L'ARTE

DI

FABBRICARE

OSSIA

CORSO COMPLETO DI ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

PER GLI INGEGNERI, PER GLI ARCHITETTI, PEI PERITI IN COSTRUZIONE
E PEI PERITI MISURATORI

RESISTENZA

DEI

MATERIALI

E STABILITÀ DELLE COSTRUZIONI

LAVORO AD USO

degl'Ingegneri, degli Architetti, dei Periti in costruzione
e di quanti si trovano applicati alla direzione ed alla sorveglianza di costruzioni
civili, stradali ed idrauliche

UTILE

**agli studenti delle scuole d'applicazione per gl'Ingegneri
e dei corsi tecnici pei Periti in costruzione**

PER

CURIONI GIOVANNI

Ingegnere, Architetto e Dottore aggregato al Collegio della Facoltà di scienze fisiche e matematiche della R. Università di Torino, Professore straordinario di costruzioni civili, stradali ed idrauliche nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri laureati, e Professore titolare di geometria pratica e costruzioni nel R. Istituto industriale e professionale di Torino, Membro ordinario residente della Società Reale di agricoltura, industria e commercio, e Membro effettivo residente della Società degl'Ingegneri e degl'Industriali di Torino.

TORINO
Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO, Editore
via Lagrange, 16, piano 1°

1867

Torino 1867 — Stamperia di Compositori-Tipografi.
via del Teatro d'Angennes, 16.

Lo studio sulla Resistenza dei materiali si estende a quel complesso di problemi di Meccanica applicata che hanno per oggetto di trovare le dimensioni e talvolta anche le forme più convenienti assegnabili ai corpi da impiegarsi nelle costruzioni in genere, affinchè senza dannose deformazioni indefinitamente si conservino malgrado le azioni interne che nei medesimi si sviluppano per causa di forze estrinseche da cui trovansi sollecitati.

La Resistenza dei materiali applicata principalmente alla stabilità delle costruzioni civili, stradali ed idrauliche costituisce l'assunto di questo volume, nel quale si faranno conoscere: i varii modi con cui nelle dette costruzioni vengono cimentate le resistenze dei diversi corpi che in esse occorre d'impiegare; i procedimenti coi quali si possono assegnare forme e dimensioni opportune ai solidi che si adoperano per resistere all'estensione, alla compressione, alla torsione, allo scorrimento, alla flessione, al sollevamento ed al rovesciamento; lo studio sull'equilibrio e sullo stabilimento economico degli archi in legno e degli archi metallici; il modo di accertarsi della stabilità dei vôlti in muratura; le teorie sull'equilibrio dei sistemi composti e dei sistemi articolati; i problemi più importanti sulle resistenze vive; e finalmente il calcolo delle spinte delle terre e delle masse liquide contro le pareti dei ritegni che le sostengono.

Tutti gli argomenti, senza ommettere i più recenti ed i più utili ritrovati della scienza, verranno esposti nello scopo di soddisfare ai bisogni dei costruttori pratici; e, nell'intento di giovare per quanto è possibile a tutti coloro che devono applicarsi allo studio, dare progetti, far eseguire e sorvegliare l'esecuzione di costruzioni civili, stradali ed idrauliche, non si trascurerà di trattare in modo elementare tutte quelle pratiche quistioni che sono suscettive di esserlo, e molte delle quali vennero finora riputate siccome inaccessibili a quanti erano in possesso delle sole cognizioni di Matematiche elementari. In apposite tavole si registreranno quei dati numerici di cui i costruttori potranno servirsi nelle applicazioni delle formole riferentisi alla resistenza dei materiali ed alla stabilità delle costruzioni; e dalla risoluzione di scelti problemi pratici chiaramente apparirà come si possa soddisfare alle grandi esigenze dell'arte edificatoria moderna, il cui precipuo scopo sta nell'ottenere la necessaria stabilità, congiunta ad una ben intesa economia.

G. Curioni.

RESISTENZA DEI MATERIALI

E

STABILITÀ DELLE COSTRUZIONI.

CAPITOLO I.

Nozioni generali.

1. Costituzione molecolare dei corpi. — Diversi fenomeni, che si manifestano nello studio delle proprietà fisiche della materia, inducono a considerare i corpi siccome composti di molecole con dimensioni impercettibili, e ad ammettere che queste si mantengano le une dalle altre a certe distanze pure impercettibili per l'esistenza di forze di attrazione e di repulsione facentisi equilibrio, finchè i corpi sono *liberi*, ossia finchè non si verifica su essi l'intervento di forze estrinseche capaci di variare le distanze rispettive delle loro molecole.

Le repulsioni si attribuiscono generalmente a calorico interposto alle molecole, e si spiegano le attrazioni ammettendo una particolare proprietà della materia che si chiama *attrazione molecolare*, non che un'azione delle molecole dei corpi sugli atomi del calorico.

2. Azioni molecolari, azioni attrattive ed azioni repulsive. — Sottoponendo un corpo libero all'azione di forze estrinseche avviene che esso si deforma per variazioni nelle distanze rispettive delle molecole, e che si costituisce in un nuovo stato di equilibrio: cessando l'azione di dette forze, se però esse non hanno oltrepassati certi limiti dipendenti dalla natura del corpo, la deformazione sparisce per la più gran parte e tutto apparentemente rientra nello stato primitivo. Analogamente considerando un corpo non libero, ossia già sottoposto all'azione di date forze estrinseche ed applicando ad esso altre forze, che unitamente alle prime formino un complesso non eccedente certi limiti, oltre le deformazioni che il corpo stesso ha già subito per effetto delle prime forze estrinseche, altre se ne manifestano causate dalle seconde, e cessando quest'ultime forze spariscono per la più gran parte le deformazioni corrispondenti.

Il costituirsi del corpo a nuovo stato d'equilibrio sotto l'azione delle forze estrinseche e lo sparire quasi completo delle deformazioni allorquando queste forze cessano di agire, sono fatti i quali non possono derivare fuorchè dallo sviluppo di forze intrinseche attraenti le molecole che nella deformazione vennero allontanate e respingenti quelle che vennero avvicinate, ed i quali portano a stabilire quanto segue: sottoponendo un corpo all'azione di forze estrinseche esso si deforma; si sviluppano nell'interno del corpo delle *azioni molecolari* ossia delle *azioni attrattive* dove le molecole vennero allontanate, delle *azioni repulsive* dove vennero avvicinate; ed al cessare delle forze estrinseche, se pur esse non hanno superati certi limiti, le molecole spostate sono quasi totalmente ricondotte dalle dette azioni attrattive e ripulsive alle primitive loro posizioni.

In un corpo sottoposto all'azione di forze estrinseche eccedenti certi limiti, le molecole allontanate possono perdere la facoltà di riprendere le primitive loro posizioni, e questo deriva da ciò che le azioni attrattive, le quali sempre si esercitano per piccole distanze molecolari, non hanno che un'intensità relativamente insensibile o nulla appena le dette distanze crescono fino a diventare percettibili.

3. **Resistenza dei corpi**. — Allorquando una o più forze estrinseche crescenti agiscono successivamente e gradatamente sopra un corpo mantenendosi al di sotto di certi limiti dipendenti dalla natura del corpo stesso, queste forze vi producono delle deformazioni pure successive e crescenti, e queste deformazioni sono causa dello sviluppo di azioni molecolari anche crescenti. Cessando di crescere le forze estrinseche cessano pure le deformazioni, si ha equilibrio fra le forze molecolari e le forze estrinseche ed il corpo resiste; cosicchè la *resistenza* di un corpo sta nello sviluppo delle forze molecolari facenti equilibrio alle forze estrinseche che lo sollecitano.

4. **Elasticità, deformazioni elastiche e deformazioni permanenti**. — L'*elasticità* è costituita da quella tendenza che hanno le molecole dei corpi di riprendere le loro primiere posizioni rela-

tive quando vengono sottratti all'azione di forze estrinseche che, senza eccedere certi limiti e pel fatto della loro applicazione, hanno spostate le molecole stesse.

Anticamente si ammetteva che ogni corpo, sottratto all'azione di una forza minore di un certo limite, riprendeva completamente la sua forma primitiva quando questa forza cessava d'agire su di esso; e dicevasi che era alterato il limite dell'elasticità tuttavolta che, dopo la soppressione della forza, si verificava un incompleto ritorno del corpo alla sua forma primitiva. Nell'attuale stato della scienza non si può più ammettere a tutto rigore questo limite di elasticità; l'esperienza ha ormai messo fuori di dubbio che dopo l'azione di una forza che ha agito su un corpo rimane sempre in esso una piccola deformazione permanente; ed il ritorno incompleto alla forma primitiva dopo l'azione di una certa forza non prova che la materia ha perduta la sua elasticità, ma solamente che la forza ha sorpassato il limite di quelle alle quali il corpo precedentemente trovavasi sottoposto in analoghe circostanze, ciò che costituisce un corpo nuovo avente le sue molecole in uno stato d'equilibrio differente dal primo.

Si chiamano *deformazioni elastiche* quelle che si verificano nei corpi finchè trovansi sottoposti all'azione di forze estrinseche, e che finiscono per sparire allorquando vengono essi sottratti alla azione di dette forze; e si dicono invece *deformazioni permanenti* quelle che ancora rimangono al cessare delle forze estrinseche, e che corrispondono al novello stato d'equilibrio in cui sonosi costituite le molecole sotto l'azione di dette forze.

5. **Snervamento e rottura.** — Lo *snervamento* avviene nei corpi sottoposti all'azione di forze estrinseche allorquando queste, eccedendo certi limiti, hanno prodotti degli spostamenti molecolari così grandi da non essere più possibile che le molecole spostate si costituiscano in un novello stato d'equilibrio duraturo sotto l'azione delle forze stesse; per cui, continuando la loro azione sul corpo che hanno snervato, finisce per aver luogo una disaggregazione di molecole ossia la *rottura*, la quale può anche avvenire quasi immediatamente dopo l'applicazione delle forze estrinseche se pure queste sono sufficientemente grandi.

6. **Principali maniere con cui viene cimentata la resistenza dei corpi nelle costruzioni.** — Svariatissimi sono i modi con cui può essere cimentata la resistenza dei corpi, ed importa principalmente di considerare i seguenti casi:

1° La *resistenza all'estensione*, che ha luogo quando le forze sollecitanti tendono ad allungare il corpo a cui trovansi applicate, come avviene per un corpo cilindrico AB (*fig.* 1) col suo asse verticalmente disposto, mantenuto fermo nell'estremo superiore e sollecitato all'altro estremo da un peso P applicato al centro C della sua base inferiore;

2° La *resistenza alla compressione*, se le forze applicate ad un corpo agiscono per accorciarlo, come succede nel cilindro AB (*fig.* 2) collocato su un piano orizzontale e sollecitato nel centro C della sua base superiore da una forza P diretta dall'alto in basso secondo l'asse CD;

3° La *resistenza alla torsione*, se il corpo trovasi in tali condizioni per rapporto alle forze estrinseche che lo sollecitano da tendere queste a contorcerlo girandolo intorno ad una linea immobile, come chiaramente si manifesta in un corpo cilindrico AB (*fig.* 3), incastrato in un estremo e sollecitato all'altro estremo da una forza P contenuta nel piano della base AE ed agente con un certo braccio di leva CF per rapporto all'asse CD;

4° La *resistenza allo scorrimento*, quando le forze applicate al corpo tendono a produrre lo staccamento di una sua parte, che scorrendo tende a separarsi da un'altra parte che rimane immobile, il qual fatto può, per esempio, avvenire in una specie di modiglione AB (*fig.* 4) che sotto l'azione di una forza P può rompersi, perchè una sua parte CB non incontra grande difficoltà a staccarsi dalla parte AD con tendenza a scorrere lungo la superficie CD;

5° La *resistenza alla flessione*, quando le forze applicate al corpo operano per piegarlo producendo l'avvicinamento di alcune molecole e l'allontanamento di alcune altre, come succede in un corpo prismatico orizzontalmente collocato su due appoggi A e B (*fig.* 5) e caricato di un peso P nel suo mezzo.

Avvengono molti casi in cui le forze estrinseche, le quali pongono a cimento la resistenza dei corpi, sono talmente disposte da provocare contemporaneamente in essi non una sola, ma anche due o più delle indicate resistenze. Così: colla resistenza alla flessione si mette a prova anche la resistenza allo scorrimento; ben soventi i corpi che resistono alla torsione trovansi anche cimentati alla flessione; e non è raro il caso di dover simultaneamente considerare la resistenza alla flessione combinata colla resistenza all'estensione od alla compressione.

Talvolta nelle costruzioni si impiegano dei corpi in modo da essere solamente il loro peso che resiste a che essi non vengano sollevati oppure rovesciati, e quindi due altre resistenze a considerarsi: la *resistenza all'innalzamento* e la *resistenza al rovesciamento*. Un esempio in cui presentasi la resistenza all'innalzamento si ha in un condotto entro il quale si esercita una pressione che tende a sollevare la parte ABCDEFGH (*fig.* 6) che lo copre, la qual parte si oppone all'innalzamento col proprio peso e col peso di quanto gravita su essa; un muro poi, che contro una sua faccia AB (*fig.* 7) sostenga un terrapieno il quale spinge con una certa forza d'intensità P che tende a rovesciarlo, facendolo girare attorno allo spigolo CD della sua base, dà un esempio di resistenza al rovesciamento.

Le resistenze dei corpi, che generalmente vengono provocate da forze staticamente operanti sopra di essi, possono anche essere messe in giuoco da urti, ed in questo caso prendono il nome di *resistenze vive*.

7. **Influenza della durata delle forze estrinseche sullo snervamento e sulla rottura dei corpi**. — La durata dell'azione delle forze estrinseche non deve essere dimenticata nell'apprezzamento dei fenomeni sulla resistenza dei corpi, e l'esperienza ha dimostrato:

1° Che una forza estrinseca, la quale non produce snervamento di un corpo al principio della sua azione, può portare a questo effetto qualora la sua azione venga sufficientemente prolungata;

2° Che una forza estrinseca, la quale non è capace di rompere un corpo quando da poco tempo agisce su esso, può produrre la rottura dopo qualche tempo;

3° Che le azioni estrinseche intermittenti sufficientemente ripetute possono talvolta produrre gli stessi effetti di un'azione continua.

8. **Limiti delle forze estrinseche a cui si possono assoggettare i corpi nelle costruzioni**. — In seguito a quanto si è detto nei numeri 5 e 7, in modo generale si può stabilire il seguente precetto: le forze estrinseche a cui si possono assoggettare i corpi nelle costruzioni non devono mai essere maggiori di quelle che sono capaci di produrre in essi un principio di snervamento durante il tempo dell'azione delle forze stesse.

9. **Coefficiente di stabilità**. — Essendo cosa assai difficile, per non dir impossibile, il dedurre da esperienze dirette quali forze estrinseche sono capaci di produrre col tempo lo snervamento e

la rottura nei corpi; essendo invece possibile di trovare quelle forze limiti inferiori che sono capaci di produrre appena applicate, vuoi lo snervamento, vuoi la rottura, sviluppando così immediatamente nei corpi che sollecitano o la resistenza allo snervamento o la resistenza alla rottura; e d'altronde, per quanto si è detto nel precedente numero, non potendosi ritenere siccome posti in buone condizioni di stabilità quei corpi che si assoggettano anche solamente a forze estrinseche capaci di immediatamente provocare in essi la resistenza allo snervamento, si usa nella pratica di trovare approssimativamente le azioni molecolari, che è prudente consiglio di eccitare nei corpi da impiegarsi nelle costruzioni, moltiplicando le resistenze allo snervamento o quelle alla rottura, immediatamente sviluppate dall'azione di forze estrinseche, per un adatto coefficiente numerico minore dell'unità e che suolsi chiamare *coefficiente di stabilità.*

I coefficienti di stabilità, variabili colla natura dei corpi e coll'impiego che devono questi ricevere, vanno scelti in modo che i loro prodotti per le resistenze allo snervamento od alla rottura, immediatamente provocate da forze estrinseche, risultino inferiori alle azioni molecolari che si sviluppano al principio dello snervamento; nel progresso di questo lavoro si apprenderà quali valori bisognerà loro assegnare nei diversi casi della pratica; e basti per ora il far notare come per un medesimo corpo il coefficiente di stabilità relativo alla rottura deve essere minore del coefficiente di stabilità relativo allo snervamento, giacchè per produrre la rottura immediata è necessaria una forza maggiore di quella valevole a produrre lo snervamento pure immediato.

10. **Generazione geometrica dei corpi solidi di cui verrà studiata la resistenza; fibra ed elemento di fibra nei solidi prismatici e negli archi a sezione costante.** — In questo lavoro sulla resistenza dei materiali e sulla stabilità delle costruzioni, diretto a servire di guida a coloro che vogliono apprendere l'esercizio pratico della carriera dell'ingegnere costruttore, si considereranno solamente quei solidi che vengono impiegati nell'arte di costrurre e che, per rapporto alla geometrica loro generazione, si possono ridurre ai seguenti quattro tipi di corpi originati da superficie piane di forma costante le quali si muovono in un determinato modo senza rotare nei loro piani:

1° Ai solidi rettilinei generati da una figura piana AB (*fig.* 8) di forma costante e di grandezza costante o variabile secondo una certa legge, che si muove normalmente e col suo centro di superficie (*a*) C su una retta fissa DE, detta *asse;*

2° Ai solidi generati da una figura piana AB (*fig.* 9) di forma costante e di grandezza variabile secondo una certa legge, che si muove parallelamente a se stessa e percorrendo con un determinato suo punto C una retta data DE;

3° Agli archi generati da una figura piana AB (*fig.* 10) di forma costante e di grandezza costante o variabile secondo una certa legge, che si muove normalmente e col suo centro di superficie C su una curva piana data DE, detta *direttrice;*

4° Agli archi generati da una figura piana AB (*fig.* 11) di forma costante e di grandezza costante o variabile secondo una certa legge, che si muove normalmente ad una data curva piana DE percorrendola con un determinato suo punto C.

Nei solidi prismatici e negli archi con sezione costante, si chiama *fibra* l'assieme di più molecole disposte in una medesima fila parallela all'asse dei primi ed alla direttrice dei secondi, ossia l'assieme di più volumi elementari prismatici, infinitamente piccoli in tutti i sensi e coi loro spigoli paralleli al detto asse ed alla detta direttrice. Prende poi il nome di *fibra elementare*, e qualche volta anche di *elemento di fibra*, la parte di fibra compresa fra due sezioni trasversali infinitamente vicine. — Si può anche dire che un elemento di fibra e che una fibra sono rispettivamente i volumi elementari

(*a*) Chiamasi *centro di superficie* di una data figura piana quel punto che coincide col centro di gravità della figura stessa supposta materializzata e siccome costituente una lastra sottilissima di uniforme spessore, oppure supposta caricata di pesi uniformemente distribuiti su tutta la sua estensione.

Immaginando la superficie data ABC (*fig.* 45) siccome decomposta in tanti elementi superficiali, e chiamando

ω la superficie di uno qualunque di questi elementi,

x ed y le coordinate di un punto contenuto nell'interno dell'elemento stesso per rapporto a due assi coordinati octogonali Ox ed Oy condotti nel piano della figura ABC,

Ω l'intiera superficie dell'or indicata figura,

Σ una somma estesa a tutti gli elementi ω in cui intendesi decomposta la superficie Ω,

il centro di superficie della figura piana proposta è quel punto G le cui coordinate x_1 ed y_1 sono date dalle equazioni

$$x_1 = \frac{\Sigma \omega x}{\Omega},$$

$$y_1 = \frac{\Sigma \omega y}{\Omega}.$$

prodotti da un elemento del secondo ordine della superficie generatrice la quale passa, nel primo caso da una data posizione ad una posizione infinitamente vicina, e nel secondo caso fra due posizioni assegnate aventi distanza finita.

CAPITOLO II.

Resistenza all'estensione dei solidi ad asse rettilineo, essendo le forze estrinseche dirette secondo i loro assi.

11. **Fondamentali risultati d'esperienza sulla resistenza alla estensione dei solidi prismatici, omogenei ed elastici.** — È ormai constatato dall'esperienza che tirando dei solidi prismatici, omogenei, elastici e della stessa sostanza mediante forze applicate secondo i loro assi, ma non capaci di produrre in essi lo snervamento, oltre una piccola contrazione trasversale, sensibilmente si verificano i seguenti fatti:

1° Che, avendo i prismi la stessa sezion retta e la medesima lunghezza, gli allungamenti che essi subiscono sono direttamente proporzionali alle forze che li producono;

2° Che, avendo i prismi la stessa sezion retta ed essendo tirati da una medesima forza, gli allungamenti che essi subiscono sono pure direttamente proporzionali alle loro lunghezze primitive;

3° Che, avendo i prismi la stessa lunghezza ed essendo tirati da una medesima forza, gli allungamenti che essi subiscono sono inversamente proporzionali alle superficie delle loro sezioni rette.

Se le forze tendenti sono tali da essere capaci di produrre lo snervamento nei prismi a cui sono applicate cessano di essere vere le leggi or ora stabilite, e trovasi generalmente che il rapporto degli allungamenti alle dette forze va aumentando fino al momento della rottura.

12. **Azione molecolare che si sviluppa nella sezion retta di un solido prismatico, omogeneo ed elastico sotto l'azione d'una forza tendente diretta secondo il suo asse; allungamento proporzionale e coefficiente di elasticità longitudinale.** — Essendo ABCD (*fig.* 12) un solido prismatico, omogeneo ed elastico, in un modo qualunque mantenuto fermo all'estremità AD, e sollecitato

sulla base BC da una forza T′ diretta secondo il suo asse EF, la quale ha per effetto di allungarlo senza però produrre in esso lo snervamento, egli è evidente che l'azione molecolare, o risultante delle azioni attrattive che si saranno sviluppate in una sezion retta qualunque GH del prisma, deve essere equivalente a quella forza da applicarsi normalmente a detta sezion retta, onde impedire che la parte di corpo GBCH si allontani dall'altra parte AGHD qualora venga operato un taglio nel senso GH, e che per conseguenza deve essere rappresentata da una forza eguale e direttamente contraria alla forza tendente T′.

Ciò premesso, chiamando

L la lunghezza primitiva $\overline{EF}$ del prisma,

Ω la superficie della sua sezion retta,

l' l'allungamento che il prisma subisce sotto l'azione della forza tendente T′,

Q_1 la ricercata azione molecolare nella sezione qualunque GH, la quale, come si è detto, è eguale e direttamente contraria alla forza tendente T′,

E′ un numero costante dipendente dalla materia di cui il prisma è formato,

in virtù dei risultati sperimentali riferiti nel precedente numero, i quali portano a conchiudere che l'allungamento subìto da un corpo prismatico, omogeneo ed elastico, sotto l'azione di una forza diretta secondo il suo asse e non capace di produrre in esso lo snervamento, è direttamente proporzionale alla forza tendente ed alla lunghezza primitiva del prisma stirato, ed inversamente proporzionale alla superficie della sua sezion retta, si può porre l'equazione

$$l'=\frac{T'L}{E'\Omega},$$

d'onde si ricava per valore della forza tendente che corrisponde all'allungamento l', ossia ancora per valore dell'azione molecolare Q_1 sviluppata sulla sezion retta qualunque CH del prisma

$$Q_1=T'=\frac{E'\Omega l'}{L} \qquad (1).$$

Il quoziente $\frac{l'}{L}$ dell'allungamento totale subìto del prisma alla sua lunghezza primitiva, che rappresenta l'allungamento subìto dall'unità di lunghezza del prisma stesso, chiamasi *allungamento proporzionale;*

generalmente suolsi esso indicare colla lettera λ_1, e conseguentemente all'equazione (1) si sostituisce ben soventi quest'altra

$$Q_1 = T' = E' \Omega \lambda_1 \qquad (2).$$

La quantità E′, che siccome risulta dall'equazione (2) è il quoziente della forza tendente $\frac{T'}{\Omega}$ riferita all'unità di superficie della sezion retta del prisma all'allungamento proporzionale λ_1, prende il nome di *coefficiente di elasticità longitudinale relativo all'estensione* per la materia componente il prisma, e facendo nella già citata equazione (2) $\Omega = 1$ e $\lambda_1 = 1$ si deduce

$$E' = T',$$

cioè il coefficiente di elasticità longitudinale relativo all'estensione può astrattamente essere definito quella forza che sarebbe capace di produrre in un prisma non snervato di sezione eguale all'unità un allungamento proporzionale pure eguale all'unità, o ancora un allungamento totale eguale alla lunghezza primitiva del prisma, giacchè $\lambda_1 = 1$ porta di necessità ad $l' = L$.

Le quantità l' ed L della formola (1) si esprimeranno nella stessa unità, ed in quanto al valore di E′ va esso inteso siccome una forza espressa nella medesima unità di peso in cui trovasi espressa la forza tendente T′ o l'azione molecolare Q_1 e siccome riferito ad un prisma di sezion retta eguale ad 1 metro quadrato, ad 1 decimetro quadrato, ad 1 centimetro quadrato, ecc., secondo che la sezion retta Ω trovasi rispettivamente espressa in metri quadrati, decimetri quadrati, centimetri quadrati, ecc.

Le equazioni (1) e (2), fondandosi sull'ipotesi della proporzionalità delle forze tendenti agli allungamenti che esse producono, cessano di essere vere appena questa proporzionalità più non si verifica, ossia appena ha luogo lo snervamento nei corpi stirati. Segue da ciò essere cosa della massima importanza il sapere, pei principali corpi che si impiegano nelle costruzioni, qual è la *resistenza allo snervamento per trazione* ossia qual è l'azione molecolare che si sviluppa nei corpi sottoposti all'azione di forze tendenti limiti inferiori di quelle capaci di immediatamente produrre lo snervamento, e quale è l'allungamento proporzionale corrispondente.

13. Determinazione della resistenza allo snervamento per trazione, e dell'allungamento proporzionale corrispondente pei corpi prismatici, omogenei ed elastici. — Le esperienze solamente possono condurre a trovare gli accennati due elementi. Preparato perciò il corpo prismatico che si vuol esperimentare e ben misurata la superficie della sua sezion retta, non che la sua lunghezza, si sospenda verticalmente per una delle sue estremità ed all'altra si applichi un piatto di bilancia per potervi mettere dei pesi ognor crescenti per differenze eguali, ma tanto grandi che dall'applicazione dell'uno all'altro peso sia possibile il misurare degli allungamenti, piccoli sì, ma pur sensibili; per ciascun peso totale messo nel piatto si tenga conto di tutto l'allungamento subìto dal corpo, e si faccia il rapporto di quello a questo; finalmente si lasci di applicare pesi appena si trova che il detto rapporto più non si conserva sensibilmente costante. Trascurando il peso proprio del corpo, la forza tendente capace di produrre lo snervamento nel prisma (num. 11) sarà minore dell'ultimo peso stato applicato e maggiore del penultimo, e quindi si potrà dire che il penultimo peso rappresenterà approssimativamente la resistenza allo snervamento per trazione, e che il corrispondente allungamento stato osservato diviso per la lunghezza primitiva del prisma sarà l'allungamento proporzionale. Il coefficiente di elasticità longitudinale relativo all'estensione si ricaverà dalla formola (2) del precedente numero dopo d'avervi sostituite la superficie della sezion retta, la resistenza allo snervamento e l'allungamento proporzionale che ormai sono quantità note e sperimentalmente determinate.

Nell'esecuzione delle citate esperienze è necessario avere le seguenti precauzioni:

1° Volendosi misurare gli allungamenti constatando soltanto lo spostamento verticale preso dall'estremità inferiore del prisma, è necessario che il ritegno della sua estremità superiore il più che si può risulti immobile, perchè altrimenti, cedendo esso sotto l'azione del carico, gli allungamenti rimangono affetti da errore;

2° Nel dubbio che il ritegno dell'estremità superiore del prisma possa presentare qualche cedimento, converrà misurare lo spostamento relativo di due punti del prisma primitivamente separati da una distanza cognita e sostituire rispettivamente queste due lunghezze all'allungamento totale ed alla lunghezza primitiva del prisma;

3° I pesi devono essere posti dolcemente nel piatto in modo da non produrre nè urti nè vibrazioni, e mentre gli allungamenti hanno luogo bisogna sostenere il piatto stesso, giacchè altrimenti si fa subito sentire sul corpo sperimentato l'effetto del lavoro fatto dall'intiera massa pesante che discende;

4° Il prisma sperimentato non deve essere molto lungo onde potersi trascurare il suo peso, ed essendo questo considerevole in modo approssimato si terrà conto de' suoi effetti aggiungendolo ai pesi posti nel piatto;

5° La forza tendente o la risultante di tutte le forze tendenti deve precisamente passare per l'asse del prisma.

Invece di instituire la citata esperienza sull'estensione dei corpi prismatici mediante pesi da porsi in un piatto di bilancia appeso all'estremità inferiore dei corpi stessi, più regolarmente e più potentemente si può operare ricorrendo all'impiego di apposite leve od anche all'uso di macchine atte a produrre le volute tensioni mercè l'azione idrostatica di una colonna d'acqua, la qual azione si possa gradatamente accrescere fino a produrre lo snervamento.

Poche esperienze vennero finora instituite sulla determinazione dell'azione molecolare e dell'allungamento proporzionale pei corpi prismatici, omogenei ed elastici sottoposti all'azione di forze tendenti prossime a quelle capaci di immediatamente produrre il loro snervamento, ed ecco i principali risultamenti a cui si arrivò esperimentando parecchi legnami ed i metalli di uso più frequente nell'arte edificatoria.

Alcune esperienze, e principalmente quelle di Chevandier e di Wertheim, portano a conchiudere quanto segue per rapporto ai legnami convenientemente stagionati:

1° Che la resistenza allo snervamento per trazione è sensibilmente proporzionale alla densità per legnami della stessa essenza, e che questo fatto non si verifica più per legnami di essenza diversa;

2° Che un legname cresciuto in terreno secco e conveniente può presentare una resistenza allo snervamento per trazione che sia anche i 5/4 di quella corrispondente ad un legname di eguale essenza e con egual grado di stagionatura, cresciuto in un suolo acquitrinoso e malsano;

3° Che il legname ricavato al piede e verso il mezzo dei tronchi degli alberi sani, i quali trovansi ancora nello stadio di incremento, presenta generalmente maggior resistenza allo snervamento per trazione di quello che ricavasi dall'alto e dalle parti esteriori, e che il contrario ha luogo pel legname che si ritrae da alberi che già sono nello stadio di deperimento;

4° Che il coefficiente di elasticità longitudinale relativo alla estensione dei legnami diminuisce al di là di una certa età, che dipende anche dalla secchezza e dall'esposizione del terreno, che è grande pei legnami cresciuti colle esposizioni nord, nord-est e nord-ovest, e che è piccolo pei legnami cresciuti in terreni acquitrinosi e fangosi;

5° Che gli alberi tagliati nella pienezza degli umori e quelli della stessa essenza tagliati prima della presenza degli umori somministrano legnami con coefficienti di elasticità longitudinali relativi all'estensione sensibilmente eguali;

6° Che lo spessore degli strati legnosi non sembra influire sul coefficiente d'elasticità longitudinale relativo all'estensione, salvo per l'abete, per cui il detto coefficiente cresce colla sottigliezza degli strati;

7° Che nei legnami sottoposti a sforzi di trazione si verifica sempre, qualunque sia l'intensità della forza tendente, un allungamento permanente ed un allungamento elastico, e che lo snervamento per trazione ha sensibilmente luogo quando l'allungamento permanente giunge ad essere 0,00005 della lunghezza iniziale dei pezzi prismatici esperimentati;

8° Che considerando i soli legnami che possono essere adoperati nelle costruzioni, prendendo per unità di superficie il millimetro quadrato e per unità di forza il chilogramma, la resistenza allo snervamento per trazione varia fra chilogrammi 1 e 3,2, e fra chilogrammi 500 e 1800 il coefficiente di elasticità longitudinale relativo all'estensione.

Le esperienze di Bornet, Ardant, Duleau, Eaton Hodgkinson e di altri accreditati sperimentatori, non che l'autorità di alcuni celeberrimi costruttori come Stephenson, Desplaces e Collet-Meygret conducono alle seguenti conclusioni generali relativamente al ferro ed alla ghisa:

1° Che pei ferri della stessa provenienza ed egualmente trattati la resistenza allo snervamento per trazione è maggiore nelle piccole anzichè nelle barre di grosso calibro, giacchè i benefici effetti del maglio e dei cilindri laminatori non si fanno sentire che ad una certa profondità sotto la superficie dei pezzi battuti e cilindrati;

2° Che generalmente i ferri duri e non ricotti resistono allo snervamento per trazione più di quelli duri e ricotti della stessa qualità, e presentano allungamenti inferiori a quelli cui vanno soggetti questi ultimi;

3° Che in generale i ferri lavorati con carbone di legna resistono meglio di quelli della stessa qualità lavorati con carbone fossile;

4° Che il ferro caldo resiste meno allo snervamento per trazione di quello freddo, e che alla temperatura di 300, 500 e 600 gradi centigradi la resistenza resta rispettivamente ridotta ai 9/10, 7/10 ed 1/2 di quella che si verifica nello stesso ferro quando è freddo;

5° Che le correnti elettriche diminuiscono nel ferro la resistenza allo snervamento per trazione, ma che al loro cessare il ferro riprende la resistenza primitiva;

6° Che nei ferri sottoposti ad una forza tendente si verifica sempre un allungamento elastico ed un allungamento permanente;

7° Che, prendendo per unità di superficie il millimetro quadrato e per unità di forza il chilogramma, la resistenza del ferro allo snervamento per trazione varia fra 9 e 15 chilogrammi, e fra 12000 e 20000 chilogrammi il coefficiente di elasticità longitudinale relativo all'estensione;

8° Che la ghisa assai meno del ferro resiste allo snervamento per trazione, essendo da 5 a 10 chilogrammi l'azione molecolare che essa per ogni millimetro quadrato sviluppa quando è imminente a manifestarsi lo snervamento, e da 7000 a 12000 chilogrammi il coefficiente di elasticità longitudinale relativo all'estensione riferito al millimetro quadrato;

9° Che i pezzi in ghisa a grande sezione presentano minor resistenza allo snervamento per trazione di quelli fatti colla stessa qualità di ghisa e di piccola sezione, giacchè nella fabbricazione di questi pezzi, raffreddandosi il metallo esterno più celeremente di quello interno, si costituisce come un involucro più duro e più resistente del metallo che copre, il qual involucro, essendo dello spessore costante di circa 1 millimetro tanto nei pezzi grossi quanto in quelli piccoli, è causa che domini la parte che maggiormente resiste più in questi che in quelli.

Quanto si è detto sui ferri duri, sui ferri ricotti, sui ferri freddi, sui ferri caldi e sui ferri elettrizzati, si applica in tesi generali a tutti gli altri metalli; e l'ultima asserzione sulle resistenze rispettive dei piccoli e dei grandi pezzi in ghisa si estende pure a tutti i pezzi metallici che si ottengono colla fusione.

Ai riportati risultamenti generali si aggiunge ancora la seguente tavola numerica tratta per la massima parte dall'opera del generale Arturo Morin, intitolata: *Leçons de mécanique pratique* (*Résistance des matériaux*). I numeri in essa contenuti non si devono ritenere come assoluti, ma solamente come numeri medii di cui si può servire il costruttore, tuttavolta che non gli riesca possibile o non sia il caso di stabilire delle esperienze dirette sui materiali che deve impiegare, giacchè risulta dalla generalità or ora stabilita che il modo di resistere dei corpi varia d'assai colla loro provenienza, colla preparazione e colla lavoratura che hanno ricevuto e con una immensità di altre cause le quali fanno sì, che talvolta presentino delle resistenze ben differenti anche i legnami della stessa essenza ricavati in siti diversi dal medesimo albero, e persino i metalli della stessa officina egualmente trattati e lavorati in pezzi di diversa grossezza. Le resistenze allo snervamento per trazione ed i coefficienti di elasticità longitudinale relativi alla estensione trovansi espressi in chilogrammi e riferiti ad 1 millimetro quadrato di sezion trasversale dei prismi sperimentati. Talvolta è necessario nelle costruzioni di tener anche conto del peso proprio dei corpi dei quali si cimenta la resistenza, e per soddisfare a questo bisogno si è posta la colonna dei valori medii dei pesi del loro decimetro cubo espressi in chilogrammi.

INDICAZIONE DEI CORPI	Peso del decimetro cubo	Resistenza allo snervamento per trazione riferita al millim° quadr°	Allungamento proporzionale	Coefficiente di elasticità longitudinale relativo all'estensione riferito al millim° quadr°
Legnami tirati nel senso delle fibre	Cg	Cg		Cg
Abete bianco	0,500	1,730	0,00192	902
Abete giallo	0,670	2,170	0,00121	1793
Acacia	0,717	3,188	0,00253	1260
Acero	0,645	1,068	0,00105	1017
Betulla	0,700	1,617	0,00162	998
Carpino	0,756	1,282	0,00118	1086
Faggio	0,830	2,317	0,00236	982
Frassino	0,750	1,270	0,00113	1124
Larice rosso	0,700	3,150	0,00210	1500
Olmo	0,730	2,350	0,00242	971
Ontano	0,600	1,121	0,00101	1110
Pino silvestre	0,580	1,633	0,00289	565
Pioppo	0,400	1,007	0,00195	516
Quercia	0,850	2,400	0,00170	1412
Metalli				
Acciaio di Germania di buona qualità, ricotto all'olio	7,820	25,000	0,00120	20833
Acciaio fuso assai fino, ricotto all'olio e temperato	»	66,000	0,00220	30000
Acciaio ordinario ricotto .	»			18045
Bronzo da cannone fuso .	8,040	2,000	0,00063	3175
Ferro in barre sottili . . .	7,770	15,000	0,00076	19737

INDICAZIONE DEI CORPI	PESO del decimetro cubo	RESISTENZA allo snervamento per trazione riferita al millim° quadr°	ALLUNGAMENTO proporzionale	COEFFICIENTE di elasticità longitudinale relativo all'estensione riferito al millim° quadr°
METALLI				
Ferro in barre di media grossezza	Cg 7,770	Cg 12,205	0,00066	Cg 18492
Ferro in grosse barre . .	»			14000
Ferro dolce di piccole dimensioni, e passato alla filiera	»	14,750	0,00080	18437
Ferro in lamiera tirato nel senso della laminatura.	»			13000
Ferro in lamiera tirato in senso perpendicolare alla laminatura	»			12000
Ghisa a grana fina	7,202	10,000	0,00083	12000
Ghisa grigia inglese ordinaria	»	6,000	0,00078	7692
Ottone fuso	8,540	4,800	0,00076	6316
Ottone in fili ricotti . . .	»	15,000	0,00135	11111
Piombo fuso ordinario . .	11,350	1,000	0,00210	476
Piombo di coppella in fili stesi a freddo di 4 millimetri di diametro. . .	»	0,400	0,00067	597
Piombo impuro di commercio in fili stesi a freddo di 6 millimetri di diametro.	»	0,400	0,00050	800
Rame in fili	8,500			13100
Stagno.	7,290			3200
Zinco	7,190			9600

14. Condizione ed equazione di stabilità, dedotte dalla resistenza allo snervamento, per un solido prismatico, omogeneo ed elastico sottoposto all'azione di una forza tendente diretta secondo il suo asse. — Essendo lo snervamento il primo indirizzo alla rottura (num. 5), bisogna fare in modo che in un prisma da rendersi stabile sotto l'azione di una forza tendente per nessuna circostanza venga cimentata la resistenza allo snervamento per trazione. Chiamando perciò:

T' la forza tendente il prisma dato e diretta secondo il suo asse;

Q' la resistenza allo snervamento per trazione riferita all'unità di superficie della sezion retta del prisma stesso dato;

Ω la superficie della intiera sua sezion retta;

siccome la resistenza allo snervamento pel prisma di sezion retta Ω è espressa da

$$Q'\Omega,$$

si avrà per condizione di stabilità

$$T' < Q'\Omega.$$

Ora si può soddisfare a quest'ineguaglianza facendo in modo che T' sia una certa frazione di $Q'\Omega$, e quindi, chiamando m' un numero minore dell'unità che si assume per coefficiente di stabilità, si può porre l'equazione di stabilità

$$T' = m'Q'\Omega \qquad (1),$$

la quale, indicando rispettivamente con E' e con λ' il coefficiente di elasticità longitudinale relativo all'estensione e l'allungamento proporzionale corrispondenti alla forza tendente capace di provocare la resistenza allo snervamento e per essere $Q' = E'\lambda'$, può essere scritta in quest'altro modo

$$T' = m'E'\Omega\lambda' \qquad (2).$$

L'esperienza, l'abitudine, il sentimento dei costruttori, numerose e svariatissime applicazioni pratiche hanno ormai provato essere convenevole nelle costruzioni permanenti di provocare nei corpi solamente una parte della loro resistenza allo snervamento per trazione, per cui suolsi generalmente assumere m' variabile fra $1/2$ ed $1/7$ pei legnami, essendo quest'ultimo valore conveniente per quelli di essenza dolce e per quelli facili a guastarsi, ed $m' = 1/2$ per la maggior parte dei metalli. In alcuni casi particolari però, come quando trattasi di pezzi pei quali la leggerezza è una condizione di rigore, e qualora non abbiansi a temere degli sforzi accidentali assai superiori agli sforzi medii calcolati, si può portare il detto coefficiente fino alla frazione $3/4$.

