su una retta O O' le lunghezze $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$, $\overline{OA_3}$, $\overline{OA_4}$,....., rispettivamente eguali a $\overline{HA_1}$, $\overline{HA_2}$, $\overline{HA_3}$, $\overline{HA_4}$,.....: corrisponde al punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale quell'apertura di compasso che, portata da O verso O' sulla retta O O', determina la maggior lunghezza sulla retta stessa. Così, se l'apertura di compasso determinata dai due punti H ed A è quella cui corrisponde la maggior lunghezza $\overline{OA}$ sulla retta O O', si viene a conchiudere che

il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale è il vertice A. Nel fare l'indicata operazione non è necessario prendere le distanze di tutti i vertici dal centro di scorrimento H; si escludono immediatamente i vertici che ad occhio si presentano siccome non i più lontani dal detto punto H, e si prendono solo le aperture di compasso corrispondenti a quei vertici che si mostrano siccome i più discosti, e pei quali riesce impossibile la scelta a vista di quello che ha la maggior distanza dal centro di scorrimento H. Se questa maggiore distanza è comune a più vertici, tutti questi si devono considerare siccome punti di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale.

Si può anche far centro nel centro di scorrimento H con una punta di compasso, e quindi aprire questo finchè trovasi che l'altra punta descrive una circonferenza di circolo B D A che contiene nel suo interno l'intiera sezione poligonale proposta e che passa per un vertice A della sezione stessa. Il vertice A, che così si ottiene, è il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale; e come tali si dovrebbero considerare tutti gli altri vertici che per avventura si trovassero sulla stessa circonferenza.

Per una sezione rettangolare, il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale è quel vertice il quale trovasi in quell'angolo degli assi coordinati che è opposto al vertice di quello in cui cade il centro di scorrimento. Così, se è $A_1 A_2 A_3 A_4$ (*Fig.* 14) la sezione rettangolare proposta e se il suo centro di scorrimento è in H, nell'angolo $x\,C\,y'$ degli assi principali centrali d'inerzia assunti come assi coordinati, il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale è il vertice A_4 che trovasi nell'angolo $x'\,C\,y$ opposto al vertice di $x\,C\,y'$. Infatti, se dal punto H si conduce la retta D B parallela all'asse $x\,x'$ e quindi perpendicolare ai due lati $A_1 A_2$ e $A_3 A_4$, si ha $\overline{A_1 B} = \overline{A_1' D}$, $\overline{A_2 B} = \overline{A_3 D}$ e $\overline{H B} < \overline{H D}$. Segue da ciò che $\overline{H A_1} < \overline{H A_4}$ e che $\overline{H A_2} < \overline{H A_3}$, cosicchè, per decidere qual è il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale basta considerare i soli vertici A_3 ed A_4. Ora, essendo $\overline{D A_3} < \overline{D A_4}$, di necessità risulta $\overline{H A_3} < \overline{H A_4}$. Il vertice adunque, il quale maggiormente dista dal centro di scorrimento H, è A_4, ossia quello posto nell'angolo $x'\,C\,y$, opposto al vertice dell'angolo $x\,C\,y'$, in cui trovasi il detto centro di scorrimento, e quindi questo vertice è quello in cui si verifica il massimo scorrimento e la massima resistenza trasversale.

Se il centro di scorrimento è in K' (*Fig.* 15) sull'asse $C\,x$, i due

vertici A_3 ed A_4 presentano la stessa maggiore distanza da K', e quindi si può stabilire che sono punti di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale quei due vertici del rettangolo, i quali sono posti da quella parte dell'asse $y\,C\,y'$ opposta a quella verso la quale esiste il centro di scorrimento. Analogamente, se il centro di scorrimento trovasi in K'' sull'asse $C\,y$, i due vertici A_1 ed A_4 hanno la stessa maggiore distanza da K'', per cui sono punti di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale quei due vertici del rettangolo, i quali sono situati da quella parte dell'asse $x\,C\,x'$ che è opposta a quella verso la quale si trova il centro di scorrimento.

Per una sezione a doppio T simmetrico (*Fig.* 16) s'immagina il rettangolo $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ avente la stessa larghezza e la stessa altezza della sezione proposta, ed evidentemente si ha il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale in quel vertice dell'accennato rettangolo, il quale trovasi nell'angolo degli assi coordinati che è opposto al vertice di quello in cui è situato il centro di scorrimento della considerata sezione a doppio T. Così, se il centro di scorrimento è in H nell'angolo $x\,C\,y'$, il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale è il vertice A_4 del rettangolo $A_1\,A_2\,A_3\,A_4$ situato nell'angolo $x'\,C\,y$, opposto al vertice di $x\,C\,y'$.

Per una sezione a doppio T non simmetrico (*Fig.* 17), il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale è uno dei due vertici A e B situati, per rapporto all'asse $y\,y'$, dalla parte opposta a quella in cui trovasi il centro di scorrimento H, e maggiormente distanti dall'asse $x\,x'$; cosicchè, dovendosi per una tale sezione scegliere fra i due soli punti A e B, riescono assai spedite le operazioni che vennero indicate per una sezione poligonale qualunque.

Per una sezione a croce con braccia eguali (*Fig.* 18) il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale è uno dei due vertici A e B della sezione a croce, che sono situati sul perimetro del quadrato ad essa circoscritto e nell'angolo $x'\,C\,y$, opposto al vertice dell'angolo $x\,C\,y'$, in cui trovasi il centro di scorrimento H. Per decidere poi quale degli accennati due punti è il vero punto domandato, si tiri la diagonale M N del quadrato suddetto, ed il punto B, che trovasi nell'angolo x' C M opposto al vertice dell'angolo x C N, in cui esiste il centro di scorrimento H, è il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale per la proposta sezione a croce. Infatti, considerando nella sezione a croce i due rettangoli B H G F ed A I K L, si ha che il punto di massima resistenza trasversale relativo al centro di scorrimento H sarebbe, B pel primo ed A pel secondo

rettangolo. Visto come il punto domandato sia uno dei due punti A e B, se tirasi la retta AB, essa è incontrata nel suo mezzo D dalla diagonale MN. Abbassata poi da H la perpendicolare HE su BA, risulta $\overline{BE} > \overline{AE}$, donde consegue $\overline{HB} > \overline{HA}$, ossia che il punto B è il punto di massimo scorrimento, perchè dista da H più del punto A.

Per determinare il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale in una sezione poligonale regolare qualunque, vale la seguente semplicissima operazione : si conduca la retta passante pel centro C (*Fig.* 19) del poligono e pel centro di scorrimento H; si determini il punto A, in cui il prolungamento di questa retta, oltre il detto centro, interseca la circonferenza circoscritta al poligono regolare; e si osservi qual è il vertice di quest'ultimo, che trovasi più vicino al definito punto A, giacchè questo vertice determina precisamente il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale. Infatti, prolungando la retta HA fino ad incontrare anche in E la circonferenza circoscritta al poligono regolare, questa retta divide la detta circonferenza in due parti eguali AGE ed AKE; e, ammettendo che sia B quel vertice del poligono che più di qualsiasi altro è vicino al punto A, e D un altro vertice qualunque, per essere l'arco BA minore dell'arco DA, risulta che l'arco BGE è maggiore dell'arco DKE, e che quindi l'angolo BCE è maggiore dell'angolo DCE. Ora, se si tracciano le due rette $\overline{HB}$ e $\overline{HD}$, si ottengono i due triangoli BCH e DCH, aventi due lati rispettivamente eguali, cioè $\overline{CB} = \overline{CD}$ e $\overline{CH}$ comune, e l'angolo compreso differente; cosicchè, dovendo corrispondere il lato maggiore coll'angolo maggiore, di necessità risulta $\overline{HB} > \overline{HD}$. Il vertice B adunque, che trovasi più vicino al punto A in cui la retta HC che unisce il centro di scorrimento col centro del poligono incontra la circonferenza circoscritta al poligono stesso, è quello cui corrisponde la più gran distanza dal detto centro di scorrimento H, e quindi è quello in cui viene provocato il massimo scorrimento e la massima resistenza trasversale.

Per una sezione contorniata da una curva qualunque ABD (*Fig.* 20) già disegnata in una determinata scala col corrispondente centro di scorrimento H, si può trovare il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale incominciando dal sostituire alla linea curva una linea poligonale inscritta e coi lati assai prossimi alla curva stessa, e procedendo quindi sulla sezione poligonale risultante, come già venne detto ragionando sulla figura 13ª. Generalmente però riesce più comodo e più spedito far centro nel centro di scorrimento H

con una punta di compasso ed aprirlo in modo finchè, dopo pochi tentativi, si viene a trovare che l'altra punta descrive una circonferenza di circolo E F G che contiene nel suo interno l'intiera sezione A B D e che ha almeno un punto G comune col contorno della sezione stessa. Il punto G, che così si ottiene, è il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale, e, qualora risulti che altri punti sono comuni alla definita circonferenza ed all'indicato contorno, anche questi si devono ritenere siccome posti nelle stesse condizioni del punto G.

Quando la sezione è un circolo, si ottiene il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale adottando il semplicissimo procedimento di unire il centro di scorrimento H (*Fig.* 21) col centro C e di prolungare la retta determinata da questi punti fino ad incontrare in A, al di là del centro C, la circonferenza della sezione proposta. Se paragonasi il punto A con un punto qualunque B della circonferenza, per essere nel triangolo H C B il lato $\overline{H B}$ minore della somma degli altri due $\overline{C B}$ e $\overline{C H}$ e $\overline{C B} + \overline{C H} = \overline{C A} + \overline{C H} = \overline{H A}$, si ha che il punto A dista dal centro di scorrimento H più di qualsiasi altro punto B della circonferenza, e che quindi il detto punto A è il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale.

La regola che serve a determinare il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale per una sezione circolare, viene pure in acconcio per una sezione, come quella rappresentata nella figura 22, il cui contorno presenta diverse parti $a\,b$, $a'\,b'$, $a''\,b''$, $a'''\,b'''$, ... di egual lunghezza, disposte a distanze eguali ed appartenenti ad una circonferenza di circolo avente il suo centro nel centro stesso C della sezione proposta. In questo caso, essendo H il centro di scorrimento, si tira la retta che lo unisce col centro C, si prolunga questa retta dalla parte opposta fino ad incontrare l'indicata circonferenza in A, e questo punto A è il punto domandato. Se poi il centro di scorrimento avesse una tale posizione H', che la retta H' C, prolungata oltre il centro C, incontrasse il contorno della data sezione, non in una delle sue parti poste sulla circonferenza di raggio $\overline{C A}$, ma sibbene in B fra due di tali parti, il domandato punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale sarebbe uno dei due vertici b'' ed a''', e decisamente quello che è più vicino al punto B. — Qualora agli archi $a\,b$, $a'\,b'$, $a''\,b''$, $a'''\,b'''$, ... fossero sostituite nel contorno della sezione le loro corde, il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale sarebbe l'estremo di quella di tali corde che tro-

vasi più vicino al punto in cui la retta, determinata dal centro di scorrimento e dal centro della sezione, incontra la circonferenza di raggio $\overline{Ca}$ alla quale le dette corde appartengono.

Per le sezioni vuote, si determinano i punti di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale colle norme stesse che vennero date per le sezioni piene, fissando il centro di scorrimento H mediante le sue due coordinate x_0 ed y_0 calcolate coi valori dell'area Ω e del momento d'inerzia I_z corrispondenti alla sezione vuota e considerando quindi il solo perimetro esterno.

La distanza del centro di scorrimento dal punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale si può chiamare *raggio della linea di massimo scorrimento*, o più semplicemente *raggio di massimo scorrimento*, ed in ogni caso riesce facile la determinazione della lunghezza di questo raggio, giacchè si conoscono le sue due estremità. Questa determinazione può essere fatta, o traendo partito del disegno della sezione con sopra indicati i punti di cui vuolsi la distanza e della relativa scala, o con semplici considerazioni geometriche e coi calcoli che da esse conseguono.

Essendo il contorno esterno della sezione, per la quale vuolsi determinare punto e raggio di massimo scorrimento, una curva D E F (*Fig.* 23) di cui è nota l'equazione rispetto ai due assi principali centrali d'inerzia x' C x ed y' C y della sezione stessa, colla teoria dei massimi e dei minimi si possono determinare, tanto le due coordinate del punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale, quanto la distanza di questo punto dal centro di scorrimento.

11. **Massimo scorrimento e massima resistenza trasversale, riferita all'unità di superficie, provocata in una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti.** — Per la sezione retta qualsiasi D E F (*Fig.* 23), si dicano

r_m il raggio di massimo scorrimento, ossia la distanza $\overline{H A}$ di quel punto A del suo perimetro esterno, il quale maggiormente dista dal centro di scorrimento H,

s_m lo scorrimento corrispondente al detto punto A,

S_m la resistenza trasversale, riferita all'unità di superficie, provocata nello stesso punto A,

e alle lettere l, E_t, I_z ed M_z si conservino i significati che loro precedentemente vennero attribuiti. Applicando al punto A le semplicissime equazioni (1) e (2) del numero 9, si hanno le formole

$$s_m = \frac{l M_z r_m}{E_t I_z} \qquad (1),$$

$$S_m = \frac{M_z r_m}{I_z} \qquad (2),$$

la prima delle quali serve a trovare il massimo scorrimento, e la seconda la massima resistenza trasversale in una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti.

A seconda del segno del momento M_z, i valori di s_m e di S_m possono risultare positivi o negativi, e sui significati da attribuirsi a questi due segni valgono le osservazioni che già vennero fatte sul finire del citato numero 9.

Nel caso in cui il momento M_z è nullo, le formole (1) e (2) non servono alla determinazione del massimo scorrimento e della massima resistenza trasversale riferita all'unità di superficie, giacchè, avendosi $M_z = 0$, risulta che le due coordinate x_0 ed y_0 del centro di scorrimento, le quali coordinate sono date dalle equazioni (5) e (6) del numero 7, acquistano valori infiniti. Infinito adunque deve pur essere il raggio di massimo scorrimento r_m, e quindi i valori del massimo scorrimento s_m e della massima resistenza trasversale S_m, dati dalle equazioni (1) e (2), si presentano siccome il prodotto di una quantità nulla per una quantità infinita, ossia sotto il simbolo dell'indeterminato. Per trovare i veri valori di s_m e di S_m, conviene in questo caso ricorrere all'equazione (3) del numero 6 e all'equazione (3) del numero 7, dalle quali, facendovi $s = s_m$, $S = S_m$ ed $M_z = 0$, si ricavano le formole

$$s_m = \frac{l}{E_t \Omega} \sqrt{X^2 + Y^2} \qquad (3),$$

$$S_m = \frac{1}{\Omega} \sqrt{X^2 + Y^2} \qquad (4),$$

nelle quali le lettere Ω, X ed Y hanno i significati che loro vennero dati nel numero 5. La quantità $\sqrt{X^2 + Y^2}$ rappresenta la risultante di tutte le forze estrinseche parallele al piano della sezione per cui vuolsi determinare il valore del massimo scorrimento e della massima resistenza trasversale riferita all'unità di superficie, e, come risulta dall'ultima formola, questa resistenza vale la definita risultante divisa per l'area della sezione considerata.

12. **Equazione di stabilità per rapporto alla resistenza trasversale provocata in una sezione retta omogenea qualsiasi di un so-**

lido elastico sollecitato da forze comunque operanti. — Lo snervamento dei corpi conduce senza dubbio alla loro rottura, allorquando devono essi rimanere sotto l'azione delle forze estrinseche che lo hanno causato; e quindi, in qualsiasi sezione retta di un solido impiegato nelle costruzioni, giammai deve essere provocata quella massima resistenza trasversale riferita all'unità di superficie, che corrisponde ad un principio di snervamento nel senso trasversale.

Essendo adunque,

S_m la massima resistenza trasversale, riferita all'unità di superficie, nella sezione per cui si vuole l'equazione di stabilità,

Q_t il *coefficiente di snervamento nel senso trasversale* in tale sezione (*b*),

(*b*) Il coefficiente di snervamento nel senso trasversale Q_t costituisce un elemento da determinarsi sperimentalmente pei diversi materiali da impiegarsi nelle costruzioni, ed una tale determinazione può essere fatta come segue. Preparato il corpo da esperimentarsi, che preferibilmente avrà forma cilindrica con base circolare e che non sarà molto lungo, si disponga verticalmente, affinchè il suo peso non possa avere alcuna influenza sui fenomeni relativi alla resistenza trasversale, e si fermi alla sua estremità inferiore, alla quale converrà assegnare forma parallelepipeda, onde ottenere un conveniente incastramento. Alla base superiore del solido si applichi un braccio di leva A B (*Fig.* 24), passante pel centro C_n della base stessa e da questo diviso nelle due parti eguali C_n A e C_n B. Finalmente, alle estremità A e B dell'indicato braccio si applichino due forze eguali, parallele e contrarie, in tal guisa che, anche nel caso di piccole rotazioni del braccio A B intorno all'asse CC_n del cilindro sottoposto ad esperimento, non variino, nè le direzioni delle dette forze, nè le lunghezze delle perpendicolari su esse abbassate dal centro C_n.

Premesso questo, si chiamino:

r il raggio $\overline{CE}$ del cilindro sottoposto ad esperimento, ed

a la sua lunghezza $\overline{CC_n}$;

F l'intensità di ciascuna delle forze eguali, parallele e contrarie, applicate all'estremo del braccio di leva A B, e

b la lunghezza della comune perpendicolare alle direzioni delle due forze F.

Considerando nel cilindro sottoposto ad esperimento diverse sezioni rette assai vicine EG, E_1G_1, E_2G_2, E_3G_3, ... ed E_nG_n, tutte egualmente distanti, ed osservando che in tutte queste sezioni si possono assumere i due assi principali centrali d'inerzia paralleli alle forze F ed al loro braccio di leva, per ciascuna di esse si ha

$$X = 0, \qquad Y = 0;$$

ed i valori delle coordinate x_o ed y_o del centro di scorrimento (Num. 6 e 7) risultano

$$x_o = 0, \qquad y_o = 0;$$

ossia in tutte le sezioni il centro di scorrimento si confonde col loro centro di superficie.

Se ora si indicano con

m_t un numero che si assume per coefficiente di stabilità, deve sempre essere verificata l'equazione

$$m_t Q_t = \pm S_m \qquad (1),$$

la quale porterà a conchiudere che nella sezione retta a cui si riferi-

l le distanze eguali $\overline{CC_1}$, $\overline{C_1C_2}$, $\overline{C_2C_3}$, ... delle diverse sezioni rette considerate, e con

E_t il coefficiente d'elasticità trasversale per la materia di cui è formato il corpo sottoposto ad esperimento,

applicando l'equazione (1) del precedente numero per trovare il massimo spostamento s_m, per essere

$$r_m = r$$

$$M_z = F\,b$$

$$I_z = \frac{1}{2}\pi r^4,$$

risulta

$$s_m = 2\,\frac{l\,b\,F}{E_t\,\pi\,r^3}.$$

Nel caso in quistione, lo scorrimento deriva soltanto dalla rotazione delle diverse sezioni intorno all'asse CC_n del cilindro, e quindi il trovato valore di s_m rappresenta l'arco di raggio r chiudente l'angolo che misura di quanto ciascuna delle sezioni considerate ha rotato rispetto alla sezione immediatamente inferiore. Se adunque si indica con φ° l'ampiezza dell'or indicato angolo, si ha la formola

$$\varphi^\circ = \frac{l\,b\,F}{E_t\,\pi^2\,r^4}\,360^\circ,$$

nella quale la lettera π rappresenta il noto rapporto 3,1415 ....., della circonferenza al diametro.

Per essere le sezioni rette EG, E_1G_1, E_2G_2, E_3G_3, ..., E_nG_n tutte egualmente distanti, l'ultima formola conduce a trovare lo stesso valore dell'angolo φ° di cui ciascuna delle indicate sezioni ha rotato per rapporto a quella immediatamente inferiore; per modo che, se φ° è l'angolo di cui ha rotato la sezione E_1G_1 rispetto alla sezione EG, saranno rispettivamente $2\varphi^\circ$, $3\varphi^\circ$, ..., ed $n\varphi^\circ$ gli angoli di cui hanno rotato le sezioni E_2G_2, E_3G_3, ..., ed E_nG_n rispetto alla stessa sezione EG. Moltiplicando i due membri dell'ultima equazione pel numero n, esprimente il numero delle parti eguali in cui si è immaginato diviso l'asse $\overline{CC_n}$ del cilindro col considerare le sezioni rette equidistanti EG, E_1G_1, E_2G_2, E_3G_3, ..., ed E_nG_n, ed osservando che il prodotto nl è la lunghezza CC_n che si può indicare colla lettera L, e che il prodotto $n\varphi^\circ$ rappresenta l'angolo di cui ha rotato la sezione più alta E_nG_n rispetto alla sezione d'incastro, il qual angolo si può chiamare Φ°, si ottiene l'equazione

$$\Phi^\circ = \frac{L\,b\,F}{E_t\,\pi^2\,r^4}\,360^\circ,$$

scono i valori di Q_t e di S_m non trovasi provocata la resistenza trasversale corrispondente ad un principio di snervamento, tuttavolta che il valore del coefficiente di stabilità m_t risulta minore dell'unità. Si dirà

la quale, risoluta per rapporto al coefficiente di elasticità trasversale E_t, dà la seguente formola determinatrice dell'or indicato coefficiente

$$E_t = \frac{L\,b\,F}{\pi^2 r^4} \frac{360^\circ}{\Phi^\circ} \qquad (1).$$

Negli esperimenti conviene far crescere le due forze F, sempre mantenendole della stessa intensità, per differenze eguali, piccole sì, ma pur sensibili; osservare l'angolo di torsione Φ° corrispondente a ciascun valore; fare il rapporto del momento torcente $b\,F$ al relativo angolo di torsione Φ° oppure calcolare la quantità $b\,F\frac{360^\circ}{\Phi^\circ}$; e tralasciare di far crescere le forze F appena si trova che la detta quantità più non si conserva sensibilmente costante. Siccome non ha luogo snervamento per torsione finchè i momenti torcenti sono proporzionali agli angoli di torsione da essi prodotti, risulta che il momento torcente capace di produrre lo snervamento nel corpo esperimentato è minore dell'ultimo momento a cui esso venne sottoposto e maggiore del penultimo, e quindi si può dire che il penultimo momento, il quale si può indicare con $(b\,F)_m$, rappresenta approssimativamente quello che corrisponde collo snervamento per torsione. Per tutti i valori sensibilmente costanti della quantità $b\,F\frac{360^\circ}{\Phi^\circ}$, si calcolino mediante l'ultima formola i corrispondenti valori di E_t, i quali di necessità risulteranno pure sensibilmente costanti; e la media aritmetica di tutti questi valori di E_t si può assumere siccome rappresentante il coefficiente di elasticità trasversale per il corpo stato esperimentato.

Per trovare il valore di Q_t, ossia il coefficiente di snervamento nel senso trasversale, serve l'equazione (2) del precedente numero, quando si pongano in essa i già stabiliti valori di r_m e di l_z, e quando si faccia

$$M_z = (b\,F)_m$$

$$S_m = Q_t .$$

L'equazione determinatrice di Q_t risulta adunque

$$Q_t = 2\,\frac{(b\,F)_m}{\pi\, r^3} \qquad (2).$$

Nella determinazione dei valori di E_t e di Q_t per una determinata materia, non basta generalmente un solo esperimento, ma sibbene importa farne parecchi su corpi cilindrici della stessa materia, ma con differenti dimensioni. Tali esperienze condurranno a valori poco differenti del coefficiente di elasticità ed a valori poco differenti del coefficiente di snervamento nel senso trasversale; la media aritmetica dei primi valori si può assumere per coefficiente di elasticità E_t, e la media aritmetica dei secondi valori per coefficiente di snervamento Q_t della materia componente i corpi esperimentati.

Essendo probabile che la forma della sezione possa avere qualche influenza sui va-

poi che nella sezione considerata, oltre di non esservi alcun principio di snervamento, vi è il grado di stabilità richiesto nelle costruzioni permanenti quando il valore di m_t risulta: minore di 1/3 pei legnami di essenza forte; minore di 1/6 pei legnami di essenza dolce; e minore di 1/2 pei metalli.

Nell'instituire l'equazione di stabilità, invece del coefficiente di snervamento, si può far uso del *coefficiente di rottura* nel senso trasversale, e dicendo

R_t il *coefficiente di rottura nel senso trasversale* nella sezione per cui si vuol porre l'equazione di stabilità (*c*),

lori dei due coefficienti E_t e Q_t, può essere conveniente di instituire esperienze su solidi prismatici con sezioni rette differenti dalla sezione circolare. Per tali esperienze conviene procedere come venne detto pei corpi cilindrici, applicando però per formole determinatrici di E_t e di Q_t quelle che convengono alla sezione retta considerata e che si deducono dalle formole (1) e (2) del precedente numero colle norme che vennero seguite nel trovare le formole (1) e (2) della presente nota.

Nell'esecuzione poi delle esperienze dirette a trovare i due coefficienti E_t e Q_t, è necessario far in modo:

1° Che l'applicazione del braccio di leva A B alla base estrema E_n G_n venga fatta in guisa, che la coppia girante operi sulla detta base come se tutti i suoi punti appartenessero ad un disco rigido cui è concesso rotare intorno all'asse CC_n, la qual cosa si può ottenere col serrare l'estremo del solido in una robusta cerchiatura metallica facente corpo col detto braccio di leva e che non possa subire la benchè minima rotazione indipendentemente dalla base estrema del solido sottoposto ad esperimento;

2° Che la distanza delle due forze F dal centro C_n si conservi sempre la stessa anche quando il braccio di leva A B gira intorno all'asse CC_n, ciò che assai facilmente si ottiene quando le estremità del detto braccio siano munite di due archi materiali e solidi aventi il loro centro nel punto di mezzo C_n del detto braccio e quando le forze F siano costrette ad agire tangenzialmente ai detti archi;

3° Che le forze torcenti si facciano gradatamente crescere senza produrre nè urti, nè vibrazioni, come avverrebbe qualora al conseguimento delle forze stesse si facesse concorrere l'azione del peso di un corpo immerso nell'acqua, di cui gradatamente si abbassa il livello;

4° Che il corpo sottoposto ad esperimento non sia molto lungo, affinchè durante l'esperimento possa mantenersi in posizione perfettamente verticale.

(*c*) Il cofficiente di rottura R_t non è altro che la massima resistenza trasversale riferita all'unità di superficie per l'istante, in cui in una data sezione appaiono i primi segni di rottura per provocamento di resistenza trasversale. Questo coefficiente è il valore di S_m calcolato colla formola (2) del precedente numero, impiegata in esperienze da instituirsi come venne detto nella nota (*b*), ma accrescendo la forza torcente F e quindi il momento F*b* fino all'apparizione dei primi segni di rottura. Facendosi diverse esperienze su corpi della stessa materia, si trovano generalmente valori poco diversi di S_m, e la media aritmetica di tutti questi valori costituisce il vero coefficiente di rottura nel senso trasversale da adottarsi nelle pratiche applicazioni.

n_t un numero assunto come coefficiente di stabilità, deve allora essere soddisfatta l'equazione

$$n_t R_t = \pm S_m \qquad (2),$$

la quale porterà a conchiudere che nella sezione retta a cui si riferiscono i valori di R_t e di S_m non è ancora provocata la resistenza trasversale corrispondente alla rottura, tuttavolta che il valore del coefficiente di stabilità n_t risulta minore dell'unità. Si dirà poi che nella medesima sezione, oltre di non esservi segni di imminente rottura, vi è il grado di stabilità richiesto nelle costruzioni permanenti quando il valore di n_t si trova minore di 1/10 pei legnami, e minore di 1/5 pei metalli.

In quanto al doppio segno di cui è preceduto tanto il secondo membro dell'equazione (1) quanto il secondo membro dell'equazione (2), esso dipende da ciò che il valore di S_m, dato dalla formola (2) del precedente numero, può risultare positivo o negativo. Siccome poi i primi membri delle citate equazioni di stabilità sono sempre essenzialmente positivi, ne deriva che anche i loro secondi membri devono risultare positivi e che quindi in questi bisogna prendere: il segno + quando il valore di S_m è positivo; il segno — quando il valore di S_m è negativo.

13. **Sezione pericolosa per rapporto alla resistenza trasversale provocata in un solido elastico con sezioni rette omogenee e sollecitata da forze comunque operanti.** — Il raggio di massimo scorrimento r_m, il momento d'inerzia I_z ed il momento M_z, sono tre elementi i quali generalmente variano dall'una all'altra sezione di un solido qualsiasi sollecitato da forze comunque operanti, e quindi anche la massima resistenza trasversale S_m è una quantità che varia da sezione a sezione.

Se poi dalle equazioni (1) e (2) del precedente numero, e dopo d'avervi sostituito il valore di S_m dato dalla formola (2) del numero 11, si ricavano i valori dei coefficienti di stabilità m_t ed n_t, si ottengono le formole

$$m_t = \pm \frac{M_z r_m}{I_z Q_t} \qquad (1)$$

$$n_t = \pm \frac{M_z r_m}{I_z R_t} \qquad (2),$$

le quali fanno vedere come questi coefficienti devono pure generalmente variare da sezione a sezione. Ora, fra tutte le sezioni rette del solido considerato, ve ne sarà una per rapporto alla quale avrà il più gran valore il coefficiente m_t ed una per rapporto alla quale avrà pure il più gran valore il coefficiente n_t. La prima di queste sezioni ad evidenza sarà quella in cui più facilmente che in qualunque altra potrà avvenire lo snervamento, e quindi sarà la *sezione pericolosa per rapporto allo snervamento nel senso trasversale*; la seconda sarà quella in cui più facilmente che in qualunque altra potrà avvenire la rottura, e quindi sarà la *sezione pericolosa per rapporto alla rottura nel senso trasversale.*

Se poi osservasi che, per tutte le sezioni di uno stesso solido, si può generalmente assumere che il coefficiente di snervamento Q_t sia una stessa frazione k_t del corrispondente coefficiente di rottura R_t, risulta: che i due massimi di m_t e di n_t vanno generalmente a coincidere in una stessa sezione; che quindi si riducono ad una sola le due sezioni pericolose per rapporto allo snervamento ed alla rottura nel senso trasversale; e che una tale sezione si determina cercando quella per cui ha il più gran valore uno dei due rapporti $\pm \frac{M_z r_m}{I_z Q_t}$ e $\pm \frac{M_z r_m}{I_z R_t}$ (*d*).

Nell'usare degli or indicati rapporti per determinare la sezione pericolosa, bisogna ritenere che essi rappresentano rispettivamente i coefficienti di stabilità m_t ed n_t ossia quantità essenzialmente positive, e che per conseguenza si devono considerare come preceduti dal segno + o dal segno —, secondo che il momento M_z è positivo o negativo.

Nel caso in cui il momento M_z è nullo, il valore di S_m viene dato dalla formola (4) del numero 11 e la sezione pericolosa si determina allora cercando quella per cui ha il più gran valore uno dei due rapporti

$$\frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\Omega Q_t} \quad \text{e} \quad \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{\Omega R_t}.$$

(*d*) Che la sezione, cui corrisponde il più gran valore del coefficiente di stabilità, sia veramente la sezione pericolosa, risulta da ciò che il coefficiente di stabilità esprime qual frazione della resistenza allo snervamento o della resistenza alla rottura, riferite all'unità di superficie, è la massima resistenza, pure riferita all'unità di superficie, provocata dalle forze estrinseche; cosicchè quanto più questa frazione è grande, tanto più la resistenza provocata si accosta a quelle che corrispondono allo snervamento ed alla rottura e tanto meno è stabile la sezione a cui essa frazione si riferisce. Il più gran valore adunque del coefficiente di stabilità deve corrispondere alla sezione in cui vi è minor stabilità, alla sezione in cui vi è maggior pericolo di snervamento e di rottura, ossia alla sezione pericolosa.

14. **Equazione di stabilità per rapporto alla resistenza trasversale provocata in un solido elastico con sezioni rette omogenee e sollecitato da forze comunque operanti.** — Quest'equazione di stabilità deve essere instituita per la sezione pericolosa, la quale sezione in ogni caso può essere determinata seguendo le norme che vennero date nel precedente numero. Se adunque si indica con S_{mp} la massima resistenza trasversale, riferita all'unità di superficie, per la sezione pericolosa, e se alle lettere Q_t, m_t, R_t ed n_t si conservano i significati che loro già vennero attribuiti nel numero 12, si ha: pel caso in cui vuolsi far uso del coefficiente di snervamento Q_t,

$$m_t Q_t = \pm S_{mp} \qquad (1);$$

pel caso in cui vuolsi usare il coefficiente di rottura R_t,

$$n_t R_t = \pm S_{mp} \qquad (2).$$

Per quanto spetta al segno da adottarsi nel secondo membro delle poste equazioni, ed ai valori che devono avere i coefficienti m_t ed n_t, affinchè si possa dire che vi è nel corpo la voluta stabilità, valgono le osservazioni che già vennero fatte nel numero 12.

ARTICOLO II

Resistenza longitudinale.

15. **Intersezione del piano di una sezione retta qualsiasi prima dell'azione delle forze estrinseche, col piano in cui la stessa sezione viene a trovarsi dopo l'azione delle forze stesse. Asse neutro.** — Accennando nel numero 4 alle ipotesi sulle quali fondasi la valutazione delle resistenze provocate in una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti, si è detto ammettersi che ogni sezione retta, presa nel corpo prima dell'applicazione delle forze estrinseche, si sposti in modo che, dopo la deformazione, i diversi suoi punti si trovino in uno stesso piano. Quest'ultimo piano adunque interseca quello primitivo della sezione considerata secondo una linea retta; ed è questa retta, già rappresentata in UU′ sulla figura 9, che importa determinare mediante l'angolo $V C x = \psi$ che essa fa coll'asse Cx delle ascisse, e mediante la sua distanza $\overline{CG} = V$ dal centro di superficie C della sezione retta D E F ne

cui piano esiste. Per raggiungere l'intento poi servono la terza, la quarta e la quinta delle equazioni (12) del numero 5.

Dividendo per I_x la quarta e per I_y la quinta delle equazioni (12) dell'or citato numero, si ottengono le equazioni

$$E_1 \frac{\theta}{l} \cos\psi = -\frac{M_x}{I_x}$$

$$E_1 \frac{\theta}{l} \operatorname{sen}\psi = -\frac{M_y}{I_y};$$

e, dividendo la seconda delle equazioni così trovate per la prima, risulta la formola

$$\operatorname{Tang}\psi = \frac{I_x}{I_y}\frac{M_y}{M_x} \qquad (1),$$

la quale prestasi alla determinazione dell'angolo ψ.

Sommando la quarta e la quinta delle citate equazioni (12) del numero 5, si ha

$$E_1 \frac{\theta}{l}(I_x \cos\psi + I_y \operatorname{sen}\psi) = -M_x - M_y,$$

da cui ricavasi

$$E_1 \frac{\theta}{l} = -\frac{M_x + M_y}{I_x \cos\psi + I_y \operatorname{sen}\psi}.$$

Ma la terza delle stesse equazioni (12) dà

$$E_1 \frac{\theta}{l} = \frac{Z}{V\Omega};$$

cosicchè, eguagliando fra di loro i due trovati valori di $E_1 \frac{\theta}{l}$ risulta la equazione

$$-\frac{M_x + M_y}{I_x \cos\psi + I_y \operatorname{sen}\psi} = \frac{Z}{V\Omega},$$

dalla quale immediatamente si deduce

$$V = -\frac{Z}{\Omega}\frac{I_x \cos\psi + I_y \operatorname{sen}\psi}{M_x + M_y}.$$

Se ora osservasi che, per le note formole trigonometriche le quali dànno il seno ed il coseno di un angolo in funzione della sua tangente (*e*) e per il valore di tang ψ data dalla (1), si ha

$$\operatorname{sen}\psi = \frac{I_x M_y}{\sqrt{I_x^2 M_y^2 + I_y^2 M_x^2}}$$

$$\cos\psi = \frac{I_y M_x}{\sqrt{I_x^2 M_y^2 + I_y^2 M_x^2}},$$

il trovato valore di V diventa

$$V = -\frac{Z}{\Omega} \frac{I_x I_y}{\sqrt{I_x^2 M_y^2 + I_y^2 M_x^2}};$$

e finalmente, dividendo pel prodotto $I_x I_y$, risulta

$$V = -\frac{Z}{\Omega \sqrt{\frac{M_x^2}{I_x^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2}}} \qquad (2).$$

Dalla teoria delle coppie e per le convenzioni stabilite nel numero 5 sui versi positivi e negativi dei momenti di rotazione intorno agli assi coordinati si ha: che, portando sugli assi $x\,C\,x'$ ed $y\,C\,y'$ (*Fig.* 25) due lunghezze $\overline{C\,M_x}$ e $\overline{C\,M_y}$ rispettivamente proporzionali ai due momenti M_x ed M_y e nel senso degli assi positivi o negativi, secondo che questi momenti hanno il segno + ed il segno —, tali lunghezze rappresen-

(*e*) Queste formole trigonometriche sono

$$\operatorname{sen}\psi = \frac{\operatorname{tang}\psi}{\sqrt{\operatorname{tang}^2\psi + 1}}$$

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tang}^2\psi + 1}}.$$

tano rispettivamente l'intensità delle due coppie contenute nei piani coordinati yCz ed xCz e le direzioni degli assi delle coppie stesse; che, costruendo sulle indicate due rette il rettangolo $CM_xM_rM_y$, la diagonale $\overline{CM_r}$ di questo rettangolo rappresenta, colla sua lunghezza, l'intensità od il momento della coppia risultante dalle due coppie di momenti M_y ed M_x, colla sua direzione l'asse della coppia stessa; e finalmente che il piano della coppia risultante il cui momento è M_r passa per l'asse Cz delle ordinate z, e che ha per traccia sul piano della sezione DEF la retta IK perpendicolare a CM_r. In quanto poi al verso della coppia, esso è tale da produrre rotazione da destra a sinistra per un osservatore supposto collocato coll'occhio in un punto della direzione CM_r e rivolto verso il piano della coppia stessa. Ora, dicendo β l'angolo M_rCx che la direzione dell'asse della coppia di momento M_r fa colla parte positiva dell'asse delle ascisse, dal triangolo rettangolo CM_xM_r si ha

$$M_x = M_r \cos\beta$$

$$M_y = M_r \operatorname{sen}\beta,$$

i quali valori dei momenti M_x ed M_y, posti nell'ultima formola determinatrice di V, conducono ad ottenere

$$V = -\frac{Z}{\Omega M_r \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}}.$$

La formola (2) serve alla determinazione della distanza V della retta UU' (*Fig.* 9) dal centro di superficie C; e questa retta, la quale, quando attraversa la sezione a cui si riferisce, gode della proprietà di contenere tutti i punti in cui non viene provocata alcuna resistenza longitudinale, è l'*asso neutro* della sezione stessa. L'ultima formola può anche servire per determinare la distanza V, ma viene principalmente in acconcio per conoscere in qual senso deve essere valutata la distanza V a seconda del segno che la precede.

Essendo AB (*Fig.* 26 e 27) una sezione retta qualunque di un solido elastico, tutta proiettata sul piano che contiene la coppia che risulta componendo le due coppie ortogonali M_x ed M_y, in questa sezione viene provocata la resistenza longitudinale per due diverse cause, per la forza Z diretta secondo la normale Cz ad AB, per la coppia di momento M_r.

L'effetto della forza Z si risolve in un trasporto della sezione A B parallelamente a se stessa, la quale passerebbe in una posizione A' B' vicinissima ad A B, al disopra di A B quando la forza Z è diretta da C in z (*Fig.* 26), ossia verso la parte positiva dell'asse delle ordinate z, al di sotto di A B quando la forza Z è diretta da z verso C (*Fig.* 27), ossia verso la parte negativa dell'asse delle ordinate z. L'effetto della coppia M_r si risolve in una rotazione da z verso A, ossia da dritta verso sinistra, della sezione A B, passata in A' B', intorno alla retta proiettata in C', la qual rotazione porta definitivamente la sezione A B in A'' B''. Ma il piano in cui primitivamente trovavasi la sezione A B taglia quello determinato dalla sua nuova posizione A'' B'' secondo una retta passante pel punto O, e la distanza di questa retta dal punto C, per rapporto ad un osservatore posto coll'occhio sull'asse della coppia, cade a sinistra nel caso della figura 26, ossia della forza Z positiva, ed a destra nel caso della figura 27, ossia della forza Z negativa. Siccome poi l'indicata retta passante per O rappresenta l'asse neutro della sezione A B, risulta che la lunghezza V non è altro che la perpendicolare abbassata da C sulla retta medesima. Applicando la formola (2) e tenendo conto del segno di Z, si ha che V è negativo nel caso della figura 26 e che è positivo nel caso della formola 27. Ora, nel primo caso l'asse neutro cade a sinistra di un osservatore posto coll'occhio sull'asse della coppia M_r e rivolto verso il piano della coppia, nel secondo caso cade a destra; di maniera che si può stabilire che i valori di V, dati dalla formola (2), secondo che risultano positivi o negativi, si devono portare verso destra o verso sinistra per rapporto ad un osservatore posto col suo occhio sull'asse della coppia M_r e rivolto verso il piano della coppia stessa.

Volendosi ora costrurre l'asse neutro per una sezione retta qualsiasi D E F (*Fig.* 28) di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti, avente il suo centro di superficie in C e cogli assi principali centrali d'inerzia diretti secondo le rette $x\,C\,x'$ ed $y\,C\,y'$, si può tenere il seguente metodo: si facciano i valori della forza Z e dei due momenti M_x ed M_y (Num. 5); si trovino i due momenti d'inerzia I_x ed I_y; mediante la formola (1) si ottenga il valore di tang ψ, il quale può risultare positivo o negativo; si deduca l'angolo ψ, il quale può pur essere positivo o negativo. Costruendo quest'angolo col vertice in C e sotto o sopra la parte $C\,x$ dell'asse delle ascisse, secondochè risulta positivo o negativo, si ottiene la direzione VV' della parallela all'asse neutro condotta pel centro di superficie della sezione considerata. Se poi, a partire da C, si portano sugli assi coordinati $x\,x'$ ed $y\,y'$ le due lunghezze $\overline{C\,M_x}$ e $\overline{C\,M_y}$ rispettivamente rappresentanti, in una data scala, i due

momenti M_x ed M_y intorno agli assi stessi, e se queste lunghezze si portano sulle parti positive o sulle parti negative degli assi corrispondenti onde tener conto dei segni da cui possono essere affetti gli indicati momenti, costruendo il rettangolo $CM_xM_rM_y$ ed elevando in C la perpendicolare IK alla direzione della diagonale CM_r dello stesso rettangolo, si ha in essa la traccia del piano perpendicolare alla sezione considerata e contenente la coppia di momento M_r. Fatto questo, si calcola il valore di V mediante la formola (2) col tener conto del segno che conviene alla forza Z giusta il senso secondo cui opera; questo valore di V, secondo che si trova positivo o negativo, si porta perpendicolarmente a VV' a dritta o a sinistra per un osservatore posto col suo occhio in un punto della diagonale CM_r e volto verso la retta IK. Nella figura 28 il valore di V venne supposto positivo, giacchè venne esso portato in $\overline{CG}$. La retta UU', parallela a VV' e condotta per l'estremo G della lunghezza $\overline{CG} = V$, dà la posizione dell'asse neutro.

16. **Piano di sollecitazione alla flessione, e relazione fra la posizione di questo piano e quella dell'asse neutro.** — Il piano contenente la coppia M_r, risultante dalle due coppie di momenti M_x ed M_y rispettivamente contenute nei due piani coordinati xCz ed yCz (*Fig.* 25), il qual piano passa per l'asse Cz e per la retta IK perpendicolare alla diagonale CM_r del rettangolo $CM_xM_rM_y$, si può chiamare *piano di sollecitazione alla flessione*, e, per essere dato l'asse Cz per cui esso passa, si può dire che viene determinato dalla sua traccia IK sul piano della sezione retta DEF, ossia dall'angolo $M_rCx = \beta$ che la detta diagonale fa coll'asse delle ascisse. Ora, dal triangolo rettangolo M_rCM_x, si ha

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{M_x}{M_y} \qquad (1),$$

e, per essere

$$\tan \psi = \frac{I_x}{I_y} \frac{M_y}{M_x} \qquad (2)$$

la formola, trovata nel precedente numero, la quale prestasi alla determinazione dell'angolo VCx che la parallela all'asse neutro fa coll'asse delle ascisse, risulta: che generalmente l'asse neutro non è perpendicolare al piano di sollecitazione alla flessione; che la deviazione di quello dalla perpendicolare a questo viene espressa dall'angolo δ dato da

$$\delta = \beta - \psi \qquad (3).$$

Quando il valore di δ risulta positivo, la retta C V trovasi a dritta d'un osservatore posto col suo occhio su C M_r e rivolto verso il punto C; ha luogo il contrario allorquando il valore di δ risulta negativo.

Vi sono però alcuni casi particolari in cui l'asse neutro è perpendicolare al piano di sollecitazione alla flessione, e questi casi si verificano quando l'angolo β è eguale all'angolo ψ. Nel caso in cui $M_y = 0$, si ha $\beta = \psi = 0$, ossia l'asse della coppia risultante, e la parallela all'asse neutro, condotta pel centro di superficie, sono ambedue dirette secondo l'asse delle ascisse, e il piano di sollecitazione alla flessione è lo stesso piano coordinato $z\,C\,y$. Analogamente, nel caso in cui $M_x = 0$, si ha $\beta = \psi = \infty$, ossia l'asse della coppia risultante e l'accennata parallela all'asse neutro, condotta pel centro di superficie, sono ambedue dirette secondo l'asse delle ordinate, e il piano di sollecitazione alla flessione è lo stesso piano coordinato $z\,C\,x$. Nel caso poi in cui i due momenti d'inerzia I_x ed I_y sono eguali, si ha pure $\beta = \psi$, ossia l'asse della coppia, risultante dalle due de' momenti M_x ed M_y, e la parallela all'asse neutro cadono in una stessa direzione, e quindi l'asse neutro è perpendicolare al piano di sollecitazione alla flessione.

L'asse neutro gode, per rapporto alla sua direzione, di una proprietà geometrica assai rimarchevole, che nel 1854 e quasi nel medesimo tempo venne trovata dai signori Bresse e Barré de Saint-Venant. Questa proprietà consiste nell'essere l'asse neutro di una sezione qualunque parallelo al diametro dell'ellisse centrale d'inerzia della sezione stessa, che è coniugato di quello secondo il quale il piano di sollecitazione alla flessione taglia il piano dell'ellisse medesima; ed eccone la dimostrazione. Chiamando

a il raggio di girazione della sezione retta D E F (*Fig.* 29) rispetto all'asse $y\,C\,y'$;

b il raggio di girazione della medesima sezione rispetto all'asse $x\,C\,x'$

e conservando alle lettere Ω, I_x ed I_y i significati che loro vennero attribuiti nel numero 5, si ha

$$I_x = b^2\,\Omega$$

$$I_y = a^2\,\Omega,$$

cosicchè il valore di tang ψ, dato dalla formola (2), si riduce a

$$\text{tang}\,\psi = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{M_y}{M_x} \qquad (4).$$

Se ora rammentasi che l'ellisse centrale d'inerzia ha per equazione, riferita ai due assi principali Cx e Cy,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,;$$

se si suppone descritta quest'ellisse i cui due semi-assi sono $\overline{Ca}=a$ e $\overline{Cb}=b$, e se considerasi su essa il punto M di coordinate $\overline{CP}=x'$ e $\overline{PM}=y'$, in cui viene tagliata dalla traccia IK del piano di sollecitazione alla flessione; e se immaginasi condotta in questo punto la tangente MT la cui equazione, per quanto insegna la geometria analitica, è

$$\frac{x\,x'}{a^2}+\frac{y\,y'}{b^2}=1,$$

risulta

$$\text{tang TQ}x=-\frac{b^2x'}{a^2y'} \qquad (5).$$

Ma, per essere simili fra loro i due triangoli CPM ed M_rPC, e per essere negativa l'ordinata $\overline{PM}$ del punto M, si ha

$$-\frac{x'}{y'}=\frac{M_y}{M_x}\,;$$

ed il valore della tangente dell'angolo TQx si riduce a

$$\text{tang TQ}x=\frac{b^2}{a^2}\frac{M_y}{M_x}.$$

Il valore di tang ψ dato dalla formola (4) è adunque eguale al valore di tang TQx, e quindi si ha che l'angolo ψ dell'asse neutro coll'asse delle ascisse è eguale all'angolo TQx della tangente MT all'ellisse centrale d'inerzia nel punto M, in cui essa è tagliata dalla traccia del piano di sollecitazione alla flessione. Siccome poi la tangente MT è parallela al diametro coniugato di quello che passa pel punto di contatto M, risulta, come volevasi dimostrare, che l'asse neutro è parallelo al diametro KL coniugato di quello MN che trovasi nella direzione della traccia del detto piano di sollecitazione.

17. **Allungamento od accorciamento in un punto qualunque di una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico solle-**

citato da forze comunque operanti. — Sia e (*Fig.* 9) un elemento qualunque superficiale della sezione retta qualsiasi D E F, e le lettere V, v, θ, l, Ω, I_x, I_y, Z, M_x, M_y ed E_1 abbiano i significati che loro vennero attribuiti nel numero 5. Indicando con

s_z il piccolo spostamento $e_1 e_2$ subìto dal centro del detto elemento superficiale parallelamente all'asse delle ordinate z, ossia normalmente al piano della sezione considerata,

si può esso considerare come un archetto circolare di raggio $\overline{ae} = \overline{U_1 e_1} = \overline{ab} + \overline{be} = V + v$, cui corrisponde l'arco θ di raggio eguale all'unità, e quindi immediatamente si deduce

$$s_z = (V + v)\,\theta.$$

Se ora dalla terza delle equazioni (12) del citato numero 5 si ricava il valore di θ, si ha

$$\theta = \frac{l\,Z}{E_1\,V\,\Omega},$$

il quale riduce il valore di s_z a

$$s_z = \frac{l\,Z}{E_1\,\Omega}\left(1 + \frac{v}{V}\right).$$

Se poi in questa equazione si mette il valore di V dato dalla formola (2) del numero 15, si ottiene

$$s_z = \frac{l}{E_1}\left(\frac{Z}{\Omega} - v\sqrt{\frac{M_x^2}{I_x^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2}}\right) \qquad (1).$$

Conservando alla forza Z il segno che le corrisponde secondo che è diretta, secondo l'asse positivo o secondo l'asse negativo delle ordinate z, e considerando la distanza $\overline{eb} = v$ col segno che le corrisponde secondo la posizione dei punti a cui si riferisce, il valore di s_z può risultare positivo o negativo, ed esso corrisponde ad un allungamento nel primo caso, ad un accorciamento nel secondo. Per attribuire poi il segno conveniente alla distanza v, si può procedere come segue: costrurre l'asse CM_r (*Fig.* 30 e 31) della coppia risultante delle due coppie di momenti M_x ed M_y; considerare quella parte, come CV, della retta V V', passante pel centro di superficie e parallela all'asse neutro della

sezione considerata, che fa angolo acuto coll'asse CM_r; e ritenere, come positivi i valori di v che si riferiscono a punti posti a sinistra di V V' per rapporto ad un osservatore posto coll'occhio in un punto di C V e rivolto verso il centro di superficie C, come negativi i valori di v relativi a punti posti a dritta. Così, nei casi delle sezioni rette rappresentate nelle figure 30 e 31, cogli assi neutri nelle rette U U', colle parallele agli assi neutri, condotte pel centro di superficie C, nelle rette V V', e cogli assi delle coppie risultanti in CM_r, si deve ritenere: che sono positivi i valori di v appartenenti a punti che, come e, sono posti al disotto di V V'; e che sono negativi i valori di v appartenenti a punti che, come e', si trovano al disopra di V V'.

Per rendersi ragione dell'accennata regola diretta a dare segno conveniente alla distanza v, basta osservare che, nel dedurre le equazioni fondamentali del numero 5 col ragionare sulla figura 9, vennero valutati i valori positivi di V e di v, uno da una parte e l'altro dall'altra della retta V V' passante pel centro di superficie e parallela all'asse neutro, e che quindi i valori positivi di v devono essere presi dalla parte che corrisponde ai valori negativi di V e viceversa. La stessa regola poi dà valori positivi di s_z in quei punti in cui vi sono allungamenti e valori negativi in quegli altri in cui vi sono accorciamenti.

18. **Resistenza longitudinale, riferita all'unità di superficie, provocata in un punto qualunque di una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti.** — La formola (1) del precedente numero dà lo spostamento perpendicolare al piano di una sezione retta qualsiasi D E F (*Fig.* 9), e, moltiplicando questo spostamento pel coefficiente di elasticità longitudinale E_1, per la superficie ω di un elemento superficiale corrispondente al punto e, e dividendo il prodotto per la lunghezza l, si ottiene l'espressione

$$\omega\left(\frac{Z}{\Omega}-v\sqrt{\frac{M_x^2}{I_x^2}+\frac{M_y^2}{I_y^2}}\right),$$

la quale rappresenta la resistenza longitudinale opposta da un elemento e di superficie ω e distante v dalla retta V C V'.

Se ora si indica con

S_z la resistenza longitudinale, riferita all'unità di superficie, nel punto e della sezione D E F,

basta dividere la trovata espressione per ω onde ottenere il valore di S_z, cosicchè si ha

$$S_z = \frac{Z}{\Omega} - v \sqrt{\frac{M_x^2}{I_x^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2}} \qquad (1)$$

per formola determinatrice di S_z, nella qual formola le lettere v, Ω, I_x, I_y, Z, M_x ed M_y hanno gli stessi significati che già loro vennero attribuiti nel numero 5.

Il segno della forza Z si assume come positivo quando essa è diretta secondo la parte positiva dell'asse delle ordinate z, e come negativo quando è diretta in senso contrario; in quanto poi al segno da assegnarsi alla distanza v dei punti considerati dalla retta VV', esso si determina colla regola che venne indicata nel precedente numero; ed allora rappresentano tensioni tutti i valori positivi e pressioni tutti i valori negativi di S_z.

19. **Punti di massimo spostamento longitudinale e di massima resistenza longitudinale, riferita all'unità di superficie, provocata in una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti. Distanze dei punti di massimo spostamento longitudinale dalla parallela all'asse neutro condotta pel centro di superficie.** — Le formole (1) dei precedenti numeri 17 e 18 mettono in evidenza: come, tanto il più gran spostamento longitudinale quanto la più grande resistenza longitudinale corrispondano a quei punti pei quali si verificano i più grandi valori assoluti di v; come i punti di massimo spostamento longitudinale siano anche i punti di massima resistenza longitudinale; come, per una sezione qualsiasi, i punti di massimo spostamento e di massima resistenza longitudinale siano sul perimetro; e come questi punti siano quelli che maggiormente distano dalla parallela all'asse neutro condotta pel centro di superficie della sezione retta che si considera. Così, essendo C (*Fig.* 32) il centro di superficie della sezione retta qualsiasi DEF, UU' il suo asse neutro che si suppone tagliare il perimetro della sezione stessa e VV' la parallela all'asse neutro condotta pel detto centro, se tracciansi le due rette M'T' ed M''T'' tangenti al suo perimetro e parallele a VV', i due punti di contatto M' ed M'' saranno i punti di massimo spostamento e di massima resistenza longitudinale; in uno di questi punti avrà luogo il massimo allungamento e verrà provocata la massima resistenza all'estensione; nell'altro avrà luogo il massimo accorciamento e verrà provocata la massima resistenza alla compressione.

Se l'asse neutro non taglia il perimetro DEF (*Fig.* 33) della sezione

considerata, allora gli spostamenti e le resistenze longitudinali nei punti M′ ed M″ sono della stessa natura, ossia in ambedue questi punti hanno luogo allungamenti od accorciamenti con provocazione o di sola resistenza all'estensione o di sola resistenza alla compressione. Il punto M″ poi, che maggiormente dista dall'asse neutro, è quello in cui si verificano il massimo spostamento e la massima resistenza longitudinale.

Le lunghezze delle due perpendicolari $\overline{P'M'}$ e $\overline{P''M''}$, abbassate dai punti M′ ed M″ sulla retta V V′, costituiscono le distanze da considerarsi per avere quelle dei punti di massimo spostamento longitudinale dalla parallela all'asse neutro condotta pel centro di superficie. Nel caso della figura 32 in cui l'asse neutro taglia il perimetro della sezione, gli spostamenti che hanno luogo in M′ ed M″ sono di differente natura, e quindi occorre di considerare ambedue le indicate perpendicolari; mentre, nel caso della figura 33 in cui l'asse neutro V V′ non taglia il perimetro della sezione, per essere della stessa natura i due spostamenti in M′ ed M″, conviene considerare soltanto la perpendicolare $\overline{P''M''}$ relativa a quel punto M″ del perimetro della sezione che maggiormente dista dall'indicato asse.

Per le sezioni il cui contorno è tale da presentare alcuni lati paralleli all'asse neutro, ben di frequente avviene che sono punti di massimo spostamento e di massima resistenza longitudinale tutti i punti appartenenti ad alcuni di questi lati, e questo evidentemente avviene per le sezioni rettangolari, per le sezioni a doppio T simmetrico e non simmetrico, e per la sezione a croce allorquando l'asse neutro è parallelo all'asse $x\,x'$ (*Fig.* 14, 16, 17 e 18).

20. **Massimo spostamento longitudinale e massima resistenza longitudinale, riferita all'unità di superficie, provocata in una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti.** — Essendo D E F (*Fig.* 34) una sezione retta qualunque avente il suo centro di superficie in C, essendo V V′ la retta parallela all'asse neutro condotta pel detto centro ed essendo M il punto del perimetro che maggiormente dista dall'indicato asse, si chiamino

v_m il valore algebrico della lunghezza della perpendicolare $\overline{PM}$ a V V′, il cui segno si deve determinare come venne detto nel numero 17 pel valore di v,

s_{zm} lo spostamento longitudinale nel punto M e

S_{zm} la resistenza longitudinale, riferita all'unità di superficie, nello stesso punto.

Applicando le formole (1) dei numeri 17 e 18, si ottengono le formole

$$s_{zm} = \frac{l}{E_1}\left(\frac{Z}{\Omega} - v_m \sqrt{\frac{M_x^2}{I_x^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2}}\right) \qquad (1),$$

$$S_{zm} = \frac{Z}{\Omega} - v_m \sqrt{\frac{M_x^2}{I_x^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2}} \qquad (2),$$

le quali servono a determinare il massimo spostamento longitudinale, la massima resistenza longitudinale, riferita all'unità di superficie, per la sezione considerata D E F. I valori positivi di s_{zm} e di S_{zm} rappresentano rispettivamente allungamenti e tensioni, e i valori negativi delle stesse quantità rappresentano accorciamenti e pressioni.

Allorquando l'asse neutro taglia il perimetro D E F (*Fig.* 32) della sezione considerata, da una parte di esso hanno luogo allungamenti e viene provocata la resistenza all'estensione, dall'altra parte hanno luogo accorciamenti e viene provocata la resistenza alla compressione. Segue da ciò che può presentarsi la quistione di determinare non solo il massimo spostamento e la massima resistenza longitudinale, ma anche il massimo allungamento, il massimo accorciamento e le massime resistenze all'estensione ed alla compressione, riferite all'unità di superficie. Perciò se chiamansi

v' e v'' i valori algebrici delle lunghezze delle due perpendicolari $\overline{P'M'}$ e $\overline{P''M''}$, i cui segni si devono determinare come venne detto nel numero 17 pel valore di v,

s'_{zm} ed s''_{zm} gli spostamenti longitudinali nei punti M' ed M'',

S'_{zm} ed S''_{zm} le resistenze longitudinali, riferite all'unità di superficie, negli stessi punti,

e se applicansi ai punti M' ed M'' le formole (1) dei numeri 17 e 18, si hanno: le formole

$$\left.\begin{aligned} s'_{zm} &= \frac{l}{E_1}\left(\frac{Z}{\Omega} - v' \sqrt{\frac{M_x^2}{I_x^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2}}\right) \\ s''_{zm} &= \frac{l}{E_1}\left(\frac{Z}{\Omega} - v'' \sqrt{\frac{M_x^2}{I_x^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

per gli spostamenti longitudinali; le formole

$$\left.\begin{aligned} S'_{zm} &= \frac{Z}{\Omega} - v' \sqrt{\frac{M_x^2}{I_x^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2}} \\ S''_{zm} &= \frac{Z}{\Omega} - v'' \sqrt{\frac{M_x^2}{I_x^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2}} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

per le resistenze longitudinali riferite all'unità di superficie.

I due valori di s'_{zm} e di s''_{zm} risulteranno, uno positivo e l'altro negativo; quello positivo corrisponde ad un allungamento e quello negativo ad un accorciamento. Analogamente, i due valori di S'_{zm} e di S''_{zm} si troveranno, uno positivo e l'altro negativo; quello positivo rappresenta una tensione e quello negativo una pressione.

21. **Equazioni di stabilità per rapporto alla resistenza longitudinale provocata in una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti.** — Queste equazioni si possono instituire, o usando del *coefficiente di snervamento*, o usando del *coefficiente di rottura* nel senso longitudinale (*f*).

Chiamando

S_{zm} la massima resistenza longitudinale, riferita all'unità di superficie, nella sezione per cui si vuol porre l'equazione di stabilità,

Q_1 il coefficiente di snervamento nel senso longitudinale in tale sezione e

m_1 un numero che si assume per coefficiente di stabilità,

deve essere soddisfatta l'equazione

$$m_1 Q_1 = \pm S_{zm} \quad (1),$$

la quale porterà a conchiudere: che nella sezione retta a cui si riferiscono i valori di Q_1 e di S_{zm} non trovasi ancor provocata la resistenza longitudinale corrispondente ad un principio di snervamento,

(*f*) Il coefficiente di snervamento nel senso longitudinale non è altro che la resistenza allo snervamento, per trazione o per pressione, riferita all'unità di superficie, di cui si fa cenno nei numeri 13, 14, 30 e 31 del volume della nostra *Arte di fabbricare*, il quale tratta della resistenza dei materiali e della stabilità delle costruzioni. Il coefficiente di rottura nel senso longitudinale è la resistenza alla rottura, per trazione o per pressione, riferita all'unità di superficie di cui si parla nei numeri 16, 17, 18, 33, 34 e 35 dello stesso volume. Le esperienze dimostrano che per alcuni corpi sono eguali fra di loro i due coefficienti di snervamento per tensione e per pressione, come pure i due coefficienti di rottura; e che per alcuni altri sono diseguali.

allorquando il valore del coefficiente m_1 risulta minore dell'unità; e che nella stessa sezione vi è il voluto grado di stabilità, allorquando il valore di m_1 risulta minore di 1/3 pei legnami di essenza forte, minore di 1/6 pei legnami di essenza dolce e per le murature, e minore di 1/2 pei metalli.

Ponendo l'equazione di stabilità col far uso del coefficiente di rottura e chiamando

R_1 il coefficiente di rottura nel senso longitudinale per la sezione considerata,

n_1 un numero assunto come coefficiente di stabilità, deve essere soddisfatta l'equazione

$$n_1 R_1 = \pm S_{zm} \qquad (2).$$

Quest'equazione poi porterà a conchiudere: che nella sezione retta a cui si riferiscono i valori di R_1 e di S_{zm} non è ancora provocata la resistenza longitudinale corrispondente alla rottura, finchè il valore del coefficiente n_1 risulta minore dell'unità; e che nella sezione stessa vi è stabilità quando il detto coefficiente si trova minore di 1/10 pei legnami e per le murature, minore di 1/5 pei metalli.

Per una sezione retta, nella quale viene provocata o sola resistenza all'estensione o sola resistenza alla compressione nei varii suoi punti ed il cui asse neutro non incontra per conseguenza il perimetro, si impiega o l'equazione (1) o l'equazione (2), ponendo in esse per Q_1 e per R_1 i coefficienti di snervamento e di rottura che convengono alla natura della resistenza provocata.

Quando poi nella sezione retta considerata trovansi provocate due resistenze di diversa natura (la qual cosa avviene se l'asse neutro taglia il perimetro della sezione stessa), bisogna generalmente calcolare i due valori massimi S'_{zm} ed S''_{zm} delle accennate due resistenze di diversa natura, i quali valori massimi risultano uno positivo e l'altro negativo, ed applicare o l'equazione (1) o l'equazione (2) tanto per l'estensione quanto per la compressione.

Il doppio segno che si trova nei secondi membri delle equazioni (1) e (2) dipende da ciò che il valore di S_{zm} può essere positivo o negativo. Il segno + conviene pel caso in cui è positivo il valore di S_{zm}, ed i coefficienti Q_1 ed R saranno quelli relativi all'estensione; il segno — conviene pel caso in cui il valore di S_{zm} è negativo, ed i coefficienti Q_1 ed R_1 saranno quelli relativi alla compressione.

22. **Sezione pericolosa per rapporto alla resistenza longitudi-**

nale provocata in un solido elastico con sezioni rette omogenee e sollecitato da forze comunque operanti. — La distanza v_m, la superficie Ω, i momenti d'inerzia I_x ed I_y, la forza Z ed i momenti M_x ed M_y sono elementi che generalmente variano dall'una all'altra sezione retta di un solido qualsiasi sollecitato da forze comunque operanti, e quindi se dalle equazioni (1) e (2) del precedente numero, e dopo d'avervi sostituito il citato valore di S_{zm}, si ricavano i valori del coefficiente di stabilità m_1 ed n_1, si ottengono le formole

$$m_1 = \pm \frac{1}{Q_1}\left(\frac{Z}{\Omega} - v_m \sqrt{\frac{M_x^2}{I_x^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2}}\right)$$

$$n_1 = \pm \frac{1}{R_1}\left(\frac{Z}{\Omega} - v_m \sqrt{\frac{M_x^2}{I_x^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2}}\right),$$

dalle quali risulta che in generale questi coefficienti variano pure da sezione a sezione. Ora, ad una delle sezioni rette del solido considerato corrisponderà il massimo valore del coefficiente m_1 e ad un'altra il massimo valore del coefficiente n_1. La prima di queste sezioni è quella in cui più facilmente che in qualunque altra può avvenire lo snervamento, e quindi è la *sezione pericolosa per rapporto allo snervamento* nel senso longitudinale; la seconda è quella in cui più facilmente che in qualunque altra può avvenire la rottura, e quindi è la *sezione pericolosa per rapporto alla rottura* nel senso longitudinale.

Osservando poi che, per tutte le sezioni di uno stesso solido, si può generalmente assumere il coefficiente di snervamento Q_1 eguale ad una frazione k_1 del corrispondente coefficiente di rottura R_1, risulta: che i due massimi di m_1 e di n_1 corrispondono generalmente ad una stessa sezione; che quindi si riducono ad una sola le due sezioni pericolose per rapporto allo snervamento ed alla rottura nel senso longitudinale; e che una tale sezione si determina cercando quella per cui ha il più gran valore una delle due espressioni

$$\pm \frac{1}{Q_1}\left(\frac{Z}{\Omega} - v_m \sqrt{\frac{M_x^2}{I_x^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2}}\right) \quad \text{e} \quad \pm \frac{1}{R_1}\left(\frac{Z}{\Omega} - v_m \sqrt{\frac{M_x^2}{I_x^2} + \frac{M_y^2}{I_y^2}}\right).$$

Nel far uso dell'una o dell'altra delle or indicate espressioni per determinare la sezione pericolosa, importa osservare: che, per le sezioni il cui asse neutro non incontra il perimetro, basta applicarla

al solo punto che maggiormente dista dall'asse medesimo; che, per le sezioni il cui asse neutro incontra il perimetro, bisogna generalmente applicarla ai due punti che maggiormente distano e che sono uno da una parte e l'altro dall'altra del detto asse; che tali espressioni rappresentano rispettivamente i coefficienti di stabilità m_1 ed n_1, ossia quantità essenzialmente positive; e che per conseguenza si devono considerare come precedute dal segno + o dal segno —, secondo che il binomio entro le parentesi dà luogo ad una quantità positiva oppure ad una quantità negativa. In quanto ai valori dei coefficienti Q_1 ed R_1, si assumeranno quelli relativi all'estensione quando detto binomio dà luogo ad una quantità positiva, e si prenderanno quelli relativi alla compressione quando lo stesso binomio risulta una quantità negativa.

23. **Equazione di stabilità per rapporto alla resistenza longitudinale provocata in un solido elastico con sezioni rette omogenee e sollecitato da forze comunque operanti.** — Quest'equazione si deve instituire per la sezione pericolosa (sempre determinabile col criterio che venne dato nel precedente numero) e per quel punto di essa cui corrisponde il più gran valore del coefficiente di stabilità. Se adunque si chiama

S_{zmp} la resistenza longitudinale, riferita all'unità di superficie,

e se alle lettere Q_1, m_1, R_1 e n_1 si conservano i significati che loro vennero attribuiti nel numero 21, si ottiene:

$$m_1 Q_1 = \pm S_{zmp} \qquad (1)$$

per equazione di stabilità nel caso in cui vuolsi far uso del coefficiente di snervamento Q_1; ed

$$n_1 R_1 = \pm S_{zmp}$$

per equazione di stabilità nel caso in cui vuolsi far uso del coefficiente di rottura R_1.

Per quanto spetta al segno da adottarsi nel secondo membro delle poste equazioni, ed ai valori dei coefficienti m_1 ed n_1, affinchè si possa dire che vi è nel corpo la voluta stabilità, valgono le osservazioni che già vennero fatte nel citato numero 21.

CAPITOLO III.

Casi particolari che più di frequente si presentano nella pratica delle costruzioni

24. **Solido con asse rettilineo, nel quale trovasi provocata la resistenza all'estensione.** — In un solido elastico, avente per asse una retta A B (*Fig.* 35) trovasi provocata la sola resistenza all'estensione, allorquando, considerando una sua sezione retta qualunque D E F, tutte le forze, applicate alla parte di solido compresa fra questa sezione e la sua base estrema G H I, ammettono una risultante unica T′ coincidente in direzione coll'asse A B e diretta verso l'esterno del corpo. Infatti, immaginando condotti, nella sezione retta qualunque D E F i due assi coordinati ortogonali Cx e Cy diretti secondo i suoi assi principali centrali d'inerzia, normalmente al piano della sezione stessa il terzo asse Cz volto in modo da passare pel centro B della base estrema G H I, si ha: che le forze X, Y, Z e che i momenti M_x, M_y ed M_z (num. 5) sono dati da

$$X=0, \qquad Y=0, \qquad Z=T',$$

$$M_x=0, \qquad M_y=0, \qquad M_z=0;$$

che i valori di s e di S, a cui conducono le formole (3) dei numeri 6 e 7, risultano nulli, e che quindi nella sezione retta qualunque D E F non ha luogo scorrimento nè viene provocata alcuna resistenza trasversale; che non sono nulli i valori di s_z e di S_z ricavabili dalle formole (1) dei numeri 17 e 18, e che per conseguenza nell'accennata sezione retta trovasi provocata la sola resistenza longitudinale; finalmente, che i detti valori di s_z e di S_z risultano positivi, cosicchè, rappresentando il primo un allontanamento di un punto qualunque della sezione D E F del punto corrispondente della sezione vicinissima D′ E′ F′ e rappresentando il secondo una resistenza longitudinale positiva, trovasi provocata la resistenza all'estensione.

Le formole (1) e (2) del numero 15 dànno

$$\operatorname{tang}\psi=\frac{0}{0}$$

$$V=\infty,$$

ossia che l'asse neutro trovasi ad una distanza infinita, e che una sezione retta qualunque D E F, pel fatto della deformazione, trasportasi parallelamente a se stessa passando in $D_1 E_1 F_1$.

Lo spostamento longitudinale s_z di un punto qualunque della sezione retta D E F relativamente alla sezione vicinissima D' E' F', distante dalla prima della quantità $\overline{C C'} = l$, si ottiene applicando la formola (1) del numero 17; e, ponendo invece del coefficiente di elasticità longitudinale E_1 il suo valore particolare E' conveniente al caso dell'estensione, si ha

$$s_z = \frac{l T'}{E' \Omega} \qquad (1).$$

Questo spostamento è costante per tutti i punti della sezione retta D E F e rappresenta l'allungamento che provano tutti gli elementi di fibra, primitivamente lunghi l e compresi fra le due sezioni vicinissime D E F e D' E' F'.

La resistenza longitudinale S_z, si ottiene applicando la formola (1) del numero 18, e viene data da

$$S_z = \frac{T'}{\Omega} \qquad (2).$$

Questa resistenza è costante per tutti i punti della sezione retta D E F e rappresenta la tensione, riferita all'unità di superficie, che la forza T' provoca in un punto qualunque della sezione stessa.

I trovati valori di s_z e di S_z, siccome costanti per tutti i punti della sezione retta qualunque D E F, rappresentano anche: il primo il massimo spostamento longitudinale o massimo allungamento s_{zm} (Num. 20); il secondo la massima resistenza longitudinale o massima tensione S_{zm} (Num. 20).

L'equazione di stabilità per la sezione retta qualunque D E F si ottiene applicando, o l'equazione (1), o l'equazione (2) del numero 21. Volendosi applicare l'equazione (1), invece del coefficiente di stabilità m_1 e del coefficiente di snervamento Q_1 conviene assumere i loro valori particolari m' e Q' relativi all'estensione, e si ha

$$m' Q' = \frac{T'}{\Omega} \qquad (3).$$

Analogamente, volendosi applicare l'equazione (2) del citato numero 21, invece del coefficiente di stabilità n_1 e del coefficiente di rottura

R_1, conviene assumere i loro valori particolari n' ed R' riferentisi pure all'estensione, per cui risulta

$$n' R' = \frac{T'}{\Omega} \qquad (4).$$

L'equazione (3) conviene pei casi in cui si conosce il coefficiente di snervamento Q', e l'equazione (4) pei casi in cui si conosce il solo coefficiente di rottura R'.

La sezione pericolosa, pel solido rappresentato nella figura 35, è quella cui corrisponde il più gran valore dell'una o dell'altra delle due espressioni

$$\frac{T'}{Q'\Omega}, \qquad \frac{T'}{R'\Omega};$$

e le equazioni (3) e (4) diventano le equazioni di stabilità pel corpo considerato quando si pongano in esse i valori di T', Ω, m', Q', n', ed R' relativi alla sezione pericolosa.

Quanto si è detto in questo numero riassume in poco la teoria sulla resistenza all'estensione stata esposta nel capitolo II del volume della nostra *Arte di fabbricare*, il quale tratta della resistenza dei materiali e della stabilità delle costruzioni.

25. **Solido con asse rettilineo nel quale trovasi provocata la sola resistenza alla compressione.** — In un solido elastico avente per asse una retta A B (*Fig.* 36) trovasi provocata la sola resistenza alla compressione, allorquando, considerando una sua sezione retta qualunque D E F, tutte le forze, applicate alla parte di solido compresa fra questa sezione e la sua base estrema G H I, ammettono una risultante unica T'' coincidente in direzione coll'asse A B e diretta verso l'interno del corpo. Infatti, supponendo condotti i due assi coordinati ortogonali Cx e Cy contenuti nel piano della sezione D E F e diretti secondo i suoi assi principali centrali d'inerzia, nonchè il terzo asse Cz normale al piano della sezione stessa e volto in modo da passare pel centro B della base estrema G H I, si ha: che le forze X, Y, Z e che i momenti M_x, M_y ed M_z (num. 5) sono dati da

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -T''$$

$$M = 0_x, \qquad M_y = 0, \qquad M_z = 0;$$

che i valori di s e di S, ricavabili dalle formole (3) dei numeri 6 e 7,

sono nulli, e che quindi nella sezione retta qualunque D E F non ha luogo scorrimento, nè viene provocata alcuna resistenza trasversale; che non sono nulli i valori di s_z e di S_z a cui conducono le formole (1) dei numeri 17 e 18, e che per conseguenza nell'accennata sezione retta viene provocata la resistenza longitudinale; finalmente che i valori di s_z e di S_z riescono negativi, cosicchè, rappresentando il primo un avvicinamento di un punto qualunque della sezione D E F al punto corrispondente della sezione D' E' F' e rappresentando il secondo una resistenza longitudinale negativa, trovasi provocata la resistenza alla compressione.

Dalle formole (1) e (2) del numero 15 ricavasi

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{0}{0}$$

$$V = \infty,$$

che cioè l'asse neutro trovasi ad una distanza infinita, e che una sezione retta qualunque D E F, pel fatto della deformazione, trasportasi parallelamente a se stessa passando in $D_1 E_1 F_1$.

Lo spostamento longitudinale s_z di un punto qualunque della sezione retta D E F relativamente alla sezione vicinissima D' E' F', distante dalla prima della quantità $\overline{CC'} = l$, si ottiene appplicando la formola (1) del numero 17: e, ponendo invece del coefficiente di elasticità longitudinale E_1 il suo valore particolare E'' conveniente al caso della compressione, si ha

$$s_z = -\frac{l\,T''}{E''\,\Omega} \qquad (1).$$

Questo spostamento è costante per tutti i punti della sezione retta D E F e rappresenta l'accorciamento di tutti gli elementi di fibra, primitivamente lunghi l e compresi fra le due sezioni vicinissime D E F e D' E' F'.

La resistenza longitudinale S_z si ha dall'applicazione della formola (1) del numero 18, a viene data da

$$S_z = -\frac{T''}{\Omega} \qquad (2).$$

Questa resistenza, costante per tutti i punti della sezione retta D E F, è la pressione, riferita all'unità di superficie, che la forza premente T'' provoca in un punto qualunque della sezione stessa.

I trovati valori di s_z e di S_z, perchè costanti in tutti i punti della sezione retta D E F, sono anche: il primo il massimo spostamento longitudinale o massimo accorciamento s_{zm} (Num. 20); il secondo la massima resistenza longitudinale o massima pressione S_{zm}.

L'equazione di stabilità per la sezione retta qualunque D E F si ottiene, o coll'applicazione dell'equazione (1), o coll'applicazione dell'equazione (2) del numero 21. Volendosi applicare l'equazione (1), invece del coefficiente di stabilità m_1 e del coefficiente di snervamento Q_1, conviene assumere i loro valori particolari m'' e Q'' relativi alla compressione, e si ha

$$m'' Q'' = \frac{T''}{\Omega} \qquad (3).$$

Così, volendosi applicare l'equazione (2) del citato numero 21, invece del coefficiente di stabilità n_1 e del coefficiente di rottura R_1, conviene assumere i loro valori particolari n'' ed R'' riferentisi pure alla compressione, di modo che risulta

$$n'' R'' = \frac{T''}{\Omega} \qquad (4).$$

Nei casi particolari, conviene applicare l'equazione (3) allorquando si conosce il coefficiente di snervamento Q'', e conviene invece ricorrere all'equazione (4) quando è noto il solo coefficiente di rottura R''.

La sezione pericolosa, pel solido rappresentato nella figura 36, è quella cui corrisponde il più gran valore dell'una o dell'altra delle due espressioni

$$\frac{T''}{Q''\Omega}, \qquad \frac{T''}{R''\Omega};$$

e le equazioni (3) e (4) diventano le equazioni di stabilità per lo stesso corpo, quando in esse si pongano i valori di $T'', \Omega, m'', Q'', n''$ ed R'' relativi alla sezione pericolosa.

Quello che in questo numero si è esposto riassume in poco la teoria sulla resistenza alla compressione, quale si è data nel capitolo III del volume della nostra *Arte di Fabbricare*, il quale si raggira sulla resistenza dei materiali e sulla stabilità delle costruzioni.

26. **Solido con asse rettilineo nel quale trovasi provocata la resistenza alla torsione.** — In un solido elastico, avente per asse una retta A B (*Fig.* 37), trovasi provocata la sola resistenza alla tor-

sione, allorquando tutte le forze comprese fra una sua sezione retta qualunque D E F e la sua base estrema G H I, si riducono a due forze eguali e contrarie F contenute in un piano parallelo a quello della detta sezione e producenti quindi una coppia di momento M. Infatti, immaginando tracciati i tre assi coordinati ortogonali Cx, Cy e Cz, i due primi contenuti nel piano della sezione D E F e diretti secondo i suoi assi principali centrali d'inerzia, il terzo normale al piano della sezione stessa, e supponendo che la coppia di momento M tenda produrre rotazioni da y verso x, si ha: che i valori delle forze X, Y, Z e dei momenti M_x, M_y ed M_z (Num. 5) sono dati da

$$X=0, \qquad Y=0, \qquad Z=0,$$

$$M_x=0, \qquad M_y=0, \qquad M_z=M;$$

che le due coordinate x_0 ed y_0 del centro di scorrimento, le quali si ottengono applicando le formole (5) e (6) dei numeri 6 e 7, sono nulle, di maniera che questo centro si confonde col centro di superficie C; che i valori di s e di S, ricavabili dalle formole (1) e (2) del numero 9, non sono nulli, e che per conseguenza nella sezione considerata vi ha scorrimento trasversale e provocazione di resistenza trasversale; che le linee di egual scorrimento sono tante circonferenze di circolo aventi il loro centro in C; che quindi la sezione D E F si sposta relativamente alla sezione vicinissima D' E' F', distante da essa di $\overline{CC'}=l$, rotando intorno all'asse A B e cimentando la resitenza alla torsione; e finalmente che questa resistenza alla torsione è l'unica provocata nel corpo in quistione, giacchè sono nulli i valori di s_z e di S_z che risultano dall'applicazione delle formole (1) dei numeri 17 e 18.

Lo scorrimento s per un punto qualunque m della sezione D E F, distante dal centro C di $\overline{Cm}=r$, e la resistenza trasversale S nello stesso punto, si ottengono, come già si disse, applicando le formole (1) e (2) del numero 9, e, ponendo invece del coefficiente di stabilità trasversale E_t il suo valore particolare E''' conveniente al caso della torsione, si hanno le formole

$$s=\frac{l\,M\,r}{E'''\,I_z} \qquad (1)$$

$$S=\frac{M\,r}{I_z} \qquad (2).$$

Lo scorrimento s tende manifestarsi normalmente al raggio Cm e da

m verso t, ossia da dritta verso sinistra per rapporto ad un osservatore posto nel centro C e rivolto verso il punto m. Questo scorrimento s poi si può ritenere come un piccolissimo arco circolare mm_1 di centro C e di raggio $\overline{Cm}$ in cui proiettasi, sul piano della sezione retta DEF, la linea $m'm_1$ rappresentante, dopo la deformazione pel fatto della torsione, l'elemento di fibra di lunghezza primitiva mm'. La resistenza trasversale S ha luogo in senso contrario allo scorrimento del punto m, ossia da m verso t' secondo la tangente in m alla circonferenza di raggio $\overline{Cm}$.

Il punto di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale, per la sezione qualunque DEF, è quello del suo perimetro il quale maggiormente dista dal centro C; e, qualunque sia la forma dell'indicata sezione, riesce sempre assai facile la sua determinazione seguendo le norme che vennero date nel numero 10. Determinato il punto di massimo scorrimento, si ha, nella sua distanza dal centro C, il raggio r_m della linea di massimo scorrimento.

In quanto allo scorrimento massimo s_m ed alla resistenza trasversale massima S_m per la sezione retta qualunque DEF, si ottengono i loro valori applicando le formole (1) e (2) del numero 11, e si ha

$$s_m = \frac{l M r_m}{E''' I_z} \qquad (3)$$

$$S_m = \frac{M r_m}{I_z} \qquad (4).$$

L'equazione di stabilità relativa alla resistenza trasversale provocata nella sezione retta qualunque DEF si ottiene, o applicando l'equazione (1), o applicando l'equazione (2) del numero 12. Volendosi applicare l'equazione (1), invece del coefficiente di stabilità m_t e del coefficiente di snervamento Q_t, conviene impiegare i loro valori particolari m''' e Q''' relativi alla torsione, e si ha

$$m''' Q''' = \frac{M r_m}{I_z} \qquad (5);$$

e, volendosi adottare l'equazione (2) del citato numero 12, invece del coefficiente di stabilità n_t e del coefficiente di rottura R_t, conviene assumere i loro valori particolari n''' ed R''' riferentisi pure alla torsione, cosicchè risulta

$$n'''R''' = \frac{M r_m}{I_z} \qquad (6).$$

Nei casi particolari, impiegasi l'equazione (5) quando si conosce il coefficiente di snervamento Q''', e si ricorre all'equazione (6) quando è noto il solo coefficiente di rottura R'''.

La sezione pericolosa per rapporto alla resistenza trasversale, provocata nel corpo in quistione, è quella cui risponde il più gran valore dell'una o dell'altra delle due espressioni

$$\frac{M r_m}{Q''' I_z}, \qquad \frac{M r_m}{R''' I_z}$$

e, per equazione di stabilità riferentesi alla resistenza trasversale provocata nello stesso corpo, si può assumere o la (5) o la (6), purchè in esse si pongano i valori di M, r_m, I_z, m''', Q''', n''' ed R''' relativi alla sezione pericolosa.

Se la coppia di momento M tende produrre rotazioni da x verso y, il valore di M_z è negativo ossia vale — M; ed i valori di s, S, s_m ed S_m risultano negativi. Questo significa: che lo scorrimento del punto m della sezione DEF tende manifestarsi, non nella direzione mt, ma nella direzione opposta mt'; e che la resistenza trasversale nello stesso punto ha ancora luogo nella direzione mt, non da m verso t', ma da m verso t.

Quanto in questo numero si è detto riassume la teoria sulla resistenza alla torsione, stata esposta nel nostro lavoro sull'*Arte di fabbricare* al capitolo IV del volume sulla resistenza dei materiali e sulla stabilità delle costruzioni.

27. **Solido nel quale trovasi provocata la resistenza allo scorrimento.** — In una sezione retta qualunque DEF (*Fig.* 38) di un solido elastico, avente per asse una retta AB, trovasi provocata la sola resistenza allo scorrimento detta anche *resistenza al taglio*, allorquando tutte le forze, comprese fra una sezione retta qualunque DEF e la sua base estrema GHI, si riducono ad una forza unica N contenuta nel piano nella sezione retta medesima. Infatti, essendo Cx, Cy e Cz i tre assi coordinati ortogonali, i due primi contenuti nel piano della sezione DEF e diretti secondo i suoi assi principali centrali d'inerzia, il terzo normale al piano della sezione stessa, e supponendo che sia α l'angolo NCx che la direzione della forza N fa coll'asse delle ascisse,

si ha: che le forze X, Y, Z ed i momenti M_x, M_y ed M_z (Num. 5) sono dati da

$$X = N\cos\alpha, \qquad Y = N\operatorname{sen}\alpha, \qquad Z = 0,$$

$$M_x = 0, \qquad M_y = 0, \qquad M_z = 0;$$

che le due coordinate x_0 ed y_0 del centro di scorrimento, le quali risultano dall'applicazione delle formole (5) e (6) dei numeri 6 o 7, sono infinite, di maniera che questo centro non esiste; che i valori di s e di S, ricavabili dalle equazioni (3) dei numeri 6 e 7, non sono nulli, e che quindi nella sezione considerata vi ha scorrimento trasversale o provocazione di resistenza trasversale; che gli stessi valori di s e di S sono costanti per tutti i punti della stessa sezione; che l'angolo χ, a cui conduce l'equazione (4) del numero 6, è eguale all'angolo α, cosicchè la sezione D E F tende muoversi rispetto alla sezione vicinissima D' E' F', distante dalla prima di $\overline{CC'} = l$, per scorrimento di tutti i suoi punti nella direzione della forza N; e finalmente che questa resistenza allo scorrimento è l'unica provocata nella sezione D E F, giacchè sono nulli i valori di s_z e di S_z, che risultano dall'applicazione delle formole (1) dei numeri 17 e 18.

Lo scorrimento s di un punto qualunque m della sezione D E F e la resistenza trasversale S, riferita all'unità di superficie, nello stesso punto, che, come già si disse, si ottengono applicando le equazioni (3) dei numeri 6 e 7, per essere $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, e pel cambiamento del coefficiente di elasticità trasversale E_z nel suo valore particolare E^{iv} conveniente al caso dello scorrimento senza rotazione, riultano

$$s = \frac{l\,N}{E'''\,\Omega} \qquad (1)$$

$$S = \frac{N}{\Omega} \qquad (2).$$

Lo scorrimento s tende manifestarsi nel senso stesso secondo cui opera la forza N, e la resistenza trasversale S agisce in direzione diametralmente contraria a quella della stessa forza.

I valori di s e di S dati dalle formole (1) e (2), siccome costanti per tutti i punti della sezione retta D E F, rappresentano anche: il

primo il massimo scorrimento s_m, ed il secondo la massima resistenza trasversale S_m.

L'equazione di stabilità per la sezione retta DEF si ha, o coll'applicazione della formola (1) o coll'applicazione della formola (2) del numero 12. Volendosi applicare l'equazione (1), invece del coefficiente di stabilità m_t e del coefficiente di snervamento Q_t, conviene assumere i loro valori particolari m^{IV} e Q^{IV} relativi alla resistenza allo scorrimento, e si ha

$$m^{IV} Q^{IV} = \frac{N}{\Omega} \qquad (3).$$

Analogamente, volendosi applicare l'equazione (2) del citato numero 12, invece del coefficiente di stabilità n_t e del coefficiente di rottura R_t, conviene assumere i loro valori particolari n^{IV} ed R^{IV} riferentisi pure allo scorrimento, per cui risulta

$$n^{IV} R^{IV} = \frac{N}{\Omega} \qquad (4).$$

Nei casi particolari conviene applicare l'equazione (3) allorquando si conosce il coefficiente di snervamento Q^{IV}, e conviene invece ricorrere all'equazione (4) quando è noto il solo coefficiente di rottura R^{IV}.

Per un solido, in cui vi sono diverse sezioni nelle quali trovasi provocata la resistenza al taglio, si determina la sezione pericolosa trovando quella per cui ha luogo il più gran valore dell'una o dell'altra delle due espressioni

$$\frac{N}{Q^{IV}\Omega} \qquad (5),$$

$$\frac{N}{R^{IV}\Omega} \qquad (6);$$

e le equazioni (3) e (4) diventano le equazioni di stabilità pel corpo considerato, quando in esse si pongano i valori di N, Ω, m^{IV}, Q^{IV}, n^{IV} ed R^{IV} relativi alla sezione pericolosa.

Quello che brevemente si è detto in questo numero riassume la teoria sulla resistenza allo scorrimento o al taglio, stata esposta nel nostro lavoro sull'*Arte di fabbricare* al capitolo V del volume sulla resistenza dei materiali e sulla stabilità delle costruzioni.

28. **Solido con asse rettilineo nel quale trovasi provocata la**

resistenza alla flessione. — In un solido elastico, il cui asse sia una retta A B (*Fig.* 39), si trova provocata la resistenza alla flessione, allorquando tutte le forze, comprese fra una sua sezione retta qualunque E D F e la sua base estrema G H I, si riducono a due forze eguali e contrarie U contenute in un piano z C O passante pel detto asse, e producenti quindi una coppia di momento μ. Infatti, se immaginansi tracciati i tre assi coordinati ortogonali Cx, Cy e Cz, i due primi contenuti nel piano della sezione D E F e diretti secondo i suoi assi principali centrali d'inerzia, il terzo normale al piano della sezione stessa, e se chiamasi β l'angolo μ C x che la direzione Cμ dell'asse della coppia di momento μ fa colla parte positiva dell'asse delle x, risulta: che i valori delle forze X, Y, Z e dei momenti M_x, M_y ed M_z (Num. 5) sono dati da

$$X=0, \qquad Y=0, \qquad Z=0,$$

$$M_x=\mu\cos\beta, \qquad M_y=\mu\,\mathrm{sen}\,\beta, \qquad M_z=0;$$

che i valori di s e di S, ricavabili dalle formole (3) dei numeri 6 e 7, sono nulli, e che quindi non ha luogo scorrimento nè trovasi provocata alcuna resistenza trasversale nella sezione retta qualunque D E F; che è nullo il valore di V che si ottiene applicando la formola (2) dello numero 15, cosicchè l'asse neutro corrispondente alla sezione qualunque D E F passa pel centro di superficie e taglia il contorno della sezione stessa; che l'asse neutro divide la detta sezione retta in due parti, in una delle quali hanno luogo tensioni, mentre nell'altra vi sono pressioni; e che per conseguenza, essendovi soltanto fibre allungate e fibre accorciate colla fibra media A B piegata e conservante la sua primitiva lunghezza, trovasi provocata la resistenza alla flessione.

Le formole (1) e (2) del numero 15 danno

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{tang}\,\psi=\dfrac{I_x}{I_y}\,\mathrm{tang}\,\beta \\ \\ V=0 \end{array}\right\} \quad (1),$$

ossia che l'asse neutro è una retta V V′ passante pel centro di superficie C e facente colla parte positiva Gx dell'asse delle ascisse un angolo la cui tangente vale $\dfrac{I_x}{I_y}\,\mathrm{tang}\,\beta$.

Lo spostamento longitudinale s_z di un punto qualunque della sezione retta D E F viene dato dalla formola

$$s_z = -\frac{l}{E_1} v \mu \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (2),$$

che si deduce applicando la formola (1) del numero 17. Per quanto poi si è detto nell'or citato numero, sono positivi i valori di v che si riferiscono a punti posti nella parte M D L della sezione retta D E F, e negativi quelli che si riferiscono a punti appartenenti all'altra parte L E M. Segue da ciò: che nella parte M D L hanno luogo compressioni, perchè risultano negativi i valori di s_z relativi ai diversi suoi punti; che nella parte L E M hanno luogo estensioni, perchè risultano positivi i valori di s_z che corrispondono ai varii suoi punti.

La resistenza longitudinale S_z, riferita all'unità di superficie, per un punto qualunque della sezione retta D E F, si ottiene applicando al caso che trattiamo l'equazione (1) del numero 18, e questa resistenza viene data dalla formola

$$S_z = -v \mu \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (3).$$

Siccome poi i valori di v sono positivi per la parte M D L della sezione retta considerata, e negativi quelli dell'altra parte L E M, si ha: che ha luogo pressione in tutti i punti della prima parte e tensione in tutti quelli della seconda.

Il massimo spostamento longitudinale s_{zm} e la massima resistenza longitudinale S_{zm} si ottengono applicando le formole (1) e (2) del numero 20. Perciò, chiamando

— v' il più grande dei v negativi, ossia per la sezione retta D E F il valore algebrico della distanza di quel punto del contorno L E M che maggiormente dista dall'asse neutro V V', cosicchè v' è il valore assoluto di questa distanza,

v'' il più grande dei v positivi, ossia per la sezione retta D E F la distanza di quel punto del contorno M D L, che dista pure maggiormente dal detto asse neutro,

si ha: che il massimo allungamento s'_{zm} e la massima tensione S'_{zm} per la parte L E M della sezione D E F sono dati dalle formole

$$s'_{zm} = \frac{l}{E_1} v' \mu \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (4),$$

$$S'_{zm} = v' \mu \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (5);$$

che il massimo accorciamento s''_{zm} e la massima pressione S''_{zm} per la parte M D L della stessa sezione retta risultano dalle formole

$$s''_{zm} = -\frac{l}{E_1} v'' \mu \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (6),$$

$$S''_{zm} = -v'' \mu \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (7).$$

Nell'instituire le equazioni di stabilità per la sezione retta D E F, bisogna evidentemente tener conto dell'estensione e della compressione. Conservando alle lettere m', Q', n', R', m'', Q'', n'' ed R'' i significati che loro vennero dati nei numeri 24 e 25, le equazioni di stabilità relative alla massima tensione, che si verifica in quel punto del contorno L E M che maggiormente dista dall'asse V V', sono

$$m' Q' = v' \mu \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (8),$$

$$n' R' = v' \mu \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (9),$$

la prima delle quali è applicabile quando si conosce il coefficiente di snervamento Q', e la seconda quando si conosce il coefficiente di rottura R'. — In quanto poi alle equazioni di stabilità relative alla massima pressione che si verifica in quel punto del contorno M D L che maggiormente dista dall'asse V V', esse sono

$$m'' Q'' = v'' \mu \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (10)$$

$$n''R'' = v''\mu \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (11),$$

la prima delle quali riesce applicabile quando si conosce il coefficiente di snervamento Q'', e la seconda quando è noto il coefficiente di rottura R''.

La sezione pericolosa, per rapporto alla resistenza all'estensione provocata nel corpo considerato (Num. 22), è quella cui corrisponde il più gran valore dell'una o dell'altra delle due espressioni

$$\frac{v'\mu}{Q'} \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (12),$$

$$\frac{v'\mu}{R'} \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (13),$$

e la sezione pericolosa per rapporto alla resistenza alla compressione provocata nello stesso corpo è quella cui corrisponde il più gran valore dell'una o dell'altra delle due espressioni

$$\frac{v''\mu}{Q''} \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (14),$$

$$\frac{v''\mu}{R''} \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (15).$$

Le equazioni di stabilità (8), (9), (10) ed (11) diventano quelle convenienti al corpo rappresentato nella figura 39, quando i valori di v', v'', I_x, I_y, β, μ, m', Q', m'', Q'', n', R', n'' ed R'' sono quelli relativi alle sezioni pericolose.

Se la coppia di momento μ trovasi disposta in modo, per rapporto alla sezione retta DEF (*Fig.* 40), da tagliarla secondo un asse principale centrale d'inerzia, per esempio secondo l'asse Cy, allora l'asse della coppia è diretto secondo l'asse delle ascisse, e, supponendo che il verso della coppia stessa sia da z verso y, cade il suo asse nella direzione Cx. L'angolo β è nullo, risulta pur nullo l'angolo ψ dato

dalla prima delle formole (1), e quindi l'asse neutro cade nella stessa direzione $x x'$ dell'asse delle ascisse. — Le formole (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10) e (11) si semplificano e diventano

$$s_z = -\frac{l}{E_1}\frac{v\mu}{I_x} \qquad (2'),$$

$$S_z = -\frac{v\mu}{I_x} \qquad (3'),$$

$$s'_{zm} = \frac{l}{E_1}\frac{v'\mu}{I_x} \qquad (4'),$$

$$S'_{zm} = \frac{v'\mu}{I_x} \qquad (5'),$$

$$s''_{zm} = -\frac{l}{E_1}\frac{v''\mu}{I_x} \qquad (6'),$$

$$S''_{zm} = -\frac{v''\mu}{I_x} \qquad (7'),$$

$$m'Q' = \frac{v'\mu}{I_x} \qquad (8'),$$

$$n'R' = \frac{v'\mu}{I_x} \qquad (9'),$$

$$m''Q'' = \frac{v''\mu}{I_x} \qquad (10'),$$

$$m''R'' = \frac{v''\mu}{I_x} \qquad (11');$$

e le espressioni (12), (13), (14) e (15) si riducono

$$(12') \qquad \frac{v'\mu}{Q'I_x} \qquad \frac{v'\mu}{R'I_x} \qquad (13'),$$

$$(14') \qquad \frac{v''\mu}{Q''I_x} \qquad \frac{v''\mu}{R''I_x} \qquad (15').$$

29. **Solido rettilineo assoggettato all'azione di forze perpendicolari al suo asse e contenute in uno stesso piano passante per**

l'asse medesimo. — Questo caso è uno dei più frequenti nella pratica delle costruzioni, e si verifica per le travi orizzontalmente disposte e caricate di pesi.

Essendo A B (*Fig.* 41) l'asse rettilineo del solido elastico di cui vuolsi studiare la resistenza e la stabilità, si consideri in esso una sezione retta qualunque D E F cogli assi coordinati $x x'$ ed $y y'$ nella direzione dei suoi assi principali centrali d'inerzia, e suppongasi che il piano in cui trovansi tutte le forze sollecitanti sia quello determinato dall'asse A B e dalla retta O C K. Una qualunque delle forze estrinseche poste da una stessa parte della sezione D E F si indichi con P, e sia d la distanza $\overline{CH}$ del suo punto d'applicazione dalla sezione stessa. Considerando come positivi i valori di P che, supposti trasportati parallelamente a sè stessi nel punto C, risultano volti da C verso O, e come negativi quelli rivolti nel senso contrario, la somma algebrica di tutte le forze estrinseche poste a dritta della sezione D E F e la somma algebrica dei momenti delle forze stesse rispetto al piano della sezione medesima, si possono rispettivamente rappresentare colle somme ΣP e $\Sigma P d$.

La somma ΣP rappresenta la forza che tende tagliare il solido secondo la sezione retta D E F, ossia lo *sforzo di taglio* (*Arte di fabbricare, Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni*, capitolo VI, numero 108), che ha luogo nella sezione stessa; ed il suo valore può risultare positivo o negativo. Nel primo caso la detta forza opera da C verso O; nel secondo caso opera in contraria direzione, ossia da C verso K.

La somma $\Sigma P d$ è il momento della coppia che tende far rotare, intorno ad un asse posto nel piano e passante pel centro di superficie della sezione retta D E F, la parte di solido che trovasi a dritta della sezione stessa, ossia è il *momento inflettente* (*Arte di fabbricare, Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni*, capitolo VI, numero 90) per questa sezione; ed un tale momento può risultare positivo o negativo. Nel primo caso esso tende produrre una rotazione da z verso O, e l'asse della coppia corrispondente ha la direzione $C\mu$ perpendicolare al piano z C O; nel secondo caso invece tenderebbe produrre una rotazione contraria, ossia da O verso z, e l'asse della coppia corrispondente avrebbe direzione diametralmente opposta a quella di $C\mu$.

Premesso questo, se chiamansi

N il valore assoluto dello sforzo di taglio, ossia il valore assoluto della somma ΣP per la sezione retta qualunque D E F,

μ il valore assoluto del momento inflettente, ossia il valore assoluto della somma $\Sigma P d$ per la stessa sezione,

β l'angolo $x C \mu$ che l'asse $C\mu$ della coppia di momento μ fa colla parte positiva dell'asse delle ascisse,

α l'angolo che la proiezione della forza ΣP sul piano della sezione retta qualunque D E F fa pure colla parte positiva dell'asse delle ascisse, angolo che sulla figura è quello che la parte C O o che la parte C K della retta O K fa coll'asse delle ascisse, secondo che la somma ΣP è positiva o negativa; i valori delle forze X, Y, Z e quelli dei momenti M_x, M_y ed M_z (Num. 5) risultano

$$X = N \cos \alpha, \qquad Y = N \operatorname{sen} \alpha, \qquad Z = 0,$$

$$M_x = \mu \cos \beta, \qquad M_y = \mu \operatorname{sen} \beta, \qquad M_z = 0.$$

Se ora osservasi che i valori di X, Y e M_z sono i soli elementi relativi alle forze estrinseche, i quali hanno influenza sulla resistenza trasversale; e siccome essi non differiscono da quelli stati adoperati nel numero 27, si ha che, per quanto si riferisce alla resistenza trasversale, convengono le formole che nel detto numero vennero trovate. Le formole (1) e (2) servono per determinare lo scorrimento trasversale s e la resistenza trrasversale S, riferita all'unità di superficie, per un punto qualsiasi della sezione retta D E F; l'equazione di stabilità relativa alla resistenza trasversale può essere o l'una o l'altra delle equazioni (3) e (4); e finalmente la sezione pericolosa, per rapporto alla resistenza trasversale, è quella alla quale corrisponde il più gran valore dell'epressione (5) od anche dell'espressione (6).

I valori di Z, M_x ed M_y sono i soli elementi relativi alle forze estrinseche, i quali influiscono sulla resistenza longitudinale. Questi elementi non differiscono da quelli stati adottati nel precedente numero 28; e quindi, al problema che risolviamo e per quanto si riferisce alla resistenza longitudinale provocata nella sezione qualunque D E F, convengono le formole che nello stesso numero si trovano riportate. Le formole (1) servono alla determinazione dell'asse neutro V V', il quale passa pel centro di superficie C della detta sezione; le formole (2) e (3) si prestano alla determinazione dello spostamento longitudinale s_z e della resistenza longitudinale S_z, riferita all'unità di superficie, per un punto qualunque della sezione stessa; le formole (4) e (5) danno il massimo allungamento s'_{zm} e la massima tensione S'_{zm}, e le formole (6) e (7) il massimo accorciamento s''_{zm} e la massima

pressione S''_{zm}; per equazione di stabilità relativa all'estensione, serve o l'una o l'altra delle equazioni (8) e (9), e, per equazione di stabilità riferentesi alla pressione, viene in acconcio o l'una o l'altra delle equazioni (10) e (11). Quando l'asse della coppia di momento μ ha la direzione $C\mu$, per quanto si è detto nei numeri 17 e 18, si verificano tensioni nella parte L E M e pressioni nella parte M F L della sezione considerata; viceversa, quando l'asse neutro ha direzione diametralmente opposta a $C\mu$ hanno luogo tensioni nella parte M F L e pressioni nell'altra parte L E M. La sezione pericolosa per rapporto all'estensione è quella cui corrisponde il più gran valore di una delle due espressioni (12) e (13), e la sezione pericolosa per rapporto alla compressione è quell'altra cui corrisponde il più gran valore di una delle due espressioni (14) e (15).

Allorquando il piano che contiene le forze sollecitanti P taglia la sezione retta qualunque D E F secondo un asse principale centrale d'inerzia, per esempio secondo l'asse Cy, invece delle formole (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10) ed (11) del precedente numero, convengono le formole più semplici (2'), (3'), (4'), (5'), (6'), (7'), (8'), (9'), (10') ed (11'); e, invece delle espressioni (12), (13), (14) e (15), tornano vantaggiose le altre (12'), (13'), (14') e (15').

Il problema risoluto in questo numero riassume in breve la teoria sulla resistenza alla flessione, prodotta nei solidi rettilinei da forze contenute in uno stesso piano passante pei loro assi ed a questi perpendicolari, stata esposta nel nostro lavoro sull'*Arte di fabbricare* all'articolo I del capitolo VI del volume sulla resistenza dei materiali e sulla stabilità delle costruzioni.

30. **Solido rettilineo assoggettato all'azione di forze parallele, ma non coincidenti coll'asse.** — Sia A B (*Fig.* 42) l'asse rettilineo di un solido elastico; abbiasi in D E F una sezione retta qualunque; e tutte le forze estrinseche, applicate al corpo nella parte compresa fra la detta sezione e la sua base superiore G H I, diano luogo ad una risultante unica T parallela all'asse A B. Siano Cx, Cy e Cz tre assi coordinati, i due primi diretti secondo gli assi principali centrali d'inerzia della sezione retta D E F, il terzo normale al piano della sezione stessa e rivolto verso quella parte del corpo per la quale vennero considerate le forze estrinseche. Il punto in cui la direzione della forza T incontra il piano della sezione retta D E F sia N, e si indichi con c la distanza di questo punto dal centro C. Immaginando applicate in C due forze contrarie ed eguali a T, immediatamente si riconosce: come la forza T diretta secondo l'asse delle ordi-

nate z tenda, secondo che è diretta secondo la parte positiva o secondo la parte negativa dell'asse delle ordinate z, allontanare od avvicinare la sezione DEF alla sezione vicinissima D'E'F'; come la coppia data dalle due forze $+T$ e $-T$, rispettivamente applicate in N e C, tenda far rotare attorno ad un asse posto nel piano della sezione stessa la parte di corpo DEFGHI.

Premesso questo, si chiamino:

μ il valore assoluto del momento Tc dell'indicata coppia;

β l'angolo $xC\mu$ che l'asse $C\mu$ della stessa coppia fa colla parte positiva dell'asse delle ascisse.

I valori delle forze X, Y, Z e quelli dei momenti M_x, M_y ed M_z (Num. 5) sono

$$X=0, \qquad Y=0, \qquad Z=T$$

$$M_x=\mu\cos\beta, \qquad M_y=\mu\operatorname{sen}\beta, \qquad M_z=0.$$

I valori di s e di S, ricavabili dalle formole (3) dei numeri (6) e (7), sono nulli, e per conseguenza nella sezione retta qualunque DEF non ha luogo scorrimento nè provocazione di resistenza trasversale. Non sono poi nulli i valori di s_z e di S_z a cui conducono le formole (1) dei numeri 17 e 18, e quindi trovasi cimentata la resistenza longitudinale.

Dalle equazioni (1) e (2) del numero 15 si ottengono le seguenti formole determinatrici dell'asse neutro

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\psi &= \frac{I_x}{I_y}\operatorname{tang}\beta \\ V &= -\frac{T}{\Omega\mu\sqrt{\dfrac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\dfrac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}} \end{aligned}\right\} \quad (1);$$

cosicchè, nel caso della figura 42 in cui è positivo il valore di $\operatorname{tang}\beta$ ed in cui per conseguenza è positiva la tangente dell'angolo ψ, il detto asse neutro risulta parallelo ad una retta V V', la quale fa colla parte positiva dell'asse delle ascisse un angolo xCV minore di 90°. Siccome poi $C\mu$ rappresenta l'asse della coppia di momento μ, per quanto si è convenuto nel numero 15 sul modo di valutare la distanza V e stando al caso della figura 42, si deve essa portare perpendicolarmente a V V' ed a sinistra per un osservatore posto coll'occhio sull'asse $C\mu$ e rivolto verso il punto C. L'asse neutro adunque è una retta U U'

parallela a V V′, che incontra la retta O K nel punto P, in modo da trovarsi il centro di superficie C fra il detto punto P ed il punto N.

Lo spostamento longitudinale s_z di un punto qualunque della sezione retta D E F si deduce dalla formola (1) del numero 17, e si ha

$$s_z = \frac{l}{E_1}\left(\frac{T}{\Omega} - v\,\mu \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (2).$$

Per quanto poi si è detto nell'or citato numero, sono positivi i valori di v relativi a punti posti nella parte M D L della sezione retta D E F e negativi quelli che si riferiscono a punti appartenenti all'altra parte L E M. Tutti i valori positivi di s_z rappresentano allungamenti, e tutti i valori negativi accorciamenti.

La resistenza longitudinale S_z, per un punto qualunque della sezione retta D E F, si ottiene applicando l'equazione (1) del numero 18, e questa resistenza viene data dalla formola

$$S_z = \frac{T}{\Omega} - v\,\mu \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (3),$$

nella cui applicazione si osserverà quanto già si è detto relativamente al segno da darsi alla distanza v. Rappresentano tensioni i valori positivi di S_z, pressioni i valori negativi.

Il più grande spostamento longitudinale s_{zm} e la massima resistenza longitudinale S_{zm} si ottengono coll'applicazione delle formole (1) e (2) del numero 20. Perciò, dicendo

— v' il più grande dei v negativi, ossia, per la sezione retta D E F, il valore algebrico della distanza di quel punto del contorno L E M che maggiormente dista dalla retta V V′, cosicchè v' è il valore assoluto di questa distanza,

v'' il più grande dei v positivi, ossia, per la sezione retta D E F, la distanza di quel punto del contorno M D L che dista più d'ogni d'altro dalla retta V V′,

si ha: che il massimo allungamento s'_{zm} e la massima tensione riferita all'unità di superficie S'_{zm} per la parte Q E R della sezione D E F sono dati dalle formole

$$s'_{zm} = \frac{l}{E_1}\left(\frac{T}{\Omega} + v'\,\mu \sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (4),$$

$$S'_{zm} = \frac{T}{\Omega} + v' \mu \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{I_y^2}} \qquad (5),$$

che il massimo accorciamento s''_{zm} e la massima pressione S''_{zm} per la parte R D Q della stessa sezione retta risultano dalle formole

$$s''_{zm} = \frac{l}{E_l} \left(\frac{T}{\Omega} - v'' \mu \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{I_y^2}} \right) \qquad (6),$$

$$S''_{zm} = \left(\frac{T}{\Omega} - v'' \mu \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{I_y^2}} \right) \qquad (7).$$

Se l'asse neutro U U' non taglia il perimetro della sezione D E F, le equazioni (6) e (7) danno per s''_{zm} e per S''_{zm} due valori positivi, rappresentanti rispettivamente il minimo allungamento e la minima tensione riferita all'unità di superficie, provocata nella sezione retta considerata.

Avendo le lettere m', Q', n', R', m'', Q'', n'' ed R'' i significati che loro vennero attribuiti nei numeri 24 e 25, l'equazione di stabilità, relativa alla massima tensione che si verifica in quel punto del contorno Q E R che maggiormente dista dall'asse neutro, è o l'una o l'altra delle due (Num. 20 e 21)

$$m' Q' = \frac{T}{\Omega} + v' \mu \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{I_y^2}} \qquad (8),$$

$$n' R' = \frac{T}{\Omega} + v' \mu \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{I_y^2}} \qquad (9),$$

la prima delle quali riesce applicabile quando si conosce il coefficiente di snervamento Q', e la seconda quando è noto il coefficiente di rottura R'. — Le equazioni di stabilità riferentisi alla massima pressione, che ha luogo in quel punto del perimetro R D Q che maggiormente dista dall'asse neutro V V', è o l'una o l'altra delle equazioni (Num. 20 e 21)

$$m''Q'' = -\left(\frac{T}{\Omega} - \nu''\mu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (10);$$

$$n''R'' = -\left(\frac{T}{\Omega} - \nu''\mu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (11).$$

La prima di queste equazioni è conveniente quando si conosce il coefficiente di snervamento Q'', e devesi usare la seconda quando è noto il solo coefficiente di rottura R''. Se l'asse neutro U U' non taglia il perimetro della sezione retta D E F, ciò che ha luogo quando riesce positivo il valore di S''_{zm} dato dalla formola (7), in nessun punto della sezione retta D E F ha luogo pressione, e le equazioni di stabilità si riducono ad una sola delle due equazioni (8) e (9).

La sezione pericolosa per rapporto alla resistenza all'estensione provocata nel corpo da noi considerato è quella cui corrisponde il più gran valore dell'una o dell'altra delle due espressioni

$$\frac{1}{Q'}\left(\frac{T}{\Omega} + \nu'\mu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (12),$$

$$\frac{1}{R'}\left(\frac{T}{\Omega} + \nu'\mu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (13);$$

e la sezione pericolosa sotto il riguardo della resistenza alla pressione è quella cui corrisponde il più gran valore di una delle due espressioni

$$-\frac{1}{Q''}\left(\frac{T}{\Omega} - \nu''\mu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (14),$$

$$-\frac{1}{R''}\left(\frac{T}{\Omega} - \nu''\mu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (15).$$

Se gli assi neutri delle diverse sezioni del corpo considerato non intersecano i perimetri relativi, in nessuna di esse ha luogo pressione e non può aver luogo la ricerca della sezione pericolosa, corrispondente al più gran valore di una delle due espressioni (14) e (15).

Le equazioni di stabilità, relative al corpo rappresentato nella figura 42, possono essere le stesse equazioni (8), (9), (10) ed (11), quando intendasi che i valori di v', v'', Ω, I_x, I_y, T, m', Q', m'', Q'', n', R', n'' ed R'' siano quelli relativi alle sezioni pericolose.

Se il punto N, in cui la direzione della forza T incontra il piano della sezione retta D E F, trovasi su un asse principale centrale d'inerzia, per esempio sull'asse delle y, l'asse della coppia di momento μ cade nella direzione dell'asse delle ascisse, e le formole (1) danno

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\psi &= 0 \\ V &= -\frac{I_x T}{\Omega \mu} \end{aligned}\right\} \quad (1'),$$

ossia che l'asse neutro è parallelo all'asse delle ascisse, e che taglia l'asse delle y nella parte opposta a quella in cui è incontrato dalla direzione della forza T ad una distanza da T data da $\frac{I_x T}{\Omega \mu}$. — Le formole (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10) ed (11) si semplificano diventando

$$s_z = \frac{l}{E_l}\left(\frac{T}{\Omega} - \frac{v\mu}{I_x}\right) \quad (2'),$$

$$S_z = \frac{T}{\Omega} - \frac{v\mu}{I_x} \quad (3'),$$

$$s'_{zm} = \frac{l}{E_l}\left(\frac{T}{\Omega} + \frac{v'\mu}{I_x}\right) \quad (4'),$$

$$S'_{zm} = \frac{T}{\Omega} + \frac{v'\mu}{I_x} \quad (5'),$$

$$s''_{zm} = \frac{l}{E_l}\left(\frac{T}{\Omega} - \frac{v''\mu}{I_x}\right) \quad (6'),$$

$$S''_{zm} = \frac{T}{\Omega} - \frac{v''\mu}{I_x} \quad (7'),$$

$$m'Q' = \frac{T}{\Omega} + \frac{v'\mu}{I_x} \quad (8'),$$

$$n' R' = \frac{T}{\Omega} + \frac{v' \mu}{I_x} \qquad (9'),$$

$$m'' Q'' = -\left(\frac{T}{\Omega} - \frac{v'' \mu}{I_x}\right) \qquad (10')$$

$$n'' R'' = -\left(\frac{T}{\Omega} - \frac{v'' \mu}{I_x}\right) \qquad (11');$$

e le espressioni (12), (13), (14) e (15) si riducono a

$$\frac{1}{Q'}\left(\frac{T}{\Omega} + \frac{v' \mu}{I_x}\right) \qquad (12'),$$

$$\frac{1}{R'}\left(\frac{T}{\Omega} + \frac{v' \mu}{I_x}\right) \qquad (13'),$$

$$-\frac{1}{Q''}\left(\frac{T}{\Omega} - \frac{v'' \mu}{I_x}\right) \qquad (14'),$$

$$-\frac{1}{Q''}\left(\frac{T}{\Omega} - \frac{v'' \mu}{I_x}\right) \qquad (15').$$

Le formole e le espressioni trovate in questo numero convengono anche pel caso in cui la forza T è diretta in modo da produrre avvicinamento della sezione retta D E F alla sezione vicinissima D' E' F', ossia pel caso in cui questa forza è negativa, perchè diretta secondo la parte negativa dell'asse delle ordinate z. Basta perciò cangiare nelle ottenute formole T in — T, ed osservare che, nel caso in cui l'asse neutro non taglia la sezione retta considerata, la qual cosa ha luogo quando il relativo valore di S'_{zm} risulta negativo, in nessuno dei suoi punti ha luogo tensione, e che nelle pratiche applicazioni non devonsi considerare le equazioni di stabilità (8) e (9). Analogamente, quando gli assi neutri delle diverse sezioni non intersecano i perimetri relativi, non può aver luogo la ricerca della sezione pericolosa corrispondente al più gran valore di una delle due espressioni (12) e (13).

Il problema trattato in questo numero riassume quanto di più importante trovasi esposto nel nostro lavoro sull'*Arte di fabbricare*, all'articolo II del capitolo VI del volume sulla resistenza dei materiali e sulla stabilità delle costruzioni.

31. **Solido rettilineo assoggettato all'azione di forze oblique applicate al suo asse e contenute in uno stesso piano passante per l'asse medesimo.** — Questo caso ben di frequente si presenta nella pratica delle costruzioni, e principalmente quando devonsi considerare travi obliquamente disposte e caricate di pesi.

Sia AB (*Fig.* 43) l'asse rettilineo del solido elastico di cui vuolsi studiare la resistenza e la stabilità; e sia DEF una sua sezione retta qualunque cogli assi coordinati xx' ed yy' nella direzione dei suoi assi principali centrali d'inerzia. Il piano in cui trovansi tutte le forze sollecitanti sia quello determinato dall'asse AB e dalla retta OCK'; si considerino tutte le forze estrinseche poste da una stessa parte, per esempio a diritta della sezione DEF; si indichi con K una qualunque di queste forze, con d la distanza $\overline{CH}$ del punto H in cui essa incontra l'asse AB dal centro C dell'indicata sezione retta; e la parte positiva dell'asse delle ordinate z si assuma in modo da attraversare quella parte del corpo per la quale si vogliono considerare le forze estrinseche, come è quella situata a dritta della sezione DEF. Indicando con λ l'angolo zHK che ciascuna delle forze K fa coll'asse delle ordinate z, ognuna di esse ammette le due componenti

$$K\cos\lambda, \qquad K\operatorname{sen}\lambda,$$

la prima delle quali è diretta secondo l'asse AB del solido, mentre l'altra è normale all'asse stesso. Considerando poi tutte le forze poste a dritta della sezione qualunque DEF, si possono rappresentare: con

$$\Sigma K\cos\lambda$$

la somma di tutte le componenti dirette secondo AB; con

$$\Sigma K\operatorname{sen}\lambda$$

la somma di tutte le componenti normali ad AB; e con

$$\Sigma dK\operatorname{sen}\lambda$$

la somma dei momenti delle stesse forze rispetto ad un asse passante pel centro di superficie e contenuto nel piano della sezione medesima.

La somma $\Sigma K\cos\lambda$ è una forza che può risultare positiva o nega-

tiva; che è diretta secondo la parte Cz dell'asse delle z e che tende allontanare la sezione D E F dalla sezione vicinissima D' E' F' quando è positiva; che è diretta secondo la parte Cz' dell'asse delle z e che tende avvicinare la sezione D E F alla sezione vicinissima D' E' F' quando è negativa.

La somma $\Sigma K \operatorname{sen} \lambda$ rappresenta la forza che tende tagliare il solido secondo la sezione retta D E F, ossia lo *sforzo di taglio*, ed il suo valore può essere positivo o negativo. Nel primo caso la detta forza opera da C verso O; nel secondo caso agisce in contraria direzione, ossia da C verso K'.

La somma $\Sigma d K \operatorname{sen} \lambda$ è il momento di una coppia che tende far rotare, intorno ad un asse posto nel piano della sezione retta D E F e passante pel suo centro, la parte del solido che trovasi a dritta della sezione stessa, ossia è il *momento inflettente* per questa sezione, ed un tale momento può riuscire positivo o negativo. Nel primo caso esso tende produrre una rotazione da z verso O, e l'asse della coppia corrispondente ha la direzione Cμ perpendicolare al piano zCO; nel secondo caso invece tende produrre una rotazione contraria, ossia da O verso z, e l'asse della coppia corrispondente ha una direzione diametralmente opposta a quella di Cμ.

Premesso questo, si chiamino per la sezione retta qualunque D E F:

T la somma $\Sigma K \cos \lambda$;

N il valore assoluto dello sforzo di taglio, ossia il valore assoluto della somma $\Sigma K \operatorname{sen} \lambda$;

α l'angolo che la proiezione della forza $\Sigma K \operatorname{sen} \lambda$ sul piano della sezione retta D E F fa colla parte positiva dell'asse delle ascisse, angolo che sulla figura è quello che la parte C O o che la parte C K' della retta O K' fa colla parte positiva dell'asse delle ascisse, secondo che la somma $\Sigma K \operatorname{sen} \lambda$ è positiva o negativa;

μ il valore assoluto del momento inflettente, ossia il valore assoluto della somma $\Sigma d K \operatorname{sen} \lambda$;

β l'angolo xCμ che l'asse Cμ della coppia di momento μ fa colla parte positiva dell'asse delle ascisse.

I valori delle forze X, Y, Z e quelli dei momenti M_x, M_y ed M_z (Num. 5) risultano

$$X = N \cos \alpha, \qquad Y = N \operatorname{sen} \alpha, \qquad Z = T,$$

$$M_x = \mu \cos \beta, \qquad M_y = \mu \operatorname{sen} \beta, \qquad M_z = 0.$$

Osservando ora che i valori di X, Y ed M_z sono i soli elementi relativi alle forze estrinseche, i quali hanno influenza sulla resistenza trasversale, e che tali elementi non differiscono da quelli stati adoperati nel numero 27, si ha che, per quanto si riferisce alla resistenza trasversale, convengono le formole che nel detto numero vennero trovate. Le formole (1) e (2) servono alla determinazione dello scorrimento trasversale s e della resistenza trasversale S, riferita all'unità di superficie, per un punto qualsiasi della sezione retta D E F ; una delle equazioni (3) e (4) è l'equazione di stabilità relativa alla resistenza trasversale ; e finalmente la sezione pericolosa, per rapporto all'or indicata resistenza, è quella cui corrisponde il più gran valore o dall'espressione (5) o dall'espressione (6).

I valori di Z, M_x ed M_y sono i soli elementi relativi alle forze estrinseche, i quali influiscono sulla resistenza longitudinale. Questi elementi non differiscono da quelli stati adottati nel precedente numero 30 ; e quindi, pel problema che risolviamo e per quanto si riferisce alla resistenza longitudinale provocata nella sezione qualunque D E F, servono le stesse formole che in tal numero vennero stabilite. Le formole (1) determinano l'asse neutro ; quando l'asse della coppia di momento μ ha la direzione Cμ e la forza T è diretta secondo l'asse positivo delle z, l'asse neutro risulta una retta U U' intersecante la K' O in un punto P al di sotto del punto C, parallela alla retta V V', la quale colla parte positiva dell'asse delle ascisse fa l'angolo ψ, e distante dal centro di superficie C di una quantità eguale al valore assoluto di V. Le formole (2) e (3) danno lo spostamento longitudinale s_z e la resistenza longitudinale S_z, riferita all'unità di superficie, in un punto qualunque della sezione retta considerata quando si assumano come positivi i valori di v appartenenti ai punti della parte M D L e come negativi i valori di v relativi ai punti dell'altra parte L E M. Le formole (4) e (5) vengono in acconcio per calcolare il massimo allungamento s'_{zm} e la massima tensione S'_{zm} nel punto del contorno L E M che ha la massima distanza v' dalla retta V V' ; e le formole (6) e (7) si prestano per trovare il massimo accorciamento s''_{zm} e la massima pressione S''_{zm} che, quando l'asse neutro taglia il perimetro D E F, hanno luogo in quel punto del contorno M D L, cui corrisponde la più gran distanza v'' dalla retta V V'. Se però l'asse neutro U U' non taglia il perimetro della sezione retta D E F, le equazioni (6) e (7) danno per s''_{zm} ed S''_{zm}, due valori positivi rappresentanti rispettivamente il minimo allungamento e la minima tensione, riferita all'unità di superficie, provocata nella sezione retta considerata.

Per equazione di stabilità relativa all'estensione si ha o l'una o l'altra delle equazioni (8) e (9); e per equazione di stabilità relativa alla compressione, nel caso, ben inteso, in cui l'asse neutro taglia il contorno DEF, serve una delle due equazioni (10) ed (11). Se l'asse neutro non taglia l'or indicato perimetro, si deve assumere come equazione di stabilità una sola delle due equazioni (8) e (9).

La sezione pericolosa per rapporto alla resistenza all'estensione è quella cui corrisponde il più gran valore di una delle due espressioni (12) e (13); e la sezione pericolosa per rapporto alla resistenza alla compressione è quella per cui si verifica il più gran valore di una delle due espressioni (14) e (15). Se però l'asse neutro non taglia il perimetro delle diverse sezioni del corpo, di cui ci siamo proposto di studiare la resistenza e la stabilità, ha solo luogo la ricerca della sezione pericolosa relativa all'estensione.

Allorquando il piano contenente le forze sollecitanti K taglia la sezione retta qualunque DEF, secondo un asse principale centrale d'inerzia, per esempio secondo l'asse Cy, invece delle formole (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10) ed (11) del precedente numero, si hanno le altre assai più semplici (1'), (2'), (3'), (4'), (5'), (6'), (7'), (8'), (9'), (10') ed (11'); e, invece delle espressioni (12), (13), (14) e (15), servono le altre (12'), (13'), (14') e (15').

Quando il valore di T risulta negativo e che contemporaneamente l'asse neutro non taglia il perimetro della sezione retta DEF, in nessun luogo di questa trovasi provocata la resistenza all'estensione, e quindi non si devono considerare le equazioni di stabilità (8) e (9). Un'analoga osservazione si deve fare sull'impiego delle espressioni (12) e (13), giacchè in questo caso non può aver luogo la ricerca della sezione pericolosa relativa all'estensione.

Il problema, di cui in questo numero venne tracciata la risoluzione, riassume quanto havvi di fondamentale nel nostro lavoro sull'*Arte di fabbricare* all'articolo III del capitolo VI del volume sulla resistenza dei materiali e sulla stabilità delle costruzioni.

32. **Solido avente per asse una curva piana ed assoggettato all'azione di forze tutte contenute nel piano determinato dall'asse medesimo.** — Questo caso è uno dei ben frequenti nella pratica delle costruzioni, e si presenta allorquando trattasi di studiare la resistenza e la stabilità di centine, quali sovente s'impiegano nei ponti e nelle tettoie.

Essendo AB (*Fig.* 44) la curva piana costituente l'asse del solido elastico, di cui vuolsi studiare la resistenza e la stabilità; essendo

DEF una sua sezione retta qualunque cogli assi coordinati xx' ed yy' nella direzione dei suoi assi principali centrali d'inerzia, e, volendosi considerare tutte le forze estrinseche applicate al corpo da una stessa parte della sezione retta DEF, per esempio a dritta, si assuma l'asse delle ordinate z con direzione normale al piano dell'or indicata sezione e colla sua parte positiva a dritta della sezione stessa. Il piano contenente tutte le forze sollecitanti, che è quello stesso in cui trovasi l'asse AB, intersechi la considerata sezione secondo la retta OCK'; e suppongansi le dette forze applicate all'asse AB. Dicendo

K una qualunque di tali forze a dritta della sezione DEF,

d la distanza $\overline{HI}$ del suo punto d'applicazione H dal piano della sezione stessa,

e la distanza dello stesso punto H dell'asse Cz,

λ l'angolo $zH''K$ che la direzione della forza K fa coll'asse delle ordinate z,

si ha: che la forza K ammette due componenti

$$K\cos\lambda, \qquad K\operatorname{sen}\lambda,$$

la prima normale e l'altra parallela al piano della sezione retta DEF; che, per l'esistenza della stessa forza K, havvi nel piano OCB una coppia di momento

$$d\,K\operatorname{sen}\lambda - e\,K\cos\lambda = K(d\operatorname{sen}\lambda - e\cos\lambda).$$

Considerando poi tutte le forze che trovansi a dritta della sezione qualunque DEF, risulta che si può rappresentare, con

$$\Sigma K\cos\lambda$$

la somma di tutte le componenti normali alla sezione retta DEF e quindi dirette secondo l'asse Cz, con

$$\Sigma K\operatorname{sen}\lambda$$

la somma di tutte le componenti parallele alla stessa sezione retta, e con

$$\Sigma K(d\operatorname{sen}\lambda - e\cos\lambda)$$

la somma dei momenti di tutte le forze K rispetto ad un asse contenuto nel piano della sezione medesima e passante pel suo centro di superficie C.

La somma $\Sigma K \cos\lambda$ è una forza che può riuscire positiva o negativa; che è parallela all'asse delle ordinate z e che tende allontanare la sezione DEF dalla sezione vicinissima D'E'F' quando è positiva; che è diretta secondo la parte Cz' dell'asse delle z e che tende avvicinare la sezione DEF alla sezione vicinissima D'E'F' quando è negativa.

La somma $\Sigma K \operatorname{sen}\lambda$ è la forza che tende tagliare il solido secondo la sezione retta DEF, ossia lo *sforzo di taglio*, ed il suo valore può essere positivo o negativo. Nel primo caso la detta forza opera da C verso O; nel secondo caso agisce in contraria direzione, ossia da C verso K'.

La somma $\Sigma K (d \operatorname{sen}\lambda - e \cos\lambda)$ è il momento inflettente per la sezione retta DEF; ed un tale momento può essere positivo o negativo. Nel primo caso esso tende produrre una rotazione da z verso O, e l'asse della coppia corrispondente ha la direzione $C\mu$ perpendicolare al piano zCO; nel secondo caso invece tende produrre una rotazione contraria, ossia da O verso z, e l'asse della coppia corrispondente ha una direzione diametralmente opposta a quella di $C\mu$.

Se ora chiamansi, per la sezione retta qualunque DEF,

T la somma $\Sigma K \cos\lambda$,

N il valore assoluto dello sforzo di taglio, ossia il valore assoluto della somma $\Sigma K \operatorname{sen}\lambda$,

α l'angolo che la proiezione della forza $\Sigma K \operatorname{sen}\lambda$ sul piano della sezione retta DEF fa colla parte positiva dell'asse delle ascisse, il qual angolo è quello che la parte CO o che la parte CK' della retta OK' fa colla parte positiva dell'asse delle ascisse, secondo che la somma $\Sigma K \operatorname{sen}\lambda$ è positiva o negativa,

μ il valore assoluto del momento inflettente, ossia il valore assoluto della somma $\Sigma K (d \operatorname{sen}\lambda - e \cos\lambda)$,

β l'angolo $xC\mu$ che l'asse $C\mu$ della coppia di momento μ fa colla parte positiva dell'asse delle ascisse,

si ha che i valori delle forze X, Y, Z e dei momenti M_x, M_y ed M_z (Num. 5) sono dati da

$$X = N \cos\alpha, \qquad Y = N \operatorname{sen}\alpha, \qquad Z = T,$$

$$M_x = \mu \cos\beta, \qquad M_y = \mu \operatorname{sen}\beta, \qquad M_z = 0.$$

Osservando ora che i valori di X, Y, Z, M_x, M_y ed M_z sono dati da espressioni identiche a quelle del numero precedente, risulta che, per lo studio della resistenza e della stabilità di un solido avente per asse una curva piana e sollecitato da forze che si suppongono applicate alla curva medesima e contenute nel piano da essa determinato (*Fig.* 44), convengono le stesse formole state citate nel numero precedente, considerando un solido rettilineo assoggettato all'azione di forze oblique, applicate al suo asse e contenute in uno stesso piano passante per l'asse medesimo (*Fig.* 43).

33. **Modificazioni che si possono apportare alle formole relative alla resistenza longitudinale.** — Nelle formole che abbiamo stabilite in questo capitolo e che contengono il valore del momento inflettente μ, si considera soltanto il valore assoluto di questa quantità e non si tiene conto del segno di cui può essere affetta; e questo perchè, riferendoci all'asse della coppia di momento μ per decidere del senso in cui deve essere portata la distanza V e dei segni da attribuirsi alle distanze v, si finisce appunto per convenientemente tener conto del verso di tale momento. Qualora però si giudichi meglio di non riportarsi all'asse dell'indicata coppia, importa, nelle formole determinatrici della distanza dell'asse neutro dal centro di superficie, come pure in quelle relative agli spostamenti ed alle resistenze longitudinali, tener conto del segno del momento inflettente relativo ad una sezione qualunque, e stabilire le formole riferentisi alla resistenza longitudinale nei modi che seguono.

Nei piani delle sezioni rette e pei loro centri di superficie, s'immaginino condotte le rette che, come uu' (*Fig.* 45) sono perpendicolari ai corrispondenti assi neutri, e di queste rette si considerino le parti Cu che si trovano da una stessa banda per rapporto alla superficie costituita dalle parallele agli assi neutri condotte pei centri di superficie delle diverse sezioni. Si assumano come positivi i momenti inflettenti che tendono far venire l'asse Cz sulla retta Cu, e come negativi quelli che tendono produrre rotazioni contrarie. Allora tutti i valori positivi di V si devono portare da C verso u' e tutti i valori negativi da C verso u. La distanza di un punto qualunque della sezione retta D E F dalla retta V V' condotta pel centro di superficie e parallela all'asse neutro, si considererà siccome positiva o siccome negativa, secondo che è diretta secondo Cu, che si può chiamare la parte positiva dell'asse delle u o secondo Cu' che è la parte negativa dello stesso asse, ed i valori s_z e di S_z rappresenteranno allungamenti e tensioni quando riusciranno positivi, accorciamenti e

pressioni quando risulteranno negativi. Questo modo di stabilire le formole è principalmente utile nei casi particolari stati trattati nei precedenti numeri 28, 29, 30, 31 e 32, nei quali tutte le forze provocanti resistenza longitudinale sono contenute in uno stesso piano passante per l'asse del solido a cui sono applicate.

Si ritenga che le lettere Ω, I_x, I_y l ed E_l conservino i significati che loro vennero attribuiti nel numero 5, le lettere m', Q', n', R', m'', Q'', n'' ed R'' quelli che ad esse vennero dati nei numeri 24 e 25, e si chiamino per la sezione retta qualunque DEF,

u la distanza di un suo punto qualsiasi dalla retta VV', la qual distanza si deve considerare come positiva o come negativa, secondo che è diretta secondo Cu o secondo Cu',

β l'angolo OCy che la traccia del piano contenente tutte le forze provocanti resistenza longitudinale fa coll'asse Cy, il qual angolo è appunto eguale all'altro NCx che la retta CN, perpendicolare a CO, fa coll'asse delle x,

T la somma algebrica delle componenti parallele all'asse Cz di tutte le forze applicate col solido da quella parte della sezione retta DEF, verso la quale venne assunta la direzione positiva dell'asse delle z,

ν il valore algebrico del momento inflettente corrispondente a tutte le forze estrinseche pure applicate al solido dalla stessa parte.

Le due formole

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}\psi &= \frac{I_x}{I_y}\operatorname{tang}\beta \\ V &= -\frac{T}{\Omega\nu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}} \end{aligned}\right\} \quad (1),$$

servono alla determinazione dell'asse neutro, ed il valore di V si deve portare da C verso u', o da C verso u, secondo che risulta positivo o negativo.

Le due formole

$$s_z = \frac{l}{E_l}\left(\frac{T}{\Omega} - u\nu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \quad (2),$$

$$S_z = \frac{T}{\Omega} - u\nu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \quad (3),$$

sono quelle che convengono al calcolo dello spostamento longitudinale s_z e della resistenza longitudinale S_z in un punto qualunque delle sezioni rette D E F, e si ha che i valori positivi di s_z e di S_z sono rispettivamente allungamenti e tensioni, e che i valori negativi sono invece accorciamenti o pressioni.

Le stesse formole (2) e (3) servono a trovare il massimo spostamento s_{zm} e la massima resistenza longitudinale S_{zm} quando si applichino esse pei due valori massimi di u, uno preso nel senso delle u positive e l'altro nel senso delle u negative. Chiamando perciò

— u' il più grande degli u negativi, ossia per la sezione D E F, il valore algebrico della distanza di quel punto del perimetro L E M che maggiormente dista dalla retta V V', cosicchè u' è il valore assoluto di questa distanza,

u'' il più grande degli u positivi, ossia per la sezione retta D E F, la distanza di quel punto del contorno M D L che dista pure più di ogni altro dalla retta V V',

si ha: che il massimo spostamento s'_{zm} e la massima resistenza longitudinale S'_{zm} dalla parte delle u negative sono dati dalle formole

$$s'_{zm} = \frac{l}{E_1}\left(\frac{T}{\Omega} + u'\nu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (4),$$

$$S'_{zm} = \frac{T}{\Omega} + u'\nu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (5);$$

che il massimo spostamento s''_{zm} e la massima resistenza longitudinale S''_{zm} dalla parte delle u positive si hanno dalle formole

$$s''_{zm} = \frac{l}{E_1}\left(\frac{T}{\Omega} - u''\nu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_x^2}}\right) \qquad (6),$$

$$S''_{zm} = \frac{T}{\Omega} - u''\nu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (7);$$

che i valori di s'_{zm} e di s''_{zm} rappresentano allungamenti o accorciamenti, e che quelli di S'_{zm} e di S''_{zm} rappresentano tensioni e pressioni, secondochè risultano positivi o negativi. Se l'asse neutro taglia il perimetro della sezione retta D E F, i due valori di s'_{zm} e di s''_{zm},

come pure quelli di S'_{zm} e di S''_{zm}, hanno segno contrario, e quindi in questa sezione ha luogo provocamento di massima resistenza all'estensione e di massima resistenza alla compressione. Se invece l'asse neutro non taglia l'indicato perimetro, non vi ha diversità di segno nei valori di s'_{zm} e di s''_{zm}, come pure in quelli di S'_{zm} e di S''_{zm}, e quindi trovasi provocata sola resistenza all'estensione quando tali valori sono positivi, e sola resistenza alla compressione quando sono negativi.

Nell'ipotesi che i valori di S'_{zm} e di S''_{zm} siansi trovati uno positivo e l'altro negativo, si ottengono le equazioni di stabilità per la sezione retta a cui si riferiscono: coll'eguagliare al prodotto $m'Q'$, oppure al prodotto $n'R'$, quello positivo; coll'eguagliare al prodotto $m''Q''$, oppure al prodotto $n''R''$, quello negativo dopo d'avervi cangiato il segno. Se poi i due valori di S'_{zm} e di S''_{zm} risultano dello stesso segno, si ha una sola equazione di stabilità, ed essa si ottiene eguagliando ad uno dei prodotti $m'Q'$ o $n'R'$ il più grande dei due valori di S'_{zm} e di S''_{zm} se essi sono positivi, ed eguagliando invece ad uno dei due prodotti $m''Q''$ ed $n''R''$ quello degli accennati due valori che è il più grande in senso assoluto quando essi sono negativi.

Per una parte AB (*Fig.* 46) di solido alle cui sezioni corrispondono valori positivi di T e di ν, l'espressione, il cui maggior valore determina la sezione pericolosa sotto il rapporto della resistenza all'estenzione, è o l'una o l'altra delle due:

$$\frac{1}{Q'}\left(\frac{T}{\Omega}+u'\nu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (8),$$

$$\frac{1}{R'}\left(\frac{T}{\Omega}+u'\nu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (9),$$

mentre quella il cui più gran valore determina la sezione pericolosa per rapporto alla pressione è una di queste altre:

$$-\frac{1}{Q''}\left(\frac{T}{\Omega}-u''\nu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (10),$$

$$-\frac{1}{R''}\left(\frac{T}{\Omega}-u''\nu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (11).$$

Se, cercando di determinare la sezione pericolosa mediante una delle due espressioni (10) ed (11), trovasi che essa non è suscettiva di prendere valori positivi, è segno che nella parte A B non viene provocata pressione ma sola tensione, e che per conseguenza non c'è ragione di determinare la sezione pericolosa per rapporto alla pressione.

Per una parte D E di solido alle cui diverse sezioni corrispondono valori negativi di T e positivi di ν, la sezione pericolosa per rapporto alla pressione corrisponde al più gran valore di una delle due espressioni (10) ed (11); ed il più gran valore positivo di una delle due espressioni (8) e (9) corrisponde alla sezione pericolosa relativa all'estensione. Se però applicando una delle espressioni (8) e (9) si trova che essa non è suscettiva di prendere un valore positivo per le diverse sezioni della parte D E, è segno che in questa parte non vi ha sezione pericolosa per rapporto alla tensione.

Per una parte B C di solido alle cui sezioni rette corrispondono valori negativi di T e di ν, la sezione pericolosa per rapporto alla compressione corrisponde al più gran valore di una delle due espressioni

$$-\frac{1}{Q''}\left(\frac{T}{\Omega}+u'\nu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (12),$$

$$-\frac{1}{R''}\left(\frac{T}{\Omega}+u'\nu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (13);$$

e la sezione pericolosa per rapporto alla resistenza all'estensione è quella per cui ha il più gran valore positivo una delle due espressioni

$$\frac{1}{Q'}\left(\frac{T}{\Omega}-u''\nu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (14)$$

$$\frac{1}{R'}\left(\frac{T}{\Omega}-u''\nu\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}\right) \qquad (15).$$

Si dovrebbe poi dire che non esiste sezione pericolosa per rapporto all'estensione quando, applicando una delle espressioni (14) e (15), si trova che essa si conserva negativa per tutte le sezioni della parte B C.

Finalmente per una parte C D di solido alle cui sezioni rette corrispondono valori positivi di T e valori negativi di ν, la sezione perico-

losa per rapporto alla resistenza all'estensione è quella in cui si verifica il più gran valore di una delle due espressioni (14) e (15). La sezione pericolosa per rapporto alla resistenza alla compressione corrisponde al più gran valore positivo di una delle due espressioni (12) e (13); e, qualora queste espressioni non siano suscettive di avere valori positivi, non vi ha sezione pericolosa per rapporto alla resistenza alla compressione nell'indicata parte CD.

Determinate le sezioni pericolose per riguardo alla resistenza all'estensione e per riguardo alla resistenza alla compressione per le diverse parti in cui, a motivo delle variazioni dei segni di T e di ν, conviene immaginare diviso il solido del quale vuolsi studiare la stabilità; e trovati i relativi coefficienti di stabilità, sarà facile scegliere il massimo m'_m o n'_m di quelli riferentisi alle tensioni, ed il massimo m''_m o n''_m di quelli riferentisi alla pressione. Il primo indica qual è nel corpo considerato la sezione pericolosa per rapporto all'estensione, ed il secondo qual è la sezione pericolosa per rapporto alla compressione.

Allorquando il valore di T è nullo, la qual cosa avviene pei due casi stati comtemplati nei numeri 28 e 29, le formole e le espressioni stabilite in questo numero notevolmente si semplificano, giacchè spariscono tutti i termini contenenti la forza T, le espressioni i cui valori massimi corrispondono alle sezioni pericolose nel caso di ν positivo, sono: relativamente all'estensione, o l'una o l'altra delle due espressioni

$$\frac{u'\nu}{Q'}\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (8_1),$$

$$\frac{u'\nu}{Q'}\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (9_1);$$

relativamente alla compressione, o l'una o l'altra delle due espressioni analoghe

$$\frac{u''\nu}{Q''}\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (10_1),$$

$$\frac{u''\nu}{R''}\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (11_1).$$

Le espressioni i cui massimi valori corrispondono alle sezioni perico-

lose pel caso di ν negativo, sono: per rapporto alla compressione, o l'una o l'altra delle due espressioni:

$$-\frac{u'\nu}{Q''}\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (12_1),$$

$$-\frac{u'\nu}{R''}\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (13_1);$$

e, per rapporto all'estensione, o l'una o l'altra delle due espressioni analoghe:

$$-\frac{u''\nu}{Q'}\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (14_1),$$

$$-\frac{u''\nu}{R'}\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}} \qquad (15_1).$$

Nel caso assai frequente della pratica in cui il piano contenente le forze estrinseche e passante per l'asse del solido taglia ciascuna sua sezione secondo un asse principale centrale d'inerzia, per esempio, secondo l'asse Cy, si ha che l'angolo β è nullo, che quindi riesce nullo anche l'angolo ψ, che l'asse neutro è parallelo all'asse xx', e che la retta uu' si confonde coll'asse yy'. Il valore di $\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\beta}{I_y^2}}$ si riduce a $\frac{1}{I_x}$, e le formole (1), (2), (3), (4), (5), (6) e (7), non che le espressioni (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15), (8_1), (9_1), (10_1), (11_1), (12_1), (13_1), (14_1) e (15_1), subiscono una notevole semplificazione col cangiare l'indicato radicale nel rapporto $\frac{1}{I_x}$.

Le formole e le espressioni, che in questo numero si sono stabilite, applicansi a quasi tutti i casi nei quali avviene di dover considerare la resistenza longitudinale nella pratica delle costruzioni, e principalmente convengono per quei casi in cui trattasi di studiare la resistenza e la stabilità di travi e di centine caricate di pesi.

34. **Osservazione.** — Ben di frequente avviene che tutte le forze sollecitanti un corpo, per cui vuolsi studiare la resistenza e la stabilità, non sono dati immediati della quistione. Così, allorquando un arco,

simmetrico per rapporto ad una verticale e caricato di pesi simmetricamente disposti rispetto a questa linea, ha le sue estremità su due appoggi collocati allo stesso livello, basta per l'equilibrio che ciascun appoggio sia capace di somministrare una reazione verticale eguale alla metà della somma dei pesi che operano sull'arco intiero. Con una tale disposizione di cose però, la corda dell'arco deve variare di lunghezza, e, per impedire che questo fatto avvenga, conviene che gli appoggi siano fatti in modo da mantenere fermi gli estremi della centina, operando su essi a guisa di forze capaci di produrre una variazione eguale e di senso contrario a quella che avrebbe avuto luogo senza la loro esistenza. Queste forze, che nello studio della resistenza e della stabilità dell'arco fanno parte delle forze estrinseche, non sono dati immediati del problema, ma sibbene una conseguenza della forma dell'arco e dei carichi che agiscono su esso; e, come si è fatto per la risoluzione del problema che trovasi risolto nel numero 171 del volume della nostra *Arte di fabbricare*, il quale tratta della resistenza dei materiali e della stabilità delle costruzioni, importa determinarle in seguito allo studio delle deformazioni dell'asse dell'arco, e ponendo la condizione che deve essere nullo lo spostamento orizzontale di un suo estremo.

Più generalmente onde ottenere mediante vincoli, come appoggi, incastramenti, ecc., che un corpo non si deformi liberamente sotto l'azione delle forze estrinseche ad esso applicate, è necessario che la presenza degli ostacoli dia luogo a certe reazioni, le quali ordinariamente non possono essere determinate senza considerare le deformazioni prodotte nel corpo medesimo. Siccome poi nello studio della resistenza e della stabilità si devono supporre tolti gli ostacoli e sostituite le corrispondenti reazioni, le quali fanno così parte delle forze estrinseche, ne deriva che è un problema della massima importanza quello che ha per oggetto di trovare le formole determinatrici delle deformazioni di un solido elastico sotto l'azione di forze date e di reazioni producenti l'effetto di determinati vincoli.

Questo problema, pei casi più usuali e più frequenti della pratica, quali sono quelli dei solidi elastici aventi per asse una linea retta ed una curva piana, appoggiati, incastrati e caricati di pesi, trovasi risoluto nel citato nostro volume sulla resistenza dei materiali e sulla stabilità delle costruzioni; esso però si può anche risolvere nel caso generale di un solido quale venne definito nel numero 2; e costituisce una delle belle quistioni che non tralascieremo di trattare nel progresso di questa Appendice.

STUDIO DEL PROGETTO

DI UN TRONCO DI STRADA FERRATA

PER QUANTO SPETTA

AL SUO ANDAMENTO ED AI MOVIMENTI DI TERRA

---

1. **Norme generali ed indicazione delle operazioni da farsi per lo studio del progetto di un tronco di strada.** — Allorquando un ingegnere deve accingersi allo studio del progetto di una strada qualunque, conosce le due località estreme che la strada deve congiungere ed alcune località intermedie, per cui questa possibilmente dovrebbe passare ; di maniera che la zona di terreno sulla quale la strada verrà stabilita, senza essere assolutamente determinata, non potrà guari scostarsi da certi andamenti che, fra le località stesse ed in numero più o meno grande, si potranno tracciare dipendentemente dalle accidentalità del suolo, dai limiti da osservarsi nelle pendenze e nei raggi delle curve, dalle posizioni dei corsi d'acqua, dalla natura dei terreni da attraversarsi, dalle difficoltà e dal costo di esecuzione. Un'accurata ispezione delle regioni da attraversarsi fatta, se pur è possibile, coll'uso di una mappa o di una carta topografica esatta, in ogni caso varrà a persuadere l'ingegnere della convenienza di fissarsi su un determinato andamento ; e su questo si incomincieranno gli studi, con proposito di apportarvi quelle varianti che nel progresso del lavoro si giudicheranno opportune per arrivare al definitivo progetto di una strada, la quale, con una ben intesa economia, presenti i necessarii requisiti di stabilità, di sicurezza e di comodità.

Dopo questo, planimetricamente ed altimetricamente si rilevano alcuni punti rimarchevoli del scelto andamento ; e, per raggiungere lo scopo, si fa un'operazione di camminamento, o meglio, una trian-

golazione trigonometrica in cui, assieme a molti altri, siano vertici i detti punti.

Traendo partito degli elementi lineari ed angolari misurati sul terreno, riesce facile instituire i calcoli che conducono a trovare: le distanze orizzontali dei successivi punti presi sull'indicato andamento; gli angoli degli allineamenti determinati dalle linee rette, da cui due a due trovansi successivamente uniti; e le differenze di livello fra gli stessi punti. Fatto questo, si può dire: che trovansi stabilite le posizioni planimetriche ed altimetriche di alcuni punti principali del terreno, destinati a trovarsi sull'asse stradale; che il totale andamento da tracciarsi è diviso in tronchi parziali limitati dall'uno all'altro di tali punti; e che rimane da ultimarsi il progetto collo studio di ciascun tronco parziale.

Considerando poi uno qualunque dei tronchi parziali componenti l'intiero andamento situato fra i due estremi della strada di cui vuolsi dare il progetto, saranno per esso note la distanza orizzontale delle sue estremità e la differenza di livello di queste. Se adunque si divide una tale differenza di livello per la corrispondente distanza orizzontale, si ha nel quoziente la pendenza della retta, la quale unisce le indicate due estremità; e questa pendenza può essere al di sotto o al di sopra dei limiti che non è concesso superare. Nel primo caso, qualunque andamento si segni fra i due punti considerati, riesce sempre possibile non eccedere le pendenze limiti; nel secondo caso, tenendo conto delle accidentalità del terreno, bisogna stabilire un tale andamento fra i detti due punti, che il quoziente della loro differenza di livello per la lunghezza orizzontale dell'andamento fra essi stabilito sia minore, o tutto al più eguale alla pendenza limite che è permesso di poter adottare.

Fatto questo, per ciascuno dei tronchi parziali componenti l'intiera linea da studiarsi, si fa un rilevamento planimetrico ed altimetrico degli andamenti stabiliti fra le loro estremità, dei punti corrispondenti alle principali ineguaglianze di terreno situati sugli andamenti stessi, e di parecchie sezioni trasversali. Di più a dritta ed a sinistra degli indicati andamenti si possono rilevare le linee divisorie delle diverse proprietà, nell'intento di poter stabilire i quantitativi dei terreni che dalla strada verranno occupati.

Coi dati risultanti dalle or indicate operazioni di rilevamento planimetrico ed altimetrico, si passa a disegnare in una conveniente scala la planimetria di quella linea che si è creduto conveniente di dover assumere per determinare la direzione della strada, il profilo

longitudinale ed i profili trasversali per la zona di terreno alla quale le indicate operazioni vennero estese. Dopo questo, riesce facile trasformare i diversi gomiti rettilinei, che si riscontrano sull'andamento planimetrico dell'asse stradale, in altrettante risvolte, segnare sul profilo longitudinale e sui profili trasversali le corrispondenti linee di progetto, ed eseguire la planimetria completa della strada da costruirsi.

Mediante il profilo longitudinale ed i profili trasversali con sopra disegnate le linee di progetto, si può fare il computo dei movimenti delle terre, studiare come si devono esse distribuire, valutare le distanze medie dei trasporti ed arrivare alla determinazione del costo dei movimenti stessi. Mediante la planimetria della strada, con sopra segnate le linee divisorie delle diverse proprietà che la stessa deve attraversare, riesce poi facile dedurre le aree dei terreni che dalla strada verranno occupati e fissare le indennità che per tali occupazioni dovranno venir corrisposte.

Riassumendo, si può dire che le operazioni da farsi per lo studio del progetto di un tronco di strada, astrazione fatta dallo studio dei progetti delle opere d'arte, si riducono:

1° Ad operazioni trigonometriche per fissare le posizioni di alcuni punti importanti, pei quali la strada deve passare, e per dividere questa in tronchi parziali;

2° Ad operazioni di rilevamento e di livellazione sui diversi tronchi parziali ed a quelle che da esse derivano per ottenere il profilo longitudinale, i profili trasversali e la planimetria della strada da farsi;

3° Al computo dei movimenti di terra, delle distanze medie dei trasporti e delle occupazioni di terreno;

4° Alla valutazione delle spese occorrenti pei movimenti di terra e per le occupazioni dei terreni.

CAPITOLO I.

Operazioni trigonometriche.

2. **Triangolazione e rilievi locali.** — Siano A, B, C,..... (*Fig.* 47), punti presi in località che la strada possibilmente dovrebbe toccare, ed i triangoli AEF, EFG, GFH,..... costituiscano una triangolazione fra i cui vertici vi sono anche i detti punti A, B, C..... I vertici di tale triangolazione siano punti facili a prendersi di mira, generalmente individuati mediante segnali sui quali, o presso ai quali, sia possibile far stazione con un teodolite. Di tale triangolazione, colle norme che vennero date nella parte terza di quel volume della nostra *Arte di fabbricare*, il quale tratta delle *Operazioni topografiche*, si misuri un lato assunto come base, e si misurino tutti quegli angoli orizzontali che, in un colla base, occorrono per completamente determinare i lati, per avere le differenze di livello dei vertici e per dare sufficienti mezzi di controllo.

La base sia $\overline{HL}$, ed abbia la lunghezza di metri 870,79; gli angoli orizzontali per la parte di triangolazione che si estende da A in B, siano quali risultano dal registro dei rilievi planimetrici, in cui vi sono anche i dati per quegli angoli che furono misurati fuori del loro vertice e pei quali occorre la riduzione al centro di stazione. Finalmente le distanze zenitali, per la stessa parte di triangolazione, siano quali risultano dal registro dei rilievi altimetrici, nel quale si trovano anche le altezze dello strumento, ossia le altezze del centro del circolo zenitale stato impiegato per misurare gli angoli delle visuali colle verticali, al di sopra dei punti scelti come vertici della triangolazione.

Registro dei rilievi planimetrici.

VERTICI DELLA TRIANGOLAZIONE			ANGOLI ORIZZONTALI			DATI PER LA RIDUZIONE AL CENTRO DI STAZIONE			
Punti osservati S a sinistra	Vertici O degli angoli	Punti osservati D a destra				Angoli $O+y$			Distanze r
E	A	F	62°	15′	15″				
F	E′	A	41	11	20	225°	26′	10″	m 2,08
G	E′	F	73	43	45	299	9	55	2,08
A	F	E	76	37	50				
E	F	G	49	48	25				
G	F	H	67	5	45				
F	G	E	56	29	15				
H	G	F	55	37	30				
I	G	H	68	40	0				
F	H	G	57	16	45				
G	H	I	37	40	40				
I	H	K	60	22	10				
I	H	L	65	12	5				
H	I	G	73	39	20				
L	I	H	34	12	30				
K	I	H	47	30	15				
B	I	K	50	10	30				
H	K	I	72	8	5				
I	K	B	64	10	20				
K	B	I	65	39	5				
H	L	I	80	35	30				
I	L	K	81	29	45				
L	K	I	85	12	40				

Registro dei rilievi altimetrici.

VERTICI DELLA TRIANGOLAZIONE		DATI ALTIMETRICI			
Vertici O degli angoli	Vertici osservati	Distanze zenitali			Altezze dH dello strumento
					m
A	E	89°	37′	10″	1,50
A	F	89	19	10	1,50
E′	A	90	31	20	1,60
E′	G	90	12	10	1,60
F	A	90	52	40	1,56
F	H	90	10	0	1,56
G	E	89	58	0	1,65
G	I	89	24	10	1,65
H	F	89	58	10	1,56
H	K	89	17	40	1,56
I	G	90	47	40	1,65
I	B	89	9	30	1,65
K	H	90	52	0	1,60
K	B	89	17	40	1,60
B	I	90	59	0	1,58
B	K	90	52	10	1,58

Nell'eseguire la triangolazione, per cui vennero riportati gli elementi stati misurati, si è fatto stazione su tutti i vertici, salvo sul vertice E. Per questo si fece stazione in un punto assai vicino E′, cosicchè nel registro dei rilievi planimetrici si hanno, non gli angoli FEA e GEF, ma due angoli ben poco differenti FE′A e GE′F. Analogamente, nel registro dei rilievi altimetrici, invece delle distanze zenitali corrispondenti alle visuali EA ed EG, si hanno quelle delle visuali assai vicine E′A ed E′G.

3. **Piano trigonometrico.** — Per avere un'idea del modo con cui sono distribuiti i vertici della triangolazione e per ottenere le lunghezze approssimate di quei lati che sono necessarii per la riduzione degli angoli al centro di stazione, riesce vantaggioso il piano trigonometrico. Questo piano trovasi rappresentato nella figura 48 alla scala del $\frac{1}{25000}$. La sua costruzione si è incominciata a partire dal triangolo HIL in cui sono noti, il lato $\overline{HL}$ di metri 870,79 ed i due angoli IHL ed HLI aventi le rispettive ampiezze di 65° 12′ 5″ e di 80° 35′ 30″. Costrutto questo primo triangolo e determinato quindi il suo lato $\overline{HI}$, partendo da questo, e traendo partito degli angoli GHI=37° 40′ 40″, HIG=73° 39′ 20″, FHG=57° 16′ 45″, HGF=55° 37′ 30″, EFG=49° 48′ 25″, FGE=56° 29′ 15″, AFE=76° 37′ 50″, FE′A=41° 11′ 20″, IHK=60° 22′ 10″, KIH=47° 30′ 15′, IKB=64° 10′ 20″ e BIK=50° 10′ 30″, successivamente si sono fatti, l'uno dopo l'altro, i triangoli HIG, HGF, FGE ed FEA a sinistra del lato $\overline{HI}$ ed i triangoli HIK e KIB a dritta dello stesso lato.

Per la costruzione degli angoli sopraindicati si è fatto uso delle tavole delle tangenti che trovansi nella prima parte del citato volume sulle *Operazioni topografiche* (*a*).

4. **Riduzione degli angoli orizzontali al centro di stazione.** — Come risulta dal primo registro dei rilievi locali stato consegnato nel numero 2, solamente i due angoli FE′A e GE′F abbisognano di essere ridotti al centro di stazione. Per ottenere questi due angoli si fece stazione col teodolite, non nel vero loro vertice E, ma sibbene in un punto E′ (*Fig.* 49) vicino al vertice E, posto alla distanza $\overline{EE'}$=2^m,08 da E e sulla retta EE′ facente colla direzione E′F, e da sinistra verso destra per un osservatore posto in E′ e rivolto verso F, l'angolo FE′E=225° 26′ 10″. Per fare questa riduzione è necessario conoscere le tre lunghezze $\overline{EA}$, $\overline{EF}$ ed $\overline{EG}$. Perciò, con un'ap-

(*a*) Prima di costrurre il piano trigonometrico, traendo partito della lunghezza della base $\overline{HL}$ e degli angoli misurati, sarebbesi potuto procedere ad un calcolo delle lunghezze dei lati e costrurre ciascun triangolo l'uno dopo l'altro, impiegando le lunghezze stesse. Siccome però gli angoli di ciascun triangolo abbisognano sempre di una piccola correzione, affinchè la loro somma sia di 180°, e siccome gli angoli misurati fuori del centro della stazione E sono un po' diversi dagli angoli veri, le lunghezze dei lati, così calcolate, non riuscirebbero esattissime, e si dovrebbero solo ritenere come lunghezze provvisorie sufficienti per la costruzione del piano trigonometrico per essere impiegate nelle riduzioni al centro di stazione, e da ricalcolarsi in seguito a tutte le correzioni degli angoli.

prossimazione sufficiente per lo scopo che vuolsi raggiungere, si deducano esse dal piano trigonometrico, e siano

$$\overline{EA} = 1368^m$$

$$\overline{EF} = 1244$$

$$\overline{EG} = 1142.$$

In generale, essendo

O l'angolo di posizione, ossia l'angolo AOB (*Fig.* 50) che misurasi fuori del centro di stazione e che per conseguenza abbisogna di essere corretto,

C l'angolo corrispondente col vertice nel centro della stazione, ossia l'angolo vero ACB,

y l'angolo di direzione BOC,

r la distanza $\overline{OC}$ fra il vertice O dell'angolo di posizione ed il centro C della stazione,

$\overline{OD}$ la lunghezza del lato di destra $\overline{CB}$ ed

$\overline{OS}$ la lunghezza del lato di sinistra $\overline{CA}$,

si ha la seguente formola determinatrice della differenza C — O (*Arte di fabbricare, Operazioni topografiche*, Num. 255)

$$C - O = \frac{r \operatorname{sen}(O+y)}{\overline{OS} \operatorname{sen} 1''} - \frac{r \operatorname{sen} y}{\overline{OD} \operatorname{sen} 1''} \qquad (1).$$

Per la riduzione al centro di stazione dell'angolo misurato FE'A (*Fig.* 47 e 49), si ha:

$$r = \overline{EE'} = \quad 2^m,08$$

$$\overline{OS} = \overline{EF} = 1244$$

$$\overline{OD} = \overline{EA} = 1368;$$

$$O = FE'A = \quad 41^\circ\ 11'\ 20''$$

$$O + y = FE'E = 225\ \ 26\ \ 10$$

$$y = AE'E = 184\ \ 14\ \ 50.$$

Applicando la formola (1) si trova

$$C - O = -3' \ 43'',$$

e quindi immediatamente si deduce

$$FEA = C = 41° \ 7' \ 37''.$$

Per la riduzione al centro di stazione dell'angolo misurato GE'F, si ha:

$$r = \overline{EE'} = \quad 2^m,08$$

$$\overline{OS} = \overline{EG} = 1142$$

$$\overline{OD} = \overline{EF} = 1244;$$

$$O = GE'F = \ 73° \ 43' \ 45''$$

$$O + y = GE'E = 299 \ \ 9 \ \ 55$$

$$y = FE'E = 225 \ \ 26 \ \ 10.$$

Applicando con questi dati la formola (1), si ottiene

$$C - O = -1' \ 22'',$$

cosicchè risulta

$$GEF = C = 73° \ 42' \ 23''.$$

5. **Correzione degli angoli.** — Ridotti al centro di stazione quegli angoli orizzontali per cui era necessaria questa operazione, importa correggere gli angoli dei diversi triangoli, in modo che la loro somma faccia 180°. Di più, essendovi giri d'orizzonte, occorre che la somma di tutti gli angoli corrispondenti ad uno stesso giro sia di 360°. Nel nostro caso particolare non abbiamo giri d'orizzonte, cosicchè è d'uopo effettuare la sola correzione relativa agli angoli dei triangoli. Questa correzione poi, per una rete topografica destinata allo studio di un progetto di strada, può essere fatta ripartendo in parti eguali sopra ciascuno degli angoli di uno stesso triangolo la totale discrepanza della somma dei suoi tre angoli da 180°. Gli angoli

poi che si devono considerare nel fare questa correzione, sono quelli misurati e quelli ridotti al centro di stazione.

Pel triangolo AEF (*Fig.* 48), si ha: che la somma dei due angoli misurati in A ed F e di quello ridotto al centro di stazione in E è

$$180^\circ\ 0'\ 42'';$$

che la correzione totale si riduce a diminuire di 42″ l'indicata somma; che la diminuzione da apportarsi a ciascun angolo si può ritenere di 14″; e che per conseguenza si possono definitivamente assumere per angoli corretti di questo triangolo

$$EAF = 62^\circ\ 15'\ 1''$$

$$FEA = 41\ \ 7\ 23$$

$$AFE = 76\ 37\ 36.$$

Pel triangolo EGF si ha: che la somma dei due angoli misurati in G ed F e di quello ridotto al centro di stazione in E è di

$$180^\circ\ 0'\ 3'';$$

che la correzione totale consiste nel diminuire di 3″ la detta somma; che si può ritenere di 1″ la diminuzione da farsi su ciascun angolo, e che quindi per angoli corretti di questo triangolo si possono prendere

$$GEF = 73^\circ\ 42'\ 22''$$

$$FGE = 56\ 29\ 14$$

$$EFG = 49\ 48\ 24.$$

Pel triangolo FGH la somma dei tre angoli misurati in F, G ed H fa 180°, cosicchè si stabilisce che gli angoli di questo triangolo siano definitivamente

$$GFH = 67^\circ\ 5'\ 45''$$

$$HGF = 55\ 37\ 30$$

$$FHG = 57\ 16\ 45.$$

Pel triangolo GIH la somma dei tre angoli misurati in H, G ed I risulta pure di 180°; non occorre adunque alcuna correzione, ed in modo definitivo si può stabilire

$$IGH = 68° 40' 0''$$

$$HIG = 73 \ 39 \ 20$$

$$GHI = 37 \ 40 \ 40.$$

Pel triangolo HIL si ha: che la somma dei tre angoli misurati in H, I ed L è di

$$180° 0' 5'';$$

che la correzione totale si riduce a diminuire di 5'' l'indicata somma; che a ciascuno dei due angoli maggiori si può apportare la correzione di 2'', e quella di 1'' all'angolo minore; e che per conseguenza si possono definitivamente assumere come angoli corretti di questo triangolo

$$IHL = 65° 12' 3''$$

$$LIH = 34 \ 12 \ 29$$

$$HLI = 80 \ 35 \ 28.$$

Pel triangolo HIK si ha: che la somma dei tre angoli misurati in H, I e K vale

$$180° 0' 30'';$$

che la correzione totale consiste nel diminuire di 30'' l'accennata somma; che la correzione da apportarsi a ciascun angolo si può ritenere di 10'', e che quindi si possono definitivamente assumere gli angoli

$$IHK = 60° 22' 0''$$

$$KIH = 47 \ 30 \ 5$$

$$HKI = 72 \ 7 \ 55.$$

Pel triangolo LIK si ha: che l'angolo KIL, siccome differenza fra l'angolo KIH ed LIH, vale

$$13^\circ\ 17'\ 36'';$$

che la somma dei suoi tre angoli è

$$180^\circ\ 0'\ 1'';$$

che la totale correzione si riduce a diminuire di 1″ l'accennata somma; che questa correzione si può fare sull'angolo maggiore; e che quindi si possono assumere per angoli definitivi

$$ILK = 81^\circ\ 29'\ 45''$$

$$KIL = 13\ 17\ 36$$

$$LKI = 85\ 12\ 39.$$

Pel triangolo IBK la somma degli angoli misurati in K, I e B vale

$$179^\circ\ 59'\ 55''.$$

La correzione totale da farsi si riduce ad aumentare di 5″ l'indicata somma; e questo si può ottenere aumentando di 2″ ciascuno dei due angoli più grandi e di 1″ l'angolo più piccolo. Si può adunque stabilire di assumere per angoli del triangolo IBK

$$BIK = 50^\circ\ 10\ 31''$$

$$KBI = 65\ 39\ 7$$

$$IKB = 64\ 10\ 22.$$

6. **Calcolo dei lati dei triangoli.** — Tutti gli angoli della triangolazione si possono ora dire completamente determinati, e viene quindi l'operazione relativa al calcolo dei lati.