15. **Dato fondamentale d'esperienza sulla resistenza alla rottura per trazione dei solidi prismatici ed omogenei.** — Prendendo diversi corpi prismatici, omogenei, formati della stessa sostanza, di egual altezza e con differenti superficie delle loro sezioni rette, e tirandoli mediante forze dirette secondo i loro assi, si trova che le forze capaci di immediatamente romperli risultano sensibilmente proporzionali alla superficie delle loro sezioni rette, e conseguentemente si può stabilire siccome dato fondamentale: che nei corpi prismatici le resistenze alla rottura per

trazione, le quali resistenze (per un ragionamento analogo a quello del numero 12) sono eguali alle forze estrinseche le quali stanno per immediatamente romperli, sono proporzionali alla superficie delle loro sezioni rette.

16. **Resistenza dei solidi prismatici ed omogenei alla rottura per trazione.** — In virtù di quanto si è detto nel precedente numero sulla proporzionalità delle resistenze alla rottura per trazione colle superficie delle sezioni rette dei prismi nei quali la rottura sta per manifestarsi, se chiamansi

Ω la superficie della sezion retta di uno di questi prismi,

R_1 la resistenza che il prisma oppone ad essere rotto per trazione, la qual resistenza va considerata come una forza eguale e direttamente contraria alla forza tendente T' sotto l'azione della quale la rottura sta per manifestarsi,

R' un coefficiente costante dipendente dalla materia di cui il prisma è formato,

si ha la seguente equazione:

$$R_1 = T' = R'\Omega.$$

Il numero R', che da taluni viene chiamato *coefficiente di rottura per trazione*, come lo indica l'ultima equazione, non è altro che il quoziente $\frac{R_1}{\Omega}$ ossia la resistenza alla rottura per tensione riferita all'unità di superficie. Facendo nell'indicata equazione $\Omega = 1$ si deduce

$$R_1 = T' = R',$$

ossia che R' si può definire quella forza tendente, la quale è capace di produrre la rottura per trazione, o anche di cimentare la resistenza alla rottura per trazione in un prisma di sezione eguale all'unità e formato dalla stessa materia di quello per cui si cerca la resistenza alla rottura.

Le quantità R_1, T' ed R' si devono esprimere colla stessa unità di forze, ed il valore di R' va inteso siccome riferito a quell'unità di superficie che si è scelta per esprimere la sezione retta Ω del prisma.

17. **Determinazione della resistenza alla rottura per trazione nei corpi prismatici ed omogenei.** — Questa determinazione si fa sperimentalmente, e le esperienze vanno instituite colle norme generali che vennero indicate al numero 13, aumentando però le forze tendenti finchè si giunga a trovare quella che immediata-

mente produce la rottura. Quando si prevede che il corpo posto ad esperienza è imminente a rompersi, si accrescono le forze tendenti per piccole differenze onde far sì che la rottura avvenga sotto l'azione di una forza eguale o pochissimo diversa della minore delle forze capaci di produrre questo fatto, ed il quoziente della forza così trovata per la superficie misurata della sezione retta del prisma sperimentato rappresenterà il corrispondente coefficiente di rottura per trazione, ossia la resistenza alla rottura per trazione riferita all'unità di superficie. Molte sono le esperienze che vennero instituite sulla resistenza dei corpi prismatici ed omogenei alla rottura per trazione, ed ecco i più importanti risultamenti generali a cui hanno esse condotto.

In seguito ad esperienze di Chevandier e di Wertheim si può ritenere quanto segue relativamente alla resistenza alla rottura per trazione nei legnami:

1° Che, fra legnami della stessa essenza, presentano generalmente maggior resistenza quelli che hanno maggior densità, che sono cresciuti in terreni asciutti e convenienti:

2° Che i legnami, i quali ricavansi al piede e verso il mezzo dei tronchi degli alberi sani che sono ancora nello stadio d'incremento, resistono alla rottura per trazione più di quelli che si ritraggono dall'alto e dalle parti esteriori, e che il contrario ha luogo pei legnami derivanti da alberi che hanno già raggiunto lo stadio del deperimento;

3° Che i legnami rapidamente fatti essiccare e principalmente quelli fatti stagionare alla stufa, tuttochè resistenti, si rompono senza manifestare allungamento sensibile e quindi senza dare apparente indizio di prossima rovina;

4° Che il coefficiente di rottura per trazione riferito al millimetro quadrato varia, pei legnami che possono ricevere qualche applicazione nell'arte di costrurre e che vengono tirati nel senso delle fibre, da chilogrammi 1,80 e 9;

5° Che i legnami presentano la maggiore resistenza alla rottura per trazione quando vengono tirati nel senso delle loro fibre, e che molto minor resistenza presentano quando si tirano nel senso normale e nel senso tangenziale agli strati legnosi.

Per quanto spetta alla resistenza del ferro e della ghisa alla rottura per trazione, si possono ritenere i seguenti dati generali derivanti dalle esperienze di Eaton Hodgkinson, di Fairbairn, di Fabert, di Clark, di Minard e di Desormes:

1° Che questa resistenza è assai variabile colla natura dei ferri e della ghisa e col loro modo di fabbricazione;

2° Che vi sono dei fili in ferro di eccellente qualità, i quali non si rompono che sotto il forte carico di 90 chilogrammi per millimetro quadrato, e che invece possono bastare 25 chilogrammi per millimetro quadrato a produrre la rottura in grosse barre di ferro mediocre;

3° Che il coefficiente di resistenza alla rottura per trazione può essere mediamente fissato di 70 chilogrammi per millimetro quadrato nei fili di ferro, essendo 50 e 90 chilogrammi i limiti estremi;

4° Che lo stesso coefficiente si può ritenere di 40 chilogrammi per millimetro quadrato nei ferri comuni in barre, essendo 25 e 60 chilogrammi i limiti estremi;

5° Che i ferri laminati, in seguito alle esperienze di Fabert, presentano maggior resistenza alla rottura per trazione nel senso parallelo anzichè nel senso normale alla laminatura, che la differenza però non è molto grande, e che in ogni senso la resistenza alla rottura per trazione nelle lamiere può mediamente essere fissata di 36 chilogrammi per millimetro quadrato, prendendo 30 e 40 chilogrammi pei limiti estremi;

6° Che nei ferri diminuisce la resistenza alla rottura per trazione elevando la loro temperatura;

7° Che la prolungata ricottura diminuisce la resistenza delle ghise;

8° Che la ghisa bianca meglio della ghisa bigia resiste alla rottura per trazione;

9° Che la resistenza della ghisa alla rottura per trazione, essendo i pezzi tirati nel senso del loro asse, ammette un valor medio di 11 chilogrammi per millimetro quadrato, e che nei pezzi a grande sezione trasversale può riescire notevolmente minore e persino stare al disotto di 4 chilogrammi;

10° Che i pezzi di ghisa sono capaci di maggior resistenza alla rottura quando vengono tirati nel senso del loro asse, anzichè quando vengono tirati tangenzialmente alla loro superficie;

11° Che, dovendosi impiegare dei pezzi metallici per resistere all'estensione, convien sempre di più farli in ferro anzichè in ghisa.

Cimentando la resistenza alla rottura per trazione nelle funi di canape, nelle catene di ferro e nelle coreggie di cuoio, si ottennero questi risultati:

1° Che la resistenza alla rottura per trazione può variare nelle funi nuove di canape da 5 a 9 chilogrammi per millimetro quadrato della loro sezione trasversale;

2° Che per le funi di canape già da qualche tempo usate, ma non guaste, la detta resistenza si può ancora valutare da 4 a 6 chilogrammi;

3° Che le funi di canape bagnate perdono quasi i 2/3 della loro resistenza;

4° Che le funi incatramate non conservano che i 2/3 o i 3/4 della resistenza delle funi bianche;

5° Che le catene in ferro a maglie oblunghe mediamente presentano una resistenza alla rottura per trazione di 24 chilogrammi per millimetro quadrato di sezione normale di maglia;

6° Che le catene di ferro con maglie rinforzate da puntelli in ghisa sensibilmente presentano la stessa resistenza di una spranga in ferro della stessa qualità di quello di cui sono formate le maglie, ed avente la sua sezione trasversale equivalente alla sezione trasversale di una maglia supponendo che in essa non esista il puntello;

7° Che le coreggie di cuoio nero possono sviluppare una resistenza di chilogrammi 0,2 per millimetro quadrato della loro sezione trasversale senza che sia cimentata la loro resistenza alla rottura per trazione.

Nelle pietre e nelle opere murali ben raramente vien cimentata la resistenza per trazione, per cui pochi ed incerti dati si hanno su questo modo di resistere delle pietre e delle malte. Stando però a limiti molto estesi, e distinguendo le pietre che possono tornar utili nelle costruzioni in tenere, mezzane e dure, secondo che il peso del loro decimetro cubo è di chilogrammi 1,40 a 2,20, di chilogrammi 2,20 a 2,60 e più di chilogrammi 2,60, relativamente alla loro resistenza alla rottura per trazione riferita al millimetro quadrato della loro sezione normale alla direzione della forza traente si può dire:

1° Che varia fra chilogrammi 0,06 e 0,13 nelle pietre calcari tenere, fra chilogrammi 0,13 e 0,30 nelle pietre calcari mezzane e fra chilogrammi 0,30 e 0,65 nelle pietre calcari dure;

2° Che oscilla fra chilogrammi 0,04 e 0,10 nelle pietre silicee tenere, fra chilogrammi 0,10 e 0,42 nelle pietre silicee mezzane e fra chilogrammi 0,42 e 0,80 nelle pietre silicee dure;

3° Che sta fra chilogrammi 0,04 e 0,15 per le pietre vulcaniche tenere, fra chilogrammi 0,15 e 0,40 per le pietre vulcaniche mezzane e fra chilogrammi 0,40 e 0,90 per le pietre vulcaniche dure:

4° Che pei mattoni è variabile fra chilogrammi 0,08 e 0,25.

Per rapporto alle malte, le esperienze finora eseguite hanno portato a conchiudere:

1° Che la coesione delle malte con calcina è minore della loro aderenza alle pietre naturali ed alle pietre artefatte o laterizii, per modo che la rottura per trazione nei massi murali in cui le pietre trovansi collegate da malta di calcina avviene più facilmente nell'interno di uno strato di malta anzichè alla superficie di separazione fra uno strato di malta ed uno strato di pietre;

2° Che per le malte di calcina poste in condizioni favorevoli la coesione cresce col tempo;

3° Che per le malte di calcina grassa impiegate in masse murali di ordinario spessore, si ritiene comunemente aver luogo quella coesione che si può considerare come finale dopo 8 o 12 anni d'impiego, ma che nell'interno dei massi di grande spessore non si verifica la coesione finale se non 200 o 300 anni dopo la loro esecuzione;

4° Che per le malte con calcina idraulica e sabbia la coesione finale ha luogo dopo 4 anni;

5° Che nelle malte con calcina e pozzolana si trova la coesione che si può considerare come finale dopo 3 anni;

6° Che le malte con cemento puro si trovano al grado di coesione finale dopo 12 o tutto al più dopo 18 mesi;

7° Che per le malte di gesso l'aderenza colle pietre è minore della loro coesione, cosicchè la rottura per trazione nei massi murali in cui le pietre trovansi collegate con malta di gesso succede di preferenza alle superficie di separazione fra pietre e malte anzichè nell'interno di uno strato di malta;

8° Che la coesione e l'aderenza delle malte di gesso colle pietre sono resistenze le quali vengono meno col tempo principalmente in siti umidi, all'esposizione delle vicende atmosferiche e nei luoghi non riparati dalle esalazioni animali;

9° Che le malte di gesso impiegate per opere murali in condizioni favorevoli raggiungono il massimo grado di coesione e di aderenza colle pietre dopo 1 mese;

10° Che nelle malte di gesso l'aderenza colle pietre si può risguardare siccome i 2/3 della loro coesione;

11° Che le malte di calcina grassa e sabbia, impiegate da 6 mesi a 10 anni in massi murali per costruzioni aeree, possono presentare una resistenza di coesione variabile fra chilogrammi 0,005 a 0,035 per millimetro quadrato;

12° Che per le malte di calcina idraulica e sabbia, poste in opera per strutture murali da 6 mesi a 4 anni, la resistenza di coesione può oscillare fra chilogrammi 0,02 e 0,05 per millimetro quadrato quando la calcina è mediamente idraulica, fra chilogrammi 0,03 e 0,09 quando la calcina è idraulica e fra chilogrammi 0,05 e 0,15 quando la calcina è eminentemente idraulica;

13° Che le malte di calcina grassa e pozzolana, impiegate per massi murali, in un lasso di tempo compreso fra 2 mesi e 3 anni, acquistano una resistenza di coesione variabile fra chilogrammi 0,03 e 0,15 per ogni millimetro quadrato;

14° Che le malte di buon cemento puro raggiungono nello spazio di 1 a 18 mesi una coesione compresa fra chilogrammi 0,04 e 0,21 per millimetro quadrato;

15° Che le malte di gesso, secondo che sono di gesso puro o di gesso mescolato con sabbia, diventano suscettive di prendere, dopo 1 mese d'impiego in massi murali, una resistenza di coesione variabile fra chilogrammi 0,10 e 0,16 nel primo caso, e fra chilogrammi 0,02 e 0,06 nel secondo caso.

Ecco un quadro numerico tratto per la massima parte dalla già citata opera del generale Arturo Morin, nel quale per diversi materiali sono registrate le resistenze alla rottura per trazione riferite ad 1 millimetro quadrato di sezione retta dei corpi prismatici esperimentati, non che i pesi medii del loro decimetro cubo. Per rapporto al grado di fiducia da porsi nei numeri di questo quadro valga quanto si è detto al numero 13 nel riportare la tavola numerica della resistenza allo snervamento per trazione, dell'allungamento proporzionale e del coefficiente di elasticità longitudinale.

INDICAZIONE DEI CORPI	Peso del decimetro cubo	Resistenza alla rottura per trazione riferita al millim° quadr°
Legnami	Cg	Cg
Abete nel senso delle fibre	0,500	4,100
Abete nel senso perpendicolare agli strati legnosi . .	»	0,220
Abete nel senso tangenziale agli strati legnosi . . .	»	0,297
Acacia nel senso delle fibre	0,717	7,930
Acacia nel senso tangenziale agli strati legnosi . . .	»	1,231
Acero nel senso delle fibre	0,645	3,580
Acero nel senso perpendicolare agli strati legnosi. .	»	0,716
Acero nel senso tangenziale agli strati legnosi . . .	»	0,371
Betulla nel senso delle fibre	0,700	4,300
Betulla nel senso perpendicolare agli strati legnosi .	»	0,823
Betulla nel senso tangenziale agli strati legnosi . .	»	1,063
Carpino nel senso delle fibre	0,756	2,990
Carpino nel senso perpendicolare agli strati legnosi. .	»	1,007
Carpino nel senso tangenziale agli strati legnosi . .	»	0,608
Faggio nel senso delle fibre	0,830	3,570
Faggio nel senso perpendicolare agli strati legnosi .	»	0,885
Faggio nel senso tangenziale agli strati legnosi . . .	»	0,752
Frassino nel senso delle fibre.	0,750	6,780
Frassino nel senso perpendicolare agli strati legnosi .	»	0,218
Frassino nel senso tangenziale agli strati legnosi . .	»	0,408
Larice rosso nel senso delle fibre	0,700	8,500
Olmo nel senso delle fibre	0,730	6,990
Olmo nel senso perpendicolare agli strati legnosi . .	»	0,345
Olmo nel senso tangenziale agli strati legnosi . . .	»	0,366
Ontano nel senso delle fibre	0,600	4,540
Ontano nel senso perpendicolare agli strati legnosi .	»	0,329
Ontano nel senso tangenziale agli strati legnosi . .	»	0,175
Pino silvestre nel senso delle fibre	0,580	2,480
Pino silvestre nel senso perpendicolare agli strati legnosi.	»	0,256
Pino silvestre nel senso tangenziale agli strati legnosi.	»	0,196
Pioppo nel senso delle fibre	0,400	1,970
Pioppo nel senso perpendicolare agli strati legnosi .	»	0,146
Pioppo nel senso tangenziale agli strati legnosi. . .	»	0,214
Quercia nel senso delle fibre	0,850	7,000
Quercia nel senso perpendicolare agli strati legnosi .	»	0,582
Quercia nel senso tangenziale agli strati legnosi . .	»	0,406
Metalli		
Acciaio fuso o di cementazione tirato al martello in piccoli pezzi	7,820	100,000
Acciaio il più cattivo in grossi pezzi e mal temprato.	»	36,000
Acciaio ordinario	»	75,000
Bronzo da cannone	8,040	23,000
Ferro il più forte lavorato in piccoli pezzi	7,770	60,000
Ferro il più debole lavorato in grandi pezzi. . . .	»	25,000
Ferro di qualità comune lavorato in barre di media grossezza	»	40,000
Ferro laminato tirato nel senso della laminatura . .	»	40,000
Ferro laminato tirato in senso perpendicolare alla laminatura	»	36,000

INDICAZIONE DEI CORPI	Peso del decimetro cubo	Resistenza alla rottura per trazione riferita al millim° quadr°
Metalli		
	Cg	Cg
Ferro assai dolce, detto di *ruban*	7,770	45,000
Ferro non ricotto tirato in fili del diametro da 1 a 3 millimetri	»	60,000
Ferro non ricotto, del più forte e tirato in fili del diametro di millimetri 0,23	»	90,000
Ferro non ricotto, del più forte e tirato in fili del diametro di millimetri 0,5 a 1	»	80,000
Ferro non ricotto, debole e tirato in fili di gran diametro	»	50,000
Ferro in fili impiegati nella formazione di gomene .	»	30,000
Ferro dolce in catene a maglie oblunghe. . . .	»	24,000
Ferro dolce in catene a maglie oblunghe rinforzate da puntelli	»	32,000
Ghisa grigia la più forte colata verticalmente . . .	7,202	13,500
Ghisa grigia la più debole colata orizzontalmente . .	»	12,500
Ottone fuso.	8,540	12,600
Ottone del più forte in fili non ricotti con diametro minore di 1 millimetro	»	85,000
Ottone di qualità media in fili non ricotti del diametro minore di 1 millimetro	»	50,000
Piombo fuso	11,350	1,280
Piombo laminato	»	1,350
Piombo di coppella tirato in fili del diametro di 4 millimetri	»	1,360
Rame fuso	7,783	13,400
Rame battuto	8,500	25,000
Rame laminato nel senso della lunghezza.	»	21,000
Rame di qualità superiore laminato nel senso della lunghezza	»	26,000
Rame del più forte in fili non ricotti con diametro minore di 1 millimetro.	»	70,000
Rame di qualità media in fili non ricotti col diametro di 1 a 2 millimetri	»	50,000
Rame di infima qualità in fili non ricotti	»	40,000
Stagno fuso.	7,290	3,000
Zinco fuso	7,190	6,000
Zinco laminato	»	5,000
Funi		
Funi di canape di Strasburgo di 13 a 14 millimetri di diametro		8,800
Funi di canape di Lorena pure di 13 a 14 millimetri di diametro		6,500
Funi di canape di Strasburgo o di Lorena del diametro di 23 millimetri		6,000
Funi di canape di Strasburgo del diametro di 40 a 54 millimetri		5,500
Funi incatramate.		4,400
Funi già usate di 23 millimetri di diametro		» 4,200

INDICAZIONE DEI CORPI	PESO del decimetro cubo	RESISTENZA alla rottura per trazione riferita al mil'im° quadr°
PIETRE E MALTE		
	Cg	Cg
Basalto d'Alvernia	2,95	0,770
Calcare di Portland		0,600
Calcare bianco a grana fina ed omogenea		0,144
Calcare litografico a tessuto compatto		0,308
Calcare a tessuto arenaceo		0,229
Calcare a tessuto oolitico		0,137
Gesso impastato solidamente	1,57	0,120
Gesso impastato col metodo ordinario con un po' di sabbia	•	0,040
Malta di calce grassa e di sabbia, 14 anni dopo il suo impiego.	1,60	0,035
Malta di cattiva qualità di calce grassa e di sabbia : .	•	0,008
Malta di calce idraulica ordinaria e sabbia, 18 mesi dopo il suo impiego	•	0,080
Malta con calce eminentemente idraulica, 1 anno dopo il suo impiego.	•	0,140
Malta di parti eguali di cemento di Pouilly e sabbia, 1 anno dopo il suo impiego	•	0,096
Malta in parti eguali di cemento di Vassy e di sabbia, dopo 6 mesi d'indurimento all'aria.	•	0,096
Malta in parti eguali di cemento di Vassy e sabbia, dopo 1 anno d'indurimento nell'acqua	•	0,151
Malta di puro cemento di Vassy dopo 1 anno d'indurimento in luogo umido.	•	0,207
Malta in parti eguali di cemento di Vassy, e sabbia, dopo 1 mese d'indurimento nell'acqua di mare . .	•	0,113
Malta di puro cemento di Vassy, dopo 1 mese d'indurimento nell'acqua di mare.	•	0,085
Mattoni di Provenza, ben cotti	2,17	0,195
Mattoni ordinarii, deboli	2,08	0,080

Per approssimativamente trovare i pesi delle funi possono valere i dati della seguente tavola :

INDICAZIONE DELLE FUNI	N° dei fili	DIAMETRO delle funi	PESO delle funi per metro di lunghezza
		mm.	Cg
Funi bianche nuove	30	0,0200	0,2834
Funi bianche nuove	15	0,0144	0,1448
Funi bianche nuove	6	0,0088	0,0522
Funi incatramate	30	0,0236	0,3326
Funi incatramate	15	0,0168	0,1632
Funi incatramate	6	0,0096	0,0693

Occorre talvolta di dover valutare i pesi di massi murali, e per far questo è necessario conoscere i pesi medii del decimetro cubo delle principali murature, i quali pesi si possono assumere nella pratica quali risultano dalla tavola che segue:

INDICAZIONE DELLE MURATURE	Peso del decimetro cubo		
Muratura di pietrame calcare e siliceo	Cg 1,7	a	Cg 2,3
Muratura di pietrame granitico		Cg 2,3	
Muratura di pietrame basaltico		2,5	
Muratura di mattoni	2,0	a	2,2
Muratura di calcestruzzo		2,2	

18. Condizione ed equazione di stabilità, dedotte dalla resistenza alla rottura, per un solido prismatico ed omogeneo sottoposto all'azione di una forza tendente diretta secondo il suo asse. — Affinchè un corpo prismatico sia stabile sotto l'azione di una forza estrinseca diretta secondo il suo asse e che tende ad allungarlo, si richiede che in qualsiasi sezion retta del prisma non vengasi mai, neppure nelle condizioni più sfavorevoli in cui può trovarsi il corpo, a cimentare la resistenza alla rottura per trazione. Perciò, se chiamansi

T' la forza tendente il prisma dato e diretta secondo il suo asse,

R' la resistenza alla rottura per trazione riferita all'unità di superficie della sezion retta del prisma stesso, ossia il coefficiente di rottura per trazione,

Ω la superficie dell'intiera sezion retta del corpo prismatico che si considera,

essendo

$$R' \Omega$$

la resistenza alla rottura per trazione che può presentare il corpo proposto, si avrà che la condizione di stabilità è

$$T' < R' \Omega.$$

In quanto poi all'equazione di stabilità, essa sarà evidentemente

$$T' = n' R' \Omega,$$

dove n' è un numero minore dell'unità che si prende per coefficiente di stabilità, e che per generale consenso dei pratici suolsi assumere eguale: ad 1/10 pei legnami, per le pietre e pei cementi; ad 1/6 per i metalli; e ad 1/2 per le funi.

19. **Uso delle equazioni di stabilità relative all'estensione.** — L'equazione di stabilità data al numero 14 ed indicata (1) non che quella stabilita nel precedente numero servono principalmente, secondo che si conosce la resistenza allo snervamento o la resistenza alla rottura per trazione, a risolvere i due seguenti problemi pratici:

1° *Trovare a qual forza tendente* T′ *si può assoggettare un corpo prismatico omogeneo del quale si conosce la superficie* Ω *della sezion retta;*

2° *Trovare la superficie* Ω *della sezion retta da assegnarsi ad un corpo prismatico omogeneo che deve trovarsi sottoposto ad una data forza tendente* T′.

L'equazione di stabilità indicata (2) al numero 14 serve allo stesso scopo, quando però, invece della resistenza allo snervamento Q′, si conoscono il coefficiente di elasticità E′ e l'allungamento proporzionale λ' corrispondenti allo snervamento per trazione.

20. **Applicazione delle equazioni di stabilità relative all'estensione al caso dei corpi non prismatici, ma ad asse rettilineo; sezione pericolosa.** — Allorquando all'azione di una forza tendente T′ (*fig.* 13) si sottopone un corpo omogeneo ad asse rettilineo AB, e che supponesi non sollecitato da altra forza, il sito in cui più presto avviene lo snervamento o la rottura, se pur uno di questi fatti può succedere, è quello in cui la sezione del corpo normale all'asse presenta la minor superficie. — Se poi il solido è tale da variare, passando da una sezione all'altra, le resistenze allo snervamento ed alla rottura, la sezione in cui più facilmente può manifestarsi o l'uno o l'altro degli indicati fenomeni è quella per rapporto alla quale ha valor massimo nell'estensione del corpo il coefficiente di stabilità ossia il quoziente della forza traente per la resistenza allo snervamento o alla rottura per trazione ad essa corrispondente (num. 14 e 18).

La sezione per rapporto alla quale più facilmente che in qualunque altra può avvenire lo snervamento o la rottura chiamasi *sezione pericolosa* e, tanto l'equazione di stabilità data al numero 14 e segnata (1), quanto quella data al numero 18, si applicano in genere a tutti i corpi ad asse rettilineo purchè per Ω s'intenda la superficie della sezione normale all'asse AB determinata colla condizione che nell'estensione del corpo sia massimo il valore del coefficiente di stabilità ad essa riferentesi.

21. **Applicazione delle equazioni di stabilità relative all'estensione al caso dei corpi ad asse rettilineo verticalmente disposto, tenendo anche conto dei loro pesi.** — Sia HIKL (*fig.* 14) un solido omogeneo il cui asse è una linea retta AB verticalmente disposta e che trovasi sottoposto all'azione di una forza tendente T′ applicata al centro B della base inferiore e diretta secondo il detto asse. Se in questo solido si considera una sezione qualunque DE, l'azione molecolare o resistenza all'estensione che mantiene a posto la parte di corpo DEKL è equivalente alla forza T′ aumentata del peso p dell'indicata parte di corpo, e quest'azione molecolare divisa per la superficie della sezione DE dà ciò che chiamasi resistenza riferita all'unità di superficie di detta sezione. Ora questa resistenza riferita all'unità di superficie varia da una sezione all'altra, ed evidentemente vi è il maggior pericolo di snervamento e di rottura dove essa ha il massimo valore possibile. Segue da ciò che per applicare l'equazione di stabilità data al numero 14 e segnata (1), oppure l'altra data al numero 18, ai corpi omogenei ad asse rettilineo, bisogna porre in esse quel particolare valore di Ω che corrisponde a quella sezione in cui la resistenza provocata dalle forze estrinseche riferita all'unità di superficie è la più grande nell'estensione del corpo. — Se poi il solido è tale da cangiare, passando da una sezione all'altra, le resistenze allo snervamento ed alla rottura, il sito in cui vi è maggior pericolo di snervamento e di rottura, ossia la *sezione pericolosa*, si determina cercando, come si è detto nel numero precedente, quella per rapporto alla quale è massimo il valore del coefficiente di stabilità ossia il quoziente della forza traente per la resistenza allo snervamento od alla rottura per trazione che ad essa corrisponde.

Pei corpi omogenei e prismatici ad asse verticale, nella sezione superiore, ossia in quella corrispondentemente alla quale il corpo è mantenuto sospeso, viene provocata la massima resistenza riferita all'unità di superficie, per cui più facilmente in essa che in qualunque altra può avvenire lo snervamento e la rottura; e la ragione si vede chiara in ciò che l'azione molecolare che si sviluppa alla sezione superiore, la quale è equivalente al peso applicato alla base inferiore più il peso del corpo intiero, è sempre maggiore di quella che si sviluppa in una sezione qualunque, dove è lo stesso peso applicato alla base inferiore aumentato soltanto del peso di una parte del corpo.

22. **Applicazione della teoria sulla resistenza all'estensione alla risoluzione di alcuni semplici problemi.** — Quanto finora si è detto nel presente capitolo costituisce quello che vi ha di più elementare e di più importante sulla resistenza dei corpi all'estensione, giacchè quasi sempre le forze tendenti sono dirette secondo gli assi dei corpi a cui sono applicate, od almeno passano a sì piccola distanza da questi assi da potersi esse considerare come coincidenti senza tema che ne possano derivare dei gravi inconvenienti nelle applicazioni pratiche; ed ecco alcuni semplicissimi problemi aventi per iscopo di ben far comprendere come nei casi particolari si devono applicare le equazioni di stabilità.

I. *Trovare l'allungamento che prenderà un'asta rotonda in ferro del diametro di metri* 0,02 *e della lunghezza di* 5 *metri sotto l'azione di una forza tendente diretta secondo l'asse dell'asta medesima e dell'intensità di* 3000 *chilogrammi.*

Affinchè sia possibile la risoluzione di questo problema nei limiti di quanto finora si è detto sulla resistenza all'estensione, bisogna che la forza tendente di 3000 chilogrammi non sia capace di produrre lo snervamento nell'asta di ferro, e per riconoscere questo è necessario cercare l'azione molecolare sviluppata sull'unità di superficie della sezion retta dell'asta medesima per vedere se è minore della resistenza allo snervamento per trazione del ferro pure riferita all'unità di superficie e somministrata dalla tavola numerica data al numero 13.

Prendendo il millimetro quadrato per unità di superficie ed il chilogramma per unità di forza, la superficie Ω della sezion trasversale dell'asta sarà data da

$$\Omega = 3{,}1416 \frac{20^2}{4} = 314^{\text{mmq}}{,}16\,,$$

e quindi l'azione molecolare corrispondente all'unità di superficie di una sezione qualunque, siccome la forza tendente $T' = 3000^{\text{Cg}}$, sarà data da

$$\frac{T'}{\Omega} = \frac{3000}{314{,}16} = 9^{\text{Cg}}{,}55,$$

che essendo minore della resistenza allo snervamento per trazione, la quale è chilogrammi 12,205 per le barre di media grossezza, porta a conchiudere non essere capace la forza tendente di 3000 chilogrammi di produrre lo snervamento.

Ciò premesso, si determini l', ossia l'allungamento domandato, coll'equazione (1) del numero 12, e facendo in essa $T' = 3000^{Cg}$, $E' = 18492^{Cg}$, $\Omega = 314^{mmq},16$ e $L = 5^{m}$ si avrà

$$3000 = \frac{18492 \times 314,16 . l'}{5},$$

d'onde si ricava

$$l' = 0^{m},0026,$$

cosicchè l'allungamento che prenderà la data spranga sarà di millimetri 2,6.

II. *Una trave di larice rosso della lunghezza di* 6 *metri e colla sezion retta quadrata di metri* 0,30 *di lato è mantenuta ferma alla estremità superiore e disposta col suo asse verticale; trovare qual è il peso permanente che si può applicare al centro della base inferiore di detta trave affinchè risulti stabile, tenendo anche conto del peso della trave medesima.*

Il problema si risolve applicando l'equazione di stabilità che venne data al numero 18, prendendo per unità di superficie il millimetro quadrato, per unità di peso il chilogramma e facendo in detta equazione $n' = 1/10$, $R' = 8^{Cg}5$, $\Omega = 300^2 = 90000^{mmq}$ e T' eguale al peso della spranga aumentato del peso incognito X da applicarsi al centro della base inferiore. Mediamente poi essendo di chilogrammi 0,7 il peso del decimetro cubo di larice rosso $9 \times 60 = 540^{dmc}$ il volume della trave, sarà il suo peso espresso da $540 \times 0,7 = 378^{Cg}$, e quindi il valore di T' sarà dato da $378 + X$.

Sostituendo ora i valori di T', n', R' ed Ω nella già citata equazione di stabilità, si avrà

$$378 + X = \frac{1}{10} 8,5 \times 90000$$

d'onde

$$X = 76122^{Cg},$$

cosicchè nel centro della base inferiore della data trave si può con sicurezza applicare un peso di 76122 chilogrammi.

III. *Con un'asta di acciaio ordinario, lunga* 2 *metri, a sezion retta rettangolare coi lati nel rapporto di* 1 *a* 3, *da fermarsi colla sua estremità superiore e da disporsi col suo asse verticale, vuolsi sostenere un peso di* 2000 *chilogrammi da applicarsi al centro della base inferiore; si domanda quali lati bisogna assegnare alla sezion retta dell'asta stessa affinchè in modo permanente possa sopportare se stessa ed il detto peso.*

Anche questo problema si può risolvere coll'equazione di stabilità data al numero 18. Chiamando x il lato minore della sezion retta di cui voglionsi le dimensioni espresso in millimetri, $3x$ è il lato maggiore, e per conseguenza la superficie di detta sezion retta vien data da $\Omega = x.3x = 3x^2$. Trattandosi di un metallo, si assume $n' = 1/6$; e ricorrendo alla tavola del numero 17 si trova $R' = 75^{Cg}$. Il volume poi dell'asta in decimetri cubi è espresso da $20 \times \frac{3x^2}{10000} = 0{,}006\, x^2$ e, per essere di chilogrammi 7,82 il peso medio del decimetro cubo di acciaio, da $7{,}82 \times 0{,}006\, x^2 = 0{,}04692\, x^2$ il suo peso in chilogrammi. Il valore di T′ adunque è rappresentato da $2000 + 0{,}04692\, x^2$, e la citata equazione di stabilità determinatrice di x diventa

$$2000 + 0{,}04692\, x^2 = \frac{1}{6}\, 75.3x^2$$

dalla quale si ricava

$$37{,}45308\, x^2 = 2000$$

e quindi

$$x = \sqrt{\frac{2000}{37{,}45308}} = 7^{mm},3.$$

Cosicchè il lato minore della sezion retta di cui voglionsi le dimensioni deve essere di millimetri 7,3, ed il lato maggiore triplo del minore, ossia di millimetri 21,9.

IV. *Trovare qual è la massima lunghezza che si può assegnare ad un'asta di ferro con sezione costante, affinchè impiegata verticalmente possa in modo permanente sostenere il proprio peso.*

Chiamando Ω la superficie costante della sezione dell'asta in decimetri quadrati, y la sua lunghezza in decimetri; assumendo chilogrammi 7,77 per peso del decimetro cubo di ferro, 40 chilogrammi per resistenza del ferro alla rottura per trazione riferita al millimetro quadrato, ossia 400000 chilogrammi riferito al decimetro quadrato, 1/6 per coefficiente di stabilità; ed essendo la forza tendente T′ espressa da $7{,}77\, \Omega y$, si ha che l'equazione di stabilità del numero 18 diventa

$$7{,}77\, \Omega y = \frac{1}{6}\, 400000\, \Omega\,,$$

d'onde

$$y = \frac{200000}{23{,}31} = 8580^{dm},$$

cioè la massima lunghezza che si può assegnare all'asta è di 8580 decimetri, ossia di 858 metri.

25. **Applicazione della teoria sulla resistenza all'estensione al calcolo della grossezza da assegnarsi alle pareti dei cilindri e delle sfere che tendono a rompersi per effetto di una pressione uniforme.** — Quest'applicazione è una delle più belle ed in pari tempo una delle più importanti per la pratica, ed essa sta essenzialmente nella risoluzione dei quattro problemi che seguono, nei quali, tenendo soltanto conto della pressione costante interna e di una pressione pure costante esterna minore della prima, che generalmente si esercita sulle pareti dei vasi cilindrici e sferici che si considerano, si trascurano tutte le altre influenze deformatrici secondarie, quali sono il peso proprio del vaso, la reazione degli appoggi, l'azione che le basi esercitano sulle pareti, ecc.

I. *Trovare la grossezza da assegnarsi ad un tubo circolare di una data materia, di cui si conosce il raggio interno, che deve avere spessore uniforme, e che deve trovarsi sotto l'azione di due date pressioni costanti, interna l'una ed esterna l'altra.*

Rappresentando colla figura 15 la sezione trasversale del tubo, si chiamino:

D il suo diametro interno $\overline{FG}$ espresso in metri;

l la sua lunghezza data in metri;

p' la pressione costante in chilogrammi e riferita al metro quadrato, che sulla superficie interna del tubo si esercita dal di dentro al di fuori;

p'' la pressione anche costante pure in chilogrammi e riferita al metro quadrato, che sulla superficie esterna del tubo si esercita dall'infuori all'indentro;

p la differenza $p' - p''$ fra le due pressioni interna ed esterna, ossia ciò che chiamasi la pressione effettiva;

R' la resistenza alla rottura per trazione della sostanza di cui il tubo è formato in chilogrammi e riferita al metro quadrato;

n' il coefficiente di stabilità;

s lo spessore domandato $\overline{FA}$ della parete espresso in metri.

Si vede innanzi tutto come la scorza cilindrica FIGHADBE circolare prima dell'azione delle pressioni p' e p'' deve rimanere tale anche dopo tale azione; imperocchè tutto essendo simmetrico per rapporto al piano meridiano AB, questo piano resterà ancora di simmetria nello stato finale, e per conseguenza sarà ancora normale alle superficie curve secondo le quali sarannosi disposte le due superficie cilindriche primitive ADBE ed FIGH; e siccome la medesima cosa si può dire di qualsiasi altro piano passante per l'asse primitivo C, si vede che tutti i piani normali alle superficie curve secondo le quali sarannosi disposte le dette due superficie cilindriche primitive concorreranno in un medesimo asse, il che esige appunto che sia circolare la scorza cilindrica formante la parete del tubo dopo l'azione delle pressioni p' e p''. Ciò premesso, ammettendo che la rottura del tubo tenda a farsi secondo un piano AB passante per l'asse C, giacchè le pressioni sono eguali e simmetriche rispetto a questo asse, per stabilire l'equazione di stabilità determinatrice dello spessore s della parete del tubo bisogna procurarsi: la forza che tende a staccare la parte di tubo ADBGIF dall'altra parte supposta fissa, la qual forza è rappresentata in intensità e direzione dalla risultante delle pressioni esercitate sulla superficie concava FIG e sulla superficie convessa ADB; e la somma delle due superficie rappresentate in AF e BG sulle quali si sviluppano le azioni molecolari opponentisi alla rottura.