Essendo, in un triangolo qualunque,

$\overline{DS}$ la lunghezza di un lato cognito,

O l'angolo opposto a questo lato,

S e D i due angoli ad esso adiacenti e rispettivamente posti a sini-

stra ed a dritta di un osservatore posto in O e rivolto verso il lato $\overline{DS}$, le formole determinatrici dei due lati $\overline{OD}$ ed $\overline{OS}$ sono (*Arte di fabbricare, Operazioni topografiche*, Num. 258)

$$\overline{OD} = \overline{DS} \frac{\text{sen } S}{\text{sen } O}$$

$$\overline{OS} = \overline{DS} \frac{\text{sen } D}{\text{sen } O}.$$

Nell'applicare queste formole poi bisogna partire dal triangolo HIL, al quale appartiene il lato $\overline{HL}$, stato assunto e misurato come base della triangolazione.

Pel triangolo HIL (*Fig.* 48) si hanno i dati

$$\overline{DS} = \overline{HL} = 870^{m},79$$

$$O = LIH = 34^{o}\ 12'\ 29''$$

$$S = HLI = 80\ 35\ 28$$

$$D = IHL = 65\ 12\ .3,$$

e si deduce

$$\overline{OD} = \overline{IH} = 1528^{m},06$$

$$\overline{OS} = \overline{IL} = 1406\ ,06.$$

Pel triangolo GIH si conoscono

$$\overline{DS} = \overline{IH} = 1528^{m},06$$

$$O = IGH = 68^{o}\ 40'\ 0''$$

$$S = HIG = 73\ 39\ 20$$

$$D = GHI = 37\ 40\ 40,$$

e si ottiene

$$\overline{OD} = \overline{GH} = 1574^{m},10$$

$$\overline{OS} = \overline{GI} = 1002\ ,68.$$

Nel triangolo FGH si ha

$$\overline{DS} = \overline{GH} = 1574^{m},10$$

$$O = GFH = 67^{\circ}\ 5'\ 45''$$

$$S = HGF = 55\ 37\ 30$$

$$D = FHG = 57\ 16\ 45,$$

e, calcolando gli altri due lati, essi risultano

$$\overline{OD} = \overline{FH} = 1410^{m},40$$

$$\overline{OS} = \overline{FG} = 1437\ ,66.$$

Nel triangolo EGF, gli elementi pel calcolo dei due lati $\overline{EF}$ ed $\overline{EG}$ sono

$$\overline{DS} = \overline{FG} = 1437^{m},66$$

$$O = GEF = 73^{\circ}\ 42'\ 22''$$

$$S = FGE = 56\ 29\ 14$$

$$D = EFG = 49\ 48\ 24,$$

e si trovano per lunghezze degli indicati lati

$$\overline{OD} = \overline{EF} = 1248^{m},82$$

$$\overline{OS} = \overline{EG} = 1144\ ,14.$$

Nel triangolo AEF si conoscono

$$\overline{DS} = \overline{EF} = 1248^{m},82$$

$$O = EAF = 62^{\circ}\ 15'\ 1''$$

$$S = FEA = 41\ 7\ 23$$

$$D = AFE = 76\ 37\ 36,$$

e le lunghezze degli altri due lati risultano

$$\overline{OD} = \overline{AF} = 928^{m},06$$

$$\overline{OS} = \overline{AE} = 1372\ ,85.$$

Pel triangolo HIK sono elementi noti

$$\overline{DS} = \overline{HI} = 1528^{m},06$$

$$O = HKI = 72^{\circ}\ 7'\ 55''$$

$$S = IHK = 60^{\circ}\ 22'\ 0$$

$$D = KIH = 47\ 30\ 5,$$

e le lunghezze dei lati $\overline{KI}$ e $\overline{KH}$ riescono

$$\overline{OD} = \overline{KI} = 1395^{m},51$$

$$\overline{OS} = \overline{KH} = 1183\ ,73.$$

Nel triangolo KIB si ha

$$\overline{DS} = \overline{IK} = 1395^{m},51$$

$$O = KBI = 65^{\circ}\ 39\ 7$$

$$S = IKB = 64\ 10\ 22$$

$$D = BIK = 50\ 10\ 31,$$

e, come conseguenza di questi dati, si ottengono le lunghezze

$$\overline{OD} = \overline{BI} = 1378^{m},75$$

$$\overline{OS} = \overline{BK} = 1176\ ,40.$$

Resta ancora da considerarsi il triangolo LIK, e, assumendo come dati

$$\overline{DS} = \overline{IL} = 1406^{m},06$$

$$O = LKI = 85^{\circ}\ 12'\ 39''$$

$$S = ILK = 81\ 29\ 45$$

$$D = KIL = 13\ 17\ 36,$$

risulta

$$\overline{OD} = \overline{KI} = 1395^{m},48$$

$$\overline{OS} = \overline{KL} = 324\ ,44.$$

Il lato $\overline{KI}$, già stato calcolato col considerare il triangolo HIK, si ottenne una seconda volta considerando il triangolo LIK, ed essendo appena di 3 centimetri la differenza dei due risultamenti ottenuti, si ha una prova dell'esattezza delle operazioni e dei calcoli per la determinazione dei triangoli HIK, HIL ed LIK.

7. **Scelta di due poligonali per la determinazione planimetrica della retta che unisce i due punti A e B.** (*Fig.* 48). — Allorquando fra due punti si ha una linea poligonale planimetricamente determinata, mediante le lunghezze orizzontali dei suoi lati e mediante gli angoli degli allineamenti dai lati stessi determinati, riesce facile trovare sia la direzione dell'allineamento passante pei due estremi della poligonale stessa, sia ancora la distanza orizzontale fra gli estremi medesimi.

Ora, avendo noi una triangolazione fra i due punti A e B, si possono scegliere fra questi molte linee poligonali, e ciascuna di siffatte linee può servire al calcolo della distanza orizzontale fra i detti punti ed alla determinazione della direzione della retta che li unisce. Per accertarci poi dell'esattezza dell'operazione, fra le molte linee poligonali che si potrebbero considerare, verranno scelte due, le quali, se pure tutte le operazioni di campagna e di tavolino vennero ben eseguite, dovranno condurre a risultati identici o tutto al più con discrepanze non eccedenti i limiti delle tolleranze ammissibili nel genere di operazioni di cui ci occupiamo. Nel caso particolare che trattiamo sceglieremo le due linee poligonali AEGIB ed AFHKB; e, supponendo che ciascuna di queste linee poligonali venga percorsa da

A verso B, valuteremo gli angoli di due lati successivi, prendendo come lato di destra quello appena percorso e come lato di sinistra quello da percorrersi.

Assumeremo come elementi determinanti la linea poligonale AEGIB: i lati $\overline{AE}$, $\overline{EG}$, $\overline{GI}$ ed $\overline{IB}$, le cui lunghezze indicheremo rispettivamente colle lettere a_1, a_2, a_3 ed a_4, ed i cui valori sono

$$a_1 = 1372^m,85$$

$$a_2 = 1144\ ,14$$

$$a_3 = 1002\ ,68$$

$$a_4 = 1378\ ,75\ ;$$

gli angoli AEG, EGI e GIB le cui ampiezze, pei valori degli angoli della triangolazione stabiliti nel numero 5, sono

$$AEG = 114^o\ 49'\ 45''$$

$$EGI = 180\ \ 46\ \ 44$$

$$GIB = 171\ \ 19\ \ 56.$$

Per la linea poligonale AFHKB, chiameremo rispettivamente a'_1, a'_2, a'_3 ed a'_4 le lunghezze dei lati $\overline{AF}$, $\overline{FH}$, $\overline{HK}$ e $\overline{KB}$, le quali lunghezze sono

$$a'_1 = 928^m,06$$

$$a'_2 = 1410\ ,40$$

$$a'_3 = 1183\ ,73$$

$$a'_4 = 1176\ ,40,$$

ed osserveremo che le ampiezze degli angoli AFH, FHK ed HKB, risultano

$$AFH = 166^o\ 28'\ 15''$$

$$FHK = 204^o\ 40\ \ 35$$

$$HKB = 223\ \ 41\ \ 33,$$

allorquando si suppongano esse valutate verso l'esterno della triangolazione alla quale appartengono.

Nei calcoli che dovremo instituire per la determinazione delle coordinate dei vertici delle indicate linee poligonali, le riferiremo a due assi coordinati ortogonali Ax ed Ay, ed assumeremo il primo degli indicati assi nella direzione del lato AE della triangolazione.

8. **Voltate dei lati delle linee poligonali AEGIB ed AFHKB** (*Fig.* 48). — In una linea poligonale chiamansi *voltate* gli angoli che i prolungamenti dei lati fanno col lato successivo (*Arte di fabbricare, Geometria pratica applicata all'arte del costruttore*, Num. 2). Segue da questa definizione che, indicando rispettivamente con (a_2a_1), (a_3a_2) ed (a_4a_3) le voltate nei vertici E, G ed I della spezzata AEGIB, pei dati angolari registrati nel precedente numero, si ha

$$(a_2a_1) = 65^\circ\ 10'\ 15''$$

$$(a_3a_2) = -\ 0\ 46\ 44$$

$$(a_4a_3) = 8\ 40\ 4.$$

Analogamente, dicendo

(a'_1x), la voltata nel vertice A per passare dalla direzione x'Ax alla direzione AF,

$(a'_2a'_1)$, $(a'_3a'_2)$ ed $(a'_4a'_3)$ le voltate nei vertici F, H e K della spezzata AFHKB,

si ha, pel trovato valore dell'angolo EAF (Num. 5) e pei dati angolari registrati nel precedente numero,

$$(a'_1x) = 62^\circ\ 15'\ 1''$$

$$(a'_2a'_1) = 13\ 31\ 45$$

$$(a'_3a'_2) = -24\ 40\ 35$$

$$(a'_4a'_3) = -43\ 41\ 33.$$

9. **Deviazioni dei lati delle linee poligonali AEGIB ed AFHKB rispetto all'asse Ax** (*Fig.* 48). — Per ottenere la deviazione di un lato qualunque di una linea poligonale per rapporto ad un altro lato della linea poligonale medesima, bisogna fare la somma algebrica di tutte le voltate per andare dal secondo al primo lato (*Arte di fab-*

bricare, *Geometria pratica applicata all'arte del costruttore*, Num. 2 e 3).

Chiamando adunque rispettivamente

$(a_2 x)$, $(a_3 x)$ ed $(a_4 x)$ le deviazioni dei tre lati E G, G I ed I B della spezzata A E G I B per rapporto alla direzione del primo lato, ossia per rapporto all'asse $A x$,

per quanto si trovò nel precedente numero, risulta

$$(a_2 x) = 65^\circ\ 10'\ 15$$

$$(a_3 x) = 64\ \ 23\ \ 31$$

$$(a_4 x) = 73\ \ \ 3\ \ 35.$$

Analogamente, indicando rispettivamente con

$(a'_1 x)$, $(a'_2 x)$, $(a'_3 x)$ ed $(a'_4 x)$ le deviazioni dei lati A F, F H, H K e K B della spezzata A F H K B pure rispetto all'asse $A x$,

a motivo delle voltate che abbiamo riportate nel precedente numero, si ha

$$(a'_1 x) = 62^\circ\ 15'\ \ 1''$$

$$(a'_2 x) = 75\ \ 46\ \ 46$$

$$(a'_3 x) = 51\ \ \ 6\ \ 11$$

$$(a'_4 x) = \ \ 7\ \ 24\ \ 38.$$

10. **Coordinate dei vertici delle linee poligonali A E G I B e A F H K B rispetto agli assi coordinati ortogonali A x ed A y** (*Fig.* 48). — Indicando con

x_i ed y_i le due coordinate di un vertice qualunque di una linea spezzata per rapporto a due assi ortogonali contenuti nel piano della spezzata medesima, con

x_{i+1} ed y_{i+1} le due coordinate del vertice successivo, con

a_i la lunghezza del lato della spezzata compreso fra gli indicati vertici e con

$(a_i x)$ la deviazione di questo lato per rapporto all'asse delle ascisse x,

si ha (*Arte di fabbricare*, *Geometria pratica applicata all'arte del costruttore*, Num. 3)

$$x_{i+1} = x_i + a_i \cos(a_i x)$$

$$y_{i+1} = y_i + a_i \operatorname{sen}(a_i x).$$

Ponendo poi

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_i \cos(a_i x) \\ y' &= a_i \operatorname{sen}(a_i x) \end{aligned}\right\} \quad (1),$$

risulta

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + x' \\ y_{i+1} &= y_i + y' \end{aligned}\right\} \quad (2),$$

e sono queste le formole che conviene applicare per il calcolo delle coordinate dei vertici delle due spezzate A E G I B ed A F H K B.

Il vertice A è l'origine degli assi coordinati, e quindi sono nulle e sue coordinate x_1 ed y_1.

Pel vertice E si ha

$$a_i = a_1 = \overline{AE} = 1372^m,85$$

$$(a_i x) = (a_1 x) = 0^o$$

$$x_i = x_1 = 0, \qquad y_i = y_1 = 0;$$

i due valori di x' e di y' risultano

$$x' = 1372^m,85, \qquad y' = 0;$$

e quindi le sue coordinate x_2 ed y_2 sono date da

$$x_2 = 1372^m,85, \qquad y_2 = 0.$$

I dati relativi al vertice G sono

$$a_i = a_2 = \overline{EG} = 1144^m,14$$

$$(a_i x) = (a_2 x) = 65^o\ 10'\ 15''$$

$$x_1 = x_2 = 1372^m,85, \qquad y_1 = y_2 = 0.$$

Si ottengono per valori di x' e di y'

$$x' = 480^m,44, \qquad y' = 1038^m,38;$$

e risultano quindi i seguenti valori delle due coordinate x_3 ed y_3

$$x_3 = 1853^m,29, \qquad y_3 = 1038^m,38.$$

Gli elementi da impiegarsi nel calcolo delle coordinate del vertice I sono

$$a_1 = a_3 = 1002^m,68$$

$$(a_1 x) = (a_3 x) = 64^\circ\ 23'\ 31''$$

$$x_1 = x_3 = 1853^m,29, \qquad y_1 = y_3 = 1038^m,38;$$

i valori di x' e di y' risultano

$$x' = 433^m,37, \qquad y' = 904^m,19;$$

cosicchè le due coordinate x_4 ed y_4 hanno i valori

$$x_4 = 2286^m,66, \qquad y_4 = 1942^m,57.$$

Pel vertice B risulta: che i dati da impiegarsi nel calcolo delle sue due coordinate sono

$$a_1 = a_4 = 1378^m,75$$

$$(a_1 x) = (a_4 x) = 73^\circ\ 3'\ 35''$$

$$x_1 = x_4 = 2286^m,66, \qquad y_1 = y_4 = 1942,57;$$

che si deducono per valori di x' e di y'

$$x' = 401^m,73, \qquad y' = 1318,92;$$

e che quindi le sue due coordinate x_5 ed y_5 ammettono i valori

$$x_5 = 2688{,}39, \qquad y_5 = 3261{,}49.$$

Considerando ora la linea poligonale AFHKB, per essere il suo vertice estremo A l'origine stessa degli assi coordinati, corrispondono ad esso l'ascissa $x'_1 = 0$ e l'ordinata $y'_1 = 0$.

Per elementi che servono al calcolo delle coordinate del vertice F, si hanno

$$a_i = a'_1 = \overline{AF} = 928^m{,}06$$

$$(a_i x) = (a'_1 x) = 62^\circ\ 15'\ 1''$$

$$x_i = x'_1 = 0, \qquad y_i = y'_1 = 0.$$

I valori di x' ed y' risultano

$$x' = 432^m{,}10, \qquad y' = 821^m{,}32;$$

e quindi le due coordinate x'_2 ed y'_2 ammettono i valori

$$x'_2 = 432^m{,}10, \qquad y'_2 = 821^m{,}32.$$

Pel vertice H, sono

$$a_i = a'_2 = \overline{FH} = 1410^m{,}40$$

$$(a_i x) = (a'_2 x) = 75^\circ\ 46'\ 46''$$

$$x_i = x'_2 = 432^m{,}10, \qquad y_i = y'_2 = 821^m{,}32$$

gli elementi da adottarsi nel calcolo delle sue coordinate. I valori di x' ed y' sono

$$x' = 346^m{,}46, \qquad y' = 1367^m{,}17;$$

cosicchè le coordinate x'_3 ed y'_3 ammettono i valori

$$x'_3 = 778^m{,}56, \qquad y'_3 = 2188^m{,}49.$$

Pel vertice K si hanno i dati

$$a_i = a'_3 = \overline{HK} = 1183^m,73$$

$$(a_i x) = (a'_3 x) = 51^\circ\ 6'\ 11''$$

$$x_i = x'_3 = 778^m,56, \qquad y_i = y'_3 = 2188^m,49.$$

I valori di x' e di y' risultano

$$x' = 743^m,28, \qquad y' = 921^m,26,$$

e le relative coordinate sono

$$x'_4 = 1521^m,84, \qquad y'_4 = 3109^m,75.$$

I dati pel calcolo delle coordinate del vertice B sono

$$a_i = a'_4 = \overline{KB} = 1176^m,40$$

$$(a_i x) = (a'_4 x) = 7^\circ\ 24'\ 38''$$

$$x_i = x'_4 = 1521^m,84, \qquad y_i = y'_4 = 3109^m,75;$$

ed in conseguenza di questi dati risultano

$$x' = 1166^m,55, \qquad y' = 151^m,73$$

$$x'_5 = 2688^m,39, \qquad y'_5 = 3261^m,48.$$

Le coordinate del punto B vennero ottenute, prima considerando questo punto come appartenente alla linea poligonale AEGIB, e poi considerando lo stesso punto come vertice estremo della linea poligonale AFHKB. Le due ascisse x_5 ed x'_5 precisamente concordano nei centimetri, e le due ordinate y_5 ed y'_5 differiscono appena di un centimetro. Dovendo nel seguito fare alcuni calcoli appoggiati sui valori di queste due coordinate, definitivamente le assumeremo, di $2688^m,39$ l'ascissa e di $3261^m,48$ l'ordinata.

11. **Direzione dell'allineamento determinato dai due punti A e B** (*Fig.* 48), **e distanza di questi punti.** — Immaginando abbassata dal punto B la perpendicolare $\overline{BP}$ all'asse Ay, si ha

$$\overline{BP} = x_5 = 2688^m,39$$

$$\overline{AP} = y_5 = 3261\ ,48.$$

Se adunque chiamasi

ϕ l'angolo BAx della direzione AB con quella dell'asse delle ascisse, risulta

$$\text{tang}\,\phi = \frac{3261,48}{2688,39},$$

d'onde

$$\phi = 50^o\ 30'\ 6''.$$

Dicendo poi

D la lunghezza della retta $\overline{AB}$, ossia la distanza orizzontale fra due punti A e B, immediatamente si deduce

$$D = 4226^m,66.$$

12. **Riduzione delle distanze zenitali al centro di stazione.** — Le due distanze zenitali state lette nel vertice E' (*Fig.* 47) collimando ai due punti A e G, per essere il vero vertice della triangolazione non il punto E', ma sibbene il punto assai vicino E, si devono ridurre al centro di stazione, ossia si devono correggere in modo che, dalle dette due distanze zenitali state rilevate facendo stazione in E', si possano dedurre due valori molto approssimati delle distanze zenitali che si sarebbero lette facendo stazione nel punto E.

In generale, essendo A (*Fig.* 51) il vero centro di stazione, S il punto, poco distante da A, in cui trovasi il centro del circolo zenitale del teodolite che impiegasi nella misura degli angoli, B il punto a cui si collima, e dicendo

z la distanza zenitale, come BS Z che misurasi in S fuori del centro di stazione A, e che quindi ha bisogno di essere corretta,

z' la distanza zenitale corrispondente, che approssimativamente si può ritenere come quella che si leggerebbe nella vera stazione A,

v l'angolo di posizione ASC,

r la distanza $\overline{SA}$ fra i due punti S ed A,

K la distanza orizzontale fra i punti A e B, ossia la lunghezza del lato della triangolazione, che ha per estremi questi due punti,

α l'ampiezza espressa in minuti secondi, da togliersi alla distanza zenitale z per avere la distanza zenitale corretta z',
la formola determinatrice della correzione α (*Arte di fabbricare, Operazioni topografiche*, Num. 286) è

$$\alpha = \frac{r \cos v \cos z}{K \operatorname{sen} 1''} \qquad (1).$$

Per la riduzione al centro di stazione della distanza zenitale Z' E' A stata misurata col centro di stazione in E' e col collimare ad A (*Fig.* 47, 49 e 52), si ha:

$$r = \overline{EE'} = \quad 2^m,08$$

$$K = \overline{EA} = 1372\ ,85$$

$$z = Z'E'A = 90^\circ\ 31'\ 20''$$

$$v = EE'A = 175\ \ 45\ \ 10.$$

Applicando la formola (1) si trova

$$\alpha = 3'',$$

e quindi immediatamente si deduce

$$ZEA = z' = 90^\circ\ 31'\ 17''.$$

Per la riduzione al centro di stazione della distanza zenitale Z' E' G stata misurata col centro di stazione in E' e col collimare a G, si ha

$$r = \overline{EE'} = \quad 2^m,08$$

$$K = \overline{EG} = 1144\ ,14$$

$$z = Z'E'G = 90^\circ\ 12'\ 10''$$

$$v = EE'G = 60\ \ 50\ \ 5.$$

Applicando con questi dati la formola (1), si ottiene

$$\alpha = -1'',$$

cosicchè l'angolo corretto risulta

$$ZEG = z' = 90^\circ\ 12'\ 11''.$$

13. **Ordinate dei vertici delle due linee poligonali AEGIB ed AFHKB per rapporto ad una data superficie di livello.** — Servono a calcolare queste ordinate le lunghezze già ottenute dai lati della triangolazione, e gli elementi che si trovano nel secondo registro del numero 2. Oltre di ciò è necessario prestabilirsi l'ordinata di uno dei punti che si vogliono considerare, per esempio, quella del punto A, la qual ordinata verrà assunta di 500 metri.

Premesso questo, se consideransi sul terreno due punti M ed N (*Fig.* 53), e se, trovandosi il centro del circolo zenitale in P e Q, si suppongono dirette due visuali da P in N e da Q in M, chiamando

K la distanza orizzontale dei due punti M ed N,

z la distanza zenitale ZPN e

z' la distanza zenitale Z'QM,

dH l'altezza $\overline{MP}$ del centro del circolo, che impiegasi per misurare le distanze zenitali, sul punto M, e

dH' l'altezza analoga in N,

q una quantità che per tutti i vertici della triangolazione si può approssimativamente considerare come costante,

H l'ordinata $\overline{CM}$ del punto M per rapporto alla superficie di livello CD, e

H' l'ordinata $\overline{DN}$ del punto N per rapporto alla stessa superficie, si hanno le formole (*Arte di fabbricare*, *Operazioni topografiche*, Num. 281, 282 e 283)

$$H' = H + (K \cot z + q K^2 + d H) \qquad (1),$$

$$H' = H - (K \cot z' + q K^2 + d H') \qquad (2).$$

Se poi si indica colla lettera R il raggio terrestre, che approssimativamente si può assumere di 6366198 metri, colla lettera n il coefficiente di rifrazione, il quale si suppone eguale a 0,08, il valore di q viene dato dalla formola

$$q = \frac{1/2 - n}{R},$$

da cui ricavasi

$$q = 0{,}000\ 000\ 064.$$

Volendosi trovare l'ordinata del punto E (*Fig.* 48), i dati del problema sono

$$H = 500^m$$

$$K = \overline{AE} = 1372\ ,85$$

$$dH = 1\ ,50$$

$$dH' = 1\ ,60$$

$$z = 89^\circ\ 37'\ 10''$$

$$z' = 90\ 31\ 17.$$

L'applicazione della formola (1) dà

$$H' = 510^m,74;$$

coll'applicazione della formola (2) si trova

$$H' = 510^m,77;$$

e quindi, per ordinata del punto E, si può assumere la media aritmetica fra i due trovati valori di H', ossia stando ai centimetri,

$$510^m,75.$$

I dati che servono al calcolo dell'ordinata del punto G sono

$$H = 510^m,75$$

$$K = \overline{EG} = 1144\ ,14$$

$$dH = 1\ ,60$$

$$dH' = 1\ ,65$$

$$z = 90^\circ\ 12'\ 11''$$

$$z' = 89\ \ 58\ \ 0.$$

Applicando successivamente le formole (1) e (2) si trovano i valori di H′ dati da

$$H' = 508^m,38$$

$$H' = 508\ ,45,$$

e si può ritenere che la media aritmetica di questi valori, ossia, stando ai centimetri,

$$508^m,42,$$

rappresenti l'ordinata del punto G.

Gli elementi cogniti da impiegarsi nella determinazione dell'ordinata del punto I sono

$$H = 508^m,42$$

$$K = \overline{GI} = 1002\ ,68$$

$$dH = \ \ 1\ ,65$$

$$dH' = \ \ 1\ ,65$$

$$z = 89^\circ\ 24'\ 10''$$

$$z' = 90\ \ 47\ \ 40;$$

e, successivamente applicando le formole (1) e (2) alla determinazione dell'ordinata H′ del punto I, si ottengono i seguenti risultati

$$H' = 520^m,59$$

$$H' = 520\ ,60.$$

I due valori di H′ differiscono appena di un centimetro, e si può assumere

$$520^m,60$$

per ordinata definitiva del punto I.

I dati che servono al calcolo dell'ordinata del punto B sono

$$H = 520^{m},60$$

$$K = \overline{IB} = 1378\ ,75$$

$$dH = 1\ ,65$$

$$dH' = 1\ ,58$$

$$z = 89^{\circ}\ 9'\ 30''$$

$$z' = 90\ 59\ 0.$$

L'applicazione delle formole (1) e (2) conduce a trovare

$$H' = 542^{m},62$$

$$H' = 542\ ,56,$$

e per valore definitivo dell'ordinata del punto B si può assumere la media aritmetica dei due trovati valori di H', ossia la lunghezza di

$$542^{m},59.$$

Il metodo tenuto per determinare le ordinate dei vertici della linea poligonale AEGIB, serve pure a trovare quelle dei vertici dell'altra linea poligonale AFHKB, del cui estremo A già si conosce l'ordinata che è di 500 metri.

I dati da impiegarsi nel calcolo dell'ordinata del punto F sono

$$H = 500^{m}$$

$$K = \overline{AF} = 928\ ,06$$

$$dH = 1\ ,50$$

$$dH' = 1\ ,56$$

$$z = 89^{\circ}\ 19'\ 10''$$

$$z' = 90\ 52\ 40;$$

ed applicando successivamente le formole (1) e (2) si trovano i seguenti valori di H'

$$H' = 512^m,58$$

$$H' = 512\ ,60.$$

La media aritmetica di questi due valori si può assumere come l'ordinata del punto F, cosicchè a quest'ultima si può assegnare il definitivo valore

$$512^m,59.$$

Per trovare l'ordinata del punto H, servono i dati

$$H = 512^m,59$$

$$K = \overline{FH} = 1410\ ,40$$

$$d\,H = 1\ ,56$$

$$d\,H' = 1\ ,56$$

$$z = 90°\ 10'\ 0''$$

$$z' = 89\ 58\ 10,$$

i quali, posti nelle formole (1) e (2), conducono a trovare

$$H' = 510^m,18$$

$$H' = 510\ ,15.$$

Assumendo poi per ordinata definitiva del punto H la media aritmetica dei due valori di H' or ora trovati e fermandoci ai centimetri, si ha

$$510^m,16.$$

Alla determinazione dell'ordinata del punto K concorrono gli elementi cogniti

$$H = 510^m,16$$

$$K = \overline{HK} = 1183\ ,73$$

$$d\,H = 1\ ,56$$

$$d\,H' = 1\ ,60$$

$$z = 89^\circ\ 17'\ 40''$$

$$z' = 90\ \ 52\ \ 0.$$

Questi dati, posti nelle formole (1) e (2), portano a trovare

$$H' = 526^m,39$$

$$H' = 526\ ,37;$$

cosicchè, assumendo l'ordinata definitiva del punto K nella media aritmetica dei due trovati valori di H', risulta che essa è di

526,38.

Resta ancora a determinarsi l'ordinata del punto B mediante i dati

$$H = 526^m,38$$

$$K = \overline{KB} = 1176\ ,40$$

$$d\,H = \ \ 1\ ,60$$

$$d\,H' = \ \ 1\ ,58$$

$$z' = 89^\circ\ 17'\ 40''$$

$$z' = 90^\circ\ 52'\ 10''.$$

I due valori di H' somministrati dalle formole (1) e (2) risultano eguali, ed il loro comune valore che è di

$542^m,56$

si può assumere siccome rappresentante l'ordinata del punto B.

Considerando il punto B, prima come estremo della linea poligonale AEGIB e poi come estremo dell'altra linea poligonale AFHKB, sonosi ottenute per questo punto due ordinate ben poco differenti l'una dall'altra. L'ordinata di $542^m,59$ nel primo caso e l'ordinata di $542^m,56$ nel secondo caso. L'ordinata definitiva del detto punto B si

può adunque fissare nella media aritmetica degli or indicati valori, ossia, tenendo conto dei soli centimetri, di

$$542^{m},57.$$

Possiamo con ciò dire che sono note le ordinate di tutti i vertici delle due linee poligonali AEGIB ed AFHKB che abbiamo considerato fra i due estremi A e B, e che per conseguenza le dette poligonali trovansi determinate, non solo nel senso planimetrico, ma anche nel senso altimetrico.

14. **Differenza di livello fra i due punti A e B** (*Fig.* 48) **e pendenza della retta che li unisce.** — Essendo di 500^{m} l'ordinata del punto A e di $542^{m},57$ quella del punto B, la differenza di livello dL fra questi punti viene data da

$$dL = 542,57 - 500 = 42^{m},57.$$

Dividendo la differenza di livello fra i due punti A e B per la loro distanza orizzontale che nel numero 11 venne trovata di $4226^{m},66$, si ottiene nel quoziente la pendenza della retta che unisce questi due punti, cosicchè, dicendo p questa pendenza, si ha

$$p = \frac{42,57}{4226,66} = 0,01007,$$

ossia la salita di $10^{m},07$ per ogni 1000 metri di distanza orizzontale.

15. **Riassunto dei più importanti elementi relativi alle due linee poligonali state considerate fra i due punti A e B** (*Fig.* 48). — Tutti i calcoli che vennero istituiti, prendendo le mosse dalla triangolazione rappresentata nelle figure 47 e 48, avevano per iscopo di determinare tanto in planimetria quanto in altimetria le due linee poligonali AEGIB ed AFHKB, di stabilire la posizione, la lunghezza e la pendenza della retta AB. I principali risultati di questi calcoli si hanno nel registro che riportiamo, il quale contiene: nella prima colonna l'indicazione delle linee poligonali fatta mediante numeri romani; nella seconda colonna l'indicazione dei vertici mediante numeri arabi; nella terza e nella quarta colonna le due coordinate orizzontali x ed y, e nella quinta le ordinate verticali z di ciascun vertice. Finalmente conviene lasciare una sesta colonna per quelle osservazioni che possono occorrere sulle particolarità dei punti considerati. I numeri poi

che indicano le linee poligonali ed i loro vertici sono in accordo con quelli che trovansi marcati nella figura 54.

INDICAZIONI delle poligonali	INDIGAZIONI dei vertici	COORDINATE ORIZZONTALI		ORDINATE verticali	*Osservazioni*
		Ascisse x	Ordinate y		
I	1	0^m	0^m	500^m	
	2	1372,85	0	510,75	
	3	1853,29	1038,38	508,42	
	4	2286,66	1942,57	520,60	
	5	2688,39	3261,48	542,57	
II	1	0	0	500	
	2	432,10	821,32	512,59	
	3	778,56	2188,49	510,16	
	4	1521,84	3109,75	526,38	
	5	2688,39	3261,48	542,57	

Oltre i dati contenuti in questo registro, conviene ancora marcare fra gli elementi più importanti che risultano dagli istituiti calcoli : l'angolo che l'allineamento determinato dagli estremi comuni A e B (*Fig.* 48) delle poligonali fa coll'asse delle ascisse, il qual angolo (Num. 11) è di

$$50^\circ\ 30'\ 6'';$$

la lunghezza della retta AB che unisce gli estremi medesimi delle poligonali, la qual lunghezza (Num. 11) è di

$$4226^m,66;$$

e finalmente la pendenza della stessa retta, che si è trovata (Num. 14) di

$$0,01007.$$

Osservazioni. — Tutte le operazioni che vennero fatte e tutti i calcoli che vennero instituiti pel primo tronco devonsi effettuare per tutti i tronchi parziali. La triangolazione, che dall'estremo B (*Fig.* 47) del secondo tronco si estende fino all'estremo C del tronco stesso, sarà collegata, almeno per un lato, per esempio mediante il lato $\overline{BK}$, colla triangolazione già stata considerata; e questo lato costituirà la base per il calcolo dei lati della rete di triangoli giacenti fra B e C. Si possono assumere per assi coordinati quegli stessi che vennero presi nel considerare la triangolazione relativa al primo tronco, e non s'incontrerà difficoltà alcuna nel calcolo delle voltate, delle deviazioni dei lati per rapporto all'asse delle ascisse, e delle coordinate dei vertici delle due poligonali fra B e C, giacchè serviranno gli stessi metodi e le stesse formole già state impiegate nei numeri 8, 9 e 10.

Chiamando poi

X_b ed Y_b le due coordinate orizzontali $\overline{BB'}$ ed $\overline{AB'}$ del punto B (*Fig.* 55),

X_c ed Y_c le due coordinate orizzontali CC' e AC' del punto C,

D_1 la distanza orizzontale fra i punti B e C,

φ_1 l'angolo che la direzione B C fa colla retta Bx_1 condotta per B parallelamente all'asse delle ascisse, si ha:

$$D_1 = \sqrt{(X_c - X_b)^2 + (Y_c - Y_b)^2};$$

$$\text{tang}\,\varphi_1 = \frac{Y_c - Y_b}{X_c - X_b}.$$

Se ora immaginasi prolungato il lato A B in B_1, si ha che l'angolo $x_1 B B_1$ è eguale all'angolo $x A B$, ossia all'angolo φ (Num. 11); cosichè l'angolo $B_1 BC = \beta$, che misura la voltata del lato A B sul lato B C, vien dato

$$\beta = \varphi_1 - \varphi.$$

Quando il valore di β risulta positivo si ha una voltata a destra, e si ha invece una voltata a sinistra allorquando l'angolo β risulta negativo. Sottraendo da 180° il valore di β, si ha l'angolo del lato B C col lato B A.

Il metodo or ora indicato per trovare l'angolo che il secondo lato della linea poligonale, determinata dai punti principali per cui la strada deve passare, fa col primo lato, serve pure a trovare l'angolo

del terzo lato col secondo, del quarto col terzo e, così continuando, dell'ultimo col penultimo. Si può adunque dire che dell'indicata linea poligonale si conoscono, non solo le coordinate dei vertici per rapporto a due assi orizzontali e le loro ordinate verticali per rapporto ad un definito piano di paragone, ma anche le lunghezze delle proiezioni orizzontali dei suoi lati e gli angoli degli allineamenti determinati dai lati medesimi.

CAPITOLO II.

Operazioni di rilevamento planimetrico ed altimetrico sui tronchi parziali. Profilo longitudinale, profili trasversali e planimetria della strada progettata.

16. **Prime operazioni per lo stabilimento dell'asse stradale fra i due punti estremi di ciascun tronco parziale.** — Supponiamo che la strada da progettarsi non debba avere pendenze maggiori di 0,008 ossia del 8 per mille, e che i raggi delle risvolte non debbano essere inferiori a 500 metri.

Per ogni tronco, in cui la retta che unisce le due estremità ha pendenza minore di 0,008, qualunque andamento si segua fra le estremità stesse, si può sempre stare al disotto della pendenza limite, e quindi in questo caso il tracciamento dell'asse stradale trovasi unicamente subordinato ad esigenze imposte da circostanze locali. Per qualsiasi tronco invece, in cui la retta che ne congiunge le due estremità ha pendenza maggiore di 0,008, la lunghezza dell'asse stradale ammette un limite inferiore, il quale si ottiene dividendo la differenza di livello fra le dette estremità per la pendenza limite 0,008.

Considerando principalmente il tronco compreso fra i due punti fissi A e B (*Fig.* 47), giacchè quanto diremo per esso sarà pure applicabile a tutti gli altri tronchi parziali in cui la strada si troverà divisa, si ha: che la retta la quale congiunge le due estremità A e B ha la pendenza di 0,01007; che questa pendenza supera la massima ammissibile del 0,008; che la differenza di livello fra le dette estremità è di metri 42,57; e che per conseguenza il limite inferiore della lunghezza orizzontale dello sviluppo dell'asse stradale fra i due punti A e B viene dato dal quoziente

$$\frac{42^{m},57}{0,008} = 5321^{m},25.$$

Avendo sott'occhio (*Fig.* 56) una mappa o una carta topografica delle località che la strada dovrebbe attraversare od anche il semplice piano dei punti stati rilevati colle operazioni di camminamento o triangolazione trigonometrica di cui si parlò nel precedente capitolo, e tenendo presenti le osservazioni intorno alla configurazione, alle accidentalità del suolo, ed alle circostanze più importanti che si saranno notate nell'ispezionare il terreno, non si potranno trovare gravi difficoltà per decidere come meglio conviene svolgere l'andamento della strada, e per istabilire un primo andamento A *b c d e f g* B.

Fatto questo, in una determinata scala, si segnino i due punti A e B (*Fig.* 57), colla distanza nota di metri 4226,66, e quindi, per tentativi, si cerci di ottenere il tracciato di una mistilinea, la quale soddisfi a queste condizioni: di trovarsi presso a poco disposta, per rapporto alla A B della figura 57, come si trova disposta la mistilinea A *b c d e f g* B per rapporto alla A B della figura 56, di essere formata di sole linee rette raccordate con archi circolari di raggio non minore di 500 metri; di avere le parti rettilinee con lunghezza non minore di 60 metri; di avere lunghezza non inferiore a metri 5321,25. Il tracciamento di questa mistilinea costituisce un problema indeterminato; ma i riguardi da aversi alle diverse circostanze locali e le condizioni cui tale mistilinea deve soddisfare, facilmente pongono sulla strada per ottenere un primo andamento, il quale, se non sarà il vero, sarà almeno tale da non scostarsi molto. Nel caso particolare della mistilinea da stabilirsi fra i due punti A e B (*Fig.* 57), venne tenuto il seguente semplicissimo metodo.

Tracciata la retta $\overline{A\,b}$ lunga 400 metri e facente l'angolo di 48° colla direzione A B, si elevò in *b* la perpendicolare *b p* e con raggio $\overline{o\,b}$ di 500 metri venne descritto l'arco circolare *b c* dell'ampiezza di 109°. Pel punto *c* si condusse la tangente a quest'arco, e su tale tangente si portò la lunghezza $\overline{c\,d}$ di 800 metri. Per *d* si innalzò la perpendicolare $d p_1$ a *c d*, e con raggio $\overline{o_1\,d}$ di 800 metri si passò a descrivere l'arco circolare *d e'* dell'ampiezza di 88°. In *e'* venne condotta la tangente all'ultimo indicato arco, e, su questa tangente, si portò la lunghezza $\overline{e'\,f'}$ di 900 metri. Per *f'* si tirò la perpendicolare $f' p'_2$ ad *e' f'*, e, con raggio $\overline{o_2'\,f'}$ di 700 metri, venne descritto l'arco di circolo *f' g'*. Osservando che la mistilinea A *b c d e' f' g'* non passa per B, e che non è possibile condurre per questo punto una retta di raccordamento coll'arco *f' g'*, è giuoco forza conchiudere che l'asse stradale non può seguire l'andamento dell'indicata mistilinea; e che quindi si deve questa convenientemente modificare.

Accrescendo perciò l'ampiezza dell'arco di centro o_1 e di raggio $\overline{o_1 d}$ col portarla, per esempio, a 102°, si può descrivere l'arco circolare de, tracciare la tangente nel punto e di quest'arco, prendere su essa la lunghezza $\overline{ef}$ di 900 metri, elevare in f la perpendicolare fp_2 ad ef e descrivere l'arco indefinito fh di contro o_2 e di raggio $\overline{o_2 f} = 700^m$. Trovandosi il punto B fuori della circonferenza a cui il detto arco appartiene, è possibile condurre da quello la tangente Bg a questo, ed ottenere così la mistilinea A$bcdefg$B, la quale si può ritenere siccome approssimativamente rappresentante l'andamento dell'asse stradale fra i due punti A e B, sempre che il suo sviluppo non sia inferiore a metri 5321,25.

Per ottenere questo sviluppo bisogna sommare fra di loro le lunghezze delle parti rettilinee e le lunghezze delle parti curvilinee. Le lunghezze delle tre parti rettilinee $\overline{Ab}$, $\overline{cd}$ ed $\overline{ef}$ sono quali vennero assunte ossia rispettivamente di 400, di 800 e di 900 metri; quella invece della parte rettilinea $\overline{g\,B}$, con sufficiente esattezza pel genere di operazione che facciamo, si può misurare sulla scala in cui il disegno trovasi eseguito, e si può assumere di metri 264. Le lunghezze delle parti curvilinee si possono calcolare in seguito alla conoscenza dei loro raggi e delle ampiezze che loro corrispondono; per fare poi speditamente questo calcolo viene in acconcio l'uso delle tavole numeriche che trovansi nel numero 20 della nostra *Geometria pratica applicata all'arte del costruttore*. Le lunghezze dei due archi bc e de risultano rispettivamente di 951 e di 1424 metri. Per l'arco fg, il cui estremo g venne graficamente determinato col condurre da B la tangente Bg all'arco fh, non si conosce ancora l'ampiezza. Quest'elemento però, con un'approssimazione sufficiente per l'operazione che abbiamo di mira, facilmente si può dedurre misurando, con un semicircolo da tavolino od anche coll'uso delle tavole delle tangenti, l'angolo $fo_2 g$. Così procedendo, si trova che quest'angolo ha l'ampiezza di 52°, cosicchè la lunghezza dell'arco fg risulta di 635 metri. Sommando ora le lunghezze delle sette linee $\overline{Ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{cd}$, $\overline{de}$, $\overline{ef}$, $\overline{fg}$ e $\overline{g\,B}$, si ottiene che lo sviluppo approssimato della mistilinea A$bcdefg$B è di 5374 metri. Questo sviluppo è maggiore di 5321,25, ossia del limite inferiore della lunghezza della proiezione orizzontale dell'asse stradale fra i due punti A e B, e quindi si può ritenere che il detto asse presso a poco seguirà l'andamento A$bcdefg$B.

Se ora si prolungano le parti rettilinee Ab, cd, ef e gB fino ad incontrarsi nei punti M, N ed O, risulta, fra i punti A e B, la linea spezzata A M N O B; e, per questa spezzata, riesce facile la determina-

zione delle ampiezze degli angoli e delle lunghezze dei lati. Gli angoli A M N, M N O ed N O B sono rispettivamente le differenze fra 180° e gli angoli boc, do_1e ed fo_2g, e quindi si ha

$$AMN = 71°,$$

$$MNO = 78,$$

$$NOB = 128.$$

Per avere le lunghezze dei lati $\overline{AM}$, $\overline{MN}$, $\overline{NO}$ ed $\overline{OB}$, bisogna prima trovare quelle delle tangenti $\overline{Mb} = \overline{Mc}$, $\overline{Nd} = \overline{Ne}$ ed $\overline{Of} = \overline{Og}$. Le lunghezze di queste tangenti assai facilmente si potrebbero calcolare, giacchè si conoscono i raggi e le ampiezze degli archi ad esse corrispondenti; per l'operazione che stiamo compiendo però basta dedurle dal disegno mediante la sua scala, e, così procedendo, si ottiene $\overline{Mb} = \overline{Mc} = 700^m$, $\overline{Nd} = \overline{Ne} = 990^m$, $\overline{Of} = \overline{Og} = 345^m$. Si può adunque ritenere che le lunghezze dei lati della linea poligonale A M N O B sono approssimativamente

$$\overline{AM} = 1100^m,$$

$$\overline{MN} = 2490,$$

$$\overline{NO} = 2235,$$

$$\overline{OB} = 609.$$

Possiamo ora dire che con sole operazioni di tavolino abbiamo determinata la linea poligonale A M N O B, e, tuttochè siano solo approssimate le lunghezze dei suoi lati e le ampiezze dei suoi angoli, verrà essa in acconcio pel tracciamento del vero e definitivo asse stradale.

17. **Stabilimento della poligonale determinante l'asse stradale fra i due punti estremi di ciascun tronco parziale.** — Quest'operazione si fa sul terreno con un goniometro, generalmente con un teodolite, e mediante quegli ordinari mezzi che si usano nelle operazioni topografiche per tracciare allineamenti e per valutare distanze.

Considerando il tronco parziale compreso fra i due punti A e B (*Fig.* 56), devesi tracciare un tale andamento A M' N' O' B che, avuto riguardo alle circostanze ed alle esigenze locali, si scosti il meno possibile da quello corrispondente alla linea poligonale A M N O B (*Fig.* 57).

Dell'indicato andamento A M' N' O' B (*Fig.* 56) si misureranno: l'angolo che il suo primo lato A M' fa colla direzione fissa A E; le lunghezze dei lati, e gli angoli dei lati stessi. Le ampiezze degli angoli (nell'ipotesi che la linea poligonale venga percorsa da A verso B e che gli angoli di due lati successivi vengano valutati prendendo come lato di destra quello appena percorso e come lato di sinistra quello da percorrersi) e le lunghezze dei lati, quali risultano dalle misure, siano

$$M'AE = 2^\circ\ 5'\ 20''$$

$$AM'N' = 70\ \ 50\ \ 40$$

$$M'N'O' = 280\ \ 55\ \ 0$$

$$N'O'B = 125\ \ 59\ \ 50,$$

$$\overline{AM'} = 1102^m,40$$

$$\overline{M'N'} = 2487\ ,80$$

$$\overline{N'O'} = 2238\ ,90$$

$$\overline{O'B} = 587\ ,50.$$

Questi elementi determinano la spezzata A M' N' O' B, le cui estremità già sono date, e si può adottare il seguente semplicissimo metodo per verificare se essi vennero ben misurati.

In una determinata scala, non minore di quella del $\frac{1}{5000}$, si disegna la lunghezza $\overline{AB}$ (*Fig.* 64); si costruisce, col vertice in A e colla retta A B, l'angolo B A x la cui ampiezza sia $50^\circ\,30'\,6'' - 2^\circ\,5'\,20'' = 48^\circ\,24'\,46''$; si porta sulla A x, a partire da A, la lunghezza $\overline{AM'}$ che, nella scala assunta, rappresenti metri 1102,40; si fa, col vertice in M' e colla retta M' A, l'angolo A M' N'' $= 70^\circ\,50'\,40''$; e si continua la costruzione della spezzata A M' N' O' B mediante le lunghezze misurate dei suoi lati e le ampiezze pure misurate dei suoi angoli.

Quando l'estremo della spezzata, costrutta come or ora si è detto, si confonde col punto B, si devono ritenere siccome esatte le misurazioni state eseguite per la determinazione della spezzata stessa. Quando invece il detto estremo cade in un punto B' differente da B, importa confrontare fra di loro le due distanze $\overline{AB'}$ ed $\overline{AB}$, onde vedere qual è

la loro discrepanza. Se questa discrepanza è maggiore di 1/500 di $\overline{AB}$, conviene rifare le misure lineari ed angolari state eseguite per lo stabilimento dell'asse stradale fra i due punti A e B; se invece la stessa discrepanza è minore di 1/500 di $\overline{AB}$, non occorre rifare le indicate misure, ma basta eseguire sulla spezzata AM'N'O'B' alcune semplici costruzioni, onde ottenere che il punto B' si confonda col punto B.

Osservando che le misure angolari si fanno generalmente sul terreno con maggior precisione delle misure lineari, queste costruzioni si possono effettuare in modo da lasciare inalterati gli angoli della spezzata e coll'apportare ai soli lati le piccole correzioni che ne possono derivare. Questo scopo poi assai facilmente si raggiunge facendo sopra $\overline{AB}$, considerata come lato omologo di AB', la figura $AM_1N_1O_1B$ simile alla figura AM'N'O'B'. Gli angoli AM_1N_1, $M_1N_1O_1$ ed N_1O_1B della nuova spezzata saranno adunque rispettivamente eguali agli angoli (*Fig.* 56) AM'N', M'N'O' ed N'O'B stati misurati sul terreno, ed i suoi lati saranno quelli risultanti dalla misura moltiplicati pel rapporto delle due lunghezze (*Fig.* 64) $\overline{AB}$ ed $\overline{AB'}$. Essendo nel nostro caso particolare di metri 4229 la lunghezza, desunta dal disegno, della retta rappresentata in $\overline{AB'}$, e di metri 4226,66 la lunghezza della retta rappresentata in $\overline{AB}$, risulta che l'indicato rapporto è 0,999, e che quindi si possono assumere per lati della spezzata $AM_1N_1O_1B$

$$\overline{AM_1} = 1101^m,30$$

$$\overline{M_1N_1} = 2485\ ,31$$

$$\overline{N_1O_1} = 2236\ ,66$$

$$\overline{O_1B} = 1586\ ,91.$$

Riepilogando, possiamo dire: che l'asse stradale, fra i due punti fissi A e B, è determinato dalla linea poligonale $AM_1N_1O_1B$; che pei lati di questa linea poligonale si possono assumere i valori di $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1N_1}$, $\overline{N_1O_1}$ ed $\overline{O_1B}$ sopra riportati; e che i suoi angoli AM_1N_1, $M_1N_1O_1$ ed N_1O_1B si possono ritenere siccome rispettivamente eguali agli angoli misurati AM'N', M'N'O' ed N'O'B (*b*).

(*b*) Invece di dedurre dal disegno con un metodo puramente grafico la lunghezza della retta $\overline{AB'}$ (*Fig.* 64), con molta maggiore esattezza si può essa ottenere con un procedimento numerico. Perciò, conviene innanzi tutto trovare le voltate nei vertici

Quanto si è detto per lo stabilimento della spezzata determinante l'asse stradale pel tronco parziale compreso fra i due punti A e B, si

M', N' ed O'; dedurre quindi le deviazioni dei lati M'N', N'O' ed O'B' rispetto al primo lato AM'; calcolare le due coordinate orizzontali per ciascuno dei vertici M', N', O' e B' rispetto alla direzione Ax del primo lato AM', assunto come asse delle ascisse, e rispetto alla direzione perpendicolare Ay; e finalmente dedurre la distanza orizzontale fra i due estremi A e B' della spezzata AM'N'O'B'. Tutte queste operazioni poi si conducono a compimento coi metodi già stati seguiti nei numeri 8, 9, 10 ed 11 del presente lavoro.

Le voltate nei vertici M', N' ed O' dell'or indicatata spezzata sono rispettivamente

$$\begin{array}{r} 109^\circ\ 9'\ 20'' \\ -100\ 55\ 0 \\ \hline 54\ 0\ 10. \end{array}$$

Le deviazioni dei lati M'N', N'O' ed O'B', rispetto alla direzione Ax del primo lato AM', risultano:

pel lato M'N' $109^\circ\ 9'\ 20''$;

pel lato N'O' $8\ 14\ 20$;

pel lato O'B' $62\ 14\ 30$.

Le coordinate orizzontali dei vertici della spezzata che consideriamo, rispetto ai due assi ortogonali Ax ed Ay, sono:

Pel vertice A, nulle l'ascissa e l'ordinata;

Pel vertice M', di $1102^m,40$ l'ascissa e nulla l'ordinata;

Pel vertice N', di $286^m,07$ l'ascissa e di $2350^m,05$ l'ordinata;

Pel vertice O', di $2501^m,86$ l'ascissa e di $2670^m,89$ l'ordinata;

Pel vertice B', di $2775^m,48$ l'ascissa e di $3190^m,77$ l'ordinata.

Calcolando ora la distanza orizzontale fra i due punti A e B' col considerarla quale ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti le due coordinate del punto B', si trova che essa è di metri 4228,98.

È 0,999 il rapporto fra la distanza $\overline{AB}$ già stabilita di metri 4226,66, e la distanza $\overline{AB'}$ di metri 4228,98. Supponendo adunque che la spezzata determinante l'asse stradale fra i due punti A e B sia simile alla spezzata AM'N'O'B', i lati $\overline{AM_1}$, $\overline{M_1N_1}$, $\overline{N_1O_1}$ ed $\overline{O_1B}$ di quella definitivamente si possono assumere

$$\overline{AM_1} = 1101^m,30$$

$$\overline{M_1N_1} = 2485\ ,31$$

$$\overline{N_1O_1} = 2236\ ,66$$

$$\overline{O_1B} = 586\ ,91,$$

e ritenere che queste lunghezze siano quelle state misurate, corrette degli inevitabili piccoli errori che sempre accompagnano le operazioni di misure dirette.

applica a tutti gli altri tronchi parziali. Bisogna però avere l'avvertenza che il primo lato di tale spezzata per un tronco qualunque deve essere in prosecuzione o essere raccordato coll'ultimo lato della spezzata del tronco precedente.

18. **Determinazione delle parti curvilinee dell'asse stradale.** — Una volta stabilita la linea spezzata determinante l'asse stradale per ciascun tronco parziale, viene la questione del raccordamento dei tratti rettilinei mediante risvolte, il qual raccordamento viene generalmente fatto mediante curve circolari.

Considerando il solo tronco parziale compreso fra i due punti A e B (*Fig.* 64), giacchè quanto si dirà per esso riesce applicabile a tutti gli altri tronchi successivi, si devono lunghesso raccordare fra di loro le quattro direzioni rettilinee AM_1, M_1N_1, N_1O_1 ed O_1B, e quindi si devono tracciare tre archi circolari. Un primo arco tangente alle due direzioni M_1A ed M_1N_1; un secondo tangente alle due direzioni N_1M_1 ad N_1O_1; e finalmente un terzo tangente alle due direzioni O_1N_1 ed O_1B. Gli angoli, minori di 180°, che le indicate direzioni fanno fra di loro, sono:

$$AM_1N_1 = 70°50'40''$$

$$M_1N_1O_1 = 79\ \ 5\ \ 0$$

$$N_1O_1B = 125\ 59\ 50,$$

e, per completamente determinare gli accennati archi di raccordamento, non resta che da fissare i loro raggi. Questi raggi poi si assumeranno come nel numero 16 parlando delle prime operazioni da farsi per lo stabilimento dell'asse stradale, ossia di 500 metri il primo, di 800 metri il secondo e di 700 metri il terzo.

Supponendo che siano b_1c_1, d_1e_1 ed f_1g_1 (*Fig.* 65) gli archi da determinarsi e che i loro centri siano rispettivamente o', o'' ed o''', se immaginansi uniti questi centri coi corrispondenti punti di raccordamento b_1 e c_1, d_1 ed e_1, f_1 e g_1, risultano i quadrilateri $M_1b_1o'c_1$, $N_1d_1o''e_1$ ed $O_1f_1o'''g_1$, ciascuno dei quali ha due angoli retti. Riesce adunque facile calcolare gli angoli al centro ossia le ampiezze dei detti archi togliendo da 180° gli angoli delle direzioni da raccordarsi, e si ha

$$b_1o'c_1 = 109°\ \ 9'\ 20''$$

$$d_1o''e_1 = 100\ 55\ \ 0$$

$$f_1o'''g_1 = 54\ \ 0\ 10.$$

Importa ora determinare le distanze fra i punti di raccordamento ed

i vertici degli angoli, sui cui lati tali punti si trovano, ossia importa determinare le lunghezze delle tangenti $\overline{M_1 b_1} = \overline{M_1 c_1}$, $\overline{N_1 d_1} = \overline{N_1 e_1}$, $\overline{O_1 f_1} = \overline{O_1 g_1}$. Perciò si considerano i triangoli rettangoli $M_1 b_1 o'$, $N_1 d_1 o''$ ed $O_1 f_1 o'''$, dai quali riesce facile dedurre

$$\overline{M_1 b_1} = \overline{M_1 c_1} = 702^m,99$$

$$\overline{N_1 d_1} = \overline{N_1 e_1} = 969\ ,04$$

$$\overline{O_1 f_1} = \overline{O_1 g_1} = 356\ ,69.$$

Possiamo ora dire che sono noti i punti di raccordamento ossia i punti estremi delle risvolte, i loro raggi, le loro ampiezze e che quindi si conoscono tutti gli elementi che vengono in acconcio per tracciarle e per trovare i loro sviluppi.

Si fa il tracciamento delle risvolte sulla planimetria dell'asse stradale, costruendo prima i loro punti di raccordamento b_1 e c_1, d_1 ed e_1, f_1 e g_1, trovando quindi i corrispondenti centri o', o'' ed o''', e traendo partito del compasso per descrivere archi circolari di cui si conoscono i centri ed i raggi. Se poi questi centri cadessero fuori del foglio, si costruirebbero i detti archi per punti portando in iscala le coordinate da impiegarsi pel tracciamento degli archi stessi sul terreno, delle quali coordinate si parlerà nel numero 20.

19. **Sviluppo dell'asse stradale fra i due punti estremi di ciascun tronco parziale.** — Ora che l'asse stradale trovasi definitivamente stabilito e determinato, riesce facile ottenere la totale lunghezza della sua proiezione orizzontale per ciascuno dei tronchi parziali; ed ecco il metodo da seguirsi in quest'operazione, applicato al tronco compreso fra i due punti A e B (*Fig.* 65).

S'incomincia col trovare le lunghezze delle parti rettilinee o rettifili $\overline{A b_1}$, $\overline{c_1 d_1}$, $\overline{e_1 f_1}$ e $\overline{g_1 B}$. Queste lunghezze altro non sono che quelle definitivamente state stabilite nel numero 17 per i lati della linea poligonale $A M_1 N_1 O_1 B$ convenientemente diminuite dalle lunghezze delle tangenti state calcolate nel precedente numero, e si ha

$$\overline{A b_1} = \overline{A M_1} - \overline{M_1 b_1} = 398^m,31$$

$$\overline{c_1 d_1} = \overline{M_1 N_1} - \overline{M_1 c_1} - \overline{N_1 d_1} = 813\ ,28$$

$$\overline{e_1 f_1} = \overline{N_1 O_1} - \overline{N_1 e_1} - \overline{O_1 f_1} = 910\ ,93$$

$$\overline{g_1 B} = \overline{O_1 B} - \overline{O_1 g_1} = 230\ ,22.$$

Viene ora il calcolo delle lunghezze delle parti curvilinee o risvolte, le quali lunghezze sono di assai facile determinazione, giacchè trattasi di trovare gli sviluppi di archi circolari per cui sono noti raggio ed ampiezza. Questi sviluppi, fatti coll'aiuto delle tavole numeriche che trovansi nel numero 20 della nostra *Geometria pratica applicata all'arte del costruttore*, risultano

per la curva $b_1 c_1$ di 952^m,56

per la curva $d_1 e_1$ di 1409 ,06

per la curva $f_1 g_1$ di 659 ,77.

L'asse stradale pel tronco compreso fra i due punti A e B ed a partire da A, risulta adunque composto

di un primo rettifilo	della lunghezza	di	398^m,31
di una prima curva	»	»	952 ,56
di un secondo rettifilo	»	»	813 ,28
di una seconda curva	»	»	1409 ,06
di un terzo rettifilo	»	»	910 ,93
di una terza curva	»	»	659 ,77
di un quarto rettifilo	»	»	230 ,22 ;

ed il suo sviluppo totale risulta di metri 5374,13.

20. **Calcoli pel tracciamento delle curve.** — Il metodo delle tangenti sia quello da seguirsi pel tracciamento delle curve sul terreno, e proponiamoci di fare tutti quei calcoli preparatorii, che sono necessari per l'effettivo tracciamento delle tre curve del primo tronco.

La curva la quale deve raccordare le due direzioni rettilinee $M_1 A$ ed $M_1 N_1$ (*Fig.* 65) è un arco circolare col raggio di 500 metri e coll'ampiezza di 109° 9′ 20″. Immaginando diviso in quattro parti eguali l'arco $b_1 c_1$ (*Fig.* 66) nei punti i, k ed l e condotte in questi punti le tangenti all'arco stesso, nasce la linea poligonale $b_1 m n p q c_1$ ad esso circoscritta, la quale è pienamente determinata quando si conoscano le lunghezze dei suoi lati e le ampiezze degli angoli dei suoi lati col lato precedente.

I due lati estremi $\overline{b_1 m}$ e $\overline{c_1 q}$ sono eguali fra di loro, e ciascuno di essi è la tangente di un arco col raggio di 500 metri e coll'ampiezza di 13° 38′ 40″, ottava parte dell'angolo $b_1 o' c_1$ di 109° 9′ 20″. Questi

due lati adunque hanno la lunghezza di metri 121,37. I tre lati intermedi $\overline{mn}$, $\overline{np}$ e $\overline{pq}$ sono pure eguali fra di loro e ciascuno di essi è doppio del lato $\overline{b_1 m}$; di maniera che la lunghezza di ciascuno dei tre lati intermedi risulta di metri 242,74.

Gli angoli $b_1 mn$, mnp, npq e pqc_1 sono tutti eguali fra di loro; ciascuno di essi è supplemento della quarta parte dell'angolo $b_1 o'_1 c_1$, e quindi la corrispondente ampiezza risulta di 152° 42′ 40″.

Onde poter costrurre la curva $b_1 c_1$, bisogna conoscere le coordinate di diversi punti dell'arco $b_1 t$ (ottava parte dell'arco totale), riferite queste coordinate alla tangente ed alla sua perpendicolare. Perciò, traendo partito delle formole, o, per maggiore speditezza, della tavola numerica del numero 15 della nostra *Geometria pratica applicata all'arte del costruttore*, e considerando sull'arco stesso punti corrispondenti ad angoli variabili di due gradi in due gradi e quello corrispondente all'ampiezza di 13° 30′ (la quale è l'ampiezza immediatamente inferiore a quella dell'arco da tracciarsi e che trovasi nella tavola), si può compilare il seguente quadro:

ANGOLI prendendo per origine i punti di contatto	ASCISSE da misurarsi sulla tangente	ORDINATE perpendicolari alla tangente
2°	m 17,450	m 0,304
4	34,878	1,218
6	52,264	2,739
8	69,586	4,866
10	86,824	7,596
12	103,956	10,926
13,30′	116,723	13,815

Per fare i calcoli necessari al tracciamento della curva raccordatrice delle direzioni rettilinee $N_1 M_1$ ed $N_1 O_1$ (*Fig.* 65) avente il raggio di 800 metri e l'ampiezza 100° 55′, si può tenere il metodo medesimo già stato seguìto per la curva $b_1 c_1$. L'ottava parte dell'ampiezza dell'intiero arco $d_1 e_1$ (*Fig.* 67) risulta di 12° 36′ 52″,5; i due lati estremi

$\overline{d_1 m}$ e $\overline{e_1 q}$ della linea poligonale $d_1 m n p q e_1$ hanno la lunghezza comune di metri 179,03; e ciascuno dei tre lati intermedi $\overline{mn}$, $\overline{np}$ e $\overline{pq}$ ammette la lunghezza di metri 358,06, doppia di quella dei due lati estremi. Gli angoli $d_1 mn$, mnp, npq e $pq e_1$ hanno la medesima ampiezza di 154° 46′ 15″. Finalmente, si deduce il seguente quadro delle ascisse e delle ordinate necessarie alla costruzione della curva per punti:

ANGOLI prendendo per origine i punti di contatto	ASCISSE da misurarsi sulla tangente	ORDINATE perpendicolari alla tangente
	m	m
2°	27,920	0,487
4	55,805	1,949
6	83,623	4,383
8	111,338	7,785
10	138,918	12,154
12	166,329	17,482
12,30	173,152	18,963

Per la curva destinata a raccordare le due direzioni rettilinee $O_1 N_1$ ed $O_1 B$ (*Fig.* 65), la quale ha il raggio di 700 metri e l'ampiezza di 54° 0′ 10″, basta immaginare diviso l'arco $f_1 g_1$ (*Fig.* 68) per metà nel punto k, e considerare solo la linea poligonale $f_1 r s g_1$. La quarta parte dell'ampiezza dell'intiero arco $f_1 g_1$ si trova di 13° 30′ 2″,5; i due lati estremi $\overline{f_1 r}$ e $\overline{g_1 s}$ della linea poligonale $f_1 r s g_1$ ammettono la medesima lunghezza di metri 168,06; il lato intermedio $\overline{rs}=2.\ \overline{f_1 r}$ risulta di metri 336,12; e ciascuno degli angoli $f_1 r s$ ed $r s g_1$ ha l'ampiezza di 152° 59′ 55″. Le ascisse e le ordinate, da impiegarsi nella costruzione della curva per punti, risultano dal seguente quadro:

ANGOLI prendendo per origine i punti di contatto	ASCISSE da misurarsi sulla tangente	ORDINATE perpendicolari alla tangente
	m	m
2°	24,430	0,426
4	48,830	1,505
6	73,170	3,835
8	97,421	6,812
10	121,554	10,635
12	145,538	15,297
13,30'	163,412	19,341

Cogli elementi registrati nella prima, nella seconda e nella terza colonna dei tre quadri stati compilati riesce facile la costruzione per punti delle tre curve rappresentate in $b_1 c_1$, $d_1 e_1$ ed $f_1 g_1$ (*Fig.* 65); giacchè gli elementi contenuti nel primo, nel secondo e nel terzo quadro servono rispettivamente per ciascuno degli archi eguali, in cui le curve $b_1 c_1$, $d_1 e_1$ ed $f_1 g_1$ (*Fig.* 66, 67 e 68) sono divise dalle direzioni dei raggi condotti ai vertici ed ai punti di mezzo dei lati delle corrispondenti linee poligonali $b_1 m n p q c_1$, $d_1 m n p q e_1$ ed $f_1 r s g_1$.

21. **Tracciamento delle curve sul terreno.** — Quest'operazione assai facilmente si effettua mediante gli elementi stati determinati nel precedente numero. Il metodo da seguirsi non differisce punto da una curva all'altra; ed eccone l'applicazione per la curva raccordatrice delle due direzioni rappresentate in $M_1 A$ ed $M_1 N_1$ (*Fig.* 65) sul disegno, in $M' A$ ed $M' N'$ (*Fig.* 56 e 69) sul terreno.

A partire dal punto A (*Fig.* 69) nella direzione nota A M', si misuri la lunghezza $\overline{A b_1}$ di metri 398,31 (Num. 19), onde ottenere in b_1 il punto di raccordamento della curva colla direzione A M'. Da b_1 verso M' si porti la lunghezza $\overline{b_1 m}$ di metri 121,37 (Num. 20); in m, colla direzione $m A$, si faccia l'angolo $A m x$ di 152° 42' 40" (Num. 20); e, sulla direzione $m x$, si porti la lunghezza $\overline{mn}$ di metri 242,74 (Num. 20). Ottenuto il punto n ed assuntolo come vertice, si faccia colla direzione $n m$ l'angolo $m n y$ pure di 152° 42' 40", e si determini $\overline{np}$ anche

di metri 242,74. In p e colla pn, si costruisca lo stesso angolo, onde ottenere la direzione pz intersecante in q la direzione M' N'. Se la distanza $\overline{pq}$ è di metri 242,74, se l'angolo pq N' è di 152° 42' 40'', e se, determinato il punto c_1 in modo che $\overline{M'c_1}$ sia di metri 702,99 (Num. 18), si trova che la distanza $\overline{qc_1}$ risulta di metri 121,37, si ha nella poligonale $b_1 mnpqc_1$ la linea poligonale alla quale conviene riferirsi pel tracciamento della curva raccordatrice delle due direzioni rettilinee M' A ed M' N; i punti b_1 e c_1 sono i due punti di contatto di questa curva colle direzioni stesse; ed i punti i, k ed l, determinati sulle metà dei lati $\overline{mn}$, $\overline{np}$ e $\overline{pq}$, sono i punti di contatto della stessa curva cogli or indicati lati. Invece di costruire la linea poligonale $b_1 mnpqc_1$ partendo da b_1 e venendo fino in c_1, conviene generalmente stabilire i due punti estremi b_1 e c_1, ed operare come si è detto sulle due parti $b_1 mnp$ e $c_1 qpn$. Si ha un controllo dell'esattezza dell'operazione in ciò che, ottenendosi il lato $\overline{np}$ per due differenti vie, devono coincidere i due risultati ad esso relativi. Qualora si rimarchi esservi qualche piccola discrepanza fra questi risultati, riesce facile modificare leggiermente e l'uno e l'altro in modo da ottenere un tale risultato medio, al quale si può riferire il tracciamento della curva senza compromettere la regolarità dell'operazione (*c*).

Costrutta la linea poligonale $b_1 mnpqc_1$, riesce della massima facilità il tracciamento della curva circolare che alla medesima deve trovarsi tangente nei punti b_1, i, k, l e c_1. Sulla $b_1 m$, a partire dall'origine b_1, si portano successivamente le ascisse e perpendicolarmente alla stessa retta si misurano le corrispondenti ordinate inscritte rispettivamente nella seconda e nella terza colonna del primo quadro del precedente numero. Gli estremi di queste ordinate danno sette punti, i quali, unitamente al punto b_1, vengono in acconcio pel tracciamento dell'arco $b_1\alpha$. Le stesse ascisse e le stesse ordinate si portano rispettivamente a partire da i sulla e perpendicolarmente ad im; e gli estremi delle ordinate si trovano su uno stesso arco di circolo $i\beta$ identico

(*c*) Invece di tracciare per camminamento la linea poligonale $b_1 mnpqc_1$ (*Fig.* 69), assai facilmente si può essa stabilire con sole misure di distanze. Infatti, considerando i due triangoli rettangoli mb_1o' ed rb_1o' (*Fig.* 66), riesce facile calcolare i loro cateti $\overline{b_1m}=c$ e $\overline{b_1r}=c'$, e quindi dedurre la distanza $\overline{mr}=d$ rappresentante la loro differenza. Portando sulla direzione b_1M' (*Fig.* 69) le distanze $\overline{b_1m}$ e $\overline{b_1r}$ rispettivamente eguali a c e c', e sulla direzione c_1M' le distanze $\overline{c_1q}$ e $\overline{c_1s}$ pure rispettivamente eguali a c e c', tracciando l'allineamento rs e prendendo su esso $\overline{rn}=\overline{sp}=\overline{mr}$, nei punti b_1, m, n, p, q, c_1 si hanno i vertici della spezzata, e quindi quanto basta pel completo suo tracciamento.

all'arco $b_1 \alpha$. A partire dall'origine i si portino ancora le stesse ascisse sulla in, e, perpendicolarmente ad essa, le rispettive ordinate, ed i punti estremi delle ordinate cadono su un terzo arco $i\gamma$. Prendendo per origine il punto k e portando le dette ascisse da k verso n e da k verso p, nei punti estremi delle relative ordinate si otterranno altrettanti punti dei due archi $k\delta$ e $k\lambda$; e, continuando collo stesso metodo a prendere per origine i punti l e c_1, si arriverà ad ottenere gli altri tre archi $l\varepsilon$, $l\eta$ e $c_1\mu$. Gli otto archi eguali $b_1\alpha$, $i\beta$, $i\gamma$, $k\delta$, $k\lambda$, $l\varepsilon$, $l\eta$ ed $c_1\mu$, hanno tutti lo stesso centro ed il medesimo raggio, e costituiscono essi un unico arco di circolo il quale serve a raccordare le due direzioni rettilinee M'A ed M'N'.

Il metodo tenuto per raccordare le due direzioni rettilinee M'A ed M'N' (*Fig.* 56) serve pel raccordamento delle altre N'M' ed N'O', O'N' ed O'B, e per tutte le altre risvolte che può essere il caso di tracciare nell'esecuzione dell'intiero progetto della strada.

22. **Picchettazione ettometrica e chilometrica dell'asse stradale.** — Nel tracciamento dei rettifili e delle curve, determinanti l'andamento dell'asse stradale, generalmente si usa piantare un picchetto ad ogni ettometro, ed un picchetto di maggior grossezza ad ogni chilometro. Sui picchetti distanti di un chilometro si marcano i numeri **0**, **1**, **2**, **3**, ...; e,s ui nove picchetti intermedi a due picchetti distanti di un chilometro, si pongono i numeri d'ordine dall'1 fino al 9. Questa picchettazione riesce eminentemente utile per le ulteriori operazioni, e permette di indicare in modo preciso in quali luoghi esistono le principali particolarità che il terreno presenta, dicendo fra quali due picchetti ettometrici esse si trovano, e qual distanza hanno da uno di essi. Nella figura 70 sono rappresentate in proiezione orizzontale le picchettazioni ettometriche e chilometriche per oltre due chilometri dell'asse della strada di cui studiamo il progetto. I circoli minori corrispondono alla picchettazione ettometrica, ed i circoli maggiori alla picchettazione chilometrica.

23. **Livellazione di alcuni capi-saldi.** — Quest'operazione ha per iscopo di ottenere le ordinate di alcuni punti stabili, affinchè, riferendosi ad essi nelle successive livellazioni di dettaglio, si possano avere sufficienti criteri per decidere del grado di esattezza che queste presentano. Gli indicati punti stabili possono trovarsi o sull'asse stradale od anche fuori, ma a non grande distanza dall'asse medesimo. Importa poi sommamente che essi si trovino sopra oggetti fissi, affinchè non avvenga la benchè menoma variazione nella loro posizione altimetrica, e quindi quasi sempre si individuano sopra pilastrini di mu-

ratura, sopra pietre saldamente fissate nel terreno, sopra qualche parete di un edifizio, ecc. In quei casi però nei quali, fra lo stabilimento dei capi-saldi e le operazioni che con essi si vogliono controllare, deve passare un lieve intervallo di tempo, può bastare di stabilire i detti punti sopra picchetti convenientemente piantati nel terreno in siti dove non possano essere smossi.

Per il tratto di asse stradale rappresentato nella figura 70 vi sono cinque capi-saldi, rispettivamente indicati coi numeri I, II, III, IV e V. Il primo di questi è l'origine stessa dell'asse stradale; il quarto è posto sull'asse stradale e coincide col punto di raccordamento della prima curva col secondo rettifilo; e gli altri tre sono fuori, ma a piccola distanza dall'asse medesimo. Trovasi a dritta dell'asse stradale e poco prima del terzo ettometro quel capo-saldo che ha il numero II; i due capi-saldi coi numeri III e V sono a sinistra dell'asse stradale, il primo poco prima del nono ettometro, ed il secondo di poco al di là del ventiduesimo ettometro.

La livellazione dei capi-saldi, usando di un buonissimo livello a bolla d'aria con cannocchiale, deve essere fatta colla massima cura, non una sola, ma due ad anche un maggior numero di volte; e, per essere generalmente i capi-saldi distanti più della doppia portata del livello, importa collegare le operazioni fatte dalle diverse stazioni col livellare alcuni punti intermedi ai capi-saldi stessi. Per ciascuna operazione ben eseguita, si ottengono valori ben poco differenti delle ordinate degli stessi punti, e le medie aritmetiche di queste ordinate costituiscono i valori da assumersi come ordinate definitive.

I risultati di due operazioni di livellazione, state eseguite fra il capo-saldo I ed il capo-saldo V, si trovano marcati nei due registri che qui sotto si riportano. I punti, di cui si hanno le quote nella terza colonna e che non sono indicati da alcun numero nella seconda, sono quelli che servono a collegare le operazioni fatte dalle diverse stazioni senza punto eccedere la portata del livello nella determinazione delle varie quote.

Si è assunta di 500 metri la profondità della superficie di paragone per rapporto al capo-saldo I; e si ha una descrizione succinta dei capi-saldi nell'ultima colonna del registro relativo alla prima livellazione.

Registro per la prima livellazione dei capi-saldi

Stazioni	Numerazione dei capi-saldi	Quote lette	Ordinate dei piani di mira	Ordinate dei punti livellati	OSSERVAZIONI
		m	m	m	
1ª	I	1,48	501,48	500,00	Estremità A dell'asse stradale determinata sulla faccia superiore, posta a fior di terra, di una pietra parallelepipeda, appositamente piantata nel terreno. Quest'estremità costituisce il primo capo-saldo.
		2,73		498,75	
2ª	II	1,52 0,15	500,27	498,75 500,12	Capo-saldo a dritta dell'asse stradale. Questo capo-saldo è posto presso il terzo ettometro, e consiste in una pietra parallelepipeda appositamente piantata nel terreno col punto livellato scolpito nella sua faccia superiore.
3ª		1,70 1,43	501,82	500,12 500,39	
4ª		2,13 0,51	502,52	500,39 502,01	
5ª		2,49 0,50	504,50	502,01 504,00	
6ª	III	2,99 1,24	506,99	504,00 505,75	Capo-saldo a sinistra dell'asse stradale. Questo capo-saldo trovasi poco prima del nono ettometro, e consiste in un picchetto col punto livellato posto sulla sua faccia superiore.
7ª		2,42 0,37	508,17	505,75 507,80	
8ª		2,73 0,53	510,53	507,80 510,00	

Stazioni	Numerazione dei capi-saldi	Quote lette	Ordinate dei piani di mira	Ordinate dei punti livellati	OSSERVAZIONI
		m	m	m	
9ª		2,84	512,84	510,00	
	IV	0,82		512,02	Capo-saldo sull'asse stradale nel raccordamento della prima curva col secondo rettifilo. Questo capo-saldo consiste in una pietra parallelepipeda appositamente piantata nel terreno col punto livellato scolpito nella sua faccia superiore.
10ª		0,42	512,44	512,02	
		2,15		510,29	
11ª		0,37	510,66	510,29	
		3,06		507,60	
12ª		0,23	507,83	507,60	
		1,31		506,52	
13ª		1,94	508,46	506,52	
		0,12		508,34	
14ª		1,50	509,84	508,34	
		0,94		508,90	
15ª		1,59	510,49	508,90	
	V	0,46		510,03	Capo-saldo a sinistra dell'asse stradale. Questo capo-saldo trovasi di poco al di là del ventiduesimo ettometro, e consiste in una pietra saldamente fermata nel terreno col punto livellato scolpito sulla sua faccia superiore.

Registro per la seconda livellazione dei capi-saldi

Stazioni	Numerazione dei capi-saldi	Quote lette	Ordinate dei piani di mira	Ordinate dei punti livellati	OSSERVAZIONI
		m	m	m	
1ª	I	1,53	501,53	500,00	
		2,56		498,97	
2ª		1,84	500,81	498,97	
	II	1,71		500,09	
3ª		1,68	501,77	500,09	
		1,30		500,47	
4ª		1,75	502,22	500,47	
		0,23		501,99	
5ª		1,98	503,97	501,99	
		0,10		503,87	
6ª		2,40	506,27	503,87	
	III	0,54		505,73	
7ª		2,59	508,32	505,73	
		0,40		507,92	
8ª		2,99	510,91	507,92	
		0,76		510,15	
9ª		2,97	513,12	510,15	
	IV	1,13		511,99	
10ª		0,50	512,49	511,99	
		2,34		510,15	
11ª		0,31	510,46	510,15	
		2,97		507,49	
12ª		0,28	507,77	507,49	
		1,50		506,27	
13ª		2,21	508,48	506,27	
		0,27		508,21	
14ª		1,48	509,69	508,21	
		0,70		508,99	
15ª		2,21	511,20	508,99	
	V	1,21		509,99	

Osservando i riportati registri della prima e della seconda livellazione dei capi-saldi, immediatamente si riconosce che, fissata di 500 metri l'ordinata del capo-saldo I, differiscono solo di qualche centimetro le ordinate degli altri capi-saldi. Si possono adunque assumere le medie aritmetiche dei due valori trovati per le ordinate di ciascun capo-saldo siccome rappresentanti le ordinate definitive, e quindi, tenendo conto dei soli centimetri, si può stabilire che siano rispettivamente di metri 500, di metri 500,10, di metri 505,74, di metri 512,01 e di metri 510,01 le ordinate dei capi-saldi I, II, III, IV e V.

24. **Rilevamento del profilo longitudinale.** — Tracciato l'andamento dell'asse stradale, eseguite le picchettazioni ettometrica e chilometrica e stabiliti i capi-saldi, bisogna determinare il profilo del terreno nella direzione dell'asse medesimo, e si raggiunge lo scopo mediante una livellazione longitudinale. Quest'operazione si fa generalmente adoperando un buon livello a bolla d'aria con cannocchiale; e, quasi sempre, si impiegano le canne metriche o la catena metrica nella valutazione delle distanze orizzontali fra i punti che in seguito si dovranno considerare per la costruzione del profilo longitudinale. Le ineguaglianze della superficie del terreno, i cavi, i fossi, i canali, le strade e tutte le particolarità, che in qualche modo possono influire sulla costruzione della strada e che s'incontrano lungo la direzione del suo asse, daranno i punti da considerarsi nel rilevamento del profilo longitudinale.

I capi-saldi servono a verificare se la livellazione longitudinale procede regolarmente; giacchè ritenendo la stessa superficie di paragone già definita nel precedente numero, l'ordinata di un capo-saldo qualunque, ottenuta coi dati risultanti dalla livellazione longitudinale, deve eguagliare l'ordinata dello stesso capo-saldo quale risulta dagli elementi avuti nella livellazione per le verificazioni fatte sui capi-saldi stessi come nell'or indicato numero venne praticato. Queste verificazioni poi della livellazione longitudinale devonsi fare sul terreno di mano in mano che si hanno i dati necessari per calcolare la differenza di livello fra due capi-saldi successivi, e questo per impedire il propagarsi e l'accumularsi di errori, e per non dover rifare che la livellazione longitudinale compresa fra due capi-saldi successivi allorquando vengasi a trovare qualche discrepanza.

La picchettazione (Num. 22), colla quale vennero individuati i punti dell'asse stradale distanti fra di loro di un ettometro, verrà in acconcio per assicurarsi che, durante l'operazione per ottenere il profilo longi-

tudinale, non si fanno sensibili errori nella valutazione delle distanze orizzontali.

I punti da livellarsi si individuano mediante picchetti colle loro teste a fior di terra e facili a distinguersi da quelli appartenenti alle picchettazioni chilometrica ed ettometrica.

Nel registro che qui sotto si riporta trovansi i risultati della livellazione longitudinale per oltre due chilometri della strada, di cui studiasi il progetto, a partire dall'estremo A (*Fig.* 56 e 70). I punti d'ineguaglianza della superficie del terreno, pei quali si giudica necessario di far passare una sezione trasversale, sono indicati coi numeri d'ordine inscritti nella seconda colonna del registro, e questi numeri devono essere quelli stessi che si trovano sui picchetti destinati ad individuarli sul terreno. Gli altri punti, ai quali conviene aver riguardo affinchè risulti qualche importante particolarità del terreno, ma per cui non è necessario far passare una sezione trasversale, sono descritti nell'ultima colonna del registro stesso. Le distanze orizzontali dei punti livellati sul profilo longitudinale sono valutate dall'origine A, giacchè questa maniera di contare le distanze orizzontali riesce assai facile e spedita in seguito alla picchettazione degli ettometri. I piccoli segni, che nella figura 70 trovansi sulla linea rappresentante l'asse stradale, indicano i punti su esso livellati, e portano un numero d'ordine quei punti per cui deve passare una sezione trasversale del terreno.

Stazioni	Numerazione dei punti d'ineguaglianza	Distanze dall'origine	Quote lette	Ordinate dei piani di mira	Ordinate dei punti livellati	OSSERVAZIONI
		m	m	m	m	
1ª	1	0	1,96	501,96	500,00	Estremo A dell'asse stradale e capo-saldo I.
	2	96,42	2,86		499,10	
		102,56	2,96		499,00	Bordo di una strada campestre.
		105,27	2,95		499,01	Altro bordo della stessa strada.
	3	149,20	3,00		498,96	
2ª	3		1,80	500,76	498,96	
	4	237,50	1,51		499,25	
			0,65		500,11	Capo-saldo II.
3ª			1,49	501,60	500,11	Lo stesso capo-saldo.
	5	302,27	1,78		499,82	
	6	445,12	1,33		500,27	
4ª	6		1,95	502,22	500,27	
	7	520,22	1,12		501,10	
		532,27	1,00		501,22	Ciglio della sponda sinistra del canale.....
		534,20	2,92		499,30	Fondo dello stesso canale a sinistra.
		535,15	2,91		499,31	Fondo dello stesso canale a destra.
		537,05	0,98		501,24	Ciglio della sponda destra.
	8	595,42	0,24		501,98	
5ª	8		2,13	504,11	501,98	
	9	672,24	1,27		502,84	
	10	746,10	0,15		503,96	
6ª	10		2,02	505,98	503,96	
	11	812,20	1,50		504,48	
	12	851,13	0,78		505,20	
			0,26		505,72	Capo-saldo III.
	13	895,72	0,17		505,81	
7ª	13		2,25	508,06	505,81	
	14	946,24	1,14		506,92	
	15	1044,12	0,08		507,98	
8ª	15		2,12	510,10	507,98	
	16	1120,21	1,06		509,04	
	17	1194,62	0,12		509,98	
9ª	17		2,19	512,17	509,98	
	18	1268,12	1,53		510,64	
	19	1310,41	0,90		511,27	
	20	1344,52	0,33		511,84	
			0,14		512,03	Capo-saldo IV.

Stazioni	Numerazione dei punti d'ineguaglianza	Distanze dall'origine	Quote lette	Ordinate dei piani di mira	Ordinate dei punti livellati	OSSERVAZIONI
		m	m	m	m	
10ª	20		0,37	512,21	511,84	
	21	1402,21	0,12		512,09	
	22	1493,92	2,14		510,07	
11ª	22		0,21	510,28	510,07	
	23	1554,26	1,07		509,21	
	24	1621,32	2,24		508,04	
	25	1644,27	2,59		507,69	
12ª	25		0,17	507,86	507,69	
	26	1701,26	1,14		506,72	
	27	1771,12	1,39		506,47	
	28	1782,16	1,68		506,18	Fondo di un rio.
	29	1794,27	1,27		506,59	
13ª	29		1,70	508,29	506,59	
	30	1882,13	0,42		507,87	
	31	1943,95	0,08		508,21	
14ª	31		1,50	509,71	508,21	
	32	2010,13			508,57	
	33	2087,37			508,71	
15ª	33		1,64	510,35	508,71	
	34	2164,15	0,52		509,83	Punto di raccordamento del secondo rettifilo colla seconda curva.
	35	2227,67	0,43		509,92	
			0,35		510,00	Capo-saldo V.

Le ordinate dei cinque capi-saldi che trovansi lungo il tronco di livellazione longitudinale, cui si riferisce il riportato registro, non differiscono che di qualche centimetro da quelle state ottenute colla livellazione dei soli capi-saldi, della quale si parlò nel precedente numero. Si ha dunque ragione di ritenere come esatti i risultamenti della detta livellazione longitudinale, o almeno di considerarli siccome contenuti nei limiti di quell'esattezza, che è permesso sperare nel genere di operazioni di cui trattiamo.

25. **Disegno del profilo longitudinale.** — Venendo al disegno del profilo longitudinale, si possono adottare la scala del 1/5000 per le distanze orizzontali e la scala del 1/500 per le ordinate. Siccome poi le ordinate sono tanto lunghe da non poter esse stare sul foglio, bisogna immaginarle tutte diminuite di 450 metri, ed adoperare le ordinate così diminuite per la costruzione del profilo longitudinale.

Per fare questa costruzione in modo che il profilo sia fornito di tutte le occorrenti indicazioni numeriche, mediante cinque rette parallele, rappresentanti altrettante orizzontali, si facciano risultare quattro liste (*Fig.* 75) le quali portino le indicazioni: *Chilometri ed ettometri* la prima, ossia la più bassa; *Distanze progressive* la seconda; *Distanze parziali* la terza; ed *Ordinate nere* la quarta.

Con tratti, perpendicolari alle due rette comprendenti la prima lista, si divida la lunghezza di questa in intervalli, ciascuno dei quali abbia la lunghezza di un ettometro. Le distanze chilometriche si numerizzino coi numeri **0**, **1**, **2**, ..., ed alle divisioni corrispondenti alle distanze ettometriche si pongano i numeri dal 1 al 9, come risulta dalla figura 75.

Sulla orizzontale che separa la prima dalla seconda lista ed a partire dal suo estremo di sinistra, si portino le distanze che tutti i punti stati livellati sull'asse stradale hanno dall'origine A; per le estremità di tali distanze si conducano altrettante verticali; e, a sinistra di queste, si scrivano le distanze che i punti, a cui si riferiscono, hanno dall'or accennata origine A. Sull'orizzontale poi che divide la seconda dalla terza lista, e precisamente presso le intersezioni di questa colle verticali riferentisi a quei punti dell'asse stradale per cui vuolsi far passare una sezione trasversale, si pongano successivamente i numeri d'ordine 1, 2, 3, ..., i quali danno nel loro complesso la numerazione delle sezioni trasversali.

Sovente occorre di dover considerare la distanza di un punto qualunque del profilo longitudinale dai due punti fra i quali esso si trova, e quindi, oltre le distanze progressive, conviene anche di marcare sul profilo longitudinale le distanze parziali dei suoi vertici successivi. Queste distanze si marcano sulla terza lista, ossia fra la terza e la quarta orizzontale.

A partire dalla seconda orizzontale (ossia da quella sulla quale vennero portate le distanze dei punti livellati dall'estremo A) ed in senso ad essa perpendicolare, si portino, nella scala del 1/500, le lunghezze rappresentative delle ordinate dei punti livellati (Num. 24) di-

minuite di 450 metri. Unendo fra di loro gli estremi di queste ordinate si ottiene il domandato profilo del terreno. Le ordinate nere si marcano sulle verticali corrispondenti appena al disopra della quarta orizzontale.

26. **Tracciamento della linea di progetto sul profilo longitudinale.** — Costrutto il profilo del terreno secondo l'andamento dell'asse stradale, viene la quistione di tracciare su esso la linea di progetto. Questa linea che deve generalmente passare per alcuni punti fissi e che non può avere pendenze eccedenti un prestabilito limite, quasi sempre non è geometricamente determinata, ed il tracciamento della medesima in gran parte è affidato agli apprezzamenti che saprà fare il costruttore in ordine al conseguimento della maggior economia possibile.

Nel caso particolare che trattiamo e pel tronco di strada compreso fra i due punti A e B (*Fig.* 56), seguendo l'andamento dell'asse stradale si riconosce: che nel suo complesso la superficie del terreno sale per una lunghezza di metri 1402,21 a partire dal punto A; che quindi discende per una lunghezza di metri 379,95; che dopo sale piuttosto con dolce pendìo per una lunghezza di metri 1791,05; e che finalmente presenta maggior rapidità sulla rimanente lunghezza di metri 1800,92.

Se adunque sul tronco parziale determinato dai due punti A e B consideriamo i punti in cui si verificano le maggiori ineguaglianze di terreno, possiamo dire che essi sono tre aventi rispettivamente dall'origine A le distanze di metri 1402,21, di metri 1782,16 e di metri 3573, 21. Come risulta dal registro della livellazione longitudinale (Num. 24), le ordinate dei primi due di questi punti sono rispettivamente di metri 512,09 e di metri 506,18; e, supponendo che sia di metri 515,57 l'ordinata del terzo punto, si ha che il profilo del terreno, limitato a considerare fra A e B i soli punti che presentano le maggiori ineguaglianze, resta ridotto ad una spezzata A P Q R B (*Fig.* 71).

Se ora si calcolano le pendenze delle due rette A P e B R, trovasi che esse sono maggiori della pendenza limite dell'8 per 1000. Segue da ciò: che fra A e P si avrà la massima economia di sterro quando si salga da A verso P colla pendenza limite del 8 per 1000; che fra R e B si avrà la massima economia d'interro quando si discenda da B verso R, pure colla pendenza limite dell'8 per 1000; che quindi il tronco parziale di strada fra i due punti A e B si comporrà di tre distinte livellette. La prima partirà dal punto A, avrà la pendenza del 8 per 1000 e terminerà in P_1 sulla verticale del punto P; la terza, partendo dal punto B, discenderà colla pendenza del 8 per 1000 fino

al suo incontro R_1 colla verticale del punto R; la seconda congiungerà il punto P_1 col punto R_1 e la sua pendenza, che non potrà oltrepassare l'8 per 1000, sarà facile a determinarsi allorquando si conosceranno le ordinate dei due punti P_1 ed R_1.

Considerando il punto P_1 come appartenente alla retta A P_1, si ha che la sua ordinata $\overline{P'P_1}$ vien data da

$$\overline{P'P_1} = \overline{A'A} + \overline{pP_1} = 500 + 0{,}008 \times 1402{,}21 = 511^m{,}22,$$

e analogamente, considerando il punto R_1 siccome appartenente alla retta B R_1, risulta che la sua ordinata $\overline{R'R_1}$ ammette il valore

$$\overline{R'R_1} = \overline{B'B} - \overline{rR_1} = 542{,}57 - 0{,}008 \times 1800{,}92 = 528^m{,}16.$$

La differenza di livello fra i due punti R_1 e P_1 è

$$528{,}16 - 511{,}22 = 16^m{,}94,$$

e quindi la pendenza della retta P_1R_1, la cui proiezione orizzontale $\overline{P'R'}$ ha la lunghezza di metri 2171, si ottiene nel quoziente

$$\frac{16{,}94}{2171} = 0{,}0078.$$

Riepilogando, si conchiude: che la linea di progetto pel tronco parziale compreso fra i due punti A e B può essere progettata con tre distinte livellette; che la prima livelletta ha la lunghezza di metri 1402,21, l'ascesa totale di metri 11,22 e la pendenza di 0,008; che la seconda livelletta risulta colla lunghezza di metri 2171, coll'ascesa totale di metri 16,94 e colla pendenza di 0,0078; che la terza livelletta ha la lunghezza di metri 1800,92, l'ascesa totale di metri 14,41 e la pendenza di 0,008.

Per tracciare la linea di progetto sul profilo longitudinale, si portano a posto i vari suoi vertici mediante le distanze orizzontali che essi hanno dall'origine A (*Fig.* 75) e mediante le loro ordinate. Questi vertici, uniti con linee rette, danno la domandata linea di progetto.

Bisogna poi osservare che, avendosi fatta la diminuzione di 450 metri alle ordinate del terreno nella costruzione del suo profilo, anche le ordinate della linea di progetto si devono diminuire della medesima

quantità prima di impiegarle nella determinazione dei vertici della linea stessa.

I dati relativi alla linea di progetto, ossia la lunghezza, l'ascesa o discesa totale e la pendenza di ciascuna livelletta, si inscrivono sul profilo longitudinale, e questo si può fare nel modo indicato sulla figura 75, rappresentante una porzione del profilo longitudinale del tronco di strada compreso fra i due punti A e B (*Fig.* 56) (*d*).

Nei profili disegnati a mano si fanno al carmino le linee di progetto, le indicazioni e le scritturazioni ad esse relative.

27. **Ordinate rosse del profilo longitudinale.** — Le ordinate dei vertici della linea di progetto, che già vennero determinate nel precedente numero onde poter costrurre in modo facile la detta linea,

(*d*) Qualora si giudichi che la linea di progetto, determinata come si è indicato in questo numero, dia luogo ad uno sterro troppo piccolo in confronto dell'interro, di qualche poco si può aumentare quello e diminuire questo, adottando fra A e B (*Fig.* 71) due sole livellette con pendenza e contropendenza eguali dell'8 per 1000.

Il tracciamento di una tal linea di progetto assai facilmente può essere fatto mediante un semplice procedimento grafico, che consiste: nel condurre per B la retta Ba_1 avente l'indicata pendenza dell'8 per 100; nel dividere per metà la lunghezza $\overline{Aa_1}$ in m; nel tirare per m un'orizzontale incontrante la Ba_1 nel punto S. La spezzata ASB costituisce la domandata linea di progetto, ed ecco come si determinano le lunghezze orizzontali $\overline{A'S'}$ e $\overline{B'S'}$ delle due livellette di cui essa si compone, non che l'ordinata $\overline{S'S}$ del vertice S.

Considerando il punto a_1 posto sulla retta Ba_1 avente la pendenza del 8 per 1000 e la proiezione orizzontale di metri 5374,13, si ha: che l'ordinata $\overline{A'a_1}$ viene data da

$$\overline{A'a_1} = \overline{A'a} - \overline{aa_1} = 542{,}57 - 0{,}008 \times 5374{,}13 = 499^{m},58;$$

che la retta $\overline{Aa_1}$ ammette per valore

$$\overline{Aa_1} = 500 - 499{,}58 = 0^{m},42,$$

e che risultano

$$\overline{A'S'} = \overline{mS} = \frac{\frac{1}{2}0{,}42}{0{,}008} = 26^{m},25,$$

$$\overline{B'S'} = \overline{A'B'} - \overline{A'S'} = 5374{,}13 - 26{,}25 = 5347^{m},88.$$

In quanto all'ordinata $\overline{S'S}$, si ha

$$\overline{S_1S} = \overline{A'm} = \overline{A'A} - \overline{Am} = 500 - \frac{1}{2}0{,}42 = 499^{m},79.$$

Nel nostro caso particolare, essendo troppo breve la lunghezza della prima livelletta AS, si potrebbe anche determinare il punto d'intersezione T della retta Ba_1 colla verticale P'P, ed assumere per linea di progetto la spezzata ATB.

costituiscono le ordinate rosse di maggior importanza. Esse però non sono le sole che importa determinare, e non si devono trascurare quelle dei punti in cui le verticali passanti pei vertici del profilo longitudinale naturale del terreno incontrano la linea di progetto.

Chiamando

a l'ordinata $\overline{A'A}$ (*Fig.* 58) di un punto qualunque di una retta AB, riferita al piano di paragone definito dalla orizzontale A'B',

p la pendenza dell'indicata retta, da assumersi come positiva o come negativa, secondochè vi è discesa o ascesa da A verso B,

d la distanza orizzontale $\overline{A'C'}$ di un punto qualunque C della retta AB dal punto A,

z l'ordinata dell'or accennato punto C,

si ha (*Arte di fabbricare, Geometria pratica applicata all'arte del costruttore*, Num. 46)

$$z = a - pd,$$

per formola determinatrice del valore dell'ordinata z.

Applicando la riportata formola al calcolo delle ordinate rosse per la parte di profilo longitudinale rappresentato nella figura 75, partendo dall'estremità di sinistra del detto profilo ed osservando che il valore di p è negativo, perchè la linea di progetto è in ascesa, si trovano le ordinate rosse inscritte nella tabella che segue:

Indicazione dei punti	Ordinate rosse	Indicazione dei punti	Ordinate rosse
	m		m
1	500,00	16	508,96
2	500,77	17	509,56
	500,82	18	510,14
	500,84	19	510,48
3	501,19	20	510,76
4	501,90	21	511,22
5	502,42	22	511,93
6	503,56	23	512,40
7	504,16	24	512,93
	504,26	25	513,11
	504,27	26	513,55
	504,28	27	514,10
	504,30	28	514,18
8	504,76	29	514,28
9	505,38	30	514,96
10	505,97	31	515,44
11	506,50	32	515,96
12	506,81	33	516,56
13	507,17	34	517,16
14	507,57	35	517,66
15	508,35		

Le ordinate rosse, a sinistra delle quali non trovasi un numero d'ordine per indicare il punto cui appartengono, sono quelle riferentisi ai punti del profilo longitudinale descritti nell'ultima colonna del registro del numero 24.

Le ordinate rosse generalmente si scrivono sul disegno del profilo longitudinale fra la quinta e la sesta orizzontale, ossia sulla quinta lista portante alla sua sinistra la denominazione *ordinate rosse*. Nei profili disegnati a mano si fanno e si scrivono in colore rosso le due orizzontali or indicate e tutte le ordinate rosse.

28. **Quote rosse del profilo longitudinale.** — Le quote rosse sono le differenze fra le ordinate rosse e le ordinate corrispondenti dei punti del profilo naturale del terreno, o, in termini più brevi, la quota rossa in un vertice qualunque del profilo longitudinale risulta dalla differenza fra l'ordinata rossa e l'ordinata nera relative allo stesso vertice.

Le quote rosse pei vertici della porzione di profilo longitudinale rappresentato nella figura 75 sono quali risultano dalla tabella che segue :

Indicazione dei punti	Quote rosse	Indicazione dei punti	Quote rosse
	m		m
1	0	16	— 0,08
2	1,67	17	— 0,42
	1,82	18	— 0,50
	1,83	19	— 0,79
3	2,23	20	— 1,08
4	2,65	21	— 0,87
5	2,60	22	1,86
6	3,29	23	3,19
7	3,06	24	4,89
	3,04	25	5,42
	4,97	26	6,83
	4,97	27	7,63
	3,06	28	8,00
8	2,78	29	7,69
9	2,54	30	7,09
10	2,01	31	7,23
11	2,02	32	7,39
12	1,61	33	7,85
13	1,36	34	7,33
14	0,65	35	7,74
15	0,37		

Quelle quote rosse, cui non corrisponde numero d'ordine nella prima colonna di questo registro, appartengono a quei punti del profilo longitudinale i quali trovansi descritti nell'ultima colonna del registro del numero 24.

Anche le quote rosse si inscrivono generalmente nel disegno del

profilo longitudinale. Esse si pongono fra la sesta e la settima orizzontale nella sesta lista portante la denominazione di *quote rosse* (*Fig.* 75), e generalmente non si mette in evidenza il loro segno, giacchè il disegno stesso indica già abbastanza dove si devono eseguire scavi e dove rialzi. Le quote rosse positive si possono scrivere con direzione dal basso all'alto, e si possono scrivere in direzione contraria le quote rosse negative.

Le due indicate orizzontali e le quote rosse si fanno e si scrivono in colore rosso nei profili disegnati a mano.

29. **Determinazione dei punti di passaggio del profilo longitudinale.** — Fra due punti successivi del profilo naturale del terreno si trova un punto di passaggio, allorquando le quote rosse dei detti punti sono di segno contrario. Segue da ciò che nel nostro caso particolare e per la porzione di profilo longitudinale rappresentato nella figura 75 vi sono due punti di passaggio, uno fra i numeri 15 e 16 e l'altro fra i numeri 21 e 22 corrispondenti alla numerazione delle sezioni.

Indicando con

d la distanza orizzontale A' B' (*Fig.* 59) fra due punti successivi del profilo longitudinale naturale del terreno, fra i quali trovasi un punto di passaggio, con

r ed r' i valori assoluti delle due quote rosse $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, con

x e $d-x$ le due distanze orizzontali $\overline{M'A'}$ ed $\overline{M'B'}$,

si ha (*Arte di fabbricare, geometria pratica applicata all'arte del costruttore*, Num. 47).

$$x=\frac{d\,r}{r+r'}$$

$$d-x=\frac{d\,r'}{r'+r}.$$

Applicando queste formole, si trova: che il punto di passaggio compreso fra i punti 15 e 16 ha rispettivamente da questi punti le distanze

$$\frac{76{,}09\times 0{,}37}{0{,}37+0{,}08}=62^{m},56$$

$$\frac{76{,}09\times 0{,}08}{0{,}08+0{,}37}=13^{m},53;$$

e che le distanze del punto di passaggio poste fra i numeri 21 e 22 dai punti stessi sono rispettivamente

$$\frac{91,71 \times 0,87}{0,87+1,86} = 29^{m},23$$

$$\frac{91,71 \times 1,86}{1,86+0,87} = 62^{m},48.$$

Queste distanze determinanti le posizioni dei punti di passaggio si marcano sul disegno del profilo longitudinale (*Fig.* 75), ed in colore rosso si scrivono al di sopra della settima orizzontale.

30. **Compimento del profilo longitudinale.** — Oltre le numerose indicazioni già fatte sul profilo longitudinale, convengono ancora alcune altre, e principalmente quelle relative ai rettifili ed alle curve, alle opere già fatte esistenti sul profilo longitudinale della strada da costruirsi, alle nuove opere d'arte, ed ai diversi territori che si devono attraversare.

Per indicare i rettifili e le curve, si può tracciare la linea orizzontale che alla sinistra porta appunto l'intestazione *Rettifili e curve* (*Fig.* 75); su tale linea, nella coveniente scala, si portano e si marcano le lunghezze di quelli e di queste (Num, 19); e, per le lunghezze corrispondenti alle curve, si fanno altrettanti rettangoli aventi un loro lato sulla detta orizzontale. Supponendo che l'asse stradale si percorra partendo dal punto A (*Fig.* 56), gli accennati rettangoli si costruiscono al disopra dell'orizzontale dove la convessità della curva giace a sinistra, e al disotto dove la convessità si trova a destra. Su quel lato degli stessi rettangoli, che è parallelo alla orizzontale intestata *rettifili e curve*, si scrivono l'ampiezza dell'angolo al centro della curva e la lunghezza delle due tangenti, ed innanzi questi elementi si pongono rispettivamente le indicazioni A e T. Sui due lati perpendicolari all'or citata orizzontale si scrive la lunghezza del raggio della curva.

Qualora la strada da farsi debba attraversare qualche opera già costrutta, oppure qualche accidentalità rimarchevole del terreno, come una strada, un canale, un fosso, un fiume, un torrente, un rivo, una vallata, ecc., si potranno fare le relative indicazioni sul disegno del profilo longitudinale (*Fig.* 75) scrivendole all'estremo inferiore di rette indicatrici, aventi l'altro estremo in corrispondenza dei mezzi della particolarità da indicarsi.

Le nuove opere da farsi lungo una via ferrata consistono gene-

ralmente in passaggi a livello, in case cantoniere, in stazioni, in tombini, in ponti, in passaggi superiori, in passaggi inferiori, in viadotti, in gallerie, ed in muri di sostegno. I passaggi a livello, le case cantoniere, le stazioni si possono indicare con segni convenzionali, e si possono rispettivamente adottare per siffatti segni quelli rappresentati nelle figure 60, 61 e 63. Nel caso poi di una casa cantoniera con passaggio a livello può convenire la combinazione dei due segni relativi alle due diverse opere, come risulta dalla figura 62.

I tombini, i ponti, i passaggi superiori, i passaggi inferiori, i viadotti e le gallerie si fanno innanzi tutto risultare nel disegno del profilo longitudinale, e superiormente al profilo stesso si possono indicare come segue: i tombini colla lettera T e col numero esprimente la loro luce; i ponti colle lettere PM, PF o PL, secondo che sono di struttura murale, di ferro o di legno, col numero delle loro luci e colla grandezza delle luci medesime; i passaggi superiori ed i passaggi inferiori rispettivamente colle lettere P*s* e P*i* e colla loro luce; i viadotti colle lettere VM, VF o VL, secondochè sono di muratura, di ferro o di legno, col numero delle loro luci e colle larghezze delle luci stesse; le gallerie colla lettera G, colla loro denominazione e colla loro lunghezza. I muri di sostegno generalmente si pongono in evidenza mediante tratteggi sulla superficie in cui si proiettano.

Nei profili fatti a mano, alle superficie rappresentanti rialzi si dà una tinta di carmino ed una tinta di gomma gutta a quelle rappresentanti scavi. Sulla figura 75 vennero tratteggiate le prime e punteggiate le seconde.

Se poi la strada da costruirsi deve attraversare diversi territori, conviene che anche questa particolarità risulti dal profilo longitudinale, su cui verranno distinti i diversi tronchi colle denominazioni dei territori su cui si trovano (*Fig.* 75).

31. **Rilevamento dei profili trasversali.** — Ultimate le operazioni relative al profilo longitudinale, si passa generalmente a rilevare i profili trasversali, pei quali già si conosce il punto che devono avere in comune col profilo longitudinale. Le canne metriche, lo squadro agrimensorio, il livello a bolla d'aria, un cannocchiale e talvolta il livello ad acqua sono gli strumenti che ordinariamente si adoperano per questi lavori.

L'operatore incaricato del rilevamento dei profili trasversali, munito di una copia del profilo longitudinale o soltanto di un registro in cui si trovino i numeri d'ordine dei punti per ciascuno dei quali deve passare un profilo trasversale e le loro distanze dall'origine A

(*Fig.* 56), assai facilmente saprà rintracciare i punti corrispondenti sul terreno ; e, ordinatamente progredendo secondo la loro numerazione, gli riescirà facile di fare altrettante livellazioni in senso perpendicolare all'asse stradale ed estendentisi a dritta ed a sinistra dell'asse medesimo di quanto può essere necessario per completamente studiare il progetto della nuova strada e per apportarvi quelle piccole varianti che si potranno ravvisare necessarie nell'esecuzione dei lavori.

Nel registro che qui sotto riportiamo si trovano i risultati del rilevamento dei trentacinque profili trasversali corrispondenti ai trentacinque punti d'ineguaglianza stati considerati e distinti con numeri d'ordine nel rilevare la parte di profilo longitudinale, di cui venne dato il disegno nella figura 75. Avvertiamo poi che i punti livellati sono a dritta od a sinistra dell'asse stradale per rapporto ad un osservatore che progredisca da A verso B (*Fig.* 56), secondochè le loro quote si trovano inscritte nella quinta o nella sesta colonna del registro.

Indicazione dei profili	Stazioni	Distanze dei punti livellati sui profili trasversali dall'asse	Quote lette			Ordinate dei piani di mira	Ordinate dei punti dei profili trasversali per rapporto ai punti dell'asse	OSSERVAZIONI
			Sull'asse	A dritta	A sinistra			
		m	m	m		m	m	
1	1ª		2,04			2,04	0,00	
		4,32		1,78			0,26	
		30,27		0,94			1,10	
		72,42		0,32			1,72	
	2ª		0,21			0,21	0,00	
		— 6,04			0,82		— 0,61	
		— 64,80			1,91		— 1,70	
2	1ª		1,99			1,99	0,00	
		8,42		1,80			0,19	
		68,73		0,67			1,32	
	2ª		0,27			0,27	0,00	
		— 5,69			0,59		— 0,32	
		— 71,30			1,89		— 1,62	
3	1ª		2,03			2,03	0,00	
		5,67		1,88			0,15	
		71,21		0,34			1,69	
	2ª		0,23			0,23	0,00	
		— 69,30			1,45		— 1,22	
4	1ª		2,09			2,09	0,00	
		6,41		1,87			0,22	
		70,83		0,57			1,52	
	2ª		0,17			0,17	0,00	
		— 5,23			0,29		— 0,12	
		— 32,29			0,71		— 0,54	
		— 64,30			1,59		— 1,42	
5	1ª		2,11			2,11	0,00	
		5,34		1,93			0,18	
		34,28		0,99			1,12	
		73,30		0,41			1,70	
	2ª		0,24			0,24	0,00	
		— 10,53			0,59		— 0,35	
		— 40,21			1,14		— 0,90	
		— 70,42			2,00		— 1,76	

Indicazione dei profili	Stazioni	Distanze dei punti livellati sui profili trasversali dall'asse	Quote lette: Sull'asse	Quote lette: A dritta	Quote lette: A sinistra	Ordinate dei piani di mira	Ordinate dei punti dei profili trasversali per rapporto ai punti dell'asse	OSSERVAZIONI
		m	m	m		m	m	
6	1ª		2,09			2,09	0,00	
		76,84		0,64			1,35	
	2ª		0,37			0,37	0,00	
		— 8,41			0,51		— 0,14	
		—29,37			1,12		— 0,75	
		—74,92			1,98		— 1,61	
7	1ª		2,04			2,04	0,00	
		7,53		1,81			0,23	
		74,12		1,02			1,02	
	2ª		0,29			0,29	0,00	
		— 5,39			0,38		— 0,09	
		— 75,20			1,32		— 1,03	
8	1ª		1,90			1,90	0,00	
		3,41		1,70			0,20	
		73,49		0,93			0,97	
	2ª		0,32			0,32	0,00	
		— 72,90			1,28		— 0,96	
9	1ª		2,01			2,01	0,00	
		74,20		1,23			0,78	
	2ª		0,37			0,37	0,00	
		— 75,30			1,49		— 1,12	
10	1ª		1,52			1,52	0,00	
		73,26		1,03			0,49	
	2ª		0,97			0,97	0,00	
		— 73,00			0,94		0,03	
11	1ª		1,48			1,48	0,00	
		72,00		1,56			— 0,08	
	2ª		1,50			1,50	0,00	
		— 72,00			1,61		— 0,11	
12	1ª		1,53			1,53	0,00	
		72,00		1,61			— 0,08	
	2ª		1,49			1,49	0,00	
		— 72,00			1,58		— 0,09	

Indicazione dei profili	Stazioni	Distanze dei punti livellati sui profili trasversali dall'asse	Quote lette: Sull'asse	Quote lette: A dritta	Quote lette: A sinistra	Ordinate dei piani di mira	Ordinate dei punti dei profili trasversali per rapporto ai punti dell'asse	OSSERVAZIONI
		m	m	m	m	m	m	
13	1ª		1,52			1,52	0,00	
		8,40		1,61			— 0,09	
		72,00		1,84			— 0,32	
	2ª		1,47			1,47	0,00	
		— 72,00			1,44		0,03	
14	1ª		1,48			1,48	0,00	
		3,44		1,60			— 0,12	
		74,21		1,87			— 0,39	
	2ª		1,50			1,50	0,00	
		— 5,84			1,39		0,11	
		— 74,00			0,99		0,51	
15	1ª		0,82			0,82	0,00	
		3,47		0,91			— 0,09	
		26,89		1,17			— 0,35	
		75,20		1,37			— 0,55	
	2ª		1,63			1,63	0,00	
		— 10,24			1,63		0,00	
		— 74,27			1,20		0,43	
16	1ª		0,39			0,39	0,00	
		72,00		0,97			— 0,58	
	2ª		1,88			1,88	0,00	
		— 4,84			1,84		0,04	
		— 72,00			1,29		0,59	
17	1ª		0,27			0,27	0,00	
		6,42		0,39			— 0,12	
		27,34		0,69			— 0,42	
		75,00		1,04			— 0,77	
	2ª		1,67			1,67	0,00	
		— 4,89			1,46		0,21	
		— 39,12			1,04		0,63	
		— 75,00			0,27		1,40	

Indicazione dei profili	Stazioni	Distanze dei punti livellati sui profili trasversali dall'asse	Quote lette			Ordinate dei piani di mira	Ordinate dei punti dei profili trasversali per rapporto ai punti dell'asse	OSSERVAZIONI
			Sull'asse	A dritta	A sinistra			
		m	m	m	m	m	m	
18	1ª		0,33			0,33	0,00	
		12,27		0,54			— 0,21	
		75,00		1,39			— 1,06	
	2ª		1,82			1,82	0,00	
		— 5,61			1,70		0,12	
		— 24,12			1,29		0,53	
		— 75,26			0,31		1,51	
19	1ª		0,40			0,40	0,00	
		6,47		0,57			— 0,17	
		74,80		1,62			— 1,22	
	2ª		1,47			1,47	0,00	
		— 3,45			1,38		0,09	
		— 39,64			1,07		0,40	
	3ª	— 39,64			0,32	0,72	0,40	
		— 75,00			1,07		— 0,35	
20	1ª		0,33			0,33	0,00	
		5,72		0,47			— 0,14	
		74,25		1,42			— 1,09	
	2ª		1,59			1,59	0,00	
		— 16,24			0,40		1,19	
		— 38,40			1,69		— 0,10	
	3ª	— 38,40			0,18	0,08	— 0,10	
		— 75,00			1,39		— 1,31	
21	1ª		0,44			0,44	0,00	
		6,31		0,57			— 0,13	
		30,27		1,15			— 0,71	
		74,80		1,99			— 1,55	
	2ª		0,29			0,29	0,00	
		— 4,31			0,54		— 0,25	
		— 27,42			1,39		— 1,10	
		— 75,00			2,57		— 2,28	

Indicazione dei profili	Stazioni	Distanze dei punti livellati sui profili trasversali dall'asse	Quote lette			Ordinate dei piani di mira	Ordinate dei punti dei profili trasversali per rapporto ai punti dell'asse	OSSERVAZIONI
			Sull'asse	A dritta	A sinistra			
		m	m	m	m	m	m	
22	1ª		2,79			2,79	0,00	
		6,84		2,18			0,61	
		73,40		0,59			2,20	
	2ª		0,28			0,28	0,00	
		— 5,77			0,42		— 0,14	
		— 74,00			2,01		— 1,73	
23	1ª		2,27			2,27	0,00	
		31,27		1,04			1,23	
		75,00		0,19			2,08	
	2ª		0,23			0,23	0,00	
		— 30,41			1,27		— 1,04	
		— 75,00			2,31		— 2,08	
24	1ª		2,15			2,15	0,00	
		13,14		1,70			0,45	
		74.20		0,18			1,97	
	2ª		0,31			0,31	0,00	
		— 24,30			0,83		— 0,52	
		— 75,00			2,44		— 2,13	
25	1ª		2,31			2,31	0,00	
		6,40		2,01			0,30	
		47,80		1,27			1,04	
		75,00		0,24			2,07	
	2ª		0,29			0,29	0,00	
		— 12,15			0,78		— 0,49	
		— 75,00			1,99		— 1,70	
26	1ª		2,47			2.47	0,00	
		15,61		1,86			0,61	
		74,10		1,24			1,23	
	2ª		0,37			0,37	0,00	
		— 24,60			0,82		— 0,45	
		— 74,25			1,82		— 1,45	

Indicazione dei profili	Stazioni	Distanze dei punti livellati sui profili trasversali dall'asse	Quote lette			Ordinate dei piani di mira	Ordinate dei punti dei profili trasversali per rapporto ai punti dell'asse	OSSERVAZIONI
			Sull'asse	A diritta	A sinistra			
		m	m	m	m	m	m	
27	1ª		2,10			2,10	0,00	
		4,43		2,04			0,06	
		23,64		1,51			0,59	
	2ª	23,64		1,80		2,39	0,59	
		75,00		0,48			1,91	
	3ª		0,80			0,80	0,00	
		— 8,44			0,91		— 0,11	
		— 36,50			1,68		— 0,88	
	4ª	— 36,50			0,94	0,06	— 0,88	
		— 75,00			1,43		— 1,37	
28	1ª		2,14			2,14	0,00	
		6,80		1,88			0,26	
		41,20		1,32			0,82	
	2ª	41,20		1,78		2,60	0,82	
		75,00		0,47			2,13	
	3ª		0,29			0,29	0,00	
		— 5,91			0,34		— 0,05	
		— 32,60			0,81		— 0,52	
	4ª	— 32,60			0,57	0,05	— 0,52	
		— 75,00			1,39		— 1,34	
29	1ª		2,12			2,12	0,00	
		20,41		1,50			0,62	
		74,80		0,84			1,28	
	2ª		0,49			0,49	0,00	
		— 34,40			1,51		— 1,02	
		— 74,70			2,54		— 2,05	
30	1ª		2,08			2,08	0,00	
		24,40		1,24			0,84	
		75,00		0,23			1,85	
	2ª		0,30			0,30	0,00	
		— 36,30			1,07		— 0,77	
		— 75,00			2,27		— 1,97	

Indicazione dei profili	Stazioni	Distanze dei punti livellati sui profili trasversali dall'asse	Quote lette			Ordinate dei piani di mira	Ordinate dei punti dei profili trasversali per rapporto ai punti dell'asse	OSSERVAZIONI
			Sull'asse	A diritta	A sinistra			
		m	m	m	m	m	m	
31	1ª		2,11			2,11	0,00	
		7,44		1,98			0,13	
		75,00		0,15			1,96	
	2ª		0,41			0,41	0,00	
		— 30,12			1,09		— 0,68	
		— 75,00			2,39		— 1,98	
32	1ª		2,05			2,05	0,00	
		64,71		0,61			1,44	
		75,00		0,23			1,82	
	2ª		0,39			0,39	0,00	
		— 26,30			1,58		— 1,19	
		— 75,00			2,24		— 1,85	
33	1ª		2,04			2,04	0,00	
		53,81		1,14			0,90	
		75,00		0,39			1,65	
	2ª		0,57			0,57	0,00	
		— 34,12			1,49		— 0,92	
		— 75,00			2,59		— 2,02	
34	1ª		2,29			2,29	0,00	
		54,30		1,03			1,26	
		75,00		0,39			1,90	
	2ª		0,41			0,41	0,00	
		— 63,10			1,54		— 1,13	
		— 75,00			2,49		— 2,08	
35	1ª		2,04			2,04	0,00	
		34,20		1,17			0,87	
		74,90		0,15			1,89	
	2ª		0,37			0,37	0,00	
		— 75,00			2,33		— 1,96	

L'origine delle distanze orizzontali è, per ogni profilo trasversale, il punto che esso ha di comune col profilo longitudinale. Queste distanze appartengono a punti posti a dritta o a sinistra dell'asse stradale secondo che sono precedute dal segno + o dal segno —, oppure secondo che le quote corrispondenti si trovano nella quinta o nella sesta colonna del registro. Le ordinate si valutano a partire dai piani orizzontali determinati dai punti che i diversi profili trasversali hanno di comune col profilo longitudinale. Le ordinate positive appartengono a punti posti sopra, e le ordinate negative spettano a punti situati sotto i detti piani (*e*).

32. **Disegno dei profili trasversali.** — Il disegno dei profili trasversali si eseguisce con una scala piuttosto grande e, nella generalità dei casi, conviene adottare un rapporto di scala non minore d il 1/200.

Per ciascun profilo, s'incomincia dal fissare il punto che esso ha in comune col profilo longitudinale, il qual punto è destinato a servire come origine delle distanze dei punti stati livellati a dritta ed a sinistra dell'asse; e quindi per questo punto si conduce una retta orizzontale.

Per le costruzioni dei vari punti di un profilo trasversale qualunque, le distanze marcate nella terza colonna del registro del precedente numero si portano a dritta o a sinistra dell'origine, e le ordinate inscritte nell'ottava colonna dello stesso registro si portano sopra o sotto l'orizzontale condotta per la detta origine, secondo che sono esse precedute dal segno + o dal segno —.

Per ciascun profilo trasversale si scrive il corrispondente numero d'ordine presso il punto che serve a coordinarlo col profilo longitudinale.

Nelle figure 76 sono disegnate, pei primi venticinque profili trasversali, le sole parti di mezzo, ed appunto quanto occorre per tracciarvi la linea di progetto.

(*e*) L'operatore incaricato del rilevamento dei profili trasversali può avere qualche controllo dell'esattezza del suo lavoro col fare in modo che le livellazioni delle diverse sezioni risultino coordinate fra di loro. Così, essendo (*Fig.* 72) n ed $n+1$ i punti del profilo longitudinale per cui devono passare due profili trasversali successivi, nel fare la livellazione dei punti posti nella sezione passante pel punto n si avrà l'avvertenza di livellare fra n ed $n+1$ un primo punto o, e poscia si farà fra o ed $n+1$ una livellazione con sole battute e contro-battute, per poter trovare la differenza di livello fra il punto n ed il punto $n+1$. Si dirà poi che l'operazione procede colla voluta regolarità allorquando questa differenza è eguale o ben poco differente da quella che si ottiene colla differenza delle ordinate nere degli stessi punti (Num. 24).

Per avere tutti gli elementi atti alla determinazione di queste parti vennero calcolate le ordinate delle loro estremità risolvendo il semplice problema di determinare per una retta data mediante le coordinate delle sue due estremità, l'ordinata corrispondente ad una prestabilita ascissa. Indicando poi con

a l'ordinata $\overline{A'A}$ (*Fig.* 58) di un estremo della retta data AB, con

b l'ordinata $\overline{B'B}$ dell'altro estremo della stessa retta, con

D la distanza orizzontale $\overline{A'B'}$ fra i due estremi A e B, con

d la distanza orizzontale $\overline{A'C'}$ di un punto C della retta AB dal punto A, e con

z l'ordinata dell'or indicato punto C,

per quanto deriva dalle formole state stabilite nei numeri 45 e 46 della nostra geometria pratica applicata all'arte del costruttore, si ha la formola

$$z = a - \frac{a-b}{D} d,$$

nella quale si devono valutare: sempre come positivi i valori delle distanze D e *d*; come positivi o come negativi i valori delle ordinate *a* e *b* secondo che si riferiscono a punti posti sopra o posti sotto l'orizzontale di paragone. I valori positivi di *z* appartengono a punti situati sopra, ed i valori negativi a punti situati sotto la detta orizzontale. Nella tavola che segue sono marcati tutti gli elementi determinanti i profili trasversali per le parti contenute nel disegno.

Indicazione dei profili	Distanze dei vertici dall'asse		Ordinate dei vertici per rapporto ai punti dell'asse	OSSERVAZIONI
	Vertici a dritta	Vertici a sinistra		
	m	m	m	
1	4,32		0,26	
	9,60		0,43	
		6,04	—0,61	
		9,20	—0,66	
2	8,42		0,19	
	9,60		0,21	
		5,69	—0,32	
		9,20	—0,39	
3	5,67		0,15	
	9,60		0,24	
		9,20	—0,16	
4	6,41		0,22	
	9,60		0,28	
		5,23	—0,12	
		9,20	—0,18	
5	5,34		0,18	
	9,60		0,32	
		9,20	—0,31	
6	9,60		0,16	
		8,41	—0,14	
		9,20	—0,16	
7	7,53		0,23	
	9,60		0,27	
		5,39	—0,09	
		9,20	—0,14	
8	3,41		0,20	
	9,60		0,27	
		9,50	—0,12	
9	9,60		0,10	
		9,50	—0,13	
10	9,60		0,07	
		9,50	0,004	
11	9,60		—0,01	
		9,50	—0,01	

Indicazione dei profili	Distanze dei vertici dall'asse		Ordinate dei vertici per rapporto ai punti dell'asse	OSSERVAZIONI
	Vertici a dritta	Vertici a sinistra		
	m	m	m	
12	9,60		—0,01	
		9,50	—0,01	
13	8,40		—0,09	
	9,60		—0,094	
		9,50	0,004	
14	3,44		—0,12	
	9,60		—0,16	
		5,84	0,11	
		8,40	0,13	
15	3,47		—0,09	
	9,60		—0,16	
		8,40	0,00	
16	9,60		—0,08	
		4,84	0,04	
		8,40	0,07	
17	6,42		—0,12	
	9,60		—0,16	
		4,89	0,21	
		8,40	0,25	
18	7,80		—0,13	
		5,61	0,12	
		8,40	0,18	
19	6,47		—0,17	
	7,80		—0,19	
		3,45	0,09	
		8,40	0,13	
20	5,72		—0,14	
	10,60		—0,21	
		9,60	0,70	
21	6,31		—0,13	
	10,60		—0,23	
		4,31	—0,25	
		9,60	—0,44	

Indicazione dei profili	Distanze dei vertici dall'asse		Ordinate dei vertici per rapporto ai punti dell'asse	OSSERVAZIONI
	Vertici a diritta	Vertici a sinistra		
	m	m	m	
22	6,84		0,61	
	10,60		0,70	
		5,77	—0,14	
		9,60	—0,23	
23	10,60		0,41	
		9,60	—0,33	
24	10,60		0,36	
		11,00	—0,24	
25	6,40		0,30	
	10,60		0,37	
		12,15	—0,49	

33. **Linee di progetto sui profili trasversali.** — La ferrovia da progettarsi debba essere ad un sol binario colla larghezza di metri 3,40 alla superficie superiore del ballast, colla larghezza di metri 0,60 per ciascuna delle scarpe di questo e colla larghezza di metri 0,45 per ciascun marciapiede; le scarpe dei rialzi debbano essere a 3 di base per 2 di altezza; le scarpe degli scavi debbano risultare a 45°; ed i fossi debbano presentare la larghezza di metri 0,25 al fondo, la larghezza di metri 0,85 alla sommità e la profondità di metri 0,30. La linea di progetto stata tracciata sul profilo longitudinale (*Fig.* 75), e per cui si sono determinate le quote rosse ed i punti di passaggio, rappresenti il profilo fatto nella piattaforma destinata a ricevere il ballast, e sia questa inclinata verso l'esterno in modo da presentare la pendenza di 1/100. Risulta: che la larghezza totale della strada fra le sommità delle scarpe nei rialzi ed i bordi dei fossi nelle trincee è di metri 5,50; che, astrazion fatta del ballast, le linee di progetto da tracciarsi sui profili trasversali devono essere modulate come risulta dalla figura 73 per le parti in rialzo, e come risulta dalla figura 74 per le parti in iscavo.

Al punto di mezzo **M** deve corrispondere in ciascun profilo trasversale la medesima quota rossa, la quale per lo stesso punto si trova sul

profilo longitudinale. Avendosi così la posizione del punto M, dovendo essere di metri 0,0275 la profondità $\overline{MN}$ della orizzontale O P sotto il detto punto e di metri 2,75 le due larghezze $\overline{NO}$ ed $\overline{NP}$, e di più conoscendosi le dimensioni dei fossi e le inclinazioni delle scarpe, riesce facile il materiale tracciamento delle linee di progetto sui profili trasversali, ed ottenere le sezioni complete come risulta dalla figura 76.

Quando le sezioni trasversali si disegnano a mano, usasi generalmente segnare al carmino le linee di progetto, tinteggiare con un color chiaro di carmino le superficie rappresentanti rialzi, e con un color chiaro di gomma gutta le superficie rappresentanti scavi.

34. **Quote rosse e punti di passaggio da determinarsi in ciascuna sezione trasversale.** — Precisamente come venne fatto pel profilo longitudinale, anche pei profili trasversali si potrebbero determinare tutte le ordinate rosse, tutte le quote rosse e tutti i punti di passaggio. Se però si osserva che queste determinazioni riescono assai lunghe, che molte di esse vengono in acconcio solamente pel calcolo delle aree delle sezioni trasversali da impiegarsi nella ricerca dei volumi dei movimenti di terra, che d'altronde queste aree con sufficiente esattezza ed assai speditamente si possono ottenere mediante un planimetro, agevolmente si comprende come nello studio di un progetto di strada non sia il caso di occuparsi della determinazione numerica di tutte le ordinate rosse, di tutte le quote rosse e di tutti i punti di passaggio, ma sibbene come basti fare questa determinazione per quanto è necessario onde ottenere le larghezze della zona di terreno occupata dalla strada a dritta ed a sinistra dell'asse in corrispondenza di ciascuna sezione trasversale. Segue da ciò che bisognerà calcolare le ordinate nere, le ordinate rosse e le quote rosse : per le sezioni in rialzo, in corrispondenza del punto O (*Fig.* 77) dove il profilo del terreno non presenta alcun vertice nella parte A B sottostante alla scarpa O B, ed in corrispondenza del vertice C (*Fig.* 78) più vicino a B, dove il profilo del terreno presenta uno o più vertici nella parte A B sottostante alla detta scarpa; per le sezioni in iscavo, in corrispondenza del punto Q (*Fig.* 79) quando il profilo del terreno non ha vertici nella parte A B sovrastante alla scarpa Q B, ed in corrispondenza del vertice C (*Fig.* 80), più vicino a B, dove il profilo del terreno ha uno o più vertici nella parte A B sovrastante all'indicata scarpa. Questa determinazione poi deve essere fatta tanto per la parte di dritta quanto per la parte di sinistra di ciascuna sezione trasversale.

35. **Ordinate nere per la determinazione delle larghezze delle sezioni trasversali a dritta ed a sinistra dell'asse stradale.** —

Queste ordinate nere già sono note, allorquando i vertici da considerarsi appartengono al profilo del terreno; si devono invece calcolare mediante l'applicazione della formola stata data nel numero 32, allorquando tali vertici appartengono alla linea di progetto. La prima circostanza si verifica solamente nelle sezioni 5, 8, 14 e 25 pel loro punto situato a destra, e nelle sezioni 2, 4, 7 e 19 pel loro punto situato a sinistra.

Nella tabella che segue trovansi registrate, per le prime venticinque sezioni, le suddette ordinate colle distanze dei punti a cui si riferiscono dall'asse.

Indicazione delle sezioni	Distanze dei punti considerati dall'asse		Ordinate nere
	Punti a diritta	Punti a sinistra	
	m	m	m
1	3,60	2,75	0,22 —0,28
2	2,75	5,69	0,06 —0,32
3	5,67	2,75	0,15 —0,05
4	2,75	5,23	0,09 —0,12
5	5,34	2,75	0,18 —0,09
6	2,75	2,75	0,05 —0,04
7	2,75	5,39	0,09 —0,09
8	3.41	2,75	0,20 —0,04
9	2,75	2.75	0,03 —0,04
10	2,75	2,75	0,02 0,001

Indicazione delle sezioni	Distanze dei punti considerati dall'asse		Ordinate nere
	Punti a diritta	Punti a sinistra	
	m	m	m
11	2,75		—0,003
		2,75	—0,003
12	2,75		—0,003
		2,75	—0,003
13	2,75		—0,03
		2,75	0,001
14	3,44		—0,12
		2,75	0,05
15	2,75		—0,07
		2,75	0,00
16	3,60		—0,03
		3,60	0,03
17	3,60		—0,07
		3,60	0,15
18	3,60		—0,06
		3,60	0,06
19	3,60		—0,09
		3,45	0,09
20	3,60		—0,08
		3,60	0,24
21	3,60		—0,07
		3,60	—0,21
22	2,75		0,24
		2,75	—0,07
23	2,75		0,11
		2,75	—0,09
24	2,75		0,09
		2,75	—0,06
25	6,40		0,30
		2,75	—0,11

36. **Ordinate rosse per la determinazione delle larghezze delle sezioni trasversali a dritta ed a sinistra dell'asse stradale.** — Allorquando i vertici che sono i più vicini all'intersezione del profilo del terreno colla linea di progetto appartengono al profilo del terreno, si ottengono le ordinate rosse ad essi relative convenientemente applicando o la formola del numero 27, oppure quella del numero 32. Quando invece i vertici che sono i più vicini all'intersezione del profilo del terreno colla linea di progetto appartengono a quest'ultima e sono per conseguenza, o quelli rappresentati in O e P (*Fig.* 73) per le sezioni in rialzo, o quelli rappresentati in Q e R (*Fig.* 74) per le sezioni in iscavo, si deducono le corrispondenti ordinate rosse togliendo dall'ordinata rossa del punto che il profilo trasversale ha di comune col profilo longitudinale la differenza d'altezza $0^m,0275$ rappresentante la saetta M N (*Fig.* 73 e 74).

Nel quadro che qui sotto riportiamo trovansi registrate, per le prime venticinque sezioni, tutte queste ordinate rosse colle distanze dei punti a cui si riferiscono dall'asse.

Indicazione delle sezioni	Distanze dei punti considerati dall'asse		Ordinate rosse
	Punti a diritta	Punti a sinistra	
	m	m	m
1	3,60	2,75	—0,03 0,03
2	2,75	5,69	1,64 —0,31
3	5,67	2,75	0,25 2,20
4	2,75	5,23	2,62 0,97
5	5,34	2,75	0,85 2,57
6	2,75	2,75	3,26 3,26
7	2,75	5,39	3,03 1,27
8	3,41	2,75	2,31 2,75
9	2,75	2,75	2,51 2,51
10	2,75	2,75	1,98 1,98
11	2,75	2,75	1,99 1,99
12	2,75	2,75	1,58 1,58
13	2,75	2,75	1,33 1,33
14	3,44	2,75	0,16 0,62
15	2,75	2,75	0,34 0,34

Indicazione delle sezioni	Distanze dei punti considerati dall'asse		Ordinate rosse
	Punti a diritta	Punti a sinistra	
	m	m	m
16	3,60		—0,11
		3,60	—0,11
17	3,60		—0,45
		3,60	—0,45
18	3,60		—0,53
		3,60	—0,53
19	3,60		—0,82
		3,45	—0,97
20	3,60		—1,11
		3,60	—1,11
21	3,60		—0,90
		3,60	—0,90
22	2,75		1,83
		2,75	1,83
23	2,75		3,16
		2,75	3,16
24	2,75		4,86
		2,75	4,86
25	6,40		2,96
		2,75	5,39

37. **Quote rosse per la determinazione delle larghezze delle sezioni trasversali a dritta ed a sinistra dell'asse stradale.** — Togliendo dalle ordinate rosse state riportate nel precedente numero le corrispondenti quote rosse che trovansi nel registro del numero 35, si hanno le quote rosse occorrenti per la determinazione delle larghezze delle scarpe nelle diverse sezioni trasversali. Queste quote rosse, per le prime venticinque sezioni, trovansi nel registro che qui sotto riportiamo unitamente alle distanze dei punti a cui si riferiscono dall'asse.

Indicazione delle sezioni	Distanze dei punti considerati dall'asse		Quote rosse
	Punti a diritta	Punti a sinistra	
1	m 3,60	m 2,75	m —0,25 0,31
2	2,75	5,69	1,58 0,01
3	5,67	2,75	0,10 2,25
4	2,75	5,23	2,53 1,09
5	5,34	2,75	0,67 2,66
6	2,75	2,75	3,21 3,30
7	2,75	5,39	2,94 1,36
8	3,41	2,75	2,11 2,79
9	2,75	2,75	2,48 2,55
10	2,75	2,75	1,96 1,98

Indicazione delle sezioni	Distanze dei punti considerati dall'asse		Quote rosse
	Punti a diritta	Punti a sinistra	
	m	m	m
11	2,75	2,75	2,00 2,00
12	2,75	2,75	1,59 1,59
13	2,75	2,75	1,36 1,33
14	3,44	2,75	0,28 0,57
15	2,75	2,75	0,41 0,34
16	3,60	3,60	—0,08 —0,14
17	3,60	3,60	—0,38 —0,60
18	3,60	3,60	—0,47 —0,59
19	3,60	3,45	—0,73 —1,06
20	3,60	3,60	—1,03 —1,35
21	3,60	3,60	—0,83 —0,69
22	2,75	2,75	1,59 1,90
23	2,75	2,75	3,05 3,25
24	2,75	2,75	4,77 4,92
25	6,40	2,75	2,66 5,50

38. **Larghezze delle scarpe e larghezze della zona di terreno occupata dalla strada in corrispondenza delle sezioni trasversali.** — Determinati, in ciascuna sezione trasversale, quei due vertici, uno a dritta e l'altro a sinistra del mezzo, i quali sono i più vicini alle intersezioni del profilo del terreno colla linea di progetto, si possono calcolare le distanze orizzontali fra queste e quelli.

Chiamando perciò

r la quota rossa A B (*Fig.* 81 e 82), ossia la distanza fra i due punti A e B posti sulla stessa verticale ed appartenenti a due rette A X e B Y incontrantisi nel punto M,

p e p' le pendenze delle rette A X e B Y da assumersi come positive o come negative secondo che si staccano dalla verticale A B discendendo od ascendendo.

x la distanza orizzontale $\overline{CM}$ fra l'intersezione M e la verticale determinata dai due punti A e B,

si ha la formola (*Arte di fabbricare, geometria pratica applicata all'arte del costruttore*, Num. 48)

$$x = \frac{r}{p - p'}.$$

Applicando questa formola alla determinazione delle larghezze delle due scarpe in ciascuna sezione trasversale e contando queste distanze a partire dai punti O e P (*Fig.* 73) nelle sezioni in rialzo ed a partire dai punti Q ed R (*Fig.* 74) nelle sezioni in iscavo, si giunge ai risultati contenuti nel quadro che qui sotto riportiamo :

Indicazione delle sezioni	LARGHEZZA DELLE SCARPE	
	A diritta	A sinistra
	m	m
1	0,26	0,45
2	2,29	2,95
3	3,09	3,50
4	3,60	4,09
5	3,54	4,18
6	4,67	4 81
7	4,16	4,63
8	3,76	4,09
9	3,65	3,89
10	2,88	2,94
11	2,98	2,98
12	2,37	2,37
13	2,07	1,99
14	1,12	0,89
15	0,63	0,51
16	0,08	0,18
17	0,36	0,62
18	0,46	0,61
19	0,72	0,91
20	1,01	1,46
21	0,80	0,64
22	2,31	2,89
23	4,30	5,11
24	6,78	7,78
25	7,51	8,73

Le larghezze della zona di terreno, occupata dalla strada a dritta ed a sinistra dell'asse in corrispondenza di ciascuna sezione trasversale, si ottengono aggiungendo le trovate larghezze delle scarpe a $2^{m},75$ dove la strada è in rialzo, ed a metri 3,60 dove la strada è in iscavo. Così facendo, si trovano pel tronco di strada, limitato dalla prima e dalla venticinquesima sezione trasversale i risultamenti contenuti nella tavola che segue.

Indicazione delle sezioni	LARGHEZZE DELLA ZONA DI TERRENO OCCUPATO DALLA STRADA	
	A diritta dell'asse	A sinistra dell'asse
	m	m
1	3,86	3,20
2	5,04	5,70
3	5,84	6,25
4	6,35	6,84
5	6,29	6,93
6	7,42	7,56
7	6,91	7,38
8	6,51	6,84
9	6,40	6,64
10	5,63	5,69
11	5,73	5,73
12	5,12	5,12
13	4,82	4,74
14	3,87	3,64
15	3,38	3,26
16	3,68	3,78
17	3,96	4,22
18	4,06	4,21
19	4,32	4,51
20	4,61	5,06
21	4,40	4,24
22	5,06	5,64
23	7,05	7,86
24	9,53	10,53
25	10,26	11,48

39. **Linee di passaggio.** — Per il tronco di strada da noi considerato, occorre la determinazione di tre linee di passaggio, la prima fra le sezioni 1 e 2, la seconda fra le sezioni 15 e 16 e la terza fra le sezioni 21 e 22.

Per determinare queste linee si suppone che i fossi esistano anche dove la strada trovasi in rialzo, e si cercano i punti in cui gli spigoli della superficie di progetto, modificata a seconda dell'ipotesi della continuità dei fossi, tagliano la superficie del terreno, non che quelli in cui gli spigoli della superficie del terreno tagliano la superficie di progetto. In altre parole, s'immaginano tanti profili longitudinali paralleli all'asse stradale quanti sono i detti spigoli, e si determinano i punti di passaggio che su questi profili si trovano. Per trovare poi questi punti di passaggio occorre conoscere alcune ordinate nere di punti spettanti ai profili trasversali fra cui cadono le linee di passaggio da determinarsi; le corrispondenti ordinate rosse e le relative quote rosse; e, nei numeri che immediatamente seguono, diamo appunto le necessarie indicazioni riferentisi a questi indispensabili elementi, i quali, per l'una e per l'altra sezione fra cui cade la linea di passaggio devono riferirsi ai vertici (*Fig.* 83) *a*, *b*, *c*, *m*, *d*, *e* ed *f* delle linee di progetto ed ai vertici, come *k*, *i*, *h*, *g*, *l*, *o* e *p* dei profili del terreno.

40. **Ordinate nere per la determinazione delle linee di passaggio.** — Queste ordinate nere sono note allorquando corrispondono a vertici dei profili del terreno; si devono invece determinare coll'applicare convenientemente la formola stata data nel numero 32, allorquando si riferiscono a vertici della linea di progetto, costrutta in modo da corrispondere all'ipotesi dell'esistenza dei fossi sull'intiera lunghezza della strada. I risultamenti dei calcoli stati instituiti pel caso particolare che trattiamo trovansi inscritti nel seguente quadro.

Indicazione delle sezioni	Distanze dei punti considerati dall'asse		Ordinate Nere
	Punti a diritta	Punti a sinistra	
	m	m	m
1	2,75		0,165
	3,05		0,183
	3,30		0,198
2	2,75		0,062
	3,05		0,069
	3,30		0,074
15	2,75		— 0,071
	3,05		— 0,076
	3,30		— 0,082
		2,75	0,000
		3,05	0,000
		3,30	0,000
16	2,75		— 0,020
	3,05		— 0,024
	3,30		— 0,026
		2,75	0,022
		3,05	0,024
		3,30	0,026
21	2,75		— 0,058
	3,05		— 0,064
	3,30		— 0,069
		2,75	— 0,159
		3,05	— 0,177
		3,30	— 0,193
22	2,75		0,245
	3,05		0,271
	3,30		0,294
		2,75	— 0,067
		3,05	— 0,073
		3,30	— 0,079

41. **Ordinate rosse per la determinazione delle linee di passaggio.** — Le ordinate rosse occorrenti per la determinazione delle linee di passaggio sono quelle riferentisi ai punti per cui nel precedente numero già vennero date le ordinate nere. La determinazione di queste ordinate rosse riesce assai facile; essa generalmente si fa o colla formola del numero 27 o con quella del numero 32, allor-

quando si riferisce a punti che non sono vertici della linea di progetto; si fa invece combinando per addizione o per sottrazione le ordinate verticali relative alla linea di progetto quando si riferisce a vertici di quest'ultima. Ecco il quadro che riassume tutte le ordinate rosse state calcolate per la determinazione delle linee di passaggio.

Indicazione delle sezioni	Distanze dei punti considerati dall'asse		Ordinate rosse
	Punti a diritta	Punti a sinistra	
	m	m	m
1	2,75		— 0,027
	3,05		— 0,327
	3,30		— 0,327
2	2,75		1,642
	3,05		1,342
	3,30		1,342
15	2,75		0,342
	3,05		0,042
	3,30		0,042
		2,75	0,342
		3,05	0,042
		3,30	0,042
16	2,75		— 0,107
	3,05		— 0,407
	3,30		— 0,407
		2,75	— 0,107
		3,05	— 0,407
		3,30	— 0,407
21	2,75		— 0,897
	3,05		— 1,197
	3,30		— 1,197
		2,75	— 0,897
		3,05	— 1,197
		3,30	— 1,197
22	2,75		1,832
	3,05		1,532
	3,30		1,532
		2,75	1,832
		3,05	1,532
		3,30	1,532

42. **Quote rosse per la determinazione delle linee di passaggio.** — Queste quote rosse si ottengono togliendo dalle ordinate rosse che trovansi nel quadro del precedente numero le corrispondenti ordinate nere inscritte nel quadro del numero 40; cosicchè risulta la seguente tavola.

Indicazione delle sezioni	Distanze dei punti considerati dall'asse		Quote rosse
	Punti a diritta	Punti a sinistra	
	m	m	
1	2,75		—0,19
	3,05		—0,51
	3,30		—0,52
2	2,75		1,58
	3,05		1,27
	3,30		1,27
15	2,75		0,41
	3,05		0,12
	3,30		0,12
		2,75	0,34
		3,05	0,04
		3,30	0,04
16	2,75		—0,09
	3,05		—0,38
	3,30		—0,38
		2,75	—0,13
		3,05	—0,43
		3,30	—0,43
21	2,75		—0,84
	3,05		—1,13
	3,30		—1,13
		2,75	—0,74
		3,05	—1,02
		3,30	—1,00
22	2,75		1,59
	3,05		1,26
	3,30		1,24
		2,75	1,90
		3,05	1,60
		3,30	1,61

43. **Determinazione delle linee di passaggio.** — I vertici che determinano le linee di passaggio sono sopra linee parallele all'asse stradale già fissate di posizione, giacchè queste ultime linee, oltre di giacere sulla superficie di progetto, hanno distanze cognite dall'asse suddetto. Per precisare adunque gli indicati vertici basta trovare le loro distanze da una delle sezioni trasversali fra cui si trovano, e valutare queste distanze su archi concentrici a quello che rappresenta l'asse della strada nei tratti in curva. Il calcolo delle or accennate distanze si fa convenientemente applicando le formole che già vennero date nel numero 29, e, impiegandole nel caso che noi trattiamo, si ottengono i risultamenti contenuti nel quadro che qui sotto riportiamo.

Indicazione delle sezioni fra cui si trovano le linee di passaggio	Distanze dei vertici delle linee di passaggio dall'asse		Distanze dei vertici delle linee di passaggio dalle sezioni fra cui si trovano	
	Distanze dei vertici posti a diritta	Distanze dei vertici posti a sinistra	Distanze dalla sezione precedente	Distanze dalla sezione seguente
	m		m	m
	0,00		0,00	96,42
	2,75		10,35	86,07
1 e 2	3,05		27,63	68,79
	3,30		28,01	68,41
	0,00		62,56	13,53
	2,75		62,00	13,62
	3,05		17,78	57,78
15 e 16	3,30		18,12	57,39
		m	21,09	55,17
		2,75	6,51	70,03
		3,05	6,52	70,10
		3,30		
	0,00		29,23	62,48
	2,75		31,30	60,41
	3,05		43,36	48,35
21 e 22	3,30		43,73	47,98
		2,75	25,71	66,00
		3,05	35,70	56,01
		3,30	35,14	56,57

Le figure 84, 85 ed 86, nella scala del 1/400, rappresentano rispettivamente le proiezioni orizzontali delle linee di passaggio fra le sezioni 1 e 2, 15 e 16, 21 e 22.

Essendo *a b* (*Fig.* 87) la proiezione orizzontale dell'intersezione della scarpa del fosso colla scarpa del successivo rialzo, *b c* quella dell'intersezione del fondo del fosso colla superficie del terreno, *d k* la traccia orizzontale della sezione che segue il punto *b*, e *d* la proiezione orizzontale del punto in cui la linea di progetto incontra il profilo del terreno, usasi generalmente assumere la retta *b d* siccome quella che rappresenta l'intersezione della scarpa del rialzo colla superficie del suolo. Or bene, questo modo di procedere, che si può ritenere esatto quando le scarpe del fosso e del rilevato hanno eguale inclinazione, non è rigoroso quando queste inclinazioni sono differenti. Così, supponendo che la scarpa del rialzo debba fare coll'orizzonte un angolo minore di quello della scarpa del fosso, bisognerà determinare sopra *b c* un punto *f* distante da *a e* della quantità $\overline{gf}$ eguale alla proiezione orizzontale di quella parte della linea di maggior pendìo della scarpa del rilevato, i cui due estremi hanno la differenza di livello eguale alla profondità del fosso. Unendo *f* con *d* si avrà la proiezione orizzontale della scarpa del rialzo colla superficie del terreno. Così facendo però risulterebbe un brusco passaggio della scarpa del fosso a quella del rialzo, ed il fosso rimarrebbe in parte mascherato alla sua estremità. Per togliere l'inconveniente si può immaginare sul terreno una curva *b h*, raccordatrice in *b* ed *h* delle due direzioni *b d* ed *f d* e supporre la superficie della scarpa del rilevato: per la parte che orizzontalmente proiettasi in *a b g*, generata da una retta che si muove appoggiandosi alle due rette rappresentate in *a b* ed *a g* e conservantesi in un piano verticale colla sua traccia orizzontale normale ad *a e*; per la parte che proiettasi in *g f h i*, generata da una retta che si muove appoggiandosi alla retta rappresentata in *g i* ed alla curva *b h* e conservantesi ancora in un piano verticale colla sua traccia orizzontale normale ad *a e*; e finalmente per la parte proiettantesi in *i h d l*, generata da una retta che si muove percorrendo le due rette rappresentate in *i l* ed *h d* e mantenendosi in un piano verticale avente la sua traccia orizzontale perpendicolare ad *a e*.

Si può anche ritenere che la linea orizzontalmente proiettata in *b d* sia l'intersezione della scarpa del rialzo colla superficie del terreno, purchè ammettasi che la superficie dell'or indicata scarpa sia generata da una retta che si mantiene in un piano verticale colla sua traccia orizzontale normale ad *a e* e che si muove percorrendo, prima

le due rette orizzontalmente proiettate in ab ed ag, e poi le rette orizzontalmente proiettate in gl e bd.

Nei casi pratici la retta bd e la mistilinea bhd quasi sempre sono vicinissime l'una all'altra, quindi si ritiene che la retta bd rappresenti l'intersezione della scarpa del rialzo colla superficie del terreno.

44. **Planimetria della strada.** — Gli elementi i quali completamente determinano la planimetria della strada sono: le lunghezze delle parti rettilinee, le ampiezze ed i raggi delle parti curvilinee dell'asse stradale; le distanze dei punti in cui le sezioni trasversali incontrano l'asse medesimo; la larghezza della piattaforma; le larghezze delle scarpe e dei fossi; e le distanze dei vertici delle linee di passaggio da una delle sezioni fra cui si trovano. Incominciando dal disegnare l'asse stradale, collegandovi poscia quelle rette ad esso normali in cui si proiettano le sezioni trasversali e portando su queste le distanze che gli spigoli della superficie di progetto hanno dall'asse, si ha quanto occorre per segnare quelli, dei detti spigoli, che rappresentano i due bordi della strada, le intersezioni delle scarpe degli interri fra due sezioni in rialzo, le direzioni delle due rette che limitano il fondo dei fossi nelle trincee. Portando dopo a sito le linee di passaggio, con tutta facilità si arriva a tracciare le intersezioni delle scarpe dei rilevati e delle controscarpe dei fossi dove fra due sezioni successive esistono contemporaneamente scavi e rilevati. La figura 88 rappresenta, nella scala del 1/1000, un saggio di planimetria della strada per il tronco compreso fra l'estremo del primo chilometro e la ventiduesima sezione trasversale.

Osservazioni. — La determinazione delle quote rosse riesce generalmente un lavoro piuttosto lungo e noioso, in quanto che richiede che prima si trovino quelle ordinate nere e quelle ordinate rosse, dalle cui differenze risultano appunto le indicate quote rosse. Per riguardo ai profili longitudinali, che generalmente bisogna disegnare in iscala piuttosto piccola e da cui si desumono i dati più importanti relativi alla costruzione di una strada, conviene generalmente attenersi al metodo numerico nella determinazione delle quote rosse; ma, per riguardo ai profili trasversali, purchè abbiasi l'avvertenza di disegnarli in una scala non minore del $\frac{1}{100}$, si può anche abbandonare il metodo numerico, segnando le dette quote rosse sulle sezioni corrispondenti e valutandole colla scala del disegno. Questo procedimento puramente grafico non dà sicuramente l'esattezza di quello numerico; è però sufficiente nelle

ordinarie e più frequenti circostanze della pratica, e riesce assai spedito in quanto permette di avere immediatamente le quote rosse senza passare per la determinazione delle ordinate nere e delle ordinate rosse.

Anche le larghezze delle scarpe e le larghezze della zona di terreno occupato dalla strada, in corrispondenza di ciascuna sezione trasversale, sono elementi che graficamente si possono desumere dai disegni delle sezioni trasversali; e, per ragione di uniformità di procedimento, si seguirà questo metodo speditivo quando siasi creduto di poterlo adottare per la determinazione delle quote rosse.

Conviene che si determinino col procedimento numerico i punti di passaggio dei profili longitudinali; ma, trovandosene sui profili trasversali, si possono trovare le distanze dei vertici fra cui si trovano col metodo spedito di desumerle dai disegni dei profili stessi. Quanto si è detto pei punti di passaggio dei profili trasversali conviene anche pei punti determinanti le linee di passaggio, giacchè, volendosi per esempio trovare quel vertice della linea di passaggio il quale è sulla retta $\gamma\delta$ (*Fig.* 83), basta condurre la retta $\gamma'\delta'$ (*Fig.* 89) che, in una scala sufficientemente grande, rappresenti la lunghezza di $\overline{\gamma\delta}$; elevare alle sue estremità le due perpendicolari $\gamma' x$ e $\delta' y$ e prendere su esse le lunghezze $\overline{\gamma'\alpha'}$ e $\overline{\delta'\beta'}$ rispettivamente rappresentanti le quote rosse $\overline{\alpha h}$ e $\overline{\lambda\beta}$. Ciò facendo, si fissa la proiezione orizzontale M di quel vertice della linea di passaggio che deve trovarsi su $\gamma\delta$ e, qualora vogliansi le distanze orizzontali di questo punto dalle due sezioni fra cui giace, basta valutare, colla scala stata impiegata nel disegnare la figura 89, le due distanze rappresentate in $\overline{M\gamma'}$ e $\overline{M\delta'}$.

Trattandosi di tracciare una linea di passaggio sulla planimetria di una strada, si possono disegnare le figure che, come la figura 89, sono dirette a trovare i vertici di questa linea nella stessa scala in cui è disegnata la planimetria; mentre, volendosi le distanze dei detti vertici dalle sezioni vicine, generalmente conviene che le figure, da cui tali distanze si desumono, siano disegnate in una scala assai maggiore. Aggiungeremo ancora che, intersecandosi le rette $\gamma'\delta'$ ed $\alpha'\beta'$ sotto un angolo assai acuto, la loro intersezione M non riesce ben precisata, e che in questo caso riesce facile togliere l'inconveniente prendendo sulle $\gamma' x$ e $\delta' y$ lunghezze che siano contemporaneamente il doppio, o il triplo, o il quadruplo, ecc. di $\overline{\gamma'\alpha'}$ e di $\overline{\delta'\beta'}$.

Riepilogando, stabiliremo le seguenti norme relativamente ai metodi da seguirsi nello studio di un progetto di strada per quanto spetta a profili ed alla planimetria: che bisogna attenersi ai procedimenti nume-

rici quando trattasi di lavori per cui in tutto richiedesi la massima precisione; che generalmente basta applicare i procedimenti numerici per le determinazioni relative ai profili longitudinali, e che si possono fare con metodi grafici quelle relative ai profili trasversali, coll'avvertenza però di disegnare questi in iscala piuttosto grande e, se è possibile, non minore di 1/100.

Osserveremo ancora che, presentando il terreno alcune accidentalità nel senso trasversale, ma non su direzioni normali all'asse stradale, conviene, dove questo fatto si verifica, rilevare le sezioni trasversali secondo andamenti poligonali passanti per le accidentalità stesse. Questi andamenti verranno collegati al profilo longitudinale, e, meglio dei profili normali, condurranno ad un giusto apprezzamento dell'importanza delle opere da farsi.

CAPITOLO III.

Computo dei movimenti di terra, delle distanze medie dei trasporti e delle occupazioni di terreni.

45. **Aree delle sezioni trasversali.** — Queste aree, le quali sono quelle delle figure comprese fra i profili trasversali del terreno e le corrispondenti linee di progetto (*Fig.* 76), assai facilmente si potrebbero dedurre scomponendo le dette figure in trapezi e triangoli mediante rette verticali condotte dai loro vertici, come risulta dalle figure 90 e 91. Noi però, nell'intento di risparmiare l'operazione troppo lunga delle determinazioni di molte quote rosse e delle altezze delle indicate figure parziali, non che della deduzione delle aree delle figure stesse, onde poi inferirne quelle delle sezioni trasversali, abbiamo fatto in disparte e nella scala di 1/100 i disegni delle venticinque prime sezioni trasversali, ed abbiamo dedotto le loro aree col planimetro polare. I risultati di quest'operazione, fatta collo scopo di calcolare i volumi degli sterri e degli interri, trovansi inscritti nel quadro numerico che qui presentiamo.

Indicazione delle sezioni	Aree delle sezioni trasversali		Osservazioni
	In iscavo	In rialzo	
	mq		
1	0,65		Parte a diritta dell'asse.
		mq	
1		0,56	Parte a sinistra dell'asse.
2		6,28	Parte a diritta dell'asse.
2		7,72	Parte a sinistra dell'asse.
3		19,02	
4		24,32	
5		25,10	
6		32,80	
7		29,00	
8		29,70	
9		23,10	
10		16,85	
11		17,48	
12		13,64	
13		10,50	
14		4,22	
15		2,24	
16	0,46		
17	3,86		
18	4,17		
19	6,67		
20	9,90		
21	6,70		
22		14,40	
23		32,25	
24		61,50	
25		73,70	

46. **Volumi degli sterri e degli interri.** — Per il calcolo dei volumi dei movimenti di terra seguiremo il metodo delle sezioni ragguagliate (*Geometria pratica applicata all'arte del costruttore*, Num. 215 e 218), ed incomincieremo col determinare le lunghezze dei solidi di sterro e d'interro fra le sezioni 1 e 2, 15 e 16, 21 e 22.

Indicando perciò con

L la distanza orizzontale di due sezioni, o di due porzioni corrispondenti di sezioni successive, fra cui si trovano due solidi, uno di sterro e l'altro d'interro, con

A_s l'area di quella sezione o di quella parte di sezione presso la quale esiste lo scavo, con

A_i l'area della sezione, o di quella parte di sezione presso la quale esiste il rialzo, con

l_s la lunghezza da assegnarsi al solido di sterro, e con

l_i quella da attribuirsi al solido d'interro, si ha

$$l_s = \frac{L\,A_s}{A_s + A_i}$$

$$l_i = \frac{L\,A_i}{A_s + A_i}.$$

Applicando queste formole, si trova: che le lunghezze dei due solidi di sterro e d'interro, posti a diritta dell'asse stradale e fra le sezioni 1 e 2, sono rispettivamente

$$\frac{96{,}42 \times 0{,}65}{0{,}65 + 6{,}28} = 9^{m},04$$

$$\frac{96{,}42 \times 6{,}28}{6{,}28 + 0{,}65} = 87\ ,38;$$

che le lunghezze dei due solidi d'interro e di sterro fra le sezioni 15 e 16 risultano

$$\frac{76{,}09 \times 2{,}24}{2{,}24 + 0{,}46} = 63,^{m}13$$

$$\frac{76{,}09 \times 0{,}46}{0{,}46 + 2{,}24} = 12\ ,96;$$

e che le lunghezze dei due solidi di sterro e d'interro fra le sezioni 21 e 22 ammettono i valori

$$\frac{91,71 \times 6,70}{6,70 + 14,40} = 29^{m},12$$

$$\frac{91,71 \times 14,40}{14,40 + 6,70} = 62\ ,59.$$

Possiamo ora dire che completamente si conoscono le lunghezze di tutti i solidi tanto di sterro quanto d'interro, non che le aree delle lôro basi, e quindi, applicando la regola che il volume di uno qualunque di questi solidi è dato dalla semi-somma delle aree delle sue basi per la sua lunghezza, contata orizzontalmente, ossia in senso perpendicolare alle basi, riesce facile la compilazione del registro che qui presentiamo, il quale riassume la determinazione degli sterri e degli interri pel tronco di strada compreso fra le sezioni 1 e 25.

Numero d'ordine dei solidi	Sezioni limiti dei solidi	AREE DELLE BASI dei solidi		SOMMA DELLE AREE delle basi dei solidi	LUNGHEZZE dei solidi	VOLUMI DOPPI		VOLUMI VERI		OSSERVAZIONI
		In iscavo	In rialzo			Sterri	Interri	Sterri	Interri	
1	1	mq 0,65		mq 0,65	m 9,04	mc 5,876		mc 2,938		
2	2		mq 6,28	6,28	87,38		mc 548,746		mc 274,373	
3	1 2		0,56 7,72	8,28	96,42		798,358		399,179	
4	2 3		14,00 19,02	33,02	52,78		1742,796		871,398	
5	3 4		19,02 24,32	43,34	88,30		3826,922		1913,461	
6	4 5		24,32 25,10	49,42	64,77		3200,933		1600,467	
7	5 6		25,10 32,80	57,90	142,85		8271,015		4135,507	
8	6 7		32,80 29,00	61,80	75,10		4641,180		2320,590	
9	7 8		29,00 25,70	54,70	68,20 a)		3730,540		1865,270	a) Il solido 9 trovasi compreso fra le due sezioni 7 ed 8 distanti fra loro di m. 75,20; e la sua lunghezza venne portata a metri 68.20, per esservi fra le dette sezioni un ponticello della luce di 4 metri, il quale, unitamente ai suoi piedritti, può occupare nel senso dell'asse della strada una lunghezza di circa metri 7.
10	8 9		25,70 23,10	48,80	76,82		3748,816		1874,408	
11	9 10		23,10 16,85	39,95	73,86		2950,707		1475,353	
12	10 11		16,85 17,48	34,33	66,10		2269,213		1134,606	
						Da riportarsi....		2,938	17864,612	

Numero d'ordine dei solidi	Sezioni limiti dei solidi	AREE DELLE BASI dei solidi		SOMMA DELLE AREE delle basi dei solidi	LUNGHEZZE dei solidi	VOLUMI DOPPI		VOLUMI VERI		OSSERVAZIONI
		In iscavo	In rialzo			Sterri	Interri	Sterri	Interri	
						Riporti.....		mc 2,938	mc 17864,612	
13	11 12		mq 17,48 13,64	mq 31,12	m 38,93		mc 1211,502		605,751	
14	12 13		13,64 10,50	24,14	44,59		1076,403		538,201	
15	13 14		10,50 4,22	14,72	50,52		743,654		371,827	
16	14 15		4,22 2,24	6,46	97,88		632,305		316,152	
17	15		2,24	2,24	63,13		141,411		70,706	
18	16	mq 0,46		0,46	12,96	mc 5,962		2,981		
19	16 17	0,46 3,86		4,32	74,41	321,451		160,726		
20	17 18	3,86 4,17		8,03	73,50	590,205		295,102		
21	18 19	4,17 6,67		10,84	42,29	458,424		229,212		
22	19 20	6,67 9,90		16,57	34,11	565,203		282,601		
23	20 21	9,90 6,70		16,60	57,69	957,654		478,827		
24	21	6,70		6,70	29,12	195,104		97,552		
						Da riportarsi....		1549,939	19767,249	

Numero d'ordine dei solidi	Sezioni limiti dei solidi	AREE DELLE BASI dei solidi		SOMMA DELLE AREE delle basi dei solidi	LUNGHEZZE dei solidi	VOLUMI DOPPI		VOLUMI VERI		OSSERVAZIONI
		In iscavo	In rialzo			Sterri	Interri	Sterri	Interri	
								mc	mc	
						Riporti.....		1549,939	19767,249	
25	22		mq 14,40	mq 14,40	m 62,59		mc 901,296		450,648	
26	22 23		14,40 32,25	46,65	60,34		2814,861		1407,430	
27	23 24		32,25 61,50	93,75	67,06		6286,875		3143,437	
28	24 25		61,50 73,70	135,20	22,95		3102,840		1151,420	
						VOLUMI TOTALI...		1549,939	25920,184	

47. **Distribuzione delle terre.** — Fra la sezione 1 e la sezione 2, a diritta dell'asse stradale, devesi eseguire un piccolo scavo, del volume di metri cubi 2,938, e le terre, che da esso si ricaveranno, si potranno gettare a sinistra dell'asse medesimo ed impiegarle così nella formazione di una piccola parte del rialzo presso la sezione 1.

Il restante rialzo, del volume di metri cubi 670,614, da eseguirsi fra le sezioni 1 e 2, non che tutto l'interro fra le sezioni 2 e 13 del ragguardevole volume di metri cubi 18335,012, verranno eseguiti con terre d'imprestito. Supporremo poi che queste terre si possano prendere su una zona a sinistra della strada da costruirsi, avente il suo asse alla distanza pressochè costante di 95 metri dall'asse stradale.

Una parte del rialzo fra le sezioni 13 e 14, e pel quantitativo di metri cubi 70,664 dalla parte della sezione 13, verrà pur fatto con terre d'imprestito, prese come sopra si è detto. Nell'altra parte dell'interro fra le stesse sezioni, e quindi pel quantitativo di metri cubi 301,163, come pure nell'interro fra le sezioni 14 e 15 ed in quello compreso fra questa sezione e la vicina linea di passaggio, si potranno

impiegare le terre da scavarsi fra l'or indicata linea di passaggio e la sezione 19.

Le terre che si ricaveranno fra la sezione 19 e la linea di passaggio esistente fra le sezioni 21 e 22, le quali terre ammettono un volume di metri cubi 858,980, si potranno adoperare: pel quantitativo di metri cubi 450,648, nella formazione del rialzo compreso fra la detta linea di passaggio e la sezione 22; pel quantitativo di metri cubi 408,332, per la costruzione del rialzo compreso fra le sezioni 22 e 23.

Finalmente il restante interro del quantitativo di metri cubi 999,098 da farsi fra le stesse sezioni 22 e 23, come pure quelli fra le sezioni 23 e 24, 24 e 25 si eseguiranno con terre d'imprestito. Si supporrà poi che queste terre si possano scavare lungo una zona posta a diritta della strada da costruirsi col suo asse alla distanza pressochè costante di 120 metri dall'asse stradale.

48. **Centri di superficie delle sezioni trasversali e di quelle loro parti che sono basi di solidi differenti.** — La determinazione di questi centri di superficie deve essere fatta per la valutazione delle distanze medie dei trasporti. Come risulta dal registro che trovasi nel numero 46, abbiamo fra le sezioni 1 e 2 (*Fig.* 76) tre differenti solidi: un piccolo sterro dalla parte della sezione 1 a diritta dell'asse stradale; un interro dalla parte della sezione 2 pure a diritta dell'asse stradale; ed un interro fra le sezioni 1 e 2 a sinistra dell'asse stradale. Per le sezioni 1 e 2 importa dunque determinare i centri di superficie di ciascuna delle parti che si trovano a diritta ed a sinistra dell'asse stradale; e per la sezione 2, la quale costituisce una base dell'interro compreso fra le sezioni 2 e 3, è anche necessario di trovare il centro di superficie del suo totale. Le altre sezioni trasversali, da quella che ha il numero 3 a quella che ha il numero 25, sono per intiero basi di solidi d'interro alcune, e basi di solidi di sterro alcune altre; basta quindi trovare per queste i centri dell'intiera loro superficie.

Nella determinazione dei centri di superficie delle sezioni trasversali e delle porzioni di sezioni trasversali che a noi importa di considerare, si adottò il seguente semplicissimo procedimento. Disegnate, su buona carta di spessezza uniforme e nella scala del 1/100, le figure di cui volevasi determinare il centro di superficie, vennero esse tagliate secondo l'andamento preciso del loro perimetro. Sospendendo in due diverse posizioni ciascuno dei pezzi di carta così ottenuti ad una punta orizzontale sovrastante ad un'altra situata sulla stessa ver-

ticale della prima, abbiamo potuto tracciare per ciascuno di essi due rette dalle dette punte determinate. Evidentemente le due rette tracciate su ciascuno dei pezzi di carta passano pel centro di superficie della sezione rappresentata, e quindi l'intersezione di queste rette è il centro domandato (*f*).