Per trovare la forza la quale tende a spaccare il tubo si osserva che essa forza (ossia la risultante delle pressioni esercitate sulla superficie concava FIG e sulla superficie convessa ADB) e la possibilità di rottura non cangiano supponendo tolta la mezza parete del tubo AEBGHF, chiuso il mezzo cilindro cavo ADB mediante una parete piana rigida AB attaccata al mezzo tubo ADB colla stessa tenacità con cui questo lo è al mezzo tubo AEB, mantenute rispettivamente all'interno ed all'esterno del mezzo tubo ADB le pressioni primitive p' e p'' per ogni metro quadrato, e chiuso il tubo alle sue due estremità per porlo nelle condizioni d'un vaso chiuso da ogni parte. Chiamando T' la detta forza la quale tende a spaccare il tubo secondo il piano meridiano AB, applicando al mezzo tubo ADB il teorema di idrostatica, il quale insegna che se una pressione costante per unità di superficie è applicata normalmente ad un contorno superficiale, la risultante delle pressioni sui diversi elementi superficiali è nulla, trascurando le pressioni sui due fondi fittizii perchè eguali e direttamente contrarie, ed osservando che sulla parete fittizia FG si esercita dall'indentro all'infuori la pressione

$$p' \mathrm{D}\, l$$

mentre sull'altra AB si esercita dall'infuori all'indentro la pressione

$$p'' (\mathrm{D} + 2s)\, l,$$

si avrà per il citato teorema

$$T' - [p' D l - p'' (D + 2s) l] = 0,$$

d'onde

$$T' = l [p' D - p'' (D + 2s)] \qquad (1).$$

In quanto alla somma Ω delle due superficie rappresentate in AF e BG sulle quali si sviluppano le azioni molecolari opponentisi allo spaccamento del tubo, essendo ciascuna di queste superficie un rettangolo lungo l ed alto s, sarà

$$\Omega = 2 l s \qquad (2).$$

Sostituendo ora nell'equazione di stabilità che venne data al numero 18, per T' il valore dato dalla (1) e per Ω quello dato dalla (2), si ha la seguente equazione determinatrice di s

$$[p' D - p'' (D + 2s)] = 2 n' R' s$$

dalla quale si deduce

$$s = \frac{1}{2} \frac{(p' - p'') D}{n' R' + p''} \qquad (3),$$

e, rammentando che $p' - p'' = p$, si ha

$$s = \frac{1}{2} \frac{p D}{n' R' + p''} \qquad (4).$$

Trascurando la quantità p'' la quale nelle ordinarie circostanze della pratica è sempre assai piccola in confronto di $n' R'$, l'ultima equazione trasformasi in quest'altra

$$s = \frac{p D}{2 n' R'} \qquad (5),$$

nella quale ben soventi suolsi prendere per pressione effettiva p la sola pressione interna.

Qualora le pressioni p' e p'' vengano date in atmosfere, si possono modificare le equazioni (4) e (5) in questo modo: essendo

ν il numero di atmosfere corrispondenti alla pressione effettiva $p = p' - p''$,

ν'' il numero di atmosfere rappresentanti la pressione p'',

A il numero di chilogrammi i quali danno la pressione di un'atmosfera su 1 metro quadrato, il qual numero si può assumere di 10330 chilogrammi, si hanno evidentemente le equazioni

$$\nu = \frac{p}{A}, \qquad \nu'' = \frac{p''}{A},$$

d'onde risultano i seguenti valori di p e p''

$$p = \nu A, \qquad p'' = \nu'' A,$$

i quali posti nelle dette equazioni (4) e (5) le trasformano in queste altre

$$s = \frac{1}{2}\,\frac{\nu A D}{n'R' + \nu'' A} \qquad (6),$$

$$s = \frac{\nu A D}{2n'R'} \qquad (7).$$

Nell'applicazione pratica delle formole (4), (5), (6) e (7) bisogna tener presente come, su una parte qualunque di tubo compresa fra due sezioni trasversali, la trazione non ha luogo nella direzione dell'asse del solido, ma sibbene in senso tangenziale all'anello costituente questa parte, e questo fatto, dietro quanto si è visto al numero 17, deve guidare nella scelta del conveniente coefficiente di rottura.

Pei tubi di condotta delle acque, dei gaz e dei vapori, alla grossezza che verrebbe somministrata dall'applicazione delle formole (5) o (7) suolsi aggiungere una grossezza costante nell'intento di prevenire le dannose conseguenze che potrebbero derivare da cause impreviste e da scosse possibili nel trasporto e nel loro collocamento, per cui, chiamando s' l'indicata grossezza costante, invece delle dette formole (5) o (7) soglionsi applicare queste altre:

$$s = \frac{pD}{2n'R'} + s' \qquad (8),$$

$$s = \frac{\nu A D}{2n'R'} + s' \qquad (9).$$

Il Morin poi, fermandosi principalmente ai tubi per condotte d'acqua e fondandosi su quanto l'esperienza ha insegnato essere più conveniente, dà le seguenti formole per trovare la grossezza dei tubi in metallo, in legno ed in pietra:

Pei tubi in ferro . . . . . $s = 0{,}00086\,\nu D + 0^m{,}0030$

» ghisa . . . . . $s = 0{,}00238\,\nu D + 0^m{,}0085$

Pei tubi in rame laminato. $s = 0{,}00147\, \nu D + 0^m{,}0040$
» piombo . . . . $s = 0{,}00242\, \nu D + 0^m{,}0050$
» zinco . . . . . $s = 0{,}00620\, \nu D + 0^m{,}0040$
» legno . . . . . $s = 0{,}03230\, \nu D + 0^m{,}0270$
» pietre naturali. $s = 0{,}00363\, \nu D + 0^m{,}0300$
» pietre artefatte $s = 0{,}00538\, \nu D + 0^m{,}0400$

I primi termini dei secondi membri di queste formole non sono altro che il primo termine del secondo membro dell'equazione (9) dopo d'aver in esso fatti $A = 10330^{Cg}$, $n' = \frac{1}{6}$ ed R' eguale ai valori medii dei coefficienti di rottura convenienti alla materia di cui i tubi si suppongono formati.

In quanto alla grossezza delle pareti delle caldaie a vapore, molti meccanici, in conformità di un'ordinanza del Governo francese in data del 22 maggio 1843, sogliono dedurla dall'equazione

$$e = 0{,}0018\, \nu D + 0^m{,}003 \tag{10},$$

il cui primo termine del secondo membro è pure il primo termine del secondo membro della (9) corrispondente al valore già riferito di A, ad $n' = \frac{1}{12}$ e ad $R' = 34433333^{Cg}$ per metro quadrato, ossia a poco più di 34 chilogrammi per ogni millimetro quadrato.

II. *Trovare lo spessore da assegnarsi alla parete di una sfera cava di data materia, la quale deve trovarsi sotto l'azione di due date pressioni costanti, interna l'una ed esterna l'altra.*

La figura 16 rappresenti la sfera data, sia D il diametro della cavità interna data in metri, e, come nel problema precedente, si adottino rispettivamente le lettere p', p'', p, R', n' ed s per indicare la pressione costante interna, la pressione costante esterna, la pressione effettiva, ossia la differenza $p' - p''$, la resistenza alla rottura per trazione della sostanza di cui la sfera è formata, il coefficiente di stabilità ed il domandato spessore della scorza sferica, essendo espressi in metri il diametro e lo spessore ed in chilogrammi riferite al metro quadrato le pressioni e la resistenza alla rottura.

Ragionando in modo analogo a quello tenuto nel precedente problema agevolmente si comprende: come, essendo prima delle azioni p' e p'' sferica la cavità interna e costante lo spessore della parete, lo stesso deve succedere anche dopo le dette azioni; e come, ammettendo che la rottura tenda ad aver luogo secondo un piano meridiano AB, si può immaginare tolta la mezza sfera AEB, chiusa l'altra metà con una parete piana rigida AB, attaccata all'emisfero ADB colla stessa tenacità con cui questo trovasi realmente attaccato all'emisfero AEB, mantenute rispettivamente all'interno ed all'esterno della mezza sfera ADB le pressioni p' e p'' per ogni metro quadrato, ed applicare al vaso emisferico ADB il teorema d'idrostatica di cui si diede l'enunciato nel già citato precedente problema. Ciò permesso, dicendo ancora T′ la risultante delle pressioni esercitate sulla superficie concava interna FHG e sulla superficie convessa esterna ADB, ossia la forza la quale tende a staccare l'emisfero ADB dall'emisfero AEB, o, ciò che torna lo stesso, dalla parete piana fittizia AB, siccome la pressione che si esercita sul circolo rappresentato in FG dall'indentro all'infuori è

$$\frac{1}{4}\pi D^2 p',$$

essendo π il noto rapporto 3,1415...... della circonferenza al diametro, e quella che si esercita sul circolo rappresentato in AB dall'infuori all'indentro è

$$\frac{1}{4}\pi (D+2s)^2 p'',$$

si avrà per il noto teorema d'idrostatica

$$T' - \left[\frac{1}{4}\pi D^2 p' - \frac{1}{4}\pi (D+2s)^2 p''\right] = 0,$$

d'onde si ricava

$$T' = \frac{1}{4}\pi\left[D^2(p'-p'') - 4s(D+s)p''\right]$$

La superficie Ω sulla quale si sviluppano le azioni molecolari opponentisi allo spaccamento della sfera, essendo una corona circolare i cui diametri sono $\overline{AB} = D + 2s$ ed $\overline{FG} = D$, è data da

$$\Omega = \frac{1}{4}\pi\left[(D+2s)^2 - D^2\right] = \pi s(D+s).$$

Sostituendo nell'equazione di stabilità che si è instituita al numero 18 i valori or ora trovati di T' e di Ω, si ottiene la seguente equazione

$$\frac{1}{4}\left[D^2(p'-p'')-4s(D+s)p''\right]=n'R's(D+s),$$

dalla quale, rammentando che $p'-p''=p$, si ricava

$$s(D+s)=\frac{1}{4}\frac{pD^2}{n'R'+p''}.$$

Su quest'equazione del secondo grado in s, a seconda della circostanza in cui deve essa venir applicata, si possono fare tutti i ragionamenti che vennero fatti sull'equazione (4) del problema precedente; che anzi nel caso in cui lo spessore s sia piccolo in confronto del diametro D, siccome dividendo l'equazione per D^2 si ottiene

$$\frac{s}{D}+\frac{s^2}{D^2}=\frac{1}{4}\frac{p}{n'R'+p''},$$

si può trascurare il termine $\frac{s^2}{D^2}$ ed avere quindi

$$s=\frac{1}{4}\frac{pD}{n'R'+p''}.$$

III. *Trovare quale larghezza deve avere la corona circolare che unisce il fondo di un cilindro alla sua parete laterale, affinchè questo fondo non venga a staccarsi per effetto di due date pressioni costanti, interna l'una ed esterna l'altra.*

Il cilindro proposto sia quello rappresentato nella figura 17 mediante una sua sezione meridiana e mediante la sezione secondo il piano XY. Come al problema I si usino rispettivamente le lettere D, p', p'', p, R' ed n' per indicare il diametro interno del cilindro, la pressione costante interna, la pressione costante esterna, la pressione effettiva ossia la differenza $p'-p''$, la resistenza alla rottura per trazione della sostanza di cui il cilindro è formato, ed il coefficiente di stabilità, essendo espresso in metri il diametro ed essendo riferite al metro quadrato le pressioni e la resistenza alla rottura. In quanto poi alla domandata larghezza da assegnarsi alla corona circolare che unisce il fondo del cilindro alla sua parete laterale si esprima colla lettera s_1 prendendo il metro per unità.

Evidentemente la forza T' la quale tende a staccare il fondo del cilindro dalla sua parete laterale è la pressione che si esercita sul circolo di diametro $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ dall'indentro all'infuori, meno quella che si esercita sul circolo di diametro $\overline{G'H'}$ dall'infuori all'indentro; e, in virtù dei ragionamenti fatti nel precedente problema II, agevolmente si comprende essere questo vero anche quando il fondo invece di essere piano è sferico. Ora, essendo π il noto rapporto 3,1415...... della circonferenza al diametro, la pressione che si esercita sul circolo di diametro $\overline{AB}$ è

$$\frac{1}{4}\pi D^2 p',$$

e quella che si esercita sul circolo di diametro $\overline{G'H'}$

$$\frac{1}{4}\pi(D+2s_1)^2 p'',$$

cosicchè il valore della forza T' si riduce a

$$T'=\frac{1}{4}\pi\left[D^2(p'-p'')-4s_1(D+s_1)p''\right].$$

In quanto alla superficie Ω sulla quale ha luogo lo sviluppo delle azioni molecolari che si oppongono allo staccamento, è essa la corona circolare di diametri $\overline{AB}$ e $\overline{DE}$, espressa da

$$\Omega=\frac{1}{4}\pi\left[(D+2s_1)^2-D^2\right]=\pi s_1(D+s).$$

Tanto il valore di T' quanto quello di Ω essendo quelli stessi che vennero trovati nel problema II col solo cangiamento di s in s_1, agevolmente si comprende come, instituendo l'equazione di stabilità e ponendo $p'-p''=p$, si verrà all'equazione

$$s_1(D+s_1)=\frac{1}{4}\frac{pD^2}{n'R'+p''},$$

sulla quale, a seconda delle circostanze, si possono fare gli stessi ragionamenti che vennero fatti sull'equazione (4) del problema I. Intanto ricavando da quest'ultima equazione il valore di s_1 che soddisfa alla proposta quistione, si ha

$$s_1=\frac{D}{2}\left(\sqrt{1+\frac{p}{n'R'+p''}}-1\right).$$

Cercando ora la grossezza $\overline{A'F'}$ che deve avere la parete laterale del cilindro affinchè non si spacchi per causa dell'interna pressione p, evidentemente si viene a trovare il valore di s dato dall'equazione (4) del problema I. Facendo la differenza fra il valore di s e di s_1 si trova

$$s - s_1 = \frac{D}{2}\left(\frac{p}{n'R' + p''} - \sqrt{1 + \frac{p}{n'R' + p''}} + 1\right),$$

la qual differenza, essendo evidentemente positiva perchè il fattore del secondo membro posto fra parentesi ha per parte negativa maggiore dell'unità la radice quadrata della parte positiva, porta a conchiudere essere $s > s_1$; cosicchè nella fabbricazione dei cilindri il cui fondo viene dal getto in un colla parete laterale basta solo occuparsi dello spessore di quest'ultima allorquando il diametro esterno di quello si faccia eguale al diametro esterno di questa.

IV. *Trovare il numero delle chiavarde di dato diametro che devonsi impiegare per mantenere unito il fondo alla parete laterale di un cilindro, nel quale devono aver luogo due date pressioni costanti, interna l'una ed esterna l'altra.*

La figura 18 rappresenti il cilindro proposto mediante un suo spaccato meridiano, e mediante la sezione determinata dal piano XY. Per quanto concerne al diametro interno del cilindro, alle pressioni costanti per ogni metro quadrato interna, esterna ed effettiva ed al coefficiente di stabilità si ritengano le denominazioni già adottate nei problemi I e III, e si chiamino:

d il diametro delle chiavarde espresso in metri;

R' la resistenza che le chiavarde oppongono alla rottura per trazione data in chilogrammi e riferita al metro quadrato;

D' il diametro esterno $\overline{C'D'}$ del fondo in metri;

x il cercato numero di chiavarde.

La forza T' la quale tende a produrre lo staccamento del fondo è la pressione che si verifica sul circolo di diametro $\overline{A'B'}$ meno quella che ha luogo sul circolo di diametro $\overline{C'D'}$, ed in virtù dei ragionamenti che vennero instituiti al problema II agevolmente si comprende essere questo vero anche quando il fondo è sferico, cosicchè, essendo π il noto rapporto 3,1415...... dalla circonferenza al diametro, si avrà la seguente espressione di T'

$$T' = \frac{1}{4}\pi(D^2 p' - D'^2 p'').$$

In quanto alla superficie Ω sulla quale si sviluppa la resistenza che opponesi allo staccamento del fondo, è essa costituita dalla somma delle sezioni trasversali di tutte le chiavarde, la qual somma evidentemente è espressa da

$$\frac{1}{4}\pi d^2 x.$$

Ciò premesso, facendo $T' = \frac{1}{4}\pi(D^2 p' - D'^2 p'')$ ed $\Omega = \frac{1}{4}\pi d^2 x$ nell'equazione di stabilità stata instituita al numero 18, si trova la seguente equazione determinatrice di x

$$D^2 p' - D'^2 p'' = n' R' d^2 x,$$

d'onde si ricava

$$x = \frac{D^2 p' - D'^2 p''}{n' R' d^2}.$$

Se il fondo va assicurato alla parete del cilindro, non con chiavarde, ma sibbene mediante chiodi ribaditi, si calcola nello stesso modo il loro numero anche quando l'unione è fatta come viene espresso nella figura 19 mediante una sezione meridiana, giacchè, secondo le esperienze di Fairbairn, la resistenza di questi chiodi nel senso trasversale è presso a poco eguale alla loro resistenza longitudinale.

24. **Applicazione della teoria sulla resistenza all'estensione per determinare la sezione trasversale da assegnarsi ai tiranti ed alle cerchiature che, oltre di sopportare una data tensione costante, devono reggere all'aumento di tensione prodotto da un abbassamento di temperatura.** — L'esperienza ha dimostrato che tutti i corpi si dilatano o si restringono aumentando o diminuendo la loro temperatura, che queste dilatazioni o restringimenti variano da un corpo all'altro e che per una variazione di temperatura di 100 gradi centigradi gli allungamenti o gli accorciamenti proporzionali, ossia gli allungamenti o gli accorciamenti espressi in parti della lunghezza primitiva, per le sostanze che può essere il caso di dover considerare nelle costruzioni, si possono mediamente fissare come appare dalla seguente tavola:

INDICAZIONE DELLE SOSTANZE	ALLUNGAMENTI ed accorciamenti proporzionali
Larice	0,000800
Acciaio	0,001079
Ferro	0,001220
Ghisa	0,001110
Ottone	0,001878
Piombo	0,002848
Rame	0,001717
Zinco	0,002942
Pietre	0,000500

Dividendo per 100 i numeri della precedente tavola si ottengono gli allungamenti e gli accorciamenti proporzionali medii per 1 grado centigrado, che nei problemi che seguono verranno indicati colla lettera δ.

I. *Trovare la sezione trasversale da assegnarsi ad un tirante, il quale deve essere posto in opera in guisa da non potersi allungare nè accorciare, che deve sopportare una tensione non minore di una tensione data e che deve trovarsi esposto a due note temperature limiti.*

Si chiamino:

L la lunghezza del tirante un momento prima di porlo in opera, e

L′ la lunghezza del tirante dopo posto in opera, espresse in metri;

T′ il più piccolo valore della tensione che dovrà sopportare il tirante, e

T_1 la tensione che al medesimo si farà sopportare nel porlo in opera, date in chilogrammi;

Q′ la resistenza allo snervamento per trazione della sostanza di cui il tirante è formato, espressa in chilogrammi e riferita al metro quadrato;

θ la più gran temperatura alla quale dovrà trovarsi opposto il tirante,

θ' la temperatura alla quale il tirante si metterà in opera, e

θ'' la più bassa temperatura a cui il tirante sarà per trovarsi esposto dopo di essere a posto, espresse in gradi centigradi;

E il coefficiente di elasticità longitudinale relativo all'estensione della sostanza di cui il tirante è costituito, riferito al metro quadrato;

Ω la domandata sezione trasversale del tirante in metri quadrati; e si conservi a δ la significazione che gli venne data in questo numero.

In virtù della formola (1) del numero 12, al momento in cui il tirante viene posto in opera colla tensione T_1, subisce esso un allungamento

$$\frac{T_1 L}{E' \Omega}$$

per cui la distanza dei suoi due estremi, appena trovasi a posto, resta fissata dalla lunghezza

$$L' = L\left(1 + \frac{T_1}{E' \Omega}\right).$$

Elevandosi la temperatura di $\theta - \theta'$, il tirante tende ancora a prendere l'allungamento proporzionale

$$\delta(\theta - \theta'),$$

e, non essendogli questo permesso, ne deriva una diminuzione di tensione che si può prendere in correlazione coll'allungamento non concesso, ossia espressa, per la formola (2) del numero 12, da

$$E' \Omega \delta(\theta - \theta'),$$

cosicchè, quando il tirante si troverà in opera esposto alla temperatura θ sopporterà ancora la tensione minima

$$T_1 - E' \Omega \delta(\theta - \theta');$$

e, siccome il tirante non deve mai avere una tensione minore di T', si avrà la seguente condizione:

$$T_1 - E' \Omega \delta(\theta - \theta') > T' \qquad (1).$$

Abbassandosi la temperatura di $\theta' - \theta''$, il tirante tende ad accorciarsi, e se questo gli fosse concesso si verificherebbe l'accorciamento proporzionale

$$\delta(\theta' - \theta''),$$

ma, essendogli impedito l'accorciamento, ne deriva un aumento di tensione che si può esprimere con

$$E'\Omega\delta(\theta'-\theta''),$$

per modo che, trovandosi il tirante in opera ed alla temperatura θ'', avrà esso ancora la tensione

$$T_1+E'\Omega\delta(\theta'-\theta'');$$

e siccome questa massima tensione a cui può trovarsi esposto il tirante deve essere tale da non perdere lo snervamento, si avrà la condizione

$$T_1+E'\Omega\delta(\theta'-\theta'')<Q'\Omega \qquad (2).$$

Ricavando i valori di T_1 dalle ineguaglianze (1) e (2), si trovano queste altre

$$T_1>T'+E'\Omega\delta(\theta-\theta'),$$

$$T_1<Q'\Omega-E'\Omega\delta(\theta'-\theta''),$$

$$T'+E'\Omega\delta(\theta-\theta')<Q'\Omega-E'\Omega\delta(\theta'-\theta''),$$

e quindi

$$\Omega>\frac{T'}{Q'-E'\delta(\theta-\theta'')}.$$

Non si può avere un tirante stabile quando la differenza fra le temperatura θ e θ'' è tale da essere

$$Q'-E'\delta(\theta-\theta'')=\text{oppure}<0,$$

cioè quando

$$\theta-\theta''=\text{oppure}>\frac{Q'}{E'\delta},$$

giacchè il valore di Ω diventa ∞ nel primo caso e negativo nel secondo.

II. *Trovare la sezione trasversale da assegnarsi ad una cerchiatura la quale deve essere posta in opera in guisa da dover sopportare normalmente alla superficie interna e dall'indentro all'infuori una data pressione costante per ogni metro della sua lunghezza, e che deve trovarsi esposta a due note temperature limiti.*

Ritenuto che le lettere T', Q' θ, θ'', E'', Ω e δ abbiano in questo problema lo stesso significato che loro venne attribuito nel precedente problema, si chiamino

r il raggio $\overline{\mathrm{CA}}$ (*fig.* 20) della circonferenza posta sulla superficie interna a metà altezza della cerchiatura, espresso in metri;

N la forza applicata normalmente alla superficie interna della cerchiatura dall'indentro all'infuori, espressa in chilogrammi e riferita all'unità di lunghezza della detta circonferenza.

Per effetto della forza N in qualunque sezione trasversale della cerchiatura si sviluppa una tensione costante T′, la quale rappresenta la tensione più piccola che la cerchiatura stessa deve sopportare per servire allo scopo a cui è destinata, e che facilmente si può determinare immaginando tolta la mezza cerchiatura BFE e sostituite in sua vece le forze T′ applicate ai centri di gravità delle sezioni AB e DE normalmente ai piani delle sezioni stesse (*b*).

Assumasi il centro C per origine di coordinate, l'asse della x perpendicolare al piano BE passante per le sezioni AB e DE, e l'asse della y in questo stesso piano; sulla semi-circonferenza AGD prendasi un archetto infinitesimo $ab = \mathrm{d}s$ e siano $cb = \mathrm{d}x$ ed $ac = \mathrm{d}y$ le due proiezioni dello stesso archetto su due parallele all'asse delle x e delle y condotte rispettivamente per b e per a; al disotto dell'asse delle x si consideri in egual modo l'archetto infinitesimo $a'b' = \mathrm{d}s$ simmetricamente collocato col primo per rapporto all'accennato asse delle x; ciascuna delle due forze $\mathrm{N}\,\mathrm{d}s$ applicate normalmente ai detti archetti si scomponga in due, di cui una sarà parallela all'asse della x ed avrà per valore

$$\mathrm{N}\,\mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \mathrm{N}\,\mathrm{d}y,$$

e l'altra sarà parallela all'asse delle y; si osservi che le due componenti parallele all'asse delle y, siccome eguali e direttamente contrarie, si elidono; che rimangono solo le componenti parallele all'asse delle x, la cui somma estesa a tutta la semi-circonferenza AGD è evidentemente espressa da

$$\int_{-r}^{r} \mathrm{N}\,\mathrm{d}y = \mathrm{N}\,2r;$$

e che per l'equilibrio della mezza cerchiatura BIEDGA si deve avere l'equazione

$$2\mathrm{T}' = 2\,\mathrm{N}\,r,$$

ossia

$$\mathrm{T}' = \mathrm{N}r.$$

(*b*) Nel numero che segue si dà il modo di trovare elementarmente il valore di T′.

Trovata la forza T' si continua le soluzione del problema con un ragionamento analogo a quello tenuto nel precedente problema, considerando la cerchiatura come un tirante rettilineo lungo come la lunghezza della circonferenza media della cerchiatura stessa, e si arriva a trovare per Ω lo stesso limite inferiore che si ottenne nel precedente problema.

25. **Determinazione elementare della più piccola tensione che deve sopportare una cerchiatura per servire allo scopo cui è destinata.** — Senza far uso di notazioni di calcolo differenziale e di calcolo integrale si può elementarmente trovare il valore di T' con questo ragionamento: una cerchiatura di altezza costante l, sulla cui interna superficie si esercita una pressione uniforme N riferita all'unità di lunghezza della circonferenza posta a metà di sua altezza è nelle condizioni delle pareti di un tubo nel cui interno ha luogo una pressione uniforme $\frac{N}{l}$ sull'unità di superficie; la somma delle due forze T' adunque deve essere eguale alla resistenza che opporrebbe questo tubo per essere spaccato nel senso del piano meridiano BE, ossia deve essere eguale alla risultante delle pressioni che hanno luogo sulla mezza cerchiatura BIEDGA, ossia ancora deve essere eguale, per quanto si è detto al problema I del numero 23, alla risultante delle pressioni che hanno luogo sul piano BE supposto diventato una parete rigida. Siccome poi nel nostro caso non si ha pressione esterna, ma solo la pressione costante interna $\frac{N}{l}$ riferita all'unità di superficie, la somma delle due forze T' deve fare la pressione che corrisponde al rettangolo rappresentato in AD i cui lati sono $2\,r$ ed l, e quindi si avrà

$$2\,T' = \frac{N}{l}\,2\,r\,l,$$

d'onde si deduce

$$T' = N\,r.$$

Come serva il valore di T' a continuare la soluzione del problema già abbastanza chiaramente si è indicato nel precedente problema.

26. **Solidi omogenei di egual resistenza all'estensione con asse rettilineo e verticalmente disposto.** — Si è detto al numero 21 come nei solidi ad asse rettilineo, verticalmente disposti sotto l'azione di una data forza estrinseca diretta secondo il loro asse e

del proprio peso, la resistenza all'estensione riferita all'unità di superficie varia generalmente da una sezione all'altra. Segue da ciò esservi alcuni siti in tali corpi in cui più che in alcuni altri risulta facile la rottura; potersi per conseguenza diminuire le sezioni sulle quali vien sviluppata la minor resistenza riferita all'unità di superficie con economia di materia e con vantaggio nella stabilità; ed aversi i solidi più convenienti facendo in modo che in ogni loro sezione venga sviluppata per effetto delle forze tendenti e del loro peso la medesima resistenza riferita all'unità di superficie. I solidi che soddisfano all'indicata condizione chiamansi di *egual resistenza all'estensione;* e, conoscendosi la forza di trazione a cui un corpo deve essere assoggettato, il peso della sua unità di volume, non che la forma che deve essere affettata dalla sua sezione trasversale, permette il calcolo di determinare con qual legge la superficie di questa sezione deve variare da un sito all'altro per ottenere un solido di egual resistenza (*c*). I problemi che immediatamente seguono servono ad indicare come si deve procedere in ogni caso particolare.

I. *Si vuol fare un solido ad asse rettilineo di sezione circolare, di una data sostanza e di lunghezza nota, il quale deve sopportare un peso dato da applicarsi al centro della sua base inferiore. Si domanda con qual legge devono variare i raggi delle sue sezioni trasversali affinchè il solido risulti di egual resistenza.*

Si prenda il punto A (*fig.* 21) per origine di coordinate, l'asse delle x diretto secondo l'asse AB del solido, l'asse delle y nel piano della sezione infima EC, e si chiamino:

l la lunghezza $\overline{AB}$ del solido, espressa in metri;

P il peso applicato al centro A della sua base inferiore, espresso in chilogrammi;

Π il peso pure in chilogrammi del metro cubo di sostanza di cui il solido deve essere formato;

R il raggio $\overline{BD}$ della sezione superiore del solido al livello della quale è esso mantenuto fermo, e

r il raggio $\overline{AC}$ della sezione o base infima, espressi in metri;

R' la resistenza alla rottura per trazione della sostanza di cui il solido è formato, espressa in chilogrammi e riferita al metro quadrato;

(*c*) Nel numero che segue si dà un procedimento di approssimazione per determinare un solido di egual resistenza all'estensione con asse rettilineo verticalmente disposto.

n' il coefficiente di stabilità;

x la distanza $\overline{AH}$ di una sezione qualunque GI del solido dall'estremo A dell'asse, e

y il raggio $\overline{HI}$ di detta sezione;

x' la distanza $\overline{Aa}$ di un'altra sezione qualunque ec del solido dallo stesso estremo A dell'asse, e

y' il raggio $\overline{ac}$ di quest'ultima sezione, in metri.

Si incomincia dal trovare il raggio r della base inferiore EC, la quale ha per superficie $\pi\, r^2$ (essendo π il noto rapporto 3,1415... dalla circonferenza al diametro), dicendo che la forza P applicata al centro A di questa base deve essere inferiore a quella capace di produrre la rottura, per modo che facendo nell'equazione di stabilità che venne data al numero 18 $T' = P$ ed $= \Omega \pi\, r^2$ si ottiene l'equazione

$$P = n' R' \pi\, r^2,$$

d'onde si ricava

$$r = \sqrt{\frac{P}{n' \pi R'}} \qquad (1).$$

Per trovare ora come devono variare i raggi delle diverse sezioni si osserva: che la resistenza all'estensione che si sviluppa in una sezione qualunque GI è prodotta dal peso P aumentato del peso della parte di corpo GICE; che, siccome considerando le due sezioni vicinissime ec ed $e'c'$ il peso del cilindro retto che esse comprendono è espresso da

$$\Pi \pi y'^2 \, \mathrm{d}x',$$

il peso della parte di corpo GICA è dato da

$$\Pi\, \pi \int_0^x y'^2 \, \mathrm{d}\, x';$$

che la resistenza all'estensione sviluppantesi sulla sezione GI è per conseguenza

$$P + \Pi\, \pi \int_0^x y'^2 \, \mathrm{d}\, x';$$

e finalmente che, affinchè siavi la voluta stabilità nella sezione qualunque GI, bisogna soddisfare alla già citata equazione di stabilità del numero 18, la quale, applicata alla circostanza, conduce a

$$P + \Pi \pi \int_0^x y'^2 \, d x' = n' R' \pi y^2.$$

Differenziando ora quest'ultima equazione si trova

$$\Pi y^2 \, d x = 2 \, n' \, R' y \, dy,$$

dalla quale, separando le variabili, si deduce

$$\Pi \, dx = 2 \, n' R' \frac{dy}{y}$$

ed integrando

$$\Pi x = 2 n' R' \log y + C \qquad (2).$$

La costante C si determina in modo per $x = o$ si abbia $y = r$ che è determinato per l'equazione (1), cosicchè risulta

$$C = - 2 \, n' R' \log r,$$

il qual valore di C posto nella (2) dà

$$\Pi x = 2 \, n' R' \log \frac{y}{r},$$

ossia ancora, passando dai logaritmi agli esponenziali ed avendo e il noto valore 2,718281...... della base dei logaritmi neperiani,

$$y = r e^{\frac{\Pi x}{2 n' R'}} \qquad (3);$$

cosicchè i raggi delle diverse sezioni del solido devono variare come le ordinate della curva logaritmica rappresentata dall'equazione (3).

Per trovare il raggio R della base superiore F D del solido bisogna porre nell'equazione (3) $x = l$, ed allora y diventerà R, per guisa che si avrà

$$R = r e^{\frac{\Pi l}{2 n' R'}}.$$

Succede generalmente in pratica che $\frac{\Pi l}{2n'R'}$ e che quindi anche $\frac{\Pi x}{2n'R'}$ sono piccole frazioni, e allora svolgendo in serie $e^{\frac{\Pi x}{2n'R'}}$ e $e^{\frac{\Pi l}{2n'R'}}$ si possono calcolare i valori di y e di R con formole solo approssimate e di facile maneggio.

II. *Si vuol costrurre un solido di data sostanza e con asse rettilineo, che sia costituito* (siccome in elevazione ed in proiezione orizzontale dal basso in alto lo dimostra la figura 22) *da una parte prismatica* $A'B'C'D'$, *della quale sono date la larghezza inferiore* $A'D'$ *e la grossezza costante* AA_1 *rinforzata da due parti semi-cilindriche* EFG *ed* $E_1F_1G_1$, *e che sia capace di sopportare un peso assegnato da applicarsi al centro* O *della sua base inferiore. Si domanda di trovare il raggio delle due parti semi-cilindriche non che la curva direttrice delle due superficie cilindriche rappresentate sull'elevazione in* $B'A'$ *ed in* $C'D'$.

Siano:

$2a$ la larghezza $\overline{AD} = \overline{A'D'}$ e

s la grossezza $\overline{AA_1}$, date in metri;

r il raggio ossia la metà del diametro $\overline{GE} = \overline{G'E'}$ delle due parti semi-cilindriche, e

$2A$ la larghezza $\overline{BC} = \overline{B'C'}$ del solido al livello della sezione in cui trovasi fermato, anche in metri;

x ed y le coordinate $\overline{O'N'}$ e $\overline{N'M'}$ di un punto qualunque M' della curva $B'A'$ riferita ai due assi di coordinate $O'y$ ed $O'x$; e le lettere l, P, Π, R', π ed n' abbiano i significati che loro vennero rispettivamente attribuiti nel precedente problema.

Ragionando precisamente come nel problema precedente, osservando che ogni sezione perpendicolare all'asse del solido si compone di un intiero circolo di raggio r e di un rettangolo di lati $2y$ ed s, il primo dei quali per la sezione più bassa e per quella più alta diventa rispettivamente $2a$ e $2A$, e che la resistenza all'estensione sviluppantesi in una sezione qualunque $Q'M'$ è prodotta dal peso P, dal peso di un intiero cilindro circolare di raggio r e di altezza x e dal peso della parte rappresentata in $A'M'Q'D'$ in elevazione ed in $MM_1Q_1QAA_1D_1D$ in proiezione orizzontale, si trova: che il valore di r è dato da

$$r = \sqrt{\frac{1}{\pi}\left(\frac{P}{n'R'} - 2as\right)};$$

che l'equazione della curva BMA è

$$\Pi x = n'R' \log \frac{\pi r^2 + 2sy}{\pi r^2 + 2sa},$$

oppure

$$y = \left(\frac{\pi r^2}{2s} + a\right)e^{\frac{\Pi x}{n'R'}} - \frac{\pi r^2}{2s};$$

e che il valore di A si ha dall'equazione

$$A = \left(\frac{\pi r^2}{2s} + a\right)e^{\frac{\Pi l}{n'R'}} - \frac{\pi r^2}{2s}.$$

Nel caso in cui $\frac{\Pi l}{n'R'}$ è una frazione piccola, si possono svolgere in serie le quantità $e^{\frac{\Pi x}{n'R'}}$ ed $e^{\frac{\Pi l}{n'R'}}$ ed avere quindi delle espressioni di y e di A solamente approssimate ma di facile conteggio pratico.

27. **Procedimento elementare per determinare in modo approssimato un solido omogeneo di egual resistenza all'estensione con asse rettilineo verticalmente disposto.** — Considerando il caso semplice di un solido di sezione circolare (*fig.* 21), e mantenendo alle lettere l, P, Π, R, r, R' ed n' i significati che alle medesime già vennero attribuiti nella risoluzione del problema I del numero precedente, dividasi l'intiera lunghezza $\overline{AB}$ in parti $A\alpha', \alpha'\alpha'', \alpha''\alpha''', \ldots\ldots$ assai piccole ed eguali fra di loro; e si determini il raggio $\overline{AC} = r$ della base inferiore, la quale ha per superficie πr^2 (essendo π il noto rapporto 3,1415...... della circonferenza al diametro), dicendo che la forza P applicata al centro A di questa base deve essere inferiore a quella capace di produrre la

rottura, per modo che facendo $T'=P$ ed $\Omega=\pi r^2$ nell'equazione di stabilità che venne data al numero 18 si ha

$$P=n'R'\pi r^2$$

per equazione determinatrice di r, d'onde si ricava

$$r=\sqrt{\frac{P}{n'\pi R'}}.$$

Trovato il valore di $\overline{AC}=r$, si calcoli il raggio $\overline{\alpha'\beta'}=r'$ in modo che la resistenza all'estensione nella sezione $\beta'\gamma'$ sia capace di opporsi in modo stabile all'azione del peso P e del peso della parte di corpo $EC\beta'\gamma'$. Perciò, chiamando P' la somma del peso P e del peso $\Pi\pi r^2 h$ della parte di corpo $EC\beta'\gamma'$ che in via d'approssimazione si può considerare come cilindrica, e facendo nella già citata equazione di stabilità $T'=P'$ ed $\Omega=\pi r'^2$, si ottiene

$$P'=n'R'\pi r'^2,$$

dalla quale ottiensi

$$r'=\sqrt{\frac{P'}{n'\pi R'}}.$$

Ottenuto così il raggio $\overline{\alpha'\beta'}=r'$, si passi alla ricerca del raggio $\overline{\alpha''\beta''}=r''$ in modo che la resistenza all'estensione nella sezione $\beta''\gamma''$ sia capace di opporsi in modo stabile alla forza estrinseca P'' data dalla somma del peso P, del peso $\Pi\pi\frac{h}{3}(r^2+r'^2+rr')$ della parte di corpo $EC\beta'\gamma'$ considerata siccome un tronco di cono retto a basi circolari di raggi $\overline{AC}=r$ ed $\alpha'\beta'=r'$ e di altezza $\overline{A\alpha'}=h$, e del peso $\Pi\pi r'^2 h$ della parte di corpo $\gamma'\beta'\beta''\gamma''$ risguardata approssimativamente siccome un cilindro retto di raggio $\overline{\alpha'\beta'}=r'$ e di altezza $\overline{\alpha'\alpha''}=h$; e, fatto il valore di P'', si calcoli la lunghezza x'' da assegnarsi al raggio $\overline{\alpha''\beta''}$ col porre

$$r''=\sqrt{\frac{P''}{n'\pi R'}}.$$

Sommando il peso P col peso $\Pi\pi\frac{h}{3}(r^2+r'^2+rr')$ della parte di corpo $EC\beta'\gamma'$, col peso $\Pi\pi\frac{h}{3}(r'^2+r''^2+r'r'')$ della parte successiva $\gamma'\beta'\gamma''\beta''$ considerata siccome un tronco di cono retto a basi circolari di raggi $\overline{\alpha'\beta'}=r'$ ed $\overline{\alpha''\beta''}=r''$ e di altezza $\overline{\alpha'\alpha''}=h$ ed ancora col peso $\Pi\pi r''^2 h$ della parte di corpo $\gamma''\beta''\beta'''\gamma'''$ per approssimazione supposta cilindrica, si può fare un peso P''', dedurre quindi il valore di $\alpha'''\beta'''=r'''$ dato da

$$r'''=\sqrt{\frac{P'''}{n'\pi' R'}},$$

e così continuare colle stesso metodo a trovare quanti raggi si vogliono delle diverse sezioni orizzontali del solido per giungere sino a trovare il raggio $\overline{BD}=R$ della base maggiore F D il quale ha per valore

$$R=\sqrt{\frac{P^{(n)}}{n'\pi R'}}$$

essendo $P^{(n)}$ il peso P, più la somma dei pesi di tutte le parti di corpo $EC\beta'\gamma'$, $\gamma'\beta'\beta''\gamma''$, $\gamma''\beta''\beta'''\gamma'''$...... considerate siccome altrettanti tronchi di coni, e più ancora il peso della parte di corpo $\gamma^{(n)}\beta^{(n)}DF$ supposta cilindrica e di raggio $\alpha^{(n)}\beta^{(n)}$.

Evidentemente il metodo d'approssimazione che si è applicato per risolvere il problema I del precedente numero si può anche applicare a risolvere il problema II e quanti altri problemi analoghi si possono proporre sui solidi di egual resistenza all'estensione.

CAPITOLO III.

Resistenza alla compressione dei solidi ad asse rettilineo, essendo le forze estrinseche dirette secondo i loro assi.