49. **Centri di gravità dei solidi di sterro e d'interro.** — Per determinare, almeno approssimativamente, i centri di gravità di tutti i solidi di sterro e d'interro da considerarsi fra la prima e la venticinquesima sezione, venne adottato il seguente metodo. Si disegnò il profilo longitudinale del terreno, il qual profilo trovasi rappresentato: per una prima parte nella poligonale 1.2.3.4.5.6 (*Tav. XV*); per una seconda parte nella poligonale 6.7.8.9.10.11.12.13.14 (*Tav. XVI*); per una terza parte nella poligonale 13.14.15.16.17.18.19 (*Tav. XVII*); per una quarta parte nella poligonale 19.20.21.22.23.24.25 (*Tav. XVIII*). Nel fare questo disegno venne adottata la scala del 1/200 per le altezze, la scala del 1/2000 per le distanze orizzontali nelle prime tre parti, e la scala del 1/1500 per le distanze orizzontali nella quarta parte, onde schivare un'eccessiva sovrapposizione delle sezioni trasversali.

Fatto questo, in proiezione orizzontale e sopra una retta $\Omega\Omega$ (*Fig.* 92) parallela a quella assunta come linea di terra nella rappresentazione del profilo longitudinale, venne fatto lo sviluppo dell'asse stradale. Su tale sviluppo si portarono le distanze orizzontali fra le diverse sezioni, e si ebbero così i punti 1, 2, 3, 4,.....22, 23, 24, 25 posti su altrettanti perpendicolari ad $\Omega\Omega$, passanti pei vertici egualmente numerati sul profilo longitudinale. Assunte queste perpendicolari siccome le tracce orizzontali dei piani verticali contenenti le varie se-

(*f*) Per ben condurre quest'operazione importa: che le due punte P e P' (*Fig.* 93) siano unite a cursori C e C' scorrevoli lungo un'asta AB; che la punta superiore P, oltre di essere finissima, sia di qualche poco più lunga della punta P'; che l'asta AB si possa disporre verticalmente; che gli assi delle due punte siano perpendicolari all'asse dell'asta; che l'asta termini con tre braccia orizzontali, dirette secondo i raggi di un triangolo equilatero; che ciascuno dei detti bracci sia munito di una vite per facilmente rendere verticale l'asse dell'asta; e che finalmente l'apparecchio sia munito di un piombino o di un livello, onde ottenere ed accertarsi della verticalità dell'asse medesimo.

La determinazione dei centri di superficie delle diverse sezioni può anche essere fatta con metodi geometrici, i quali consistono: nello scomporre la figura di ogni sezione in triangoli e quadrilateri; nel determinare le aree ed i centri di superficie di queste figure; e nel trovare il centro del sistema dei pesi rappresentati dalle aree delle figure stesse.

zioni trasversali, nella scala del 1/200, vennero queste disegnate ribattute su quei piani paralleli al piano orizzontale di proiezione, i quali passano per quei punti che i profili trasversali del terreno hanno in comune col profilo longitudinale. Sulla prima e sulla seconda sezione trasversale vennero individuati i centri di superficie delle loro parti poste a dritta ed a sinistra dell'asse stradale; ed i centri di superficie delle intiere sezioni vennero segnati per tutte le altre a partire dalla seconda. Una piccola croce precisa nelle diverse sezioni trasversali le posizioni degli indicati centri di superficie.

Dopo il disegno del profilo longitudinale e dei profili trasversali, si passò alla rappresentazione grafica dei volumi di sterro e d'interro, e si fece questa rappresentazione sulla figura 92. Vennero perciò condotte dai vertici 1, 2, 3, 4,....., 22, 23, 24 e 25 del profilo longitudinale altrettante rette verticali, e su esse convenientemente si portarono lunghezze proporzionali alle aree delle basi dei solidi di sterro e d'interro. Si portarono sopra il profilo longitudinale le lunghezze esprimenti aree in rialzo, e sotto quelle altre esprimenti aree in iscavo. Nelle tavole XV, XVI e XVII si sono assunte le lunghezze delle indicate verticali in modo che ogni centimetro rappresenti 4 metri quadrati, ma nella tavola XVIII, per le limitate dimensioni del foglio, si è dovuto fare in modo che ogni centimetro rappresenti 8 metri quadrati. Dalla tabella che qui presentiamo, chiaramente risulta quali superficie rappresentano le lunghezze che nella figura 92 trovansi determinate sulle verticali passanti pei primi venticinque punti del profilo longitudinale, e si ha:

che la retta	1 A	rappresenta (Num. 45)	metri quadrati	0,65;
»	2 B	»	»	6,28;
»	1 D	»	»	0,56;
»	2 E	»	»	7,72;
»	2 F	»	»	14,00;
»	3 G	»	»	19,02;
»	4 H	»	»	24,32;
»	5 I	»	»	25,10;
»	6 K	»	»	32,80;
»	7 L	»	»	29,00;
»	8 M	»	»	29,70;
»	9 N	»	»	23,10;
»	10 O	»	»	16,85;
»	11 P	»	»	17,48;
»	12 Q	»	»	13,64;

che la retta 13 R rappresenta (Num. 45) metri quadrati 10,50;
» 14 S » » 4,22;
» 15 T » » 2,24;
» 16 U » » 0,46;
» 17 V » » 3,86;
» 18 X » » 4,17;
» 19 Y » » 6,67;
» 20 Z » » 9,90;
» 21 A' » » 6,70;
» 22 B' » » 14,40;
» 23 C' » » 32,25;
» 24 D' » » 61,50;
» 25 E' » » 73,70.

Tracciando le rette AB, DE, FG, GH, HI, IK, KL, LM, MN, NO, OP, PQ, QR, RS, ST, TU, UV, VX, XY, YZ, ZA', A'B', B'C', C'D' e D'E', tenendo presente il significato geometrico della regola delle sezioni ragguagliate nel fare i volumi degli sterri e degli interri, e riportandoci ai numeri d'ordine dei solidi indicati nel numero 46, abbiamo ottenuto:

nel triangolo 1 CA la rappresentazione grafica del solido 1,
» 2 CB » » 2;
nel trapezio 1.2 ED » » 3,
» 2.3 GF » » 4,
» 3.4 HG » » 5,
» 4.5 IH » » 6,
» 5.6 KI » » 7,
» 6.7 LK » » 8,
» 7.8 ML » » 9,
» 8.9 NM » » 10,
» 9.10 ON » » 11,
» 10.11 PO » » 12,
» 11.12 QP » » 13,
» 12.13 RQ » » 14,
» 13.14 SR » » 15,
» 14.15 TS » » 16;
nel triangolo 15 F'T » » 17,
» 16 F'U » » 18;
nel trapezio 16.17 VU » » 19,

nel trapezio	17.18 X V	la rappresentazione grafica del solido		20,
»	18.19 Y X	»	»	21,
»	19.20 Z Y	»	»	22,
»	20.21 A' Z	»	»	23;
nel triangolo	21 G' A'	»	»	24,
»	22 G' B'	»	»	25;
nel trapezio	22.23 C' B'	»	»	26,
»	23.24 D' C'	»	»	27,
»	24.25 E' D'	»	»	28.

Ultimata la rappresentazione grafica dei solidi di sterro e d'interro, per fare la distribuzione delle terre in conformità di quanto venne detto nel numero 47, bisogna determinare: nell'interro tra le sezioni 1 e 2 ed a sinistra dell'asse stradale, il volume corrispondente del piccolo sterro, di metri cubi 2,938, da effettuarsi a diritta dell'asse medesimo e presso la sezione 1; nell'interro fra le sezioni 13 e 14, quella parte di metri cubi 70,664 da farsi presso la sezione 13 con terre d'imprestito; e finalmente nell'interro, fra le sezioni 22 e 23, quella parte di metri cubi 408,332 da eseguirsi con terre ricavabili dal precedente sterro. Ciascuna di queste determinazioni, quando si voglia fare sulla rappresentazione grafica dei volumi degli sterri e degli interri, si riduce a separare da un trapezio dato, e con una retta parallela alle sue basi, un altro trapezio di area pure nota (*g*).

(*g*) Per risolvere il problema di separare da un trapezio dato A B C D (*Fig.* 95) un area cognita mediante una retta parallela alle sue basi, si chiamino

a l'altezza $\overline{DK}$ del trapezio,

b la sua base $\overline{AD}$,

b' l'altra base $\overline{BC}$,

x l'altezza $\overline{DI}$ del trapezio da separarsi A F G D ed

A l'area di quest'ultimo sempre minore di quella del trapezio A B C D.

Immaginando condotta per D una retta D E parallela ad A B, si ha

$$\overline{CE} = b' - b$$

$$\overline{GH} = \frac{b' - b}{a} x$$

$$\overline{FG} = b + \frac{b' - b}{a} x$$

Ora, siccome l'area del trapezio A F G D deve essere eguale ad A, si ha l'equazione:

$$\frac{2b + \frac{b' - b}{a} x}{2} x = A,$$

I risultamenti, ai quali siamo giunti nel nostro caso particolare, sono: che l'interro corrispondente allo sterro di metri cubi 2,938 è rappresentato nel trapezio $1ab$D, le cui basi parallele 1D ed ab sono distanti di metri 4,20; che l'interro di metri cubi 70,664 è rappresentato dal trapezio $13cd$R, le cui basi parallele 13R e cd sono alla distanza di metri 6,92; e finalmente che l'interro di metri cubi 408,332 è rappresentato dal trapezio $22ef$B', le cui basi parallele 22B' ed ef sono alla distanza di metri 22,70.

che, ordinata secondo le potenze di x, si riduce a

$$x^2 + 2\frac{ab}{b'-b}x = 2\frac{aA}{b'-b}.$$

Quest'equazione ha due radici, e, pel genere di questioni che stiamo trattando, la radice soddisfacente allo scopo deve essere positiva e minore di a.

Il problema può anche essere risoluto per approssimazione come segue. Suppongasi che la figura da togliersi dal trapezio ABCD (*Fig.* 96) sia un parallelogramma, ed allora la sua altezza x' sarà data da

$$x' = \frac{A}{b}.$$

Quest'altezza si porti in $\overline{LM'}$ e si conduca per M' la retta F'G', parallela ad AD. Si misuri, mediante la scala del disegno, la retta $\overline{F'G'} = b_1$, si calcoli l'area A_1 del trapezio AF'G'D, e si faccia la differenza $A_1 - A$. Se questa differenza è positiva, ciò che succede sempre quando $\overline{AD}$ è minore di $\overline{BC}$, bisogna togliere dalla figura AF'G'D un piccolo trapezio, la cui altezza x_1 è data da

$$x_1 = \frac{A_1 - A}{b_1}.$$

Portando, sulla M'L, la lunghezza $\overline{M'M} = x_1$ e conducendo la retta FG parallela ad AD, si ottiene il trapezio AFGD, il quale, con sufficiente approssimazione, si può considerare come il trapezio domandato.

Volendosi maggiore approssimazione, si potrebbe misurare la lunghezza $\overline{FG} = b_2$ determinare la lunghezza $\overline{LM} = x' - x_1$, calcolare l'area del trapezio AFGD $= A_2$, fare la differenza $A_2 - A$ ed ottenere una nuova altezza x_2 data da

$$x_2 = \frac{A_2 - A}{b_2},$$

la quale, portata a partire dal punto M sulla ML, permetterebbe di condurre una parallela ad AD che, più delle due precedenti, si accosterebbe a dare la vera risoluzione del problema.

Quando $\overline{AD}$ è maggiore di $\overline{BC}$ (*Fig.* 97), la differenza $A_1 - A$ è negativa, allora lungo la retta F'G' bisogna aggiungere al trapezio AF'G'D un altro trapezio di area $A - A_1$; e le operazioni da eseguirsi per la soluzione approssimata del problema sono in tutto analoghe a quelle già state indicate ragionando sulla figura 96.

Graficamente rappresentati i volumi degli sterri e degli interri, riesce facile determinare i piani normali alla proiezione orizzontale dell'asse stradale, nei quali devono trovarsi i centri di gravità dei solidi, a cui i detti volumi si riferiscono. — Tralasciamo di fare questa ricerca per il piccolo sterro e per il corrispondente interro rispettivamente rappresentati nel triangolo 1 A C e nel quadrilatero 1 *a b* D, giacchè questi solidi sono così piccoli da potersi fissare a vista i loro centri di gravità. Per tutti gli altri solidi determiniamo i centri di superficie delle figure, le quali dànno le loro rappresentazioni grafiche. Questi centri siano

G'_2	per il solido	2	rappresentato nel triangolo	2 C B,
G''_3	per il solido		rappresentato nel quadrilatero	*a* 2 E B,
G_4	per il solido	4	rappresentato nel quadrilatero	2.3 G F,
G_5	»	5	»	3.4 H G,
G_6	»	6	»	4.5 I H,
G_7	»	7	»	5.6 K I,
G_8	»	8	»	6.7 L K,
G_9	»	9	»	7.8 M L,
G_{10}	»	10	»	8.9 N M,
G_{11}	»	11	»	9.10 O N,
G_{12}	»	12	»	10.11 P O,
G_{13}	»	13	»	11.12 Q P,
G_{14}	»	14	»	12.13 R Q,
G'_{15}	per il solido		rappresentato nel quadrilatero	13 *c d* R,
G''_{15}	»		»	14 S *d c*,
G_{16}	per il solido	16	rappresentato nel quadrilatero	14.15 T S,
G_{17}	per il solido	17	rappresentato nel triangolo	15 F′ T,
G_{18}	»	18	»	16 F′ U,
G_{19}	per il solido	19	rappresentato nel quadrilatero	16.17 V U,
G_{20}	»	20	»	17.18 X V,
G_{21}	»	21	»	18.19 Y X,
G_{22}	»	22	»	19.20 Z Y,
G_{23}	»	23	»	20.21 A′ Z,
G_{24}	per il solido	24	rappresentato nel triangolo	21 G′ A′,
G_{25}	»	25	»	22 G′ B′,
G'_{26}	per il solido		rappresentato nel quadrilatero	22 *e f* B′,
G''_{26}	»		»	23 C′ *f e*,
G_{27}	per il solido	27	rappresentato nel quadrilatero	23.24 D′ C′,
G_{28}	»	28	»	24.25 E′ D′.

Se ora, pei punti G'_2, G''_3, G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}, G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{14}, G'_{15}, G''_{15}, G_{16}, G_{17}, G_{18}, G_{19}, G_{20}, G_{21}, G_{22}, G_{23}, G_{24}, G_{25}, G'_{26}, G''_{26}, G_{27} e G_{28}, si conducono altrettante perpendicolari alla $\Omega\Omega$, queste rette determinano i piani di profilo in cui trovansi i centri di gravità dei diversi solidi. Tanto le proiezioni orizzontali adunque, quanto le proiezioni verticali di tali centri devono trovarsi sulle indicate perpendicolari, e più non rimane che a trovare le posizioni di tali proiezioni.

Incominciando dal cercare le proiezioni orizzontali dei centri di gravità dei diversi solidi, si osservi che le perpendicolari alla retta $\Omega\Omega$, condotte pei punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24 e 25 delle sezioni trasversali, si possono considerare come le proiezioni orizzontali delle sezioni stesse. Se adunque proiettansi sulle or indicate perpendicolari i centri di superficie g''_1, g_2, g'_2, g''_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{15}, g_{16}, g_{17}, g_{18}, g_{19}, g_{20}, g_{21}, g_{22}, g_{23}, g_{24} e g_{25} delle sezioni trasversali e delle porzioni di sezioni trasversali che a noi importa di considerare, nei punti n''_1, n_2, n'_2, n''_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}, n_{11}, n_{12}, n_{13}, n_{14}, n_{15}, n_{16}, n_{17}, n_{18}, n_{19}, n_{20}, n_{21}, n_{22}, n_{23}, n_{24} ed n_{25} si hanno le proiezioni orizzontali di questi centri. In quanto alle proiezioni verticali dei centri medesimi, riesce facile determinarle nei punti ν, i quali risultano col prendere $\overline{1\nu''_1} = \overline{n''_1 g''_1}$, $\overline{2\nu_2} = \overline{n_2 g_2}$, $\overline{2\nu'_2} = \overline{n'_2 g'_2}$, $\overline{2\nu''_2} = \overline{n''_2 g''_2}$, $\overline{3\nu_3} = \overline{n_3 g_3}$, $\overline{4\nu_4} = \overline{n_4 g_4}$, $\overline{5\nu_5} = \overline{n_5 g_5}$, $\overline{6\nu_6} = \overline{n_6 g_6}$, $\overline{7\nu_7} = \overline{n_7 g_7}$, $\overline{8\nu_8} = \overline{n_8 g_8}$, $\overline{9\nu_9} = \overline{n_9 g_9}$, $\overline{10\nu_{10}} = \overline{n_{10} g_{10}}$, $\overline{11\nu_{11}} = \overline{n_{11} g_{11}}$, $\overline{12\nu_{12}} = \overline{n_{12} g_{12}}$, $\overline{13\nu_{13}} = \overline{n_{13} g_{13}}$, $\overline{14\nu_{14}} = \overline{n_{14} g_{14}}$, $\overline{15\nu_{15}} = \overline{n_{15} g_{15}}$, $\overline{16\nu_{16}} = \overline{n_{16} g_{16}}$, $\overline{17\nu_{17}} = \overline{n_{17} g_{17}}$, $\overline{18\nu_{18}} = \overline{n_{18} g_{18}}$, $\overline{19\nu_{19}} = \overline{n_{19} g_{19}}$, $\overline{20\nu_{20}} = \overline{n_{20} g_{20}}$, $\overline{21\nu_{21}} = \overline{n_{21} g_{21}}$, $\overline{22\nu_{22}} = \overline{n_{22} g_{22}}$, $\overline{23\nu_{23}} = \overline{n_{23} g_{23}}$, $\overline{24\nu_{24}} = \overline{n_{24} g_{24}}$ e $\overline{25\nu_{25}} = \overline{n_{25} g_{25}}$.

Prendendo sulla retta $\Omega\Omega$ la lunghezza $\overline{1h}$ che, nella scala del 1/2000 rappresenti metri 9,04 (Num. 46), conducendo per h la retta hi perpendicolare alla $\Omega\Omega$ e rappresentante, nella scala del 1/200, la lunghezza di metri 2,75, dividendo per metà la $\overline{hi}$ in m e tirando la retta mn'_2, si può ritenere che su questa retta debba trovarsi la proiezione orizzontale del centro di gravità dell'interro graficamente rappresentato nel triangolo 2 B C. Il punto m verticalmente proiettasi in C; sulla retta $C\nu'_2$ deve adunque trovarsi la proiezione verticale dell'or indicato centro; e, siccome le sue proiezioni devono essere sulla retta $G'_2 X_2$, condotta per G'_2 perpendicolarmente alla $\Omega\Omega$, si ha che le proiezioni orizzontale e verticale del centro di gravità del solido

graficamente rappresentato nel triangolo 2BC sono rispettivamente o_2 ed ω_2. Ritenendo che sulla retta, avente per proiezione orizzontale $n''_1 n''_2$ e per proiezione verticale $\nu''_1 \nu''_2$, si trova il centro di gravità dell'interro graficamente rappresentato nel trapezio 1.2ED, ed ammettendo che il centro di gravità della parte di questo solido, la quale è graficamente rappresentata nel quadrilatero a2Eb, sia pure sulla retta or ora indicata, risulta che, nelle intersezioni o_3 ed ω_3 della G''_3X_3 colla $n''_1 n''_2$ e colla $\nu''_1 \nu''_2$, si hanno rispettivamente le proiezioni orizzontale e verticale dell'ultimo accennato centro. Coll'intento di ottenere maggior chiarezza nelle costruzioni occorrenti per la determinazione dei centri di gravità dei solidi da considerarsi fra la sezione 1 e 2, venne fatta la figura 94, per la quale si sono adottate scale doppie di quelle state usate nella figura 92 per le sezioni trasversali, per le altezze verticali e per la rappresentazione delle aree delle sezioni.

Sulle poligonali (*Fig.* 92) $n_2 n_3 n_4 n_5 n_6 n_7 n_8 n_9 n_{10} n_{11} n_{12} n_{13} n_{14} n_{15} n_{16} n_{17} n_{18} n_{19} n_{20} n_{21} n_{22} n_{23} n_{24} n_{25}$ e $\nu_2 \nu_3 \nu_4 \nu_5 \nu_6 \nu_7 \nu_8 \nu_9 \nu_{10} \nu_{11} \nu_{12} \nu_{13} \nu_{14} \nu_{15} \nu_{16} \nu_{17} \nu_{18} \nu_{19} \nu_{20} \nu_{21} \nu_{22} \nu_{23} \nu_{24} \nu_{25}$ si trovano rispettivamente le proiezioni orizzontali e verticali dei centri di gravità di tutti i solidi d'interro e di sterro da considerarsi fra le sezioni 2 e 25; e, siccome queste proiezioni devono anche essere sulle perpendicolari alla $\Omega\Omega$ condotte pei centri di superficie G_4, G_5, G_6, G_7, G_8, G_9, G_{10}, G_{11}, G_{12}, G_{13}, G_{14}, G'_{15}, G''_{15}, G_{16}, G_{17}, G_{18}, G_{19}, G_{20}, G_{21}, G_{22}, G_{23}, G_{24}, G_{25}, G'_{26}, G''_{26}, G_{27} e G_{28} delle figure graficamente rappresentanti i volumi dei detti solidi, si ottengono i punti:

o_4	ed	ω_4	per proiezioni del centro di gravità dell'interro fra le sezioni	2	e	3
o_5	»	ω_5	»	»	3	»	4
o_6	»	ω_6	»	»	4	»	5
o_7	»	ω_7	»	»	5	»	6
o_8	»	ω_8	»	»	6	»	7
o_9	»	ω_9	»	»	7	»	8
o_{10}	»	ω_{10}	»	»	8	»	9
o_{11}	»	ω_{11}	»	»	9	»	10
o_{12}	»	ω_{12}	»	»	10	»	11
o_{13}	»	ω_{13}	»	»	11	»	12
o_{14}	»	ω_{14}	»	»	12	»	13
o'_{15}	»	ω'_{15}	»	»	13	»	c
o''_{15}	»	ω''_{15}	»	»	c	»	14
o_{16}	»	ω_{16}	»	»	14	»	15
o_{17}	»	ω_{17}	»	»	15	»	F'

o_{18}	»	ω_{18}	per proiezioni del centro di gravità dello sterro fra le sezioni			F'	»	16
o_{19}	»	ω_{19}	»	»		16	»	17
o_{20}	»	ω_{20}	»	»		17	»	18
o_{21}	»	ω_{21}	»	»		18	»	19
o_{22}	»	ω_{22}	»	»		19	»	20
o_{23}	»	ω_{23}	»	»		20	»	21
o_{24}	»	ω_{24}	»	»		21	»	G'
o_{25}	»	ω_{25}	per proiezioni del centro di gravità dell'interro fra le sezioni			G'	»	22
o'_{26}	»	ω'_{26}	»	»		22	»	e
o''_{26}	»	ω''_{26}	»	»		e	»	23
o_{27}	»	ω_{27}	»	»		23	»	24
o_{28}	»	ω_{28}	»	»		24	»	25.

50. **Centri di gravità degli sterri e degli interri da farsi per compensazione.** — Non occupandoci del piccolo sterro e del corrispondente interro presso la sezione 1, giacchè sono essi di così piccola importanza da non meritare una determinazione rigorosa dei loro centri di gravità, dovremo considerare: l'interro ed il corrispondente sterro, le cui rappresentazioni grafiche (*Fig.* 92) sono date dalle figure c14.15 F′ T S d e 16.17.18.19 Y X V U F′; lo sterro ed il relativo interro, dei quali si hanno le rappresentazioni grafiche in 19.20.21 G′ A′ Z Y e 22 e f B′ G′.

Per l'interro, la cui rappresentazione grafica è data dalla figura c 14.15 F′ T S d, troveremo le tre coordinate ortogonali X′, Y′ ed Z′ del suo centro di gravità, la prima rispetto al piano verticale determinato dalla orizzontale proiettata verticalmente nel punto F′, la seconda rispetto al piano verticale determinato dalla retta ΩΩ e la terza rispetto al piano orizzontale determinato dalla retta ΦΦ, assunta di 500 metri al di sopra del piano di paragone, al quale si sono riferite le ordinate relative ai diversi punti del profilo longitudinale, ossia assunta in modo da passare pel punto 1 dello stesso profilo longitudinale. Per ottenere queste tre coordinate bisognerà dedurre dal disegno le distanze x''_{15}, x_{16} ed x_{17} dei punti ω''_{15}, ω_{16} ed ω_{17} dalla retta F′ϕ condotta per F′ perpendicolarmente alla ΩΩ, le distanze z''_{15}, z_{16} e z_{17} degli stessi punti dalla orizzontale ΦΦ, e le distanze y''_{15}, y_{16} ed y_{17} dei punti o''_{15}, o_{16} ed o_{17} dalla retta ΩΩ. Le distanze y si assumeranno come positive o come negative, secondo che i punti a cui si riferiscono sono sopra o sotto l'ultima indicata retta. Facendo quest'operazione abbiamo trovato

$x''_{15} = 185^{m},5$ $\quad y''_{15} = 0^{m},15$ $\quad z''_{15} = 6^{m},75$

$x_{16} = 117\ ,0$ $\quad y_{16} = 0\ ,20$ $\quad z_{16} = 7\ ,65$

$x_{17} = 43\ ,5$ $\quad y_{17} = 0\ ,08$ $\quad z_{17} = 8\ ,35.$

I volumi a cui si riferiscono le coordinate x''_{15}, y''_{15} e z''_{15}, x_{16}, y_{16} e z_{16}, x_{17}, y_{17} e z_{17} sono rispettivamente $301^{mc},163$, $316^{mc},152$ e $70^{mc},706$; e quindi, applicando il teorema dei momenti, si ha

$$X' = \frac{301,163 \times 185,50 + 316,152 \times 117 + 70,706 \times 43,50}{301,163 + 316,152 + 70,706} = 139^{m},43,$$

$$Y' = \frac{301,163 \times 0,15 + 316,152 \times 0,20 + 70,706 \times 0,08}{301,163 + 316,152 + 70,706} = 0^{m},17,$$

$$Z' = \frac{301,163 \times 6,75 + 316,152 \times 7,65 + 70,706 \times 8,35}{301,163 + 316,152 + 70,706} = 7^{m},33.$$

Il centro di gravità dell'interro graficamente rappresentato nella figura c 14.15 F′ T S d dista adunque di metri 139,43 dalla retta F′ ϕ, di metri 0,17 dalla retta $\Omega\Omega$, e di metri 7,33 dalla $\Phi\Phi$, e, mediante queste tre distanze, riesce agevole portare a sito la sua proiezione orizzontale G'_i e la sua proiezione verticale Γ'_i (h).

Per lo sterro, la cui rappresentazione grafica si ha nella figura 16.17.18.19 Y X V U F′, dicendo x_{18}, x_{19}, x_{20} ed x_{21} le distanze dei punti ω_{18}, ω_{19}, ω_{20} e ω_{21} dalla retta F′ϕ, z_{18}, z_{19}, z_{20} e z_{21} le distanze degli stessi punti dalla $\Phi\Phi$ e y_{18}, y_{19}, y_{20} ed y_{21} le distanze dei punti o_{18},

(h) Facciamo notare che, sia per i metodi stati seguìti nella valutazione delle aree e nella determinazione dei centri di superficie delle sezioni trasversali, sia per le regole state adottate nel calcolo dei volumi degli sterri e degli interri e pella ricerca dei loro centri di gravità, non si potranno considerare che quali risultamenti di approssimazione le distanze medie dei trasporti cui intendiamo arrivare. In questo genere di operazioni è inutile pretendere di ottenere risultati di grande esattezza, a motivo delle innumerevoli circostanze, le quali sfuggono ai nostri apprezzamenti, ed è giuocoforza di accontentarci di una mediocre approssimazione, e di cercare in tutto facilità e speditezza. In vista di ciò, abbiamo creduto conveniente di impiegare il regolo calcolatore nel fare le operazioni aritmetiche necessarie per la determinazione delle distanze medie dei trasporti, sicuri di giungere a risultati in armonia con tutte le altre operazioni concorrenti allo stesso scopo, con quel grado di approssimazione che è permesso sperare in tali ricerche.

o_{19}, o_{20} ed o_{21} dalla $\Omega\Omega$, abbiamo dal disegno dedotti i seguenti valori

$x_{18} = 8^m$	$y_{18} = -0^m,19$	$z_{18} = 8^m,90$
$x_{19} = 59$	$y_{19} = -0\ ,35$	$z_{19} = 9\ ,45$
$x_{20} = 125$	$y_{20} = -0\ ,25$	$z_{20} = 10\ ,05$
$x_{21} = 184$	$y_{21} = -0\ ,15$	$z_{21} = 10\ ,65.$

I volumi, ai quali si riferiscono le coordinate x_{18}, y_{18} e z_{18}, x_{19}, y_{19} e z_{19}, x_{20}, y_{20} e z_{20}, x_{21}, y_{21} e z_{21}, sono rispettivamente $2^{mc},981$, $160^{mc},726$, $295^{mc},102$ e $229^{mc},212$. Chiamando poi X'', Y'' e Z'' le coordinate del centro di gravità dello sterro in quistione rispetto ai già definiti piani ortogonali, si ha

$$X'' = \frac{2,981 \times 8 + 160,726 \times 59 + 295,102 \times 125 + 229,212 \times 184}{2,981 + 160,726 + 295,102 + 229,212} = 130,^m10,$$

$$Y'' = \frac{2,981 \times -0,19 + 160,726 \times -0,35 + 295,102 \times -0,25 + 229,212 \times -0,15}{2,981 + 160,726 + 295,102 + 229,212} = -0^m,24,$$

$$Z'' = \frac{2,981 \times 8.90 + 160.726 \times 9,45 + 295,102 \times 10.05 + 229,212 \times 10,65}{2,981 + 160,726 + 295,102 + 229,212} = 10^m,11.$$

Cosicchè il centro di gravità dello sterro graficamente rappresentato nella figura 16.17.18.19 Y X V U F' dista di metri 130,10 dalla retta F'ϕ, di metri 0,24 dalla retta $\Omega\Omega$, di metri 10,11 dalla retta $\Phi\Phi$; e, mediante queste tre distanze, tenendo anche conto del segno della coordinata Y'', riesce agevole portare a sito la sua proiezione orizzontale G''_s e la sua proiezione verticale Γ''_s.

Indicando con x_{22}, x_{23} ed x_{24} le distanze dei punti ω_{22}, ω_{23} ed ω_{24} dalla retta G'γ, con z_{22}, z_{23} e z_{24} le distanze degli stessi punti dalla $\Phi\Phi$ e con y_{22}, y_{23} ed y_{24} le distanze dei punti o_{22}, o_{23} ed o_{24} dalla $\Omega\Omega$, abbiamo ricavato dal disegno

$x_{22} = 102^m,4$	$y_{22} = -0^m,25$	$z_{22} = 11^m,05$
$x_{23} = 59\ ,7$	$y_{23} = -0\ ,20$	$z_{23} = 11\ ,35$
$x_{24} = 19\ ,3$	$y_{24} = 0\ ,00$	$z_{24} = 11\ ,45.$

I volumi ai quali si riferiscono le coordinate x_{22}, y_{22} e z_{22}, x_{23}, y_{23} e z_{23}, x_{24}, y_{24} e z_{24} sono rispettivamente di 282^{mc},601, di 478^{mc},827 e di 97^{mc}552; cosicchè, dicendo X‴, Y‴ e Z‴ le tre coordinate del centro di gravità dello sterro graficamente rappresentato nella figura 19.20.21 G′ A′ Z Y, la prima rispetto al piano verticale determinato dalla orizzontale verticalmente proiettata in G′, la seconda rispetto al piano verticale determinato dalla retta ΩΩ e la terza rispetto al piano orizzontale determinato dalla retta ΦΦ, si ha

$$X''' = \frac{282{,}601 \times 102{,}4 + 478{,}827 \times 59{,}7 + 97{,}552 \times 19{,}3}{282{,}601 + 478{,}827 + 97{,}552} = 69^{m},15,$$

$$Y''' = \frac{282{,}601 \times -0{,}25 + 478{,}827 \times -0{,}20}{282{,}601 + 478{,}827 + 97{,}552} = -0^{m},19,$$

$$Z''' = \frac{282{,}601 \times 11{,}05 + 478{,}827 \times 11{,}35 + 97{,}552 \times 11{,}45}{282{,}601 + 478{,}827 + 97{,}552} = 11^{m},26.$$

Il centro di gravità dello sterro graficamente rappresentato nella figura 19.20.21 G′ A′ Z Y dista adunque di metri 69,15 dalla G′γ, di metri 0,19 dall'orizzontale ΩΩ e di metri 11,26 dall'orizzontale ΦΦ, e quindi, con queste tre distanze, quando abbiasi anche riguardo al segno della Y‴, si possono costruire la sua proiezione orizzontale G_s''' e la sua proiezione verticale Γ_s'''.

Finalmente resta da determinarsi il centro di gravità dell'interro, la cui rappresentazione grafica si ha nella figura 22 *e f* B′ G′. Essendo x_{25} ed x'_{26} le distanze dei punti ω_{25} ed ω'_{26} dalla retta G′γ, z_{25} e z'_{26} le distanze degli stessi punti dalla retta ΦΦ, y_{25} ed y'_{26} le distanze dei punti o_{25} ed o'_{26} dalla ΩΩ, dal disegno abbiamo ricavato

$$x_{25} = 41^{m},7 \qquad y_{25} = -0^{m},50 \qquad z_{25} = 10^{m},9$$

$$x'_{26} = 74\ ,5 \qquad y'_{26} = -0\ ,60 \qquad z'_{26} = 10\ ,7.$$

I volumi ai quali si riferiscono le coordinate x_{25}, y_{25} e z_{25}, x'_{26}, y'_{26} e z'_{26} sono rispettivamente di 450^{mc},648 e 408^{mc},332, e, indicando con X^{iv}, Y^{iv} e Z^{iv} le tre coordinate del centro di gravità dell'ultimo definito interro, si ha

$$X^{iv} = \frac{450.648 \times 41{,}7 + 408.332 \times 74{,}5}{450{,}648 + 408{,}332} = 57^{m},29,$$

$$Y^{IV} = \frac{450{,}648 \times -0{,}5 + 408{,}332 \times -0{,}6}{450{,}648 + 408{,}332} = -0^{m},55,$$

$$Z^{IV} = \frac{450{,}648 \times 10{,}9 + 408{,}332 \times 10{,}7}{450{,}648 + 408{,}332} = 10^{m},80.$$

Il centro di gravità dell'interro graficamente rappresentato nella figura $22 e f B' G'$ è adunque distante: di metri 57,29 dalla retta $G'\gamma$; di metri 0,55 dalla retta $\Omega\Omega$; e di metri 10,80 dalla retta $\Phi\Phi$. Colle indicate distanze e tenendo conto del segno della Y^{IV}, riesce facile avere la proiezione orizzontale $G^{IV}{}_1$ e la proiezione verticale $\Gamma_1{}^{IV}$ di questo centro.

51. **Distanze orizzontali e differenze di livello fra i centri di gravità dei solidi componenti gli sterri e gli interri.** — Già si è detto nel numero 47 che, negli interri da farsi per imprestito fra la prima e la quattordicesima sezione, verrebbero impiegate terre da prendersi su una zona posta a sinistra della strada da costruirsi ed avente il suo asse alla distanza pressochè costante di 95 metri; che, negli interri da eseguirsi pure per imprestito al di là della sezione ventiduesima, si sarebbero adottate terre da scavarsi lungo una zona posta a dritta della strada e col suo asse alla distanza pressochè costante di 120 metri. Aggiungeremo ancora che lo scavo da farsi sulla prima zona si potrà spingere sotto la superficie naturale del terreno, quale si trova definita dal profilo longitudinale secondo l'asse della strada, fino alla media profondità di metri 2; e che quello da eseguirsi sulla seconda zona non potrà raggiungere una profondità maggiore di metri 1,40.

Lo scavo di metri cubi 2,938, da farsi a diritta dell'asse stradale fra le sezioni 1 e 2 e presso la sezione 1, è di così piccola entità che non vale la pena di procedere alla determinazione rigorosa della distanza orizzontale e della differenza di livello fra i centri di gravità dello sterro e del corrispondente interro. Considerando la forma della superficie naturale del terreno, quale dalle dette sezioni viene definita, immediatamente si comprende come il centro di gravità dell'interro debba trovarsi più basso di quello dello sterro, e quindi come non sia il caso di tener conto della differenza di livello dei centri stessi. Osservando poi che, tanto lo scavo, quanto il corrispondente rialzo, sono più considerevoli verso i bordi della strada che non in corrispondenza del suo asse, e che il rialzo leggiermente va allar-

gandosi dalla sezione 1 alla sezione 2, non si andrà lungi dal vero fissando di metri 4,70, ossia di circa i due terzi della larghezza totale della sezione 1, la distanza orizzontale fra i centri gravità degli indicati volumi corrispondenti.

Nell'interro da farsi a diritta dell'asse stradale fra le sezioni 1 e 2 dalla parte della sezione 2, si devono adoperare terre da prendersi sulla zona a sinistra della strada da costruirsi. Misurando la distanza $\overline{p_2 o_2}$ (*Fig.* 92) del punto o_2 dalla $\Omega\Omega$, essa si trova di metri 1,90; e quindi si può ammettere che la distanza orizzontale fra il centro di gravità dell'interro e quello del corrispondente sterro sia data dalla somma $95 + 1{,}9 = 96^m{,}9$. Misurando l'altezza $\overline{\pi_2 \omega_2}$ del punto ω_2 sul profilo 1.2 del terreno, quest'altezza si trova di metri 0,50; di maniera che, potendosi ritenere che sia di 1 metro la profondità del centro di gravità dello sterro sotto la superficie del terreno quale dal detto profilo longitudinale trovasi definita, risulta che è data da $1 + 0{,}50 = 1^m{,}50$ la differenza di livello fra i centri di gravità dell'interro e del corrispondente sterro.

Nell'interro da eseguirsi a sinistra dell'asse stradale fra le sezioni 1 e 2 dalla parte della sezione 2, si devono pure impiegare terre da scavarsi a sinistra dell'asse stesso. Si misureranno adunque le due distanze $\overline{p_3 o_3}$ e $\overline{\pi_3 \omega_3}$, le quali risultano rispettivamente di metri 2,20 e di metri 0,35, e si dirà: che la distanza orizzontale fra il centro di gravità dell'indicato interro ed il centro di gravità del corrispondente sterro è data dalla differenza $95 - 2{,}2 = 92^m{,}8$; e che la differenza di livello fra gli indicati centri risulta dalla somma $1 + 0{,}35 = 1^m{,}35$.

Per gli interri da farsi fra la sezione 2 e la sezione corrispondente al punto *c* del profilo longitudinale, si determineranno le distanze orizzontali $\overline{p_4 o_4}$, $\overline{p_5 o_5}$, $\overline{p_6 o_6}$, $\overline{p_7 o_7}$, $\overline{p_8 o_8}$, $\overline{p_9 o_9}$, $\overline{p_{10} o_{10}}$, $\overline{p_{11} o_{11}}$, $\overline{p_{12} o_{12}}$, $\overline{p_{13} o_{13}}$, $\overline{p_{14} o_{14}}$ e $\overline{p'_{15} o'_{15}}$, non che le altezze $\overline{\pi_4 \omega_4}$, $\overline{\pi_5 \omega_5}$, $\overline{\pi_6 \omega_6}$, $\overline{\pi_7 \omega_7}$, $\overline{\pi_8 \omega_8}$, $\overline{\pi_9 \omega_9}$, $\overline{\pi_{10} \omega_{10}}$, $\overline{\pi_{11} \omega_{11}}$, $\overline{\pi_{12} \omega_{12}}$, $\overline{\pi_{13} \omega_{13}}$, $\overline{\pi_{14} \omega_{14}}$ e $\overline{\pi'_{15} \omega'_{15}}$. Togliendo da 95 metri quelle distanze orizzontali che si trovano sotto la retta $\Omega\Omega$, ed invece aggiungendovi quelle che giaciono sopra la stessa retta (ciò che ha luogo per la $\pi'_{15} o'_{15}$), si ottengono le distanze orizzontali fra i centri di gravità degli interri ed i corrispondenti sterri. Le differenze di livello fra questi centri si hanno sommando i valori delle indicate altezze colla lunghezza di 1 metro.

Per l'interro da farsi fra la sezione corrispondente al punto *c* e la linea di passaggio corrispondente al punto F', si vogliono adoperare le terre che si ricaveranno dallo sterro fra l'or indicata linea di pas-

saggio e la sezione 19. Or bene, trovandosi le proiezioni orizzontali G_s' e G_s'' dei centri di gravità di questi solidi corrispondenti ben poco distanti dalla retta $\Omega\Omega$, si può ritenere che la distanza orizzontale fra gli indicati centri sia la distanza orizzontale del punto Γ_i' da F' aumenta della distanza orizzontale del punto Γ_s'' pure da F', e per conseguenza (Num. 50) di $139{,}43+130{,}10=269^m{,}53$. Considerando le proiezioni verticali Γ'_i ed Γ''_s degli stessi centri di gravità e le loro altezze sulla orizzontale $\Phi\Phi$, immediatamente si riconosce che il centro di gravità dello sterro è più alto del centro di gravità dell'interro; le terre adunque si dovranno trasportare in discesa coi veicoli carichi, e quindi non è il caso di tener conto della differenza di livello fra i detti centri.

Lo sterro da eseguirsi fra la sezione 19 e la linea di passaggio corrispondente al punto G' vuol essere impiegato nella formazione dell'interro fra la detta linea di passaggio e la sezione corrispondente al punto *e*. Del cammino orizzontale che devono percorrere le terre, bisogna considerare due parti: quella di metri 69,15 corrispondente alla distanza del punto G_s''' dalla retta $G'\gamma$, la quale, per essere il punto G' più alto del punto Γ_s''', deve essere percorsa in salita coi veicoli carichi, e sulla quale per conseguenza si deve tener conto della differenza di livello fra i punti G' ed Γ'''_s, e quella di metri 57,29 corrispondente alla distanza del punto G_i^{IV} dalla retta $G'\gamma$, la quale, per essere il punto G' più alto del punto Γ_i^{IV}, deve essere percorsa in discesa coi veicoli carichi, e sulla quale non devesi quindi tener conto della differenza di livello fra i punti G' e Γ_s^{IV}. L'altezza del punto G' sulla orizzontale $\Phi\Phi$, quale si deduce dal disegno, è di metri 11,40, e l'altezza del punto Γ_s''' sulla stessa retta è di metri 11,26; cosicchè si dovrà ammettere che le terre nel percorrere la distanza orizzontale di metri 69,15, debbano elevarsi di $11{,}40-11{,}26=0^m{,}14$.

Resta ancora da considerarsi l'interro da farsi fra la sezione corrispondente al punto *e* del profilo longitudinale e la sezione 25. Per quest'interro, come già si è dichiarato nel numero 47, si vogliono impiegare terre da prendersi a diritta della strada da costruirsi su una zona di terreno il cui asse ha dall'asse stradale la media distanza di 120 metri, e quindi si faranno le seguenti operazioni: traendo partito del disegno, si misureranno le distanze orizzontali $\overline{p''_{26}o''_{26}}$, $\overline{p_{27}o_{27}}$ e $\overline{p_{28}o_{28}}$, non che le altezze $\overline{\pi''_{26}\omega''_{26}}$, $\overline{\pi_{27}\omega_{27}}$ e $\overline{\pi_{28}\omega_{28}}$; alle trovate distanze orizzontali si aggiungeranno metri 120 per ottenere le distanze orizzontali fra i centri di gravità degli interri e dei cor-

rispondenti sterri; ed alle dette altezze si aggiungeranno metri 0,70 (mezza profondità dello scavo sotto la superficie del terreno quale viene definita dal profilo longitudinale) onde avere le differenze di livello fra gli stessi centri.

Seguendo le suesposte norme per la determinazione delle distanze orizzontali e delle differenze di livello fra i centri di gravità dei solidi componenti gli sterri e gli interri, abbiamo compilato il seguente quadro riassuntivo, in cui sono indicati: i diversi solidi d'interro; le distanze orizzontali fra i loro centri di gravità e quelli dei corrispondenti sterri; le differenze di livello per quelle vie che le terre devono percorrere in salita coi veicoli carichi; ed il rapporto fra la differenza di livello e la relativa distanza orizzontale, ossia la pendenza delle strade da farsi in salita coi veicoli carichi (*Fig.* 92).

Indicazione degli interri	Distanze orizzontali fra i centri di gravità degli interri e dei corrispondenti sterri	Differenze di livello corrispondenti alle vie in salita coi veicoli carichi	Pendenze delle vie in salita coi veicoli carichi
	m		
Dalla parte della sezione 1 a sinistra dell'asse stradale.	4,70		
Dalla parte della sezione 2 a destra dell'asse stradale.	96,90	m 1,50	0,016
Dalla parte della sezione 2 a sinistra dell'asse stradale.	92,80	1,35	0,015
Fra le sezioni 2 e 3	94,62	2,00	0,021
» 3 e 4	94,70	2,23	0,024
» 4 e 5	94,65	2,12	0,022
» 5 e 6	94,75	2,25	0,024
» 6 e 7	94,75	2,40	0,025
» 7 e 8	94,80	2,30	0,024
» 8 e 9	94,80	2,20	0,023
» 9 e 10	94,80	2,00	0,021
» 10 e 11	94,80	1,90	0,020
» 11 e 12	94,85	1,75	0,018
» 12 e 13	94,95	1,65	0,017
Fra la sezione 13 e la sezione corrispondente al punto *c*.	95,05	1,55	0,016
Fra la sezione corrispondente al punto *c* e la linea di passaggio corrispondente al punto *F'*.	269,53		
Fra la linea di passaggio corrispondente al punto *G'* e la sezione corrispondente al punto *e*.	69,15 57,29	0,14	0,002
Fra la sezione corrispondente al punto *e* e la sezione 23.	120,45	1,90	0,016
Fra le sezioni 23 e 24	120,30	2,50	0,021
» 24 e 25	120,35	2,90	0,024

52. **Distanze medie dei trasporti.** — Supporremo che i trasporti delle terre vogliansi eseguire mediante carriuole e carrette a mano, e, nella valutazione delle distanze medie pei volumi componenti i diversi interri, considereremo (*Arte di fabbricare, Lavori generali d'architettura civile, stradale ed idraulica*, Num. 19) : la sola distanza orizzontale fra il centro di gravità dello sterro e del relativo interro, quando questo è più basso di quello e che il cammino da farsi fra l'uno e l'altro è sempre in discesa nel senso secondo cui devono andare i veicoli carichi; diciotto volte la differenza di livello fra il centro di gravità dello sterro e del relativo interro, quando il centro di questo è più alto del centro di quello e che il rapporto della differenza di livello alla corrispondente distanza orizzontale è maggiore di $1/12 = 0{,}083$; la distanza orizzontale aumentata di sei volte la differenza di livello fra il centro di gravità dello sterro e del corrispondente interro, quando il secondo centro è più alto del primo e che il rapporto della differenza di livello alla relativa distanza orizzontale è minore di 0,083.

Attenendoci alle citate norme, abbiamo compilato la tavola che qui riportiamo, nella quale sono indicati : i diversi solidi d'interro ; i loro volumi ; e le distanze medie dei trasporti ad essi corrispondenti (*Fig.* 92).

Indicazione degli interri	Volumi degli interri	Distanze medie parziali
	mc	m
Dalla parte della sezione 1 a sinistra dell'asse stradale	2,938	4,70
Dalla parte della sezione 2 a destra dell'asse stradale	274,373	105,90
Dalla parte della sezione 2 a sinistra dell'asse stradale	396,241	100,90
Fra le sezioni 2 e 3	871,398	106,62
» 3 e 4	1913,461	108,08
» 4 e 5	1600,467	107,37
» 5 e 6	4135,507	108,25
» 6 e 7	2320,590	109,15
» 7 e 8	1865,270	108,60
» 8 e 9	1874,408	108,00
» 9 e 10	1475,353	106,80
» 10 e 11	1134,606	106,20
» 11 e 12	605,751	105,35
» 12 e 13	538,201	104,85
Fra la sezione 13 e la sezione corrispondente al punto *c*	70,664	104,35
Fra la sezione corrispondente al punto *c* e la linea di passaggio corrispondente al punto F'	688,021	269,53
Fra la linea di passaggio corrispondente al punto G' e la sezione corrispondente al punto *e*	858,980	127,28
Fra la sezione corrispondente al punto *e* e la sezione 23	999,098	131,85
Fra le sezioni 23 e 24	3143,437	135,30
» 24 e 25	1151,420	137,75

Determinate le distanze medie dei trasporti corrispondenti agli interri parziali, ossia ai volumi delle parti componenti, riesce facile calcolare la distanza media corrispondente all'aggregato di alcuni ed anche di tutti gli interri medesimi mediante la formola (*Arte di fabbricare, Lavori generali di architettura civile, stradale ed idraulica*, Num. 8)

$$\Delta = \frac{\Sigma V D}{W},$$

nella quale V rappresenta il volume di una qualunque delle parti componenti, D la distanza media corrispondente a questa parte, W la somma dei volumi di un complesso di parti componenti, $\Sigma V D$ la somma dei prodotti dei volumi di queste parti per le rispettive distanze medie e Δ la distanza media domandata. Chiamando poi

Δ_1 la distanza media del trasporto per le terre da impiegarsi nell'interro fra la sezione 1 e la sezione corrispondente al punto *c*,

Δ_2 la distanza media del trasporto per le terre da adoperarsi nell'interro fra la sezione corrispondente al punto *c* e la linea di passaggio corrispondente al punto F', e per quelle da impiegarsi nell'interro fra la linea di passaggio corrispondente al punto G' e la sezione relativa al punto *e*,

Δ_3 la distanza media del trasporto per le terre necessarie a fare l'interro fra la sezione determinata dal punto *e* e la sezione 25,

ed applicando la citata formola, si ha: per gli interri fra la sezione 1 e la sezione corrispondente al punto *c*, del complessivo volume di metri cubi 19079,

$$\Delta_1 = 107^m;$$

per gli interri fra la sezione corrispondente al punto *c* e la sezione corrispondente al punto *e*, del complessivo volume di metri cubi 1547,

$$\Delta_2 = 187^m;$$

per gli interri fra la sezione corrispondente al punto *e* e la sezione 25, del complessivo volume di metri cubi 5294,

$$\Delta_3 = 135^m.$$

53. **Occupazioni di terreni per lo stabilimento della strada.** — La quistione di determinare le superficie dei terreni occupati dalla

strada si riduce ad un semplicissimo problema di agrimensura. Facendo il rilevamento planimetrico di una zona di terreno a diritta ed a sinistra del definitivo asse stradale, coordinato questo rilevamento ad alcuni punti dall'asse medesimo, ed avendo l'avvertenza di considerare le divisioni di proprietà, i limiti di coltura, le strade, i corsi d'acqua e tutte quelle particolarità che possono influire sull'estensione e sul valore dei terreni che dalla strada verranno attraversati, riesce facile di farsi un piano, in iscala sufficientemente grande e generalmente non minore del 1/1000, colla rappresentazione dell'asse stradale, delle direzioni delle sezioni trasversali, delle linee che limitano la planimetria della strada progettata, e di tutte le particolarità state rilevate. Ritenendo poi che la zona di terreno da acquistarsi debba essere larga 2 metri di più della zona che effettivamente verrà occupata dalla strada, e che questa maggiore larghezza si debba prendere per metà a diritta e per metà a sinistra dell'asse stradale, il piano dei terreni da occuparsi e da acquistarsi verrà definito da due linee distanti di 1 metro da quelle che limitano la planimetria della strada. In quello che segue abbiamo dato un'esposizione del metodo da noi stato tenuto nella determinazione delle aree dei terreni da occuparsi per fare il tronco di strada fra la prima e la venticinquesima sezione, e fin d'ora dichiariamo che sono designate nella scala del 1/500 le figure 98, 99, 100, 102, 104, 105, 106, 107 e 108, che abbiamo creduto conveniente di costruire per fare quest'operazione.

Il piano del terreno, che in seguito alla costruzione della strada verrà occupato fra le sezioni trasversali 1 e 2, si può considerare come un pentagono, il quale assai facilmente si costruisce: col condurre la retta 1.2 (*Fig.* 98), rappresentante l'asse stradale fra le dette sezioni, e lunga per conseguenza metri 96,42 (*Fig.* 75); coll'elevare pei punti 1 e 2 (*Fig.* 98) le perpendicolari alla 1.2 e col portare su esse lunghezze eguali a quelle delle sezioni trasversali a diritta ed a sinistra dell'asse stradale (*Fig.* 76) aumentate di 1 metro, e quindi $\overline{1A} = 4^m,86$, $\overline{1B} = 4^m,20$, $\overline{2C} = 6^m,04$ e $\overline{2D} = 6^m,70$; finalmente col determinare a diritta della 1.2 il punto F (*Fig.* 98) di coordinate $\overline{1E} = 28^m,01$ ed $\overline{EF} = 4^m,30$, posto perciò sulla perpendicolare all'asse medesimo, la quale passa per quel estremo del fosso che nella figura 84 (Num. 43) trovasi rappresentato in *f*, e distante 1 metro da questo stesso estremo. L'area del definito pentagono si può ottenere assai facilmente scomponendolo nei tre trapezi indicati dai numeri 1, 2 e 3 (*Fig.* 98).

Il piano del terreno da occuparsi fra le sezioni trasversali 2 e 3 è un trapezio, intersecato da una lista (*Fig.* 99) di larghezza costante a motivo della strada comunale che esiste fra le sezioni stesse. La costruzione di questo piano riesce assai facile mediante la distanza fra le accennate sezioni che è di metri 52,78 (*Fig.* 75), mediante le lunghezze delle sezioni stesse a diritta ed a sinistra dell'asse stradale, le quali, pei dati del numero 38 e della figura 76, non che per l'indicato aumento di 1 metro, risultano (*Fig.* 99) $2\overline{A} = 6^m,04$, $2\overline{B} = 6^m,70$, $3\overline{C} = 6^m,84$ e $3\overline{D} = 7^m,25$; e mediante gli elementi stati rilevati per determinare l'andamento e le dimensioni della strada comunale. Fra le sezioni 2 e 3 converrà determinare separatamente le aree delle due figure quadrilatere giacenti a diritta ed a sinistra dell'or indicata strada, e ciascuna di queste figure si può scomporre in un trapezio ed in un triangolo, cosicchè si devono considerare fra le dette sezioni le aree delle quattro figure individuate dai numeri 1, 2, 3 e 4.

Il piano del terreno da occuparsi fra le sezioni trasversali 3 e 4 è pure un trapezio, del quale venne segnata una parte in continuazione della figura A B D C, onde far risultare la linea divisoria di coltura E F che trovasi fra le dette sezioni. L'area della figura C D F E si può ottenere collo scomporla nel trapezio 1 e nel triangolo 2; e si può ottenere l'area della figura compresa fra la retta E F e la sezione 4, calcolando quella del trapezio compreso fra F G e l'or indicata sezione e sottraendovi quindi quella del triangolo E G F.

Il piano del terreno da occuparsi fra le sezioni trasversali 4 e 5 è un trapezio, di cui si hanno basi ed altezza, essendo questa la distanza fra le dette sezioni, ossia di metri 64,77 (*Fig.* 75), ed essendo quelle le lunghezze delle sezioni stesse aumentate di 2 metri, ossia di metri 15,19 e di metri 15,22 (*Fig.* 76).

Il terreno da occuparsi fra le sezioni trasversali 5 e 6, in parte cade dove l'asse della strada da costruirsi è rettilineo ed in parte dove quest'asse è circolare. Per ottenere l'area di questo terreno conviene costruire il relativo piano, ed ecco quali norme si possono seguire nel fare quest'operazione. Tracciata la parte rettilinea 5 E (*Fig.* 100) dell'asse stradale, la quale, come risulta dai dati numerici scritti sulla figura 75, ha la lunghezza di metri 96,04, si costruisca la parte circolare E 6 col raggio di 500 metri e colla lunghezza di metri

46,81 (*i*). Pei punti 5 e 6 si conducano due normali all'asse; su queste normali si portino le lunghezze $\overline{5A} = 7^m,29$, $\overline{5B} = 7^m,93$, $\overline{6C} = 8^m,42$ e $\overline{6D} = 8^m,56$, eguali a quelle delle sezioni trasversali 5 e 6 (*Fig.* 76) a diritta ed a sinistra dell'asse stradale, aumentate di 1 metro. Fatto questo, importa costrurre le linee limitanti il terreno fra A e C (*Fig.* 100) e fra B e D. Perciò si conduca per E la perpendicolare alla 5E, e, come in modo dimostrativo appare dalla figura 101, pei punti A e B s'immaginino descritte le linee AFG e BHI parallele all'asse 5EG. Le lunghezze $\overline{GC}$ ed $\overline{ID}$ si possono considerare come note, perchè eguali alle differenze $\overline{6C} - \overline{5A}$ e $\overline{6D} - \overline{5B}$. Come note si possono pure considerare le lunghezze AFG e BHI, giacchè le parti rettilinee $\overline{AF}$ e $\overline{BH}$ sono eguali a $\overline{5E}$ e le parti curvilinee FG ed HI sono archi simili all'arco circolare E6, la prima col raggio eguale a quello dell'arco E6 diminuito della lunghezza $\overline{5A}$, e la seconda col raggio eguale a quello dello stesso arco aumentato della lunghezza $\overline{5B}$. Le lunghezze $\overline{FK}$ ed $\overline{HL}$ si possono assumere siccome date da

$$\overline{FK} = \frac{\overline{GC} \times \overline{AF}}{AFG},$$

$$\overline{HL} = \frac{\overline{ID} \times \overline{BH}}{BHI},$$

e così, calcolando e portando a posto queste lunghezze, restano determinate le due linee AK e BL. In quanto alle due curve che devono congiungere il punto K col punto C ed il punto L col punto D, si possono determinare alcuni dei loro punti con una regola analoga a quella che ha servito a trovare i punti K ed L. Così, condotti per K e per L i due archi circolari K*g* ed L*i* concentrici di E6, si troverà sulla KC un punto qualunque *k* posto sul raggio passante pel punto *f* determinando *fk* col porre

$$\overline{fk} = \frac{\overline{gC} \times \overline{Kf}}{Kfg},$$

(*i*) Non potendosi trovare il centro dell'arco circolare, si può esso descrivere per punti col riferirlo alla sua tangente in E e quindi col far uso dei dati contenuti nella prima tavola del numero 20.

e si troverà sulla L D un punto qualunque l posto sul raggio passante pel punto h deducendo la lunghezza $\overline{hl}$ dalla

$$\overline{hl} = \frac{\overline{iD} \times \overline{Lh}}{Lhi}.$$

Determinati alcuni punti delle curve K C ed L D, si possono esse assai facilmente tracciare, e così trovasi ultimato il piano del terreno da misurarsi fra le sezioni trasversali 5 e 6. L'area di questo terreno facilmente si può ottenere scomponendo la figura A B L D C K, che ne rappresenta il piano, nel trapezio rettilineo A B L K, nel trapezio mistilineo K L M C, nel triangolo C M D da considerarsi siccome rettilineo, giacchè si può ritenere che l'arco M D si confonda colla sua corda.

Il terreno da occuparsi fra le sezioni trasversali 6 e 7 cade dove l'asse della strada è in curva, e quindi il suo piano deve risultare un quadrilatero con due lati rettilinei in A B e C D (*Fig.* 102) e con due lati curvilinei in A C e B D. I due lati rettilinei sono normali all'arco 6.7, e le loro lunghezze sono date da $\overline{6A} = 8^m,42$, $\overline{6B} = 8^m,56$, $\overline{7C} = 7^m,91$ e $\overline{7D} = 8^m,38$. Per tracciare i lati curvilinei, come in modo dimostrativo appare dalla figura 103, s'immagineranno descritti i due archi circolari C E e D F concentrici all'arco 6.7, si determineranno raggi e lunghezze di questi due archi, si dedurranno le lunghezze E A ed F B, e si troveranno alcuni punti delle due curve A C e B D col metodo già stato indicato per la descrizione dei due archi K C ed L D (*Fig.* 101). Così, si determinerà su A C (*Fig.* 103) il punto c posto sul raggio passante pel punto f dell'arco circolare E C, deducendo $\overline{fc}$ dalla

$$\overline{fc} = \frac{\overline{EA} \times Cf}{CE},$$

e si determinerà su B D il punto d posto sul raggio passante pel punto h dell'arco circolare F D, trovando $\overline{hd}$ col porre

$$\overline{hd} = \frac{\overline{FB} \times Dh}{DF}.$$

Una volta trovati alcuni punti e descritte le due curve A C e B D,

si potrà ottenere l'area della figura A B D C scomponendola nel trapezio mistilineo A B G C e nel triangolo C G D da considerarsi come rettilineo, giacchè si può ritenere che l'arco G D si confonda colla sua corda.

Quanto si è detto per la costruzione del piano del terreno fra le sezioni trasversali 6 e 7, si applica per avere il piano del terreno da occuparsi fra le sezioni trasversali 7 ed 8 (*Fig.* 104). In questo secondo piano bisognerà anche far risultare la zona di terreno occupata dal canale che scorre fra le ultime indicate sezioni; e, tanto l'area della figura situata a diritta, quanto l'area della figura situata a sinistra dell'accennata zona, si otterranno col metodo stato adottato per la figura 102, e quindi scomponendo ciascuna di esse in un trapezio mistilineo, ed in un triangolo che si potrà considerare come rettilineo.

Le norme, state date per la costruzione del piano e per la valutazione dell'area del terreno fra le sezioni 6 e 7, si applicano per le stesse ricerche fra le sezioni trasversali 8 e 9, 9 e 10, 10 e 11, 11 e 12, 12 e 13, 13 e 14, 14 e 15.

Fra le sezioni 15 e 16 (*Fig.* 105) termina il rialzo, e quindi si trovano le origini dei fossi dello scavo successivo. Importa adunque che fra queste sezioni si determinino quei due vertici del terreno da occuparsi, i quali sono sulle normali all'asse 15.16, definite dai due punti *g* ed *h* (*Fig.* 85). Perciò, sulla normale A B all'asse 15.16, si portino le due lunghezze $\overline{15I}$ e $\overline{15K}$ di metri 3,30 (Num. 43); si descrivano i due archi circolari, concentrici dell'arco 15.16, passanti pei due punti I e K; e si determinino su essi le lunghezze I *g* e K *h* rispettivamente di metri 18,12 e di metri 6,52. Conducendo pei punti *g* ed *h* le direzioni dei raggi e portando su esse le lunghezze $\overline{gG}$ ed $\overline{hH}$ di 1 metro, si hanno i punti domandati. I punti A, B, D e C si determinano come già si è indicato ragionando sulle figure 98, 99, 100, 101, 102 e 103; e per la descrizione delle curve G A, G C, H B ed H D si possono adottare i procedimenti che vennero suggeriti per descrivere le curve K C, L D, A C e B D delle ultime due citate figure. Fatto il piano del terreno fra le sezioni 15 e 16, si tirino pei punti G, C ed H altrettante parallele alla A B e se ne ottenga l'area considerando i tre trapezi mistilinei A B H L, L H M G, G M N C ed il triangolo C N D che si può ritenere come rettilineo, giacchè la curva N D si confonde alla sua corda.

Il piano del terreno da occuparsi fra le sezioni trasversali 16 e 17

(*Fig.* 106) si può costruire colle norme state date ragionando sulla figura 102, coll'avvertenza di segnare su esso la linea spezzata HGFE, la quale si suppone demarcare un limite di proprietà. Conducendo pei punti F ed N le rette IK ed NL parallele ad AB, l'area da determinarsi fra la sezione trasversale 16 e la spezzata HGFE si può considerare come risultante dalla somma delle aree dei trapezi mistilinei ABKI ed INLF, del triangolo rettilineo NGL e del triangolo FMK, il quale si può pur considerare come rettilineo, giacchè si può ritenere che la curva KM si confonda colla sua corda. Togliendo l'area che così si troverà da quella della figura ABDC, risulterà l'area compresa fra la spezzata HGFE e la sezione trasversale 17.

Per la costruzione dei piani e per la determinazione delle aree delle porzioni di terreno comprese fra le sezioni trasversali 17 e 18, 18 e 19, 19 e 20, valgono le norme già state date ragionando sulle figure 102 e 103.

Il terreno, che deve essere occupato fra le sezioni trasversali 20 e 21 (*Fig.* 107), cade in parte dove l'asse della strada da costruirsi è curvilineo, in parte dove quest'asse è rettilineo. Siamo adunque in un caso analogo a quello stato considerato nella figura 100, cosicchè non occorre parola sul modo di costrurre il piano e di determinare la relativa area.

Fra le sezioni 21 e 22 (*Fig.* 108) termina lo scavo, e quindi si trovano le estremità dei due fossi che fiancheggiano la strada. Fra queste sezioni bisogna adunque determinare quei due vertici del terreno da occuparsi, i quali sono su quelle normali all'asse 21.22 che trovansi definite dai due punti *i* e *k* (*Fig.* 86). Perciò si portino, sulla retta 21.22 ed a partire dal punto 21, le due lunghezze $\overline{21\,L}$ e $\overline{21\,M}$, le quali siano rispettivamente di metri 43,73 e di metri 35,14 (Num. 43); e per L ed M si elevino le due perpendicolari $\overline{LI}$ ed $\overline{MK}$ colla lunghezza di metri 4,30. Determinati i punti A, B, C e D col portare $21\,A = 5^{m},40$, $\overline{21\,B} = 5,24$, $\overline{22\,C} = 6,06$ e $\overline{22\,D} = 6^{m},64$, si ha nella figura ABKDCI il piano del terreno da occuparsi fra le sezioni trasversali 21 e 22, la cui area risulterà dalla somma delle aree dei quattro trapezi marcati coi numeri 1, 2, 3 e 4.

Essendo rettilineo l'asse della strada da costruirsi fra le sezioni trasversali 22 e 25, e non essendovi linee di passaggio fra queste sezioni, i piani delle tre porzioni di terreno da occuparsi fra le sezioni 22 e 23, 23 e 24, 24 e 25 risultano tre trapezi. Le altezze di

questi trapezi sono le distanze delle sezioni stesse, quali si trovano marcate sulla figura 75; e le loro basi sono le lunghezze delle sezioni stesse, quali si deducono dalla figura 76, aumentate di 2 metri.

Dal registro che qui sotto riportiamo, chiaramente appaiono i quantitativi dei terreni occupati fra le sezioni trasversali 1 e 25, e tali quantitativi, affinchè possano servire a fissare le indennità da corrispondersi per occupazioni, trovansi distinti per proprietà e per coltura.

Indicazione delle proprietà	Indicazione delle sezioni	N° d'ord^e delle caselle fra due sezioni succes.	Fattori		Prodotti		Aree doppie
			Basi	Altezze	Positivi	Negativi	
			m	m	mq		
A.....	1 e 2	1	9,16	28,01	256,57		
		2	10,34	68,41	707,36		
		3	10,90	96.42	1050,98		
	2 » 3	1	25,54	4,75	121,31		
		2	12,80	2,40	30,72		
					2166,94		mq 2166,94
B.....	2 » 3	3	13,00	2,45	31,85		
		4	27,09	42,50	1151,32		
	3 » 4	1	28,09	10,10	283,71		
		2	14,00	8,20	114,80		
					1581,68		1581,68
		3	29,19	78,20	2282,66		
		2				114,80	
	4 » 5	1	30,41	64,77	1969,66		
	5 » 6	1	31,62	96,04	3036,78		
		2	164,95	9,20	1517,54		
		3	16,98	1,55	26,32		
	6 » 7	1	262,10	9,25	2424,42		
		2	16,25	2,40	39,00		
	7 » 8	1	31,75	12,20	387,35		
		2	15,75	0,60	9,45		
					11693,18	114,80	11578,38
C.....	7 » 8	3	185,95	9,63	1790,70		
		4	15,25	1,50	22,87		
	8 » 9	1	243,20	9,42	2290,94		
		2	15,10	2,50	37,73		
	9 » 10	1	227,20	9,10	2067,52		
		2	13,50	2,20	29,70		
	10 » 11	1	171,60	10,08	1729,73		
		2	13,50	1,80	24,30		
				Da riportarsi	7993,49		

Quantità per ogni genere di coltura					Osservazioni
Boschi	Pascoli	Prati	Campi	Vigneti	
				mq 1083,47	
			mq 790,84		
		mq 5789,19			

Indicazione delle proprietà	Indicazione delle sezioni	N° d'ord° delle casel le fra due sezioni success.	Fattori		Prodotti		Aree doppie
			Basi	Altezze	Positivi	Negativi	
				Riporto	mq 7993,49		
			m	m			
	11 e 12	1	104,00	9,62	1000,48		
		2	12,30	0,80	9,84		
	12 » 13	1	140,80	8,00	1126,40		
		2	11,40	1,10	12,54		
	13 » 14	1	114,40	9,02	1031,89		
		2	9,50	1,00	9,50		
	14 » 15	1	189,00	9,24	1746,36		
		2	8,70	1,75	15,22		
	15 » 16	1	17,20	6,30	108,36		
		2	17,40	11,50	200,10		
		3	109,80	9,60	1053,88		
		4	9,30	1,50	13,95		
	16 » 17	1	95,00	8,48	805,60		
		2	13,95	0,70	9,76		
		3	6,80	1,80	12,24		
		4	2,50	1,50	3,75		
					15153,36		mq 15153,36
D.....	16 » 17	5	172,80	8,18	1413,50		
		6	9,40	1,50	14,10		
		1					
		2				mq 831,35	
		3					
		4					
	17 » 18	1	163,52	9,12	1491,30		
		2	10,27	1,20	12,32		
	18 » 19	1	105,50	8,36	881,98		
		2	10,83	0,75	8,11		
	19 » 20	1	90,40	8,45	763,83		
		2	11,67	0,70	8,17		
	20 » 21	1	23,40	6,30	147,42		
		2	11,60	0,25	2,90		
		3	22,20	51,34	1138,87		
				Da riportarsi	5882,50	831,35	

Quantità per ogni genere di coltura					Osservazioni
Boschi	Pascoli	Prati	Campi	Vigneti	
	mq 7576,68				

Indicazione delle proprietà	Indicazione delle sezioni	N° d'ord.e delle caselle fra due sezioni success.	Fattori		Prodotti		Aree doppie
			Basi	Altezze	Positivi	Negativi	
				Riporto	mq 5882,50	mq 831,35	
			m	m			
	21 e 22	1	9,70	43,73	424,18		
		2	9,54	35,14	335,24		
		3	10,36	47,98	497,07		
		4	10,94	56,57	618,88		
	22 » 23	1	29,61	60,34	1786,67		
	23 » 24	1	38,97	67,06	2613,33		
	24 » 25	1	45,80	22,95	1051,11		
					13208,98	831,35	mq 12377,63

Quantità per ogni genere di coltura					Osservazioni
Boschi	Pascoli	Prati	Campi	Vigneti	
6188,81					

La determinazione delle linee, le quali a dritta ed a sinistra dell'asse stradale limitano la zona di terreno da occuparsi, è solo approssimata, e quindi i risultati ottenuti non si possono ritenere come esattamente conformi a quanto sarà per verificarsi dopo l'esecuzione della strada. Può dunque avvenire che, all'atto di stabilire le indennità che definitivamente si dovranno corrispondere per espropriazioni, le aree dei terreni da occuparsi (*l*), quali da noi vennero trovate, si debbano modificare in più od in meno.

54. **Occupazioni provvisorie di terreni per scavare e trasportare le terre d'imprestito.** — In conformità di quanto venne stabilito nel numero 47 pel tronco di strada che noi consideriamo, si devono fare con terre d'imprestito: il rialzo del quantitativo di metri cubi 19076 fra la sezione trasversale 1 e la sezione trasversale corrispondente al punto *c* (*Fig.* 92); ed il rialzo del quantitativo di metri cubi 5294 fra la sezione trasversale corrispondente al punto *e* e la sezione trasversale 25. Or bene, per quanto venne ammesso fin dal principio del numero 51 sulla posizione delle zone e sulla profondità degli scavi da farsi per avere le terre d'imprestito, con sufficiente approssimazione per la determinazione preliminare di cui ci occupiamo, si può ritenere: che la superficie S da occuparsi provvisoriamente, per fare lo scavo di metri cubi 19076 colla media profondità di metri 2, sia data da

$$S = \frac{19076}{2} = 9538^{mq};$$

e che la superficie S', da occuparsi pure provvisoriamente per fare lo scavo di metri cubi 5294 colla media profondità di metri 1,4, sia

$$S' = \frac{5294}{1,4} = 3781^{mq}.$$

Non basta però avere il quantitativo dei terreni da occuparsi provvisoriamente per le terre d'imprestito, importa che esso venga suddiviso per proprietà e per colture. Un piano della località, in cui le dette terre si devono scavare, assai facilmente conduce allo scopo, e, nel caso particolare che trattiamo, abbiamo ottenuti i risultamenti contenuti nel seguente quadro:

(*l*) La ricerca preventiva delle aree dei terreni da occuparsi, essendo un'operazione di sola approssimazione, può anche essere fatta mediante un planimetro.

Indicazioni delle proprietà da occuparsi provvisoriamente per scavare le terre d'imprestito.	Quantità per ogni genere di coltura				
	Boschi	Pascoli	Prati	Campi	Vigneti
A.....					1095 mq
B.....			3914 mq	616 mq	
C.....		3913 mq			
D.....	3781 mq				

Per trasportare le terre da scavarsi lungo le zone di terreno, di cui approssimativamente abbiamo data la superficie, occorre occupare per qualche tempo il terreno interposto fra esse e quello da acquistarsi per la costruzione della strada, ed anche di quest'occupazione converrà in qualche modo rendersi conto. Si osservi perciò: che la zona di terreno, lungo la quale si deve eseguire lo scavo per prendere le terre da adoperarsi nel rialzo fra la sezione trasversale 1 e la sezione trasversale corrispondente al punto *c*, ha la lunghezza di circa metri 903; che la semi-larghezza di questa zona si può ritenere come data dalla metà del quoziente che si ottiene dividendo la sua superficie di metri quadrati 9538 per la lunghezza di metri 903, e che quindi questa semi-larghezza risulta di metri 5,28; che la zona di terreno, occupata dalla parte di strada che trovasi a sinistra dell'asse stradale fra la sezione trasversale 1 e la sezione trasversale corrispondente al punto *c*, ha la larghezza media di metri 5,95. Togliendo metri 11,23, ossia la somma di $5^m,28$ con $5^m,95$, dalla distanza media 95 metri fra l'asse stradale e la zona su cui si devono prendere le terre d'imprestito per l'interro da farsi fra la sezione 1 e la sezione corrispondente al punto *c*, nella differenza $83^m,77$ si ha la larghezza media della zona di terreno sulla quale si dovranno effettuare i trasporti pel detto interro. Siccome poi si può ritenere che

questa zona abbia la lunghezza di metri 903, la sua superficie S_1 viene data da

$$S_1 = 903 \times 83{,}77 = 75644^{mq}.$$

Procedendo analogamente per la zona di terreno, attraverso alla quale si dovranno effettuare i trasporti per l'interro da eseguirsi fra la sezione trasversale corrispondente al punto *e* e la sezione trasversale 25, la sua superficie S'_1 risulta

$$S'_1 = 128 \times 98{,}71 = 12635^{mq}.$$

Suddividendo poi queste superficie per proprietà e colture, abbiamo ottenuti i risultamenti contenuti nel quadro che qui presentiamo:

Indicazione delle proprietà sulle quali si devono effettuare i trasporti per le terre d'imprestito.	Quantità per ogni genere di coltura				
	Boschi	Pascoli	Prati	Campi	Vigneti
A.....					8703 mq
B.....			31103 mq	4904 mq	
C.....		30934 mq			
D.....	12635 mq				

CAPITOLO IV.

Spese occorrenti pei movimenti di terra e per le occupazioni di terreni.

55. **Analisi dei prezzi degli scavi e dei trasporti.** — Per stabilire convenientemente i prezzi degli scavi, è necessario conoscere la natura delle terre da scavarsi espressa in uomini (*Arte di fabbricare, Materiali da costruzione ed analisi dei loro prezzi*, Num. 40 e 41), e nel caso particolare che trattiamo, supporremo: che sia terra da un uomo e mezzo quella da scavarsi per fare l'interro fra la sezione 1 e la sezione corrispondente al punto *c* (*Fig.* 92); che sia terra da due uomini quella da impiegarsi nella formazione dei due interri fra la sezione corrispondente al punto *c* e la sezione corrispondente al punto *e*; e che sia terra da due uomini e mezzo quella da scavarsi per la formazione del rimanente interro. Nel prezzo dello scavo poi comprenderemo anche il paleggiamento delle terre alla distanza di 4 metri, ossia di uno sbraccio orizzontale; e stabiliremo di lire 1,80 la mercede giornaliera di un terraiuolo.

Nel determinare i prezzi dei trasporti, supporremo che vogliansi impiegare: le carriuole per gli interri da farsi fra la sezione 1 e la sezione corrispondente al punto *c*; le carrette a mano pel rimanente interro. Nei prezzi dei trasporti considereremo ben anche il carico e lo scarico; non dimenticheremo che, avendo noi convenuto di comprendere nello scavo il paleggiamento ad uno sbraccio orizzontale, dovremo diminuire di 4 metri le distanze medie dei trasporti, state trovate nel numero 52; e stabiliremo di lire 4,80 la mercede giornaliera di una carretta a mano.

Le analisi degli scavi e dei trasporti da farsi nel nostro caso particolare, instituite in base alle norme che già abbiamo dato nei numeri 405, 406 e 407 di quel nostro volume sull'arte di fabbricare, intitolato *Costruzioni civili, stradali ed idrauliche e analisi dei loro prezzi*, trovansi riassunte nel seguente quadro:

Numero d'ordine	Oggetto delle analisi	Quantità dei componenti per unità di misura	Prezzi elementari	Prodotti parziali	Prezzi per unità di misura
1	Prezzo dello scavo di 1 metro cubo di terra da un uomo e mezzo e del trasporto con carriuole alla distanza media di metri 103, ossia a ricambii 3,43.	Giornate 0,10 di terraiuolo per lo scavo e pel paleggiamento ad uno sbraccio orizzontale	1 1,80	1 0,18	
		Giornate 0,067 di manovale pel carico e tempo perduto » 0,206 » pel trasporto » 0,007 » per lo scarico e tempo perduto			
		Giornate 0,280 di manovale	1,80	0,50	1
				0,68	0,68
2	Prezzo dello scavo di 1 metro cubo di terra da due uomini e del trasporto con carrette a mano alla distanza media di metri 183, ossia a ricambii 6,1.	Giornate 0,13 di terraiuolo per lo scavo e pel paleggiamento ad uno sbraccio orizzontale	1,80	0,24	
		Giornate 0,041 di carretta pel carico e tempo perduto » 0,061 » pel trasporto » 0,016 » per lo scarico e tempo perduto			
		Giornate 0,118 di carretta a mano	4,80	0,57	
				0,81	0,81
3	Prezzo dello scavo di 1 metro cubo di terra da due uomini e mezzo e del trasporto con carrette a mano alla distanza media di metri 131, ossia a ricambi 4,37.	Giornate 0,17 di terraiuolo per lo scavo e pel paleggiamento ad uno sbraccio orizzontale	1,80	0,30	
		Giornate 0,041 di carretta pel carico e tempo perduto » 0,044 » pel trasporto » 0,016 » per lo scarico e tempo perduto			
		Giornate 0,101 di carretta a mano	4,80	0,48	
				0,78	0,78

Dalle instituite analisi risulta adunque: che costa lire 0,68 ogni metro cubo di terra da porsi in interro fra la sezione 1 e la sezione corrispondente al punto *c*; che apporta la spesa di lire 0,81 ogni metro cubo di terra da adoperarsi in interri fra le sezioni corrispondenti ai punti *c* ed *e*; finalmente, che si deve ritenere di lire 0,78 il prezzo di ogni metro cubo di terra da impiegarsi per l'interro compreso fra la sezione trasversale corrispondente al punto *e* e la sezione trasversale 25.

56. **Prezzi dell'unità di superficie dei terreni occupati.** — Tre categorie di terreni si devono considerare nello stabilimento di questi prezzi: quei terreni che permanentemente dovranno essere occupati in seguito alla costruzione della strada; quegli altri che provvisoriamente si dovranno occupare per praticarvi gli scavi delle terre d'imprestito; e per ultimo quelli che pure provvisoriamente verranno occupati pei trasporti. Tali prezzi poi si dovranno stabilire, per le diverse colture che nei detti terreni vi sono, in correlazione ai valori dei fondi ed ai loro prodotti in seguito a regolare e giudiziosa stima. Nel quadro che qui riportiamo, abbiamo riassunto i prezzi, riferiti al metro quadrato, che crediamo conveniente di poter stabilire nel nostro caso particolare.

Indicazione delle colture	Prezzi per ogni metro quadrato di terreno		
	Definitivamente occupati	Provvisoriamente occupati per scavi	Provvisoriamente occupati per passaggi
Boschi	1 0,20	1 0,05	1 0,006
Pascoli	0,10	0,025	0,002
Prati	0,50	0,12	0,015
Campi	0,32	0,08	0,008
Vigneti	0,40	0,10	0,015

57. **Spese pei movimenti di terra e per le occupazioni dei terreni.** — Limiteremo questa ricerca al tronco di strada compreso fra le sezioni trasversali 1 e 25 (*Fig.* 75 e 76), pel qual tronco abbiamo: nel numero 52 i tre distinti volumi delle terre da trasportarsi colle relative distanze medie; nel numero 55 il costo di ogni metro cubo degli indicati tre volumi; nel numero 53 i quantitativi, distinti per proprietà e colture, dei terreni da occuparsi definitivamente; nel numero 54 i quantitativi, pure distinti per proprietà e colture, dei terreni da occuparsi provvisoriamente; e finalmente nel numero 56 i valori per ogni metro quadrato, tanto dei terreni da occuparsi in modo definitivo, quanto di quelli da occuparsi in modo provvisorio. Con tutti questi elementi riesce facile trovare le spese per movimenti di terra e per occupazioni di terreni riferentisi al definito tronco, ed ecco il registro che può convenire per inscrivervi i dati ed i risultamenti relativi a questa determinazione:

Numero d'ordine	Indicazione dei movimenti di terra e delle occupazioni di terreni	Quantità	Prezzi per unità di misura	Prezzi parziali	Prezzi totali
	I. — *Movimenti di terra.*				
1	Scavo di terra da un uomo e mezzo e suo trasporto alla distanza media di 107 metri.	19079^{mc}	1 0,68	1 12973,72	
2	Scavo di terra da due uomini e suo trasporto alla distanza media di 187 metri.	1547	0,81	1253,07	
3	Scavo di terra da due uomini e mezzo e suo trasporto alla distanza media di 135 metri.	5294	0,78	4129,32	1
				18356,11	18356,11
	II. — *Occupazioni permanenti di terreni.*				
4	Terreno a vigneto del proprietario A.....	1083^{mq}	0,40	433,20	
5	Terreno ad aratorio del proprietario B.....	791	0,32	253,12	
6	Terreno a prato del proprietario B.....	5789	0,50	2894,50	
7	Terreno a pascolo del proprietario C.....	7577	0,10	757,70	
8	Terreno a bosco del proprietario D.....	6189	0,20	1237,80	
				5576,32	5576,32
	III. — *Occupazioni provvisorie di terreni per terre d'imprestito.*				
9	Terreno a vigneto del proprietario A.....	1095	0,10	109,50	
10	Terreno ad aratorio del proprietario B.....	616	0,08	49,28	
11	Terreno a prato del proprietario B.....	3914	0,12	469,68	
12	Terreno a pascolo del proprietario C.....	3913	0,025	97,82	
13	Terreno a bosco del proprietario D.....	3781	0,05	189,05	
				915,33	915,33
				Da riportarsi	24847,76

Numero d'ordine	Indicazione dei movimenti di terra e delle occupazioni di terreni	Quantità	Prezzi per unità di misura	Prezzi parziali	Prezzi totali
				Riporto	24847,76
	IV. — *Occupazioni provvisorie di terreni pei trasporti.*				
14	Terreno a vigneto del proprietario A.....	8703mq	1 0,015	1 130,54	
15	Terreno ad aratorio del proprietario B.....	4904	0,008	39,23	
16	Terreno a prato del proprietario B.....	31103	0,015	466,54	
17	Terreno a pascolo del proprietario C.....	30934	0,002	61,87	
18	Terreno a pascolo del proprietario D.....	12635	0,006	75,81	
				773,99	773,99
	Totale per movimenti di terra ed occupazioni di terreni				25621,75

L'ultima somma ci porta adunque a conchiudere che ascendono a lire 25621,75 le spese occorrenti per movimenti di terra e per occupazioni permanenti e provvisorie di terreni, onde fare il tronco di strada compreso fra la prima e la venticinquesima sezione trasversale, lungo metri 1644,27.

Osservazioni. — Quando si volesse l'intiero costo del tronco di strada da noi considerato, oltre le spese occorrenti per movimenti di terra e per occupazioni di terreni, si dovrebbero ancora valutare quelle per tutte le opere d'arte, quelle per inghiaiamento o formazione del *ballast*, e persino quelle minori per termini, per indicatori di distanze e per ogni sorta di oggetti fissi.

Il costo delle opere d'arte deve essere dedotto dai loro progetti, e, nel progresso di quest'appendice, accingendoci allo studio completo di alcune opere d'arte, non tralascieremo di far vedere come si deducono le spese occorrenti per la loro costruzione.

Per rapporto all'inghiaiamento (*ballast*), sapendo che superiormente deve esso avere la larghezza AB (*Fig.* 109) di metri 3,40 (Num. 33), che ciascuna delle proiezioni orizzontali $\overline{FD}$ e $\overline{GE}$ delle scarpe late-

rali deve risultare di metri 0,60, e che le due rette M O ed M P hanno la pendenza di 1/100, stabilita di metri 0,50 l'altezza M C nel mezzo, riesce facile calcolare la superficie della sua sezione trasversale F A B G M. Nel prodotto di questa superficie per la lunghezza dell'asse di quella parte di strada per cui vuolsi trovare il costo, si ha il volume del relativo inghiaiamento. Tenendo conto della località in cui si può scavare il materiale per quest'inghiaiamento e della distanza media del trasporto, mediante una ben condotta analisi, si può trovare il costo della sua unità di volume, e, moltiplicando questo costo pel suo quantitativo espresso in metri cubi, si ottiene la spesa dell'inghiaiamento pel tronco di strada considerato.

Oltre le spese indicate, sono ancora da considerarsi quelle per studi, per sorveglianza e per lavori impreveduti, le quali ordinariamente si assumono fra 1/7 ed 1/10 dalla somma di tutte le altre spese.

METODO PRATICO

PER

DETERMINARE LE PRINCIPALI DIMENSIONI

DELLE ARCATE DEI PONTI IN MURATURA

Nozioni generali.

1. **Assunto di questo lavoro.** — Le arcate, le pile, le spalle, i muri di risvolto, oppure i muri d'ala ed i muri andatori, sono quelle parti dei ponti di struttura murale alle quali devesi aver riguardo, allorquando è quistione di assicurarsi della loro stabilità. Per quanto spetta alle pile, alle spalle, ai muri di risvolto, ai muri d'ala ed ai muri andatori, ci riportiamo a quanto venne detto nell'articolo II del capitolo IV della seconda parte del volume della nostra *Arte di fabbricare*, intitolato *Costruzioni civili, stradali ed idrauliche*, ed in ispecial modo intendiamo occuparci delle arcate, dando un nostro metodo per determinarne le principali dimensioni.

Molti studi già vennero fatti da valenti ingegneri e da chiarissimi professori sull'argomento in quistione, e nella storia della scienza delle costruzioni sono rimarchevoli: la teoria di La Hire, la quale rimonta al principio del passato secolo, e quindi quella di Eytelwein e di Couplet; la teoria di Coulomb stata data nell'anno 1773, ed in seguito stata sviluppata e perfezionata da Gauthey, da Navier, da Audoy, da Persy, da Lamé e Clapeyron, da Garidel, da Petit e da Poncelet; le teorie fondate sulla costruzione della catenaria o di curve analoghe, quali sono quelle di Gerstner, di Knochenhauer, di Schubert, di Dejardin, di Saggiaro; e tutte le altre in cui si ha

riguardo alla curva delle pressioni, quali sono quelle di Moseley, di Méry, di Hagen, di Veisbach, di Barlow, di Carvallo, di Scheffler e di Dupuit. Ivon Villarceau pubblicò nel 1854 un'interessante memoria su una nuova teoria delle vôlte. L'applicazione di questa teoria però, oltre di esigere calcoli lunghi e generalmente non alla portata di quegli ingegneri che si dedicano alla pratica delle costruzioni, ha pure lo svantaggio di ammettere alcune ipotesi che non si possono accettare come sufficientemente conformi alla realtà dei fatti; cosicchè, se il lavoro di Villarceau è molto commendevole dal lato scientifico, perde ogni importanza quando si considera sotto il punto di vista della pratica utilità che da esso si può ricavare.

Nel nuovo metodo che intendiamo esporre per determinare le principali dimensioni di un'arcata, ci proponiamo di trovare la grossezza alla chiave e la grossezza in un altro giunto giudiziosamente scelto, nell'ipotesi che la vôlta sia simmetrica e simmetricamente caricata rispetto al suo giunto verticale. Perciò, ci imponiamo la condizione che la pressione media (*a*) sul giunto verticale alla chiave sia eguale a quella che permanentemente e stabilmente possono sopportare i materiali da impiegarsi alla sommità dell'arcata; supponiamo che la pressione sull'altro giunto, in cui vogliamo trovare la grossezza, passi pel centro di superficie del giunto medesimo; e ci imponiamo la condizione che la pressione normale, riferita all'unità di superficie, su questo stesso giunto sia pure eguale a quella che permanentemente e stabilmente possono sopportare i materiali. Non imponendoci poi la prima condizione, ci mettiamo in grado di poter trovare la grossezza costante da darsi ad un'arcata colla sua superficie d'intradosso parallela a quella d'estradosso.

Esponendo il nostro metodo per determinare le principali dimensioni di un'arcata da progettarsi, non crediamo di dare una soluzione perfetta dell'arduo problema dell'equilibrio delle vôlte; ma sibbene, come lo indica il titolo stesso di questo nostro lavoro, di dare un modesto metodo pratico utile nell'esercizio della carriera dell'ingegnere costruttore, facile ad apprendersi e di assai spedita applicazione. I risultamenti ottenuti applicando questo metodo a molte e svariate arcate, ci hanno intimamente persuasi della sua utilità, e ci hanno portati a conchiudere che le obbiezioni, che contr'esso si potrebbero muovere, perdono affatto d'importanza quando dalle se-

(*a*) Chiamasi *pressione media* di un giunto il quoziente che si ottiene dividendo la pressione totale sul giunto stesso per la sua area.

vere esigenze della teoria si passa a quelle meno imperiose delle pratiche applicazioni.

2. **Punto d'applicazione della spinta orizzontale di un'arcata alla chiave.** — La spinta orizzontale di un'arcata, ossia quella forza da supporsi applicata al giunto verticale B C (*Fig.* 110), affinchè tenga il posto dell'azione della mezza vôlta di destra contro la mezza vôlta di sinistra, costituisce uno degli elementi principali di cui bisogna tener conto nel risolvere il problema che abbiamo preso a trattare. Non basta rendersi ragione dell'intensità e della direzione di questa forza, ma sommamente importa di conoscere anche il suo punto d'applicazione.

La posizione di questo punto in gran parte dipende dal modo e dai vizi di costruzione dell'arcata, non che dalle deformazioni che essa sarà per subire in seguito all'operazione del disarmamento ed all'azione dei carichi di cui verrà gravata. Supponendo però la volta costrutta colle ordinarie cure, si può determinare, se non esattamente, almeno approssimativamente l'indicata posizione; e, per raggiungere lo scopo, basta tener conto del modo con cui si comporta la serraglia dell'arcata, quando questa si pone in condizioni da poter permanentemente resistere agli sforzi massimi cui deve trovarsi sottoposta. Trattandosi di un'arcata simmetrica e simmetricamente caricata, a tutta monta od a monta depressa onde stare nel caso dei ponti, il giunto verticale B C, che si può immaginare in corrispondenza del mezzo della serraglia A A′ D′ D, dopo che la vôlta si è deformata, giace ancora nel piano primitivo, e questo giunto ha semplicemente subìto un piccolo abbassamento verticale. La serraglia, essendo un corpo più o meno elastico, più o meno si deforma sotto l'azione delle forze sollecitanti, leggiermente si modifica l'arco A A′; aumenta il raggio di curvatura corrispondente al punto B; ed il centro di curvatura relativo al detto punto, passando da O in O′, si abbassa per due motivi, pei cedimenti avvenuti nelle due parti di vôlta fra cui giace la serraglia, per le deformazioni avvenute nella serraglia stessa. In quanto alla grossezza dell'arcata alla chiave si può ritenere che essa non cangi nell'abbassarsi e nel deformarsi della serraglia.

Premesso questo, si consideri nella serraglia, prima di ogni deformazione dell'arcata, un giunto E F vicinissimo al giunto verticale B C, normale all'arco A A′ e quindi concorrente nel centro di curvatura O. Questo giunto, dopo la deformazione dell'arcata, prende una posizione ef; e, ammettendo che esso si conservi normale alla curva aa', as-

sunta dall'arco primitivo A A', passa pel centro di curvatura O' corrispondente al punto *b*. Essendo poi *bc* la posizione presa dal giunto verticale B C, si può stabilire: che l'archetto d'intradosso B E si è accorciato di B E — *be*; che l'archetto d'estradosso C F si è accorciato di C F — *cf*. Se adunque si dicono

z_0 la grossezza $\overline{BC} = \overline{bc}$ dell'arcata alla chiave,

ρ il raggio di curvatura $\overline{OB}$ nel punto più alto B della curva direttrice della superficie d'intradosso dell'arcata prima della deformazione,

ρ' l'analogo raggio di curvatura $\overline{O'b}$ dopo la deformazione,

θ l'arco di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo piccolissimo F O C, e

θ' l'arco dello stesso raggio chiudente l'angolo piccolissimo $fO'c$,

si ha:

$$BE = \rho\theta,$$

$$be = \rho'\theta',$$

$$CF = (\rho + z_0)\theta,$$

$$cf = (\rho' + z_0)\theta';$$

e gli accorciamenti degli archi B E e C F sono dati da

$$BE - be = \rho\theta - \rho'\theta',$$

$$CF - cf = (\rho + z_0)\theta - (\rho' + z_0)\theta.$$

Ora, ritenendo siccome conforme alla verità l'ipotesi che, nei limiti entro i quali si possono cimentare le resistenze dei corpi impiegati nelle costruzioni, le pressioni, provocate in elementi di fibra compressi, siano proporzionali agli accorciamenti di questi elementi medesimi ed inversamente proporzionali alle loro lunghezze primitive, se chiamansi

K'_i la pressione riferita all'unità di superficie per l'elemento di fibra B E, diventato *b e*,

K'_e la pressione pure riferita all'unità di superficie per l'elemento di fibra C F, ridottosi a *c f*,

si ha

$$\frac{K_i}{K_e} = \frac{(\rho\theta - \rho'\theta')(\rho + z_0)}{\left[(\rho_i + z_0)\theta - (\rho' + z_0)\theta'\right]\rho} \qquad (1).$$

Ma (per le formole state stabilite nel numero 30 e state dedotte nella nota (*c*) del nostro volume sull'*Arte di fabbricare* intitolato *Costruzioni civili, stradali ed idrauliche*, onde trovare le massime pressioni riferite all'unità di superficie sugli spigoli d'intradosso e d'estradosso di un giunto qualunque), se chiamasi

δ_0 la distanza del punto d'applicazione delle pressioni sul giunto verticale alla chiave dell'intradosso, risulta l'equazione

$$\frac{K_i}{K_e} = \frac{2 - 3\frac{\delta^0}{z^0}}{-1 + 3\frac{\delta_0}{z_0}},$$

dalla quale immediatamente si deduce

$$\delta_0 = \frac{1}{3}\frac{2 + \frac{K_i}{K_e}}{1 + \frac{K_i}{K_e}} z_0 \qquad (2).$$

Il valore del rapporto $\frac{K_i}{K_e}$ dato dalla formola (1) si ponga ora nella formola (2) e, mettendo in evidenza il fattore $\frac{1}{2}z_0$, si trova

$$\delta_0 = \frac{6(\rho\theta - \rho'\theta')\rho + 6\rho z_0\theta - 2(2\rho + \rho')z_0\theta'}{6(\rho\theta - \rho'\theta')\rho + 6\rho z_0\theta - 3(\rho + \rho')z_0\theta'}\frac{1}{2}z_0 \qquad (3).$$

Tanto il numeratore quanto il denominatore della frazione, la quale moltiplica il fattore $\frac{1}{2}z_0$, hanno due termini eguali, ed essi diversificano soltanto nel terzo termine. Se ρ' è maggiore di ρ, il termine $3(\rho + \rho')$ è maggiore del termine $2(2\rho + \rho')$, il denominatore della frazione, la quale moltiplica $\frac{1}{2}z_0$ nella formola determinatrice di δ_0 risulta minore del numeratore, il valore di δ_0 si trova maggiore di $\frac{1}{2}z_0$, e quindi la spinta orizzontale trovasi applicata al di sopra del mezzo del detto giunto verticale dell'arcata. Siccome però le deformazioni che può subire la serraglia, sempre di laterizi o di

pietre assai resistenti, sono assai piccole e non suscettive di pratica determinazione, ne consegue che, anche nei casi più sfavorevoli, il valore di ρ' non può essere molto differente dal valore di ρ, e che quindi anche il valore di δ_0 non può essere molto differente da quello di $\frac{1}{2} z_0$.

Conchiudendo possiamo stabilire: che il punto d'applicazione della spinta orizzontale di un'arcata di ponte, a tutta monta o a monta depressa, è tanto più al di sopra del mezzo del suo giunto verticale alla chiave, quanto più la serraglia è soggetta a deformarsi sotto le pressioni che contro vi esercitano le due parti di vôlta fra cui essa giace; che in ogni caso questo punto d'applicazione dista poco dal mezzo dell'indicato giunto; e che, nei calcoli da istituirsi per la determinazione delle principali dimensioni delle arcate, senza tema d'inconvenienti, si può ritenere che la spinta orizzontale alla chiave sia applicata alla metà dell'altezza della chiave medesima.

La conclusione a cui siamo arrivati sulla posizione del punto d'applicazione della spinta orizzontale di un'arcata, quantunque basata su considerazioni un po' differenti, è identica a quella alla quale giunse l'ingegnere Dupuit nel suo prezioso lavoro intitolato *Traité de l'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie*, stato pubblicato dai signori ingegneri J. Mahyer ed E. Vaudrey dopo la morte dell'illustre e valente ispettore generale di ponti e strade di Francia. L'autorevole giudizio d'un uomo eminente per scienza e per pratica, come fu il Dupuit, è di gran peso nella quistione che trattiamo; ed ormai possiamo dire che non esiste più dubbio sulla posizione approssimata del punto d'applicazione della spinta orizzontale di un'arcata di ponte nel suo giunto verticale alla chiave.

Nel discutere la formola (3), abbiamo supposto che il raggio di curvatura ρ' sia maggiore del raggio di curvatura ρ, e non abbiamo punto considerato il caso in cui ρ' sia minore di ρ. Il motivo di questa nostra astensione dipende da ciò che l'ultimo indicato caso può solo presentarsi nell'arcata a monta rialzata, con grandi carichi sui fianchi e con piccoli carichi alla sommità, le quali arcate non s'incontrano mai nella costruzione dei moderni ponti dove la direttrice della superficie d'intradosso suol essere una mezza circonferenza, o un arco circolare, o una mezza ellisse od anche una mezza ovale. Ad ogni modo anche la circostanza in cui ρ' sia minore di ρ non modifica guari le conseguenze a cui siamo arrivati; il punto d'applicazione della spinta

orizzontale è tanto più al di sotto del mezzo del giunto verticale quanto più la serraglia è soggetta a deformarsi sotto le azioni che contro vi esercitano le due parti di vôlta fra cui essa giace; questo punto d'applicazione dista sempre di poco dal punto di mezzo dell'indicato giunto; e, nella risoluzione di problemi pratici relativi alla determinazione delle principali dimensioni di archi caricati di pesi, si può ritenere che siavi perfetta coincidenza fra i due punti or ora indicati.

3. **Giunti estremi di un'arcata.** — L'esperienza dimostra che un'arcata, i cui giunti d'imposta fanno colla verticale un angolo maggiore di 60°, può essere costrutta senza armatura fino ai giunti egualmente inclinati colla verticale e comprendenti fra di loro un angolo di 120°. Quest'osservazione ci porta a considerare le parti di un'arcata, sottostanti ai giunti inclinati a 60° colla verticale, siccome appartenenti ai piedritti; ed a ritenere che siano questi i *giunti estremi*, a cui si deve aver riguardo nella determinazione dell'estradosso.

È evidente che i giunti estremi si confondono coi giunti d'imposta in quelle arcate, in cui i piani che le separano dai piedritti fanno colla verticale un angolo minore di 60°.

4. **Elementi da impiegarsi per il calcolo delle principali dimensioni di un'arcata di ponte.** — Onde poter eseguire i calcoli relativi alla determinazione delle principali dimensioni delle arcate dei ponti di struttura murale, importa conoscere alcuni dati numerici relativi ai sovraccarichi, ai pesi dell'unità di volume dei materiali che impiegansi nella loro costruzione ed alle resistenze di alcuni dei materiali stessi.

I sovraccarichi, come già venne detto nel numero 150 di quel volume della nostra *Arte di fabbricare* il quale tratta delle *Costruzioni civili, stradali ed idrauliche*, si possono assumere: di 600 od anche di 700 chilogrammi per ogni metro quadrato di suolo stradale nei ponti per strada carreggiabile; di 4000 chilogrammi per ogni metro corrente di via ferrata ad un sol binario e quindi di 1600 chilogrammi per ogni metro quadrato della lista occupata dalle traversine nei ponti per strade ferrate di pianura; di 5000 chilogrammi per ogni metro corrente di via ferrata ad un sol binario, e quindi di 2000 chilogrammi per ogni metro quadrato delle stesse liste nei ponti per strade ferrate di montagna.

I pesi del metro cubo dei materiali, che impiegansi nelle costruzioni dei ponti di struttura murale, mediamente si possono assumere come risulta dalla seguente tavola:

Indicazione dei materiali	Peso Π del metro cubo	
Muratura di pietrame	Da 2300^{Cg}	a 2500^{Cg}
Muratura in conci di pietra da taglio	2400	2600
Muratura di mattoni	2000	2200
Muratura di calcestruzzo	2150	2250
Riempimento di rottami e di terra da porsi sopra la cappa	1600	2000
Ciottolati e lastricati di pietra	2200	2600

Avvenendo di dover calcolare i pesi delle traversine, dei cuscinetti e delle rotaie, onde introdurli fra i carichi permanenti nei ponti per strade ferrate, convien assumere: di 700 a 850 chilogrammi il peso del metro cubo di legname; di 7770 chilogrammi il peso del metro cubo di ferro; di 7200 chilogrammi il peso del metro cubo di ghisa. Alcune volte sopra i ponti si fa tutto od una parte del suolo stradale con asfalto compresso, posto in opera su calcestruzzo, ed il peso di questo genere di pavimento si può mediamente ritenere: di 270 chilogrammi per ogni metro quadrato, quando lo strato di calcestruzzo è alto metri 0,10 e lo strato di asfalto metri 0,03; di 185 chilogrammi pure per ogni metro quadrato, se l' altezza dello strato di calcestruzzo è di metri 0,05, e di metri 0,04 quella dello strato di asfalto.

Le resistenze dei materiali che entrano nella composizione delle arcate si rappresentano coi valori R'' dei coefficienti di rottura ad essi convenienti; e questi coefficienti di rottura, per le murature generalmente usate nel costrurre le arcate dei ponti, si possono assumere in conformità dei dati contenuti nella tavola che qui presentiamo:

Indicazione della muratura	Coefficiente di rottura R'' ossia resistenza alla rottura per pressione riferita al metro quadrato	
Muratura di pietrame con malta di buon cemento	Da 1500000^{cs} a 1000000^{cs}	
Muratura di pietrame con malta di calce idraulica	1000000	450000
Muratura di pietrame con malta di calce grassa	450000	350000
Muratura di conci di pietra da taglio con malta di buon cemento	2000000	1000000
Muratura di conci di pietra da taglio con malta di calce idraulica	1000000	800000
Muratura in conci di pietra da taglio con malta di calce grassa	800000	500000
Muratura di mattoni molto resistenti con malta di buon cemento	1500000	1000000
Muratura di mattoni con malta di calce idraulica	1000000	500000
Muratura di mattoni con malta di calce grassa	500000	400000
Muratura di calcestruzzo	480000	400000

I valori di R'' della riportata tavola si riferiscono piuttosto alle malte che entrano nella composizione delle arcate, anzichè alle pietre e laterizi di cui sono queste formate. Segue da ciò che, trattandosi di pietre e di mattoni, la cui resistenza alla rottura per pressione sia inferiore a quella delle malte, si devono assumere per valori di R'' quelli che convengono alle pietre ed ai mattoni da impiegarsi, e non quelli che trovansi nella tavola. Per le arcate in conci tagliati con tutta diligenza ed in mattoni accuratamente lavorati, usano alcuni costruttori far poco conto della presenza della malta nei giunti, ed assumere il valore di R'', ben di poco inferiore a quello delle pietre o dei mattoni che entrano nella loro composizione. Se però osservasi che le superficie dei giunti non sono mai perfettamente pareggiate,

e che, per la molteplicità dei pezzi che entrano in un'arcata, non è permesso aspettarci quelle resistenze che possono presentare i cubi ed i sostegni di pietra in un sol pezzo, riesce facile convincersi perchè, anche per i graniti, i quali costituiscono forse le pietre più resistenti che si impiegano nella costruzione delle arcate, non si possa impiegare un coefficiente di rottura maggiore di chilogrammi 4000000 per metro quadrato.

Oltre i valori dei coefficienti di rottura, bisognerà introdurre nelle formole determinatrici delle principali dimensioni delle arcate i valori dei relativi coefficienti di stabilità n'', pei quali si potrà assumere la frazione $\frac{1}{10}$. Quando però vogliasi operare colla massima prudenza, e tener conto del duplice fatto che la spinta orizzontale alla chiave sarà probabilmente applicata ad una piccola distanza dal mezzo, e che in realtà la pressione su ciascun punto estremo ben difficilmente sarà applicata nel mezzo, si può prendere una frazione anche più piccola di $\frac{1}{10}$ pel valore dei coefficienti di stabilità, e fissare $\frac{1}{10}$ ed $\frac{1}{16}$ come limiti dei valori di questa frazione.

Arcate di grossezza variabile dalla chiave ai giunti estremi.

5. **Equazioni determinatrici delle due grossezze di un'arcata alla chiave e nei giunti estremi.** — Per convenientemente stabilire queste equazioni, bisogna innanzi tutto aver riguardo ai carichi massimi di cui la vôlta dovrà essere gravata ed al modo con cui a questa verrà trasmessa l'azione di quelli. S'immagini perciò condotto un piano orizzontale per la generatrice più alta della superficie d'intradosso dell'arcata, ed al di sopra di questo piano suppongasi disposto un conveniente masso murale, il quale soddisfaccia a queste condizioni: di avere peso specifico eguale a quello della muratura componente l'arcata; di trovarsi compreso fra i piani verticali determinati dai piani di testa; di presentare tali altezze, anche variabili da un sito all'altro, da produrre sull'arcata lo stesso effetto, o pressochè lo stesso effetto, che vi produrrebbero i carichi massimi che effettivamente si potranno trovare al di sopra del piano orizzontale suddetto. Supponendo condotto il piano verticale passante per l'asse del ponte,

esso taglierà il definito piano orizzontale secondo la retta B D (*Fig.* 111) e la superficie superiore del masso murale determinato come or ora si è indicato secondo una linea N Y, la quale può essere una retta orizzontale od inclinata, una linea poligonale od anche una linea curva.

Si consideri ora sull'orizzontale B D il punto B, in cui essa taglia la generatrice più alta della superficie d'estradosso; per B si tracci la semi-direttrice B A della superficie d'intradosso; e si determini su B A quel particolare punto I, il quale corrisponde al giunto estremo. La figura I B N L trovasi completamente determinata, ma, quando si assegnino all'arcata quelle grossezze B C ed I K (*Fig.* 112) che le convengono alla chiave ed in corrispondenza del punto I (*Fig.* 111 e 112), essa si dividerà in due parti, B V I e C N L U, senza che però varii nè l'area sua, nè la distanza del suo centro di superficie dalla verticale I L.

Premesso questo, si prenda in considerazione una tal parte di vôlta compresa fra due piani verticali paralleli ai piani di testa, la quale sia lunga l'unità nel senso delle sue generatrici, e, assumendo rispettivamente il metro, il metro quadrato, il metro cubo ed il chilogramma per unità di lunghezza, di superficie, di volume e di peso, si chiamino:

c la distanza $\overline{CU}$ (*Fig.* 112),

m la differenza di livello $\overline{BF}$ fra il punto B ed il punto I,

z_0 la grossezza $\overline{BC}$ dell'arcata alla chiave, e

z la grossezza $\overline{IK}$ nel giunto corrispondente al punto I,

φ l'angolo K I L dell'or indicato giunto colla verticale,

Π il peso dell'unità di volume di muratura,

P' il peso del complesso dei due prismi murali, ambo alti l'unità, e rappresentati nelle loro basi B V I e C N L U,

p' la distanza orizzontale $\overline{IH}$ (*Fig.* 111) del centro di superficie della figura B N L I dal punto I,

P'' quella funzione di z_0 e di z che esprime il peso del prisma di muratura, la cui sezione retta è la figura I L M K (*Fig.* 112) e la cui altezza è l'unità,

p'' l'espressione della distanza orizzontale fra il centro di superficie dell'or indicata figura ed il punto di mezzo O del giunto estremo I K,

Q la spinta orizzontale corrispondente alla parte di vôlta considerata, la qual spinta si ritiene come applicata al punto di mezzo G del giunto verticale B C,

N la componente normale della pressione sul giunto I K,

$n_0'' R_0''$ il prodotto del coefficiente di rottura e del relativo coefficiente di stabilità pel giunto verticale alla chiave, ed

$n'' R''$ l'analogo prodotto per giunto IK.

Nel maggior numero dei casi pratici in cui le arcate si fanno collo stesso materiale dalla chiave all'imposta, sono fra di loro eguali i valori dei prodotti $n_0'' R_0''$ ed $n'' R''$. Potendo però avvenire di dover impiegare alla chiave materiali differenti di quelli da usarsi pel rimanente dell'arcata, od anche di voler in qualche modo tener conto della non esatta coincidenza dei punti d'applicazione delle pressioni sul giunto verticale alla chiave e sul giunto estremo coi punti di mezzo dei giunti medesimi assumendo per n_0'' un valore un po' diverso da quello di n'', abbiamo creduto conveniente di far distinzione fra gli indicati prodotti, e di conservare così la massima generalità nelle formole alle quali giungeremo.

La condizione, che la pressione media sul giunto verticale BC sia eguale a quella che permanentemente e stabilmente possono sopportare i materiali componenti l'arcata, dà l'equazione

$$Q = n_0'' R_0'' z_0 \qquad (1).$$

L'ipotesi che la pressione sul giunto estremo IK passi pel mezzo O del giunto medesimo, si traduce in equazione dicendo che deve essere eguale a zero la somma algebrica dei momenti di tutte le forze applicate alla parte di vôlta IBCK, presi questi momenti intorno alla orizzontale proiettata nel punto O. Le forze or ora indicate sono: la spinta orizzontale Q, operante con braccio $\frac{1}{2} z_0 + m - \frac{1}{2} z \cos\phi$ e con momento

$$\left(\frac{1}{2} z_0 + m - \frac{1}{2} z \cos\phi\right) Q ;$$

il peso del prisma di muratura rappresentato nel complesso delle figure BVI e CNLU, la cui intensità è P', il cui braccio risulta $p' + \frac{1}{2} z \operatorname{sen}\phi$, ed il cui momento vale

$$-\left(p' + \frac{1}{2} z \operatorname{sen}\phi\right) P' ;$$

il peso del prisma di muratura rappresentato nel rettangolo BCUV, dato dal prodotto $\Pi c z_0$, col braccio $\frac{1}{2} c + \frac{1}{2} z \operatorname{sen}\phi$, e di momento

$$-\frac{1}{2}\Pi\left(c+z\operatorname{sen}\phi\right)cz_0;$$

il peso del prisma di muratura rappresentato nella figura ILMK, il cui momento rispetto alla orizzontale proiettata nel punto O, supposto agire per lo stesso verso dei due momenti ultimi indicati, è la funzione di z_0 e di z espressa da

$$-\mathrm{P}''p'';$$

e finalmente la reazione sul giunto IK, la quale, dovendo passare sul punto O, ha momento nullo rispetto all'orizzontale in esso proiettata. Prendendo la somma algebrica dei trovati momenti, si ottiene l'equazione

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2}z_0+m-\frac{1}{2}z\cos\phi\right)\mathrm{Q}-\left(p'+\frac{1}{2}z\operatorname{sen}\phi\right)\mathrm{P}'\\ -\frac{1}{2}\Pi\left(c+z\operatorname{sen}\phi\right)cz_0-\mathrm{P}''p''\end{array}\right\}=0 \qquad (2),$$

la quale esprime che la pressione sul giunto IK passa pel suo punto di mezzo O.

La condizione, che la pressione normale riferita all'unità di superficie, sul giunto estremo IK, sia eguale a quella che permanentemente e stabilmente possono sopportare i materiali componenti l'arcata, si pone in equazione col dire che l'espressione della detta pressione deve eguagliare il prodotto $n''\mathrm{R}''z$. Per ottenere poi l'indicata componente della pressione normale al giunto IK, bisogna scomporre ciascuna delle forze applicate alla parte di vôlta IBCK in due componenti, una parallela e l'altra normale ad IK, e prendere la somma algebrica di tutte le componenti normali. La componente normale ad IK della spinta orizzontale Q è

$$\mathrm{Q}\cos\phi;$$

e quelle dei pesi P', Πcz_0 e P'' sono rispettivamente

$$\mathrm{P}'\operatorname{sen}\phi,$$

$$\Pi cz_0\operatorname{sen}\phi,$$

$$\mathrm{P}''\operatorname{sen}\phi.$$

La somma algebrica delle componenti normali ad IK di tutte le forze sollecitanti la parte di vôlta IBCK vale adunque

$$Q\cos\phi+(P'+\Pi c z_0+P'')\operatorname{sen}\phi;$$

cosicchè si ha

$$Q\cos\phi+(P'+\Pi c z_0+P'')\operatorname{sen}\phi=n''R''z \qquad (3),$$

la quale esprime che la pressione normale, riferita all'unità di superficie, sul giunto estremo IK è eguale a quella che permanentemente e stabilmente possono sopportare i materiali componenti l'arcata.

Ponendo ora nelle (2) e (3) il valore di Q dato dalla (1) e dividendo per Π, risultano le due equazioni

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2}z_0+m-\frac{1}{2}z\cos\phi\right)\frac{n_0''R_0''}{\Pi}z_0-\left(p'+\frac{1}{2}z\operatorname{sen}\phi\right)\frac{P'}{\Pi}\\ \qquad -\frac{1}{2}\left(c+z\operatorname{sen}\phi\right)cz_0-\frac{P''}{\Pi}p''\end{array}\right\}=0 \qquad (4),$$

$$\frac{n''_0R''_0}{\Pi}z_0\cos\phi+\left(\frac{P'}{\Pi}+cz_0+\frac{P''}{\Pi}\right)\operatorname{sen}\phi-\frac{n''R''}{\Pi}z=0 \qquad (5),$$

le quali si prestano alla determinazione delle due grossezze z_0 e z alla chiave e nei giunti estremi dell'arcata, allorquando si mettano in esse, invece di P'' e del prodotto $P''p''$, i loro valori in funzione delle indicate grossezze z_0 e z. Meritano poi di essere rimarcati i quozienti $\frac{P'}{\Pi}$ e $\frac{P''}{\Pi}$ che si trovano nei primi membri di queste equazioni, in quanto rappresentano, il primo l'area della figura IBNL (*Fig.* 111), ossia l'area del complesso delle due figure BVI e CNLU (*Fig.* 112), il secondo l'area della figura ILMK.

6. **Eliminazione di P'' e del prodotto $P''p''$ dalle equazioni determinatrici delle due grossezze alla chiave e nei giunti estremi di un'arcata.** — Il peso P'' ed il suo momento $P''p''$ rispetto alla orizzontale proiettata nel punto O (*Fig.* 112), come già abbiamo fatto risultare dalle denominazioni stabilite nel precedente numero, sono funzioni della variabile z_0 e z. Ora, se ammettiamo che la parte LM della linea NY sia una retta (ciò che si può ritenere siccome quasi conforme alla verità in tutti i casi pratici di arcate per ponti), immaginando per K una retta KX parallela ad ML, e dicendo

b la lunghezza della verticale U L (*Fig.* 111 e 112),

α l'angolo M Lo della L M coll'orizzontale Lo,

si ha

$$\overline{IL} = b + z_0 + m,$$

$$\overline{KM} = b + z_0 + m - z\cos\phi - z\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{tang}\,\alpha,$$

$$\overline{ZU} = \overline{KS} = z\,\mathrm{sen}\,\phi.$$

L'area del trapezio I L M K risulta

$$\left[b + z_0 + m - \frac{1}{2}(\cos\phi + \mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\phi)\,z\right] z\,\mathrm{sen}\,\phi,$$

e quindi il peso P'', del prisma di muratura avente per altezza l'unità e per base l'or indicato trapezio, viene dato da

$$P'' = \Pi\left[b + z_0 + m - \frac{1}{2}(\cos\phi + \mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\phi)\,z\right] z\,\mathrm{sen}\,\phi.$$

Il momento P''p'', per essere nullo il momento del parallelogramma X L M K rispetto a O, si riduce a quello del prisma triangolare di muratura, rappresentato in I X K, rispetto alla orizzontale proiettata nell'or accennato punto. Essendo poi

$$\overline{SK} = z\,\mathrm{sen}\,\phi$$

$$\overline{IX} = \overline{IS} + \overline{SX} = z\cos\phi + z\,\mathrm{sen}\,\phi\,\mathrm{tang}\,\alpha,$$

il peso del detto prisma triangolare viene espresso da

$$\frac{1}{2}\Pi(\cos\phi + \mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\phi)\,z^2\,\mathrm{sen}\,\phi;$$

il braccio di questo peso rispetto alla orizzontale proiettata nel punto O è

$$\frac{1}{6}z\,\mathrm{sen}\,\phi;$$

e quindi il momento P''p'' risulta dalla formola

$$P''p'' = \frac{1}{12}\Pi(\cos\phi + \mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\phi)\,z^3\,\mathrm{sen}^2\phi.$$

Ponendo i trovati valori di P'' e di P''p'' nelle equazioni (4) e (5)

del precedente numero, ed ordinando convenientemente per rapporto alle due variabili z_0 e z, si ottengono le due equazioni

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{12}(\cos\phi+\text{tang}\,\alpha\,\text{sen}\,\phi)\,\text{sen}^2\phi\,.\,z^3+\frac{1}{2}\frac{n_0''R_0''}{\Pi}z_0^2 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{n_0''R_0''}{\Pi}\cos\phi+c\,\text{sen}\,\phi\right)z_0z+\left(\frac{n_0''R_0''}{\Pi}m-\frac{1}{2}c^2\right)z_0 \\ -\frac{1}{2}\frac{P'}{\Pi}\,\text{sen}\,\phi\,.\,z-\frac{P'}{\Pi}p' \end{array}\right\}=0 \quad (1),$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{sen}^2\phi\,.\,z_0z-\frac{1}{2}(\cos\phi+\text{tang}\,\alpha\,\text{sen}\,\phi)\,\text{sen}^2\phi\,.\,z^2 \\ +\left(\frac{n_0''R_0''}{\Pi}\cos\phi+c\,\text{sen}\,\phi\right)z_0+\left[(b+m)\,\text{sen}^2\phi\right. \\ \left.-\frac{n''R''}{\Pi}\right]z+\frac{P'}{\Pi}\,\text{sen}\,\phi \end{array}\right\}=0 \quad (2),$$

la prima delle quali è di terzo e la seconda di secondo grado. Ponendo in queste equazioni i valori numerici dei loro coefficienti, ricavando il valore di z_0 dalla seconda, giacchè quest'incognita vi entra solo alla prima potenza, e sostituendolo nella prima, si giunge ad una equazione finale del quinto grado in z. Da quest'equazione si potrà adunque ricavare il valore di z, e risalire quindi alla deduzione del corrispondente valore di z_0.

Il termine $\frac{P''}{\Pi}p''$, che trovasi nel primo membro dell'equazione (4) del numero precedente, rappresenta il momento dell'area del trapezio I L M K interno al punto O, momento che si riduce a quello del triangolo I X K risultante dal condurre la retta K X parallela ad M L. Siccome poi la verticale passante pel centro di superficie di questo triangolo dista appena della sesta parte di $\overline{KS}$ da O, e siccome si può sempre ritenere che le rette parallele K X ed M L facciano un angolo nullo od assai piccolo coll'orizzonte, il momento $\frac{P''}{\Pi}p''$ riesce piccolo, quindi, qualora vogliasi solo procedere per approssimazione, si può anche trascurare a fronte degli altri momenti contenuti nel primo membro della citata equazione (4). Trascurando l'or indicato momento, sparisce il termine in z^3 dell'equazione (1) e le equazioni determinatrici di z_0 e di z si riducono a

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}\dfrac{n_o''R_o''}{\Pi}z_o^2-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n_o''R_o''}{\Pi}\cos\phi+c\,\mathrm{sen}\,\phi\right)z_o z \\ +\left(\dfrac{n_o''R_o''}{\Pi}m-\dfrac{1}{2}c^2\right)z_o-\dfrac{1}{2}\dfrac{P'}{\Pi}\,\mathrm{sen}\,\phi.\,z-\dfrac{P'}{\Pi}p' \end{array}\right\}=0 \quad (3),$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{sen}^2\phi.\,z_o z-\dfrac{1}{2}\left(\cos\phi+\mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{sen}\,\phi\right)\mathrm{sen}^2\phi.\,z^2 \\ +\left(\dfrac{n_o''R_o''}{\Pi}\cos\phi+c\,\mathrm{sen}\,\phi\right)z_o+\left[(b+m)\mathrm{sen}^2\phi-\dfrac{n''R''}{\Pi}\right]z \\ +\dfrac{P'}{\Pi}\,\mathrm{sen}\,\phi \end{array}\right\}=0 \quad (4).$$

L'eliminazione di z_o, col ricavarne il valore dalla seconda e col sostituirlo nella prima, conduce ad un'equazione finale del quarto grado in z, dalla quale si potrà ricavare il valore di quest'incognita per poi venire alla deduzione di z_o.

7. **Formole d'approssimazione per trovare le due grossezze di un'arcata alla chiave e nei giunti estremi.** — Per determinare il valore delle due grossezze z_o e z senza passare per la risoluzione di un'equazione di grado superiore, viene in acconcio, pel caso particolare che consideriamo, il metodo delle approssimazioni successive.

S'incominci innanzi tutto dal supporre che z sia eguale a z_o, e si faccia servire l'equazione (3) del precedente numero per trovare il valore di z_o in quest'ipotesi. La detta equazione, quando pongansi le relazioni

$$\left.\begin{array}{l} A=\dfrac{n_o''R_o''}{\Pi}(1-\cos\phi)-c\,\mathrm{sen}\,\phi \\ B=\dfrac{n_o''R_o''}{\Pi}m-\dfrac{1}{2}c^2-\dfrac{1}{2}\dfrac{P'}{\Pi}\,\mathrm{sen}\,\phi \\ C=2\,\dfrac{P'}{\Pi}p' \end{array}\right\} \quad (1),$$

conduce all'equazione del secondo grado

$$Az_o^2+2Bz_o-C=0,$$

da cui ricavasi un primo valore z_o' di z_o, dato da

$$z_o' = -\frac{B}{A} + \sqrt{\left(\frac{B}{A}\right)^2 + \frac{C}{A}} \qquad (2).$$

Questo valore z_o' di z_o si sostituisca nell'equazione (4) del numero precedente, la quale, quando si ponga

$$\left.\begin{aligned} D &= (\cos\phi + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen}^2\phi \\ E &= \frac{n''R''}{\Pi} - (b + z_o' + m)\operatorname{sen}^2\phi \\ F &= 2\frac{P'}{\Pi}\operatorname{sen}\phi + 2\left(\frac{n_o''R_o''}{\Pi}\cos\phi + c\operatorname{sen}\phi\right)z_o' \end{aligned}\right\} \qquad (3),$$

diventa

$$Dz^2 + 2Ez - F = 0.$$

Da questa equazione poi ricavasi un primo valore z' di z dato da

$$z' = -\frac{E}{D} + \sqrt{\left(\frac{E}{D}\right)^2 + \frac{F}{D}} \qquad (4).$$

Ottenuti con una prima approssimazione i due valori z_o' e z' di z_o e di z, si impiegheranno le equazioni (1) e (2) del precedente numero per sempre meglio accostarci ai veri valori di z_o e di z. Perciò si ponga nell'equazione (1) invece di z il trovato valore z', ed allora, ponendo

$$\left.\begin{aligned} A' &= \frac{n_o''R_o''}{\Pi} \\ B' &= \frac{n_o''R_o''}{\Pi}m - \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{n_o''R_o''}{\Pi}\cos\phi + c\operatorname{sen}\phi\right)z' \\ C' &= 2\frac{P'}{\Pi}p' + \left[\frac{P'}{\Pi} + \frac{1}{6}(\cos\phi + \operatorname{tang}\alpha\operatorname{sen}\phi)z'^2\operatorname{sen}\phi\right]z'\operatorname{sen}\phi \end{aligned}\right\} \qquad (5),$$

si ottiene l'equazione

$$A'z_o^2 + 2B'z_o - C' = 0,$$

da cui ricavasi un secondo valore z_o'' di z_o dato da

$$z_o'' = -\frac{B'}{A'} + \sqrt{\left(\frac{B'}{A'}\right)^2 + \frac{C'}{A'}} \qquad (6).$$

Il trovato valore z_o'' si ponga, invece di z_o, nell'equazione (2) del precedente numero. Fra le relazioni

$$\left.\begin{aligned} D' &= (\cos\phi + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{sen}\phi)\operatorname{sen}^2\phi = D \\ E' &= \frac{n''R''}{\Pi} - (b + z_o'' + m)\operatorname{sen}^2\phi \\ F' &= 2\frac{P'}{\Pi}\operatorname{sen}\phi + 2\left(\frac{n_o''R_o''}{\Pi}\cos\phi + c\operatorname{sen}\phi\right)z_o'' \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

e la variabile z risulta l'equazione

$$D'z^2 + 2E'z^2 - F' = 0,$$

da cui ricavasi un secondo valore z'' di z dato da

$$z'' = -\frac{E'}{D'} + \sqrt{\left(\frac{E'}{D'}\right)^2 + \frac{F'}{D'}} \qquad (8).$$

Calcolando i coefficienti A', B' e C' dati dalle formole (5) col porre in essi il valore di z'' invece di z', e quindi mettendoli nel secondo membro dell'equazione (6), si potrebbe ottenere un terzo valore z_o''' di z_o, il quale, più di z_o' e di z_o'', si approssima alla vera grossezza dell'arcata alla chiave. Analogamente, determinando mediante le formole (7) i coefficienti D', E' ed F' col porre il trovato valore z_o''' invece di z_o'', si potrebbe dedurre dalla formola (8) un terzo valore z''' di z, il quale, più di z' e di z'', si accosti alla vera grossezza dell'arcata nei giunti estremi. Determinati i valori di z_o''' e di z''', mediante le stesse formole (5), (6), (7) ed (8) se ne potrebbero trovare altri due z_o^{IV} e z^{IV} ancora più approssimati, e così continuare finchè due valori successivi, tanto di z_o quanto di z, presentano discrepanze piccole e trascurabili. Nelle ordinarie circostanze della pratica è generalmente sufficiente di assumere il valore di z_o'' per grossezza dell'arcata alla chiave ed il valore di z'' per grossezza dell'arcata nei giunti estremi.

Per accelerare le operazioni relative alla determinazione di z_o e di

z, si può simultaneamente far uso del calcolo numerico e del calcolo grafico; e non occorre il dire quanto sia facile il determinare graficamente: le lunghezze $c \operatorname{sen} \phi$, $(b + z_o' + m) \operatorname{sen}^2 \phi$, $m - \frac{1}{2} z' \cos \phi$, $c + z' \operatorname{sen} \phi$, $z' \operatorname{sen} \phi$, $z' \cos \phi$ e $(b + z_o'' + m) \operatorname{sen}^2 \phi$; i prodotti $\frac{n_o'' R_o''}{\Pi}$ $(1 - \cos \phi)$ ed $\frac{n_o'' R_o''}{\Pi} \cos \phi$ quando siasi calcolato il rapporto $\frac{n_o'' R_o''}{\Pi}$; le aree $\frac{P'}{\Pi} \operatorname{sen} \phi$ quando siasi trovata l'area $\frac{P'}{\Pi}$; e finalmente l'espressione $(\cos \phi + \operatorname{tang} \alpha \operatorname{sen} \phi) \operatorname{sen}^2 \phi$.

8. **Determinazione della superficie d'estradosso di un'arcata.** — Ottenute le due grossezze z_o e z di un'arcata alla chiave e nei giunti estremi, si potrebbe determinare la sua grossezza in corrispondenza di un giunto qualunque, trovando, in funzione delle quantità note e dell'indicata grossezza incognita, l'espressione della massima pressione riferita all'unità di superficie ed eguagliandola ál prodotto del coefficiente di stabilità pel relativo coefficiente di rottura. Risulterebbe così un'equazione, dalla quale si potrebbe ricavare l'incognita suddetta, ed il problema, avente per iscopo di ricercare le principali dimensioni delle arcate, si troverebbe così completamente risoluto. Nella pratica però questo procedimento riuscirebbe un po' lungo, e crediamo che si possano ottenere risultati abbastanza soddisfacenti col seguente metodo.

Mediante le trovate lunghezze di z_o e di z, si fissano i due punti C e K (*Fig.* 113) appartenenti alla linea direttrice dell'estradosso, il primo in corrispondenza del giunto verticale alla chiave, ed il secondo in corrispondenza del giunto estremo. Per questi punti si fa passare un arco circolare, il quale abbia la sua tangente orizzontale nel punto C, e si ritiene l'arco circolare K C siccome rappresentante la linea direttrice della superficie d'estradosso fra la sommità dell'arcata ed un giunto estremo.

Ben di frequente al profilo curvilineo K C si sostituisce, per l'estradosso e nell'interno dell'arcata, un profilo a riseghe, il quale può essere: o tutto sopra la curva K C, come risulta dalla figura 113 in K *e e' f f g g'* C'; oppure in parte sopra ed in parte sotto la detta curva, come si vede nella figura 114 in K *e e' f f' g g'* C. I risalti non devono essere maggiori di 12 a 15 centimetri, e, principalmente nel caso rappresentato dalla figura 114, bisogna avvertire che i vertici degli

angoli rientranti, come e', f', g', ben di poco siano al di sotto dell'arco K C.

Nelle arcate in cui il giunto d'imposta fa colla verticale un angolo maggiore di 60°, si prolunga la linea direttrice dell'estradosso al di sotto dei giunti estremi, e questi prolungamenti quasi sempre si fanno in modo che la grossezza della vôlta si mostri crescente anche sotto i detti giunti, come risulta dalla figura 115, nella quale, in corrispondenza di una spalla e di una pila, trovansi anche rappresentati i timpani che generalmente servono di rinforzo alle arcate. Avviene talvolta che le direttrici dell'estradosso di due arcate successive s'intersecano in corrispondenza degli assi verticali delle pile (*Fig.* 116), ed una tal disposizione si può benissimo ammettere senza inconveniente quando le pile abbiano grossezze proporzionate ai carichi che devono sopportare.

9. **Risultati di due applicazioni numeriche.** — Applichiamo le formole da noi stabilite nel numero 7 a due casi particolari; nell'uno trattisi di un'arcata, per ponte di via carreggiabile, avente un arco di circolo per sezione retta della sua superficie d'intradosso; nell'altro invece di un'arcata per ponte di via ferrata, avente una mezza ellisse per direttrice della stessa superficie.

Arcata con direttrice circolare. — La corda $2c$ di quest'arcata sia di 30 metri, e di 6 metri la sua saetta m. Si ammetta che la vôlta debba essere di struttura laterizia; che il peso Π del metro cubo di questa muratura sia di 2000 chilogrammi, e di 1000000 di chilogrammi il corrispondente coefficiente di rottura R'' per pressione riferito al metro quadrato. Si assumano eguali tra di loro i due coefficienti di rottura R_0'' ed R'', e sia 1/10 il valore dei due coefficienti di stabilità n_0'' ed n''. Finalmente, supponendo il complesso dei carichi permanenti e dei sovraccarichi, ridotto in un equipollente prisma di muratura, si trovi 1 metro per quell'altezza $\overline{UL}$ (*Fig.* 111 e 112) che nel numero 6 si è denominata b. Siccome ciascun dei due giunti d'imposta fa colla verticale un angolo ϕ di 43° 36′ 10″, ne segue che con essi si confondono i giunti estremi. La superficie $\frac{P'}{\Pi}$ risulta di $43^{mq},12$ ed il momento $\frac{P'}{\Pi}p'$ viene dato da $214,^{mq\,x\,m},827$.

Applicando le formole (1) e (2) del numero 7, si ottiene

$$A = 3,448$$

$$B = 172,630$$

$$C = 429{,}654$$

e quindi

$$z_0' = 1^m{,}23.$$

Passando dopo alle formole (3) e (4) dello stesso numero, risultano

$$D = 0{,}344$$

$$E = 46{,}086$$

$$F = 173{,}940,$$

e si deduce

$$z' = 1^m{,}87.$$

Con un calcolo di prima approssimazione si trova adunque che le due grossezze dell'arcata alla chiave ed all'imposta devono rispettivamente essere di metri 1,23 e di metri 1,87.

Venendo alla seconda approssimazione, le formole (5) e (6) del citato numero 7 conducono a trovare

$$A' = 50$$

$$B' = 143{,}878$$

$$C' = 485{,}766,$$

per cui

$$z_0'' = 1^m{,}36\ ;$$

le formole (7) ed (8) dello stesso numero dànno

$$D' = 0{,}344$$

$$E' = 46{,}030$$

$$F' = 186{,}519,$$

e

$$z'' = 2^m{,}01.$$

Con un calcolo di seconda approssimazione si trova adunque che le due grossezze dell'arcata alla chiave ed all'imposta risultano rispettivamente di metri 1,36 e di metri 2,01.

Andando alla terza approssimazione, le già citate formole (5) e (6) dànno per A', B', C' e z_o'' i valori particolari A'', B'', C'' e z_o''', espressi da

$$A'' = 50$$

$$B'' = 140{,}948$$

$$C'' = 489{,}913$$

e

$$z_o''' = 1^m{,}39.$$

Dalle successive formole (7) ed (8) poi si ricavano per D', E', F' e z'' i valori particolari D'', E'', F'' e z''' dati da

$$D'' = 0{,}344$$

$$E'' = 46{,}008$$

$$F'' = 189{,}238$$

e

$$z''' = 2^m{,}04.$$

Risulta adunque dal calcolo di terza approssimazione che le due grossezze dell'arcata alla chiave ed all'imposta sono rispettivamente di metri 1,39 e di metri 2,04, e quindi appena di metri 0,03 superiori alle grossezze ottenute coi calcoli di seconda approssimazione.

È singolare l'accordo che esiste fra la grossezza alla chiave ottenuta colle formole da noi stabilite, e quella che si deduce dalla formola empirica di Léveillé, stata riportata nel numero 149 del nostro lavoro intitolato *Costruzioni civili, stradali ed idrauliche*. Le nostre formole conducono ad una grossezza di metri 1,39, e la citata formola di Léveillé dà metri 1,33.

Un analogo accordo si osserva pure allorquando si confronta la grossezza di metri 1,39 da noi ottenuta con le grossezze state adottate alla chiave per le arcate di alcuni classici ponti indicati nei commendevoli lavori di Hermann Scheffler (1) e di J. Dupuit (2); giacchè, per arcate la cui direttrice della superficie d'intradosso è un

(1) *Traité de la stabilité des constructions*; tradotto dal tedesco ed annotato dal signor Victor Fournié.

(2) *Traité de l'équilibre des voûtes et de la construction des ponts en maçonnerie.*

arco di circolo, colla corda compresa fra 28 e 32 metri e colla saetta variabile fra metri 2,17 e 5,80, si trova che la grossezza alla chiave varia fra metri 1,20 e metri 1,62.

Arcata con direttrice ellittica. — La direttrice della superficie d'intradosso sia una mezza ellisse coll'asse maggiore, costituente la corda dell'arcata, di metri 40, e col semi-asse minore di metri 10. La vôlta debba essere costrutta in pietra da taglio; il peso Π del metro cubo di muratura sia di 2400 chilogrammi; ed il relativo coefficiente di rottura per pressione, riferito al metro quadrato, di chilogrammi 2000000. Si suppongano eguali fra di loro i due coefficienti di rottura R_o'' ed R'', e sia 1/10 il valore dei due coefficienti di stabilità n_o'' ed n''. Al complesso dei carichi permanenti e dei sovraccarichi, ridotto ad un equipollente prisma di muratura, corrisponda l'altezza b (Num. 6) di metri 1,60.

Assumendo come giunti estremi quelli che fanno colla verticale l'angolo di 60°, risulta di $67^{mq},27$ la superficie $\frac{P'}{\Pi}$, e di $456^{mq\,x\,m},065$ il momento $\frac{P'}{\Pi} p'$.

Instituendo i calcoli per ottenere una prima copia di valori approssimati delle grossezze alla chiave ed al giunto estremo, ed applicando perciò le formole (1), (2), (3) e (4) del numero 7, si trova: che i coefficienti A, B e C ammettono i valori

$$A = 25,026$$

$$B = 388,462$$

$$C = 912,130;$$

che la grossezza z_o' risulta

$$z_o' = 1^m,13;$$

che ai coefficienti D, E ed F corrispondono i valori

$$D = 0,375$$

$$E = 75,864$$

$$F = 248,623;$$

e che la grossezza z' viene data da

$$z' = 1^m,63.$$

Passando ai calcoli per ottenere altri valori più approssimati delle due grossezze alla chiave ed al giunto estremo, ed applicando perciò le formole (5), (6), (7) ed (8) del citato numero 7, si ottiene: che i valori dei coefficienti numerici A', B' e C' sono

$$A' = 83{,}333$$

$$B' = 370{,}034$$

$$C' = 1007{,}444\,;$$

che la grossezza z_o'' risulta

$$z_o'' = 1^m{,}20\,;$$

che i coefficienti D', E' ed F' sono dati da

$$D' = 0{,}375$$

$$E' = 75{,}817$$

$$F' = 255{,}960\,;$$

e finalmente che si deduce pel valore di z''

$$z'' = 1^m{,}68.$$

Andando alla terza approssimazione, si ottiene: che i coefficienti A'', B'' e C'' risultano

$$A'' = 83{,}333$$

$$B'' = 368{,}577$$

$$C'' = 1010{,}382\,;$$

che il valore di z_o''', quando si tenga conto dei soli centimetri, è

$$z_o''' = 1^m{,}21\,;$$

che i coefficienti D'', E'' ed F'' sono dati da

$$D'' = 0{,}375$$

$$E'' = 75{,}809$$

$$F'' = 257{,}182\,;$$

e che il valore di z''', tenendo anche conto dei soli centimetri, è

$$z''' = 1^{m},69.$$

Accertandoci dei calcoli di terza approssimazione, i quali conducono a risultamenti che differiscono pochissimo da quelli ottenuti coi calcoli di seconda approssimazione, si può adunque dire che le due grossezze dell'arcata alla chiave ed in un suo giunto estremo, inclinato colla verticale dell'angolo di 60°, risultano rispettivamente di metri 1,21 e di metri 1,69.

I risultamenti, che nel caso or ora trattato abbiamo ottenuti applicando le formole del numero 6, non presentano più, colla formola empirica di Léveillé e con quanto si verifica in arcate di ponti già costrutti, quel singolare accordo che si è fatto rimarcare nel primo caso. La citata formola empirica darebbe, per grossezza alla chiave dell'arcata da noi considerata, metri 1,66 invece di metri 1,21 ; ed in alcuni classici ponti accennati nelle citate opere di Scheffler e di Dupuit, aventi una mezza elisse od una mezza ovale per direttrice della superficie d'intradosso, coll'apertura fra 39 e 42 metri e colla saetta di metri 11,70 a 9,75, si sarebbero adottate alla chiave grossezze comprese fra metri 1,45 e metri 1,95. A spiegare l'accennata discrepanza di risultati vale l'osservare : che la citata formola empirica e tante altre che in sua vece si potrebbero adottare, non tenendo conto della resistenza dei materiali, valgono soltanto pei casi di arcate da farsi con buoni materiali, i cui coefficienti di rottura non eccedono l'ordinario limite di chilogrammi 1000000 per ogni metro quadrato ; che per conseguenza queste formole devono dare, e che le arcate con esse progettate devono presentare grossezze di chiave eccedenti il bisogno, quando i materiali hanno un coefficiente di rottura maggiore dell'indicato limite. Nel caso dell'arcata ellittica da noi considerata, si è supposto che il coefficiente di rottura per pressione dei materiali da impiegarsi nella sua costruzione sia di chilogrammi 2000000 per ogni metro quadrato, ossia doppio dell'ordinario limite sopra indicato ; le formole da noi proposte, tenendo conto di questa circostanza, dovevano dare una grossezza di chiave minore di quella a cui condurrebbe l'applicazione delle ordinarie formole empiriche ; e quindi è accettabile, razionale e conforme alla realtà il risultato da noi ottenuto (*b*).

(*b*) Una formola empirica, la quale, forse più di ogni altra, dà risultati che ben

Arcate di grossezza costante dalla chiave all'imposta.

10. **Equazioni determinatrici della spinta orizzontale e della grossezza di un'arcata coll'estradosso parallelo all'intradosso.** — Abbandonando la condizione che la pressione media sul giunto verticale alla chiave sia quella che permanentemente e stabilmente possono sopportare i materiali da impiegarsi alla sommità dell'arcata, e ritenendo l'ipotesi e l'altra condizione stata enunciata nel numero 1, riesce facile determinare la grossezza da darsi ad un'arcata che si vuole di spessezza costante.

Supponendo che la pressione media sul giunto estremo IK (*Fig.* 117) passi pel punto di mezzo O del giunto medesimo, conservando alle lettere c, m, p', p'', ϕ, P', P'', Q e Π i significati che alle medesime vennero attribuiti nel numero 5, ed indicando con z le due lunghezze eguali $\overline{BC}$ ed $\overline{IK}$ del giunto alla chiave e dei giunti estremi, si ottiene un'equazione, la quale altro non può essere che l'equazione (2) del citato numero 5, modificata pel solo cangiamento di z_0 in z; cosicchè risulta

$$\left\{\begin{array}{l}\left[m+\frac{1}{2}z(1-\cos\phi)\right]Q-\left(p'+\frac{1}{2}z\operatorname{sen}\phi\right)P' \\ -\frac{1}{2}\Pi(c+z\operatorname{sen}\phi)\,cz-P''p''\end{array}\right\}=0 \qquad (1).$$

La condizione che la pressione normale, riferita all'unità di superficie, sul detto giunto estremo IK sia eguale a quella che permanentemente e stabilmente possono sopportare i materiali componenti l'arcata, conduce ad un'equazione, la quale è la stessa equazione (3) del numero 5, modificata col solo cangiamento di z_0 in z. Se adunque

s'accordano con quelli a cui conduce il metodo da noi proposto, è quella del Dupuit. Questa formola, assumendo il metro per unità di lunghezza, è

$$x=0{,}20\sqrt{A}.$$

La lettera x rappresenta la grossezza dell'arcata alla chiave; la lettera A è il diametro della direttrice della superficie d'intradosso quando questa direttrice è circolare, è invece la corda della stessa direttrice quando essa è una mezza ellisse o una mezza ovale.

si conservano alle lettere n'' ed R'' i significati che ad esse già vennero attribuiti nell'or indicato numero, si ha

$$Q\cos\varphi+(P'+\Pi cz+P'')\operatorname{sen}\varphi=n''R''z \qquad (2).$$

Dividendo le equazioni (1) e (2) or ora stabilite per Π e trasportando nel primo membro il termine che trovasi nel secondo membro della (2), si ottengono le equazioni

$$\left\{\begin{array}{l}\left[m+\frac{1}{2}z(1-\cos\varphi)\right]\frac{Q}{\Pi}-\left(p'+\frac{1}{2}z\operatorname{sen}\varphi\right)\frac{P'}{\Pi}\\ -\frac{1}{2}(c+z\operatorname{sen}\varphi)cz-\frac{P''}{\Pi}\,p''\end{array}\right\}=0 \qquad (3),$$

$$\frac{Q}{\Pi}\cos\varphi+\left(\frac{P'}{\Pi}+cz+\frac{P''}{\Pi}\right)\operatorname{sen}\varphi-\frac{n''R''}{\Pi}z=0 \qquad (4),$$

le quali servono alla determinazione della grossezza z dell'arcata e del rapporto $\frac{Q}{\Pi}$ della spinta orizzontale al peso Π dell'unità di volume di muratura, allorquando si pongano in esse, invece di P'' e del prodotto $P''p''$, i loro valori in funzione della grossezza z. Meritano poi di essere rimarcati i quozienti $\frac{P'}{\Pi}$ e $\frac{P''}{\Pi}$, siccome rappresentanti, il primo l'area del complesso delle due figure B V I e C N L U, il secondo l'area della figura I L M K.

11. **Eliminazione di P'' e del prodotto $P''p''$ dalle equazioni determinatrici della spinta orizzontale e della grossezza di un'arcata coll'estradosso parallelo all'intradosso.** — Ammettendo, come nel numero 6, che la parte L M della linea N Y sia rettilinea, e conservando alle lettere b ed α gli stessi significati che nel or citato numero loro vennero attribuiti, i valori del peso P'' e del momento $P''p''$ risultano

$$P''=\Pi\left\{b+m+\left[1-\frac{1}{2}\left(\cos\varphi+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{sen}\varphi\right)\right]z\right\}z\operatorname{sen}\varphi$$

$$P''p''=\frac{1}{12}\Pi(\cos\varphi+\operatorname{tang}\alpha\operatorname{sen}\varphi)z^3\operatorname{sen}^2\varphi.$$

I trovati valori di P'' e di $P''p''$, posti nelle equazioni (3) e (4),

conducono alle equazioni determinatrici delle due incognite z e $\frac{Q}{\Pi}$, le quali equazioni, convenientemente ordinate per rapporto alle incognite medesime, risultano

$$\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{12}(\cos\phi+\text{tang}\,\alpha\,\text{sen}\,\phi)\,\text{sen}^2\phi.\,z^3-\frac{1}{2}c\,\text{sen}\,\phi.\,z^2 \\ +\frac{1}{2}(1-\cos\phi)\,z.\,\frac{Q}{\Pi}-\frac{1}{2}\left(c^2+\frac{P'}{\Pi}\,\text{sen}\,\phi\right)z \\ +m\,\frac{Q}{\Pi}-\frac{P'}{\Pi}p' \end{array}\right\}=0 \quad (1),$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[1-\frac{1}{2}(\cos\phi+\text{tang}\,\alpha\,\text{sen}\,\phi)\right]\text{sen}^2\phi.\,z^2 \\ +\left[c\,\text{sen}\,\phi+(b+m)\,\text{sen}^2\phi-\frac{n''R''}{\Pi}\right]z \\ +\frac{Q}{\Pi}\cos\phi+\frac{P'}{\Pi}\,\text{sen}\,\phi \end{array}\right\}=0 \quad (2).$$

Ricavando dall'equazione (2) il valore di $\frac{Q}{\Pi}$, si ottiene

$$\frac{Q}{\Pi}=\frac{1}{\cos\phi}\left\{\begin{array}{l} -\left[1-\frac{1}{2}(\cos\phi+\text{tang}\,\alpha\,\text{sen}\,\phi)\right]\text{sen}^2\phi.\,z^2 \\ +\left[\frac{n''R''}{\Pi}-c\,\text{sen}\,\phi-(b+m)\,\text{sen}^2\phi\right]z \\ -\frac{P'}{\Pi}\,\text{sen}\,\phi \end{array}\right\} \quad (3).$$

Se ora si pone questo valore di $\frac{Q}{\Pi}$ nell'equazione (1), si ha l'equazione finale in z, la quale risulta del terzo grado. Indicando con H, I, K ed L i quattro coefficienti numerici della detta equazione del terzo grado, saranno essi dati da

$$\left.\begin{aligned}
H &= \left[(\cos\phi + \operatorname{tang}\alpha \operatorname{sen}\phi)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\cos\phi\right) - \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\phi\right]\operatorname{sen}^2\phi \\
I &= \left\{\begin{aligned} &+\left[\frac{n''R''}{\Pi} - (b+m)\operatorname{sen}^2\phi\right]\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}\phi \\ &-m\left[1 - \frac{1}{2}(\cos\phi + \operatorname{tang}\alpha\operatorname{sen}\phi)\right]\operatorname{sen}^2\phi - \frac{1}{2}c\operatorname{sen}\phi \end{aligned}\right. \\
K &= \left\{\begin{aligned} &+m\left[\frac{n''R''}{\Pi} - (b+m)\operatorname{sen}^2\phi\right] \\ &-c\left(\frac{1}{2}c\cos\phi + m\operatorname{sen}\phi\right) - \frac{1}{2}\frac{P'}{\Pi}\operatorname{sen}\phi \end{aligned}\right. \\
L &= -\frac{P'}{\Pi}(m\operatorname{sen}\phi + p'\cos\phi)
\end{aligned}\right\} \quad (4),$$

e quindi l'equazione determinatrice di z risulta

$$Hz^3 + Iz^2 + Kz + L = 0. \qquad (5).$$

Calcolando prima i coefficienti H, I, K ed L mediante la formola (4), e quindi trattando l'equazione (5) coi metodi proprii alla risoluzione delle equazioni del terzo grado, od anche coi metodi d'approssimazione che s'impiegano nella risoluzione delle equazioni numeriche, si dedurrà il valore della grossezza z dell'arcata. Questo valore di z si porrà poi nella formola (3) onde determinare la spinta orizzontale Q.

Mediante l'equazione di stabilità

$$n_o'' R_o'' z = Q \qquad (6),$$

essendo noti i valori di z e di Q e fissandosi il valore del coefficiente di rottura R_o'' pei materiali componenti la chiave dell'arcata, si potrà dedurre il coefficiente di stabilità n_o'' e quindi verificare quale stabilità ha luogo nel giunto verticale alla chiave dell'arcata medesima.

12. **Formola d'approssimazione per trovare la grossezza di una arcata coll'estradosso parallelo all'intradosso.** — Nelle ordinarie e più frequenti circostanze della pratica, il valore assoluto del coefficiente H dell'equazione (5) del precedente numero è assai piccolo in confronto dei valori assoluti degli altri tre coefficienti, e principalmente dei due coefficienti K e L, e quest'osservazione ci mette

in grado di poter facilmente determinare per approssimazioni successive la grossezza z. Si ponga perciò la citata equazione (5) sotto la forma

$$Iz^2 + Kz + (L + Hz^3) = 0,$$

e, considerando il termine Hz^3 come una parte del termine tutto cognito, si ricavi

$$z = -\frac{1}{2}\frac{K}{I} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{K}{I}\right)^2 - \frac{L + Hz^3}{I}} \qquad (1).$$

Incominciando col trascurare il termine Hz^3, questa formola dà un primo valore z' di z; sostituendo il valore di z' nel secondo membro della stessa formola in luogo di z, si ottiene un secondo valore z'' di z che più del primo si approssima al vero; ponendo il valore di z'' in luogo di z nel secondo membro, si ha un terzo valore, e così continuando, finchè si trovino due valori successivi che non differiscano più di un centimetro, in modo spedito e sufficiente per la pratica si può determinare la grossezza di un'arcata, avente la sua superficie d'estradosso parallela a quella d'intradosso.

La formola che abbiamo proposto onde determinare per approssimazioni successive il valore di z, porta innanzi al radicale il doppio segno $\pm$, e naturalmente nell'applicarla bisognerà prendere quello dei due segni che conduce ad un valore positivo di z, conforme alle esigenze di quella giusta economia che è necessario porre nelle costruzioni.

13. **Risultati di un'applicazione numerica.** — Venendo ad un'applicazione numerica, supponiamo che debbasi dare il progetto di un arcata di grossezza uniforme colla corda di 20 metri e colla saetta di 4 metri. Si ammetta che la vôlta debba essere di struttura laterizia; che il peso II del metro cubo di muratura sia di 2000 chilogrammi, di 1000000 chilogrammi il corrispondente coefficiente di rottura per pressione R'' riferito al metro quadrato, ed eguale ad 1/10 il coefficiente di stabilità n''; e finalmente che al complesso dei carichi permanenti e dei sovraccarichi, ridotto in un equipollente prisma di muratura, corrisponda l'altezza b (Num. 6) di metri 1,60.

I due giunti d'imposta fanno colla verticale un angolo di 43° 36′ 10″ e quindi con essi si confondono i due giunti estremi. La superficie $\frac{P'}{II}$ risulta di $28^{mq},4985$, ed il momento $\frac{P'}{II}p'$ viene dato da $110^{mq\,xm},3186$.

Calcolando mediante le formole (4) del numero 11 i coefficienti H, I, K ed L, si ottengono i valori

$$H = -\ 0{,}0626$$

$$I = \ \ 1{,}8672$$

$$K = \ 115{,}7258$$

$$L = -158{,}5026.$$

Trascurando nella formola (1) del precedente numero il termine Hz^3, e ponendo in essa i trovati valori di I, K ed L, si ottiene

$$z' = 1^m{,}339$$

per il primo valore approssimato della grossezza z. Sostituendo nella stessa formola i riportati valori di H, I, K ed L e mettendo per z^3 il cubo di z', si deduce

$$z'' = 1^m{,}341$$

per secondo valore approssimato della grossezza z.

Accontentandoci dei calcoli di prima e di seconda approssimazione, giacchè i risultati ottenuti differiscono appena di 2 millimetri, possiamo adunque dire che l'arcata deve avere la grossezza costante di metri 1,341.

Calcolando il valore della spinta orizzontale Q mediante la formola (3) del numero 11, si ottiene

$$Q = 94212^{cg}$$

e, supponendo che abbiasi $R_0'' = R''$, come avviene quando l'intiera arcata è costituita da materiali aventi tutti la stessa resistenza, la formola (6) dell'or citato numero dà

$$n_0'' = \frac{1}{14{,}24}.$$

Cosicchè, mentre nei giunti estremi si ha la stabilità definita dalla frazione 1/10, si ha alla chiave la stabilità assai maggiore misurata dalla frazione $\frac{1}{14{,}24}$.

Osservazioni e conclusioni finali.

14. — **Ipotesi sulle quali si fonda l'esposto metodo per determinare le principali dimensioni delle arcate.** — Determinando le due grossezze di un'arcata alla chiave e nei giunti estremi colla condizione che la pressione media sul giunto verticale sia eguale a quella che permanentemente e stabilmente possono sopportare i materiali, col supporre che la pressione sui giunti estremi passi pei centri di superficie dei giunti medesimi e colla condizione che la pressione normale, riferita all'unità di superficie, su questi stessi giunti sia pure eguale a quella che permanentemente e stabilmente possono sopportare i materiali, finiamo per basare il nostro metodo sulle seguenti ipotesi: che la spinta orizzontale dell'arcata sia applicata nel mezzo del suo giunto verticale; e che la pressione sui giunti estremi passi pei loro punti di mezzo. Queste ipotesi sono tali da poter lasciare qualche dubbio sull'opportunità e sull'utilità dei risultati a cui esse conducono, e quindi abbiamo creduto nostro dovere, non solo di esplicitamente dichiararle, ma anche di discuterle e di far risultare le loro più perniciose influenze sui risultamenti definitivi.

Alle accennate due ipotesi se ne dovrebbe ancora aggiungere una terza, colla quale abbiamo ammesso che il masso murale sopportato dall'arcata graviti su essa come se fosse tagliato dai due piani verticali passanti per le generatrici dell'estradosso in corrispondenza dei giunti estremi. L'aver però osservato nella demolizione di vecchie arcate che l'addentellamento delle pietre e la tenacità delle malte sono sovente bastanti ad impedire la rovina dei timpani anche dopo la distruzione delle sottostanti vôlte, ci induce a considerare l'indicata quarta ipotesi come favorevole alla stabilità, e quindi come tale da potersi sempre accettare senza alcuna discussione.

15. **Discussione dell'ipotesi colla quale si ammette che la spinta orizzontale di un'arcata sia applicata nel mezzo del suo giunto verticale.** — Le conclusioni state dedotte nel numero 2 e l'avviso da molti valenti costruttori già stato manifestato sul punto d'applicazione della spinta orizzontale di un'arcata alla chiave, ci persuadono che, nei limiti di quell'approssimazione che è permesso ottenere nelle pratiche applicazioni, in nessun modo quell'ipotesi può condurre a risultati compromettenti la sicurezza di un'arcata.

Per quante arcate siano state da noi osservate ed esaminate, giam-

mai ci venne fatto di riconoscere aprimento dei giunti presso la chiave verso l'intradosso o verso l'estradosso, di maniera che è giuocoforza conchiudere che per intiero trovansi premuti i loro giunti verticali. Può darsi che, per la non perfetta coincidenza del punto d'applicazione della spinta orizzontale col mezzo del giunto verticale di un'arcata, la pressione su questo giunto non sia uniformemente distribuita, ma allora tutto al più può verificarsi il caso di una pressione massima all'intradosso o all'estradosso e d'una pressione nulla all'estradosso o all'intradosso. In questo caso, il più sfavorevole che si può presentare, la massima pressione riferita all'unità di superficie è il doppio della pressione media (*Arte di fabbricare, Costruzioni civili, stradali ed idrauliche*, nota (*d*), Num. 30), e quindi tutto al più può avvenire una diminuzione di stabilità alla chiave in modo da essere la stabilità definitiva, determinata da una frazione con valore presso a poco doppio di quello stato assunto per n_o'' nell'applicazione delle formole da noi proposte. Siccome poi il coefficiente di stabilità n_o'' deve essere assunto (Num. 4) fra 1/10 ed 1/16, risulta che l'inconveniente più grave, al quale può condurre l'ipotesi di considerare la spinta orizzontale, siccome applicata nel mezzo del giunto verticale di chiave, è quello di avere nel giunto stesso una stabilità minore della supposta, e definita da una frazione con valore di circa 1/5 ad 1/8. Anche nel caso adunque di una pressione massima all'intradosso o all'estradosso, caso il più sfavorevole e che giammai abbiamo visto verificato nelle arcate di ponti, la citata ipotesi non può compromettere la sicurezza dell'opera, giacchè alla chiave in nessun modo potrà aver luogo una pressione maggiore della quinta all'ottava parte di quella che è capace di promuovere i primi sintomi di schiacciamento dei materiali.

Osserveremo ancora che, essendo G (*Fig.* 118) il punto d'applicazione della spinta orizzontale di un'arcata alla chiave, O il punto d'applicazione della pressione su un giunto inclinato IK e VV la verticale passante pel centro di gravità del peso P della parte di vôlta IBCK e dei carichi che essa porta, si può graficamente ottenere la spinta orizzontale nel cateto $\overline{PQ}$ del triangolo rettangolo DPQ. Questo triangolo poi si costruisce conducendo l'orizzontale GΩ determinante sulla VV il punto D, tracciando la retta DO, portando la lunghezza $\overline{DP}$ rappresentante il peso P e tirando la orizzontale PQ. Or bene, se la spinta orizzontale non fosse realmente applicata nel punto G, ma sibbene in un punto G_1 situato al di sopra del punto G, si potrebbe essa ottenere con un metodo affatto identico, e sarebbe

quindi rappresentata dal cateto orizzontale $\overline{P_1Q_1}$ del triangolo rettangolo $D_1P_1Q_1$ costrutto col portare $\overline{D_1P_1} = \overline{DP}$. Essendo per costruzione eguali i due cateti verticali dei triangoli rettangoli DPQ e $D_1P_1Q_1$ ed essendo l'angolo VD_1Q_1 minore dell'angolo VDQ, ne viene la conclusione che il cateto $\overline{P_1Q_1}$ è minore del cateto $\overline{PQ}$. Se adunque si suppone che la spinta orizzontale di un'arcata sia applicata nel mezzo G del suo giunto verticale, e se invece trovasi realmente applicata in G_1 un po' al di sopra del mezzo medesimo, essa spinta ha un valore un po' minore di quello relativo alla fatta ipotesi, e quindi sotto questo riguardo trovasi avvantaggiata la stabilità definitiva.

Se invece si suppone che la spinta orizzontale di un'arcata sia applicata nel mezzo del suo giunto verticale, e se realmente si trova applicata in G_2 di qualche poco al di sotto del mezzo del giunto medesimo, la spinta che effettivamente si verifica si può graficamente ottenere nel cateto $\overline{P_2Q_2}$ del triangolo rettangolo $D_2P_2Q_2$ avente il cateto $\overline{D_2P_2}$ eguale al cateto $\overline{DP}$ ed avente l'ipotenusa D_2Q_2 diretta secondo la linea D_2O. Per essere l'angolo VD_2Q_2 maggiore dell'angolo VDQ, il cateto $\overline{P_2Q_2}$ risulta maggiore del cateto $\overline{PQ}$, la spinta reale sarebbe adunque maggiore di quella supposta, e quindi di qualche poco potrebbe trovarsi diminuita la definitiva stabilità. Questo caso sfavorevole però, come già venne osservato nel numero 2, non si presenta mai nella costruzione delle arcate pei moderni ponti, e non può quindi destare la benchè minima apprensione.

16. **Discussione dell'ipotesi colla quale si ammette che la pressione sui giunti estremi passi pei loro punti di mezzo.** — L'osservazione attenta dei fenomeni che si manifestano allorquando si incomincia a disarmare un'arcata, ossia allorquando si incomincia ad abbassare l'armatura sulla quale essa venne costrutta, porta a conchiudere: che una parte di arcata compresa fra il giunto verticale ed un giunto estremo tende abbassarsi per rotazione attorno ad una retta orizzontale situata sull'intradosso o presso l'intradosso, nello stesso giunto estremo o in un giunto ad esso assai vicino; che le due parti comprese fra il giunto verticale ed i due giunti estremi incominciano a farsi contrasto; e che nasce la spinta orizzontale, la quale, col suo momento attorno all'indicata retta, si oppone al detto abbassamento. Questa spinta, durante l'operazione del disarmo, passa per tutti i valori inferiori a quello che definitivamente acquista; la pressione, sui giunti estremi verso l'intradosso, si fa pure ognor cre-

scente fino a raggiungere il valore che conserva dopo il disarmamento; e la superficie di ciascuno dei detti giunti, quasi si comporta come una lastra elastica IK (*Fig.* 119) sostenuta da molle nei punti vicinissimi I, a, b, c,....., e premuta dalla parte dell'intradosso con una forza crescente R. Finchè il valore di R è piccolo, ciò che avviene nei primi momenti del disarmo, le deformazioni che si manifestano nel giunto IK sono anche piccole e di poco si protendono al di là dell'intradosso; ma, crescendo il valore di R, queste deformazioni s'avanzano nel giunto e progrediscono verso l'estradosso. L'accrescimento successivo di deformazione successivamente accresce l'estensione e l'intimità del contatto della vôlta nei giunti estremi, ed il punto d'applicazione della forza R si allontana perciò dall'intradosso e si approssima al mezzo del giunto IK. Finalmente quando il valore di R raggiunge il suo valore massimo, è pure massima la deformazione avvenuta nel giunto IK e minima la distanza del punto d'applicazione della R dal mezzo del giunto medesimo. Siccome poi giammai ci venne fatto di riscontrare il benchè minimo distacco verso l'estradosso in arcate, le cui grossezze nei giunti estremi sono presso a pòco quelle che corrispondono all'ipotesi di una pressione media uniforme eguale al prodotto del coefficiente di rottura pel conveniente coefficiente di stabilità (Num. 4), mentre invece questo sconcio ci venne fatto di rimarcare in alcune arcate aventi nei giunti estremi grossezze maggiori di quelle corrispondenti all'or indicata ipotesi, ci pare di poter conchiudere: che, negli ordinarii e più frequenti casi della pratica, per intiero devono trovarsi premuti i giunti estremi di un'arcata, le cui principali dimensioni siansi determinate col metodo da noi proposto; che la pressione sui giunti estremi non è uniformemente distribuita, ma che tutto al più può verificarsi il casó di una pressione massima all'intradosso e di una pressione nulla all'estradosso; e che per conseguenza, anche pei giunti estremi, sono accettabili le conseguenze a cui nel precedente numero siamo giunti relativamente alla stabilità definitiva nel giunto verticale alla chiave.

Cercando la spinta orizzontale di un'arcata nelle due ipotesi che la pressione media sul giunto estremo IK passi pel suo mezzo O (*Fig.* 120) e quindi per un punto O_1 posto fra l'intradosso ed il punto O, si trova: che le due spinte sono differenti che esse sono rispettivamente rappresentate dai cateti $\overline{PQ}$ e $\overline{PQ_1}$ dei due triangoli rettangoli DPQ e DPQ_1, le cui ipotenuse passano pei punti O ed O_1; e che quindi quella corrispondente al punto O_1 è minore di quella

corrispondente al punto O. Segue da ciò che l'ipotesi, con cui si ammette che la pressione sui giunti estremi passi pei loro mezzi, in quanto può condurre ad una spinta orizzontale maggiore della vera, può avvantaggiare la stabilità dell'arcata alla chiave.

Abbassando da D una perpendicolare DX al giunto IK, si ha una retta compresa nell'angolo VDQ. Le proiezioni di punti della PQ sulla DX, tanto più distano da D, quanto più i punti a cui tali proiezioni si riferiscono distano da P; e quindi proiettando i punti Q e Q_1 in N ed N_1, risulta la lunghezza $\overline{DN} > \overline{DN_1}$. Ma, le ipotenuse $\overline{DQ}$ e $\overline{DQ_1}$ rappresentano rispettivamente le pressioni sul giunto IK nelle due diverse ipotesi che esse passino pei punti O ed O_1, mentre $\overline{DN}$ e $\overline{DN_1}$ sono le componenti delle stesse pressioni normali al detto giunto; e quindi, coll'ammettere che la pressione sui giunti estremi passi pel loro mezzo, si arriva a trovare una pressione normale ai giunti stessi, la quale non può essere minore di quella che effettivamente si verifica. Per rapporto adunque alla totale pressione normale al giunto estremo IK, col supporla applicata nel mezzo O del giunto medesimo, si opera in vantaggio, anzichè a danno della stabilità; cosicchè questa circostanza contribuisce a diminuire di qualche poco il già notato inconveniente della quasi certezza di una pressione non uniformemente distribuita sui giunti estremi.

17. Ripieghi per ottenere che la pressione sui giunti estremi si approssimi ad essere applicata nel mezzo dei giunti medesimi. — Da quanto si è detto nei due precedenti numeri, risulta: che le arcate progettate col metodo da noi proposto, anche nei casi più sfavorevoli, presentano sufficienti garanzie di stabilità nel giunto verticale e nei giunti estremi; e che i coefficienti di stabilità relativi alle pressioni sui detti giunti, i quali coefficienti hanno appunto per iscopo di prevenire le dannose conseguenze provenienti da cause i cui effetti non si possono esattamente valutare, bastano per controbilanciare gli inconvenienti che possono derivare dalle fatte ipotesi sui punti d'applicazione delle pressioni. Con alcuni ripieghi di costruzione poi, assai facilmente il costruttore può ottenere che un'arcata si trovi, dopo l'esecuzione, in condizioni assai prossime a quelle, nelle quali venne supposta nella determinazione diretta delle sue principali dimensioni; ed ecco un cenno di quelli che reputiamo i più semplici e di più facile applicazione.

Ponendo dalla parte, verso la quale i giunti tendono chiudersi e sulla quale tende manifestarsi la massima pressione riferita all'unità di superficie, maggior quantità di malta che non dalla parte oppo-

sta, si ha per risultato: di aumentare la spessezza dei giunti, là dove la pressione si fa sentire con maggiore energia; e di avere dalla parte, verso la quale ha tendenza manifestarsi la pressione massima riferita all'unità di superficie, una specie di cuneo che, accrescendo il contatto fra le due parti di vôlta da esso separate, spinge il punto d'applicazione della pressione verso il mezzo. Questa disposizione non può a meno di condurre a buoni risultati, allorquando si adotti: pei giunti estremi e per alcuni giunti superiori, nelle arcate i cui giunti estremi si confondono coi giunti d'imposta; pei giunti estremi e per alcuni giunti superiori ed inferiori, nelle arcate i cui giunti d'imposta si trovano sotto i giunti estremi. Converrà che l'epoca del disarmo non venga di molto protratta dopo la costruzione dell'arcata, affinchè le malte abbiano ancora la proprietà di poter far presa; e può tornar utile la pratica di guernire di stoppa verso l'intradosso e verso l'estradosso quei giunti in cui si vuole che la malta non schizzi in troppa abbondanza da eludere lo scopo per cui venne collocata. Disarmata la vôlta, si toglie la stoppa, e sulle fenditure che essa riempiva si fa una stuccatura con buona malta cementizia.