28. **Fondamentali risultati d'esperienza sulla resistenza alla compressione dei solidi prismatici omogenei.** — Allorquando un solido prismatico omogeneo, lateralmente libero, viene assoggettato all'azione di una forza estrinseca applicata in modo da provocare in ogni punto di qualsiasi sua sezion retta un'uniforme resistenza

alla compressione, si verificano degli effetti differenti secondo la costituzione e la lunghezza del corpo. Sotto l'azione di pesi abbastanza grandi i quali agiscono su pezzi verticali piuttosto corti si verificano generalmente i seguenti fatti: che le pietre dure e compatte, prima di ridursi in polvere per schiacciamento, si dividono in lame verticali; che i prismi in ghisa si fendono sui bordi e tutto al lungo della superficie laterale; che le fibre longitudinali dei legni si disuniscono; che la compressione longitudinale è accompagnata da una dilatazione laterale; e che la divisione dei pezzi in frammenti deriva da spostamenti laterali di alcune loro parti relativamente ad alcune altre. Se poi la lunghezza dei prismi che si sottopongono all'azione di forze comprimenti è un po' considerevole per rapporto alle dimensioni delle loro sezioni rette, al principio della deformazione manifestasi ancora compressione accompagnata da laterale dilatazione; ma generalmente avvien tosto che l'asse dei solidi non si conserva più rettilineo, e succede l'inflessione la quale ben soventi più della compressione longitudinale e della dilatazione laterale è causa della disgiunzione delle parti.

Eaton Hodgkinson instituì delle utili esperienze sulla resistenza del ferro e della ghisa alla compressione, dalle quali si deduce analogamente a quanto si è detto per l'estensione: che sotto l'azione di forze comprimenti non capaci di produrre lo snervamento nei corpi esperimentati, gli accorciamenti sono direttamente proporzionali alle forze comprimenti ed alle lunghezze primitive dei prismi compressi, ed inversamente proporzionali alle superficie delle loro sezioni rette; che, oltrepassando le forze comprimenti quella capace di produrre lo snervamento, gli accorciamenti crescono secondo una legge sempre più rapida.

29. **Azione molecolare che si sviluppa nella sezion retta di un solido prismatico, omogeneo ed elastico sotto l'azione di una forza comprimente diretta secondo il suo asse; accorciamento proporzionale e coefficiente di elasticità longitudinale relativo alla compressione.** — Indicando rispettivamente con L e con Ω, come al numero 12, la lunghezza primitiva e la superficie della sezion retta del prisma compresso, e chiamando

l'' l'accorciamento che il prisma subisce sotto l'azione della forza comprimente T'',

E'' un numero costante dipendente dalla materia di cui il prisma è formato,

Q_2 la cercata azione molecolare la quale è eguale e direttamente contraria alla forza comprimente T'', con un ragionamento in tutto analogo a quello fatto al già citato numero 12, ed in seguito ai risultati delle esperienze di Hodgkinson pel caso in cui non si ha snervamento (num. 28), si può stabilire l'equazione fondamentale

$$l''=\frac{T''L}{E''\Omega},$$

e dedurre quindi le seguenti espressioni di Q_2

$$Q_2=T''=\frac{E''\Omega l''}{L} \qquad (1).$$

Il quoziente $\frac{l''}{L}$ dell'accorciamento totale subìto dal prisma alla sua lunghezza primitiva costituisce ciò che chiamasi *accorciamento proporzionale*, che verrà indicato colla lettera λ_2, e allora l'equazione (1) può essere scritta

$$Q_2=T''=E''\Omega\lambda_2 \qquad (2).$$

La quantità E'', che è indicata dall'equazione (2) siccome il quoziente della forza tendente $\frac{T''}{\Omega}$ riferita all'unità di superficie di sezion retta del prisma all'accorciamento proporzionale λ_2, è ciò che dicesi *coefficiente d'elasticità longitudinale relativo alla compressione* per la materia componente il prisma, ed astrattamente si può definire la forza che sarebbe capace di produrre in un prisma non snervato di sezione eguale all'unità un accorciamento proporzionale pure eguale all'unità.

Sul modo di esprimere le quantità L, l'', Ω, T'', Q_2 ed E'' valgono le osservazioni già state fatte relativamente al modo di esprimere L, l', Ω, T', Q_1 ed E' parlando dell'estensione.

Le equazioni (1) e (2) si devono ritenere come vere solamente finchè si verifica la proporzionalità delle forze comprimenti agli accorciamenti che esse producono; e non bisogna dedurre la conseguenza che, per trovarsi esse confermate dalle esperienze di Hodgkinson sul ferro e sulla ghisa, si possano applicare in modo sicuro a tutti gli altri materiali.

30. **Determinazione della resistenza allo snervamento per pressione e dell'accorciamento proporzionale corrispondente.** — Le esperienze sulla resistenza allo snervamento per pressione vanno instituite sopra corpi prismatici non molto alti affinchè non

s'inflettano; di questi prismi si misureranno accuratamente la superficie della sezion retta e la lunghezza prima di cimentarne la resistenza; coll'uso di apposite leve atte a produrre date pressioni ognor crescenti mediante l'applicazione di pesi noti, od anche coll'impiego di convenienti macchine valevoli a dare delle pressioni, che gradatamente vadano aumentando, mercè l'azione idrostatica di una colonna d'acqua, si comprimeranno uniformemente i detti prismi su una base, essendo immobile e ben appoggiata l'altra, finchè si osserva che gli accorciamenti cessano di essere proporzionali alle forze prementi; l'ultima pressione prodotta per cui ancora sensibilmente si verificava la proporzionalità degli accorciamenti alle forze prementi divisa per la superficie della sezion retta del solido rappresenta la *resistenza allo snervamento per pressione* riferita all'unità di superficie; e l'accorciamento verificatosi nel solido sotto l'azione dell'ultima detta pressione diviso per la lunghezza del solido stesso è l'accorciamento proporzionale corrispondente. Dividendo poi, come risulta dalla equazione (2) del numero precedente, la resistenza allo snervamento per pressione riferita all'unità di superficie per l'accorciamento proporzionale corrispondente si ha il modulo d'elasticità longitudinale relativo alla compressione.

Nel fare queste esperienze sulla compressione convien osservare, per rapporto alla misura degli accorciamenti, all'immobilità dei ritegni, al modo di applicare i pesi che fanno accrescere le pressioni ed alla direzione della forza premente, quanto si è detto al numero 13 parlando della resistenza allo snervamento per trazione, relativamente alla misura degli allungamenti, alla fermezza dei ritegni, al modo di far agire i pesi tendenti ed alla risultante delle forze destinate a produrre l'estensione. Se poi i pezzi che si esperimentano sono un po' lunghi, bisogna contenerli contro robuste guide, affinchè non succeda inflessione, avendo cura di ben ungerle per diminuire l'attrito e di batterle di tanto in tanto onde diminuire l'aderenza.

Le esperienze di Hodgkinson sul ferro e sulla ghisa hanno portato alle seguenti conclusioni:

1° Che la resistenza allo snervamento per pressione è nel ferro di buona qualità di 14 a 18 chilogrammi per millimetro quadrato, che il coefficiente d'elasticità longitudinale relativo alla compressione è un po' minore di quello relativo all'estensione, e che quello è dai 17/20 ai 4/5 di questo;

2° Che la resistenza allo snervamento per pressione varia nella ghisa da 12 a 15 chilogrammi per millimetro quadrato, e che il coefficiente d'elasticità longitudinale relativo alla compressione è solo di pochi centesimi inferiore a quello relativo alla compressione;

3° Che, tanto sul ferro quanto sulla ghisa, anche piccole pressioni danno luogo ad un accorciamento permanente, ma che questo non è che una piccola frazione dell'accorciamento totale;

4° Che, fino al punto in cui non ha luogo snervamento, per eguali pressioni su pezzi in ferro ed in ghisa di identiche dimensioni, quelli si accorciano assai meno di questi, la qual cosa si vede anche facilmente ricavando coll'equazione (2) del numero 29 i valori degli accorciamenti proporzionali dietro i dati valori delle resistenze allo snervamento e dei coefficienti di elasticità longitudinale relativi alla compressione.

Si può quasi dire che il ferro e la ghisa sono i soli materiali da costruzione per cui si conoscono le resistenze allo snervamento per pressione ed i relativi coefficienti di elasticità longitudinale, giacchè le poche esperienze che finora vennero instituite su altri materiali non hanno ancora portato a concludenti risultati.

31. **Condizione ed equazione di stabilità, dedotte dalla resistenza allo snervamento, per un solido prismatico omogeneo, elastico e che non può inflettersi sotto l'azione di una forza premente diretta secondo il suo asse.** — Essendo

T'' la forza premente il prisma e diretta secondo il suo asse,

Q'' la resistenza allo snervamento per pressione riferita all'unità di superficie della sezion retta del prisma stesso,

E'' il coefficiente di elasticità longitudinale relativo alla compressione,

Ω la superficie della sezion retta del prisma compresso,

m'' un coefficiente di stabilità il cui valore suolsi generalmente assumere non maggiore di 1/2, principalmente quando trattasi di corpi metallici,

λ'' l'accorciamento proporzionale corrispondente allo snervamento per pressione,

e ragionando precisamente come si è fatto al numero 14 parlando dell'estensione, si deduce che la condizione di stabilità è

$$T'' < Q''\Omega,$$

e quindi l'equazione di stabilità risulta

$$T'' = m''Q''\Omega,$$

o ancora, per essere $Q''=E''\lambda''$,

$$T''=m''E''\Omega\lambda''.$$

32. **Dato fondamentale d'esperienza sulla resistenza dei solidi prismatici ed omogenei alla rottura per pressione.** — Questo dato fondamentale è precisamente come quello che si è citato al numero 15 parlando della trazione, ed il suo enunciato è il seguente: nei corpi prismatici le resistenze alla rottura per pressione, le quali resistenze sono eguali alle forze estrinseche dirette secondo gli assi dei prismi, le quali stanno per immediatamente produrre la rottura, sono proporzionali alle superficie delle loro sezioni rette.

33. **Resistenza dei solidi prismatici ed omogenei alla rottura per pressione.** — Siano:

Ω la superficie della sezion retta del prisma pel quale vuolsi trovare la resistenza alla rottura per pressione;

R_2 la resistenza che il prisma oppone ad essere rotto per pressione, la qual resistenza è da ritenersi siccome equivalente ad una forza eguale e direttamente contraria alla forza permanente T'' sotto la quale la rottura sta per manifestarsi;

R'' un coefficiente costante dipendente dalla materia di cui il prisma è formato;

in virtù del fondamentale risultato d'esperienza di cui venne fatta citazione nel precedente numero, si ha l'equazione

$$R_2=T''=R''\Omega.$$

Il numero R'', che taluni chiamano *coefficiente di rottura per pressione*, siccome lo indica l'ultima equazione, non è altro che il quoziente $\frac{R_2}{\Omega}$, ossia la resistenza alla rottura per pressione riferita all'unità di superficie. Facendo poi in detta equazione $\Omega=1$, si deduce che R'' si può definire quella forza premente la quale è capace di produrre la rottura per pressione, oppure di cimentare la resistenza alla rottura per pressione, in un prisma di sezione eguale all'unità e formato della stessa materia di quello per cui si cerca la resistenza alla rottura.

34. **Determinazione della resistenza alla rottura per pressione nei corpi prismatici ed omogenei.** — Sottoponendo il corpo di cui vuolsi conoscere la resistenza alla rottura per pressione all'azione di una potente macchina la quale con intensità ognor crescente sia capace di produrre su una delle sue basi delle pres-

sioni note dirette secondo il suo asse senza che il corpo s'inflettа, ossia operando in modo analogo a quello brevemente indicato al numero 50 parlando della resistenza allo snervamento per pressione, finchè si trova la più piccola delle pressioni che è capace di produrre la rottura, e dividendo questa per la superficie primitiva della sezion retta del prisma esperimentato, si ottiene nel quoziente la resistenza alla rottura per pressione riferita all'unità di superficie. — Molte esperienze vennero fatte per determinare questa resistenza, ed immediatamente se ne riferiscono i principali risultati pei legnami, pel ferro, per la ghisa, per le pietre e per le malte.

Dalle esperienze di Rondelet, di Hodgkinson, di Rennie, di Gauthey e di Tredgold si deducono le seguenti conseguenze sulla resistenza dei legnami alla rottura per pressione:

1° Che, quasi analogamente a quanto si è detto sulla resistenza dei legnami alla rottura per trazione, anche la loro resistenza alla rottura per pressione varia coll'essenza, colla densità, colla provenienza, colla località in cui sono cresciuti, coll'età e persino coll'appartenere a questa o a quell'altra parte di un medesimo albero;

2° Che i legni secchi presentano maggior resistenza alla rottura per trazione di quelli meno secchi;

3° Che pei legnami allo stato ordinario di essiccamento, i quali possono essere impiegati nelle costruzioni, varia la detta resistenza da 1,5 a 6,5 chilogrammi per ogni millimetro quadrato allorquando sono essi compressi nel senso delle fibre, ed allorquando la loro altezza non eccede otto o dieci volte il loro spessore;

4° Che la quercia ed il larice rosso allo stato di essiccamento ordinario presentano presso a poco la medesima *resistenza allo schiacciamento*, ossia alla rottura per pressione, ma che la resistenza di questo non sembra aumentare coll'essiccamento, mentre, per contro, quella della quercia diventa più considerevole, ciò che nelle costruzioni permanenti ed in siti asciutti rende preferibile la quercia al larice;

5° Che la resistenza allo schiacciamento è generalmente maggiore quando si comprimono i pezzi di legno nel senso delle fibre anzichè in senso ad esse normale.

Per quanto concerne alla resistenza del ferro e della ghisa alla rottura per pressione, si possono stabilire i seguenti dati generali dedotti principalmente da esperienze di Rondelet e di Hodgkinson:

1° Che i pezzi prismatici in ferro compressi nel senso del loro asse, non trattenuti da apposite guide e non rinforzati da convenienti membri di consolidamento possono inflettersi allorquando la loro altezza supera il triplo della loro grossezza;

2° Che la resistenza alla rottura è mediamente nei pezzi in ferro i quali non possono inflettersi di 25 chilogrammi per ogni millimetro quadrato della loro sezion retta;

3° Che i pezzi prismatici di ghisa compressi nel senso del loro asse presentano presso a poco la medesima resistenza allo schiacciamento per unità di superficie finchè la loro altezza è compresa fra una volta e quattro o cinque volte la loro grossezza, ma che al di là di questa proporzione la resistenza diminuisce crescendo l'altezza;

4° Che la resistenza della ghisa alla rottura per pressione varia da 63 a 94,5 chilogrammi per ogni millimetro quadrato di sezion retta nei prismi con altezza non eccedente il quadruplo o tutto al più il quintuplo della loro grossezza, e che la resistenza della ghisa alla rottura per pressione è circa da 5 a 7 volte la sua resistenza alla rottura per trazione.

Per quanto concerne alla resistenza delle pietre e delle murature alla rottura per pressione, ecco quali sono i generali risultati che si deducono da esperienze di Rondelet, di Vicat e di alcuni altri sperimentatori:

1° Che le qualità fisiche delle pietre, come sono la durezza, la densità, il colore, non possono servire di sicuro indizio per giudicare della resistenza rispettiva;

2° Che in una medesima cava le pietre costituenti il cappellaccio, ossia le pietre provenienti dagli strati superiori, sono meno dense e meno resistenti di quelle che si tolgono dal mezzo;

3° Che, per una stessa qualità di pietre, presentano maggior resistenza quelle che hanno forma cubica, ma che le variazioni di resistenza sono piccole finchè l'altezza è minore di 12 volte la grossezza;

4° Che le pietre in generale si accorciano pochissimo sotto l'azione di forze prementi;

5° Che i sostegni in pietra composti di più pezzi sono meno resistenti de' sostegni di eguali dimensioni ed in un sol pezzo;

6° Che le resistenze delle pietre, dei laterizi e delle malte alla rottura per pressione variano fra limiti assai lontani, come chiaramente apparirà dalla tavola posta alla fine di questo numero;

7° Che l'azione di comprimere le terre nella fabbricazione dei laterizi notevolmente aumenta la loro resistenza;

8° Che è pure favorevole alla resistenza l'azione di battere i cementi;

9° Che le opere murali non presentano la massima resistenza alla rottura per pressione appena costrutte, ma sibbene dopo un tempo anche considerevole, ossia quando le malte hanno ben fatto presa e che hanno acquistata quella coesione che si può considerare come finale (num. 17);

10° Che la resistenza alla rottura per pressione è generalmente nelle pietre e nei cementi assai maggiore della loro resistenza alla rottura per trazione.

Nell'intento di completare quanto in modo generale si è detto sulla resistenza alla compressione, si aggiunge un quadro numerico, nel quale pei principali materiali impiegati nelle costruzioni trovansi registrati i pesi medii in chilogrammi del loro decimetro cubo, e le resistenze alla rottura pure in chilogrammi riferite al millimetro quadrato della sezion retta dei corpi prismatici, sui quali vennero instituite le esperienze: i dati di questo quadro non si devono ritenere come assoluti, ma solamente come numeri medii, a cui il costruttore può affidarsi tuttavolta che non è il caso di istituire delle esperienze dirette sui materiali che deve impiegare.

INDICAZIONE DEI CORPI	Peso del decimetro cubo	Resistenza alla rottura per pressione riferita al millimetro quadr°
Legnami		
	Cg	Cg
Abete bianco	0,50	1,50
Abete giallo	0,67	2,25
Betulla	0,70	2,50
Cedro	0,60	3,99
Faggio	0,85	5,43
Frassino	0,75	6,10
Larice rosso	0,70	4,50
Olmo	0,73	2,00
Ontano	0,60	4,00
Pino silvestre	0,58	1,90
Pioppo	0,40	1,70
Pomo selvatico	0,75	4,56
Prugno		2,57
Pruno		5,79
Quercia allo stato d'essiccamento ordinario	0,85	4,25
Quercia assai secca		6,50
Metalli		
Ferro	7,77	25,00
Ghisa grigia	7,20	70,00
Ghisa bianca	7,50	94,00

INDICAZIONE DEI CORPI	PESO del decimetro cubo	RESISTENZA alla rottura per pressione riferita al millimetro quadr°
PIETRE NATURALI		
	Cg Cg	Cg Cg
Calcari teneri.	1,40 a 2,20	0,60 a 1,30
Calcari mezzani	2,20 2,60	1,30 3,00
Calcari duri	2,60 2,90	3,00 5,00
Marmo di Candoglia sul Lago maggiore . . .	2,70	3,00
Marmo bianco di Carrara	2,71	3,20
Marmo nero di Varenna sul Lago di Como . .	2,72	3,40
Marmo di Genova	2,70	3,60
Marmo turchino di Genova	2,71	6,00
Marmo bianco venato presso Carrara	2,72	6,50
Pietre silicee tenere.	1,40 a 2,20	0,04 a 0,90
Pietre silicee mezzane	2,20 2,60	0,90 4,20
Pietre silicee dure	2,60 2,90	4,20 8,00
Granito bigio di Montorfano sul Lago maggiore, e di Alzo sul Lago d'Orta	2,66	6,80
Granito rosso di Baveno.	2,60	6,90
Granito della Riva di Chiavenna sul Lago di Como	2,62	7,90
Granito della Balma presso Biella.	2,75	8,00
Puddinga, o ceppo di Brambate sull'Adda . . .	2,22	1,00
Pietra arenaria di Viganò	2,21	1,40
Pietra da Viggiù	2,23	1,50
Ceppo gentile, o puddinga a grana fina nel Milanese.	2,30	2,50
Beola sul Lago maggiore.	2,61	5,10
Pietra argillosa di Firenze	2,56	4,20
Pietre vulcaniche tenere	0,60 a 2,20	0,34 a 2,30
Pietre vulcaniche mezzane	2,20 2,60	2,30 5,90
Pietre vulcaniche dure	2,60 2,95	5,90 20,00
Pietra pomice	0,60	0,34
Tufo di Roma	1,22	0,57
Lava tenera di Napoli	1,72	1,60
Lava grigia di Roma (*peperino*)	1,97	2,28
Lava di Napoli (*piperno*)	2,61	5,92
Basalti	2,95	20,00
MATTONI		
Mattoni crudi		0,33
Mattoni poco cotti (*albasi*)	2,09	0,40
Mattoni cotti a giusto grado (*mezzanelli*) . . .	2,17	0,60
Mattoni il cui grado di cottura oltrepassa di un poco il giusto grado (*forti*)	2,10	0,70
Mattoni troppo cotti (*ferrioli*)	1,56	1,50
MALTE E CEMENTI		
Malta comune di calce grassa e sabbia che da poco ha fatto presa	1,70	0,19
Malta di calce mediamente idraulica e sabbia che da poco ha fatto presa	»	0,74
Malta di calce eminentemente idraulica e sabbia che da poco ha fatto presa	»	1,44

INDICAZIONE DEI CORPI	Peso del decimetro cubo	Resistenza alla rottura per pressione riferita al millimetro quadr°
Malte e Cementi		
Malta in parti eguali di cemento di Vassy e sabbia dopo 15 giorni d'indurimento	Cg 1,65	Cg 1,36
Malta di calce grassa e sabbia dopo 18 mesi d'indurimento	1,63	0,30
La stessa malta, ma battuta	1,89	0,41
Malta di calce grassa e coccio dopo 18 mesi d'indurimento	1,46	0,47
La stessa malta, ma battuta.	1,66	0,65
Malta di calce grassa e di pozzolana di Roma o di Napoli, dopo 18 mesi d'indurimento	1,46	0,37
Gesso impastato con acqua	1,57	0,50
Gesso impastato con latte di calce.		0,72
Gesso impastato duro.	1,40	0,90
Calcestruzzo fatto con buona malta idraulica dopo 18 mesi d'indurimento	2,20	0,48

L'ispettore del Genio civile ingegnere Carlo Noè, direttore generale tecnico dei lavori del Canale Cavour, per mezzo degli ingegneri Giovanni Pastore e Cesare Thovez applicati all'Ufficio di direzione di detti lavori, fece instituire apposite esperienze sulla resistenza alla rottura per pressione dei mattoni di diversa provenienza che vennero poi impiegati nell'eseguire la grandiosa impresa, ed i risultati di queste esperienze trovansi mediamente riassunti nella seguente tavola, in cui le resistenze, come al solito, trovansi riferite al millimetro quadrato.

PROVENIENZA DEI MATTONI	QUALITA' DEI MATTONI	Resistenza alla rottura per pressione
		Cg
Fornaci della cascina Arizza presso Chivasso	Mattoni mezzanelli	0,76
	Mattoni forti	1,00
	Mattoni mezzanelli per vôlti .	0,76
	Mattoni forti per vôlti. . .	1,14
Fornaci di Castelrosso nel territorio di Chivasso	Mattoni per vôlti	1,52

PROVENIENZA DEI MATTONI	QUALITA' DEI MATTONI	Resistenza alla rottura per pressione
		Cg
Fornaci della Torrazza	Mattoni mezzanelli	0,96
	Mattoni forti	1,18
	Mattoni quasi ferrioli . . .	1,41
	Mattoni mezzanelli per vôlti.	1,43
	Mattoni forti per vôlti. . .	2,00
Fornaci di San Giacomo.	Mattoni per vôlti	1,44
Fornaci di Lamporo	Mattoni per vôlti	1,54
Fornaci di San Giovanni in territorio di Tronzano.	Mattoni mezzanelli	0,59
	Mattoni forti	0,65
	Mattoni ferrioli	1,33
Fornaci della cascina del Cavallo in territorio di Tronzano	Mattoni mezzanelli	0,48
	Mattoni forti	0,62
	Mattoni ferrioli	1,50
Fornaci di Vettignè in territorio di Santhià	Mattoni mezzanelli	0,89
	Mattoni forti	1,12
Fornaci della Mirabella in territorio di Casanova	Mattoni mezzanelli	1,11
	Mattoni forti	1,59
	Mattoni ferrioli	1,91
Fornaci di Villarboit	Mattoni forti	0,99
Fornaci della cascina Cerotta in territorio di Biandrate	Mattoni mezzanelli	0,79
	Mattoni forti	0,90
Fornaci di Camiano in territorio di Novara	Mattoni mezzanelli	0,71
	Mattoni forti	1,07
Fornaci del Terdoppio in territorio di Novara	Mattoni mezzanelli	0,66
	Mattoni forti	0,80

35. **Resistenza alla rottura per pressione nei corpi prismatici ed omogenei allorquando, a motivo della loro altezza, sono soggetti ad inflettersi.** — Parlando della flessione si tratterà l'argomento della resistenza dei prismi che, per la considerevole loro altezza, sono soggetti ad inflettersi prima di rompersi sotto l'azione di una data forza premente diretta secondo i loro assi. Intanto, paghi di risolvere il problema con sufficiente approssimazione pei casi ordinarii della pratica, si daranno dei coefficienti di riduzione confermati utili dall'esperienza, pei quali bisognerà dividere le

resistenze corrispondenti all'ipotesi della rottura non preceduta da flessione, delle quali resistenze per parecchi materiali si riportarono i valori nel precedente numero, onde avere le resistenze convenienti ai diversi casi in cui può esservi flessione prima della rottura.

L'idea dei coefficienti di riduzione è dovuta al Rondelet, e nella tavola che segue sono riportati quelli che da molti pratici vengono adottati pei sostegni in legno, in ferro ed in ghisa.

LEGNAMI		FERRO		GHISA	
Rapporto dell'altezza alla grossezza	Coefficiente di riduzione	Rapporto dell'altezza alla grossezza	Coefficiente di riduzione	Rapporto dell'altezza alla grossezza	Coefficiente di riduzione
10	1	3	1	5	1
15	1,2	12	1,2	12	1,2
20	1,5	24	2	24	2
25	1,9	36	3	36	3
30	2,4	48	6	48	6
35	3,1	60	12	60	12
40	4				
45	5				
50	6,8				
60	12				

L'uso della precedente tavola è della massima semplicità. Trattandosi, per esempio, di trovare la resistenza alla rottura per pressione di una spranga prismatica in ferro a sezione retta rettangolare coll'altezza eguale a 36 volte il lato minore della sua base, si va a cercare nella tavola numerica del numero 34 la resistenza del ferro allo schiacciamento e si trova 25 chilogrammi per millimetro quadrato; nella tavola dei coefficienti di riduzione pel ferro e pel rapporto dell'altezza alla grossezza eguale a 36 si cerca il coefficiente di riduzione corrispondente che è 3; si divide la resistenza espressa da 25 chilogrammi pel coefficiente 3 e si trova che chilogrammi 8,33 esprimono approssimativamente la resistenza alla rottura per pressione della spranga proposta.

Quando il rapporto dell'altezza alla grossezza del prisma di cui vuolsi valutare la resistenza non è uno di quelli contenuti nella tavola, si può trovare il coefficiente di riduzione, che va abbastanza bene pel rapporto proposto, col metodo delle parti proporzionali. Così, trattandosi di un prisma in ferro per cui l'altezza è 19 volte la grossezza, si osserva che il rapporto 19 sta fra i rapporti della tavola

12 e 24, che 19 supera 12 di 7 unità, che 12 e 24 differiscono di 12 unità e che i coefficienti di riduzione 1,2 e 2 corrispondenti ai rapporti della tavola 12 e 24 presentano la differenza 0,8; e si deduce la quantità x, di cui si deve aumentare il coefficiente 1,2 corrispondente al rapporto 12 per avere il coefficiente che corrisponde al rapporto 20, col porre

$$x = \frac{0,8 \times 7}{12} = 0,47,$$

per modo che il coefficiente di riduzione domandato sarà

$$1,2 + 0,47 = 1,67.$$

Per quanto concerne ai sostegni in pietra si ritengono le resistenze date nella tavola del precedente numero finchè l'altezza non è maggiore di 12 volte la grossezza.

36. Formole empiriche di Hodgkinson per trovare la resistenza alla rottura per pressione nei sostegni prismatici in legno ed in ghisa. — Eaton Hodgkinson ha dato delle formole empiriche per calcolare la resistenza alla rottura per pressione delle colonne in legno a sezione quadrata ed a sezione rettangolare, partendo dall'ipotesi che detta resistenza sia proporzionale alla quarta potenza del lato della sezione quadrata ed inversamente proporzionale al quadrato dell'altezza nelle colonne a base quadrata, e che invece nelle colonne a sezione rettangolare sia proporzionale al prodotto del lato maggiore pel cubo del lato minore della sezione rettangolare ed inversamente proporzionale al quadrato dell'altezza. Chiamando pertanto

a il lato della sezion retta di una colonna a base quadrata;

b il lato maggiore della sezion retta di una colonna a base rettangolare,

c il lato minore,

h l'altezza della colonna,

R_2 la resistenza alla rottura per pressione,

α un coefficiente numerico variabile colla qualità del legname costituente la colonna,

ha posto le formole:

$$R_2 = \alpha \frac{a^4}{h^2}$$

per le colonne a sezione quadrata,

$$R_2 = \alpha \frac{bc^3}{h^2}$$

per le colonne a sezione rettangolare.

Instituendo poi delle esperienze sopra colonne di dimensioni note venne a dedurre α in seguito alla conoscenza di a, b, c, h ed R_2.

Supponendo i lati a, b e c espressi in centimetri, l'altezza h in decimetri e la resistenza R_2 in chilogrammi, si può ritenere che i valori di α pei legnami che più di frequente si impiegano nelle costruzioni per fare delle colonne siano i seguenti:

Per la quercia forte . . . . . . $\alpha = 2565$
Per la quercia debole. . . . . $\alpha = 1800$
Pel larice rosso e pel pino resinoso $\alpha = 2142$
Per l'abete bianco e pel pino giallo $\alpha = 1600$.

Le esperienze che Hodgkinson ha instituito sulla resistenza alla rottura per pressione dei sostegni in ghisa sono molto più numerose di quelle che lo stesso esperimentatore fece sui sostegni in legno ed ha da esse desunte delle formole empiriche, le quali con sufficiente esattezza rappresentano l'assieme dei risultati ottenuti pei sostegni a sezioni circolari, piene e vuote, in cui l'altezza è compresa fra 25 e 120 volte il diametro. Queste formole, ridotte per servire alla sostituzione di misure metriche e chiamando

d il diametro di una colonna piena espresso in centimetri,

d' e d'' i diametri esterno ed interno di una colonna vuota pure espressi in centimetri,

h l'altezza della colonna data in decimetri,

R_2 la resistenza alla rottura per pressione espressa in chilogrammi ed

α un coefficiente numerico,

sono: per le colonne piene

$$R_2 = \alpha \frac{d^{3,6}}{h^{1,7}};$$

per le colonne vuote

$$R_2 = \alpha \frac{d'^{3,6} - d''^{3,6}}{h^{1,7}}.$$

Hodgkinson ha adottato un coefficiente numerico diverso nei due casi delle colonne piene e delle colonne vuote; la differenza però è assai debole e, ad imitazione di quanto già fece il Morin nell'uno e nell'altro caso, si può assumere il coefficiente $\alpha = 10676$.

Trovato il valore di R_2 si trova quello di R'', ossia la resistenza alla rottura per pressione riferita all'unità di superficie, facendo il quoziente $\frac{R_2}{\Omega}$, essendo Ω la superficie della sezion retta del sostegno.

37. **Formole empiriche di Love per trovare la resistenza alla rottura per pressione nei sostegni cilindrici in ferro ed in ghisa.** — L'ingegnere Love, in una sua memoria sulla resistenza del ferro e della ghisa, ha proposto delle formole di facile maneggio nel calcolo della resistenza alla rottura per pressione pei sostegni cilindrici a sezione piena in ferro ed in ghisa, e le quali con sufficiente esattezza per la pratica rappresentano i risultati delle esperienze di Hodgkinson, allorquando vengono applicate per sostegni in ghisa di buona qualità, ossia a grana fina, poco carburata ed omogena nella frattura. Chiamando

d il diametro del sostegno espresso in centimetri,

h la sua altezza anche in centimetri, ed

R_2 la resistenza alla rottura per pressione espressa in chilogrammi,

le formole di Love si riducono: pel ferro a

$$R_2 = \frac{2500\, d^4}{1,973\, d^2 + 0,00064\, h^2} \qquad (1);$$

per la ghisa a

$$R_2 = \frac{7500\, d^4}{1,846\, d^2 + 0,0043\, h^2} \qquad (2).$$

Conosciuto il valore di R_2 si deduce quello di R'', ossia la resistenza alla rottura per pressione riferita all'unità di superficie, procedendo come si è indicato nel precedente numero.

38. **Influenza del numero dei pezzi sulla resistenza dei prismi in pietra alla rottura per pressione.** — Rondelet, avendo sovrapposti tre cubi di 5 centimetri di lato, ha trovato che la resistenza era ridotta ai 2/3 circa di quella che presentava ciascuno dei cubi; ma Vicat attribuisce la maggior parte della diminuzione di resistenza osservata da Rondelet all'influenza dell'imperfetto pareggiamento delle superficie di giunto ed alla mancanza di malta, la quale

avrebbe di molto fatto sparire l'inconveniente rimarcato dal celebre costruttore, ed in appoggio della sua opinione cita diverse esperienze fatte su prismi di gesso, pei quali ha trovato che, essendo rappresentata dall'unità la resistenza di un prisma monolite di altezza h, quelle dei prismi composti di più pezzi sovrapposti secondo facce piane normali agli assi dei prismi medesimi erano:

0,930 per due pezzi con un'altezza totale h;
0,861 per quattro pezzi con un'altezza totale $2h$;
0,834 per otto pezzi con un'altezza totale $4h$.

In seguito di questi risultati ha dedotto Vicat che la suddivisione di un sostegno in istrati, ciascuno dei quali sia monolite, non debba sensibilmente diminuire la sua resistenza alla rottura per pressione quando le superficie d'appoggio siano ben apparecchiate e quando siavi interposizione di malta per correggere i piccoli difetti di taglio; ma contemporaneamente ha fatto osservare non essere così la cosa quando, essendo verticale la forza premente, i diversi pezzi presentano delle superficie di giunto verticali invece di presentare delle superficie di giunto orizzontali.

39. **Resistenza dei corpi cilindrici impiegati come rulli alla rottura per pressione.** — Poche ed incerte esperienze vennero finora instituite sulle resistenze dei corpi cilindrici impiegati come rulli e premuti fra due piani orizzontali. Vicat in seguito ad alcune sue ricerche ha dedotto che queste resistenze sono proporzionali ai prodotti degli assi dei cilindri pei diametri, d'onde deriva: che nei cilindri simili stanno esse resistenze come i quadrati dei diametri; che nei cilindri aventi assi eguali stanno come i diametri; e che nei cilindri dello stesso diametro stanno come gli assi.

Indicando poi con R_2 la resistenza allo schiacciamento per un cubo compresso normalmente e nel mezzo di una sua faccia, pare che sia espressa da $0,316\ R_2$ la resistenza del cilindro della stessa sostanza inscritto a questo cubo ed impiegato come rullo.

40. **Condizione ed equazione di stabilità, dedotte dalla resistenza alla rottura, per un solido prismatico ed omogeneo sottoposto all'azione di una forza premente diretta secondo il suo asse.** — Chiamando

T'' la forza premente il prisma e diretta secondo il suo asse,

R'' la resistenza alla rottura per pressione riferita all'unità di superficie della sezion retta del prisma stesso,

Ω la superficie di detta sezion retta, e

n'' un coefficiente di stabilità,

siccome per la stabilità la forza T'' non deve produrre la rottura, ossia non deve vincere la resistenza $R'' \Omega$, si avrà

$$T'' < R'' \Omega$$

per condizione di stabilità, e

$$T'' = n'' R'' \Omega$$

per equazione di stabilità.

Il valore del coefficiente di stabilità n'' suolsi generalmente assumere: 1/10 pei legnami, per le pietre e per le murature fatte con grossi pezzi e con pezzi di forma regolare; 1/6, e qualche volta anche 1/4, pei metalli; 1/15, ed anche 1/20, per le murature formate con pezzi irregolari e con pezzi piccoli.

Evidentemente la quantità che ai numeri 36 e 37 si è indicata con R_2 rappresenta la resistenza di un prisma alla rottura per pressione riferita all'intiera superficie della sezion retta, e quindi si ha la relazione

$$R_2 = R'' \Omega.$$

41. **Uso delle equazioni di stabilità relative alla compressione.** — Le equazioni di stabilità che vennero dedotte ai numeri 31 e 40 parlando della resistenza alla compressione, analogamente a quelle che vennero date ai numeri 14 e 18 trattando l'argomento della resistenza all'estensione, si prestano principalmente alla risoluzione dei due seguenti problemi pratici:

1° *Trovare a qual forza premente* T'' *si può assoggettare un corpo prismatico ed omogeneo del quale si conosce la superficie* Ω *della sezion retta;*

2° *Trovare la superficie* Ω *della sezion retta da assegnarsi ad un corpo prismatico omogeneo che deve andar sottoposto ad una data forza premente* T''.

Le equazioni di stabilità che vennero date al numero 31 servirebbero rispettivamente pei casi in cui si conoscessero la resistenza allo snervamento per pressione ed il coefficiente d'elasticità E'' unitamente all'allungamento proporzionale λ'', mentre quella data nel precedente numero conviene pel caso in cui si conosce la resistenza alla rottura per pressione.

42. **Applicazione delle equazioni di stabilità relative alla compressione al caso dei corpi non prismatici, ma ad asse rettilineo.** — Vale in questo caso un'osservazione in tutto analoga

a quella che venne fatta al numero 20 parlando dell'estensione; e nell'applicare la prima delle equazioni di stabilità che vennero date al numero 31 oppure quella che si è stabilita al numero 40, si porrà per Ω la superficie della *sezione pericolosa*, la quale superficie è: quella della più piccola sezion normale all'asse del solido compresso quando è questo omogeneo; quella per rapporto alla quale ha valor massimo nell'estensione del corpo il coefficiente di stabilità, ossia il quoziente della forza premente per la resistenza allo snervamento o alla rottura per pressione ad essa corrispondente (num. 31 e 40) quando queste resistenze variano da una sezione all'altra.

Hodgkinson poi dalle esperienze che ha instituito sopra colonne in ghisa venne a conchiudere: che nelle colonne a dimensioni eguali la resistenza alla rottura per pressione è pressochè tre volte maggiore quando le estremità sono piatte e perpendicolari all'asse che allorquando sono arrotondate; che il rigonfiamento, ovvero l'aumento di diametro delle colonne verso il mezzo della loro lunghezza le rende un po' più resistenti di quello che sarebbero qualora avessero sezione costante ed eguale a quella che effettivamente hanno dove questo rigonfiamento non esiste; e che questo accrescimento di resistenza giunge da 1/7 ad 1/8.

43. **Applicazione delle equazioni di stabilità relative alla compressione al caso dei corpi ad asse rettilineo verticalmente disposto, tenendo anche conto dei loro pesi**. — Salvo il caso che il solido proposto sia di egual resistenza alla pressione (la qual circostanza per ora si esclude), se oltre dell'azione della forza premente vuolsi anche tener conto del peso del corpo stesso, evidentemente la resistenza alla pressione riferita all'unità di superficie varia da una sezione all'altra; e, per convenientemente applicare al caso di corpi omogenei o la prima delle equazioni di stabilità che vennero date al numero 31 oppure quella che si è data al numero 40, bisogna mettere in esse quel valore particolare di Ω che corrisponde a quella sezione in cui la resistenza provocata dalle forze estrinseche riferita all'unità di superficie ha il più gran valore possibile nell'estensione del corpo. In quanto poi alla resistenza riferita all'unità di superficie in una sezione qualunque è essa equivalente al quoziente della forza premente aumentata dal peso della parte di corpo che sta fra la sua base superiore e la sezione che si considera per la superficie di questa sezione. — Se poi il solido è tale da cangiare passando da una sezione all'altra le resistenze allo snervamento ed alla rottura, il sito in cui vi è maggior peri-

colo di snervamento e di rottura, ossia la *sezione pericolosa*, si determina cercando quella per rapporto alla quale è massimo il valore del coefficiente di stabilità, ossia il quoziente della forza premente per la resistenza allo snervamento od alla rottura per pressione che ad essa corrisponde.

44. **Applicazione della teoria sulla resistenza alla compressione nella risoluzione di alcuni semplici problemi.**

I. *Trovare qual è il carico che si può far sopportare ad una colonna piena in ghisa del diametro di metri* 0,10 *e dell'altezza di* 6 *metri affinchè, agendo il peso nel senso dell'asse della colonna, abbia essa la necessaria stabilità.*

Mediante la formola di Love, conveniente al caso delle colonne in ghisa (num. 37), si calcola la resistenza R_2 alla rottura per pressione ponendo in essa $d=10$ ed $h=600$, e dall'applicazione di questa formola risulta

$$R_2=\frac{7500\,(10)^4}{1{,}846\,(10)^2+0{,}0043\,(600)^2}=43287^{\mathrm{Cg}}.$$

Ricorrendo ora all'equazione di stabilità del numero 40, assumendo $n''=\frac{1}{6}$ e non dimenticando che $R_2=R''\,\Omega$, si trova che il peso T'' del quale si può caricare con sicurezza la colonna è

$$T''=\frac{1}{6}\,43287=7214^{\mathrm{Cg}},$$

cosicchè si può con sicurezza comprimere la colonna proposta con una forza di 7214 chilogrammi diretta nel senso dell'asse della colonna stessa.