Più efficace del ripiego che abbiamo indicato, è quello stato proposto dal Dupuit. Per un giunto, il quale, come i giunti estremi, tenda aprirsi verso l'estradosso, si tagli il letto inferiore del cuneo che su esso si deve posare in modo che il suo profilo consti di una parte rettilinea *ab* (*Fig.* 121) posta dalla parte dell'estradosso e normale all'intradosso, di un'altra parte rettilinea *bc* talmente diretta da risultare ottusissimo l'angolo *abc*, e d'una piccola curva raccordatrice in *b* delle due indicate parti rettilinee. Se il giunto *abcde* non si riempie che di stoppa, al momento del disarmo l'arcata girerà come attorno un perno situato in *b*, e così, se il punto *b* si sarà collocato verso il mezzo del giunto estremo, la pressione su questo giunto si troverà applicata presso il mezzo del giunto medesimo. Il Dupuit poi, nell'intento di ottenere che la detta pressione passi effettivamente per l'indicato punto di mezzo, propone di collocare il punto *b* di 2 o 3 centimetri al di là del centro del giunto verso l'estradosso. Disarmata la vôlta, si toglierà, per quanto riesce possibile, la stoppa stata posta nel giunto *edcba*, ed in esso si opererà una conveniente stuccatura con buona materia cementizia.

Volendosi applicare alle arcate di mattoni l'or indicato ripiego, importa fare in modo che ciascun giunto estremo si trovi fra due filari di conci in pietra da taglio, il cui coefficiente di rottura non sia minore di quello dei mattoni.

Per arcate di grande portata si potrebbero anche porre, in corrispondenza di ciascun giunto estremo, due piastre di ghisa, incastrate nella muratura e disposte in modo da comprendere fra loro il detto giunto. Mediante un foglio di piombo interposto a queste piastre e della spessezza di 3 o 4 millimetri, si potrà preservare il metallo contro l'effetto di una concentrazione di pressione su una base poco estesa. Anche il fare in modo che le due piastre siano in contatto verso il loro mezzo mediante due superficie cilindriche, incavata l'una e convessa l'altra, può condurre a buonissimi risultati. Combinando poi le cose in guisa che queste piastre per intiero si trovino nel masso del vôlto, si potranno stuccare con malta cementizia i giunti che esse comprendono, ed ottenere che questi giunti non differiscano punto da tutti gli altri dell'arcata.

Le disposizioni che abbiamo indicate, per ottenere che la pressione sui giunti estremi si trovi presso a poco applicata verso il mezzo dei giunti medesimi, riescono utili, non solo perchè hanno per risultato di porre l'arcata in condizioni suscettive di una valutazione numerica precisa, ma anche perchè per tutti i giunti si hanno pressioni presso a poco applicate nel loro mezzo. Nella pratica però non si deve ad esse ricorrere in tutti i casi. I procedimenti ordinari non presentano apprezzabili inconvenienti nelle più frequenti circostanze, e quindi non conviene cercare inutili complicazioni. Quando però le vôlte devono essere di grandi portate e quando è giuocoforza impiegare materiali non molto resistenti, importa che il costruttore abbia ricorso ad alcuno dei procedimenti od a procedimenti analoghi a quelli che abbiamo accennati onde ottenere che la pressione sui giunti estremi venga a passare presso i loro centri, e che procuri di raggiungere lo scopo applicando le disposizioni più efficaci ai casi più difficili.

VOLUME DELLO SPICCHIO CILINDRICO

E

VOLUMI COMPRESI FRA LE SUPERFICIE D'INTRADOSSO ED I PIANI D'IMPOSTA DELLE VOLTE A PADIGLIONE DELLE VOLTE A BOTTE CON TESTE DI PADIGLIONE E DELLE VOLTE A SCHIFO

1. **Spicchio cilindrico.** — Siano AL (*Fig.* 122) la direttrice, ed AB una generatrice di una superficie cilindrica qualunque; ABCD un piano qualsiasi passante per l'indicata generatrice; E un punto assunto in questo piano; EH ed EI due rette in esso condotte; EF una retta comunque inclinata per rapporto al piano medesimo, ed intersecante nel punto G la definita superficie cilindrica. I due piani, determinati dalle rette FE ed EH, FE ed EI, tagliano la superficie cilindrica secondo le due curve HM ed IN, incontrantisi nel punto G; e risulta il solido EGHI, terminato da tre facce piane EHI, EGH ed EGI concorrenti nel punto E e dalla faccia cilindrica GHI. Questo solido, cui sovente si dà il nome di *spicchio cilindrico*, ha qualche analogìa colla piramide sferica, in quanto presenta una sola faccia curva con tutte le sue facce piane concorrenti in uno stesso punto, e, avuto riguardo all'esistenza di una faccia cilindrica, in luogo di una faccia sferica, si può anche chiamare *piramide cilindrica*.

Gli spicchi cilindrici sono solidi, che si devono considerare nelle pratiche ricerche relative alla determinazione dei volumi compresi fra le superficie d'intradosso ed i piani d'imposta delle vôlte a padiglione, delle vôlte a botte con teste di padiglione e delle vôlte a schifo. In questi casi però la retta EF è perpendicolare al piano ABCD, e quindi non si hanno da considerare che *spicchi cilindrici retti*.

2. **Definizioni relative allo spicchio cilindrico retto.** — In uno

spicchio cilindrico retto, chiamansi: *base* il triangolo rettilineo E H I (*Fig.* 122) costituente una delle sue facce piane; *lato dello spicchio* quel lato $\overline{HI}$ del detto triangolo, il quale trovasi sulla superficie cilindrica; *vertice* il punto G, in cui s'incontrano le due intersezioni H M ed I N della superficie cilindrica coi piani perpendicolari alla definita base e passanti per gli altri due lati E H ed E I; *semi-corda* la perpendicolare $\overline{EK}$ abbassata dal vertice E della base sul lato opposto H I; *monta* o *saetta* la lunghezza $\overline{EG}$ della parte di perpendicolare alla base, intercetta fra il punto E ed il vertice G; *sezione retta* il triangolo mistilineo G E K determinato nello spicchio dal piano passante per la monta E G e perpendicolare al lato H I.

Generalmente il lato curvilineo G K, il quale limita la definita sezione retta, suol essere un arco ellittico, oppure un arco circolare; in quanto poi alla tangente G P all'estremità G di quest'arco, può darsi che essa sia o che non sia perpendicolare alla monta G E; e lo stesso può avvenire per rapporto alla tangente K Q all'estremità K relativamente alla semi-corda K E.

3. **Elementi determinanti uno spicchio cilindrico retto.** — Sia O A V B (*Fig.* 123) uno spicchio cilindrico retto, abbiasi in O A B la base di questo spicchio, ed in V il suo vertice. Il lato dello spicchio sia $\overline{AB}$, $\overline{OC}$ la semi-corda, $\overline{OV}$ la monta, ed il lato curvilineo V C, della sezione retta V O C, sia un arco ellittico appartenente ad un'ellisse, i cui assi principali sono diretti secondo le rette O'X ed O'Y, rispettivamente parallele alle direzioni O C ed O V della semi-corda e della monta. Gli elementi determinanti lo spicchio sono: le due distanze $\overline{OD}$ e $\overline{DO'}$; la semi-corda $\overline{OC}$ e la monta $\overline{OV}$; il lato $\overline{AB}$ ed il segmento $\overline{AC}$ di questo lato, compreso fra il vertice A e l'estremo C della semi-corda.

Assumendo per origine di coordinate il punto O', per asse delle ascisse le retta O'X, per asse delle ordinate la retta O'G, e chiamando

c la lunghezza della semi-corda $\overline{OC}$,

m la lunghezza della monta $\overline{OV}$,

x' ed x'' le due ascisse $\overline{O'D}$ ed $\overline{O'E}$ degli estremi V e C dell'arco ellittico V C,

y' ed y'' le due ordinate $\overline{DV}$ ed $\overline{EC}$ degli stessi estremi,

si ha

$$\left.\begin{aligned} x'' &= x' + c \\ y' &= y'' + m \end{aligned}\right\} \quad (1);$$

cosicchè, conoscendosi x', ossia $\overline{O'D}$, ed y'', ossia $\overline{EC} = \overline{DO}$, queste due equazioni permettono di determinare l'ascissa x'' del punto C e l'ordinata y' del punto V.

Se ora voglionsi trovare i due semi-assi dell'ellisse, a cui appartiene l'arco CV, indicando con

a la lunghezza $\overline{O'F}$ del semi-asse diretto secondo O'X, con

b la lunghezza $\overline{O'G}$ del semi-asse diretto secondo O'Y, e con

x ed y le due coordinate $\overline{O'H}$ ed $\overline{HM}$ di un suo punto qualunque M,

si ha l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la quale, applicata ai due punti V e C, conduce a

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} = 1,$$

e da queste equazioni si ottengono i valori di a e di b, dati dalle formole

$$a = \sqrt{\frac{x'^2 y''^2 - x''^2 y'^2}{y''^2 - y'^2}}$$

$$b = \sqrt{\frac{y'^2 x''^2 - y''^2 x'^2}{x''^2 - x'^2}}$$

le quali, per i valori di x'' e di y' dati dalle (1), diventano

$$\left.\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{x'^2 y''^2 - (x'+c)^2 (y''+m)^2}{-m(m+2y'')}} \\ b &= \sqrt{\frac{(y''+m)^2 (x'+c)^2 - y''^2 x'^2}{c(c+2x')}} \end{aligned}\right\} \quad (2),$$

di maniera che, conoscendosi le coordinate x' ed y', x'' ed y'', oppure

c, m, x' ed y'', riesce facile la determinazione dei due semi-assi a e b dell'ellisse alla quale appartiene l'arco C V.

Descritti i quadranti circolari F N I e K L G, i cui raggi $\overline{O'F}$ ed $\overline{O'K}$ sono rispettivamente eguali ai semi assi $\overline{O'F}=a$ ed $\overline{O'G}=b$, se prolungasi l'ordinata $\overline{HM}$ del punto M fino ad incontrare in N il primo degli indicati quadranti, se tirasi il raggio $\overline{O'N}$, e se pel punto L, in cui questo raggio incontra il secondo quadrante, si conduce una parallela ad O'X, per una nota proprietà dell'ellisse, si ha che questa parallela incontra la retta HN nel punto M dell'ellisse, le cui coordinate vennero indicate colle lettere x ed y. Siccome poi, abbassando dal punto L la perpendicolare ad O'X, si ha $\overline{LT}=\overline{MH}=y$, se chiamasi ϕ l'angolo N O'Y, e se consideransi i due triangoli rettangoli NHO' ed LTO', si ottengono le relazioni

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi &= \frac{x}{a} \\ \cos\phi &= \frac{y}{b} \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Relazioni analoghe a quelle ora scritte, le quali convengono ad un punto qualunque M della curva F M G, esistono pure pei due punti V e C; cosicchè, immaginando prolungate le ordinate $\overline{DV}$ ed $\overline{EC}$ fino ad incontrare in P e Q il quadrante F N I, tirando O'P ed O'Q e chiamando

ϕ' l'angolo P O'Y e

ϕ'' l'angolo Q O'Y,

si ha: per il punto V

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi' &= \frac{x'}{a} \\ \cos\phi' &= \frac{y''+m}{b} \end{aligned}\right\} \quad (4);$$

per il punto C

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi'' &= \frac{x'+c}{a} \\ \cos\phi'' &= \frac{y''}{b} \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

Le equazioni (4) si prestano alla determinazione dei valori del seno e del coseno dell'angolo ϕ', e le equazioni (5) servono alla determi-

nazione dei valori delle stesse linee trigonometriche per l'angolo ϕ''. Dai valori poi del seno e del coseno degli angoli ϕ' e ϕ'', riesce facile dedurre le loro ampiezze e le corrispondenti lunghezze nell'ipotesi del raggio eguale all'unità.

4. **Volume dello spicchio cilindrico retto in cui è un arco ellittico il lato curvilineo della sezione retta.** — Conoscendosi la semi-corda $\overline{OC} = c$ (*Fig.* 123 e 124), la monta $\overline{OV} = m$, la distanza $\overline{O'D} = x'$ e l'altezza $\overline{OD} = y''$ per uno spicchio cilindrico, in cui è un arco ellittico il lato curvilineo C V della sezione retta, le formole (2), (4) e (5) del numero precedente servono rispettivamente a trovare i valori di $\overline{O'F} = a$ e di $\overline{O'G} = b$, del seno e del coseno dell'angolo $POY = \phi'$, del seno e del coseno dell'angolo $QO'Y = \phi''$. Si può adunque ritenere che c, m, a, b, x', y'', ϕ' e ϕ'' siano elementi noti, e, indicando con l la lunghezza cognita del lato $\overline{AB}$ dello spicchio, ecco come si può procedere alla determinazione del suo volume V.

Essendo M un punto qualunque preso sull'arco ellittico C V, se per esso si conduce, sulla faccia curva dello spicchio, la generatrice ab, e se dai due punti a e b si abbassano le due perpendicolari ac e bd al piano O A B, esse determinano sui lati $\overline{OA}$ ed $\overline{OB}$ del triangolo O A B i due punti c e d; la retta $\overline{cd}$ risulta parallela alla direzione del lato $\overline{AB}$, ed incontra la semi-corda $\overline{OC}$ nello stesso punto g in cui questa è incontrata dall'ordinata $\overline{MH}$. Se poi s'immaginano prolungate le dette perpendicolari al piano O A B fino ad incontrare nei punti e ed f il piano condotto per la retta O'X parallelamente al piano O A B, risulta la retta ef passante pel punto H e parallela tanto a cd quanto ad ab; è un rettangolo la figura $abfe$; si ha

$$\overline{O'H} = a \operatorname{sen} \phi,$$

$$\overline{HM} = b \cos \phi,$$

$$\overline{DH} = \overline{Og} = a \operatorname{sen} \phi - x';$$

e, per la similitudine dei due triangoli O A B ed O cd, si deduce

$$\overline{ef} = \overline{cd} = \frac{l(a \operatorname{sen} \phi - x')}{c}$$

Siccome poi $\overline{Hg} = \overline{EC} = y''$, risulta

$$\overline{g\,\mathrm{M}} = \overline{\mathrm{H}\,\mathrm{M}} - \overline{\mathrm{H}\,g} = b\cos\phi - y''.$$

Le due rette $\overline{e\,f}$ e $\overline{g\,\mathrm{M}}$ sono la base e l'altezza del rettangolo $a\,b\,d\,c$, e quindi l'area di questo rettangolo viene data da

$$\frac{l}{c}(a\,\mathrm{sen}\,\phi - x')(b\cos\phi - y'') \qquad (1).$$

Se ora si prende sull'arco ellittico C V il punto M′ infinitamente vicino ad M, e se immaginasi il rettangolo $a'\,b'\,d'\,c'$ analogo all'altro $a\,b\,d\,c$, questi due rettangoli distano fra di loro della quantità $\overline{g\,g'} = \overline{\mathrm{H}\,\mathrm{H}'} = dx$, e, avendosi che l'ascissa $\overline{\mathrm{O}'\,\mathrm{H}} = x$ è data da

$$x = a\,\mathrm{sen}\,\phi,$$

risulta

$$dx = a\cos\phi\,d\phi \qquad (2).$$

Il volume elementare $d\,\mathrm{V}$ dello spicchio, il qual volume è rappresentato in $a\,b\,d\,c\,a'\,b'\,d'\,c'$, si ottiene moltiplicando l'espressione (1) per il valore di dx dato dalla formola (2), cosicchè

$$d\,\mathrm{V} = \frac{l}{c}(a\,\mathrm{sen}\,\phi - x')(b\cos\phi - y'')\,a\cos\phi\,d\phi.$$

Per passare dal volume elementare $d\,\mathrm{V}$ al volume V dell'intiero spicchio V A B O, bisogna integrare fra i limiti definiti dai valori dell'angolo ϕ corrispondenti ai punti V e C, ossia fra i limiti ϕ' e ϕ''; cosicchè mettendo in evidenza i diversi integrali da effettuarsi, si ha

$$\mathrm{V} = \frac{a\,l}{c}\left\{\begin{array}{l} a\,b\displaystyle\int_{\phi'}^{\phi''} \mathrm{sen}\,\phi\cos^2\phi\,d\phi - b\,x'\int_{\phi'}^{\phi''}\cos^2\phi\,d\phi \\ -a\,y''\displaystyle\int_{\phi'}^{\phi''}\mathrm{sen}\,\phi\cos\phi\,d\phi + x'\,y''\int_{\phi'}^{\phi''}\cos\phi\,d\phi \end{array}\right\}.$$

Osservando ora che

$$\int \mathrm{sen}\,\phi\cos^2\phi\,d\phi = -\frac{1}{3}\cos^3\phi$$

$$\int \cos^2\phi\, d\phi = \frac{1}{2}(\phi + \operatorname{sen}\phi\cos\phi)$$

$$\int \operatorname{sen}\phi\cos\phi\, d\phi = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\phi$$

$$\int \cos\phi\, d\phi = \operatorname{sen}\phi,$$

si ottiene il seguente valore di V

$$V = \frac{a\,l}{c}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{a\,b}{3}(\cos^3\phi' - \cos^3\phi'') - \dfrac{b\,x'}{2}(\phi'' + \operatorname{sen}\phi''\cos\phi'' - \phi' - \operatorname{sen}\phi'\cos\phi') \\ -\dfrac{a\,y''}{2}(\operatorname{sen}^2\phi'' - \operatorname{sen}^2\phi') + x'\,y''(\operatorname{sen}\phi'' - \operatorname{sen}\phi')\end{array}\right\}$$

Ponendo in quest'equazione i valori di $\operatorname{sen}\phi'$, $\cos\phi'$, $\operatorname{sen}\phi''$ e $\cos\phi''$ dati dalle formole (4) e (5) del numero precedente, e convenientemente riducendo, si trova

$$V = \frac{l}{c}\left[\begin{array}{l}\dfrac{m}{3}\dfrac{a^2}{b^2}(3y''^2 + 3my'' + m^2) - \dfrac{x'}{2}(cy'' - mx') \\ -\dfrac{y''}{2}c^2 - \dfrac{a\,b\,x'}{2}(\phi'' - \phi')\end{array}\right] \quad (3).$$

Riepilogando si può dire che, volendosi trovare il volume V dello spicchio cilindrico, in cui è un arco ellittico il lato curvilineo V C della sezione retta, e per cui sono elementi noti il lato $\overline{A\,B} = l$, la semi-corda $\overline{O\,C} = c$, la monta $\overline{O\,V} = m$, l'ascissa $\overline{O'\,D} = x'$ del vertice V e l'ordinata $\overline{E\,C} = \overline{D\,O} = y''$ dell'estremo C della semi-corda, si deve seguire questo procedimento: calcolare i due valori dei semi-assi a e b mediante le formole (Num. 3)

$$\left.\begin{array}{l}a = \sqrt{\dfrac{x'^2y''^2 - (x'+c)^2(y''+m)^2}{-m(m+2y'')}} \\ b = \sqrt{\dfrac{(y''+m)^2(x'+c)^2 - y''^2x'^2}{c(c+2x')}}\end{array}\right\} \quad (4);$$

trovare le ampiezze ϕ'^{o} e ϕ''^{o}, rispettivamente corrispondenti agli archi ϕ' e ϕ'', facendo uso delle formole (Num. 3)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi'^{o} &= \frac{x'}{a} \\ \operatorname{sen}\phi''^{o} &= \frac{x'+c}{a} \end{aligned}\right\} \quad (5);$$

osservare che, esprimendo con Δ la lunghezza $\phi'' - \phi'$ appartenente all'arco di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo di ampiezza $\phi''^{o} - \phi'^{o}$, per la proporzionalità delle lunghezze degli archi alle loro ampiezze, si ha

$$\Delta = \frac{\phi''^{o} - \phi'^{o}}{180^{o}}\,\pi \quad (6);$$

e finalmente dedurre il valore del volume V dello spicchio, sostituendo le quantità note l, c, m, x' ed y'' e le quantità calcolate a, b e Δ nella formola

$$V = \frac{l}{c}\left[\begin{aligned} &\frac{m}{3}\frac{a^2}{b^2}(3y''^2 + 3my'' + m^2) \\ &-\frac{x'}{2}(cy'' - mx') - \frac{y''c^2}{2} - \frac{abx'}{2}\Delta \end{aligned}\right] \quad (7),$$

la quale non è altro che la (3) col cangiamento della differenza $\phi'' - \phi'$ in Δ.

5. **Volume dello spicchio cilindrico retto in alcuni casi particolari in cui è un arco ellittico il lato curvilineo della sezione retta.** — 1° Essendo perpendicolare alla semi corda C O la tangente nel punto C al lato curvilineo C V della sezione retta (*Fig.* 123 e 124), la detta semi-corda cade sull'asse delle ascisse O' X, i punti O e C vengono rispettivamente a confondersi coi punti D ed F, e si ha $y'' = 0$ e $\phi''^{o} = 90^{o}$. Le due formole determinatrici dei semi-assi a e b diventano

$$a = x' + c$$

$$b = \frac{m(x'+c)}{\sqrt{c(c+2x')}};$$

la formola

$$\operatorname{sen} \phi'^{o} = \frac{x'}{a}$$

prestasi a trovare l'angolo ϕ'^{o}; la formola

$$\Delta = \frac{90^{o} - \phi'^{o}}{180^{o}} \pi$$

serve a trovare l'arco Δ; e finalmente la formola

$$V = \frac{l}{c}\left(\frac{m^3}{3}\frac{a^2}{b^2} + \frac{m x'^2}{2} - \frac{a b x'}{2}\Delta\right)$$

è quella che conviene pel calcolo del volume V.

2° Quando la tangente al lato curvilineo C V della sezione retta dello spicchio nel punto V è parallela alla semi-corda O C, si ha che la retta D V cade sulla direzione O'Y, che i punti D e V si confondono rispettivamente coi punti O' e G, che $x' = 0$ e $\phi'^{o} = 0$. Le formole determinatrici dei semi-assi a e b diventano allora

$$a = \frac{c\,(y'' + m)}{\sqrt{m\,(m + 2y')}}$$

$$b = y'' + m;$$

e quella che serve al calcolo del volume V si riduce a

$$V = \frac{l}{c}\left[\frac{m}{3}\frac{a^2}{b^2}\,(3y'^2 + 3my'' + m^2) - \frac{y''}{2}c^2\right].$$

3° Se le tangenti alla sezione retta dello spicchio nei punti V e C sono rispettivamente una parallela e l'altra perpendicolare alla corda C O, ossia se la curva C V è un quadrante ellittico, si ha $x' = 0$, $y'' = 0$, $\phi'^{o} = 0$ e $\phi''^{o} = 90^{o}$. I semi-assi a e b sono rispettivamente eguali alla semi corda c ed alla monta m, ed il volume V viene dato dalla semplicissima formola

$$V = \frac{1}{3}\,l\,c\,m,$$

ossia il volume V dello spicchio cilindrico, in cui è un quadrante

ellittico il lato curvilineo della sezione retta, è eguale al terzo del prodotto del lato, della semi-corda e della saetta o monta.

6. **Volume dello spicchio cilindrico retto in cui è un arco circolare il lato curvilineo della sezione retta.** — Sia C V (*Fig.* 125) quell'arco circolare, il quale costituisce il lato curvilineo della sezione retta dello spicchio cilindrico, la cui semi corda c è $\overline{OC}$ e la cui monta m è $\overline{OV}$; il centro dell'indicato arco sia O'; ed abbiansi in O'X ed O'Y due rette fra loro perpendicolari, condotte per l'accennato centro e rispettivamente parallele alle rette O C ed O V; la retta O'Y disti dalla O V della quantità $\overline{O'D} = x'$. Confrontando lo spicchio cilindrico in quistione con quello il cui lato curvilineo della sezione retta è un arco ellittico, a motivo dell'eguaglianza che deve esistere fra i valori dei semi-assi a e b, somministrati dalle formole (4) del numero 4, si deduce l'equazione

$$m\,(m+2y'') = c\,(c+2x'), \qquad (1),$$

dalla quale, per valore di $\overline{DO} = \overline{EC} = y''$, si ricava

$$y'' = \frac{c\,(c+2x') - m^2}{2\,m} \qquad (2).$$

Ponendo nella prima delle equazioni (4) del numero 4 il valore di $m\,(m+2y'')$ dato dalla (1), e cangiando a in r, oppure considerando il triangolo rettangolo O'EC, i cui cateti $\overline{O'E}$ ed $\overline{EC}$ sono rispettivamente $x'+c$ ed y'', si ha la seguente equazione determinatrice di r

$$r = \sqrt{(c+x')^2 + y''^2} \qquad (3).$$

Le formole, le quali servono a calcolare gli angoli ϕ'^{o} e ϕ''^{o} che sulla figura trovansi rispettivamente rappresentati in YO'V ed YO'C, sono

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi'^{o} &= \frac{x'}{r} \\ \operatorname{sen}\phi''^{o} &= \frac{x'+c}{r} \end{aligned}\right\} \qquad (4);$$

quella che prestasi a dedurre la quantità Δ è

$$\Delta = \frac{\phi''^{o} - \phi'^{o}}{180^{\circ}}\,\pi \qquad (5);$$

e finalmente risulta

$$V = \frac{l}{c}\left[\begin{array}{l} \dfrac{m}{3}(3y''^2 + 3my'' + m^2) \\ \\ -\dfrac{x'}{2}(cy'' - mx') - \dfrac{y''c^2}{2} - \dfrac{x'r^2}{2}\Delta \end{array}\right] \qquad (6)$$

per formola determinatrice del volume V, nella quale l rappresenta il lato dello spicchio.

La formola (2) serve alla determinazione di y''; prestasi la formola (3) alla deduzione del raggio r; le formole (4) si devono adottare per ottenere le ampiezze angolari ϕ'° e ϕ''°; colla formola (5) si trova la quantità Δ; e finalmente impiegasi la formola (6) per il calcolo del volume V.

7. **Volume dello spicchio cilindrico retto in alcuni casi particolari, in cui è un arco circolare il lato curvilineo della sezione retta.** — 1° Se la tangente nel punto C (*Fig.* 125) è perpendicolare alla semi-corda OC dello spicchio, i punti C ed O cadono sulla retta O'X e si confondono rispettivamente coi punti D ed F; si ha $\phi''^{\circ} = 90°$, è nullo il valore di y''; e le due lunghezze $\overline{FD} = c$ e $\overline{DV} = m$ sono elementi sufficienti alla determinazione dell'arco FV. Eguagliando a zero il numeratore del valore di y'' dato dalla formola (2) del numero precedente, si ottiene l'equazione determinatrice della distanza $\overline{O'D} = x'$ conveniente pel caso in quistione, e quindi si ha

$$x' = \frac{m^2 - c^2}{2c}.$$

Il valore di r viene dato da

$$r = c + x';$$

e l'ampiezza angolare ϕ'° facilmente si deduce dalla formola

$$\operatorname{sen}\phi'^{\circ} = \frac{x'}{r}.$$

La quantità Δ si ottiene ponendo

$$\Delta = \frac{90° - \phi'^{\circ}}{180°}\pi,$$

e serve la formola

$$V = \frac{l}{c}\left(\frac{m^3}{3} + \frac{m x'^2}{2} - \frac{x' r^2}{2}\Delta\right)$$

alla deduzione del volume V.

2° Allorquando è parallela alla semi-corda O C la tangente all'estremo V del lato curvilineo della sezione retta dello spicchio, la retta O V si porta sulla direzione O' Y ed i punti D e V si confondono rispettivamente coi punti O' e G. I valori di x' e di ϕ'° sono nulli, ed il valore di y'' dato dalla formola (2) del numero precedente si riduce a

$$y'' = \frac{c^2 - m^2}{2m}.$$

Se nell'equazione (6) dell'or citato numero si pone questo valore di y'', e se osservasi che $x' = 0$, si ottiene la formola

$$V = \frac{1}{12} l m \frac{3c^2 + m^2}{c},$$

la quale serve al calcolo del volume V.

3° Se le tangenti al lato curvilineo C V della sezione retta dello spicchio nei punti C e V sono rispettivamente una perpendicolare e l'altra parallela alla semi-corda C O, ossia se la curva C V si confonde col quadrante circolare F G, si ha $x' = 0$, $y'' = 0$ ed $m = c$; cosicchè dall'equazione (6) del precedente numero si ricava

$$V = \frac{1}{3} l c^2$$

per formola determinatrice del volume V dello spicchio cilindrico a tutta monta.

8. **Volumi compresi fra le superficie d'intradosso ed i piani d'imposta delle vôlte a padiglione, delle vôlte a botte con teste di padiglione e delle vôlte a schifo.** — Le vôlte a padiglione, come venne indicato in quel volume della nostra *Arte di fabbricare*, il quale tratta dei lavori generali d'architettura civile, stradale ed idraulica (Num. 250, 251 e 252), hanno la loro superficie d'intradosso costituita da tanti fusi cilindrici quanti sono i lati del poligono che esse coprono; e quindi il volume compreso fra la superficie d'intradosso ed il piano d'imposta di una qualunque di siffatte vôlte si

compone di tanti spicchi cilindrici quanti sono i lati del poligono al quale essa insiste. Per trovare adunque un tale volume vale la regola generale di calcolare, colle formole che abbiamo stabilite, i volumi dei diversi spicchi componenti e di prendere quindi la loro somma. — Sovente le figure coperte dalle vôlte a padiglione sono poligoni regolari o rettangoli ; ed allora notevolmente rimane abbreviata l'applicazione delle indicate formole, tutti gli spicchi sono eguali fra di loro nel primo caso, si hanno solamente due spicchi differenti nel secondo caso.

La superficie d'intradosso delle vôlte a botte con teste di padiglione, le quali sovente si adottano per coprire trapezi, parallelogrammi e rettangoli (per quanto si è detto nei numeri 253 e 254 del già citato volume sui lavori generali d'architettura civile, stradale ed idraulica, ed anche per quanto risulta dai numeri 119 di quell'altro volume dell'*Arte di fabbricare*, il quale ha per oggetto *La geometria pratica applicata all'arte del costruttore*) si può considerare come formata di sei fusi cilindrici e di una porzione di superficie cilindrica compresa fra due sezioni rette. Segue da ciò che, per ottenere il volume compreso fra la superficie d'intradosso ed il piano d'imposta di una di siffatte vôlte, può valere la regola generale di calcolare i volumi dei sei spicchi corrispondenti agli indicati fusi, di sommarli e di aggiungervi il volume della parte cilindrica. Se poi osservasi che, per ogni testa di padiglione, i due spicchi, i quali si trovano in continuazione della parte cilindrica, ed i quali insistono a due triangoli rettangoli sono tali che la somma dei loro volumi costituisce il volume dello spicchio di testa fra essi compreso, agevolmente si comprende: come, anche nel caso di una vôlta su pianta trapezia, la determinazione dei volumi degli spicchi risulti assai spedita, giacchè altro non si deve fare che il calcolo dei volumi dei due spicchi di testa; e come il doppio della somma di questi volumi, aumentato di quello della parte cilindrica, rappresenti il volume totale compreso fra la superficie d'intradosso ed il piano d'imposta. Nel caso di una vôlta a botte con teste di padiglione su pianta parallelogrammica o rettangolare, l'indicata determinazione riesce assai più spedita. Si fa il calcolo del volume di uno solo degli spicchi di testa; quadruplicando poi questo volume ed aggiungendovi il risultato alla parte cilindrica risulta il totale volume compreso fra la superficie d'intradosso ed il piano d'imposta.

La superficie d'intradosso delle vôlte a schifo, le quali si prestano per coprire aree poligonali qualunque, (come risulta da quanto si è

detto nei numeri 255 e 256 dell'indicato volume sui lavori generali d'a chitettura civile, stradale ed idraulica, e nel numero 121 dell'altro volume sulla geometria pratica applicata all'arte del costruttore) consta: di tante superficie cilindriche rette, tutte colla stessa direttrice, quanti sono i lati del poligono coperto dalla vôlta che si considera; di fusi cilindrici, disposti in altrettante coppie quanti sono i detti lati; e di un poligono orizzontalmente proiettantesi entro quello d'imposta e col suo perimetro equidistante dal perimetro di quest'ultimo. Segue da ciò che il volume compreso fra la superficie d'intradosso ed il piano d'imposta di una vôlta a schifo si ottiene: calcolando i volumi di diverse parti cilindriche rette aventi la stessa sezione retta, eguali in numero ai lati della figura coperta dalla vôlta e costituenti un cilindro unico di lunghezza eguale a quella del perimetro del poligono interno; determinando i volumi di tante coppie di spicchi cilindrici quanti sono i lati della detta figura; facendo il volume del prisma avente per base il poligono interno e per altezza la monta della vôlta; e finalmente sommando tutti i volumi or ora accennati. Nel caso più generale di una vôlta a schifo su pianta poligonale qualunque i due spicchi adiacenti ad uno stesso vertice sono eguali, e quindi il loro calcolo resta notevolmente semplificato. Per le vôlte a schifo su pianta regolare e su pianta rettangolare tutti gli spicchi sono eguali fra di loro, e per questo si rende assai spedita la determinazione dei loro volumi.

Osservando che nelle formole, le quali dànno i volumi degli spicchi cilindrici, la lunghezza l entra solo come fattore comune in tutti i termini, si viene a dedurre che, per gli spicchi aventi la stessa sezione retta e lati differenti, non cangia il fattore che moltiplica la lunghezza l, e che quindi, dovendosi in tali condizioni fare la somma di più spicchi, basta calcolare per uno spicchio solo il fattore di l e moltiplicarlo per la somma delle lunghezze dei lati degli spicchi medesimi. In una stessa vôlta a padiglione su pianta regolare, in una stessa vôlta a botte con teste di padiglione ed in una stessa vôlta a schifo si presenta appunto il caso di più spicchi cilindrici aventi la stessa sezione retta, e quindi, dovendosi ottenere il complessivo loro volume, conviene eseguire i calcoli come or ora si è indicato.

INDICE ANALITICO

La resistenza dei materiali esposta nei suoi più generali rapporti coi lavori della moderna ingegneria.

CAPITOLO I.

Nozioni preliminari.

1. Cenni storici intorno alle teorie sulla resistenza dei materiali . *Pag.* 1
2. Assunto del presente lavoro . . . . . » 10
3. Resistenze sviluppate in una sezione retta qualsiasi di un solido elastico sottoposto all'azione di forze estrinseche comunque operanti . . . . . » 11
4. Ipotesi sulle quali fondasi la valutazione delle resistenze trasversali e longitudinali provocate in una sezione retta qualsiasi di un solido elastico . . . . . » 12

CAPITOLO II.

Equilibrio e stabilità di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti.

5. Equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le resistenze sviluppate in una sezione retta qualsiasi omogenea di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti . . . . . » 13

ARTICOLO I — *Resistenza trasversale.*

6. Scorrimento in un punto qualunque di una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti . . . . . » 22
7. Resistenza trasversale, riferita all'unità di superficie, provocata in un punto qualunque di una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti . » 24
8. Linee di eguale scorrimento e di eguale resistenza trasversale, centro di scorrimento . . . . . » 26

9. Formole semplicissime per determinare lo scorrimento e la resistenza trasversale, riferita all'unità di superficie, provocata in un punto qualunque di una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti; direzioni degli scorrimenti e delle resistenze trasversali . . . *Pag.* 27
10. Punti di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale riferita all'unità di superficie, provocata in una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti; raggio della linea di massimo scorrimento . » 29
11. Massimo scorrimento e massima resistenza trasversale, riferita all'unità di superficie, provocata in una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti . . . . . » 34
12. Equazione di stabilità per rapporto alla resistenza trasversale provocata in una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti . . . . . » 36
13. Sezione pericolosa per rapporto alla resistenza trasversale provocata in un solido elastico con sezioni rette omogenee e sollecitato da forze comunque operanti . . . . . » 40
14. Equazione di stabilità per rapporto alla resistenza trasversale provocata da un solido elastico con sezioni rette omogenee e sollecitato da forze comunque operanti . . . . . » 42

ARTICOLO II. — *Resistenza longitudinale.*

15. Intersezione del piano di una sezione retta qualsiasi prima dell'azione delle forze estrinseche, col piano in cui la stessa sezione viene a trovarsi dopo l'azione delle forze stesse. Asse neutro . » 42
16. Piano di sollecitazione alla flessione, e relazione fra la posizione di questo piano e quella dell'asse neutro . . . . . » 47
17. Allungamento ed accorciamento in un punto qualunque di una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti . . . . . » 49
18. Resistenza longitudinale, riferita all'unità di superficie, provocata in un punto qualunque di una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti . . . . . » 51
19. Punti di massimo spostamento longitudinale e di massima resistenza longitudinale, riferita all'unità di superficie, provocata in una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti. Distanze dei punti di massimo spostamento longitudinale dalla parallela all'asse neutro condotta pel centro di superficie . . . . . » 52
20. Massimo spostamento longitudinale e massima resistenza longitudinale, riferita all'unità di superficie, provocata in una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti . . . . . » 53
21. Equazioni di stabilita per rapporto alla resistenza longitudinale

provocata in una sezione retta omogenea qualsiasi di un solido elastico sollecitato da forze comunque operanti . . . . *Pag.* 55
22. Sezione pericolosa per rapporto alla resistenza longitudinale provocata in un solido elastico con sezioni rette omogenee e sollecitato da forze comunque operanti . . . . . » 56
23. Equazione di stabilità per rapporto alla resistenza longitudinale provocata in un solido elastico con sezioni rette omogenee e sollecitato da forze comunque operanti . . . . . » 58

CAPITOLO III.

Casi particolari che più di frequente si presentano nella pratica delle costruzioni.

24. Solido con asse rettilineo, nel quale trovasi provocata la resistenza alla tensione . . . . . » 59
25. Solido con asse rettilineo, nel quale trovasi provocata la resistenza alla pressione . . . . . » 61
26. Solido con asse rettilineo nel quale trovasi provocata la resistenza alla torsione . . . . . » 63
27. Solido nel quale trovasi provocata la resistenza allo scorrimento . » 66
28. Solido con asse rettilineo nel quale trovasi provocata la resistenza alla flessione . . . . . » 68
29. Solido rettilineo assoggettato all'azione di forze perpendicolari al suo asse e contenute in uno stesso piano passante per l'asse medesimo . . . . . » 73
30. Solido rettilineo assoggettato all'azione di forze parallele, ma non coincidenti coll'asse . . . . . » 76
31. Solido rettilineo assoggettato all'azione di forze oblique applicate al suo asse e contenute in uno stesso piano passante per l'asse medesimo . . . . . » 83
32. Solido avente per asse una curva piana ed assoggettato all'azione di forze tutte contenute nel piano determinato dall'asse medesimo . . . . . » 86
33. Modificazioni che si possono apportare alle formole relative alla resistenza longitudinale . . . . . » 89
34. Osservazione . . . . . » 95

Studio del progetto di un tronco di strada ferrata per quanto spetta al suo andamento ed ai movimenti di terra.

1. Norme generali ed indicazione delle operazioni da farsi per lo studio del progetto di un tronco di strada . . . . . *Pag.* 97

CAPITOLO I.

Operazioni trigonometriche.

2. Triangolazione e rilievi locali . . . . . » 100
3. Piano trigonometrico . . . . . » 103
4. Riduzione degli angoli orizzontali al centro di stazione . . . . » ivi
5. Correzione degli angoli . . . . . » 105
6. Calcolo dei lati dei triangoli . . . . . » 108
7. Scelta di due poligonali per la determinazione planimetrica della retta che unisce i due punti A e B . . . . . » 112
8. Voltate dei lati delle linee poligonali AEGIB ed AFHKB . . . » 114
9. Deviazioni dei lati delle linee poligonali AEGIB ed AFHKB rispetto all'asse Ax . . . . . » ivi
10. Coordinate dei vertici delle linee poligonali AEGIB ed AFGKB rispetto agli assi coordinati ortogonali Ax ed Ay . . . . . » 115
11. Direzione dell'allineamento determinato dai due punti A e B, e distanza di questi punti . . . . . » 119
12. Riduzione delle distanze zenitali al centro di stazione . . . . » 120
13. Ordinate dei vertici delle due linee poligonali AEGIB ed AFHKB per rapporto ad una data superficie di livello . . . . . » 122
14. Differenza di livello fra i due punti A e B e pendenza della retta che li unisce . . . . . » 128
15. Riassunto dei più importanti elementi relativi alle due linee poligonali state considerate fra i due punti A e B . . . . . » ivi
Osservazioni . . . . . » 130

CAPITOLO II.

Operazioni di rilevamento planimetrico ed altimetrico sui tronchi parziali. Profilo longitudinale, profili trasversali e planimetria della strada progettata.

16. Prime operazioni per lo stabilimento dell'asse stradale fra i due punti estremi di ciascun tronco parziale . . . . . *Pag.* 131
17. Stabilimento della poligonale determinante l'asse stradale fra i due punti estremi di ciascun tronco parziale . . . . . » 134
18. Determinazione delle parti curvilinee dell'asse stradale . . . » 138
19. Sviluppo dell'asse stradale fra i due punti estremi di ciascun tronco parziale . . . . . » 139
20. Calcoli pel tracciamento delle curve. . . . . » 140
21. Tracciamento delle curve sul terreno . . . . . » 143
22. Picchettazione ettometrica e chilometrica dell'asse stradale . . » 145
23. Livellazione di alcuni capi-saldi . . . . . » *ivi*
24. Rilevamento del profilo longitudinale . . . . . » 150
25. Disegno del profilo longitudinale . . . . . » 154
26. Tracciamento della linea di progetto sul profilo longitudinale . » 155
27. Ordinate rosse del profilo longitudinale . . . . . » 157
28. Quote rosse del profilo longitudinale . . . . . » 160
29. Determinazione dei punti di passaggio del profilo longitudinale » 162
30. Compimento del profilo longitudinale . . . . . » 163
31. Rilevamento dei profili trasversali . . . . . » 165
32. Disegno dei profili trasversali . . . . . » 173
33. Linee di progetto sui profili trasversali . . . . . » 177
34. Quote rosse e punti di passaggio da determinarsi in ciascuna sezione trasversale . . . . . » 178
35. Ordinate nere per la determinazione delle larghezze delle sezioni trasversali a dritta ed a sinistra dell'asse stradale . . . . » *ivi*
36. Ordinate rosse per la determinazione delle larghezze delle sezioni trasversali a dritta ed a sinistra dell'asse stradale . . . . » 181
37. Quote rosse per la determinazione delle larghezze delle sezioni trasversali a dritta ed a sinistra dell'asse stradale . . . . » 184
38. Larghezze delle scarpe e larghezza della zona di terreno occupata dalla strada in corrispondenza delle sezioni trasversali . . » 186
39. Linee di passaggio. . . . . » 189
40. Ordinate nere per la determinazione delle linee di passaggio . » *ivi*
41. Ordinate rosse per la determinazione delle linee di passaggio . » 190
42. Quote rosse per la determinazione delle linee di passaggio . . » 192
43. Determinazione delle linee di passaggio . . . . . » 193
43. Planimetria della strada . . . . . » 195
Osservazioni . . . . . » *ivi*

CAPITOLO III.

Computo dei movimenti di terra, delle distanze medie dei trasporti e delle occupazioni di terreni.

45. Aree delle sezioni trasversali . . . . . *Pag.* 197
46. Volumi degli sterri e degli interri . . . . . » 199
47. Distribuzione delle terre . . . . . » 203
48. Centri di superficie delle sezioni trasversali e di quelle loro parti che sono basi di solidi differenti . . . . . » 204
49. Centri di gravità dei solidi di sterro e d'interro . . . . . » 205
50. Centri di gravità degli sterri e degli interri da farsi per compensazione . . . . . » 213
51. Distanze orizzontali e differenze di livello fra i centri di gravità dei solidi componenti gli sterri e gli interri . . . . . » 217
52. Distanze medie dei trasporti . . . . . » 222
53. Occupazioni di terreni per lo stabilimento della strada . . . » 224
54. Occupazioni provvisorie di terreni per scavare e trasportare le terre d'imprestito . . . . . » 238

CAPITOLO IV.

Spese occorrenti pei movimenti di terra e per le occupazioni di terreni.

55. Analisi dei prezzi degli scavi e dei trasporti . . . . . » 241
56. Prezzi dell'unità di superficie dei terreni occupati . . . . . » 243
57. Spese pei movimenti di terra e per le occupazioni dei terreni . » 244
Osservazioni . . . . . » 246

Metodo pratico per determinare le principali dimensioni delle arcate dei ponti in muratura.

Nozioni generali.

1. Assunto di questo lavoro . . . . . *Pag.* » 248
2. Punto d'applicazione della spinta orizzontale di un'arcata alla chiave . . . . . » 250
3. Giunti estremi di un'arcata . . . . . » 254
4. Elementi da impiegarsi per il calcolo delle principali dimensioni di un'arcata . . . . . » *ivi*

Arcate di grossezza variabile dalla chiave ai giunti estremi.

5. Equazioni determinatrici delle due grossezze di un'arcata alla chiave e nei giunti estremi . . . . . » 257
6. Eliminazione di P'' e del prodotto P''p'' dalle equazioni determinatrici delle due grossezze alla chiave e nei giunti estremi di un'arcata . . . . . » 261
7. Formole d'approssimazione per trovare le due grossezze di un arcata alla chiave e nei giunti estremi . . . . . » 264
8. Determinazione della superficie d'estradosso di un'arcata . . » 267
9. Risultati di due applicazioni numeriche . . . . . » 268

Arcate di grossezza costante dalla chiave all'imposta.

10. Equazioni determinatrici della spinta orizzontale e della grossezza di un'arcata coll'estradosso parallelo all'intradosso. . » 274
11. Eliminazione di P'' e del prodotto P''p'' dalle equazioni determinatrici della spinta orizzontale e della grossezza di un'arcata coll'estradosso parallelo all'intradosso. . . . . » 275
12. Formole d'approssimazione per trovare la grossezza di un'arcata coll'estradosso parallelo all'intradosso . . . . . » 277
13. Risultati di un'applicazione numerica . . . . . » 278

Osservazioni e conclusioni finali.

14. Ipotesi sulle quali si fonda l'esposto metodo per determinare le principali dimensioni delle arcate . . . . . » 280
15. Discussione dell'ipotesi colla quale si ammette che la spinta orizzontale di un'arcata sia applicata nel mezzo del suo giunto verticale . . . . . » *ivi*
16. Discussione dell'ipotesi colla quale si ammette che la pressione sui giunti estremi passi pei loro punti di mezzo . . . . » 282
17. Ripieghi per ottenere che la pressione sui giunti estremi si approssimi ad essere applicata nel mezzo dei giunti medesimi . » 284

Volume dello spicchio cilindrico e volumi compresi fra le superficie d'intradosso ed i piani d'imposta

delle vôlte a padiglione, delle vôlte a botte con teste di padiglione e delle vôlte a schifo.

1. Spicchio cilindrico . . . . . *Pag.* 287
2. Definizioni relative allo spicchio cilindrico retto. . . . . » *ivi*
3. Elementi determinanti uno spicchio cilindrico retto . . . . » 288
4. Volume dello spicchio cilindrico retto in cui è un arco ellittico il lato curvilineo della sezione retta . . . . . » 291
5. Volume dello spicchio cilindrico retto in alcuni casi particolari in cui è un arco ellittico il lato curvilineo della sezione retta » 294
6. Volume dello spicchio cilindrico retto in cui è un arco circolare il lato curvilineo della sezione retta. . . . . » 296
7. Volume dello spicchio cilindrico retto in alcuni casi particolari, in cui è un arco circolare il lato curvilineo della sezione retta » 297
8. Volumi compresi fra le superficie d'intradosso ed i piani d'imposta delle vôlte a padiglione, delle vôlte a botte con teste di padiglione e delle vôlte a schifo . . . . . » 298

ERRATA-CORRIGE

Pagina	*linea*	*invece di*	*leggasi*
27	12	$Y_o = -\frac{I_z X}{\Omega M_z}$	$y_o = -\frac{I_z X}{\Omega M_z}$
89	26	come uu' (*Fig.* 45)	come uu' (*Fig.* 45),
94	24	$\frac{u'v}{Q}\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\text{sen}^2\beta}{I_y^2}}$	$\frac{u'v}{R'}\sqrt{\frac{\cos^2\beta}{I_x^2}+\frac{\text{sen}\,\beta^2}{I_y^2}}$
164	34	d'aria, un cannocchiale	d'aria con cannocchiale
189	12	Per trovare	Per determinare

LA RESISTENZA DEI MATERIALI

esposta nei suoi più generali rapporti

COI LAVORI DELLA MODERNA INGEGNERIA

STUDIO

DEL PROGETTO DI UN TRONCO DI STRADA FERRATA

per quanto spetta

AL SUO ANDAMENTO ED AI MOVIMENTI DI TERRA

METODO PRATICO

PER DETERMINARE LE PRINCIPALI DIMENSIONI

DELLE ARCATE DEI PONTI IN MURATURA

VOLUME DELLO SPICCHIO CILINDRICO

e volumi compresi

FRA LE SUPERFICIE D'INTRADOSSO ED I PIANI D'IMPOSTA

delle vôlte a padiglione, delle vôlte a botte con teste di padiglione e delle vôlte a schifo

PER

CURIONI GIOVANNI

Professore di costruzioni civili, stradali ed idrauliche nella R. Scuola di applicazione per gli Ingegneri di Torino

TORINO

Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO Editore

4, via Alfieri, 4

1873

Proprietà letteraria e artistica, con riserva della traduzione.

Stabilimento Tipografico e di Stereotipia A. F. Negro
via Riberi, 2, vicino al Tempio Israelitico.

INDICE DELLE FIGURE

Tavola I.

Figure 1, 2 e 3, riferentisi alle antiche teorie sulla resistenza dei materiali state proposte da Galileo, da Leibnitz e da Mariotte.

Figura 4, per dichiarare il problema che vuolsi risolvere nell'esporre la teoria della resistenza dei materiali ne' suoi più generali rapporti coi lavori della moderna ingegneria.

Figure 5 e 6, per far conoscere quali resistenze trovansi sviluppate in una sezione retta qualsiasi di un solido elastico sottoposto all'azione di forze estrinseche comunque operanti.

» 7 e 8, relative alla ricerca delle equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le resistenze sviluppate in una sezione retta qualsiasi.

Tavola II.

Figure 9 e 10, anche riferentisi alla ricerca delle già indicate equazioni di equilibrio.

» 11 e 12, per le studio della resistenza trasversale in una sezione retta qualunque.

» 13, 14, 15, 16, 17 e 18, relative alla determinazione dei punti di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale in una sezione retta qualunque.

Tavola III.

Figure 19, 20, 21, 22 e 23, anche riferentisi alla determinazione dei punti di massimo scorrimento e di massima resistenza trasversale.

Figura 24, relativa alla determinazione del coefficiente di snervamento nel senso trasversale.

Figura 25, per spiegare come si devono valutare le coppie provocanti resistenza longitudinale in una sezione retta qualunque, e come si determina l'asse neutro.

Tavola IV.

Figure 26, 27, 28 e 29, riferentisi alla determinazione dell'asse neutro.

» 30 e 31, riferentisi agli spostamenti ed alle resistenze longitudinali in un punto qualunque di una sezione retta qualsiasi.

» 32, 33 e 34, per la determinazione dei punti di massimo spostamento e di massima resistenza longitudinale.

Tavola V.

Figura 35, per lo studio della resistenza alla tensione.

» 36, per lo studio della resistenza alla pressione.

» 37, per lo studio della resistenza della torsione.

» 38, per lo studio della resistenza allo scorrimento.

Figure 39 e 40, per lo studio della resistenza alla flessione.

Tavola VI.

Figura 41, per lo studio della resistenza di un solido rettilineo sotto l'azione di forze perpendicolari al suo asse e contenute in uno stesso piano passante per l'asse medesimo.

» 42, per lo studio della resistenza di un solido rettilineo sotto l'azione di forze parallele, ma non coincidenti coll'asse.

» 43, per lo studio della resistenza di un solido rettilineo sotto l'azione di forze oblique applicate al suo asse e contenute in uno stesso piano passante per l'asse medesimo.

» 44, per lo studio della resistenza di un solido avente per asse una curva piana ed assoggettato all'azione di forze tutte contenute nel piano determinato dall'asse medesimo.

Figure 45 e 46, sulle quali si ragiona per stabilire le formole relative alla resistenza dei corpi tenendo conto del segno dei momenti inflettenti, e per dichiarare la natura dei risultati a cui esse conducono a seconda dei segni dai quali questi risultati sono preceduti.

Tavola VII.

Figura 47, rappresentante il piano di una triangolazione stabilita fra i due punti estremi A e B di un tronco di strada.

» 48. — Piano trigonometrico.

Figure 49 e 50, per la riduzione degli angoli orizzontali al centro di stazione.

» 51 e 52, per la riduzione delle distanze zenitali al centro di stazione.

Figura 53, per la determinazione delle ordinate dei vertici della triangolazione.

» 54, nella quale sono rappresentate le due poligonali state considerate per la determinazione della retta che unisce i due estremi del primo dei tronchi parziali nei quali venne diviso il totale andamento della strada.

» 55, per far vedere come si può determinare la poligonale avente per vertici gli estremi dei diversi tronchi parziali, nei quali trovasi diviso il totale andamento di una strada.

Tavola VIII.

Figure 56 e 57, per fare le prime operazioni riferentisi allo stabilimento dell'asse stradale fra i due punti estremi di ciascun tronco parziale.

Figura 58, per stabilire la formola atta al calcolo delle ordinate rosse del profilo longitudinale.

» 59, per stabilire le formole atte alla determinazione dei punti di passaggio.

Figure 60, 61, 62 e 63. — Segni convenzionali per indicare sui profili longitudinali i passaggi a livello, le case cantoniere, le case cantoniere con passaggio a livello e le stazioni.

Tavola IX.

Figura 64, per lo stabilimento della poligonale determinante l'asse stradale fra i due punti estremi di ciascun tronco parziale.

» 65, per dedurre lo sviluppo dell'asse stradale fra i due punti estremi di ciascun tronco parziale.

Figure 66, 67 e 68, riferentisi ai calcoli pel tracciamento delle curve.

Figura 69, per spiegare il modo di tracciamento delle curve sul terreno.

» 70. — Picchettazione ettometrica e chilometrica.

» 71, riferentesi al tracciamento della linea di progetto sul profilo longitudinale.

» 72, relativa al modo di coordinare le operazioni di livellazione delle sezioni trasversali.

Tavole X e XI.

Figure 73 e 74. — Moduli delle sezioni trasversali della strada senza ballast, dove essa trovasi in rialzo e dove trovasi in iscavo.

Figura 75. — Porzione di profilo longitudinale.

Tavole XII e XIII.

Figura 76. — Profili trasversali.

Tavola XIV.

Figure 77, 78, 79 ed 80, per far vedere quali sono le quote rosse da determinarsi in ciascuna sezione trasversale.

» 81 ed 82, per stabilire la formola atta alla determinazione delle larghezze delle scarpe.

Figura 83, per far conoscere quali operazioni preliminari si devono compire onde determinare le linee di passaggio.

Figure 84, 85 ed 86. — Disegno delle tre linee di passaggio fra le sezioni 1 e 2, 15 e 16, 21 e 22.

Figura 87, per spiegare come avviene, all'estremità di un fosso, il raccordamento della sua scarpa con quella del successivo rialzo.

» 88. — Planimetria di una porzione della strada.

» 89, per far vedere come graficamente si possono determinare i vertici delle linee di passaggio.

Tavole XV, XVI, XVII e XVIII.

Figure 90 e 91, riferentisi al sistema di scomposizione da seguirsi nelle sezioni trasversali onde ottenere le loro aree.

Figura 92, per la valutazione del e distanze medie dei trasporti.

» 93. — Apparecchio per la determinazione dei centri di superficie delle sezioni trasversali.

» 94, ausiliaria della figura 92 per la parte compresa fra le sezioni trasversali 1 e 2.

Figure 95, 96 e 97, per far vedere come da un trapezio dato si possa separare un'area data mediante una parallela alle sue basi, e quindi come da un solido compreso fra due sezioni trasversali se ne possa separare una parte di volume dato con una sezione verticale avente direzione perpendicolare a quella dell'asse della strada.

Tavole XIX e XX.

Figure 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107 e 108, riferentisi alla determinazione delle occupazioni di terreni.

» 109, sulla quale si spiega come si può ottenere il volume del ballast per una determinata lunghezza di strada.

Tavola XXI.

Figure 110, 111, 112, 113, 114 e 115, per esporre il metodo pratico atto a determinare le principali dimensioni delle arcate dei ponti in muratura.

Tavola XXII.

Figure 116, 117, 118, 119, 120 e 121, ancora per esporre il metodo pratico atto a determinare le principali dimensioni delle arcate dei ponti in muratura.

» 122, 123, 124 e 125, riferentisi alla determinazione del volume dello spicchio cilindrico.

Fig. 1.

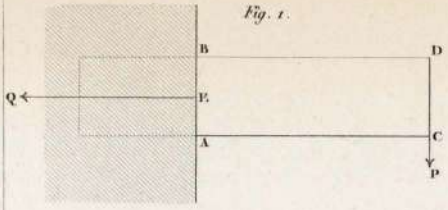


Fig. 2.

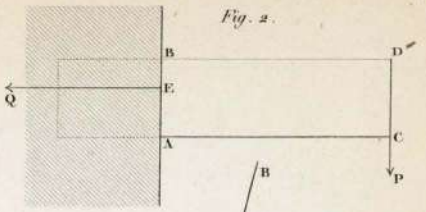


Fig. 3.

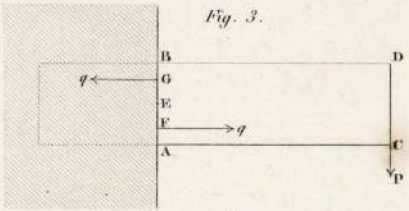


Fig. 4.

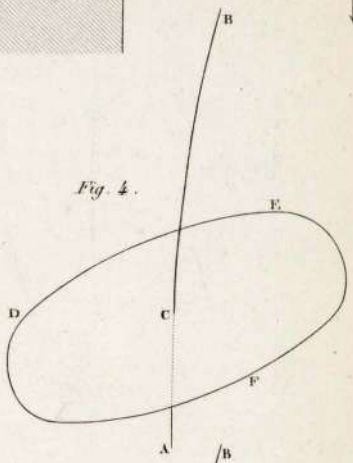


Fig. 6.

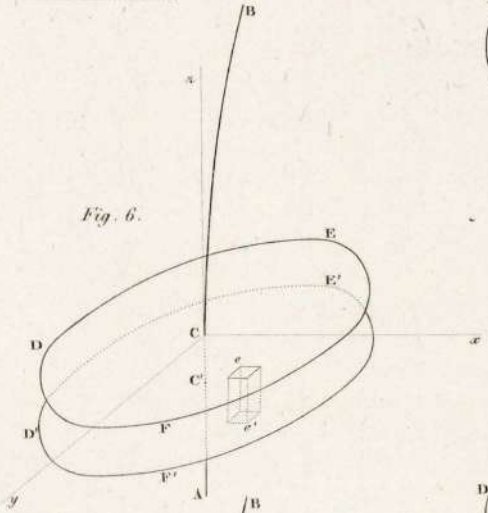


Fig. 5.

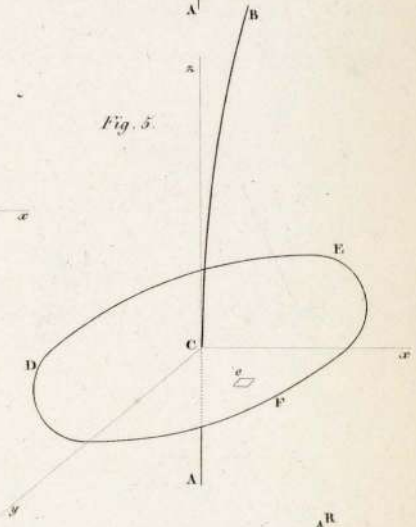


Fig. 7.

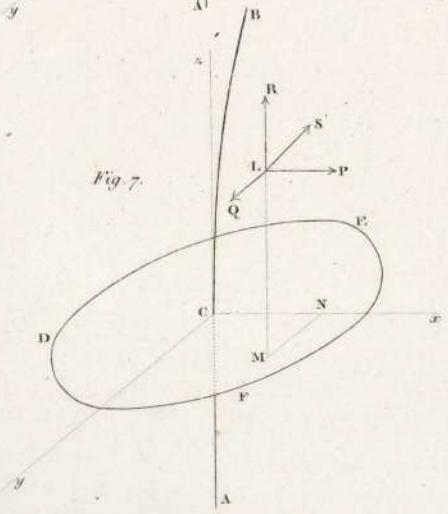
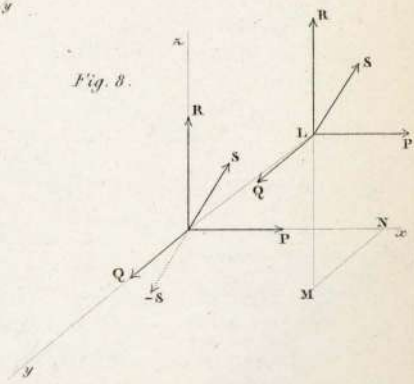


Fig. 8.



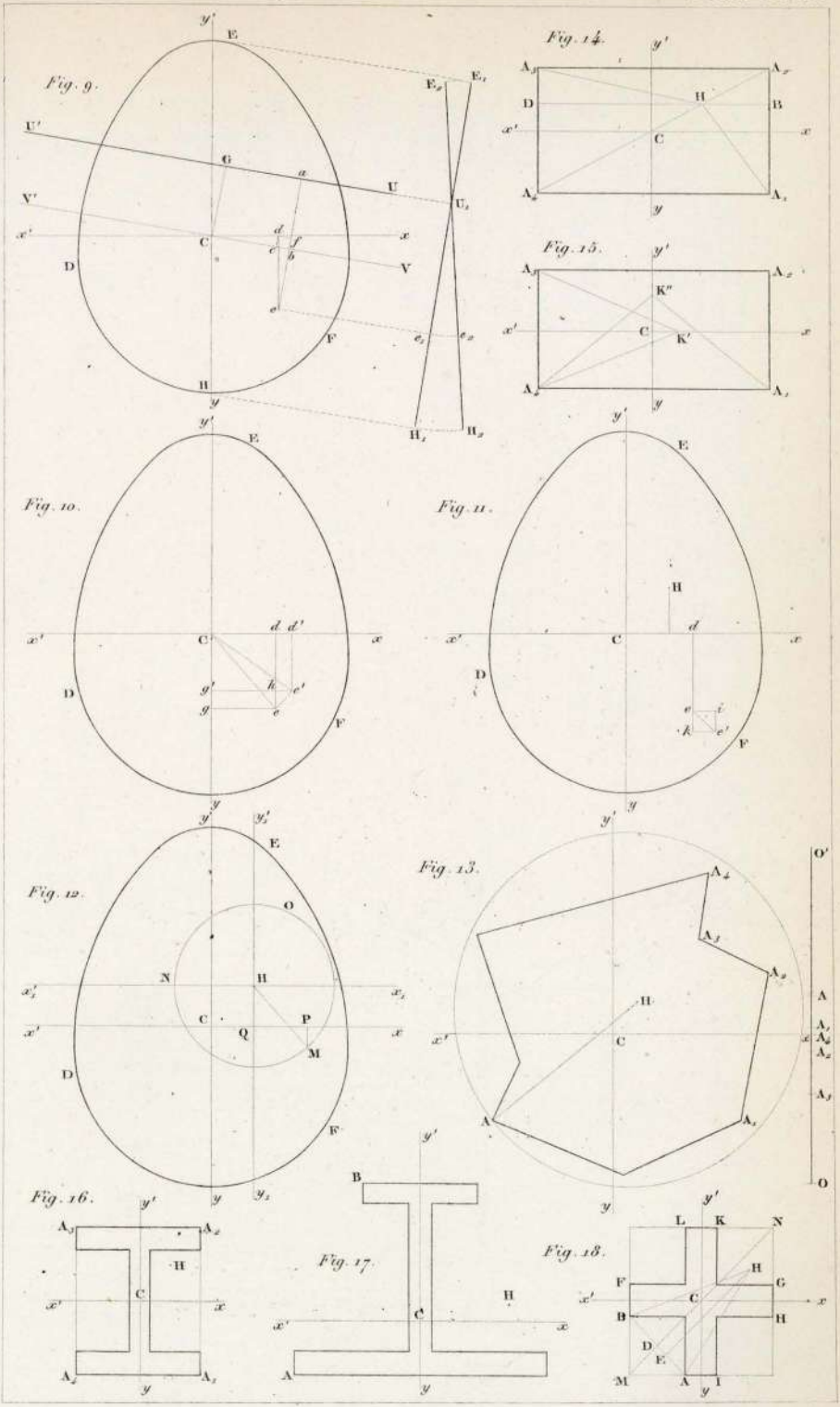


Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.

Fig. 19.

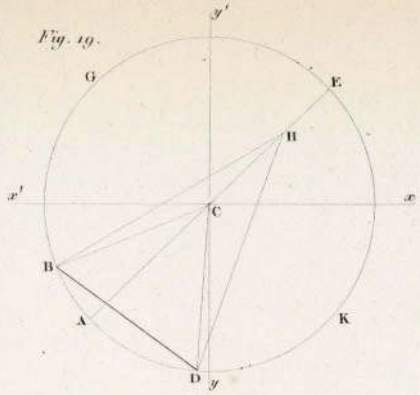


Fig. 20.

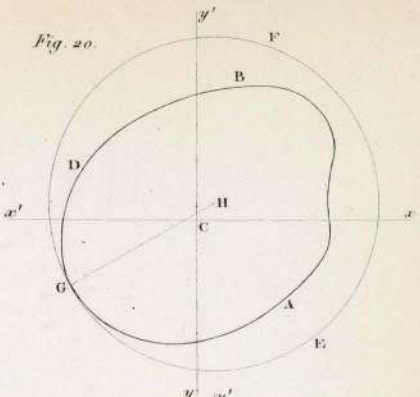


Fig. 21.

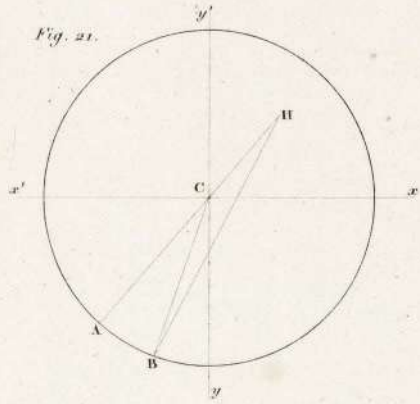


Fig. 22.

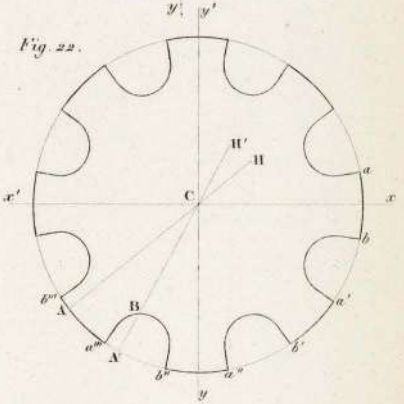


Fig. 23.

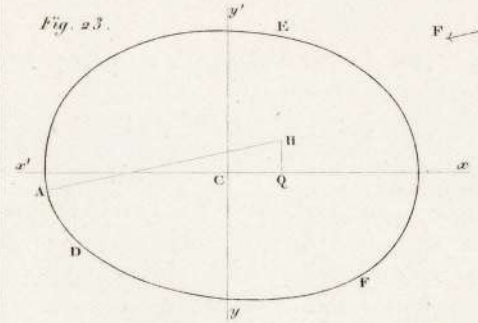


Fig. 24.

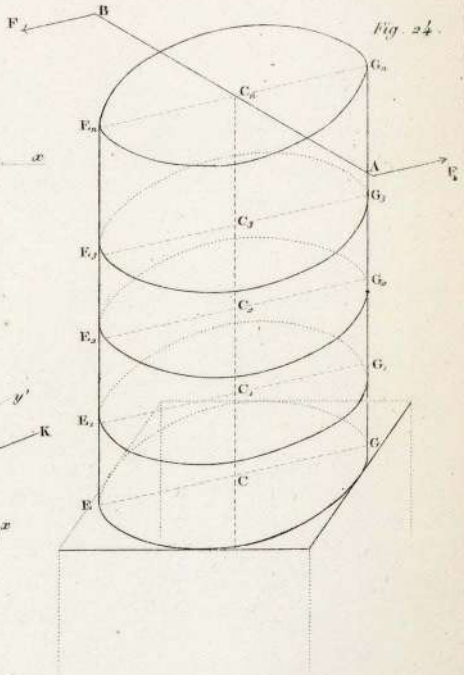


Fig. 25.

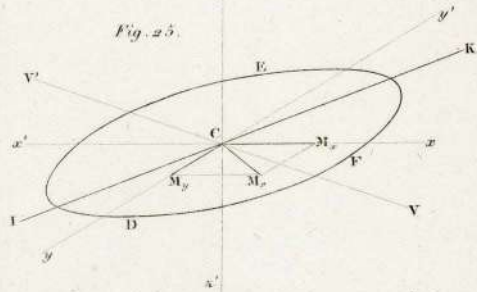
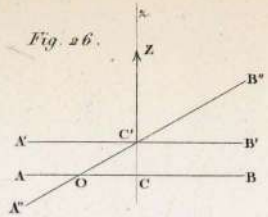


Fig. 26.



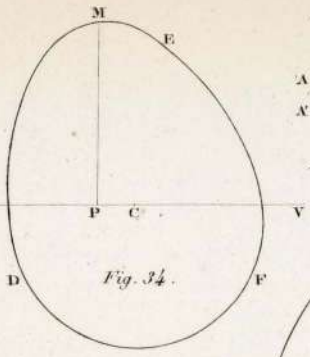
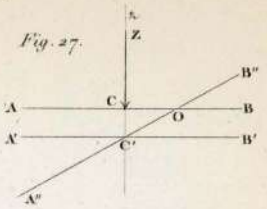


Fig. 34.

Fig. 27.



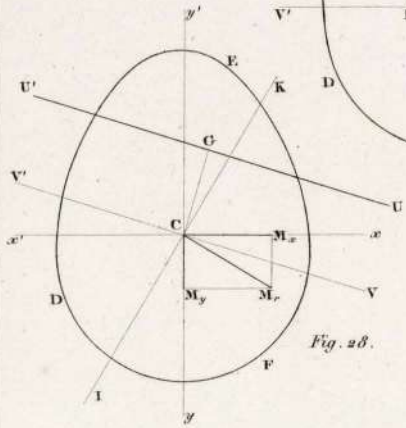


Fig. 28.

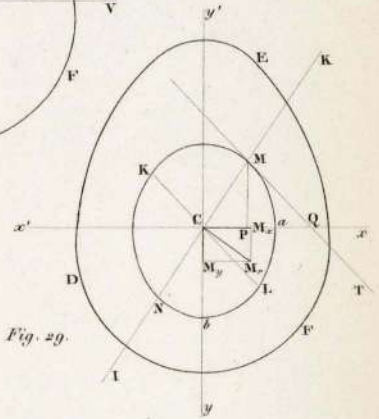


Fig. 29.

Fig. 30.

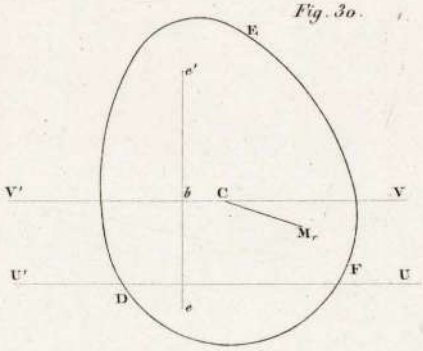


Fig. 31.

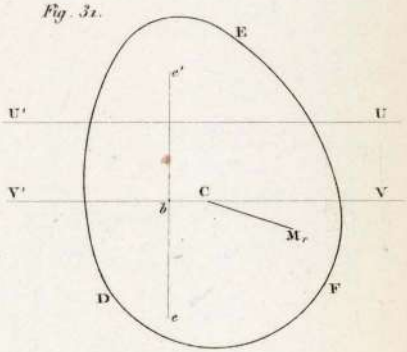


Fig. 32.

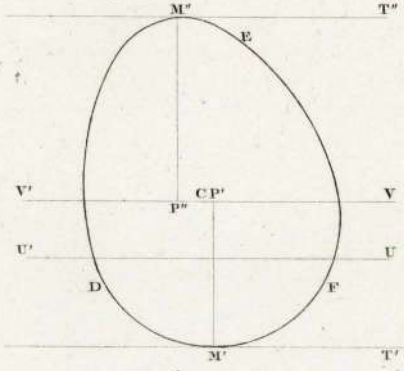


Fig. 33.

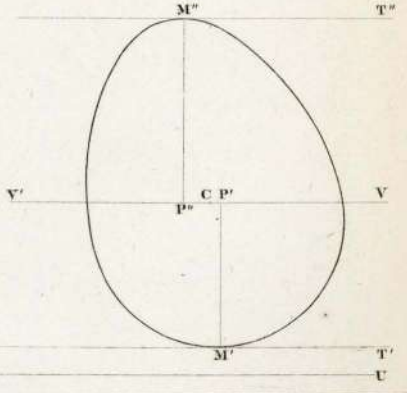


Fig. 35.

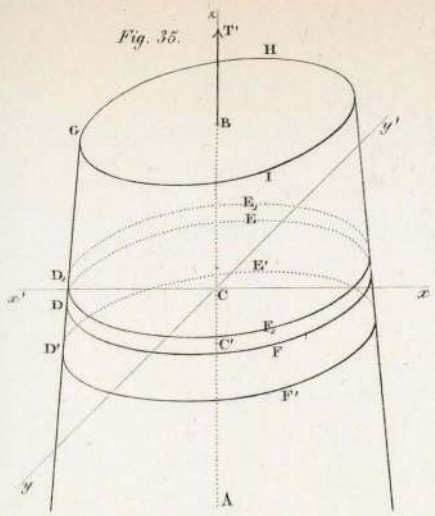


Fig. 36

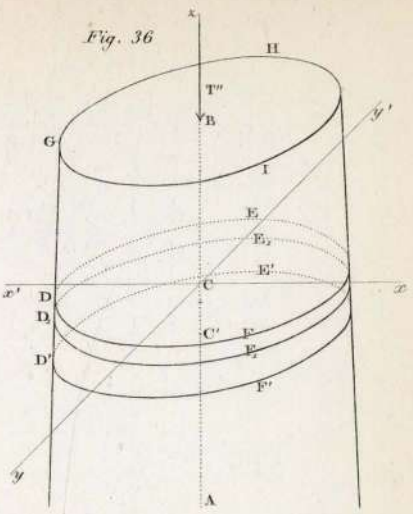


Fig. 37.

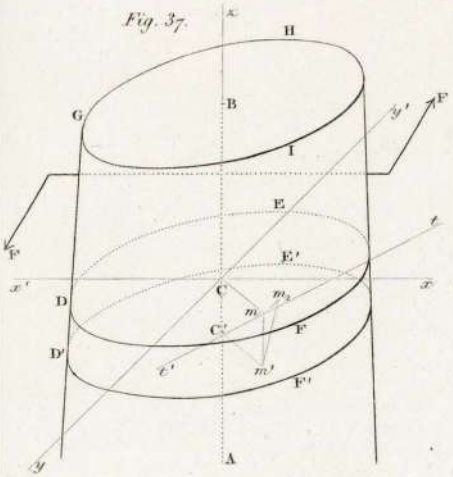


Fig. 38.

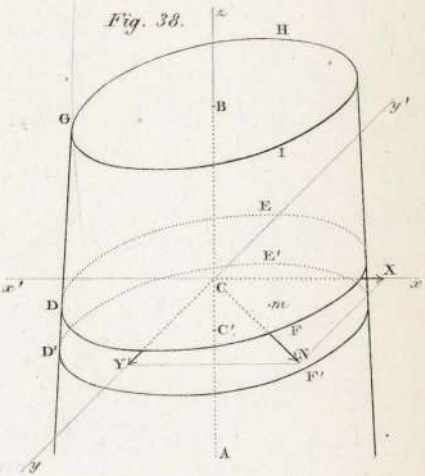


Fig. 39.

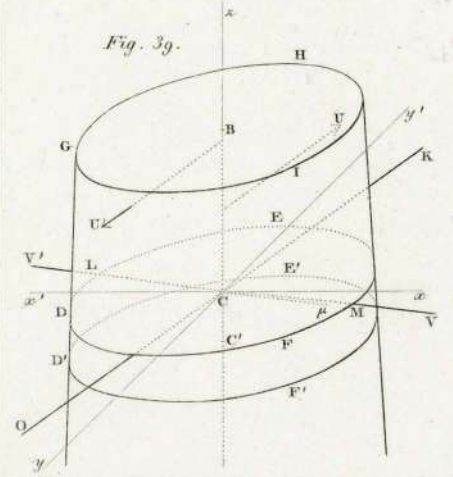
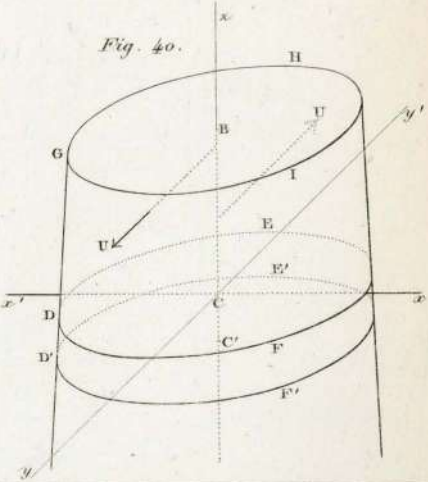


Fig. 40.



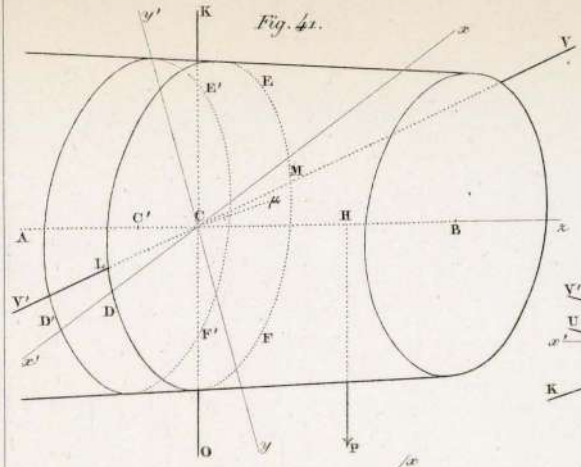


Fig. 41.
y'
K
x
V
E'
E
M
μ
C'
C
H
B
A
L
V'
D'
D
F'
F
x'
O
y
P

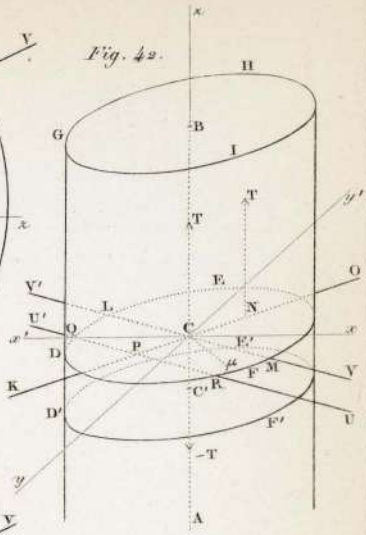


Fig. 42.
x
H
G
B
I
T
T
y'
V'
E
O
U'
L
C
N
x'
Q
x
D
P
E'
K
μ
F
M
V
C'
R
D'
F'
U
T
y
A

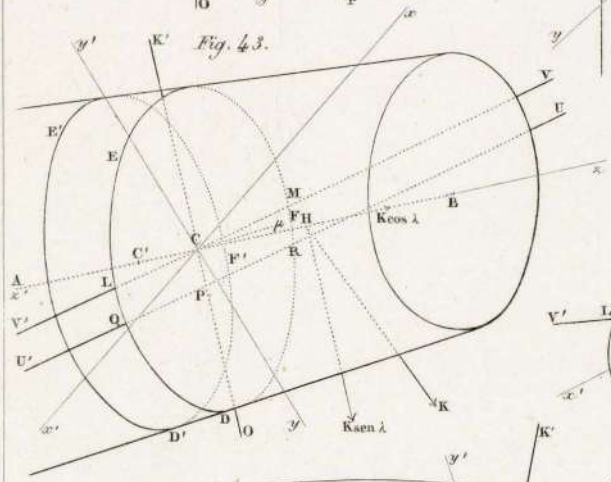


Fig. 43.
y'
K'
x
V
E'
U
E
M
μ
F
H
Kcos λ
B
C'
C
F'
R
A
L
P
V'
Q
U'
x'
D'
D
O
y
Ksen λ
K

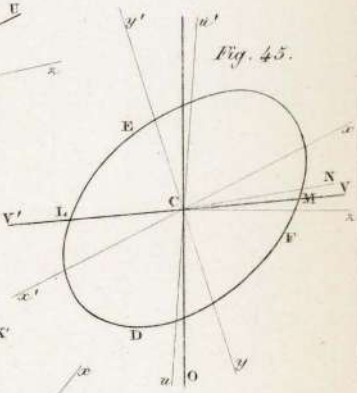


Fig. 45.
y'
u'
x
E
N
V
C
M
V'
L
F
x'
D
u
O
y

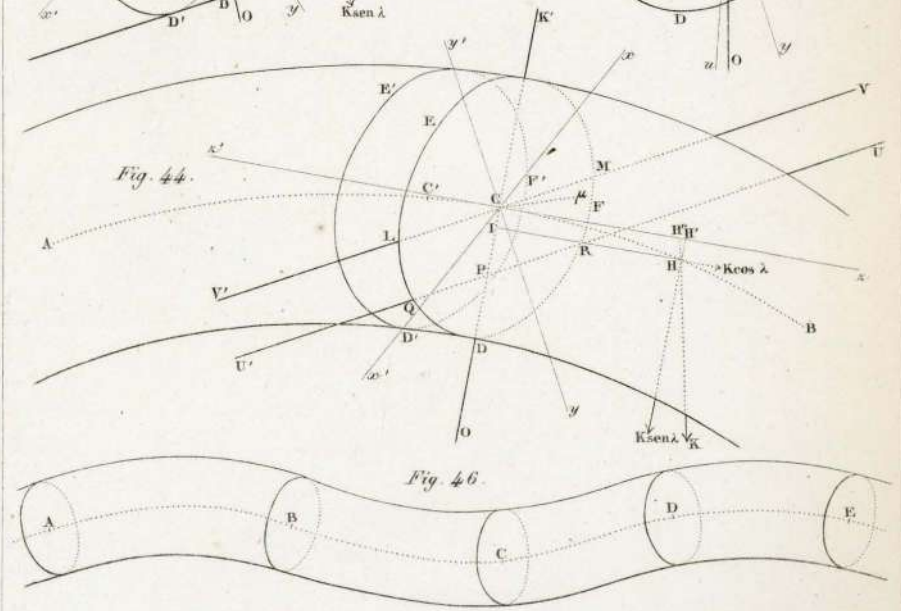


Fig. 44.
K'
y'
x
E'
V
E
U
x'
M
C'
C
F'
μ
F
A
L
I
H'
H'
R
P
H
Kcos λ
V'
B
Q
D'
D
U'
x'
O
y
Ksen λ
K

Fig. 46.
A
B
C
D
E

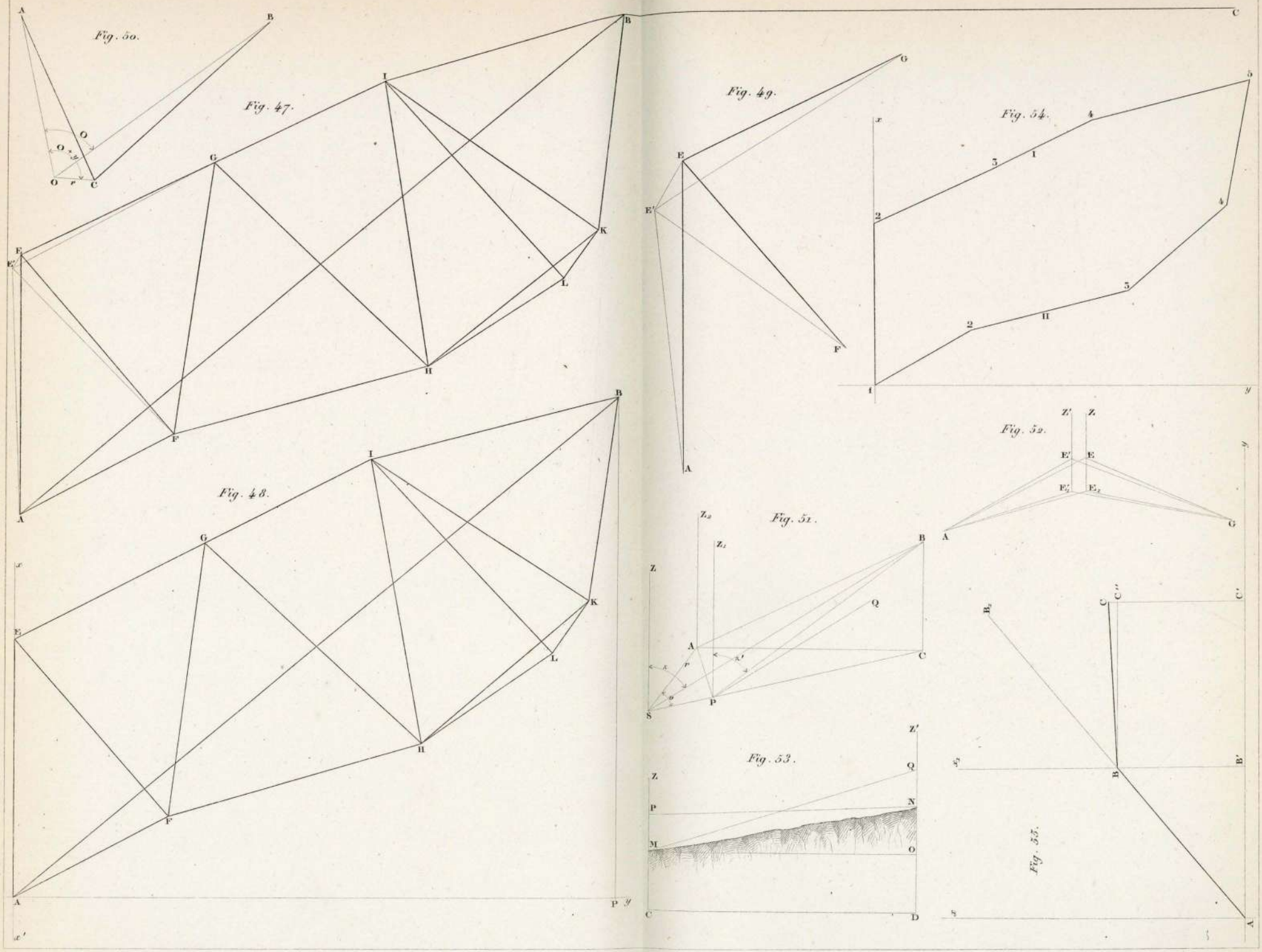


Fig. 50.
Fig. 47.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 54.
Fig. 52.
Fig. 51.
Fig. 53.
Fig. 55.