II. *Trovare fino a qual altezza si può elevare un pilastro di granito rosso di Baveno avente per sezion retta un quadrato di* 2 *metri di lato, affinchè presenti la necessaria stabilità sotto l'azione del proprio peso e di un peso di* 40000 *chilogrammi applicato al centro della sua base superiore.*

Si chiami x la domandata altezza, e nella tavola che venne data al numero 34 si cerchi il peso del decimetro cubo di granito rosso di Baveno che trovasi di chilogrammi 2,60, non che la sua resistenza alla rottura per pressione che è di chilogrammi 6,90 per millimetro quadrato. Si osservi ora che per effetto delle forze prementi deve il pilastro sviluppare sulla sua base inferiore la maggior resistenza compatibile colla stabilità riferita all'unità di superficie, e che per conseguenza il valore della quantità T″ che trovasi nell'equazione di stabilità del numero 40 vale 40000 chilogrammi più il peso dell'intiero pilastro, il qual peso, espresso in chilogrammi, è dato da

$$2,60 \times 20.20\, x = 1040\, x,$$

dove x esprime decimetri.

Assumendo ora 1/10 per coefficiente di stabilità, e prendendo per unità di superficie della base del pilastro il decimetro quadrato, si avrà che le quantità Ω ed R″ da porsi nella citata equazione di stabilità devono essere rispettivamente 400 decimetri quadrati e 69000 chilogrammi, per modo che questa equazione diventerà

$$40000 + 1040\, x = \frac{1}{10}\, 69000 \times 400$$

d'onde si ricava

$$x = 2615^{\text{dm}},38,$$

ossia il pilastro può essere elevato fino all'altezza di decimetri 2615,38, ossia all'altezza di metri 261,538, se pur non vi è pericolo alcuno d'inflessione o di rovesciamento.

III. *Trovare quanti rulli in ghisa del diametro di metri* 0,10 *e della lunghezza di metri* 0,30 *si devono porre fra due piastre orizzontali ben resistenti, affinchè siavi la necessaria stabilità essendo fissa la piastra inferiore e caricata nel mezzo dal peso di* 300000 *chilogrammi la piastra superiore.*

Incomincio dal considerare un cubo di ghisa di cui una faccia sia circoscritta alla sezion retta di un rullo, il qual cubo avrà evidentemente per spigolo metri 0,10; cerco per questo cubo la resistenza R_2 alla rottura per pressione quando venga premuto normalmente ad una faccia e nel senso dell'asse; deduco la resistenza di un rullo equilatero lungo come il cubo, ossia lungo metri 0,10, la qual resistenza, per quanto si è detto al numero 39, può essere fissata di 0,316 R_2; trovo dopo la resistenza di un rullo intiero lungo metri 0,3 che, per essere le resistenze dei cilindri dello stesso diametro proporzionali agli assi, sarà data da $\frac{0,3}{0,1}$ $0,316\,R_2 = 0,948\,R_2$; e finalmente, chiamando x il cercato numero di rulli, pongo l'equazione

$$300000 = \frac{1}{6}\,0,948\,R_2 x,$$

la quale esprime che la forza premente di 300000 chilogrammi è, per la stabilità, 1/6 della resistenza $0,948\,R_2 x$ che presentano tutti i rulli alla rottura per pressione. Osservando ora che, nel caso in quistione, R_2 è la resistenza alla rottura per pressione corrispondente ad un cubo di spigolo metri 0,1 e rammentando che per la ghisa la resistenza alla rottura per pressione (numero 34) può essere fissata di 70 chilogrammi per millimetro quadrato, si avrà $R_2 = 700000^{Cg}$, giacchè la base del cubo ha 1 decimetro quadrato di superficie, e l'equazione di stabilità, diventerà

$$3 = 1,106\,x$$

d'onde

$$x = \frac{3}{1,106},$$

ossia saranno necessarii tre rulli, giacchè il quoziente che dà il valore di x è compreso fra 2 e 3.

45. **Determinazione delle dimensioni della sezion retta delle colonne vuote.** — Innanzi tutto bisogna osservare che lo spessore il quale si può assegnare alle colonne vuote in ghisa ammette un limite inferiore determinato dalla pratica dell'arte del fonditore ed indipendente dalle condizioni di resistenza. Questo limite dipende in parte dalla natura delle ghise che sono più o meno fluide, ma principalmente dalla lunghezza dei pezzi che voglionsi ottenere, ed il Morin dice potersi fissare come segue il detto limite:

12	millimetri per le colonne alte da	2 a 3	metri;
15	» »	» 3 a 4	»
20	» »	» 4 a 6	»
25	» »	» 6 a 8	»

Stabiliti così gli spessori minimi che si devono dare alle colonne vuote in ghisa, ecco come si può procedere nel determinare il diametro interno d'' della sezion retta di una di esse quando si conoscono la forza comprimente T″, l'altezza h, non che il diametro esterno d', il quale è generalmente determinato dalle proporzioni che il gusto stesso suggerisce. Coll'applicazione della formola (2) di Love (num. 37), si calcoli la resistenza R'_2 alla rottura per pressione di una colonna piena dell'altezza e del diametro della proposta, e si faccia il prodotto $n'' R'_2$ di essa resistenza pel coefficiente di stabilità $n'' = \frac{1}{6}$ onde avere quella resistenza che si può provocare nella colonna senza compromettere la stabilità. Egli è evidente che, chiamando R''_2 la resistenza che senza porre a repentaglio la stabilità si potrebbe cimentare in una colonna piena della medesima altezza h e di diametro d'', si dovrà avere

$$R''_2 = n'' R'_2 - T'';$$

e conoscendosi così R''_2 dicasi che deve eguagliare la resistenza alla rottura per pressione, espressa dal secondo membro della già citata equazione di Love, moltiplicata pel coefficiente di stabilità 1/6 ed allora si avrà la seguente equazione determinatrice di d''

$$R''_2 = \frac{1250\, d''^4}{1{,}846\, d''^2 + 0{,}0043 h^2},$$

dalla quale si deduce

$$d''^4 - \frac{1{,}846\, R''_2}{1250} d''^2 - \frac{0{,}0043\, h^2 R''_2}{1250} = o,$$

quindi

$$d'' = -\sqrt{\frac{1{,}846}{2500} R''_2 + \sqrt{\left(\frac{1{,}846}{2500} R''_2\right)^2 + \frac{0{,}0043 h^2 R''_2}{1250}}}.$$

Una volta trovato il valore di d'' si verifica se la differenza $d' - d''$ fra il diametro esterno ed il diametro interno è maggiore, eguale o minore del doppio dello spessore limite conveniente all'altezza della colonna proposta; nei primi due casi si ritiene per buono il diametro interno trovato; nel terzo caso o si tiene per diametro interno la differenza fra il diametro esterno ed il doppio spessore rinunciando alla condizione della maggior economia possibile di metallo impiegato, oppure si assume più piccolo il diametro esterno e si ricomincia il calcolo della determinazione di quello interno.

Il problema si può anche risolvere impiegando l'ultima delle formole di Hodgkinson che vennero date al numero 36, dicendo che il secondo membro di detta formola, il quale rappresenta il prodotto $R''\,\Omega$ dell'equazione di stabilità del numero 40, moltiplicato per il coefficiente di stabilità $n''=\frac{1}{6}$ deve eguagliare la forza premente T''.

46. Determinazione della grossezza da assegnarsi alle pareti dei cilindri che tendono a rompersi per schiacciamento a motivo di una pressione uniforme che su essi si esercita. — Questa circostanza ha luogo allorquando avviene di dover considerare un tubo o un vaso cilindrico che trovasi sotto l'azione di due date pressioni costanti, interna l'una ed esterna l'altra, essendo questa maggiore di quella.

Ritenendo le denominazioni che già vennero stabilite pella risoluzione del problema I del numero 23 per quanto concerne al diametro interno ed allo spessore della parete del vaso, alle pressioni interna ed esterna, ed alla pressione effettiva che sarà in questo caso la differenza $p''-p'$ fra la pressione esterna ed interna; chiamando R'' la resistenza alla rottura per pressione della sostanza di cui il recipiente è formato, ed n'' il coefficiente di stabilità; e ragionando in modo tutto analogo a quello tenuto nel già citato problema, si troverà che la formola determinatrice di s non è altro che l'equazione (3) del numero 23 quando in essa si cangino i segni a p' ed a p'', e che si ponga $n''R''$ invece di $n'R'$, per modo che si avrà

$$s=\frac{1}{2}\frac{(p''-p')\,D}{n''R''-p''},$$

ossia rammentando che $p''-p'=p$,

$$s=\frac{1}{2}\frac{p\,D}{n''R''-p''},$$

la quale, nel caso in cui le pressioni p e p'' siano date in atmosfere, per le denominazioni già stabilite al numero 23 si trasforma in

$$s=\frac{1}{2}\frac{\nu A D}{n''R''-\nu'' A}.$$

In quanto alle caldaie o tubi a vapore premuti dal di fuori al di dentro, l'ordinanza del Governo francese in data del 22 maggio 1843 vuole che loro si assegni uno spessore più grande di quello dato dall'equazione (10) del numero 23, la quale viene adottata quando la pressione si esercita dall'interno all'esterno e che si muniscano di armature; un'istruzione ministeriale poi del 17 dicembre 1848 esige che lo spessore della lamina sia una volta e mezzo quello dato dalla citata formola 10, e raccomanda di usare per armature degli anelli in ferro concentrici al tubo da rinforzarsi. Per giustificare queste precauzioni, dice il Bresse, che un cilindro circolare, il quale esteriormente sopporta una pressione uniforme, è per così dire in uno stato d'equilibrio instabile; perchè se, per una causa accidentale, il profilo venisse a schiacciarsi un tantino in modo da prendere la forma sensibilmente elittica, lo schiacciamento aumenterebbe per effetto della pressione, mentre diminuirebbe per effetto di un'interna pressione dominante.

47. **Solidi omogenei di egual resistenza alla compressione con asse rettilineo verticalmente disposto.** — Un solido qualunque ad asse rettilineo è di egual resistenza alla compressione, quando presenta tali sezioni normali all'asse da essere costante la pressione riferita all'unità di superficie che su ciascuna sezione si sviluppa per effetto di una forza comprimente diretta secondo l'asse e per effetto del peso proprio. Procedendo come si è fatto al numero 26 con un metodo rigoroso, ed al numero 27 con un metodo d'approssimazione, parlando dei solidi omogenei di egual resistenza all'estensione, si può trovare con qual legge deve variare la superficie della sezione normale all'asse di un solido di data materia, affinchè esso sia di egual resistenza alla compressione, e basti il seguente problema per far apprendere con qual norma si deve procedere in ogni caso particolare.

Si vuol costrurre un piedestallo di nota altezza, con sezione orizzontale quadrata, vuoto internamente in modo da presentare un vano prismatico dalla sommità al piede, di larghezza data alla sommità, e che, sotto l'azione di una forza cognita applicata secondo l'asse del solido nel mezzo di una piastra che superiormente lo copre, sia di egual resistenza alla compressione. Si domanda che lunghezza deve avere il lato del quadrato formante la sezione orizzontale del vano interno e con qual legge deve variare il lato esterno della sezione orizzontale dell'intiero pilastro.

Il pilastro di cui voglionsi trovare le dimensioni sia quello rappresentato in proiezione orizzontale in ABCDEFGH ed in proiezione verticale in A′B′K′L′ (*fig.* 23), e si chiamino:

a la larghezza $\overline{IK}=\overline{I'K'}$ che superiormente deve avere il pilastro, ed

h l'altezza $\overline{O'O'_1}$, espresse in metri;

P il peso premente diretto secondo l'asse $O'O'_1$, compreso anche il peso della piastra sulla quale questo peso direttamente agisce, in chilogrammi;

Π il peso in chilogrammi del metro cubo di sostanza di cui il pilastro è formato;

u il lato $\overline{EF}=\overline{E'F'}$ della sezione orizzontale fatta nella parte vuota del pilastro, ed

U la larghezza $\overline{AB}=\overline{A'B'}$ che il pilastro deve avere alla sua base inferiore, in metri;

R'' la resistenza alla rottura per pressione della sostanza di cui il pilastro è formato, espressa in chilogrammi e riferita al metro quadrato;

n'' il coefficiente di stabilità;

x la distanta $\overline{O'_1 O'_2}$ di una sezione orizzontale qualunque del solido dall'estremità superiore O'_1 dell'asse, ed

y la larghezza $\overline{L'M'}$ di questa sezione qualunque posta a distanza x da O'_1, espresse in metri.

Ciò premesso, si ragioni in modo tutto analogo a quello tenuto al numero 26 per la risoluzione del problema I (*d*), e si osservi che la superficie di una sezione qualunque fatta nel pilastro perpendicolarmente all'asse è la differenza di due quadrati, di lato y il maggiore e di lato u il minore; e che la resistenza alla pressione che si sviluppa in una sezione qualunque L'M' è dovuta al peso P ed al peso della parte di corpo L'M'K'I' che trovasi sopra questa sezione.

Il valore di u, per essere a^2-u^2 la superficie resistente in sommità del pilastro, sarà dato da

$$P=n''R''(a^2-u^2)$$

d'onde

$$u=\sqrt{a_2-\frac{P}{n''R''}}.$$

Per trovare la legge secondo cui deve variare y si considerino

(*d*) La soluzione elementare, ma approssimata, dell'enunciato quesito è brevemente accennata nel seguente numero 48.

due sezioni orizzontali vicinissime $m'n'$ ed $m'_1n'_1$ determinanti un volume elementare $m'n'n'_1m'_1$, e siano x' la distanza $\overline{O'_1o'}$ ed y' la lunghezza $\overline{m'n'}$. Evidentemente la resistenza alla compressione sulla sezione L′M′ sarà

$$\mathrm{P}+\Pi\int_0^x (y'^2-u^2)\,dx',$$

e, essendo y^2-u^2 la superficie di detta sezione L′M′, per la stabilità deve esistere l'equazione

$$\mathrm{P}+\Pi\int_0^x (y'^2-u^2)\,dx'=n''\mathrm{R}''(y^2-u^2),$$

la quale, differenziata e poi integrata come al numero 26 determinando la costante in modo che $x=o$ si abbia $y=a$, dà

$$\Pi x=n''\,\mathrm{R}''\,log\,\frac{y^2-u^2}{a^2-u^2},$$

ossia ancora passando dai logaritmi agli esponenziali

$$y^2=u^2+(a^2-u^2)\,e^{\frac{\Pi x}{n''\mathrm{R}''}},$$

dove e ha il noto valore 2,718281......

In quanto al valore di $\mathrm{U}=\overline{\mathrm{BA}}$ si trova facendo nell'ultima equazione $x=h$ giacchè allora y diventa U, e si ha

$$\mathrm{U}^2=u^2+(a^2-u^2)\,e^{\frac{\Pi h}{n''\mathrm{R}''}}.$$

Anche qui vale l'osservazione che venne fatta al numero 26 sulla possibilità di avere delle espressioni approssimate di y e di U svolgendo in serie $e^{\frac{\Pi x}{n''\mathrm{R}''}}$ ed $e^{\frac{\Pi h}{n''\mathrm{R}''}}$.

48. **Indicazione del procedimento elementare che si può seguire per determinare in modo approssimato un solido omogeneo di egual resistenza alla compressione con asse rettilineo verticalmente disposto.** — Ragionando sul problema che venne

enunciato e rigorosamente risoluto nel precedente numero e ritenendo tutte le denominazioni che nello stesso numero vennero stabilite, si incomincia col trovare il lato $\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{E'F'}}=u$ (*fig.* 23) della sezione orizzontale fatta nella parte vuota del pilastro, dicendo che la superficie resistente alla sua sommità deve essere $a^2 - u^2$, che è P il peso che su essa gravita, e che quindi deve essere verificata l'equazione di stabilità

$$\mathrm{P}=n''\mathrm{R}''(a^2-u^2),$$

dalla quale ricavasi

$$u=\sqrt{a^2-\frac{\mathrm{P}}{n''\mathrm{R}''}}.$$

Si immagini ora divisa l'intiera altezza $\overline{\mathrm{O}'_1\mathrm{O}'}$ in parti assai piccole ed eguali, e, con un processo in tutto analogo a quello che venne tenuto al numero 27 per determinare in modo approssimato un solido di egual resistenza all'estensione, si calcolino quali lati dovranno avere le sezioni quadrate prodotte nel solido a trovarsi da piani orizzontali passanti per tutti i punti di divisione dell'altezza $\overline{\mathrm{O}'_1\mathrm{O}'}$, affinchè esso sia di egual resistenza, ossia affinchè la resistenza che il corpo oppone in ogni sua sezione moltiplicata per il coefficiente di stabilità n'' sia equivalente alla somma del peso P e di un peso che con molta approssimazione si avvicina a quello della parte di corpo compresa fra la sua base superiore I′K′ e la sezione che si considera.

CAPITOLO IV.

Resistenza alla torsione nei solidi prismatici ed omogenei.

49. Ipotesi fondamentali sulla resistenza alla torsione dei solidi prismatici, omogenei ed elastici. — In un prisma omogeneo è cimentata la resistenza alla torsione allorquando una sua sezion retta qualunque CD (*fig.* 24) gira, relativamente ad una sezione AB, attorno ad un asse YZ perpendicolare ai loro piani e passanti pei loro centri di superficie.

Considerando fra le due sezioni AB e CD diverse porzioni di fibre come $m m_1$, $n n_1$, $p p_1$, ... parallele all'asse Y Z del solido, tutte incontranti la sezione CD, rappresentata in C′E′D′F′, lungo il raggio $\overline{O'C'}$ in m', n', p', ... e supponendo che nel corpo si cimenti la resistenza alla torsione senza che però avvenga snervamento, si ammette generalmente che tutti gli elementi superficiali m', n', p', ..., secondo cui queste porzioni di fibra incontrano la sezione C′E′D′F′ prima della torsione, si trovino ancora dopo la torsione sul medesimo raggio spostato e passato in $\overline{O'C'_1}$. Relativamente poi alle azioni molecolari sviluppate dalle diverse porzioni di fibra del corpo comprese fra le due sezioni rette AB e CD per riprendere le primitive loro posizioni si suppone, semprechè non si verifichi snervamento :

1° Che siano direttamente proporzionali alle superficie delle sezioni delle fibre deformate ;

2° Che siano direttamente proporzionali agli spostamenti, come $m'm'_1$, $n'n'_1$, $p'p'_1$, ... che le fibre hanno subito fra le due sezioni rette considerate AB e CD ;

3° Che siano inversamente proporzionali alla distanza AC di dette sezioni.

50. **Equazione d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari in un corpo prismatico ed omogeneo, nel quale vien cimentata la resistenza alla torsione, coefficiente di torsione e momento di torsibilità.** — Si considerino nel solido prismatico proposto due sezioni infinitamente vicine AB e CD (*fig.* 25), ed in particolar modo una fibra elementare $m m_1$ compresa fra le dette sezioni e parallela all'asse YZ del prisma intorno al qual asse si suppone aver luogo la rotazione prodotta dalla torsione. Chiaramente si vede come, supponendo fissa la sezione CD, l'estremo della fibra elementare $m m_1$ rappresentato in m' sulla figura C′E′D′F′ che dà l'intiera sezione CD, si sposterà angolarmente della quantità o dell'arco $m'm'_1$ con tendenza a riprendere la primitiva sua posizione, e sviluppando una certa azione molecolare contenuta nel piano della sezione CD e diretta normalmente al raggio $O'm'_1$. Ciò premesso, chiamando

ω la superficie elementare della sezione dell'elemento di fibra $m m_1$,

v la distanza $\overline{O m_1} = \overline{O'm'} = \overline{O'm_1}$ di detta fibra dall'asse YZ,

l la distanza $\overline{GO}$ delle due sezioni considerate,

φ l'archetto di raggio eguale all'unità, col centro in O′ e chiudente il piccolo angolo $m'O'm'_1$ rappresentante di quanto la sezione CD ha rotato intorno all'asse YZ relativamente alla sezione AB, M la somma dei momenti delle azioni molecolari sviluppate da tutte le fibre elementari, la qual somma di momenti contenuta nel piano della sezion retta CD è da considerarsi siccome eguale ed agente per verso contrario a quello secondo cui agisce la somma dei momenti delle forze che producono la torsione, agenti in piani normali all'asse YZ del prisma,

E''' un coefficiente numerico dipendente dalla materia di cui il prisma è formato,

e ritenendo quanto nel precedente numero si è detto relativamente all'azione molecolare sviluppata da una fibra qualunque, si avrà: che la lunghezza dell'arco $m'm'_1$ è espressa da $v\varphi$; che l'azione molecolare q sviluppata dalla fibra mm_1 è data da

$$q = E''' \frac{\omega v \varphi}{l} \qquad (1);$$

che il momento di questa forza rispetto all'asse YZ del prisma, dal qual asse dista della quantità v, è

$$E''' \frac{\omega v^2 \varphi}{l};$$

e finalmente che la somma dei momenti delle azioni molecolari sviluppate da tutte le fibre del solido rispetto allo stesso asse ha per espressione

$$E''' \frac{\varphi}{l} \Sigma \omega v^2,$$

intendendo che il simbolo Σ si estenda ai prodotti di tutte le superficie elementari ω in cui si scompone l'intiera sezion retta C'E'D'F' del corpo pei quadrati delle rispettive distanze dal punto O'.

Ora, affinchè siavi equilibrio fra le forze estrinseche che tendono a produrre la torsione del prisma e le azioni molecolari in virtù delle quali esso resiste, è necessario che siavi eguaglianza fra i momenti delle une e delle altre presi rispetto all'asse YZ, ed ecco per conseguenza l'equazione d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari in un prisma in cui venne prodotta torsione senza snervamento

$$M = E''' \frac{\varphi}{l} \Sigma \omega v^2 \qquad (2).$$

Indicando con J la somma $\Sigma \omega v^2$ di tutti gli elementi superficiali in cui si può scomporre la sezion retta del prisma pei quadrati delle loro rispettive distanze dall'asse del prisma stesso (*e*), ossia il *momento d'inerzia* della superficie della sezione rispetto ad un asse ad essa perpendicolare e passante pel suo centro di superficie, il quale da Persy vien chiamato *momento d'inerzia polare*, l'equazione (2) diventa

$$M = E''' \frac{\varphi J}{l} \quad (3).$$

Il coefficiente numerico E''' chiamasi *coefficiente di torsione*, ed il prodotto $E''' \Sigma \omega v^2 = E''' J$, indipendente dalla torsione e dipendente soltanto dalla superficie e dalla forma della sezion retta del solido prismatico sottoposto a torsione e dalle sue proprietà fisiche, vien detto *momento di torsibilità* e, siccome chiaramente lo dimostrano le equazioni (2) e (3), è esso proporzionale al momento delle forze estrinseche capaci di produrre una data torsione fra due sezioni rette vicinissime, e quindi si può assumere siccome atto a dare la misura di questo momento.

Se nell'equazione (1) si fa $v\varphi = l$ trovasi

$$E''' = \frac{q}{\omega},$$

ossia che il coefficiente di torsione si può definire in modo astratto la resistenza riferita all'unità di superficie, che opporrebbe un tratto di fibra del corpo contorto non snervato quando i due punti estremi di esso tratto avessero subito, l'uno per rapporto all'altro e pel fatto della torsione, uno spostamento eguale alla loro distanza primitiva.

Le due lunghezze φ ed l che si trovano nella formola (3) devono essere espresse nella medesima unità di lunghezza; lo stesso si deve fare pel braccio di leva che costituisce uno dei due fattori componenti il momento M, e per le dimensioni lineari che entrano nel momento d'inerzia polare J; in quanto poi al valore di E''' si

(*e*) Chiamasi *momento d'inerzia* di una superficie piana rispetto ad una retta qualunque, condotta nel suo piano o fuori di esso, la somma di tutti gli elementi superficiali in cui la superficie piana può essere scomposta pei quadrati delle loro rispettive distanze da questa retta assunta come asse. In questo lavoro sulla resistenza dei materiali occorrerà ben di frequente di dover considerare i momenti d'inerzia di superficie piane rispetto a rette ad esse perpendicolari e rispetto a rette in esse condotte.

deve intendere che esso rappresenti una forza, espressa nella medesima unità di peso in cui è espressa la forza torcente che costituisce l'altro fattore di M, e riferita al metro quadrato, al decimetro quadrato, al centimetro quadrato, ecc., secondo che il braccio di leva e le dimensioni lineari che entrano a formare J trovansi espresse in metri, in decimetri, in centimetri, ecc.

51. **Angolo di torsione**. — Se in un solido prismatico ed omogeneo, nel quale è mantenuta immobile la parte posta a sinistra della sezion retta AB (*fig.* 26), si provoca la resistenza alla torsione mediante una forza P mantenuta nel piano della sezione estrema $A_n B_n$ ed operante con braccio di leva $C_n D$, e se in esso solido si considerano diverse sezioni vicinissime AB, $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, ... $A_n B_n$ tutte egualmente distanti, per quanto si deduce dalla formola (3) del numero precedente, l'angolo di cui ciascuna sezione ha rotato per rapporto a quella che immediatamente la precede a sinistra è sempre lo stesso; per modo che, essendo φ l'arco di raggio 1 che misura l'angolo $A_1 C_1 A'_1$ di cui ha rotato la sezione $A_1 B_1$ rispetto alla sezione AB, saranno rispettivamente 2φ, 3φ, ... $n\varphi$ gli archi di raggio 1 che misurano gli angoli $A_2 C_2 A'_2$, $A_3 C_3 A'_3$, ... $A_n C_n A'_n$ di cui hanno rotato le sezioni $A_2 B_2$, $A_3 B_3$, ... $A_n B_n$ rispetto alla stessa sezione AB; e, siccome chiamando l le distanze eguali $\overline{CC_1}$, $\overline{C_1 C_2}$, $\overline{C_2 C_3}$ ...... si ha dalla già citata formola (3) del precedente numero

$$\varphi = \frac{M l}{E''' J}$$

(dove M esprime il momento $P \times \overline{C_n D}$, E''' il coefficiente di torsione della sostanza di cui il prisma è formato ed J il momento d'inerzia polare della sezion retta del prisma stesso), risulta che l'arco $n\varphi$ di raggio 1, il quale misura l'angolo $A_n C_n A'_n$ di cui ha rotato la sezione che ha subito il massimo spostamento in tutta l'estensione del solido considerato e che dicesi *angolo di torsione*, è dato da

$$n\varphi = \frac{n M l}{E''' J}.$$

Chiamando ora θ l'indicato arco di raggio 1 che misura l'angolo $A_n C_n A'_n$, ed L la lunghezza totale $\overline{CC_n}$ del solido eguale ad nl, l'ultima equazione diventa

$$\theta = \frac{M L}{E''' J},$$

la quale, in accordo coi risultamenti d'esperienza trovati da Duleau e Savart sopra corpi cilindrici sottoposti a sforzi di torsione non capaci di produrre lo snervamento, porta a conchiudere che, in solidi prismatici della stessa materia e non snervati, gli archi θ di raggio 1 misuranti gli angoli di torsione e quindi anche gli stessi angoli di torsione sono proporzionali: ai momenti M delle forze torcenti; alle lunghezze L dei prismi contorti.

52. **Momenti d'inerzia polari della sezione circolare piena e della sezione circolare vuota** — I. *Momento d'inerzia polare della sezione circolare rispetto all'asse perpendicolare al suo piano e passante pel suo centro* (*f*).

Essendo r il raggio $\overline{CA}$ (*fig.* 27) del circolo proposto, prendasi per elemento di superficie la porzione BDEF della corona circolare di raggio $\overline{CB}=z$ e di larghezza $BD=dz$; essendo $d\varphi$ l'arco di raggio 1 chiudente l'angolo elementare BCF, la superficie elementare ω sarà $z\,d\varphi\,dz$, la distanza v degli elementi di secondo ordine in cui si può scomporre la detta corona dall'asse C varrà costantemente z, ed il valore del momento d'inerzia polare domandato J, cangiando il simbolo Σ nel simbolo $\iint$, sarà dato da

$$J=\Sigma\omega v^2=\int_0^r z^3\,dz\int_0^{2\pi} d\varphi=\frac{1}{2}\pi r^4$$

dove π è il noto rapporto 3,1415...... della circonferenza al diametro.

II. *Momento d'inerzia polare della sezione circolare vuota rispetto all'asse perpendicolare al suo piano e passante pel suo centro.*

Siano r' il raggio interno ed r'' il raggio esterno della corona di cui vuolsi trovare il momento d'inerzia polare rispetto ad un asse perpendicolare al suo piano e passante pel suo centro. Evidentemente la somma dei prodotti delle superficie elementari in cui si può scomporre la superficie dell'intiera corona pei quadrati delle rispettive distanze dall'asse per rapporto al quale vuolsi il momento d'inerzia vale la somma dei prodotti delle superficie elementari in cui si può scomporre il circolo di raggio r'' pei quadrati delle rispettive distanze dal detto asse, meno la somma dei

(*f*) Nel numero che segue si ha un metodo elementare per dedurre il momento d'inerzia polare della sezione circolare piena.

prodotti delle superficie elementari in cui si può scomporre la superficie del circolo di raggio r' pei quadrati delle rispettive distanze dal medesimo asse: cosicchè il momento d'inerzia polare della corona circolare è eguale a quello del circolo esterno meno quello del circolo interno, ossia chiamando J il domandato momento d'inerzia, si ha

$$J = \frac{1}{2}\pi\left(r''^4 - r'^4\right).$$

55. **Procedimento elementare per dedurre il momento d'inerzia polare della sezione circolare piena.** — Il momento d'inerzia polare del circolo si può trovare senza far uso delle notazioni di calcolo differenziale ed integrale. Perciò si scomponga la superficie del circolo dato in tanti piccolissimi settori eguali CAB, CBD, CDE,........ (*fig.* 28) che, considerando il circolo come un poligono regolare di un numero grandissimo di lati, si possono risguardare come triangoli; si consideri uno di questi settori, per esempio CAB, e si decomponga in tante porzioni di corone circolari ABB'A', A'B'B''A'', A''B''B'''A''',........ aventi larghezze piccolissime ed eguali; si chiami r il raggio $\overline{CA}$ del circolo dato, a le lunghezze degli archi AB, BD, DE,........ che servono di base a diversi settori circolari in cui venne scomposto il circolo e confondentisi colle loro corde, ed l le larghezze $\overline{AA'}$, $\overline{A'A''}$, $\overline{A''A'''}$,........ delle porzioni di corone circolari in cui venne decomposto il settore CAB.

Il momento d'inerzia della porzione di corona ABB'A' è dato dalla sua superficie al moltiplicata per il quadrato della distanza che il suo centro di superficie ha dall'asse C, ossia da

$$a\,l\,r^2,$$

giacchè, per ipotesi essendo vicinissimi i due archi AB ed A'B', si può ritenere che il centro di superficie di detta porzione di corona disti di tutto il raggio CM, condotto al mezzo dell'arco AB, dal punto C.

Ciò premesso, potendosi decomporre il prodotto $a\,l\,r^2$ nei due fattori alr ed r, di cui il primo rappresenta il volume del piccolissimo prisma AB'_1 che si può risguardare come un parallelepipedo rettangolo le cui tre dimensioni sono $\overline{AB} = a$, $\overline{AA'} = l$ ed $\overline{AA_1} = \overline{CA} = r$, e potendosi ritenere siccome eguale ad r la distanza del centro di volume (*g*) di questo parallelepipedo dall'asse CC' perpendicolare al piano e proiettantesi nel centro C del circolo dato, si può dire che l'accennato prodotto è il momento del volume AB'_1 rispetto all'asse CC' (*h*); e, ragionando pei momenti d'inerzia delle porzioni di corone circolari A'B'B''A'', A''B''B'''A''',........ come si è fatto per quello della porzione di corona circolare ABB'A', agevolmente si viene a conchiudere che il momento d'inerzia del settore CAB è la somma dei momenti rispetto all'asse CC' di tanti piccolissimi prismi le cui dimensioni sono AB, AA' e CA, A'B', A'A'' e CA', A''B'', A''A''' e CA'',........, i quali prismi costituiscono nel loro assieme una piramide $CABB_1A_1$ il momento del cui volume rispetto al definito asse deve adunque dare il momento d'inerzia polare del piccolo settore CAB.

Ora, per essere AB un lato piccolissimo, essendo $\frac{1}{3}\overline{CM}.\overline{AB}.\overline{AA_1}=\frac{1}{3}r.a.r=\frac{1}{3}ar^2$ il volume di detta piramide, e distando il suo centro di volume dall'asse CC' per rapporto al quale si pren-

(*g*) Chiamasi *centro di volume* di un corpo quel punto che coincide col suo centro di gravità quando suppongasi omogenea tutta la materia costituente il corpo stesso.

Immaginando il volume del corpo dato siccome decomposto in tanti volumi elementari, e chiamando

v il volume di uno qualunque di questi elementi,

x, y e z le coordinate di un punto contenuto nell'interno di quest'elemento per rapporto a tre assi coordinati ortogonali a cui intendonsi riferiti tutti i punti dello spazio occupato dal corpo,

V l'intiero volume del corpo stesso,

Σ una somma estesa a tutti gli elementi v in cui intendesi decomposto il volume V,

il *centro di volume* del corpo proposto è quel punto per cui le coordinate x_1, y_1 e z_1 sono date dalle equazioni

$$x_1=\frac{\Sigma vx}{V},$$

$$y_1=\frac{\Sigma vy}{V},$$

$$z_1=\frac{\Sigma vz}{V}.$$

(*h*) Per *momento del volume* di un solido omogeneo rispetto ad una retta, oppure rispetto ad un piano, intendo il prodotto di questo volume per la distanza del centro di volume del solido dalla retta o dal piano.

dono i momenti dei $\frac{3}{4}CM=\frac{3}{4}r$, si ha che il momento d'inerzia della superficie del settore CAB è

$$\frac{1}{4}ar^3.$$

Per avere il momento d'inerzia polare dell'intiero circolo proposto, bisogna prendere la somma dei momenti d'inerzia polari di tutti i settori CAB, CBD, CDE, ..., la qual somma si riduce al fattore $\frac{1}{4}r^3$ moltiplicato per tanti a quanti sono gli archi AB, BD, DE .... che servono di base ai settori in cui venne scomposto il circolo intiero, la somma dei quali archi a fa appunto la circonferenza $2\pi r$ del circolo dato. Il momento d'inerzia polare domandato J sarà adunque espresso da

$$J=\frac{1}{4}r^3\times 2\pi r=\frac{1}{2}\pi r^4,$$

essendo π il noto rapporto 3,1415........ della circonferenza al diametro.

Nella risoluzione del problema II del precedente numero si ha il metodo per ottenere elementarmente il momento d'inerzia polare della sezione circolare vuota rispetto all'asse perpendicolare al suo piano e passante pel suo centro.

54. **Momenti d'inerzia polari delle sezioni poligonali regolari piene e delle sezioni poligonali regolari vuote.** — I. *Momento d'inerzia polare della sezione poligonale regolare piena rispetto all'asse perpendicolare al suo piano e passante pel suo centro.*

Un poligono regolare qualunque si compone di tanti triangoli isosceli eguali quanti sono i suoi lati, e tutti questi triangoli hanno il loro vertice nel centro del poligono. Segue da ciò che si otterrà il momento d'inerzia polare di un poligono regolare di n lati procurandosi prima il momento d'inerzia di uno dei triangoli isosceli componenti, come ACB (*fig.* 29), rispetto all'asse perpendicolare al suo piano passante pel vertice C, e moltiplicandolo poscia per n.

Per trovare il momento d'inerzia del triangolo ACB rispetto all'asse proiettato nel vertice C (*i*), si consideri un elemento super-

(*i*) Nel numero che segue si ha il metodo per ottenere elementarmente il momento d'inerzia polare del triangolo isoscele rispetto alla retta passando pel suo vertice e perpendicolare al suo piano, e per avere quindi il momento d'inerzia polare della sezione poligonale regolare rispetto all'asse passante pel suo centro.

ficiale di detto triangolo compreso fra due rette DE e GF infinitamente vicine e parallele alla base AB, si chiamino

l la base $\overline{AB}$ del triangolo proposto,

a la sua altezza $\overline{CK}$,

z la parte $\overline{CH}$ di detta altezza,

e dai due triangoli simili ACB e DCE si deduca il valore di $\overline{DE}$, dato da

$$\overline{DE}=\frac{l}{a}z.$$

La superficie elementare DEFG, che si può considerare siccome un rettangolo lungo $\overline{DE}$ ed alto $\overline{HI}=dz$, si scomponga in elementi del secondo ordine mediante rette infinitamente vicine parallele a CK e si chiami x la distanza $\overline{He}$ di uno qualunque di questi elementi del secondo ordine da questa retta. La sua superficie sarà $dx\,dz$, il quadrato della distanza del suo centro dall'asse proiettato in C sarà x^2+z^2, ed il momento d'inerzia dell'elemento superficiale di primo ordine DEFG rispetto all'asse perpendicolare al suo piano e passante pel vertice C del triangolo, sarà il doppio dell'integrale di $(x^2+z^2)\,dx\,dz$ preso fra i limiti $x=0$ ed $x=\frac{1}{2}\overline{DE}=\frac{1}{2}\frac{l}{a}z$, ossia sarà

$$2\int_0^{\frac{1}{2}\frac{l}{a}z}(x^2+z^2)\,dx\,dz=\frac{l}{a}\left(\frac{1}{12}\frac{l^2}{a^2}+1\right)z^3\,dz.$$

Per ottenere poi il momento d'inerzia dell'intiero triangolo ACB rispetto all'asse proiettato nel suo vertice C, basterà prendere l'integrale del trovato momento d'inerzia dell'elemento di primo ordine DEFG rispetto allo stesso asse fra i limiti $z=0$ e $z=a$, e si otterrà

$$\frac{l}{a}\left(\frac{1}{12}\frac{l^2}{a^2}+1\right)\int_0^a z^3\,dz=\frac{1}{48}a\,l^3+\frac{1}{4}a^3\,l.$$

Chiamando ora J il domandato momento d'inerzia polare di un poligono regolare di n lati, di lato l e di apotema a, e ponendo $\frac{1}{4}a\,l$ fattore comune, si avrà

$$J=\frac{1}{4}nal\left(\frac{1}{12}l^2+a^2\right).$$

II. *Momento d'inerzia polare della sezione poligonale regolare vuota rispetto all'asse perpendicolare al suo piano e passante pel suo centro.*

Siano

a' ed l' l'apotema ed il lato del poligono regolare interno ed

a'' ed l'' gli stessi elementi pel poligono regolare esterno;

i due poligoni abbiano egual numero n di lati ed i loro centri coincidano; sia poi J il domandato momento d'inerzia polare, il quale, per quanto si è detto sul momento d'inerzia polare della corona circolare, deve valere il momento d'inerzia del poligono esterno meno quello del poligono interno rappresentante il vuoto, e conseguentemente essere dato da

$$J=\frac{1}{4}n\left[a''l''\left(\frac{1}{12}l''^2+a''^2\right)-a'l'\left(\frac{1}{12}l'^2+a'^2\right)\right].$$

55. **Procedimento elementare per ottenere il momento d'inerzia polare del triangolo isoscele rispetto alla retta passante pel suo vertice e perpendicolare al suo piano, onde avere quindi il momento d'inerzia polare della sezione poligonale regolare rispetto all'asse passante pel suo centro.** — Il momento d'inerzia del triangolo isoscele ACB (*fig.* 30) rispetto all'asse perpendicolare al suo piano e passante pel suo vertice C si può trovare in questo modo da chi non conosce le prime nozioni di calcolo differenziale ed integrale: il triangolo proposto, mediante rette parallele alla sua base AB e vicinissime fra di loro, si scomponga in tante liste ABB'A', A'B'B''A'', A''B''B'''A''', ... di egual altezza, le quali, atteso le picciolissime loro altezze KK', K'K'', K''K''', ..., si possono considerare siccome altrettante aree rettangolari; l'area AKK'A' mediante rette parallele a CK e vicinissime fra di loro si decomponga nei piccolissimi rettangoli AA'$a'a$, $aa'b'b$, $bb'c'c$,........; e si chiamino, l la base $\overline{AB}$ del triangolo isoscele dato, a la sua altezza $\overline{CK}$, m la piccolissima altezza $\overline{KK'}$ della lista rettangolare ABB'A' ed n le larghezze pure piccolissime ed eguali $\overline{Aa}$, $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, ... Il momento d'inerzia della piccolissima superficie AA'$a'a$ rispetto all'asse proiettato in C è evidentemente dato dalla sua superficie mn moltiplicata per il quadrato della distanza che il

suo centro di gravità ha dall'asse proiettato in C, ossia da

$$mn\left(\frac{l^2}{4}+a^2\right)=mn\frac{l^2}{4}+mna^2,$$

giacchè, essendo per ipotesi vicinissime le due rette AB ed A'B' non che le altre due AA' ed aa', si può ritenere che il centro di gravità di detta piccolissima figura disti di tutta $\overline{CA}=\sqrt{\frac{l^2}{4}+a^2}$ dal punto C.

Ora, il termine $mn\frac{l^2}{4}$ può essere decomposto nei fattori $mn\frac{l}{2}$ ed $\frac{l}{2}$: il primo fattore rappresenta il volume di un piccolissimo parallelepipedo rettangolo i cui tre spigoli sono $\overline{aa'}=m$, $\overline{Aa}=n$ ed $\overline{AA_1}=\frac{l}{2}$; il secondo, atteso la piccolezza di m e di n, si può ritenere siccome la distanza del centro di gravità di detto piccolissimo parallelepipedo dal piano perpendicolare a quello del triangolo isoscele ACB e passante per la sua altezza CK; e quindi il prodotto $mn\frac{l^2}{4}$ si può considerare siccome il momento del volume Aa'_1 rispetto all'or definito piano. In quanto poi al termine mna^2, potendosi esso decomporre in due fattori mna ed a il primo dei quali rappresenta il volume di un piccolissimo parallelepipedo rettangolo di spigoli $\overline{aa'}=m$, $\overline{Aa}=n$ ed $\overline{AA_2}=a$ ed il secondo la distanza del centro di gravità di questo parallelepipedo da un piano perpendicolare a quello del triangolo ACB e passante per la retta XY condotto per C parallelamente ad AB, si può esso risguardare come il momento del volume Aa'_2 per rapporto all'or indicato piano parallelo ad AB. — Ciò premesso, ragionando pei momenti d'inerzia delle piccolissime aree $abb'a'$, $bcc'b'$, ... come si è fatto per quello dell'area $Aaa'A'$, si viene a conchiudere che il momento d'inerzia della superficie AKK'A' è la somma dei momenti rispetto al piano passante per la retta CK e perpendicolare al piano del triangolo ACB di tanti piccolissimi parallelepipedi le cui dimensioni sono Aa, aa' e KA, ab, bb' e Ka, bc, cc' e Kb, ..., i quali costituiscono nel loro assieme un prisma triangolare $AKA_1A'K'A'_1$, più ancora la somma dei momenti rispetto al piano passante per la retta XY e perpendicolare al piano del triangolo

ACB di tanti piccolissimi parallelepipedi aventi tutti la stessa altezza $\overline{CK}=a$ e per basi le piccolissime figure $Aa a' A'$, $a b b' a'$, $b c c' b'$, ..., i quali formano il parallelepipedo rettangolo $AA'K'KA_2A'_2K'_2K_2$.

Se ora sui momenti d'inerzia delle piccole superficie $A'K'K''A''$, $A''K''K'''A'''$, ... si ragiona come si è fatto sul momento d'inerzia di $AKK'A'$, si viene a conchiudere che il momento d'inerzia del triangolo ACK rispetto all'asse proiettato in C è la somma dei momenti rispetto al piano passante per la retta CK e perpendicolare al piano del triangolo ACB di tanti piccolissimi prismi triangolari aventi le altezze eguali KK', $K'K''$, $K''K'''$, ... aventi per basi dei triangoli rettangoli isosceli i cui cateti sono rispettivamente AK, $A'K'$, $A''K''$, ..., più ancora la somma dei momenti rispetto al piano perpendicolare a quello del triangolo ACB e passante per la retta XY di tanti piccolissimi parallelepipedi rettangoli tutti alti CK, CK', CK'', ... ed insistenti alle basi $AKK'A'$, $A'K'K''A''$, $A''K''K'''A'''$ .... Ma la somma dei detti prismi triangolari costituisce il volume della piramide triangolare $CAKA_1$ e la somma dei parallelepipedi forma la piramide quadrangolare CAA_2K_2K, cosicchè il momento d'inerzia del triangolo ACB rispetto all'asse proiettato in C sarà il doppio del momento del volume della piramide triangolare $CAKA_1$ rispetto al piano passante per la retta CK e perpendicolare al piano del triangolo ACB aumentato del momento della piramide quadrangolare CAA_2B_2B rispetto al piano passante per la retta XY e pure perpendicolare al piano del detto triangolo.

Il volume della piramide triangolare $CAKA_1$ è $\frac{1}{2}\overline{AK}.\overline{AA_1}.\,\frac{1}{3}\overline{CK}$ $=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}l\cdot\frac{1}{2}l\cdot\frac{1}{3}a=\frac{1}{24}al^2$; il centro di volume L di questa piramide trovasi sulla retta CM che unisce il vertice C col centro di superficie M della base AKA_1 ai 3/4 di $\overline{CM}$ a partire da C; la distanza che il punto M ha dal piano perpendicolare a quello del triangolo ACB e passante per CK è $\overline{KN}=\frac{2}{3}\overline{KA}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}l=\frac{1}{3}l$; la distanza che il centro di gravità L ha dal medesimo piano è $\overline{OP}=\frac{3}{4}\overline{KN}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}l=\frac{1}{4}l$; e finalmente il doppio del momento del volume della piramide triangolare $CAKA_1$ rispetto al detto piano perpendicolare al piano del triangolo ACB e passante per la retta CK è

$$2\,.\frac{1}{24}a\,l^2.\frac{1}{4}l=\frac{1}{48}a\,l^3.$$

Il volume della piramide quadrangolare CAA_2B_2B è $\overline{AB}\,.\,\overline{AA_2}\,.\,\frac{1}{3}\overline{CK}$ $=l\,.\,a\,.\,\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}a^2l$; il centro di volume Q della stessa piramide dista dal piano perpendicolare a quello del triangolo ACB passante per la retta XY condotta parallelamente ad AB di $\overline{CR}=\frac{3}{4}\overline{CK}$ $=\frac{3}{4}a$; e quindi il momento di detta piramide rispetto al definito piano è

$$\frac{1}{3}a^2l\times\frac{3}{4}a=\frac{1}{4}a^3l.$$

Il momento d'inerzia del triangolo ACB adunque, che come si è detto è la somma del doppio momento trovato della piramide triangolare $CAKA_1$ col momento pure trovato della piramide quadrangolare CAA_2B_2B, vale

$$\frac{1}{48}a\,l^3+\frac{1}{4}a^3\,l.$$

Essendo ora J il cercato momento d'inerzia polare di un poligono regolare di n lati eguali ad l e di apotema a, sarà esso n volte quello del triangolo, per cui ponendo $\frac{1}{4}a\,l$ fattore comune risulterà

$$J=\frac{1}{4}n\,a\,l\left(\frac{1}{12}l^2+a^2\right).$$

Il momento d'inerzia polare della sezione poligonale regolare vuota rispetto all'asse perpendicolare al suo piano e passante pel suo centro già elementarmente si è trovato nel precedente numero risolvendo il problema II.

56. **Metodo generale per trovare il momento d'inerzia polare di una sezione qualunque, e sua applicazione al caso delle sezioni rettangolari e quadrate, piene e vuote.** — Sia ABD

(*fig.* 31) una figura piana qualunque e debbasi trovare il suo momento d'inerzia polare rispetto ad un asse ad essa perpendicolare e proiettato in C. Pel punto C e nel piano della data figura si conducano due assi ortogonali xx' ed yy', con rette parallele ai due assi si scomponga la sua superficie in parti infinitamente piccole e si chiamino:

ω un elemento di superficie in un sito qualunque M;

x ed y le coordinate $\overline{CP}$ e $\overline{CQ}$ del centro di quest'elemento;

v la distanza del medesimo centro dal punto C o anche dall'asse proiettato in tal punto.

Siccome dal triangolo rettangolo MPC si ha

$$v^2 = x^2 + y^2,$$

agevolmente si deduce che il momento d'inerzia polare $J = \Sigma \omega v^2$ diventa per la sostituzione del precedente valore di v^2

$$J = \Sigma \omega (x^2 + y^2) = \Sigma \omega x^2 + \Sigma \omega y^2;$$

ed essendo $\Sigma \omega x^2$ e $\Sigma \omega y^2$ i prodotti dei diversi elementi in cui si è scomposta la superficie ABD pei quadrati delle rispettive distanze dagli assi yy' ed xx', ossia i *momenti d'inerzia* della medesima superficie rispetto ai detti due assi, si deduce, potersi trovare il momento d'inerzia polare di una superficie piana qualunque prendendo la somma dei suoi momenti d'inerzia rispetto a due assi ortogonali in essa collocati ed intersecantisi nel punto in cui la incontra quell'asse per rapporto al quale si vuole il momento d'inerzia polare. Gli assi ortogonali, come xx' ed yy', si sceglieranno poi in modo che rispetto ad essi risulti facile la ricerca dei momenti d'inerzia della figura in cui si sono condotti. — Ecco l'applicazione di quanto in generale si è detto alla ricerca dei momenti d'inerzia polari delle sezioni rettangolari.

I. *Momento d'inerzia polare della sezione rettangolare rispetto all'asse perpendicolare al suo piano e passante pel suo centro.*

Se pel centro C (*fig.* 32) del rettangolo si conducono nel suo piano due rette xx' ed yy' fra loro perpendicolari e rispettivamente parallele ai lati AB e BD, e se chiamansi

I′ il momento d'inerzia $\Sigma \omega y^2$ del rettangolo rispetto all'asse xx',

I″ il momento d'inerzia $\Sigma \omega x^2$ dello stesso rettangolo rispetto all'asse yy' e

J il momento d'inerzia polare domandato, per quanto si è precedentemente stabilito in modo generale, si deve avere

$$J = I' + I'' \qquad (1).$$

(k) Ora, essendo rispettivamente a e b i lati $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$ del rettangolo dato, se mediante rette infinitamente vicine fra di loro e parallele ad xx' scomponesi la sua superficie in liste elementari tutte lunghe a, e se di queste liste se ne considera una FGHI posta a distanza $\overline{CK} = y$ dall'asse xx' ed alta $\overline{KL} = dy$, evidentemente la sua superficie ω è $a\,dy$ ed il suo momento d'inerzia rispetto all'asse $x'x$ è

$$a y^2 dy;$$

e siccome la somma dei momenti d'inerzia di tutte le superficie elementari analoghe ad FGHI, in cui resta scomposto l'intiero rettangolo ABDE mediante rette infinitamente vicine condotte parallelamente ad xx', dà il momento d'inerzia dell'intiero rettangolo per rapporto all'ultima indicata retta, si ottiene, sostituendo in $\Sigma\omega y^2$, $a\,dy$ ad ω ed il simbolo $\int$ esteso fra i limiti $\frac{b}{2}$ e $-\frac{b}{2}$ al simbolo Σ,

$$I' = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} a y^2 dy = \frac{1}{12} a b^3 \qquad (2).$$

Decomponendo la superficie rettangolare ABDE ancora in liste elementari con rette infinitamente vicine e parallele ad yy', e ragionando come si è fatto per trovare il valore di I', evidentemente si giunge ad avere

$$I'' = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} b x^2 dx = \frac{1}{12} b a^3 \qquad (3).$$

(k) Nel numero che segue trovasi esposto il metodo per trovare elementarmente i due momenti d'inerzia I' ed I'' dalla cui somma risulta il momento d'inerzia polare J.

Sostituendo ora i valori di I′ e di I″ nell'equazione (1) si trova che il domandato valore del momento d'inerzia polare del rettangolo ABDE rispetto all'asse perpendicolare al suo piano e proiettato in C è dato da

$$J = \frac{1}{12} a b (a^2 + b^2) \qquad (4).$$

Per trovare il momento d'inerzia polare di una sezione quadrata di lato a per rapporto ad un asse perpendicolare al suo piano e passante pel suo centro, basta fare $b = a$ nell'equazione (4).

II. *Momenti d'inerzia della sezione rettangolare vuota rispetto all'asse perpendicolare al suo piano e passante pel suo centro.*

Essendo

a' e b' i lati $\overline{IF}$ ed $\overline{FG}$ (*fig.* 34) del rettangolo interno,

a'' e b'' i lati $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$ del rettangolo esterno,

e coincidendo in C i loro centri, siccome, analogamente a quanto si è detto al numero 52 per la corona circolare, il momento d'inerzia polare J della sezione vuota vale il momento d'inerzia polare del rettangolo maggiore ABDE meno quello del rettangolo IFGH rappresentante il vuoto, si avrà

$$J = \frac{1}{12}\left[a'' b'' (a''^2 + b''^2) - a' b' (a'^2 + b'^2) \right].$$

Si ottiene il valore di J che conviene al caso della sezione quadrata vuota facendo $b'' = a''$ e $b' = a'$ nella precedente equazione.

57. **Procedimento elementare per trovare il momento d'inerzia polare della sezione rettangolare rispetto all'asse perpendicolare al suo piano e passante pel suo centro.** — Ecco ora come elementarmente si possono trovare i due momenti d'inerzia I′ ed I″, dalla cui somma risulta il momento d'inerzia polare domandato J.

Mediante rette E′D′, E″D″, E‴D‴, ... (*fig.* 35) parallele ad xx' scompongasi il rettangolo dato in tante liste rettangolari EDD′E′, E′D′D″E″, E″D″D‴E‴, ... tutte lunghe come $\overline{AB} = a$ e tutte colle altezze FF′, F′F″, F″F‴, ... eguali fra di loro e piccolissime. Chiamando l ciascuna delle ultime indicate altezze, si ha che il momento d'inerzia della lista rettangolare EDD′E′ è dato dalla sua superficie al moltiplicata per il quadrato della distanza del suo centro di gravità dalla retta xx', la qual distanza (per

essere vicinissime le due rette ED ed E'D') si può ritenere sic-
come eguale a $\overline{CF} = \overline{ID} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2}b$, ossia da

$$\frac{1}{4}alb^2.$$

Questo momento d'inerzia, potendosi decomporre nei due fattori $\frac{1}{2}alb$ ed $\frac{1}{2}b$ di cui il primo rappresenta il volume del piccolissimo prisma ED'_1 che si può considerare come un parallelepipedo rettangolo le cui tre dimensioni sono $\overline{ED} = a$, $\overline{EE'} = l$ ed $\overline{EE_1} = \frac{1}{2}b$ ed il secondo la distanza del centro di gravità del detto piccolissimo prisma da un piano perpendicolare al piano del rettangolo proposto, passante per C e parallelo al lato ED, è rappresentato dal momento del volume ED'_1 rispetto al detto piano. Ragionando ora pei momenti d'inerzia delle liste rettangolari E'D'D''E'', E''D''D'''E''', ... come si è fatto per quello della lista EDD'E', si viene a conchiudere che il momento d'inerzia del rettangolo EDIH per rapporto alla retta xx' è la somma dei momenti rispetto al piano perpendicolare a quello del rettangolo preposto, passante per C' e parallelo al lato ED, di tanti piccolissimi prismi le cui dimensioni sono ED, EE' e CF, E'D', E'E'' e CF', E''D'', E''E''' e CF'', ... i quali prismi nel loro complesso costituiscono un prisma triangolare EE_1HDD_1I che ha per momento del suo volume rispetto al definito piano il momento d'inerzia della superficie rettangolare EDIH per rapporto alla retta xx'.

Ciò premesso, essendo $\frac{1}{8}ab^2$ il volume del detto prisma triangolare, distando il suo centro di volume dall'indicato piano dei momenti passante per HI dei $\frac{2}{3}$ di $\overline{CF}$ ossia di $\frac{1}{3}b$, ed ottenendosi il momento d'inerzia dell'intiero rettangolo ABDE rispetto ad xx' duplicando il momento d'inerzia del rettangolo EDIH rispetto alla stessa retta, si ha

$$I' = 2 \cdot \frac{1}{8}ab^2 \cdot \frac{1}{3}b = \frac{1}{12}ab^3.$$

Ragionando per trovare il momento d'inerzia I'' del rettangolo preposto ABDE rispetto alla retta yy' come si è fatto per la ricerca del momento d'inerzia I′ dello stesso rettangolo per rapporto ad xx', evidentemente si arriva a trovare che nel valore di I′ basta cangiare a in b e viceversa, per modo che si avrà

$$I'' = \frac{1}{12} b a^3.$$

Trovati i valori di I′ e di I″, sostituendoli nell'equazione (1) del numero precedente si ha quello di J, e risulta

$$J = \frac{1}{12} a b (a^2 + b^2).$$

Conosciuto il momento d'inerzia polare della sezione rettangolare piena, elementarmente si trova il momento d'inerzia polare della sezione rettangolare vuota come si è detto alla fine del numero 56.

58. **Determinazione del coefficiente di torsione.** — Se dall'ultima equazione del numero 51, la quale dà l'angolo di torsione, ricavasi il valore di E‴, si ha

$$E''' = \frac{ML}{J\theta},$$

e per un prisma di data materia si può esso determinare quando il prisma stesso siasi solidamente incastrato per un estremo e quando si conoscano: il valore del momento torcente M il quale agisce all'altro estremo in un piano normale all'asse del prisma stesso; la distanza L fra la sezione d'incastro e l'estrema sezione libera in cui agisce il detto momento; il momento d'inerzia polare della sua sezion retta e l'angolo di torsione che il momento M fa prendere al prisma sottoposto ad esperienza. Generalmente il prisma s'incastra orizzontalmente, all'estrema base libera si applica un braccio di leva sensibilmente orizzontale, all'estremo di questo braccio si appende un peso noto e moltiplicando questo peso pella sua distanza dal centro della base libera del prisma, si ha il valore di M; il valore di L risulta misurando esattamente la parte di prisma che non rimane incastrata; il valore di J si calcola dietro la conoscenza della forma e delle dimensioni della sezion trasversale del prisma; e finalmente il valore di θ si può dedurre disponendo nel piano della base libera del prisma un arco graduato col suo centro nel centro della base stessa, applicando nel piano di detta base un indice che costantemente si conservi col suo asse diretto secondo un raggio dell'indicato arco, leggendo gli angoli corrispondenti alle posizioni dell'indice prima dell'applicazione e dopo l'applicazione del peso capace di produrre la torsione, facendo la differenza α fra gli angoli letti e calcolando il valore di θ ossia l'arco di raggio eguale all'unità chiudente il detto angolo α mediante la formola

$$\theta = \pi \frac{\alpha}{180},$$

essendo π il noto rapporto 3,1415 .... della circonferenza al diametro. Sostituendo nell'equazione stabilita nel precedente numero i trovati valori di M, L, J e θ si calcola E'''.

Affinchè i risultamenti che si ottengono operando come or ora si è detto possano inspirare fiducia, conviene sottoporre ad esperienza dei prismi molto brevi, perchè altrimenti, a motivo del loro stesso peso, il fenomeno della flessione prodotta dal detto peso verrebbe a complicare quello della torsione; di più non basta di trovare il valore di E''' conveniente ad una data sostanza con una sola esperienza, bisogna instituirne parecchie su prismi della stessa materia e con sezione della stessa forma, e prendere per valore di E''' da adoperarsi nella pratica il valore medio di tutti quelli risultanti dalle diverse esperienze le quali in modo soddisfacente vennero condotte a buon termine.

L'ingegnere Duleau fece alcune esperienze per determinare il coefficiente di torsione del ferro, ed operò sopra sbarre a sezione circolare e sopra sbarre con sezioni quadrate e rettangolari. I risultati di tali esperienze non furono troppo soddisfacenti a motivo delle irregolarità che si trovarono nei valori dei coefficienti di torsione, irregolarità le quali, essendo piuttosto considerevoli per le sbarre di ferro con sezioni quadrate e rettangolari, portarono a conchiudere potersi vantaggiosamente applicare le considerazioni teoriche che vennero esposte sulla torsione ai corpi cilindrici con sezione circolare ed ai prismi con sezione poligonale regolare di un gran numero di lati, e condurre esse a risultati di approssimazione piuttosto grossolana nei casi meno frequenti della pratica di prismi con sezioni diverse da quelle or ora accennate.

Esperienze di Savart hanno condotto a risultamenti che, meglio di quelli di Duleau, si accordano colle dette considerazioni teoriche; e dal complesso delle diverse esperienze che finora vennero instituite deriva potersi in pratica ammettere i seguenti valori medii dei coefficienti di torsione riferiti al millimetro quadrato.

INDICAZIONE DEI CORPI	Coefficienti di torsione riferiti al millimetro quadrato
	Cg
Larice rosso	433
Quercia	400
Acciaio di Germania	6000
Acciaio fuso assai fino	10000
Bronzo	1066
Ferro dolce	6000
Ferro in barre	6666
Ghisa	2000
Rame	4366

Il confronto dei coefficienti d'elasticità longitudinale relativi all'estensione coi coefficienti di torsione porta a conchiudere che pei corpi ordinariamente usati nelle costruzioni non si va lungi dal vero assumendo questi siccome rispettivamente eguali ad 1/3 di quelli.

59. **Angolo di torsione per ogni unità di lunghezza, e suo limite pratico.** — Il quoziente

$$\frac{\theta}{L}=\frac{M}{E'''J},$$

che si ricava dall'ultima equazione del numero 51 la quale somministra il valore dell'arco θ di raggio L chiudente l'angolo di torsione, è ciò che misura l'*angolo di torsione per ogni unità di lunghezza,* e rappresenta esso l'arco aa_1 (*fig.* 35) di raggio $\overline{Ca}$ eguale all'unità chiudente l'angolo ACA_1 il quale esprime di quanto in un prisma contorto una sezion retta qualunque ABD ha girato rispetto alla sezion retta A′B′D′ che da essa dista di una quantità $\overline{C'C}$ pure eguale all'unità.

Supponendo che la fibra AA′ sia maggiormente distante dall'asse CC′ del prisma, evidentemente nel tratto di solido compreso fra le due sezioni rette ABD ed A′B′D′ sarà essa quella che subisce il massimo spostamento pel fatto della torsione, e fra tutti i punti dell'asse della fibra AA' sarà A quello che passando in A_1 descrive il più grande arco in un piano normale dell'asse del prisma e col centro sul detto asse. Ciò premesso, se chiamasi r la distanza $\overline{CA}$ della fibra AA' dall'asse CC' del prisma, siccome l'arco aa_1 di raggio $\overline{Ca}=1$ vale $\frac{\theta}{L}$, l'arco AA_1 varrà $\frac{r\theta}{L}$; e quindi, moltiplicando per r i due membri dell'equazione che venne stabilita al principio di questo numero, si avrà che per ogni unità di lunghezza la fibra maggiormente distante dall'asse del prisma subisce lo spostamento S espresso da

$$S=\frac{r\theta}{L}=\frac{Mr}{E'''J}.$$

Questo spostamento S è la quantità che non deve superare un certo limite affinchè non avvenga snervamento nei prismi sottoposti a torsione, e nelle ordinarie circostanze della pratica non deve esso eccedere metri, decimetri, centimetri, ecc. 0,000667 per ogni porzione di prisma contorto rispettivamente lunga 1 metro, 1 decimetro, 1 centimetro, ecc.

60. **Equazione di stabilità dedotta dal limite pratico dell'angolo di torsione.** — Un corpo prismatico sottoposto a torsione trovasi in istato di stabilità, quando il momento della forza la quale produce la torsione è inferiore a quello che è capace di far subire alla fibra maggiormente distante dall'asse lo spostamento limite affinchè non avvenga snervamento. Segue da ciò che il massimo momento, col quale si può cimentare in un prisma la resistenza alla torsione, è il valore di M che ricavasi dall'ultima equazione del numero precedente, e che quindi l'equazione di stabilità è

$$M=E'''S\frac{J}{r},$$

nella quale le lettere E''' ed J hanno i significati che loro vennero attribuiti al numero 50, e le lettere r ed S quelli che ad esse vennero dati nel precedente numero.

Per gli alberi dei motori idraulici e per quelli delle ruote in genere si sono calcolati dei valori di $E'''S$, assumendo per S 0,000667 negli alberi leggieri e 0,0003335 negli alberi forti, ossia in quelli dei motori di prima trasmissione dei movimenti e per quelli destinati a trascinare delle pesanti masse. Questi valori di $E'''S$, riferendo quelli di E''' al metro quadrato col prenderli nella tavola che venne data al numero 58 e col moltiplicarli per 1000000, sono quali risultano dalla seguente tavola.

INDICAZIONE DEI CORPI	VALORE DI $E''' S$	
	per alberi leggeri	per alberi forti
	Cg	Cg
Larice rosso	288811	144405
Quercia.	266800	133400
Acciaio e ferro	4002000	2001000
Ghisa	1334000	667000

61. **Ipotesi fondamentali sulla resistenza dei solidi prismatici ed omogenei alla rottura per torsione.** — In un solido prismatico sottoposto a torsione si verifica la rottura allorquando lo spostamento angolare, il quale ha luogo fra due sue sezioni consecutive qualunque, e tale che l'allungamento risultante nelle porzioni di fibre maggiormente deformate comprese fra queste sezioni ha di tanto allontanate le molecole le une dalle altre da non poterlo essere di più senza che avvenga la loro separazione.

Non si posseggono sufficienti dati sperimentali sulla resistenza alla rottura per torsione, ed in loro mancanza si accetteranno le ipotesi già ammesse dal Navier e da molti altri autori, che cioè le azioni molecolari sviluppate dalle diverse fibre per riprendere le primitive loro posizioni, anche al momento in cui sta per avvenire la rottura, siano in un prisma direttamente proporzionali alle superficie delle sezioni rette ed alle distanze di queste dall'asse del prisma stesso.

62. **Momento di resistenza alla rottura per torsione.** — Siano:

ω la superficie elementare della sezione di una fibra qualunque;

v la distanza di questa fibra dall'asse del prisma;

M_1 il momento di resistenza alla rottura per torsione, il qual momento è da considerarsi siccome eguale ed agente per verso contrario a quello secondo cui agisce la somma M dei momenti delle forze che producono la torsione;

r la distanza che la fibra del prisma maggiormente distante dal suo asse ha dall'asse medesimo ;

R''' un coefficiente costante dipendente dalla materia di cui il prisma è formato rappresentante la resistenza alla rottura per torsione riferita all'unità di superficie.

La fibra che trovasi a distanza r dall'asse del prisma, essendo quella che subisce il più grand'allungamento, è la prima in cui tende a manifestarsi la rottura, e quindi questa fibra all'istante in cui sta per incominciare la rottura del prisma svolge l'azione molecolare R''' riferita all'unità di superficie. Ammettendo ora l'ipotesi della proporzionalità delle resistenze delle fibre alle loro distanze dall'asse intorno al quale ha luogo la torsione, agevolmente si deduce: che una fibra qualunque posta a distanza v dal detto asse sviluppa l'azione molecolare

$$\frac{v}{r}R'''$$

riferita all'unità di superficie, e l'azione molecolare

$$\frac{v}{r}R'''\omega$$

riferita all'intiera superficie della sua sezione ; che il momento della resistenza opposta da una fibra qualunque rispetto all'asse del solido contorto è

$$R'''\frac{1}{r}\omega v^2;$$

e che la somma dei momenti opposti da tutte le fibre, ossia il momento di resistenza alla rottura per torsione, è data da

$$M_1 = M = R'''\frac{1}{r}\Sigma\,\omega v^2.$$

Chiamando poi J il momento d'inerzia polare $\Sigma\omega v^2$ della superficie della sezion retta del prisma sottoposto a torsione, l'ultima equazione diventa

$$M_1 = M = R'''\frac{J}{r}.$$

La quantità R''' chiamasi da taluni *coefficiente di rottura per torsione*, e va essa considerata siccome una forza da esprimersi colla medesima unità in cui trovasi espressa quella che entra nel momento M, riferendola all'unità di superficie corrispondente all'unità di lunghezza scelta per esprimere r, il braccio che è uno dei due fattori componenti il momento M e le dimensioni contenute nel momento d'inerzia J.

63. **Determinazione della resistenza alla rottura per torsione.** — Le esperienze per determinare il valore di R''', ossia la resistenza alla rottura per torsione riferita all'unità di superficie, devono essere instituite come si è detto al numero 58 sulla determinazione del coefficiente di torsione E''', accrescendo però il momento M, finchè incomincia a manifestarsi disgiunzione di molecole sulla superficie del corpo prismatico sottoposto ad esperimento. Allora, mettendo nell'ultima equazione del numero precedente il valore di M corrispondente all'istante in cui si manifestarono i primi segni di rottura ed il valore di $\frac{J}{r}$ calcolato dietro la forma e le dimensioni del solido esperimentato, si può dedurre il valore di R''' conveniente alla materia costituente il prisma ed alla forma della sua sezione trasversale.

Pochissime sono le esperienze che finora vennero instituite sulla resistenza alla rottura per torsione, ed i risultati a cui esse hanno condotto riescono incerti a motivo delle irregolarità che presentano per inesattezza delle ipotesi che vennero riferite al numero 61, e dietro le quali si è dedotta l'ultima equazione del precedente numero. I cilindri a base circolare sono i solidi in cui si riscontrano minori irregolarità nei valori di R''' e, riferendoli al millimetro quadrato, si può ritenere che per la quercia, pel ferro e per la ghisa siano mediamente quali risultano dalla seguente tavola:

INDICAZIONE DEI CORPI	Resistenza alla rottura per torsione riferita al millimetro quadrato
	Cg
Quercia e larice rosso	4
Acciaio e ferro	60
Ghisa	20

64. **Condizione ed equazione di stabilità dedotte dalla resistenza alla rottura per torsione.** — Se alle lettere M, R''', J ed r

si conservano i significati che loro vennero attribuiti nel numero 62, affinchè in un solido prismatico sottoposto a torsione siavi stabilità, bisogna che nella fibra maggiormente distante dall'asse non si sviluppi la resistenza alla rottura R''' per ogni unità di superficie, ma sibbene una frazione solamente di tale resistenza che, chiamando n''' un coefficiente di stabilità, sarà espressa da $n''' R'''$. In vista di questo si avrà

$$M < R''' \frac{J}{r}$$

per condizione di stabilità e

$$M = n''' R''' \frac{J}{r}$$

per equazione di stabilità.

Nell'applicazione di quest'equazione di stabilità agli alberi di ruote si può assumere come valore di $n''' = \frac{1}{15}$ per gli alberi che devono girare con moto uniforme e senza urti; $\frac{1}{30}$ per gli alberi il cui moto non è sempre uniforme e che vanno soggetti ad urti.

65. **Uso delle equazioni di stabilità relative alla torsione. —** L'equazione di stabilità del numero 60 e quella del numero precedente servono principalmente alla risoluzione dei due seguenti problemi pratici:

1° *Trovare a qual momento torcente* M *si può assoggettare un corpo prismatico ed omogeneo di data sostanza del quale si conoscono forma e dimensioni della sezion retta;*

2° *Trovare una delle dimensioni della sezion retta di forma cognita da assegnarsi ad un corpo prismatico omogeneo di data sostanza che deve andar sottoposto alla torsione prodotta da un dato momento* M.

L'equazione del numero 60 serve pel caso in cui è noto il valore numerico di E''', e l'equazione del numero 64 serve quando invece di E''' si conosce R'''.

Nel risolvere il secondo problema si trova: o che il rapporto $\frac{J}{r}$ che entra nelle equazioni di stabilità contiene una sola dimensione della sezion retta del solido da determinarsi, ed allora l'applicazione di una delle equazioni di stabilità conduce senz'altro a trovare questa dimensione; oppure che il detto rapporto contiene due o più dimensioni della sezion retta, ed allora bisogna preventivamente fissarsene una o più e calcolare quindi, coll'applicare una delle due equazioni di stabilità, quella dimensione lasciata incognita. Così pei cilindri a sezion retta circolare il rapporto $\frac{J}{r}$ dipende solamente dal raggio, ed una delle due equazioni di stabilità serve senz'altro alla sua determinazione quando si conoscono tutte le altre quantità che entrano nell'equazione di stabilità che vuolsi applicare; pei solidi cilindrici invece, la cui sezione ha forma di corona circolare, il rapporto $\frac{J}{r}$ dipende dal raggio interno e dal raggio esterno, e preventivamente bisogna darsi, o uno di essi e calcolare poi l'altro, oppure una relazione che deve esistere fra i due.

Le considerazioni teoriche, che vennero esposte sulla resistenza dei prismi alla torsione e che convengono abbastanza bene ai solidi cilindrici a sezion retta circolare ed ai solidi prismatici aventi per sezion retta dei poligoni regolari di molti lati, non possono condurre che a risultati di grossolana approssimazione quando si applicano a prismi di sezion retta poligonale qualunque a motivo dei dissaccordi in cui si trovano coi fatti d'osservazione. Per buona sorte però i solidi cilindrici a sezioni rette circolari piene e vuote ed i solidi prismatici aventi per sezioni rette dei poligoni regolari di molti lati sono i più frequenti e quasi i soli per cui nella pratica vien cimentata la resistenza alla torsione, e quindi l'esposta teoria, tuttochè incompleta, è da ritenersi siccome più che sufficiente in questo lavoro avente scopo essenzialmente pratico.

Chi vuol conoscere un interessante e ben studiato lavoro sulla resistenza alla torsione può consultare la terza edizione del Navier, che nell'anno 1864 venne pubblicata con numerose note e lunghe appendici del signor Barré de Saint-Venant, dove trovasi una teoria che si può dire conforme ai fatti d'osservazione e che generalmente si può applicare a solidi prismatici con sezioni rette diverse dalle circolari e dalle poligonali regolari di molti lati.

66. **Modo di applicare le equazioni di stabilità nel caso in cui le forze che producono la torsione sono molte e contenute in diversi piani normali all'asse del solido.** — Sia un solido di asse C'X (*fig.* 36), e nelle diverse sezioni A'B'D', A''B''D'', A'''B'''D''' trovisi sollecitato dalle forze P', P'', P''', le quali producono torsione agendo rispettivamente per lo stesso verso con momenti M', M'', M''',

rispetto al detto asse; sia poi MNP la sezione del solido che in un modo qualunque è mantenuta ferma ed alla quale si possono riferire i momenti rotatori subìti da tutte le altre sezioni attorno all'asse CX. Evidentemente è sollecitato a torsione, dal solo momento M' il tratto di solido $A'B'D'A''B''D''$, dalla somma dei due momenti M' ed M'' il tratto successivo $A''B''D''A'''B'''D'''$, e dalla somma dei tre momenti M', M'' ed M''' il tratto $A'''B'''D'''MNP$. Essendo poi il solido prismatico, il tratto $A'''B'''D'''MNP$ è quello in cui più che negli altri due si fa sentire l'effetto della torsione ed è ad esso tratto che si deve applicare l'equazione di stabilità col farvi il momento torcente M eguale alla somma dei tre momenti M', M'' ed M'''.

In generale, avendosi un solido prismatico a cui in n sezioni rette diverse sono applicate n forze producenti torsione, l'equazione di stabilità deve essere applicata pel tratto che termina colla sezione rimasta fissa ponendovi per M la somma di tutti i momenti che producono la torsione quand'essi tendono a girare per uno stesso verso. Nel caso in cui i detti momenti agiscono alcuni in un senso ed alcuni in senso contrario, bisogna applicare l'equazione di stabilità per quel tratto cui corrisponde la massima somma algebrica dei momenti che producono la torsione, prendendo questa somma di momenti a partire da quello contenuto nella sezione maggiormente distante dalla sezione rimasta fissa fino a quello contenuto nella sezione che precede il tratto che si considera, e sarà la detta somma massima il valore di M da porsi all'adottata equazione di stabilità.

67. **Confronto fra gli angoli di torsione che subiscono i prismi con sezione piena ed i prismi con sezione vuota.** — Se consideransi due prismi della stessa materia, egualmente lunghi, in egual modo sottoposti a torsione sotto l'azione di uno stesso momento, colla medesima superficie di sezion retta e soltanto con forma diversa in quest'ultima, in guisa che siano essi equivalenti in volume con eguaglianza nei valori del coefficiente di torsione E''', della lunghezza L e del momento torcente M; se supponesi che la sezione di uno dei prismi sia piena e vuota quella dell'altro coi loro momenti d'inerzia polari rispettivamente eguali ad J' ed J''; se chiamansi θ' e θ'' gli archi di raggio 1 chiudenti gli angoli di torsione che questi prismi vengono a subire sotto l'azione del momento M, se applicasi la formola del numero 51, che dà

$$\theta' = \frac{ML}{E'''J'}, \qquad \theta'' = \frac{ML}{E'''J''};$$

e se dividonsi l'una per l'altra queste due equazioni risulta

$$\frac{\theta'}{\theta''}=\frac{J''}{J'}.$$

Ora, a parità di superficie, il momento d'inerzia J'' della sezione vuota è evidentemente maggiore del momento d'inerzia J' della sezione piena, giacchè, essendo equivalenti le due figure, si possono supporre composte di un egual numero di elementi superficiali i quali più nella prima che nella seconda trovansi distanti dagli assi per rapporto a cui si prendono i momenti polari. Segue da ciò che il rapporto $\frac{J''}{J'}$ e che quindi anche il suo eguale $\frac{\theta'}{\theta''}$ è maggiore dell'unità, ossia ancora che θ' è maggiore di θ''. Il prisma con sezione piena adunque si contorce più di quello con sezione vuota, e quindi a parità di materia i prismi con sezione vuota sono più solidi di quelli con sezione piena; ossia ancora con economia di materia, si può avere la necessaria stabilità impiegando per resistere alla torsione dei prismi vuoti anzichè dei prismi pieni.

Si può arrivare alle stesse conseguenze paragonando il momento di torsibilità del solido a sezione piena col momento di torsibilità del solido a sezione vuota (num. 50) giacchè per quello che poco anzi si è detto, essendo $J''>J'$ e quindi anche $E'''J''>E'''J'$, è giuoco forza il conchiudere che per produrre una data torsione nel solido a sezione vuota occorre un momento di forze estrinseche più grande di quello che è necessario per ottenere la stessa torsione nel solido a sezione piena.

Paragonando fra loro un cilindro pieno ed un cilindro vuoto della stessa materia, della stessa lunghezza, di equivalente sezion retta e sottoposti all'azione di uno stesso momento che tende a contorcerli, essendo r il raggio del cilindro pieno, si ha per valore del suo momento d'inerzia polare J'

$$J'=\frac{1}{2}\pi r^4,$$

ed, essendo rispettivamente r' ed r'' il raggio interno ed il raggio esterno del cilindro vuoto, si ha per momento d'inerzia polare J'' di quest'ultimo

$$J''=\frac{1}{2}\pi(r''^4-r'^4).$$

Il rapporto dell'arco θ' che misura l'angolo di torsione del primo all'arco θ'' che misura l'angolo di torsione del secondo è adunque

$$\frac{\theta'}{\theta''}=\frac{r''^4-r'^4}{r^4}=\frac{(r''^2+r'^2)\,(r''^2-r'^2)}{r^2.r^2}.$$

Ora per l'equivalenza delle sezioni rette dei due solidi si ha

$$r''^2-r'^2=r^2$$

e quindi

$$\frac{\theta'}{\theta''}=\frac{r''^2+r'^2}{r''^2-r'^2}$$

la qual equazione, per essere la somma dei quadrati dei due raggi r''^2 ed r'^2 maggiore della loro differenza, mostra ad evidenza la maggioranza di θ' su θ''.

68. **Applicazione della teoria sulla resistenza alla torsione nella risoluzione di alcuni semplici problemi**. — I. *Trovare il raggio da darsi ad un albero cilindrico pieno in ferro e che deve girare con moto uniforme, incastrato alle estremità e portante un peso di 2000 chilogrammi alla distanza di metri 0,20 dall'asse.*

Adottando l'equazione di stabilità del numero 64 nella risoluzione del proposto quesito, chiamando r il raggio domandato e prendendo il metro per unità di lunghezza ed il metro quadrato per unità di superficie, bisognerà in essa fare

$$\mathrm{M}=2000\times 0,20=400, \qquad \mathrm{R}'''=60000000,$$

$$n'''=\frac{1}{15}, \qquad \frac{\mathrm{J}}{r}=\frac{\frac{1}{2}\pi r^4}{r}=\frac{1}{2}\pi r^3,$$

per cui si otterrà la seguente equazione determinatrice di r

$$400=\frac{1}{15}\,60000000\times\frac{1}{2}\pi r^3$$

d'onde, essendo π il noto rapporto 3,1415 ...... della circonferenza al diametro,

$$r=\sqrt[3]{\frac{1}{5000.\pi}}=0^{\mathrm{m}},0339,$$

cosicchè il domandato raggio sarà un po' meno di 4 centimetri.