Fig. 56.

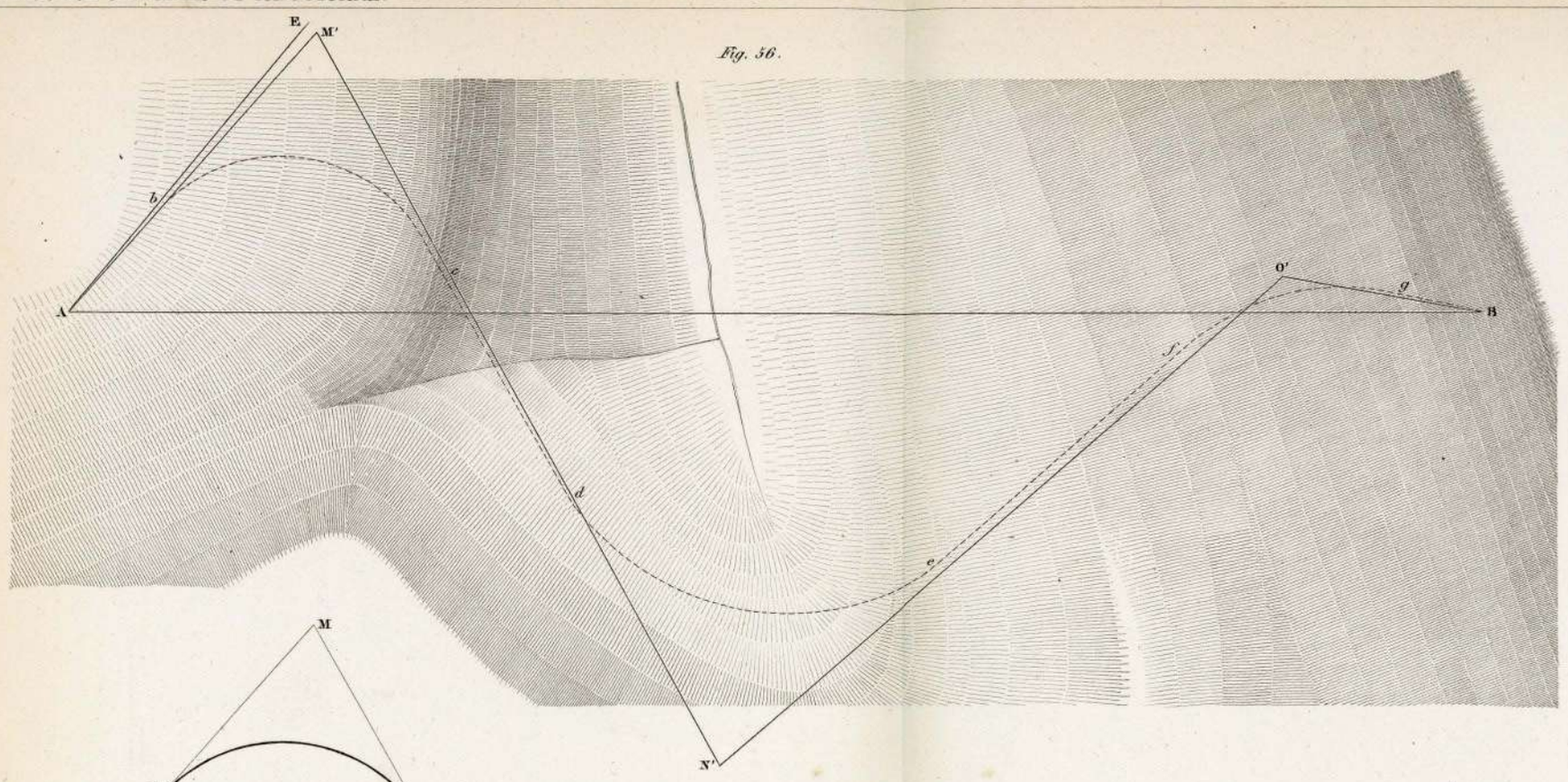


Fig. 60.

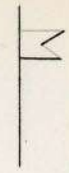


Fig. 61.

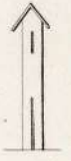


Fig. 62.

Fig. 57.

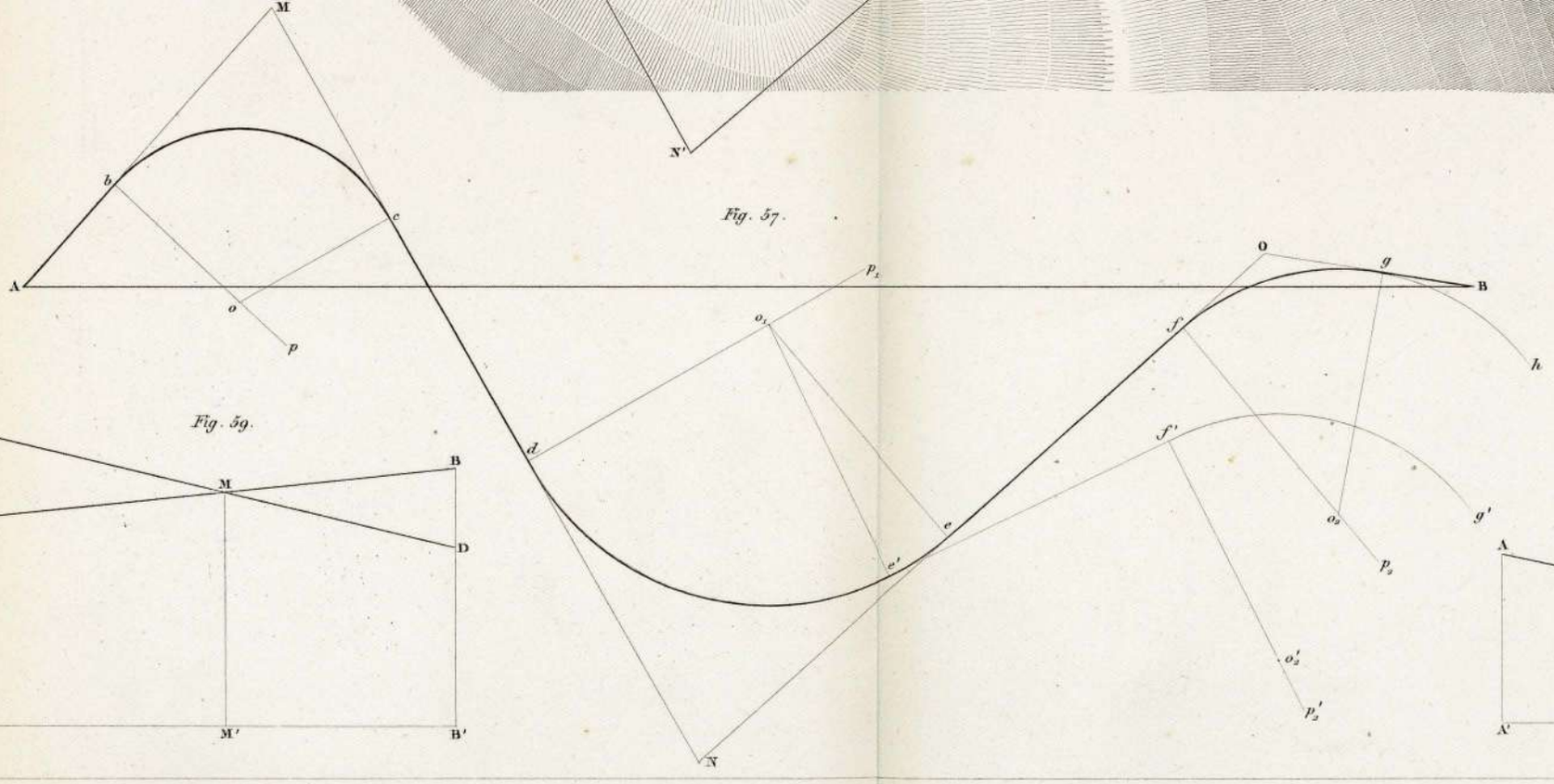


Fig. 63.

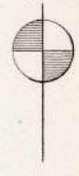
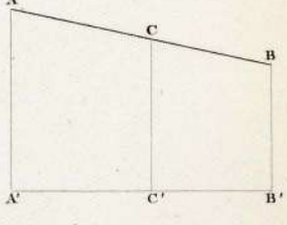


Fig. 59.

Fig. 58.



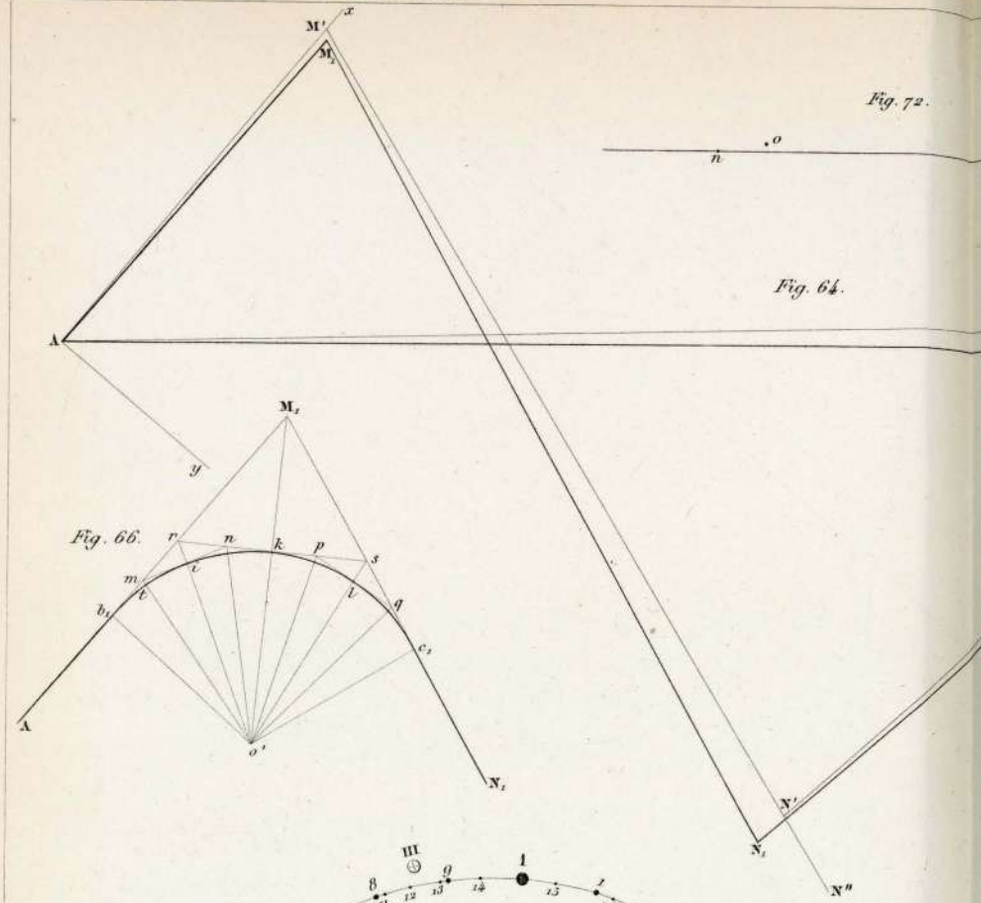


Fig. 64.

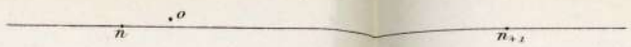


Fig. 72.

Fig. 66.

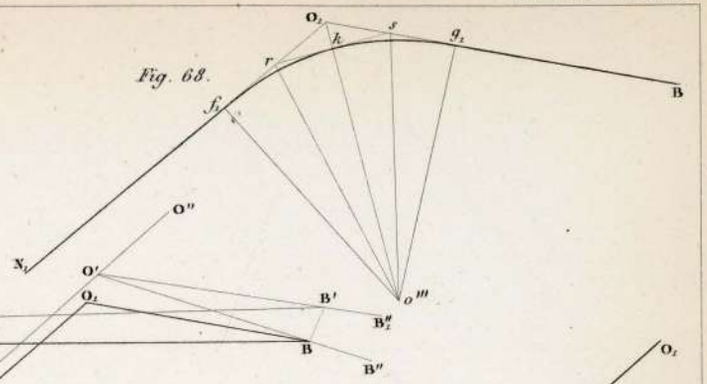


Fig. 68.

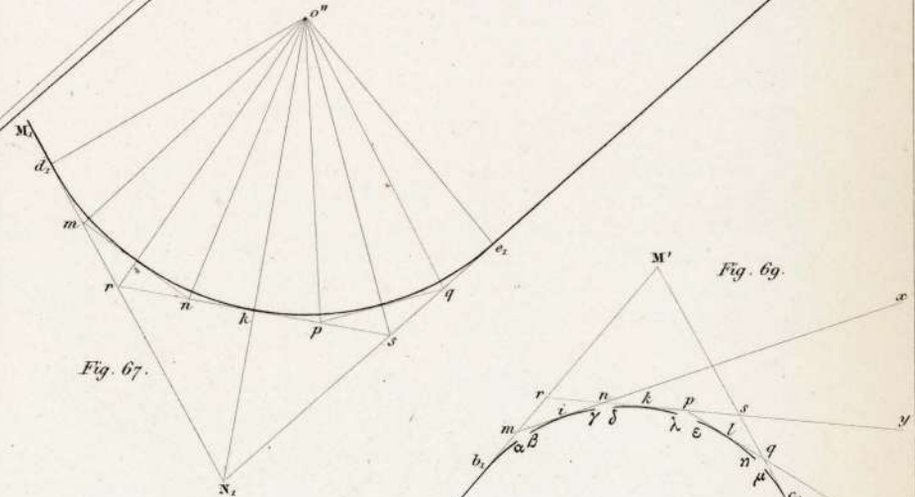


Fig. 67.

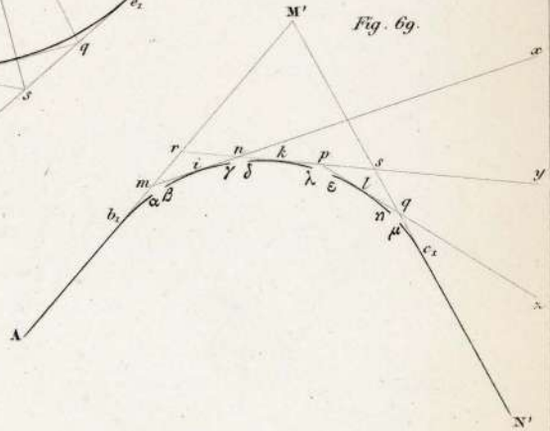


Fig. 69.

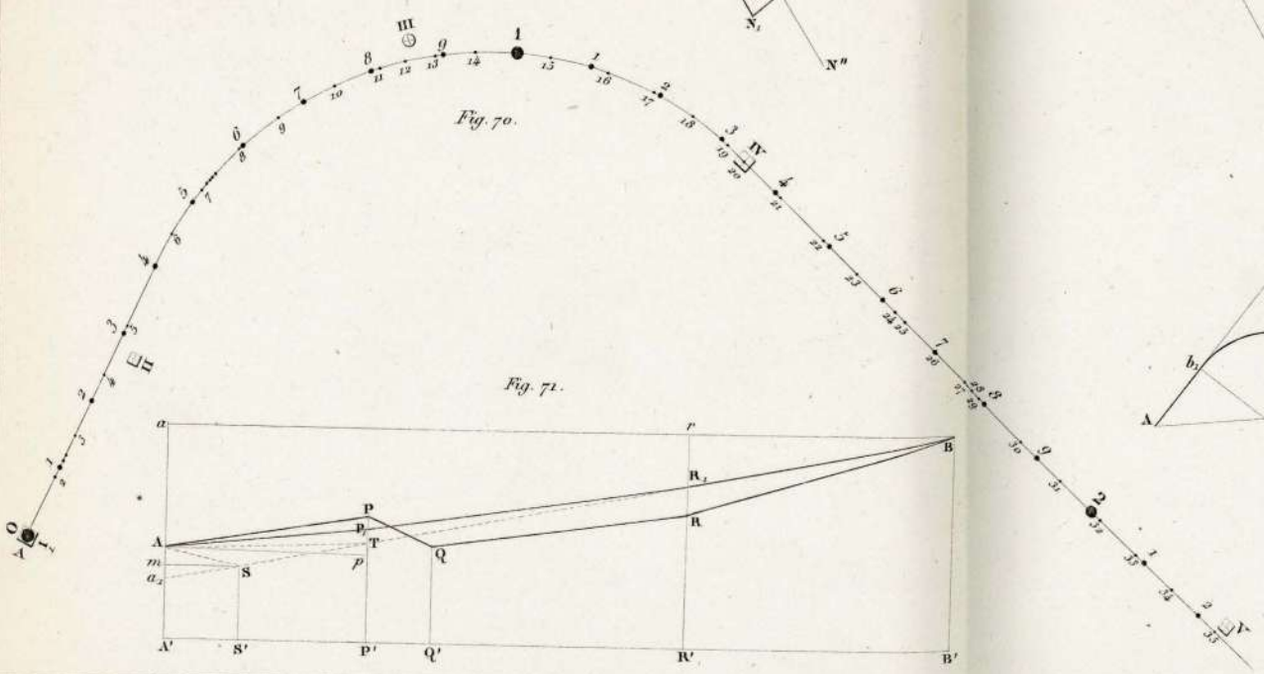


Fig. 70.

Fig. 71.

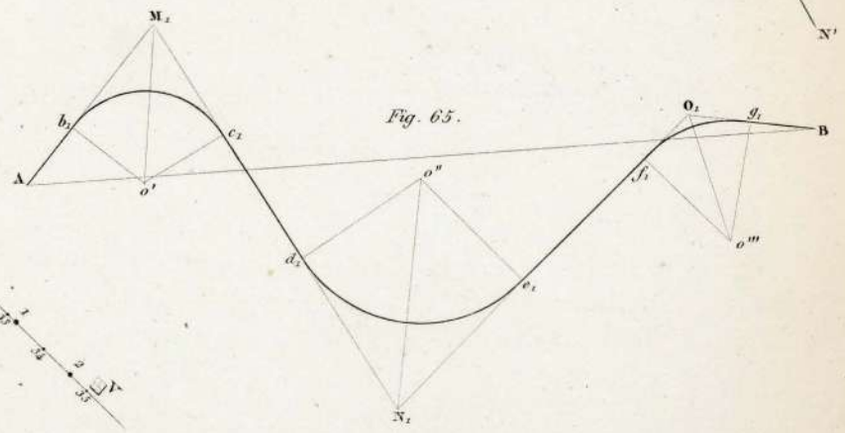


Fig. 65.

Fig. 73.

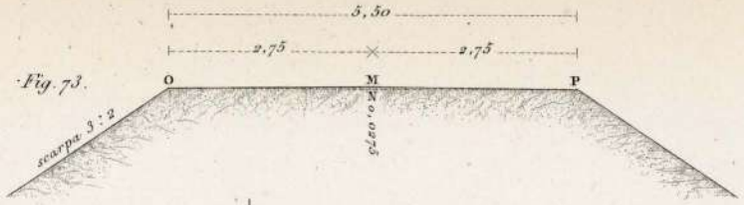


Fig. 74.

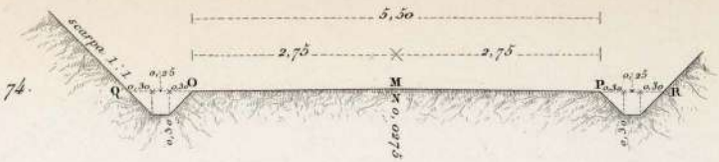
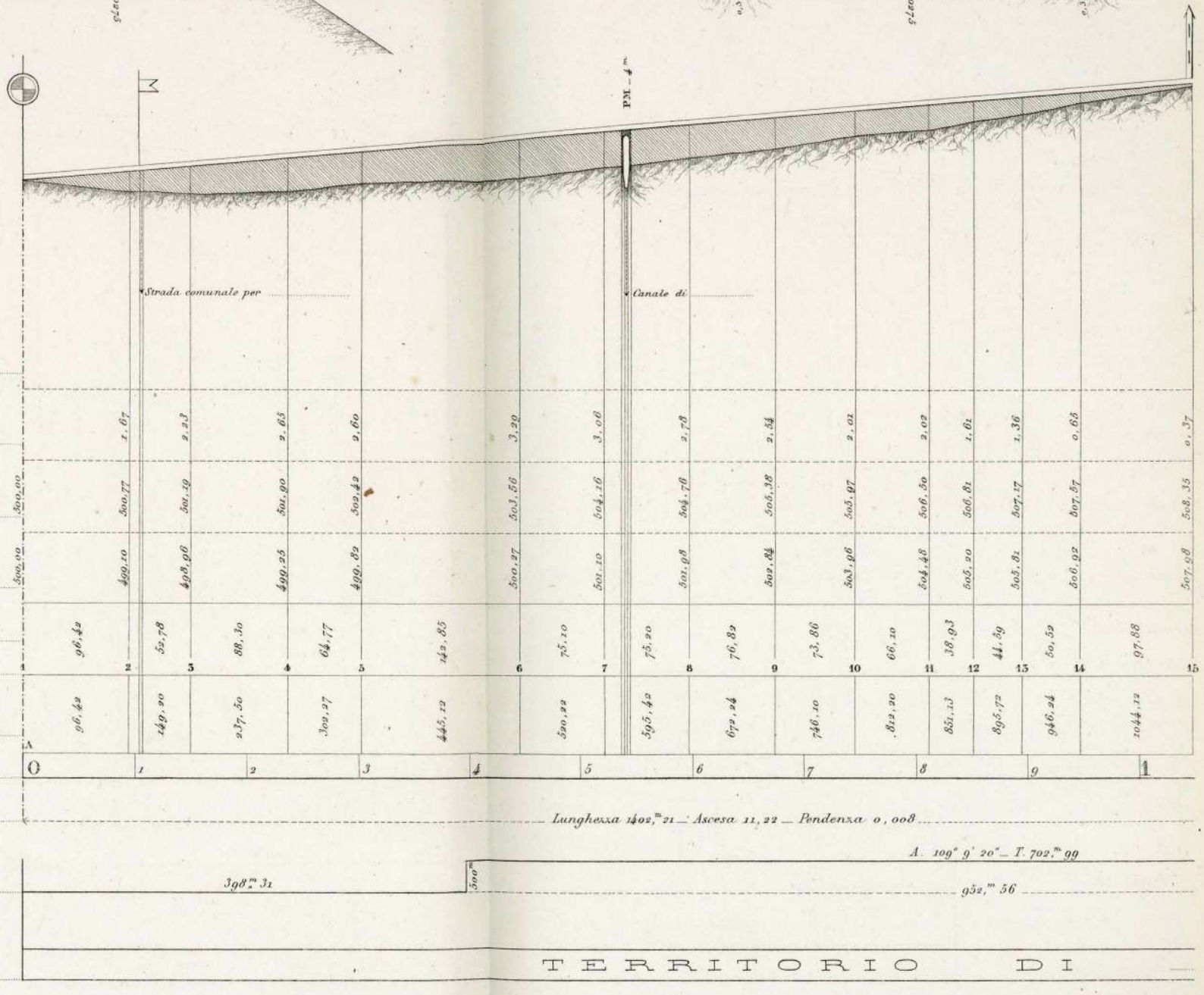
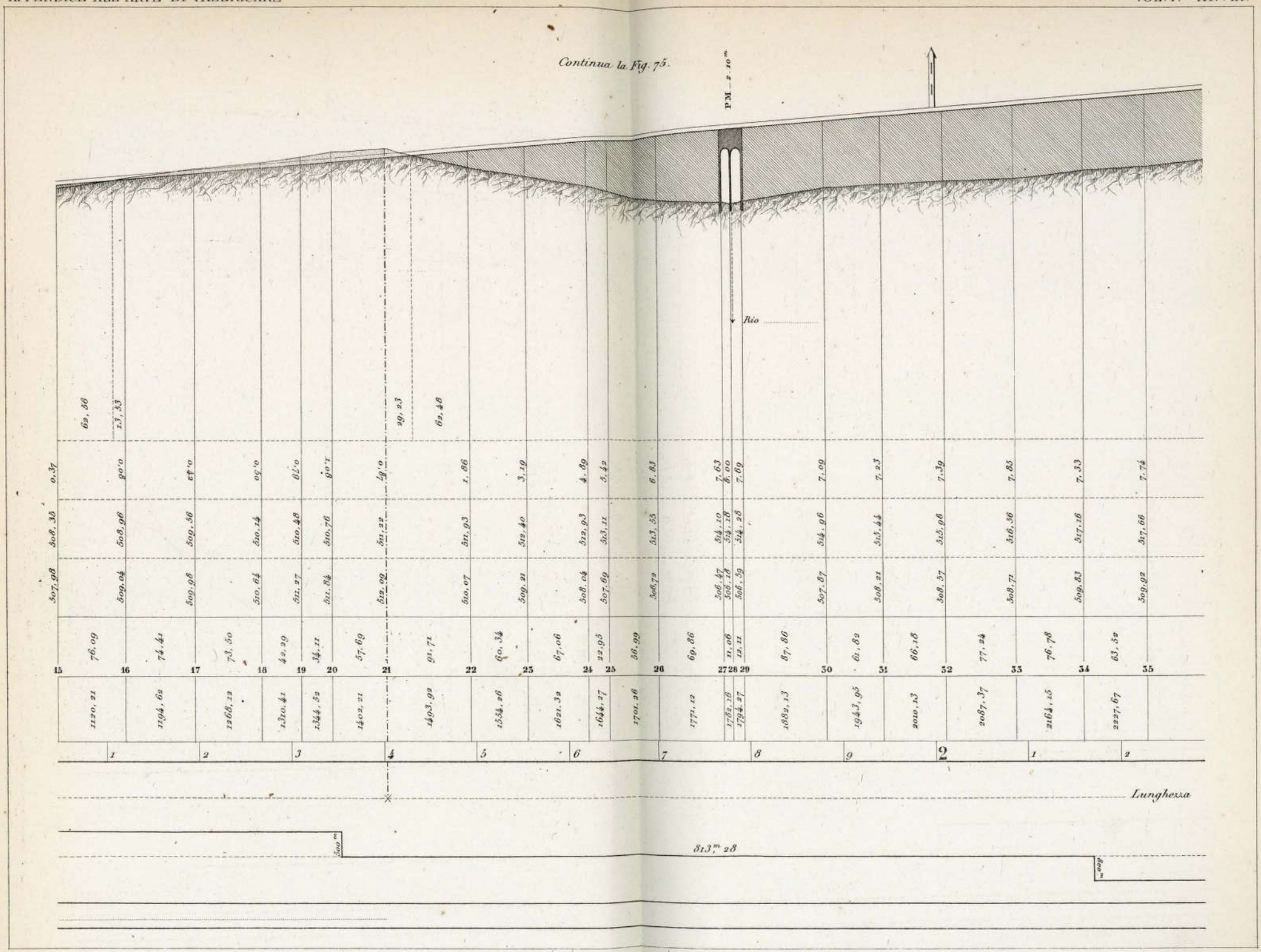


Fig. 75.




Continua la Fig. 75.
PM 2.10m
Rio
Lunghezza
813m 28
500m
800m

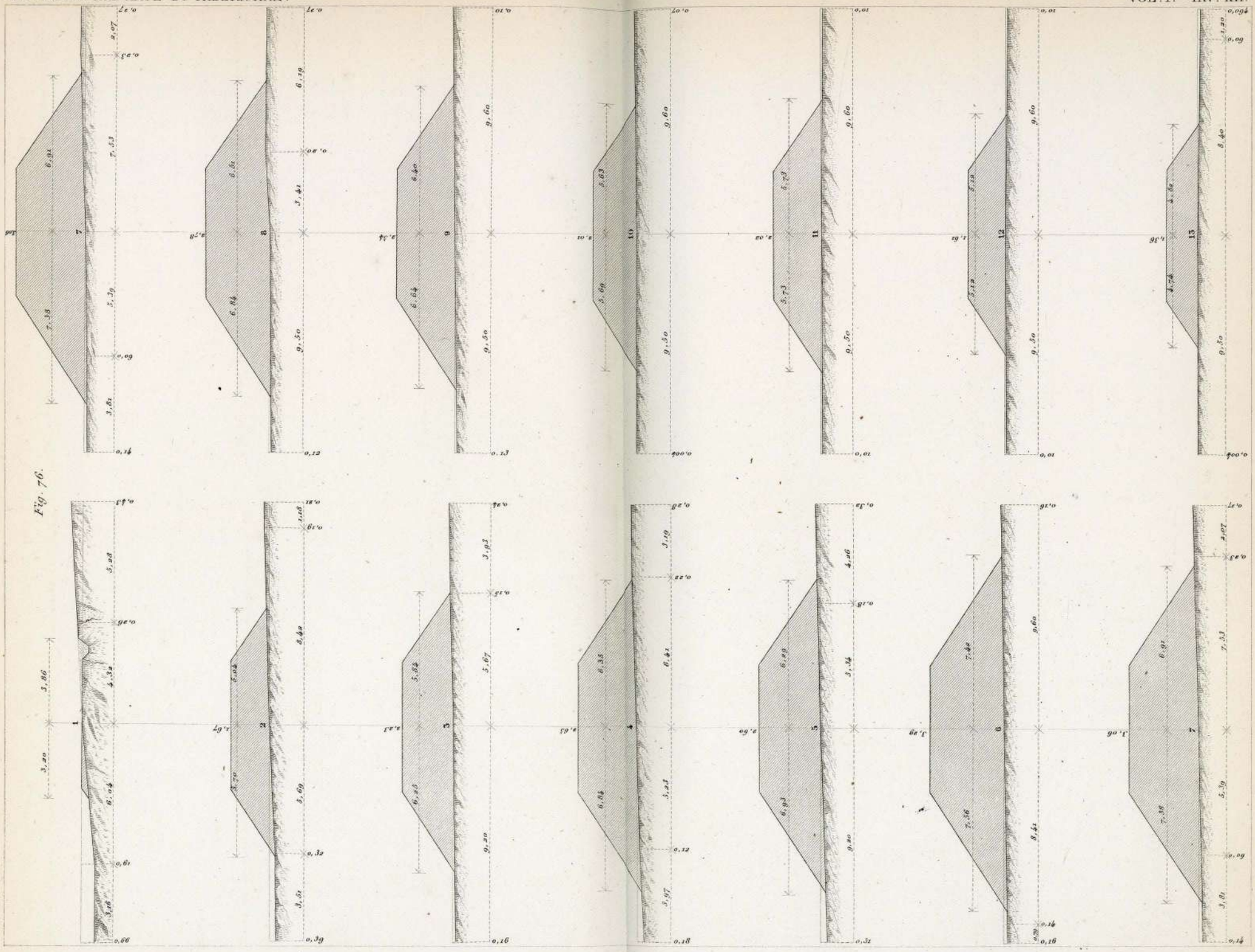
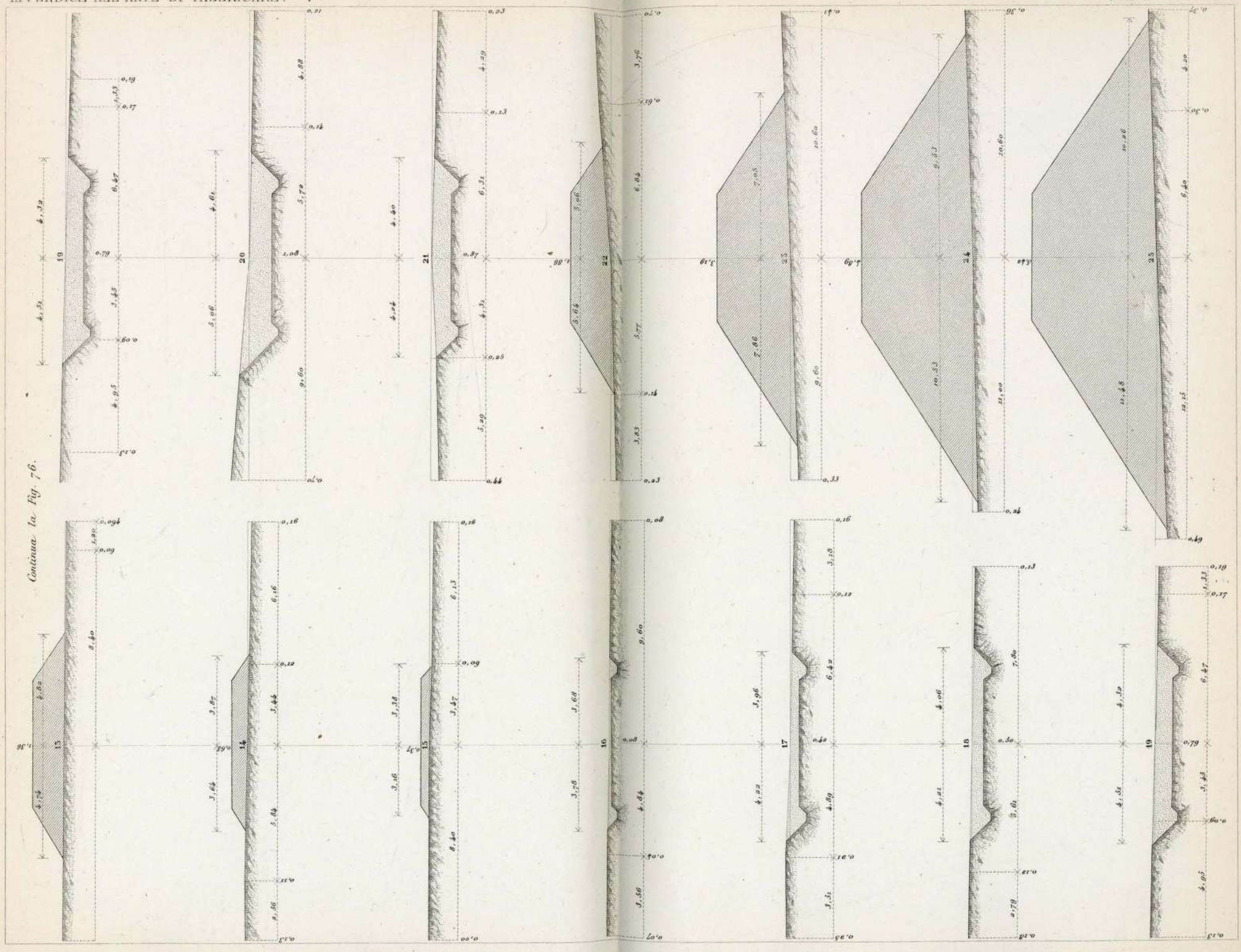


Fig. 76.



Continua la Fig. 76.

Fig. 77.

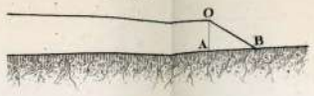


Fig. 78.

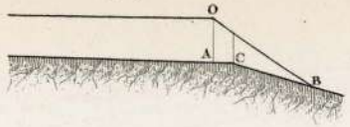


Fig. 79.

Fig. 80.

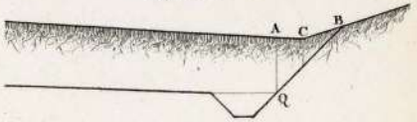


Fig. 88.

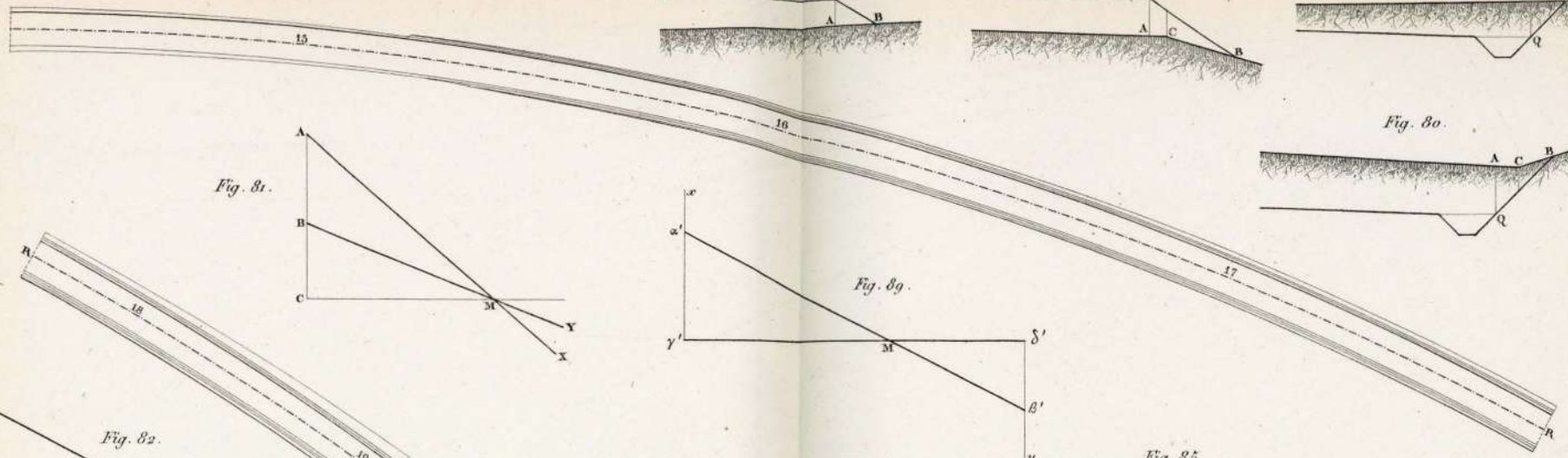


Fig. 81.

Fig. 89.

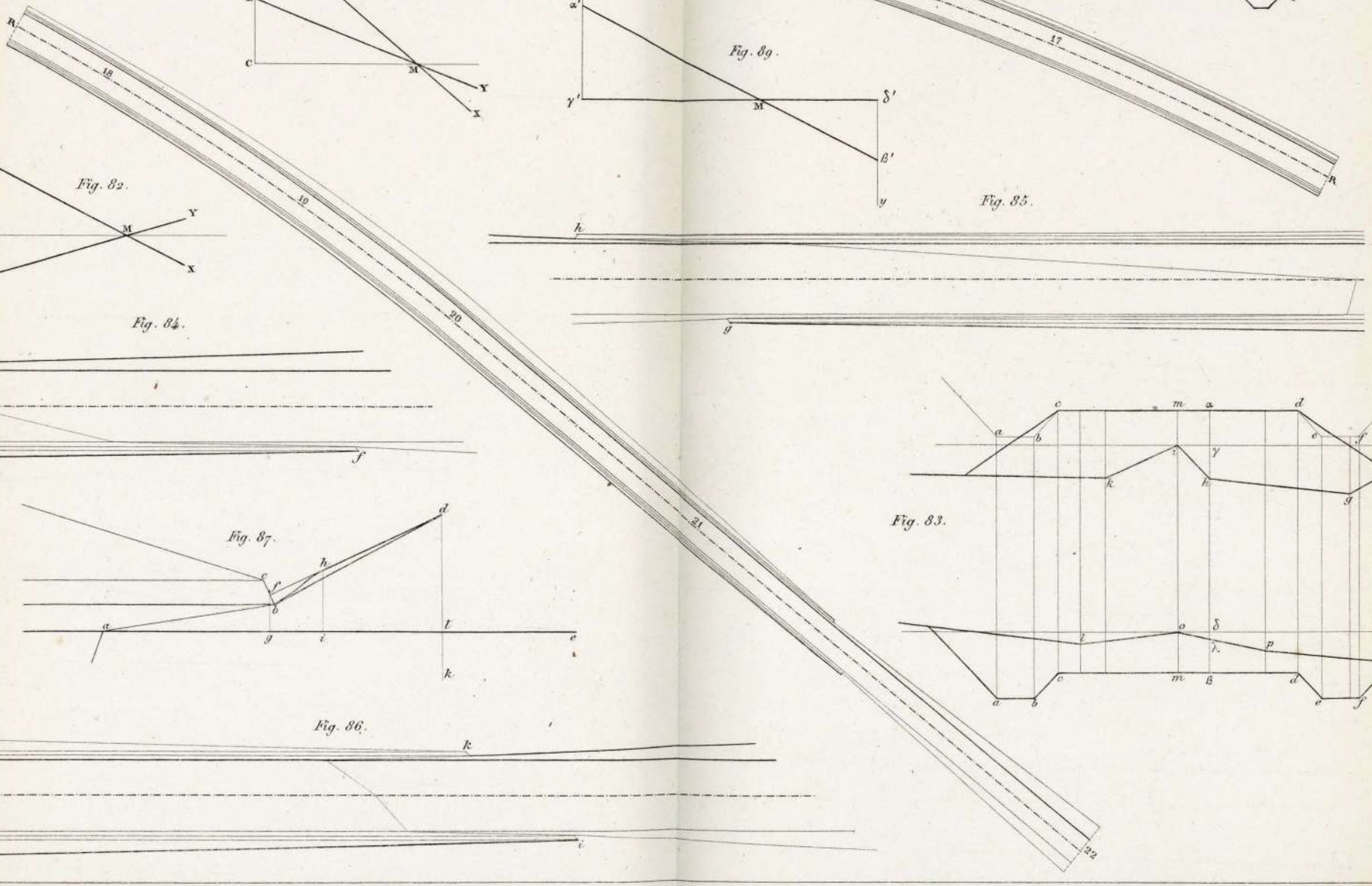


Fig. 82.

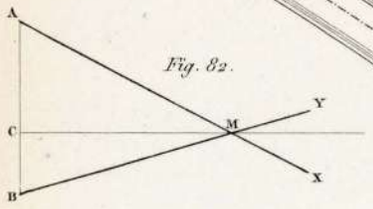


Fig. 85.

Fig. 84.

Fig. 83.

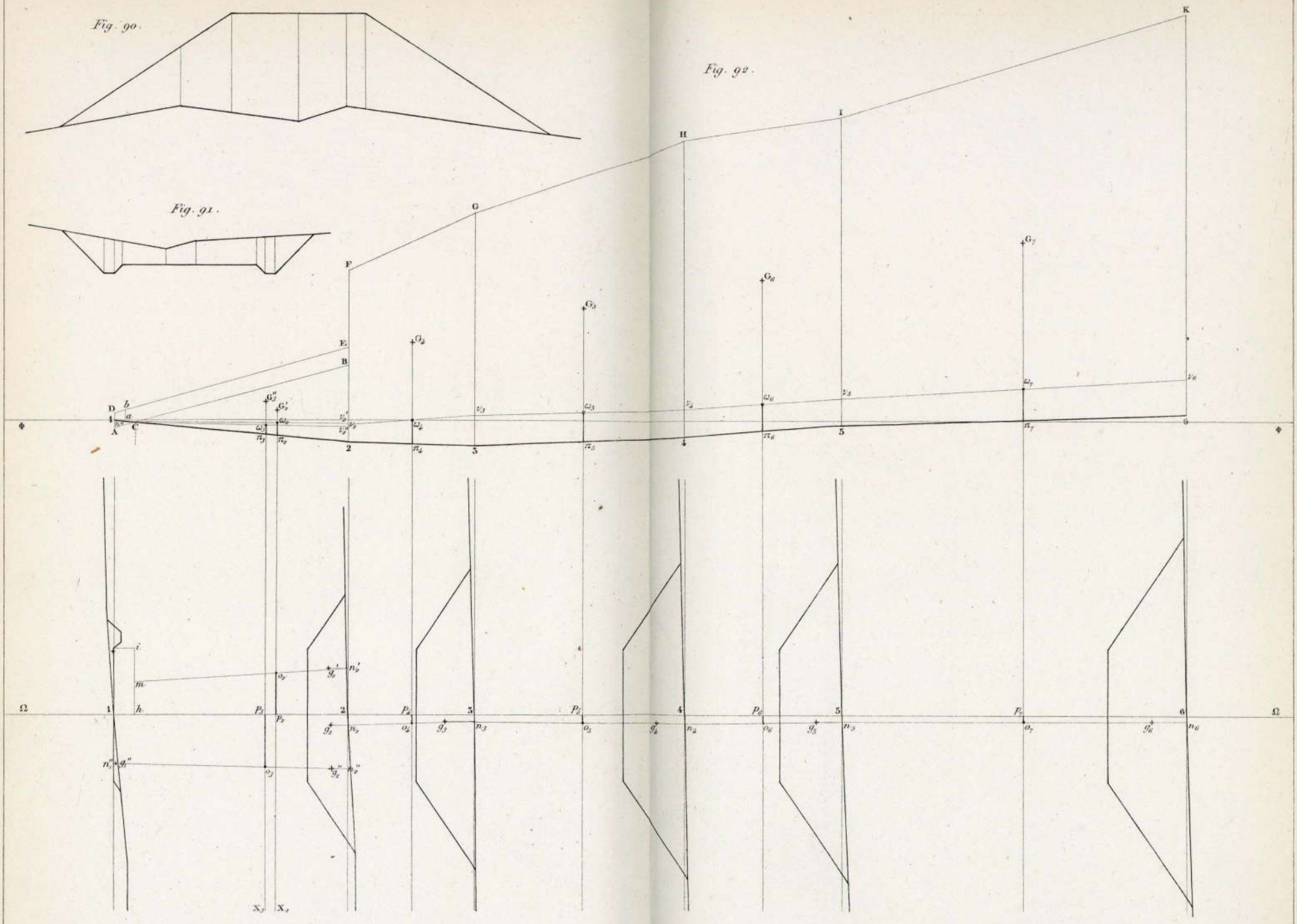
Fig. 87.

Fig. 86.

Fig. 90.

Fig. 91.

Fig. 92.



Continua la Fig. 92.

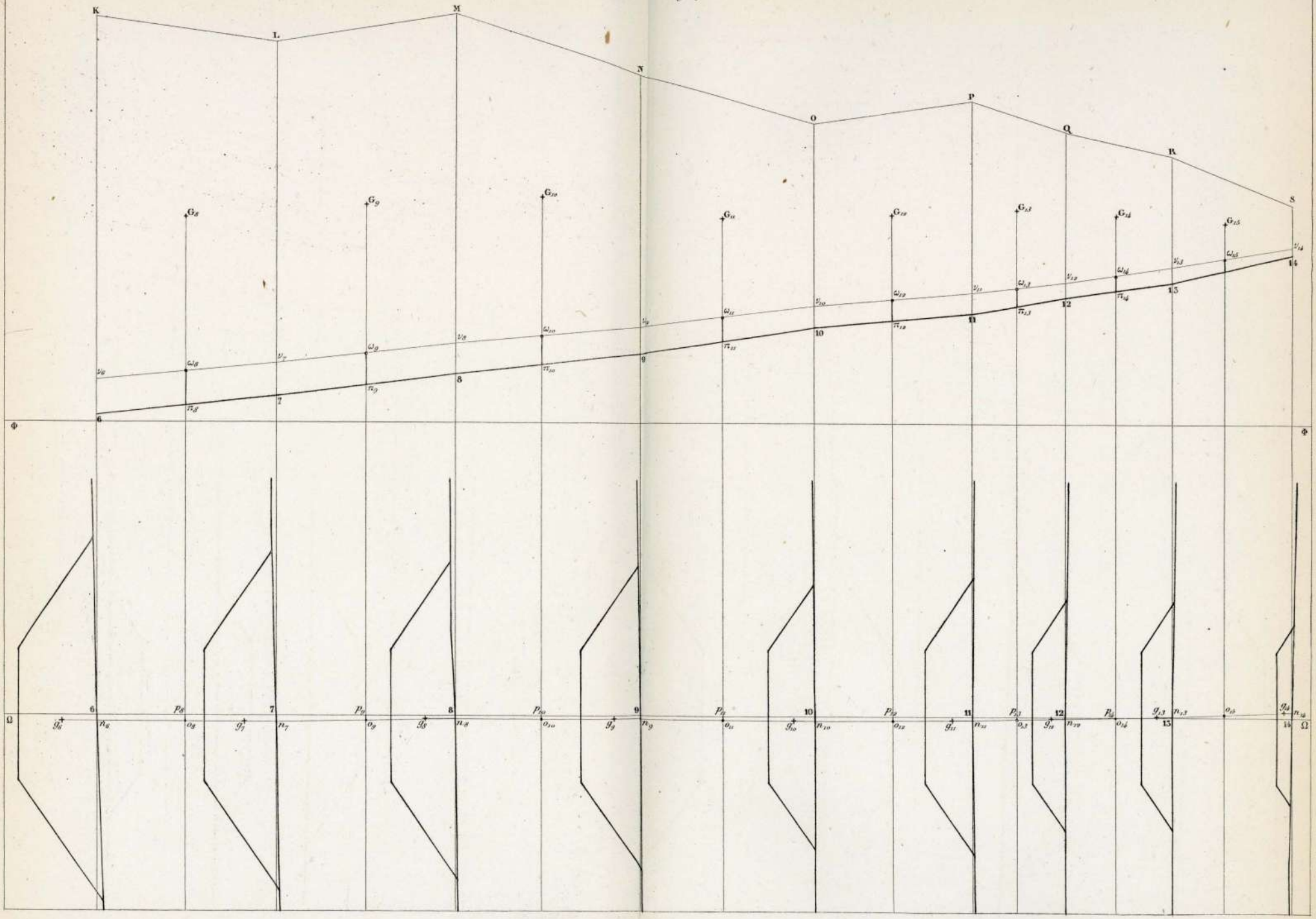
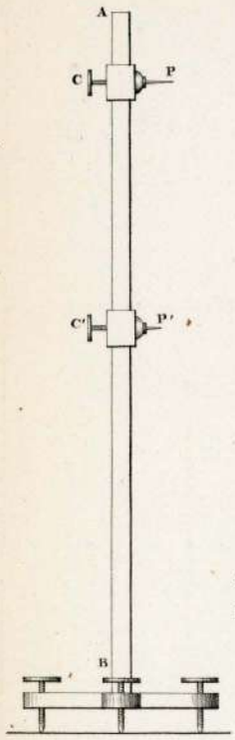
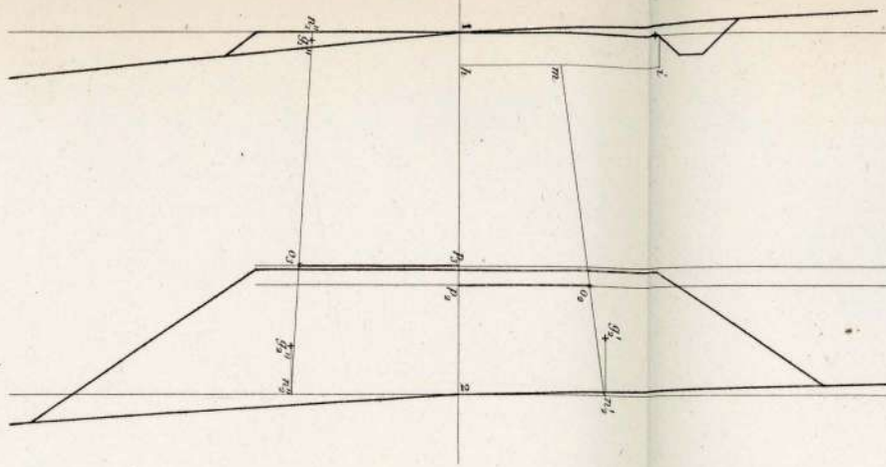


Fig. 93.





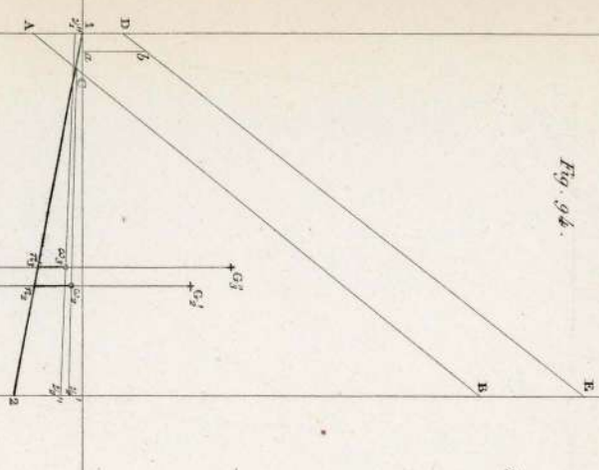


Fig. 94.

Continua la Fig. 92.

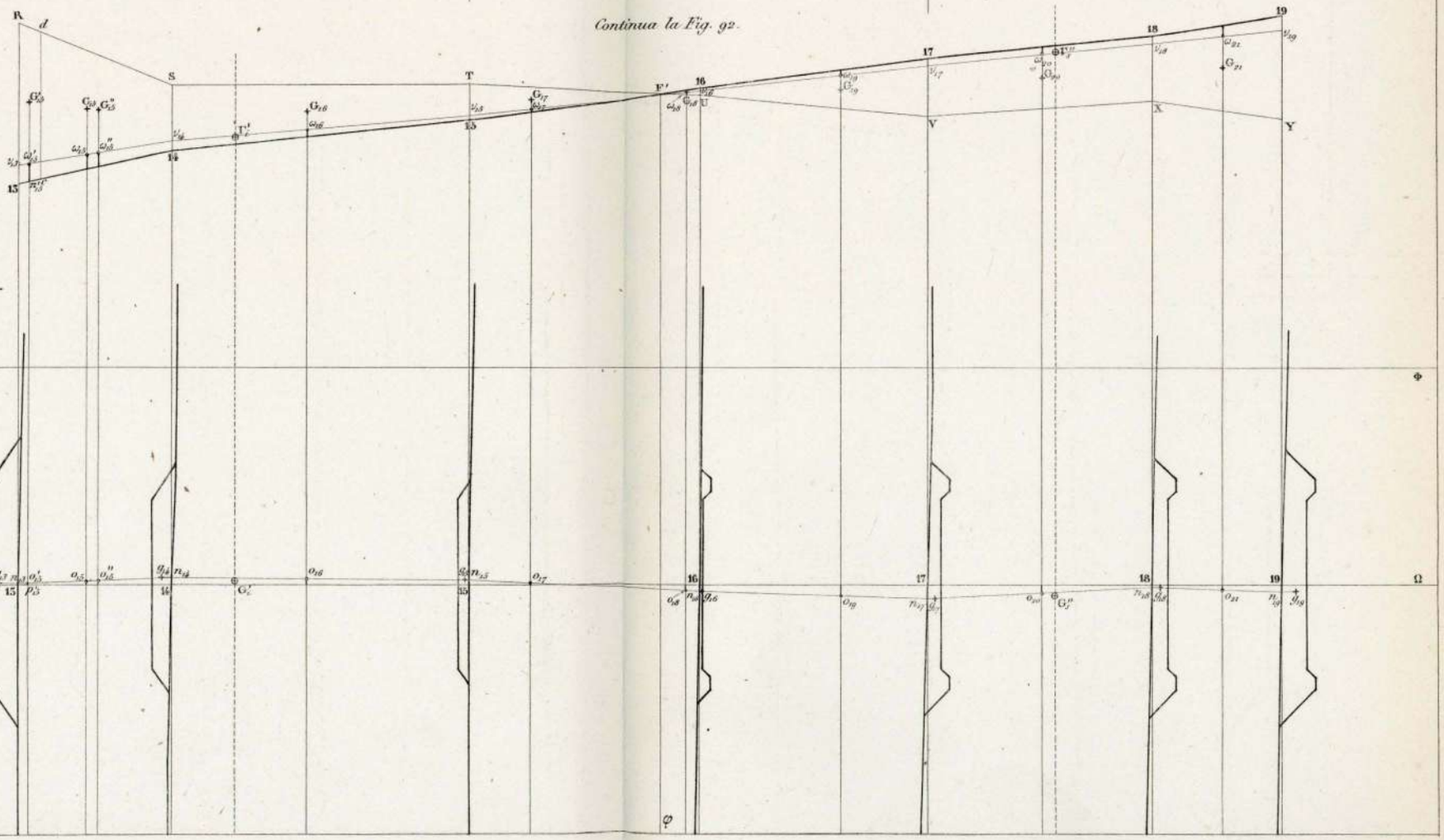
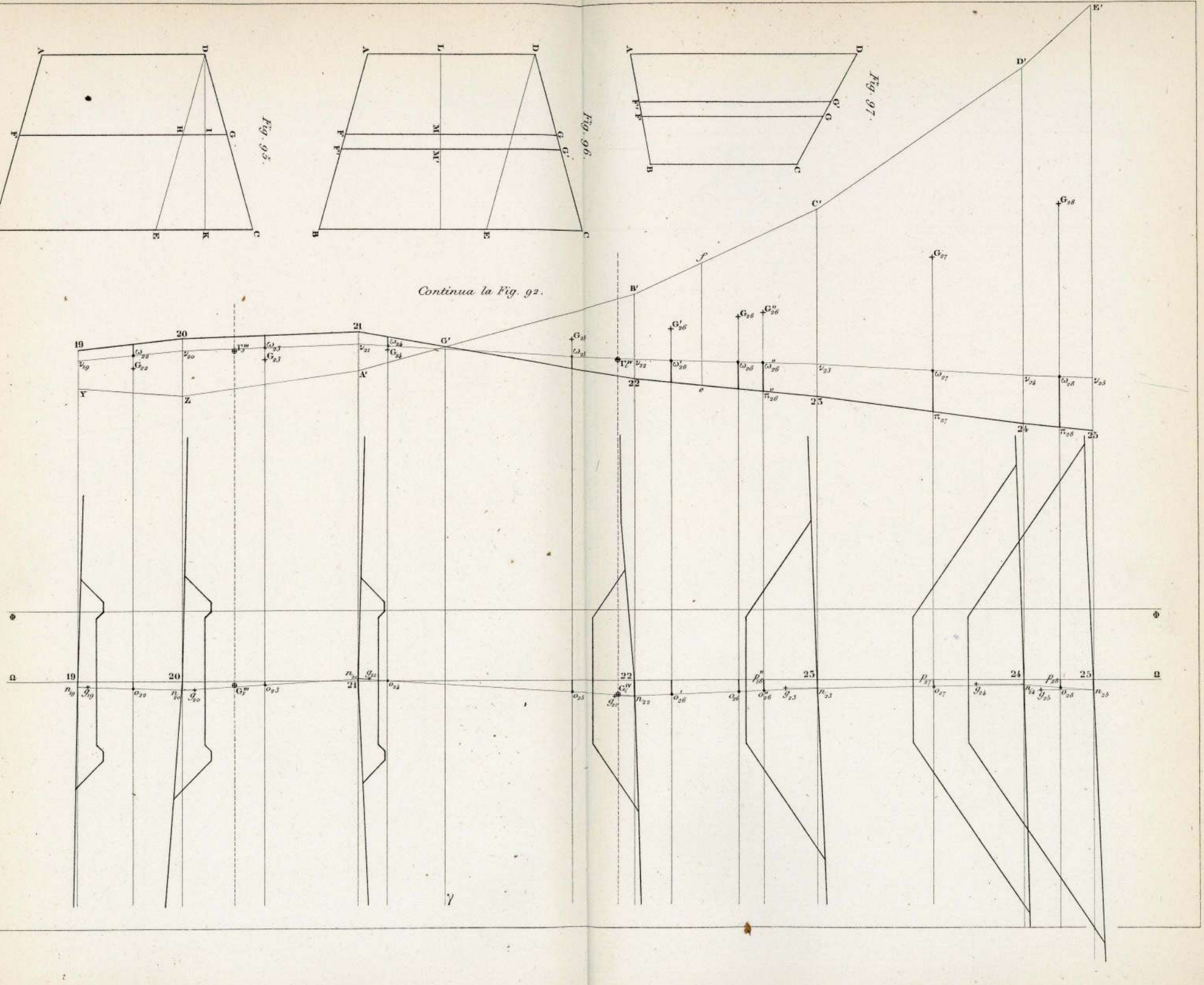


Fig. 95.

Fig. 96.

Fig. 97.

Continua la Fig. 92.



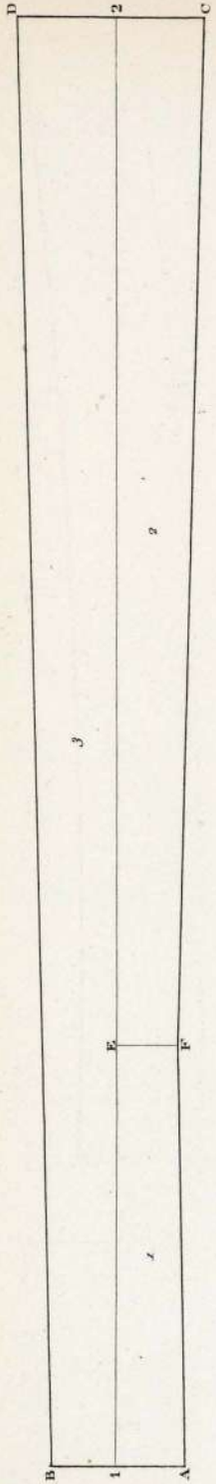


Fig. 98.

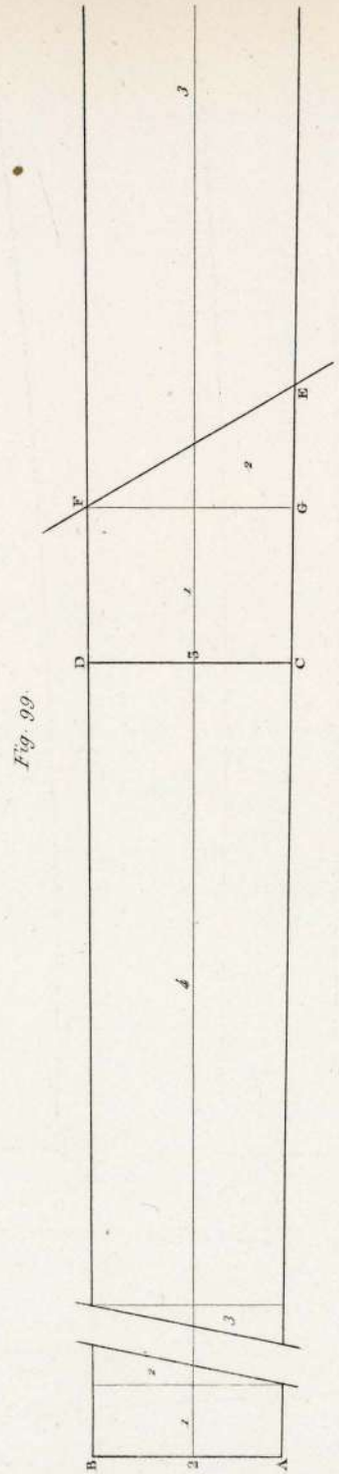


Fig. 99.

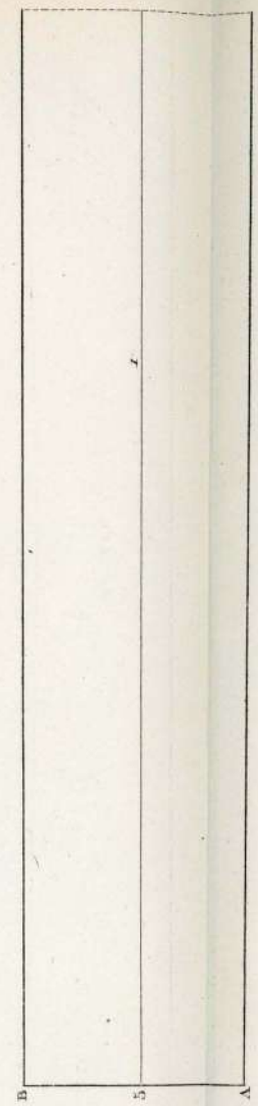
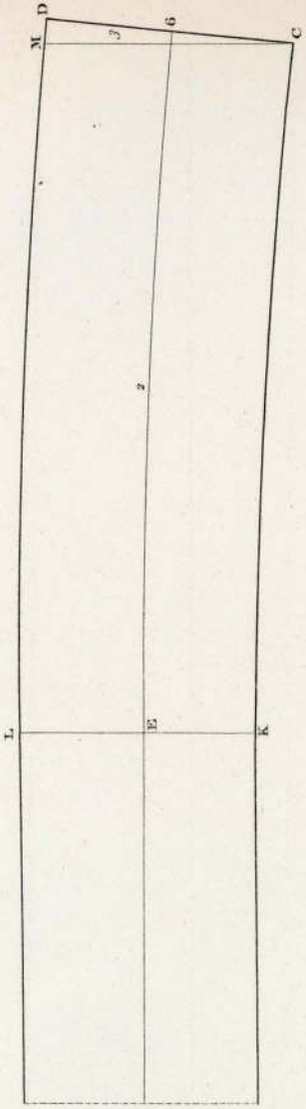


Fig. 100.



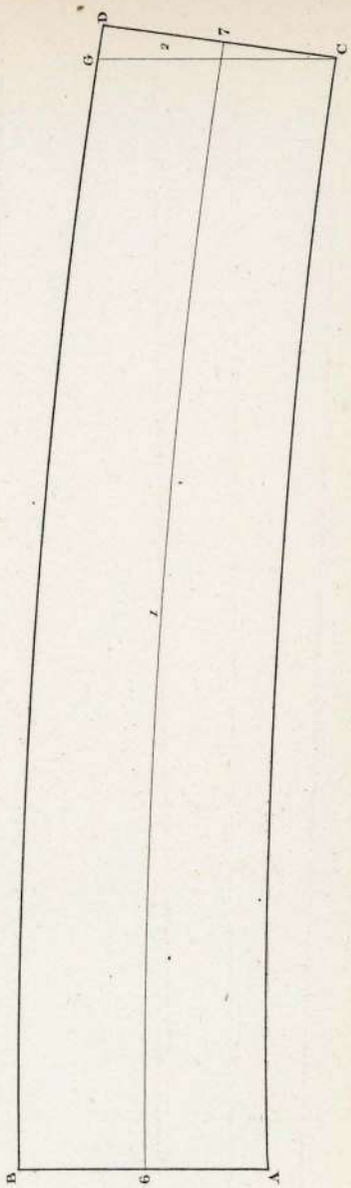


Fig. 102.

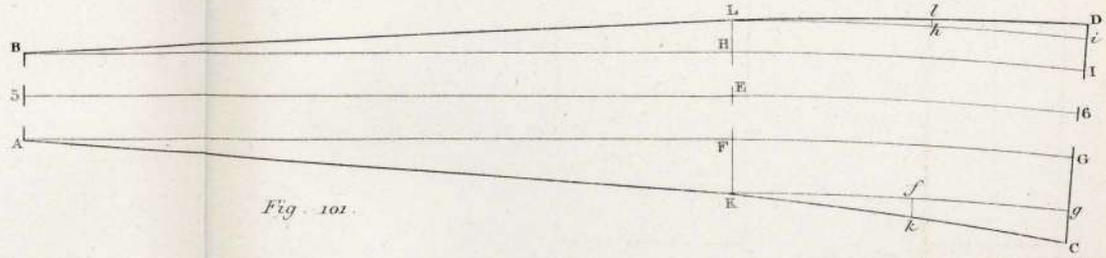


Fig. 101.

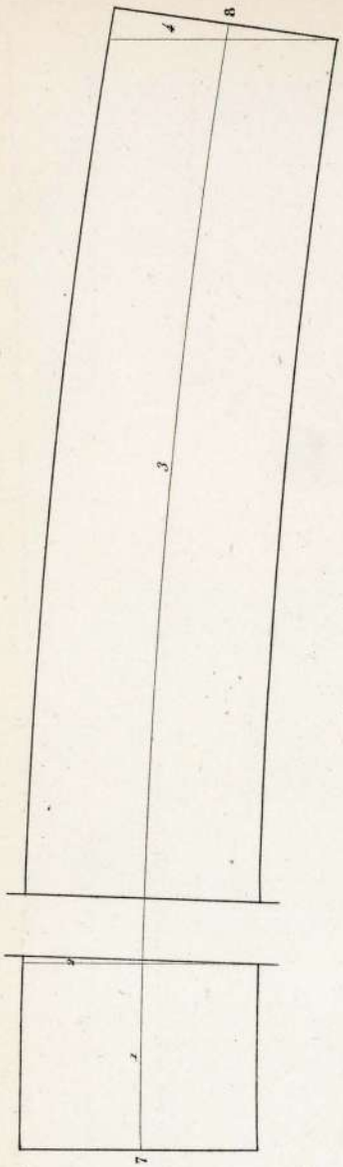


Fig. 104.

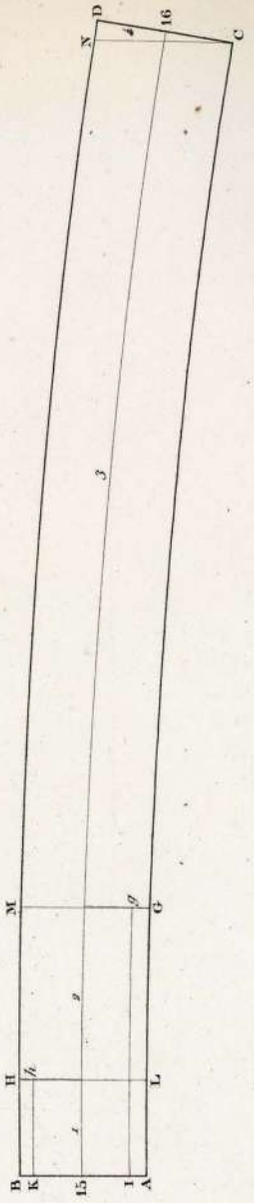


Fig. 105.

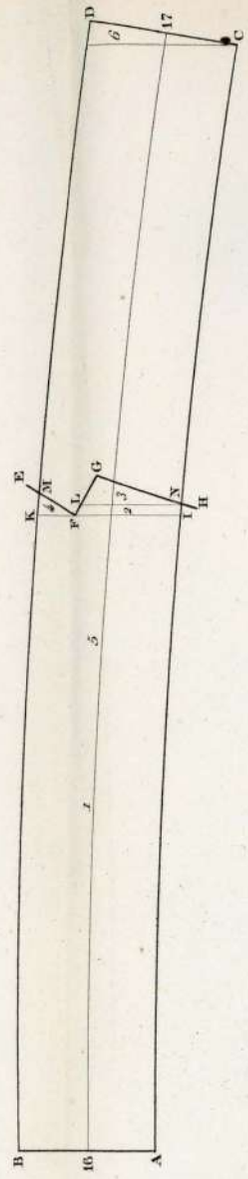


Fig. 106.

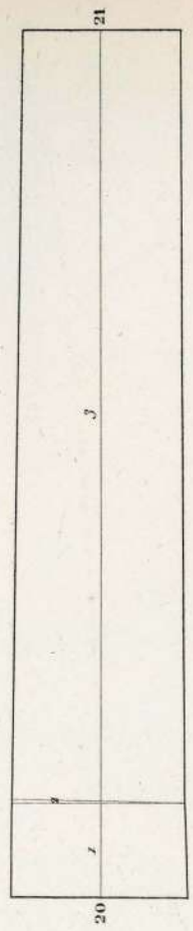


Fig. 107.

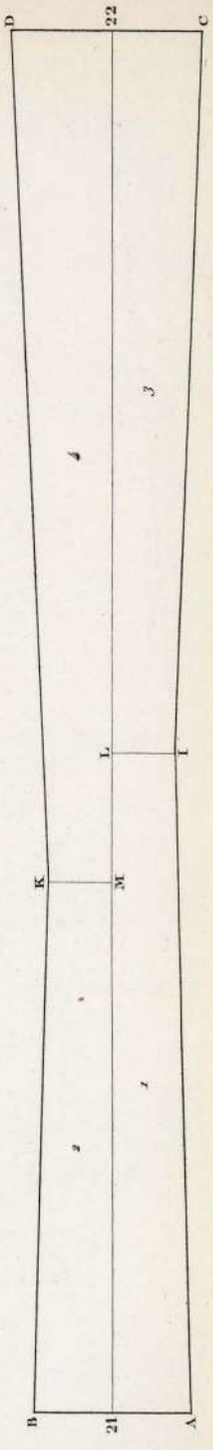


Fig. 108.

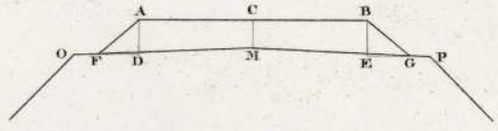


Fig. 109.

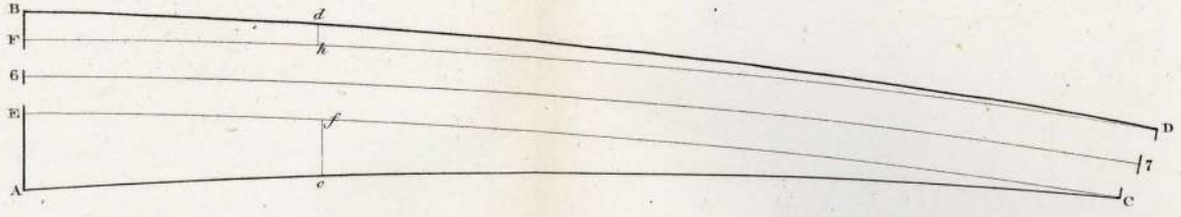


Fig. 103.

Fig. 110.

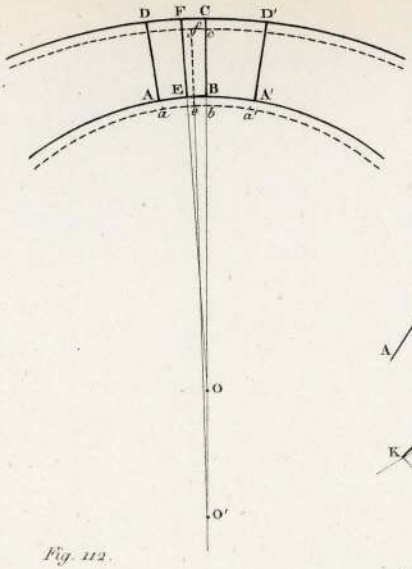
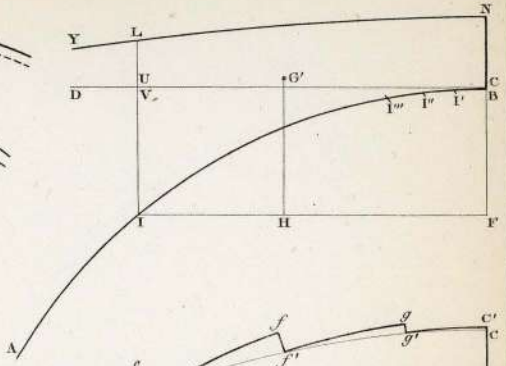


Fig. 111.



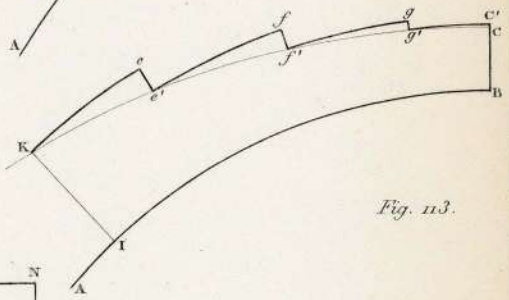
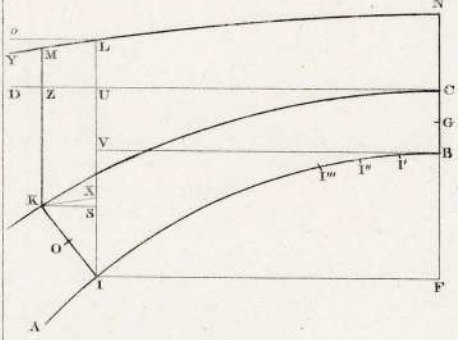


Fig. 113.

Fig. 112.



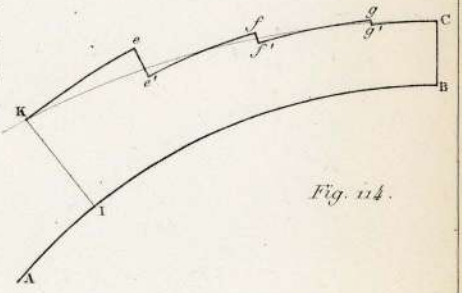


Fig. 114.

Fig. 115.

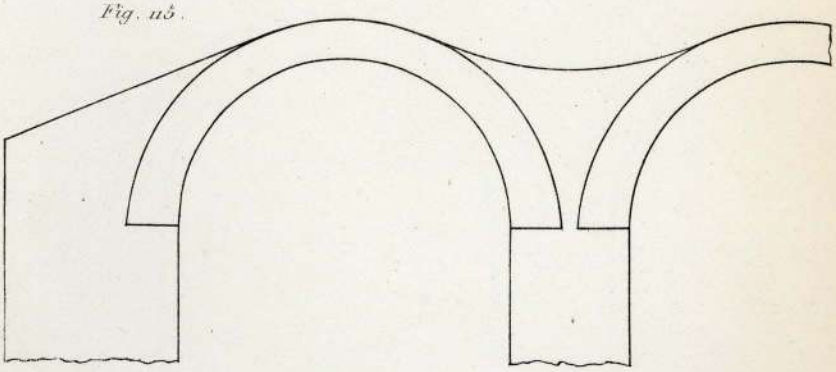


Fig. 116

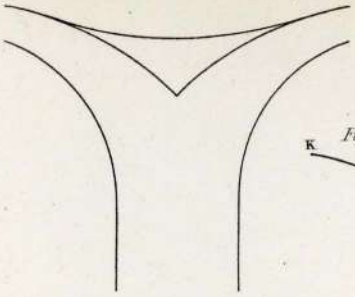


Fig. 117.

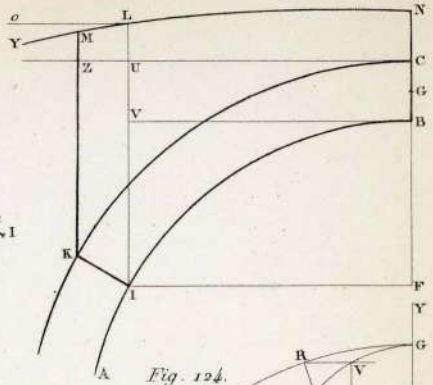


Fig. 119.

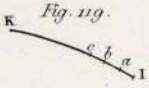


Fig. 122.

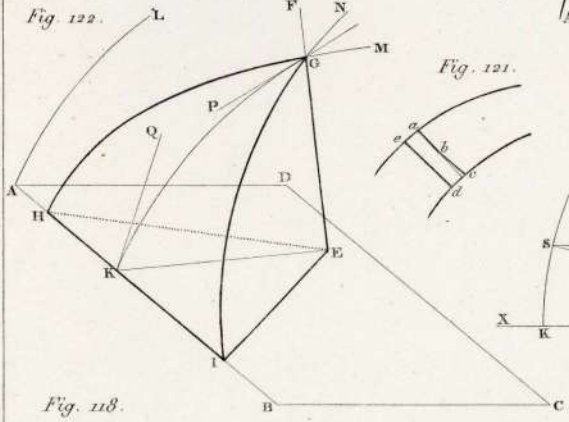


Fig. 121.

Fig. 124.

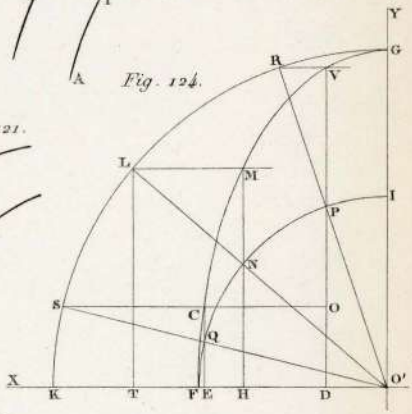


Fig. 118.

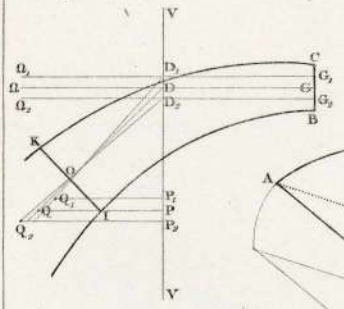


Fig. 123.

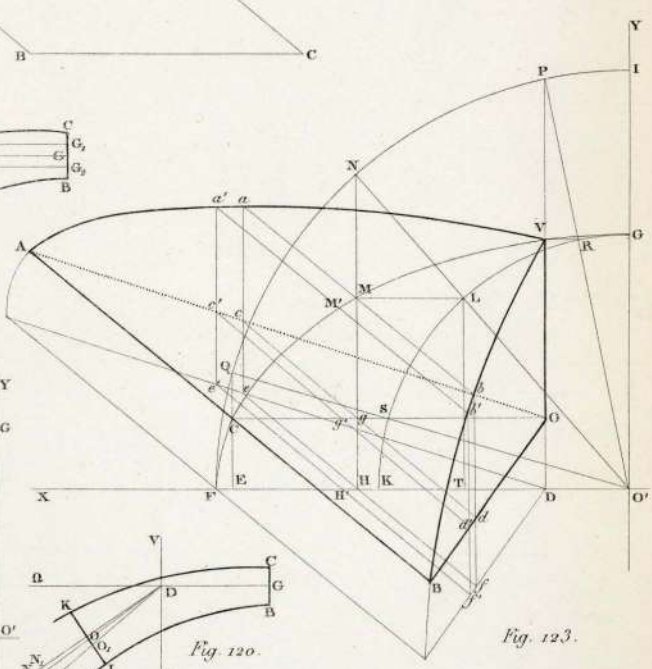


Fig. 125.

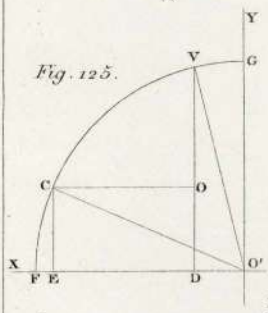
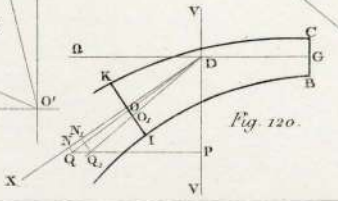



Fig. 120.