II. *Trovare il raggio maggiore ed il raggio minore da assegnarsi ad un albero cilindrico cavo di ghisa, il quale deve portare una ruota idraulica destinata a trasmettere un lavoro di* 60 *cavalli-vapore colla velocità di* 1/4 *di giro per ogni minuto secondo.*

Per la risoluzione di questo problema è innanzi tutto necessario di trovare il momento M che sull'albero della ruota produce torsione, e che corrisponde al dato lavoro di 60 cavalli-vapore con 1/4 di giro per ogni minuto secondo. — Perciò se in generale chiamansi

L il lavoro in cavalli-vapore che deve trasmettere la ruota,

n il numero dei giri che essa deve dare per ogni minuto secondo,

R il raggio della sua circonferenza esterna espresso in metri,

P quella forza in chilogrammi che, supposta applicata tangenzialmente alla circonferenza della ruota, e moltiplicata per la velocità $2\pi R n$ con cui si muove ogni punto della circonferenza stessa, dà il lavoro L espresso in chilogrammetri, si ha, giacchè ogni cavallo-vapore vale 75 chilogrammetri,

$$P . 2\pi R n = 75 L$$

d'onde, osservando che il momento M è appunto eguale a PR,

$$M = PR = \frac{75 L}{2\pi n}.$$

Venendo ora al caso particolare proposto si calcolerà M facendo nella precedente equazione

$$L = 60 \qquad n = \frac{1}{4},$$

e si otterrà

$$M = \frac{75 \times 60}{2\pi . \frac{1}{4}} = \frac{9000}{\pi}.$$

Dopo di ciò, chiamando r'' il raggio maggiore dell'albero, assumendosi $\frac{3}{5} r''$ per raggio minore r' e prendendo per unità di lunghezza il metro e per unità di superficie il metro quadrato, si passerà ad applicare l'equazione di stabilità che venne data al numero 64 facendo in essa

$$M = \frac{9000}{\pi}, \qquad R''' = 20000000,$$

$$n''' = \frac{1}{30} \qquad \frac{J}{r} = \frac{\frac{1}{2}\pi\left(r''^4 - \frac{81}{625} r''^4\right)}{r''} = \frac{272}{625}\pi r''^3,$$

e si troverà la seguente equazione determinatrice di r''

$$\frac{9000}{\pi} = \frac{1}{30}\, 20000000 \times \frac{272}{625}\pi r''^3,$$

dalla quale ricavasi, essendo π il noto rapporto 3,1415 ...... della circonferenza al diametro,

$$r'' = \sqrt[3]{\frac{9 \times 3 \times 625}{2000 \times 272 . \pi^2}} = 0^m,1465.$$

Il valore di r' poi sarà dato da

$$r' = \frac{3}{5}\, 0,1465 = 0^m,0879,$$

e lo spessore s della parte piena dell'albero avrà il valore

$$s = 0,1465 - 0,0879 = 0^m,0586.$$

CAPITOLO V.

Resistenza allo scorrimento nei corpi solidi.

69. **Resistenza allo scorrimento trasversale e resistenza allo scorrimento longitudinale nei corpi solidi fibrosi.** — Due sono i principali modi con cui in un corpo solido fibroso può essere cimentata la resistenza allo scorrimento, ossia la resistenza ad uno sforzo che tende a dividere il corpo facendo scorrere una delle sue parti sull'altra senza esercitare nè compressione, nè estensione fuori della faccia nella quale sarà per manifestarsi la rottura. Si verifica il primo modo, e viene cimentata la resistenza allo *scorrimento trasversale*, allorquando il movimento tangenziale delle due parti che tendono a staccarsi l'una dall'altra ha luogo in direzione perpendicolare alle fibre del corpo; si verifica invece il secondo modo, e si provoca allora la *resistenza allo scorrimento longitudinale*, quando il detto movimento si manifesta nel senso delle fibre.

I corpi fibrosi si comportano in modo ben diverso per rapporto alle resistenze allo scorrimento trasversale ed allo scorrimento longitudinale; ed in generale si mostrano forniti di egual facoltà resistente i corpi con tessuto granulare, in qualunque senso venga cimentata la loro resistenza allo scorrimento.

70. **Scorrimento trasversale assoluto e scorrimento trasversale relativo; ipotesi fondamentale sulla resistenza allo scorrimento trasversale nei solidi omogenei ed elastici.** — Allorquando in un corpo solido vien provocata la resistenza allo scorrimento trasversale, si può supporre: che una sezione piana qualunque A′B′ (*fig.* 57) si sposti relativamente alla sezione vicinissima AB per una translazione parallela al piano di questa e che una fibra o linea materiale $\overline{aa'}$, presa fra le dette sezioni e normalmente ai loro piani, divenga leggiermente obliqua per rapporto alle superficie, o piane o lievemente curve, che dopo la deformazione vengono a rappresentare le sezioni considerate.

La quantità $\overline{A'A_1}$, la quale rappresenta lo spostamento preso da tutti i punti della sezione A′B′ passata nella posizione A_1B_1, chiamasi *scorrimento assoluto;* e prende il nome di *scorrimento* *relativo* il rapporto $\frac{\overline{A'A_1}}{\overline{AA'}}$ dello scorrimento assoluto alla distanza primitiva dalle due sezioni considerate, ossia la tangente trigonometrica dell'angolo $a'aa_1 = A'AA_1$ che qualunque elemento della fibra aa' fa colla nuova posizione aa_1 che esso viene a prendere in seguito allo scorrimento trasversale.

L'azione molecolare sviluppatasi nel corpo pel fatto dello spostamento della sezione A'B' relativamente alla sezione AB evidentemente dipende dalla superficie di questa sezione e dallo scorrimento relativo, e generalmente si ammette che sia proporzionale al prodotto delle accennate due quantità, finchè la forza che produce lo scorrimento non è capace di snervare il corpo.

71. Azione molecolare che fra due sezioni si sviluppa in un solido prismatico omogeneo ed elastico sotto l'azione di una forza la quale provoca in esso la resistenza allo scorrimento trasversale, coefficiente d'elasticità trasversale. — Chiaminsi:

D la distanza $\overline{AA'}$ (*fig.* 37) delle due sezioni considerate;

Ω la superficie della sezione AB;

d lo scorrimento assoluto $\overline{A'A_1}$;

Q_1 la cercata azione molecolare che si sviluppa per la forza che provoca e produce lo scorrimento, la qual forza si può considerare siccome eguale e contraria ad una forza estrinseca T^{IV} posta nella sezione A_1B_1 e diretta nel senso secondo cui si verifica lo spostamento trasversale della sezione A_1B_1 per rapporto alla AB;

E^{IV} un numero costante dipendente dalla materia di cui il prisma è formato.

Essendo espresso da $\frac{d}{D}$ lo scorrimento relativo, la cercata azione molecolare sarà data dall'equazione

$$Q_1 = T^{IV} = E^{IV}\Omega\frac{d}{D} \quad (1),$$

e, facendo lo scorrimento relativo $\frac{d}{D} = \delta$, quest'equazione si trasforma in

$$Q_1 = T^{IV} = E^{IV}\Omega\,\delta.$$

La quantità E^{IV} che vale il rapporto fra la resistenza $\frac{Q_1}{\Omega}$ riferita all'unità di superficie e lo scorrimento relativo δ chiamasi *coefficiente d'elasticità trasversale*, e, siccome facendo $\Omega=1$ e $\delta=1$ si ha $E^{IV}=T^{IV}$, si può astrattamente dire che il coefficiente d'elasticità trasversale è quella forza la quale in un prisma di base eguale all'unità sarebbe capace di produrre uno scorrimento relativo pure eguale all'unità.

Per quanto concerne alle unità con cui nei calcoli si devono esprimere le quantità D, d, Ω, Q_4 ed E^{IV} vale quanto si è detto al numero 12 sopra la stessa cosa relativamente alle quantità analoghe L, l, Ω, Q_1 ed E'.

72. **Difficoltà di procedere ad una determinazione diretta del coefficiente d'elasticità trasversale e valori che al medesimo si possono assegnare nelle varie circostanze della pratica.** — È cosa assai difficile il produrre in un corpo anche prismatico il solo scorrimento delle sue sezioni trasversali senza che il fenomeno rimanga complicato da circostanze esteriori a quella che si vuol studiare; così, se cercasi di produrre questo scorrimento sospendendo un peso all'estremità di un prisma orizzontalmente incastrato all'altro estremo, egli è evidente che questo carico tende ad inflettere il corpo, e che per conseguenza contemporaneamente si produce scorrimento e flessione; e lo stesso avviene quando un prisma, anche di piccola lunghezza, caricato di uno o più pesi, si appoggia orizzontalmente a due sostegni fissi. Per ottenere in un prisma il solo scorrimento trasversale, bisogna contemporaneamente far uso di forze perpendicolari e di forze parallele all'asse, e disporre queste in modo da paralizzare gli effetti estranei allo scorrimento prodotti dalle prime; questa combinazione però, tuttochè non assolutamente impossibile, è almeno difficilissima a realizzarsi, per cui cercasi generalmente di mettere in giuoco l'elasticità trasversale producendo la torsione in un cilindro della sostanza da sperimentarsi ed incastrato per un estremo. Come si è detto al numero 58 si determina il coefficiente di torsione, e si assume questo siccome coefficiente d'elasticità trasversale.

Che si possa assumere il coefficiente di torsione di una data sostanza per suo coefficiente di elasticità trasversale facilmente si vede da ciò che, cimentando in un prisma sia la resistenza alla torsione, sia quella allo scorrimento trasversale e considerando due sue sezioni vicinissime, una di queste si sposta per rapporto all'altra in seguito di una specie di strisciamento che fra esse si verifica: nella torsione lo strisciamento ha luogo per un moto rotatorio che una sezione prende relativamente all'altra attorno ad un asse perpendicolare ai loro piani e passante pei loro centri di superficie; nello scorrimento trasversale invece lo strisciamento avviene per un moto di traslazione che una sezione prende per rapporto all'altra; i due fenomeni però sono analoghi e si l'uno che l'altro mettono in giuoco l'elasticità trasversale del corpo e quindi non si può andar lungi dal vero assumendo il coefficiente d'elasticità trasversale siccome sensibilmente eguale al coefficiente di torsione, quando quest'ultimo venga determinato esperimentando su corpi cilindrici con sezion retta circolare che sono quelli a cui meglio si adatta la semplice ed elementare teoria sulla torsione che venne data nel precedente capitolo.

Confrontando i risultati d'esperienza sulla determinazione del coefficiente d'elasticità longitudinale E' relativo all'estensione coi pochi che si conoscono sulla determinazione del coefficiente d'elasticità trasversale E^{IV}, si viene a conchiudere che pei corpi ordinariamente impiegati nelle costruzioni con qualche approssimazione si può prendere E^{IV} eguale ad $\frac{1}{3}E'$, per modo che si ha una semplicissima relazione in grazia della quale, conoscendosi il coefficiente d'elasticità longitudinale relativo all'estensione per una data materia, approssimativamente si può dedurre il coefficiente d'elasticità trasversale relativo alla stessa materia.

73. **Condizione ed equazione di stabilità, dedotte dalla resistenza allo snervamento, per un solido prismatico, omogeneo ed elastico sottoposto all'azione di una forza provocante la resistenza allo scorrimento trasversale.** — Chiamando

T^{IV} la forza diretta normalmente all'asse del prisma, incontrante quest'asse e provocante la resistenza allo scorrimento trasversale,

Q^{IV} la resistenza allo snervamento sotto l'azione di una forza che tende a produrre scorrimento trasversale, riferita all'unità di superficie della sezion retta del prisma,

Ω la superficie del prisma stesso,

essendo espressa da

$$Q^{IV}\Omega$$

la resistenza allo snervamento per scorrimento trasversale opposta dal prisma di sezion retta Ω, si avrà per condizione di stabilità

$$T^{IV} < Q^{IV}\Omega.$$

Ora, per soddisfare a quest'ineguaglianza, basta fare in modo che T^{IV} sia una certa frazione di $Q^{IV}\Omega$, cosicchè chiamando m^{IV} un numero minore dell'unità che si assume per coefficiente di stabilità, si può porre l'equazione

$$T^{IV} = m^{IV} Q^{IV} \Omega \qquad (1),$$

la quale costituisce appunto l'equazione di stabilità.

Osservando poi che, essendo E^{IV} e δ il coefficiente d'elasticità trasversale e lo scorrimento relativo corrispondente all'istante in cui sta per avvenire snervamento, si ha $Q^{IV} = E^{IV}\delta$, la precedente equazione di stabilità si può ridurre a

$$T^{IV} = m^{IV} E^{IV} \Omega \delta \qquad (2).$$

Per quanto concerne ai valori del coefficiente di stabilità m^{IV}, si possono essi prendere eguali a quelli di m', di cui si è tenuto parola al numero 14 parlando dell'equazione di stabilità pei prismi sottoposti a tensione, e, a seconda dei diversi materiali, farli variare colle norme che in detto numero vennero date.

74. Dato fondamentale d'esperienza sulla resistenza alla rottura per scorrimento nei solidi prismatici ed omogenei. — Incastrando per un estremo e con una stessa disposizione di fibre, se pur trattasi di corpi fibrosi, dei corti corpi prismatici, omogenei, della medesima sostanza, egualmente lunghi, ma con differenti superficie delle loro sezioni rette, e quindi sottoponendoli all'azione di forze passanti pei loro assi e ad essi perpendicolari finchè avvenga la loro rottura per scorrimento, si trova essere queste forze sensibilmente proporzionali alle superficie delle sezioni rette dei prismi esperimentati, e per conseguenza potersi stabilire siccome dato fondamentale d'esperienza: che nei corpi prismatici ed omogenei le resistenze alla rottura per scorrimento, le quali resistenze sono eguali alle forze estrinseche le quali stanno per immediatamente romperli, sono proporzionali alle superficie delle loro sezioni rette.

75. Resistenza dei solidi prismatici ed omogenei alla rottura per scorrimento. — Siano:

Ω la superficie secondo la quale tende ad avvenire lo scorrimento di una parte di prisma relativamente all'altra;

R_4 la resistenza che il solido oppone ad essere rotto per scorrimento, la qual resistenza va considerata siccome una forza eguale e direttamente contraria alla forza T^{IV}, sotto l'azione della quale sta per manifestarsi la rottura;

R^{IV} un coefficiente costante dipendente dalla materia di cui il prisma è formato.

Applicando il fondamentale risultato d'esperienza che venne riferito nel precedente numero, si ha la seguente equazione determinatrice della cercata resistenza alla rottura per scorrimento

$$R_4 = T^{IV} = R^{IV}\Omega.$$

Il numero R^{IV}, che può essere chiamato *coefficiente di rottura per scorrimento*, non è altro che il quoziente $\frac{R_4}{\Omega}$, ossia la resistenza alla rottura per scorrimento riferita all'unità di superficie; e, siccome facendo nell'ultima equazione $\Omega = 1$ si deduce

$$R_4 = T^{IV} = R^{IV},$$

ne deriva potersi dire che R^{IV} è quella forza la quale è capace di produrre la rottura per scorrimento, od anche di cimentare la resistenza alla rottura per scorrimento, in un prisma di sezione eguale all'unità, formato della stessa materia e disposto come quello di cui si cerca la resistenza alla rottura.

Le quantità R_4, T^{IV} ed R^{IV} si devono esprimere colla medesima unità di forze, ed il valore di R^{IV} va inteso siccome riferito all'unità di superficie che si è scelta per esprimere l'area della sezione Ω sulla quale tende a manifestasi la rottura per scorrimento.

76. **Determinazione della resistenza alla rottura per scorrimento nei corpi prismatici ed omogenei.** — Nella determinazione di questa resistenza non s'incontrano più le difficoltà che vennero indicate al numero 72 parlando del coefficiente di elasticità trasversale, giacchè in modo semplice e diretto può essa venir determinata incastrando orizzontalmente un prisma per un estremo, sospendendo un peso in sito vicinissimo alla sezione d'incastro ed aumentandolo gradatamente finchè si manifesta la rottura. Questo peso diviso per la superficie della sezione nella quale succede la rottura, dà la resistenza allo scorrimento riferita all'unità di superficie.

Vicat, il quale instituì alcune esperienze sulla resistenza allo scorrimento, non seguì l'accennato metodo. Egli sottopose ad esperimento dei cubi di gesso, dei mattoni, delle malte e delle pietre calcari; fece praticare in ciascuno dei pezzi due fori cilindrici opposti e del medesimo diametro; e misurò la forza necessaria per staccare la parte solida che rimaneva fra questi fori, obbligandola, mediante la pressione prodotta da una specie di stantuffo, a scorrere nel senso parallelo all'asse comune dei due fori stessi. Se chiamansi

F la forza capace di produrre lo staccamento di detta parte solida posta fra i due fori,

r il raggio di ciascuno di questi,

s lo spessore rimasto pieno fra i fondi dei fori,

il quoziente

$$\frac{F}{2\pi r s},$$

dove π è il noto rapporto 3,1415 .... della circonferenza al diametro, misura la resistenza allo scorrimento riferita all'unità di superficie; e il citato sperimentatore, prendendo per unità di forze il chilogramma e per unità di superficie il millimetro quadrato, avrebbe mediamente trovati i seguenti valori di $\frac{F}{2\pi r s}$:

	Cg
Gesso impastato col metodo ordinario	0,21
Gesso impastato solidamente	0,53
Malta di calce grassa e sabbia dopo 14 anni d'indurimento all'aria	0,28
Mattone crudo	0,30
Pietra calcare	1,21

Il metodo di Vicat, che sembra buono pei corpi a tessuto granulare sul quale egli ha operato, lascia qualche incertezza pei corpi fibrosi, principalmente nel caso in cui i fori si praticano coi loro assi in direzione perpendicolare a quella delle fibre, giacchè la resistenza allo scorrimento non può essere costante su tutto il contorno del cilindro pieno rimasto fra i fori stessi.

La resistenza dei metalli alla rottura per scorrimento può essere esperimentata o col metodo che venne indicato al principio di questo numero, oppure procedendo in quest'altro modo: fra due aste prismatiche di ferro o di acciaio, egualmente lunghe, verticalmente disposte e colle estremità inferiori egualmente perforate, si ponga una terza asta pure prismatica, con grossezza eguale alla larghezza dell'intervallo che esiste fra le due prime e come queste perforata verso l'estremità superiore; mediante un pezzo cilindrico del metallo da sperimentarsi ed avente diametro eguale a quello dei tre fori si uniscano le tre aste; si tiri quella di mezzo con forza ognor crescente fino a produrre la rottura del detto cilindro o perno; e si divida la forza sotto la quale incominciò a manifestarsi la rottura per il doppio della superficie della sezion retta del detto perno, onde avere la resistenza alla rottura per scorrimento riferita all'unità di superficie.

Un altro modo con cui comodamente si può esperimentare la resistenza alla rottura per scorrimento consiste: nel procurarsi uno stabile blocco di ghisa o di acciaio portante due guance parallele, a piccola distanza l'una dall'altra, e munite di fori cilindrici corrispondenti; nel fermare orizzontalmente fra queste guance ed entro due fori corrispondenti i pezzi cilindrici del metallo da sperimentarsi; e nel produrre tal pressione sulla parte di essi che rimane intercetta fra le pareti interne delle dette guance da produrre la rottura per staccamento di questa parte da quelle poste nei fori. Torna comodo di ottenere la pressione che deve causare la rottura mediante una leva; e questa pressione divisa per il doppio della superficie della sezion retta del cilindro sottoposto ad esperimento dà la sua resistenza allo scorrimento riferita all'unità di superficie.

Per quanto si riferisce al ferro, dalla maggior parte degli autori e da molti pratici si ammette che la resistenza alla rottura per scorrimento trasversale sia poco diversa dalla resistenza alla rottura per trazione. Le più recenti esperienze però accennano ad una lieve inferiorità di quella su questa, ed inducono a stabilire siccome più esatto l'ammettere che la prima sia i 4/5 della seconda, siccome già aveva trovato Navier in seguito a considerazioni puramente teoriche; e quindi potersi prendere di chilogrammi 32 per ogni millimetro quadrato la resistenza alla rottura per scorrimento trasversale in quel ferro, la cui resistenza alla trazione è di 40 chilogrammi pure per millimetro quadrato.

La resistenza della ghisa alla rottura per scorrimento trasversale forse non venne ancora direttamente determinata come si è fatto pel ferro; e pare che finora, atteso l'analogia dei fenomeni che si presentano nella torsione e nello scorrimento trasversale, siasi soltanto indirettamente dedotta con esperienze sulla resistenza alla rottura per torsione seguendo il metodo indicato al numero 63 ed assumendo la resistenza alla rottura per scorrimento trasversale siccome identica alla resistenza alla rottura per torsione. Così procedendo, si trova che la cercata resistenza della ghisa alla rottura per scorrimento trasversale si può mediamente fissare di 20 chilogrammi per millimetro quadrato.

Per quanto concerne ai legnami, si può dire che mancano totalmente le esperienze sulla determinazione della vera resistenza alla rottura per scorrimento trasversale, e sicuramente non s'incorre nel pericolo di compromettere la stabilità delle costruzioni, assumendola, siccome consiglia il Bourdais (*Traité pratique de la résistance des matériaux*), di chilogrammi 1,50 per millimetro quadrato se trattasi di quercia, e di chilogrammi 1,30 se trattasi di larice rosso.

In quanto alla resistenza alla rottura per scorrimento longitudinale, per mancanza di dati sufficienti, si ammette generalmente: che nei metalli sia poco diversa dalla resistenza alla rottura per scorrimento trasversale; e che nei legnami sia sensibilmente eguale a quella che nel numero 17 venne chiamata resistenza alla rottura per trazione nel senso tangenziale agli strati legnosi, ossia di chilogrammi 0,30 a 0,40 per ogni millimetro quadrato della superficie sulla quale tende a manifestarsi la rottura per scorrimento longitudinale quando trattasi di quercia od anche di larice rosso.

77. **Resistenza allo scorrimento nei massi in muratura.** — Allorquando un masso murale trovasi sollecitato da una o più forze le quali tendono a staccarne una parte facendola scorrere su un'altra parte che rimane immobile senza che quella produca pressione su questa, due diverse resistenze possono opporsi allo scorrimento: o la coesione della malta; o l'aderenza della malta stessa colle pietre.

Preparandosi dei corti prismi formati per corsi perpendicolari alla loro lunghezza colle pietre, coi mattoni e colle malte che devonsi impiegare nell'esecuzione delle opere murali per cui vuolsi conoscere la resistenza allo scorrimento, aspettando che le malte abbiano fatto presa e sottoponendo i detti prismi all'esperienza che venne indicata nel bel principio del precedente numero, si trova:

1° Che per le malte di calcina la rottura per scorrimento ha generalmente luogo nell'interno di un loro strato, il che prova che la coesione delle malte è in generale minore della loro aderenza colle pietre e coi mattoni, ed essere la resistenza dovuta alla coesione quella di cui bisogna tener conto nel determinare la resistenza allo scorrimento in un muro nel quale tende a staccarsi una parte senza produrre pressione sull'altra;

2° Che per le malte di gesso lo scorrimento si verifica per lo più fra la malta e le pietre, se pur queste sono a superficie piane e non molto scabrose, e che quindi è la resistenza dovuta all'aderenza quella di cui bisogna tener conto nel valutare la resistenza allo scorrimento pei massi murali in cui le pietre sono collegate da malta di gesso;

3° Che la resistenza alla rottura per scorrimento varia colla qualità delle malte, e che cresce col tempo durante il quale le malte si lasciano indurire in condizioni favorevoli;

4° Che la detta resistenza si può assumere siccome variabile da chilogrammi 0,01 a 0,20 per ogni millimetro quadrato della superficie sulla quale la rottura tende a manifestarsi.

Quando, siccome avviene in un masso murale il quale sia sollecitato da una spinta orizzontale, la parte di muro che tende a scorrere esercita una pressione sulla parte che rimane immobile, appena distrutta la resistenza dovuta alla coesione la quale sperimentalmente trovasi indipendente dalla pressione, entra in giuoco la resistenza dovuta all'attrito che ha luogo nella superficie di scorrimento fra muratura e muratura. Questa resistenza può essere determinata procurandosi dei prismi fatti per corsi perpendicolari alla loro lunghezza colle pietre, coi mattoni e colle malte che devonsi impiegare nell'esecuzione delle opere murali per cui vuolsi conoscere la resistenza dovuta all'attrito, aspettando che le malte abbiano fatto presa, distruggendo la coesione che ha luogo in uno strato di queste, ponendo verticalmente ciascuno di essi colla parte inferiore ben fissa e colla parte superiore perfettamente aggiustata sulla inferiore come se la coesione non fosse stata distrutta, attaccando alla parte superiore una funicella la quale distendendosi orizzontalmente vada a passare su una puleggia fissa portando al capo pendente un piatto di bilancia, e mettendo in questo piatto dei pesi finchè si ottiene che la parte superiore del prisma sottoposto ad esperimento si sposta per scorrimento sulla parte inferiore. La somma dei pesi posti nel piatto aumentata del peso del piatto stesso e di quello della parte di funicella verticalmente pendente dalla puleggia dà evidentemente la misura della resistenza d'attrito, e facendo l'esperienza su diversi prismi si trova:

1° Che questa resistenza è proporzionale alla pressione che la parte superiore del masso esercita contro la parte inferiore, e che per conseguenza vale la detta pressione moltiplicata per un convenevole *coefficiente d'attrito*;

2° Che varia colla natura e collo stato delle superficie in contatto;

3° Che è indipendente dall'estensione di questa superficie;

4° Che nelle ordinarie circostanze si può mediamente assumere di 0,76 il coefficiente d'attrito di muratura sopra muratura, che si deve ridurre a 0,57 quando le malte sono ancora fresche, e che talvolta si può aumentare fino ad 1,00 per le murature di pietrame anche fatte con malte di mediocre qualità, le quali già abbiano fatto buona presa in circostanze favorevoli.

Per rapporto al coefficiente d'attrito da adottarsi nella valutazione della resistenza allo scorrimento che presentano i massi murali sulle loro fondazioni, i pratici sono d'avviso di ammettere: 0,76 quando sono essi stabiliti sopra roccia naturale o sopra calcestruzzo; 0,57 quando appoggiano su terra e su sabbia; e finalmente 0,30 quando sono elevati su un fondo argilloso un po' soggetto a lasciarsi rammollire dall'acqua.

Vi sono degli autori i quali, nel valutare la resistenza allo scorrimento pei massi murali in cui la parte che tende a scorrere esercita pressione sull'altra che rimane immobile, hanno contemporaneamente tenuto conto della resistenza dovuta alla coesione e di quella dovuta all'attrito. Se però si osserva come entri in giuoco la seconda resistenza appena distrutta la prima, agevolmente si comprende perchè si debba soltanto tener conto o dell'una o dell'altra; e, ponendo mente come la resistenza dovuta all'attrito anche col tempo non sia per venir meno in un masso murale, mentre lo stesso non si può dire di quella dovuta alla coesione, agevolmente si vien a conoscere perchè quasi tutti i pratici siano d'avviso di tener conto soltanto della prima e di trascurare la seconda considerando le malte come un semplice mezzo necessario ad ottenere un perfetto posamento delle pietre le une sulle altre.

La resistenza dovuta all'attrito che si sviluppa in un masso murale allorquando trovasi sotto l'azione di una forza che tende a romperlo per scorrimento, per quanto sopra si è detto, dipende dalla pressione che esercita sulla parte di masso che rimane immobile l'altra parte che è soggetta a scorrere, e quindi dal peso di quest'ultima parte di muratura, il qual peso facilmente si deduce dalla conoscenza dei valori medii del peso specifico ossia del peso di 1 decimetro cubo delle principali murature indicate nell'ultima tavola del numero 17. Per quanto spetta ai valori del peso di 1 decimetro cubo delle murature in pietra da taglio si possono assumere quelli delle pietre con cui le murature stesse sono formate, che si trovano riportati nel quadro numerico del numero 54.

78. **Resistenza allo scorrimento nei massi di terra.** — Considerando delle terre di recente smosse e, quasi a guisa di polvere, ridotte a particelle staccate ed indipendenti le une dalle altre, si vede che allora esse naturalmente si dispongono secondo un certo pendìo e che così si stabiliscono allo stato di equilibrio. Le molecole situate sulla superficie libera del pendìo si trovano sollecitate a scorrere dalla componente tangenziale del loro peso, e se malgrado la loro mobilità non obbediscono a quest'azione, questo deriva da ciò che esse provano una resistenza eguale e contraria, ossia una resistenza d'attrito da parte delle molecole vicine. L'esistenza dell'attrito però fra le molecole terrose non basta per spiegare tutti i fatti che si manifestano nel loro equilibrio; e, per esempio, non si saprebbe vedere come succeda che alcune terre anche sotto un taglio a picco si mantengano per qualche tempo in equilibrio, senza ammettere che esse posseggano una certa forza di coesione.

In seguito di queste considerazioni, sembra naturale l'ammettere essere due le resistenze che si oppongono allo scorrimento delle due parti di un masso di terra l'una sopra l'altra: quella dovuta alla coesione, indipendente dalla pressione normale alla superficie sulla quale tende a manifestarsi lo scorrimento e proporzionale a questa superficie stessa; e quella dovuta all'attrito, proporzionale alla detta pressione normale. È opinione dei pratici: che le indicate resistenze non si sviluppino contemporaneamente, ma sibbene che la seconda tenga dietro alla prima; che nell'instituire dei calcoli relativi all'equilibrio delle terre si debba tener conto solamente di una di esse; e che pel caso in cui si voglia un equilibrio duraturo si debba tener conto della resistenza dovuta all'attrito anzichè di quella dovuta alla coesione, giacchè questa col tempo e per molte cause è soggetta a venir meno.

La coesione di quasi tutte le terre, e persino delle sabbie, aumenta col tempo durante il quale le loro particelle si lasciano in contatto, e colla compattezza del masso che compongono.

Come si possa procedere alla determinazione del *coefficiente di coesione* ossia della forza di coesione, riferita all'unità di superficie, verrà indicato al problema I del numero 83, e basti per ora il dire che approssimativamente essa varia da chilogrammi 0,000136 a 0,000568 per ogni millimetro quadrato considerando le qualità di terre asciutte comprese fra le sciolte e le più forti.

Per trovare il *coefficiente d'attrito* delle terre, ossia quel coefficiente numerico per cui bisogna moltiplicare la pressione prodotta da una parte di masso di terra che è in procinto di staccarsi e di scorrere su un'altra parte dello stesso masso onde avere la resistenza dovuta all'attrito, si può partire dalla seguente considerazione. Immaginando una molecola terrosa M (*fig.* 58) su un piano inclinato AB costituente una delle facce che limitano un masso di terra, supponendo che questa molecola sia in procinto di scorrer giù per l'indicato piano inclinato e chiamando

α l'angolo BAC che misura l'inclinazione del piano AB all'orizzonte,

P il peso della molecola M,

T ed N le componenti di questo peso tangenziale e normale al piano ed

f il coefficiente d'attrito,

se la molecola M sta in equilibrio, questo deriva da ciò che alla componente tangenziale T sta opposta una forza d'attrito eguale e direttamente contraria; e siccome questa forza d'attrito vale fN si ha

$$T = fN$$

Osservando ora che i due triangoli eguali MTP ed MNP, rispettivamente rettangoli in T ed N, sono simili al triangolo ABC rettangolo in C per essere i tre angoli acuti TMP, MPN ed ABC eguali fra di loro, si ha che gli angoli MPT ed NMP ambedue sono eguali ad α e che per conseguenza

$$T = P \operatorname{sen} \alpha, \qquad N = P \cos \alpha,$$

i quali valori di T e di N, posti nell'ultima equazione, conducono a trovare

$$f = \operatorname{tang} \alpha,$$

ossia che il coefficiente d'attrito per le terre è la tangente trigonometrica dell'angolo che coll'orizzonte fa il loro natural declivio, ossia il piano inclinato sul quale le molecole terrose stanno in procinto di sdrucciolare in basso. Per trovare i coefficienti d'attrito adatti alle diverse qualità di terra basta adunque: o misurare gli angoli secondo cui coll'orizzonte si dispongono le superficie piane laterali di rilevati o di scavi, le quali facevano un angolo maggiore di quello corrispondente al loro natural declivio, allorquando su esse, per lunga esposizione all'aria ed alle intemperie, per alternative di secchezza e di umidità e per effetto di geli e di disgeli, la coesione fra molecole terrose è totalmente distrutta, e prendere le tangenti trigonometriche di questi angoli; o eseguire su un piano orizzontale dei mucchi aventi forma di coni retti mettendo le terre in modo che prendano il declivio che loro compete e prendere i rapporti delle altezze ai raggi di detti coni, i quali rapporti, essendo eguali alle tangenti trigonometriche degli angoli che le generatrici dei coni fanno all'orizzonte, danno appunto i coefficienti d'attrito.

Nella tavola che segue si hanno gli angoli del naturale declivio ed i corrispondenti coefficienti d'attrito per le principali qualità di terra che al costruttore può avvenire di considerare:

NATURA DELLE TERRE	Angoli d'attrito	Coefficienti d'attrito
Terre sabbiose	34°	0,67
Terre sciolte asciutte	39	0,81
Terre ordinarie	45	1,00
Terre argillose asciutte	55	1,43
Terre argillose umide.	31	0,60

Talvolta può avvenire di dover considerare l'attrito fra terra e muratura, ed il coefficiente corrispondente può essere facilmente determinato cercando qual inclinazione all'orizzonte si deve dare alla faccia piana di un masso della muratura che deve trovarsi in contatto della terra, affinchè sia questa in procinto di scorrere in basso allorquando venga collocata su quella, e prendendo la tangente trigonometrica dell'angolo corrispondente a detta inclinazione.

Poche esperienze vennero finora eseguite sulla resistenza allo scorrimento di terra sopra muro, ed ecco quali angoli d'inclinazione delle facce murali su cui le molecole terrose possono stare in equilibrio e quali coefficienti d'attrito si possono praticamente adottare nell'ipotesi che, senza presentare considerevoli sporgenze, non siano lisce nè arricciate le facce dei muri contro cui le terre appoggiano.

NATURA DELLE TERRE	Angoli d'attrito	Coefficienti d'attrito
Terre asciutte e sciolte	30°	0,57
Terre bagnate e terre che si lasciano rammollire dall'acqua	17	0,30

Per valutare la resistenza allo scorrimento dovuta all'attrito di terre su terre e di terre su muratura è necessario di conoscerne i pesi, per cui immediatamente si riferiscono quelli del decimetro cubo delle principali qualità di terra che al costruttore può avvenire di dover nella pratica considerare:

	Cg
Terra vegetale	1,4
Terra schietta allo stato di secchezza naturale . .	1,5
Terra argillosa	da 1,6 a 1,9
Sabbia terrosa	1,7
Sabbia pura	1,9

79. **Condizione ed equazione di stabilità dedotte dalla resistenza alla rottura per scorrimento, quando questa resistenza è dovuta alla forza di coesione.** — Essendo

T^{IV} la forza tendente a produrre il fenomeno dello scorrimento in un dato corpo e diretta parallelamente alla superficie, supposta piana, su cui il detto fenomeno più facilmente può avvenire,

R^{IV} la resistenza alla rottura per scorrimento riferita all'unità di detta superficie ed

Ω l'area di questa figura piana, si ha che la resistenza alla rottura per scorrimento opposta dal corpo alla forza T^{IV} è

$$R^{IV}\,\Omega,$$

che quindi la condizione di stabilità risulta

$$T^{IV} < R^{IV}\,\Omega,$$

e che l'equazione di stabilità può essere scritta sotto la forma

$$T^{IV} = n^{IV}\,R^{IV}\,\Omega,$$

dove n^{IV} è un numero minore dell'unità che si assume siccome coefficiente di stabilità e che generalmente suolsi prendere non maggiore di 1/6 pei metalli, e non maggiore di 1/10 per gli altri materiali.

80. **Uso delle equazioni di stabilità relative alla resistenza allo scorrimento, e determinazione della sezione pericolosa.** — La pratica applicazione delle equazioni di stabilità che vennero date ai numeri 75 e 79 sta principalmente nella risoluzione dei seguenti quesiti:

1° *Trovare a qual forza* T^{IV}, *diretta parallelamente alla superficie nota* Ω *nella quale più facilmente può avvenire scorrimento, si può assoggettare un corpo;*

2° *Trovare la superficie* Ω *da assegnarsi a quella sezione piana sulla quale, più facilmente che in qualunque altra e sotto l'azione di una data forza* T^{IV}, *può avvenire scorrimento in un corpo di forma nota.*

L'equazione di stabilità indicata (1) al numero 75 serve per il caso in cui si conosca la resistenza allo snervamento per scorrimento trasversale, quella indicata (2) allo stesso numero conviene quando sono noti il coefficiente d'elasticità trasversale e lo scorrimento relativo corrispondente allo snervamento per scorrimento trasversale, e finalmente quella del precedente numero vale per il caso in cui si conosce la resistenza alla rottura tanto per scorrimento trasversale quanto per scorrimento longitudinale.

Verrà determinata la sezione, supposta piana, sulla quale in un corpo dato oppure in un corpo di forma nota, più facilmente che in qualunque altra sarà per avvenire lo snervamento o la rottura per scorrimento sotto l'azione di una forza diretta parallelamente al piano della sezione stessa, cercando quella per cui nell'estensione del corpo e dove è possibile la rottura sotto l'azione di una forza applicata come la forza data è massima la resistenza allo scorrimento riferita all'unità di superficie che in essa vien sviluppata dalla forza estrinseca T^{IV}, o più chiaramente trovando quella per cui risulta avere un valor massimo il quoziente $\frac{T^{IV}}{\Omega}$. La sezione così determinata è quella che chiamasi *sezione pericolosa* ed il valore Ω della sua superficie è quello da impiegarsi nelle pratiche applicazioni delle equazioni di stabilità. — Se nelle sezioni sulle quali è possibile lo scorrimento sotto l'azione di una forza applicata come la forza data varia dall'una all'altra la resistenza, la sezione pericolosa si determina cercando quella per rapporto alla quale è massimo il valore del coefficiente di stabilità ossia del quoziente della forza che tende a produrre lo scorrimento per la corrispondente resistenza che vi si oppone.

81. **Condizione ed equazione di stabilità dedotte dalla resistenza allo scorrimento quando questa resistenza è dovuta all'attrito: determinazione della sezione pericolosa.** — Supponendo che sia piana la superficie sulla quale lo scorrimento può avvenire, si chiamino:

T_1^{IV} la forza diretta parallelamente al piano di detta superficie sotto l'azione della quale lo scorrimento può manifestarsi;

f il coefficiente d'attrito ossia quel coefficiente numerico per cui bisogna moltiplicare la pressione, che la parte di corpo soggetta a scorrere esercita sull'altra normalmente alla superficie di separazione, onde avere la forza che si oppone allo scorrimento;

N la detta pressione;

n_1^{IV} un coefficiente di stabilità.

Evidentemente la condizione di stabilità sarà

$$T_1^{IV} < fN,$$

e si avrà per equazione di stabilità

$$T_1^{IV} = n_1^{IV} fN.$$

La resistenza fN dovuta all'attrito essendo generalmente di tal natura da non poter facilmente venir meno anche coll'andar del tempo, e questo essendo principalmente vero per le opere murali in cui N è la forza di gravità oppure una componente di questa, suolsi nella pratica assumere n_1^{IV} siccome variabile fra 4/5 e 2/5 secondo la maggiore o minor stabilità che vuolsi avere nell'opera cui intendesi applicare l'ultima equazione.

Si trova la *sezione pericolosa* per un solido in cui la resistenza allo scorrimento è dovuta all'attrito cercando quella per rapporto alla quale è massimo il valore del coefficiente di stabilità ossia del quoziente della forza T_1^{IV} per la resistenza fN.

82. **Applicazione della teoria sulla resistenza allo scorrimento alla risoluzione di alcuni semplici problemi.** — I. *Trovare qual è il massimo peso che si può sollevare mediante una girella il cui perno è di ferro col diametro di metri* 0,02, *e nella ipotesi che la potenza debba agire parallelamente alla resistenza.*

Il perno AB (*fig.* 39), trovandosi sostenuto dalla staffa in due punti assai vicini fra di loro, è contemporaneamente soggetto a rompersi per scorrimento trasversale in due siti, ossia nei brevi intervalli che rimangono fra la girella e la staffa stessa. Se chiamasi P il massimo peso che con questa macchina si possa sollevare, se trascuransi gli attriti del perno entro gli occhi della staffa, la rigidezza della fune ed i pesi del perno, della girella e della fune, se osservasi che allora per sostenere questo peso è necessaria una potenza pure eguale a P e se vuolsi risolvere il problema applicando l'equazione di stabilità che venne data al numero 79, prendendo il chilogramma per unità di peso, il millimetro quadrato per unità di superficie, supponendo che il ferro di cui è fermato il perno presenti la resistenza di 35 chilogrammi per millimetro quadrato alla rottura per trazione ed assumendo 3,1416 per valore del rapporto π della circonferenza al diametro, si avranno i seguenti valori di T^{iv}, n^{iv}, R^{iv} ed Ω

$$T^{\text{iv}} = 2\,P, \qquad n^{\text{iv}} = \frac{1}{6},$$

$$R^{\text{iv}} = \frac{4}{5}\,35 = 28^{\text{Cg}}, \qquad \Omega = 2\,.\,\pi\,\frac{(20)^2}{4} = 2 \times 314{,}16,$$

quali posti nella citata equazione di stabilità daranno la seguente equazione determinatrice di P

$$2P = \frac{1}{6}\,28 \times 2 \times 314{,}16$$

d'onde

$$P = 1466^{\text{Cg}}{,}08,$$

ossia che con una girella il cui perno è costituito di ferro il quale ha il diametro di metri 0,02, e mediante una potenza che agisce verticalmente, tutto al più si può sollevare un peso di chilogrammi 1466,08.

II. *Trovare la larghezza da darsi ad una trave di larice rosso* ABCD (*fig.* 40) *la quale solidamente va incastrata in un muro colle fibre verticalmente disposte, che deve presentare per sezion d'incastro un rettangolo i cui lati siano rispettivamente la lunghezza e la larghezza della trave stessa, e che deve presentare la necessaria stabilità sotto l'azione di una data forza* P *applicata in* G *sulla parte* EB *della base superiore e diretta parallelamente alle fibre. La lunghezza della trave è di metri* 1,50 *e la forza* P *di* 4500 *chilogrammi.*

Evidentemente la forza P agisce per produrre uno scorrimento longitudinale nella trave cui è applicata, e la superficie di scorrimento può essere o la stessa sezion d'incastro oppure un'altra sezione parallela a quella or ora indicata e passante per un punto del tratto EC. Prendendo per unità di peso il chilogramma e per unità di superficie il millimetro quadrato e chiamando x la domandata larghezza, si risolverà il problema coll'applicare l'equazione di stabilità che venne data al numero 79 e col fare in essa

$$T^{IV}=4500, \qquad n^{IV}=\frac{1}{10},$$

$$R^{IV}=0{,}30, \qquad \Omega=1500x;$$

per cui risulta la seguente equazione determinatrice di x

$$4500=\frac{1}{10}\,0{,}30\times1500\,.\,x,$$

d'onde

$$x=100^{mm},$$

cioè la larghezza della trave deve essere di **100** millimetri, ossia di metri 0,1.

III. *Trovare la grossezza media* $\overline{EF}$ (*fig.* 41) *da assegnarsi ad un muro colla parete* CD *verticale, colla parete* AB *inclinata, lungo* 3 *metri ed alto* 4, *che colla sua base inferiore è collocato sopra un alto strato di sabbia e che deve sopportare l'azione di una spinta orizzontale* Q *dell'intensità di* 4000 *chilogrammi applicata in* G *presso la base del muro stesso.*

Supponendo il muro siccome costituito da elementi talmente ben connessi fra di loro da formare un unico masso indivisibile sotto l'azione della forza Q, per essere questa forza applicata a piccola distanza dalla base AD, può avvenire scorrimento sul piano di detta base, e la cercata grossezza media va determinata in modo che il peso del masso murale ABCD faccia sviluppare tal resistenza d'attrito su AD da vincere l'azione della forza Q. Per risolvere il problema bisogna adunque applicare l'equazione di stabilità che venne data al numero 81, prendendo per unità di peso il chilogramma si faranno in essa

$$T_1^{IV}=4000, \qquad n_1^{IV}=\frac{3}{5}, \qquad f=0{,}57,$$

e per N si prenderà il peso in chilogrammi della muratura ABCD sovrastante alla superficie di scorrimento AD. Supponendo che il peso del decimetro cubo di detta muratura sia di chilogrammi 2,2 e che per conseguenza sia di chilogrammi 2200 il peso del metro cubo, si avrà chiamando y il domandato spessore medio

$$N = 2200 \times 3 \times 4y = 26400\,y.$$

Sostituendo ora i valori di T_1^{IV}, n_1^{IV}, f ed N nella già citata equazione di stabilità del numero 81 risulta

$$4000 = \frac{3}{5}\,0{,}57 \times 26400\,y,$$

d'onde

$$y = 0^{\text{m}},44,$$

ossia il muro deve presentare alla metà della sua altezza lo spessore di metri 0,44.

83. **Applicazione della teoria sulla resistenza allo scorrimento alla determinazione delle scarpe da assegnarsi ai massi di terra tagliati lateralmente.** — I. *Un terrapieno, la cui superficie superiore è in un piano orizzontale* CO (*fig.* 42) *e che trovasi uniformemente caricato di materie soggette a dividersi secondo piani verticali corrispondenti alle estremità superiori delle superficie di separazione che in esso possono avvenire, si taglia lateralmente secondo un piano* AB; *trovare la relazione che deve esistere fra il più piccolo angolo che il detto piano* AB *deve fare colla verticale* AC *e l'altezza* AC *del taglio, affinchè l'azione del sopraccarico e quella del peso delle molecole terrose non venga a vincere la loro coesione.*

Siano:

a l'altezza del taglio che vuolsi praticare nel terrapieno, espressa in metri;

Π il peso in chilogrammi del metro cubo di terrapieno;

p la pressione in chilogrammi che risulta su ogni metro quadrato del piano orizzontale BO a motivo dell'esistenza del sopraccarico OBDE;

γ la forza di coesione fra le terre di cui il terrapieno si compone, riferita al metro quadrato ed espressa in chilogrammi;

φ l'angolo cercato di AB colla verticale AC.

Considerando una parte di terrapieno lunga 1 metro (giacchè assicurate delle buone condizioni d'equilibrio ad una parte di masso lunga l'unità lo sarà pure il masso intiero allorquando si ponga nelle medesime condizioni) ed immaginando condotto un piano qualunque AB′ passante per la orizzontale rappresentata in A e facente col piano verticale AC l'angolo $CAB' = \psi$, il peso del prisma triangolare rappresentato in ABB′ e la pressione prodotta dal corrispondente sopraccarico BB′D′D costituiscono una forza verticale P, che vale il peso $\frac{1}{2}\Pi a^2 \tang \psi$ del prisma triangolare rappresentato in ACB′, meno il peso $\frac{1}{2}\Pi a^2 \tang \varphi$ del prisma triangolare rappresentato in ACB, più la pressione $pa \tang \psi$ che il sopraccarico (supposto esteso anche al tratto CB) eserciterebbe su CB′ e meno la pressione $pa \tang \varphi$ che il medesimo sopraccarico produrrebbe su CB, e la qual forza verticale P è conseguentemente data da

$$P = \frac{1}{2} a (\Pi a + 2p) (\tang \psi - \tang \varphi) \qquad (1).$$

Se ora si scompone il peso P in due componenti T ed N, la prima parallela e la seconda normale al piano AB′, a motivo dell'eguaglianza degli angoli CAB′, NPG e TGP, si hanno le relazioni,

$$T = P \cos \psi, \qquad N = P \operatorname{sen} \psi;$$

La componente T rappresenta la forza la quale tende a distruggere la resistenza dovuta alla coesione che si sviluppa nella superficie AB′D′; e trascurando o supponendo nulla la coesione in B′D′, si riduce la detta resistenza a quella che può svilupparsi su un'area rettangolare di lati $\overline{AB'}$ ed 1 metro, e quindi ha essa per valore

$$\gamma . \overline{AB'} = \frac{\gamma a}{\cos \psi},$$

giacchè dal triangolo rettangolo ACB si deduce

$$\overline{AB'} = \frac{a}{\cos \psi}.$$

La condizione d'equilibrio si ottiene ponendo che la forza la quale tende a distruggere la coesione è minore della resistenza che questa oppone, per cui essa risulta

$$P\cos\psi < \frac{\gamma a}{\cos\psi},$$

d'onde, dividendo per $\cos\psi$ ed osservando che $\frac{1}{\cos^2\psi} = 1 + \operatorname{tang}^2\psi$, ricavasi

$$P < \gamma a(1 + \operatorname{tang}^2\psi).$$

Sostituendo ora in quest'ineguaglianza il valore P dato dall'equazione (1) e ricavando quello di $\operatorname{tang}\varphi$, si trova

$$\operatorname{tang}\varphi > \operatorname{tang}\psi - \frac{2\gamma}{\Pi a + 2p}(1 + \operatorname{tang}^2\psi) \qquad (2).$$

Quando l'equilibrio esiste questa ineguaglianza deve essere verificata qualunque sia il valore che si attribuisce all'angolo ψ, e quindi il più piccolo valore ammissibile per $\operatorname{tang}\varphi$ deve essere eguale al massimo del secondo membro di detta ineguaglianza relativamente alla variabile $\operatorname{tang}\psi$.

(*l*) Ciò premesso, essendo

$$1 - \frac{4\gamma}{\Pi a + 2p}\operatorname{tang}\psi$$

la derivata del secondo membro dell'ineguaglianza (2) presa per rapporto a $\operatorname{tang}\psi$, l'equazione determinatrice di quella tangente dell'angolo ψ la quale rende massimo il secondo membro dell'or citata ineguaglianza è

$$1 - \frac{4\gamma}{\Pi a + 2p}\operatorname{tang}\psi = 0,$$

d'onde

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\Pi a + 2p}{4\gamma},$$

(*l*) Nel numero che segue è indicato il modo con cui elementarmente si può trovare il più piccolo valore ammissibile per la tangente dell'angolo del piano inclinato AB colla verticale AC.

il qual valore di $\tan\psi$ posto nell'ineguaglianza (2) dà per equazione determinatrice del limite inferiore di $\operatorname{tang}\varphi$

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{(\Pi a + 2p)^2 - 16\gamma^2}{8(\Pi a + 2p)\gamma} \qquad (3).$$

L'equazione (3), che è una relazione fra il più piccolo angolo colla verticale sotto il quale si possono tagliare i terrapieni e l'altezza del taglio affinchè l'azione del sopraccarico e quella del peso delle molecole terrose non sia capace di vincere la loro forza di coesione, serve a due scopi: a trovare l'angolo φ quando si conosce a ossia l'altezza che il taglio deve presentare; a dedurre a ossia di qual altezza si può eseguire un taglio sotto una data inclinazione φ colla verticale. Così, volendosi trovare con qual altezza massima si può eseguire un taglio verticale in un terrapieno per cui si conoscono Π, γ e p senza che succedano scoscendimenti, si farà nell'indicata equazione (3) $\varphi = 0$, per cui risulta l'equazione

$$(\Pi a + 2p)^2 - 16\gamma^2 = 0$$

d'onde si ricava

$$a = \frac{4\gamma - 2p}{\Pi}.$$

Se $4\gamma \leqq 2p$ ossia se $\gamma \leqq \frac{p}{2}$ il valore di a diventa zero o negativo, e quindi, per quanto piccola sia l'altezza di un taglio verticale nel terrapieno, sempre ha luogo scoscendimento.

Se nell'equazione (3) si fa $p = 0$ si trova il valore della tangente trigonometrica del più piccolo angolo φ che la faccia inclinata di un terrapieno, terminato superiormente da un piano orizzontale e senza sopraccarico, deve fare colla verticale, affinchè il peso delle molecole terrose non sia capace di vincere la loro coesione, e si ottiene

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\Pi^2 a^2 - 16\gamma^2}{8\Pi a\gamma};$$

e facendo in questa equazione $\varphi = 0$ si deduce che esiste sempre un'altezza a sotto cui verticalmente si possono tagliare le terre senza che avvengano scoscendimenti e che il più gran valore di quest'altezza è dato da

$$a = \frac{4\gamma}{\Pi} \qquad (4).$$

Volendosi ora trovare il valore di γ, ossia la coesione riferita all'unità di superficie, corrispondente alle terre che trovansi in un dato terrapieno per cui già si conosce il valore di Π, si praticherà un taglio verticale ed accuratamente si osserverà qual è la sua altezza quando incominciano a manifestarsi i primi sintomi di vero scoscendimento lungo la parete del taglio praticato, ed allora conoscendosi a e Π si dedurrà il valore di γ dall'equazione (4).

II. *Un terrapieno, la cui superficie superiore è in un piano orizzontale e che trovasi comunque sopraccaricata, si taglia lateralmente secondo un piano inclinato; trovare il più piccolo angolo che il detto piano deve fare colla verticale affinchè non avvenga scoscendimento quando si supponga già distrutta la resistenza dovuta alla coesione delle terre.*

La resistenza dovuta all'attrito di terra contro terra è la sola che in questo caso può impedire che avvengano scoscendimenti, ed affinchè questa resistenza non possa essere vinta dalla componente del peso parallela al piano secondo il quale lateralmente si è tagliato il terrapieno (num. 78), bisogna che il detto piano sia inclinato all'orizzonte di un angolo minore di quello la cui tangente trigonometrica vale il coefficiente di attrito f, ossia che faccia colla verticale un angolo maggiore di quello la cui tangente trigonometrica è $\frac{1}{f}$.

84. **Procedimento elementare per ottenere il più piccolo valore ammissibile dell'angolo** $BAC = \varphi$ (*fig.* 42).— Il massimo valore del secondo membro dell'ineguaglianza (2) del numero precedente, e quindi il più piccolo valore ammissibile per tang φ, può essere determinato anche in modo elementare eguagliando la detta quantità di cui vuolsi trovare il valore massimo ad un'incognita z col porre

$$\operatorname{tang}\psi - \frac{2\gamma}{\Pi a + 2P}(1 + \operatorname{tang}^2\psi) = z,$$

ricavando dall'equazione del secondo grado che ne risulta il valore di tang ψ dato da

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\Pi a + 2p}{4\gamma} \pm \sqrt{\frac{(\Pi a + 2p)^2}{16\gamma^2} - \frac{\Pi a + 2p}{2\gamma} z - 1},$$

ed osservando che il più gran valore che può prendere z, ossia il secondo membro della già citata ineguaglianza (2), è quello dato dalla condizione

$$\frac{(\Pi a + 2p)^2}{16\gamma^2} - \frac{\Pi a + 2p}{2\gamma} z - 1 = 0$$

d'onde

$$z = \frac{(\Pi a + 2p)^2 - 16\gamma^2}{8(\Pi a + 2p)\gamma}.$$

Ma, per quanto già si è detto, il massimo valore del secondo membro dell'ineguaglianza (2) è il minimo valore ammissibile per tang φ, cosicchè

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{(\Pi a + 2p)^2 - 16\gamma^2}{8(\Pi a + 2p)\gamma}.$$

Quest'equazione è precisamente l'equazione (3) del numero precedente e, come già si è detto nello stesso numero, serve essa: a trovare φ quando si conosce a, p, Π e γ; a dedurre a quando è dato φ e che sono note le quantità p, Π e γ; e ad avere γ quando si considera il caso particolare in cui $p = 0$ e $\varphi = 0$, e quando si hanno i valori di a e di Π.

85. **Equilibrio di un muro sottoposto all'azione di una spinta orizzontale.** — Sia ABCD (*fig.* 45) la sezione trasversale di un muro sottoposto all'azione di una spinta orizzontale applicata nel punto O, suppongasi che questo muro sia costrutto per strati regolari, che in ogni giunto si conservi costante la coesione delle malte riferita all'unità di superficie, e che la rottura, in seguito a distruzione della resistenza dovuta alla coesione nel giunto di minor superficie posto al di sotto del punto O tenda a manifestarsi per scorrimento della parte di muro sovrastante a detto giunto.

Essendo EF il giunto di minor superficie sottostante al punto O, chiaminsi

Q la spinta orizzontale espressa in chilogrammi, P il peso della parte di muratura FECD pure espressa in chilogrammi,

A la superficie in metri quadrati del giunto rappresentato in EF,

α l'angolo FEH esprimente l'inclinazione di questo giunto all'orizzonte,

γ la forza di coesione delle malte data in chilogrammi e riferita al metro quadrato,

f il coefficiente d'attrito di muratura con muratura,

n^{IV} ed n_1^{IV} due coefficienti di stabilità, il primo relativo della resistenza dovuta alla coesione ed il secondo riferentesi alla resistenza dovuta all'attrito,

e si decompongano le forze Q e P ciascuna in due componenti, una parallela e l'altra perpendicolare al giunto EF. Dicendo rispettivamente T ed N le due componenti della Q e T' ed N' quelle della P, a motivo dell'eguaglianza degli angoli TOQ, NQO, N'GP, T'PG ed HEF, si hanno le relazioni

$$T = Q\cos\alpha, \qquad N = Q\,\text{sen}\,\alpha,$$

$$T' = P\,\text{sen}\,\alpha, \qquad N' = P\cos\alpha.$$

La forza che tende a distruggere la coesione delle malte nel giunto EF è la somma delle due componenti T e T', mentre la resistenza che opponesi a che la coesione venga distrutta vale $A\gamma$; cosicchè ponendo per T e T' i loro valori si avrà per equazione di stabilità

$$Q\cos\alpha + P\,\text{sen}\,\alpha = n^{\text{IV}} A\gamma \qquad (1).$$

Essendo note le quantità Q, α e γ e conoscendosi qual forma deve avere il masso rappresentato in FECD, si può esprimere P ed A in funzione degli elementi che valgono a determinarlo, fissare preventivamente tutti questi elementi meno uno, e trovare qual valore a quest'ultimo si può assegnare mediante l'applicazione della citata equazione di stabilità.

Supponendo ora che sia nulla la resistenza dovuta alla coesione delle malte nel giunto EF, la somma delle due componenti T e T' tende a far scorrere il masso FECD nel senso indicato dalla freccia S, e la resistenza dovuta all'attrito che si sviluppa nel piano

EF espressa da $f(N'-N)$, è quella che opponesi a questo scorrimento; per modo che, ponendo per T, T', N ed N' i loro valori, si avrà quest'equazione di stabilità

$$Q\cos\alpha + P\,\mathrm{sen}\,\alpha = n_1^{\mathrm{IV}} f(P\cos\alpha - Q\,\mathrm{sen}\,\alpha) \qquad (2),$$

la quale può servire a calcolare un secondo valore dell'incognita che già venne trovata coll'equazione (1).

Se, per fissare le idee, supponiamo che sia $\overline{EH}$, cioè la grossezza del muro al livello del punto E, quell'incognita di cui si trovarono due valori x' ed x'' applicando rispettivamente le equazioni (1) e (2), possono avvenire tre distinti casi: o che x' è maggiore di x'', ed allora il muro è in tali condizioni d'equilibrio che, anche supponendo distrutta la coesione delle malte nel giunto EF, basta la resistenza dovuta all'attrito per dargli stabilità maggiore della necessaria; o che x' è eguale ad x'', ed in questo caso la resistenza dovuta all'attrito che si svilupperebbe nel giunto EF, quando in esso venisse meno la resistenza dovuta alla coesione delle malte, sarebbe sufficiente a dare la necessaria stabilità; o finalmente che x' è minore di x'', ed allora conviene assegnare al muro la grossezza x'' giacchè, dandogli la grossezza x', mancherebbe la necessaria stabilità appena distrutta la resistenza dovuta alla coesione delle malte nel giunto EF.

Per dedurre dalle equazioni (1) e (2) quelle che convengono pel caso di un muro costrutto per strati orizzontali si farà in esse $\alpha = 0$; e si cangierà α in $-\alpha$ allorquando i diversi giunti, invece di avere la direzione EF discendente da E verso H, hanno la direzione ascendente EF', la quale disposizione è generalmente la più favorevole alla stabilità dei muri sottoposti all'azione di una spinta orizzontale, siccome evidentemente lo dimostrano i segni che prendono i valori di T, T', N ed N' col cangiamento di α in $-\alpha$.

CAPITOLO VI.

Resistenza dei solidi rettilinei alla flessione.

ARTICOLO I.

Flessione prodotta nei solidi rettilinei da forze contenute in uno stesso piano passante pei loro assi ed a questi perpendicolari.

86. **Fondamentali risultati d'esperienza sulla resistenza alla flessione dei solidi prismatici, omogenei ed elastici.** — Galileo, in un saggio sulla resistenza dei corpi alla flessione, ha supposto che tutte le fibre si allungassero a partire da quelle collocate sulla faccia concava, e quest'ipotesi è anche stata ammessa da Mariotte e da Leibnitz. Duhamel di Monceaux, Dupin, Duleau, Fairbairn, Hodgkinson, Clark, Morin e molti altri celebri esperimentatori, in seguito ad accurate esperienze appositamente instituite per ben studiare la realtà dei fenomeni che si manifestano nella flessione, dimostrarono essere erronea l'ipotesi di Galileo e potersi ammettere, non come verità assolute e matematiche, ma come rappresentazioni sufficientemente esatte dei fatti reali nei limiti degli sforzi a cui praticamente si assoggettano i corpi nelle costruzioni:

1° Che le sezioni, primitivamente piane e normali alle fibre rettilinee di un prisma sottoposto a flessione, siano ancora piane dopo la flessione e normali a queste fibre divenute curve;

2° Che le fibre si comportino siccome altrettanti piccoli prismi isolati, ossia siccome non aventi azione alcuna le une sulle altre;

3° Che si allunghino le fibre collocate sulla faccia convessa del solido inflesso, che si accorcino quelle poste sulla faccia concava e che quindi, andando diminuendo dall'esterno all'interno questi due effetti opposti, debbasi trovare nell'interno del corpo uno strato di fibre nè allungate nè accorciate;

4° Che, in uno stesso corpo omogeneo sottoposto a flessione, il valore del coefficiente di elasticità longitudinale sia lo stesso tanto per le fibre allungate quanto per le fibre accorciate.

87. **Strato ad assi delle fibre invariabili; piano di sollecitazione.** — L'assieme delle fibre, esistenti in un corpo sottoposto a flessione, le quali non hanno subìto nè allungamento nè accorciamento, costituisce uno strato di fibre che chiamasi *strato delle fibre invariabili* o *strato delle fibre neutre*. L'intersezione di questo strato con una sezione trasversale qualunque del solido dicesi un *asse delle fibre invariabili* od anche un *asse neutro*.

Si dà il nome di *piano di sollecitazione* al piano passante per l'asse di un solido sottoposto a flessione (supposto non ancora deformato) e per la forza o per la risultante delle forze che tende ad infletterlo.

88. **Equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari che si sviluppano in una sezion retta qualunque di un corpo prismatico ed omogeneo nel quale viene cimentata la resistenza alla flessione.** — Allorquando in un corpo prismatico vien cimentata la resistenza alla flessione da forze tutte perpendicolari e tutte contenute in un piano perpendicolare all'asse, una sezione piana qualunque si sposta parallelamente alla sezione infinitamente vicina con sviluppo di resistenza allo scorrimento trasversale, e di più, in seguito dei dati sperimentali che vennero riferiti al numero 86, si può dire che tutte le fibre si dispongono secondo linee curve e che ogni sezione viene a subire, relativamente a quella che è infinitamente vicina, un movimento di rotazione attorno all'asse delle fibre invariabili.

Ciò premesso, siano AB e CD (*fig.* 44) due sezioni trasversali infinitamente vicine di un solido prismatico qualunque; rappresentando con $C'E'D'F'$ ed in vera forma e grandezza la superficie della sezione CD, sia G' il suo centro di superficie, $G'x$ e $G'y$ le direzioni degli assi principali d'inerzia (*m*) di detta superficie per

(*m*) Alla nota (*e*) già si è detto cosa intendesi in generale per momento d'inerzia di una superficie piana rispetto ad una retta qualunque, ed importa ora di esporre: le leggi di variazione dei momenti d'inerzia d'una superficie piana rispetto ad assi paralleli e quelle rispetto ad assi concorrenti situati nel suo piano; cosa intendesi per ellisse d'inerzia, per ellisse centrale d'inerzia e per assi principali.

Sia ABC (*fig.* 45) una figura piana qualunque, sia G il centro di superficie di questa figura e sia Gx_1 un asse in essa condotto parallelamente all'altro asse Ox passante pel punto qualunque O della superficie medesima. Chiamando

I il momento d'inerzia della superficie ABC rispetto all'asse Ox,

I_1 il momento d'inerzia della stessa superficie rispetto all'asse Gx_1,

d la distanza $\overline{OE}$ di questi assi,

y la distanza $\overline{MP}$ di un elemento superficiale qualunque M di superficie ω dall'asse Ox, il punto G' ed $U'U'$ la direzione dell'asse neutro nella sezione medesima; si consideri un elemento qualunque di fibra ab rappresen-

y_1 la distanza $\overline{MP_1}$ dello stesso elemento superficiale dell'asse Gx_1,

Σ una somma estesa a tutti gli elementi ω in cui s'intende decomposta la superficie $ABC=\Omega$,

si ha

$$I=\Sigma\,\omega\,y^2,$$

dalla quale, sostituendovi per y il valore dato da

$$y=y_1+d,$$

osservando che d è costante, che $\Sigma\,\omega=\Omega$, che $\Sigma\,\omega\,y_1=0$ (giacchè l'asse Gx_1 passa pel centro di superficie G della figura ABC) e che $\Sigma\,\omega\,y_1^2=I_1$, si ricava

$$I=I_1+d^2\,\Omega,$$

ossia che il momento d'inerzia I di una figura piana, rispetto ad un asse qualunque, è eguale al momento d'inerzia I_1 della medesima figura, rispetto all'asse parallelo passante pel centro di superficie, aumentato del prodotto della superficie totale Ω per il quadrato della distanza d dei due assi.

Se poi per il punto qualunque O della superficie piana ABC si conducono arbitrariamente due assi ortogonali Ox ed Oy, non che una terza retta Oz che faccia un dato angolo colla retta Ox, e se chiamansi

I_2 il momento d'inerzia della superficie piana ABC rispetto alla retta Oz,

α l'angolo zOx di questa retta coll'asse Ox,

x ed y le due coordinate $\overline{OP}$ e $\overline{PM}$ d'un elemento superficiale ω preso in un sito qualunque M,

r la distanza $\overline{MN}$ di quest'elemento dalla retta Oz e

Σ una somma estesa a tutti gli elementi ω in cui s'intende decomposta la superficie $ABC=\Omega$, per la definizione del momento d'inerzia di una superficie rispetto ad una retta qualunque si ha

$$I_2=\Sigma\,\omega\,r^2 \qquad (1).$$

Considerando ora il triangolo rettangolo MNO ed osservando che l'angolo MON vale l'angolo zOx diminuito dell'angolo MOP, si ricava

$$r=\overline{OM}\,\text{sen}\,(\alpha-MOP),$$

il qual valore di r, per essere $\text{sen}\,(\alpha-MOP)=\text{sen}\,\alpha\cos MOP-\cos\alpha\,\text{sen}\,MOP$, $\cos MOP=\dfrac{x}{\overline{OM}}$ e $\text{sen}\,MOP=\dfrac{y}{\overline{OM}}$ si riduce a

$$r=x\,\text{sen}\,\alpha-y\cos\alpha,$$

che sostituito nell'equazione (1) porta ad ottenere

$$I_2=\text{sen}^2\alpha\,\Sigma\,\omega\,x^2+\cos^2\alpha\,\Sigma\,\omega\,y^2-2\,\text{sen}\,\alpha\cos\alpha\,\Sigma\,\omega\,x\,y \qquad (2).$$

Dovendosi estendere a tutta la superficie della figura ABC le somme contenute tato in b' sulla figura C′E′D′F′ ed il quale, per lo scorrimento trasversale e per la rotazione intorno all'asse neutro rappresentato

nell'ultima equazione, $\Sigma\,\omega\,x^2$ e $\Sigma\,\omega\,y^2$ rappresentano rispettivamente i momenti d'inerzia della superficie ABC rispetto agli assi Oy ed Ox e $\Sigma\,\omega\,x\,y$, al pari di questi momenti d'inerzia, rappresenta una costante dipendente dalla figura e dalle dimensioni della superficie ABC, nonchè dalla posizione dell'origine O e dalla direzione degli assi coordinati.

Facendo variare l'angolo α si può mediante l'equazione (2) trovare il momento d'inerzia della superficie proposta ABC rispetto a quante rette si vogliono condotte per O, e, portando su ognuna di queste rette a partire da O una lunghezza reciprocamente proporzionale al corrispondente valore di $\sqrt{I_2}$, il luogo geometrico degli estremi di queste lunghezze costituirà una curva chiusa, giacchè il momento d'inerzia I_2 non è mai nullo ed il raggio vettore $\frac{C}{\sqrt{I_2}}$ (essendo C una costante arbitraria il cui valore verrà determinato nella nota (n)), ha sempre valori finiti qualunque sia l'angolo α; e, dette rispettivamente ξ ed υ le coordinate $\overline{OQ}$ e $\overline{QS}$ di un punto qualunque S di questa curva si avrà

$$\operatorname{sen}\alpha = \upsilon\,\frac{\sqrt{I_2}}{C}\,, \qquad \cos\alpha = \xi\,\frac{\sqrt{I_2}}{C}\,,$$

i quali valori di $\cos\alpha$ e di $\operatorname{sen}\alpha$ posti nell'equazione (2), conducono alla seguente relazione fra le coordinate ξ ed υ della curva luogo geometrico di tutti gli estremi delle rette lunghe $\frac{C}{\sqrt{I_2}}$ irradianti e valutate dal punto O

$$C^2 = \upsilon^2\,\Sigma\,\omega\,x^2 + \xi^2\,\Sigma\,\omega\,y^2 - 2\,\xi\,\upsilon\,\Sigma\,\omega\,x\,y \qquad (3),$$

che è l'equazione d'un ellisse riferita al centro, poichè le due quantità $\Sigma\,\omega\,x^2$ e $\Sigma\,\omega\,y^2$ sono essenzialmente positive e finite, e perchè non vi sono in essa termini al primo grado rispetto alle coordinate ξ ed υ.

Nella detta ellisse, che chiamasi *ellisse d'inerzia*, essendo ciaschedun raggio vettore inversamente proporzionale alla radice quadrata del momento d'inerzia della superficie data rispetto al raggio medesimo preso come asse, al minimo ed al massimo momento d'inerzia corrisponderà il raggio vettore massimo e minimo ossia il semi-asse maggiore ed il semi-asse minore dell'ellisse, e quindi: fra tutti gli assi che si possono condurre per qualsivoglia punto di una superficie piana data, quelli a cui competono il momento d'inerzia massimo e minimo sono fra loro perpendicolari e sono diretti secondo gli assi dell'ellisse centrale. Questi due assi prendono il nome di *assi principali d'inerzia* della superficie piana proposta rispetto al punto dato.

La direzione degli assi principali per il punto O si determina cercando la direzione di uno degli assi dell'ellisse d'inerzia, ossia trovando due assi coordinati Ox' ed Oy' (*fig.* 46) ai quali rapportando l'equazione di detta ellisse venga a svanire il termine che contiene il prodotto delle coordinate. Perciò, chiamando ε l'angolo $x'Ox$ che il nuovo asse Ox' deve fare coll'asse primitivo Ox, in O_1 della sezione CD relativamente alla sezione AB, avrà subito un allungamento od un accorciamento secondo che trovasi al di sopra o al di sotto dello strato delle fibre invariabili; e chiaminsi:

x' ed y' le coordinate $\overline{OR}$ ed $\overline{RS}$ del punto qualunque S dell'ellisse d'inerzia per rapporto ai due assi Ox' ed Oy', e conducendo per R le rette $\overline{RT}$ ed $\overline{RU}$ rispettivamente perpendicolari ad Ox ed Oy, in conformità di quanto insegna la geometria analitica, bisogna fare nell'equazione (3)

$$\xi = \overline{QO} = \overline{OT} - \overline{RU} = x' \cos\varepsilon - y' \operatorname{sen}\varepsilon,$$

$$\upsilon = \overline{QS} = \overline{TR} + \overline{US} = x' \operatorname{sen}\varepsilon + y' \cos\varepsilon,$$

e porre la condizione che deve essere nullo il coefficiente che moltiplica il prodotto $x'y'$. Così facendo si trova: che il coefficiente del prodotto $x'y'$ eguagliato a zero dà l'equazione

$$\operatorname{sen}\varepsilon \cos\varepsilon (\Sigma\omega x^2 - \Sigma\omega y^2) - (\cos^2\varepsilon - \operatorname{sen}^2\varepsilon)\Sigma\omega xy = 0,$$

d'onde

$$\operatorname{tang} 2\varepsilon = \frac{2\Sigma\omega xy}{\Sigma\omega x^2 - \Sigma\omega y^2} \tag{4},$$

e che l'equazione dell'ellisse d'inerzia si riduce alla forma

$$A' x'^2 + B' y'^2 = C^2,$$

essendo

$$A' = \operatorname{sen}^2\varepsilon \Sigma\omega x^2 + \cos^2\varepsilon \Sigma\omega y^2 - 2 \operatorname{sen}\varepsilon \cos\varepsilon \Sigma\omega xy$$

$$B' = \cos^2\varepsilon \Sigma\omega x^2 + \operatorname{sen}^2\varepsilon \Sigma\omega y^2 + 2 \operatorname{sen}\varepsilon \cos\varepsilon \Sigma\omega xy,$$

le quali combinate per addizione e sottrazione, ed osservando che dall'equazione (4) si ha

$$\Sigma\omega xy = \frac{1}{2} \operatorname{tang} 2\varepsilon (\Sigma\omega x^2 - \Sigma\omega y^2),$$

conducono alle seguenti due relazioni determinatrici di A' e B'

$$A' + B' = \Sigma\omega x^2 + \Sigma\omega y^2,$$

$$B' - A' = \frac{\Sigma\omega x^2 - \Sigma\omega y^2}{\cos 2\varepsilon}.$$

Mediante l'equazione (4) si può adunque in ogni caso trovare uno degli assi principali passanti pel punto O di una data superficie quando per questa e per rapporto ai due assi coordinati Ox ed Oy si conoscono le tre somme $\Sigma\omega x^2$, $\Sigma\omega y^2$ e $\Sigma\omega xy$, e trovato uno dei due assi principali passanti pel detto punto O, si ottiene immediatamente il secondo, giacchè questo deve essere perpendicolare a quello.

ω la superficie elementare della sezione dell'elemento di fibra $a\,b$;

Ω la superficie della totale sezion retta del prisma;

x ed y le coordinate $\overline{G'p}$ e $\overline{p\,b'}$ del centro della sezione, che il piano CD fa nel detto elemento di fibra, rispetto agli indicati assi principali $G'x$ e $G'y$;

v la distanza $\overline{b'q}$ di questo centro della retta UU condotta per G′ parallelamente alla supposta direzione U′U′ dell'asse neutro;

l la distanza $\overline{HG}$ delle due sezioni considerate AB e CD;

θ l'arco di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo infinitamente piccolo CO_1C_2 esprimente di quanto la sezione CD, passando in C_2D_2, ha girato intorno all'asse neutro relativamente alla sezione AB;

V la distanza $\overline{G'O'}=\overline{GO}=\overline{G_1O_1}$ che la direzione U′U′ dell'asse neutro ha dal centro di superficie G′;

N la risultante di tutte le forze applicate al corpo oltre la sezione CD, ossia a diritta di questa sezione per chi osserva la citata figura 44;

K la distanza di questa forza dalla sezione CD;

μ il momento NK della stessa forza N rispetto all'asse delle fibre invariabili contenuto nella detta sezione CD;

φ l'angolo $NG'y'$ che il piano passante per la forza N e per l'asse

Allorquando gli assi principali di una superficie piana coincidono cogli assi coordinati, il valore di tang 2ε deve essere zero e quindi si deve avere

$$\Sigma\omega xy=0,$$

la qual relazione serve a caratterizzare gli assi principali, giacchè se essa è soddisfatta, mancherà nell'equazione (3) dell'ellisse d'inerzia il termine $2\xi v\Sigma\omega xy$, la qual cosa, essendo gli assi coordinati ortogonali, non può aver luogo che quando questi assi sono diretti secondo i diametri principali di detta ellisse.

In certi casi gli assi principali di una figura piana passanti per un punto dato di essa si conoscono immediatamente senza alcun calcolo, e facilmente si vede che ogni retta di simmetria tracciata in una data figura piana è asse principale per qualunque punto collocato sulla stessa retta, che ogni perpendicolare ad una retta di simmetria è asse principale pel suo punto d'incontro con questa linea, e finalmente che ogni linea che è asse principale e che passa pel centro di superficie della figura è asse principale in qualsivoglia punto del suo percorso; giacchè prendendo per asse delle ordinate una linea perpendicolare alla linea di simmetria oppure all'asse principale passante pel centro di superficie, si ha

$$\Sigma\omega xy=0.$$

Allorquando il punto O (*fig.* 45) coincide col centro di superficie G della figura piana ABC l'ellisse d'inerzia relativa a questo punto chiamasi *ellisse centrale d'inerzia* e gli assi principali corrispondenti prendono il nome di *assi principali centrali d'inerzia.*

del prisma fa coll'asse $yG'y'$ assunto come asse delle ordinate nel piano della sezione $C'E'D'F'$;

ψ l'angolo $xG'U$ che la retta UU fa coll'asse $x'G'x$ assunto come asse delle ascisse nel piano della sezione $C'E'D'F'$;

I' il momento d'inerzia della superficie della sezione $C'E'D'F'$ rispetto all'asse $x'G'x$ ed

I'' il momento d'inerzia della superficie della stessa sezione rispetto all'asse $yG'y'$;

E un numero esprimente il coefficiente d'elasticità longitudinale della materia di cui il prisma è formato;

E^{IV} il coefficiente d'elasticità trasversale;

δ lo scorrimento relativo subito dalla sezione CD relativamente alla sezione AB;

Σ una somma estesa a tutte le superficie elementari ω.

Tirando da p la retta $\overline{pr}$ parallela ad UU ed osservando che gli angoli $rb'p$ ed rps sono eguali all'angolo $xG'U = \psi$, ricavansi rispettivamente dai triangoli rettangoli $b'rp$, prs ed $sG'q$ i seguenti valori di $\overline{b'r}$, di $\overline{rs}$ e di $\overline{sq}$:

$$\overline{b'r} = y\cos\psi; \qquad \overline{rs} = \overline{sp}\,\mathrm{sen}\,\psi; \qquad \overline{sq} = \overline{G's}\,\mathrm{sen}\,\psi.$$

Sommando queste tre lunghezze si ottiene $\overline{qb'} = v$ e, ponendo x al luogo del coefficiente $\overline{sp} + \overline{G's}$ di $\mathrm{sen}\,\psi$, risulta

$$v = y\cos\psi + x\,\mathrm{sen}\,\psi \qquad (1).$$

Ciò premesso, l'elemento di fibra $\overline{ab}$, avente per sezione ω e distante dalle quantità $V+v$ dal supposto asse neutro $U'U'$, pel fatto della flessione proverà un allungamento od un accorciamento che algebricamente si può esprimere con $(V+v)\,\theta$, purchè prendasi v negativo dalla parte di UU verso la quale si verificano accorciamenti di fibre; la tensione e la compressione corrispondente verrà data, per quanto si è detto ai numeri 12 e 29 parlando dell'estensione e della compressione, da

$$E\,\omega\,\frac{(V+v)\,\theta}{l};$$

il momento di questa forza rispetto all'asse delle x sarà

$$E\,\omega\,\frac{(V+v)\,\theta}{l}\,y;$$

il momento della medesima forza rispetto all'asse delle y avrà per valore

$$E\omega\frac{(V+v)\theta}{l}x;$$

e la resistenza allo scorrimento che oppone il considerato elemento di fibra potrà essere espresso da

$$E^{IV}\omega\partial.$$

Le domandate condizioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari si otterranno ponendo le condizioni esprimenti che tutta la parte di corpo, posta alla diritta della sezione CD per chi osserva la figura 44, trovasi in equilibrio sotto l'azione della forza N, delle reazioni molecolari sviluppatesi a motivo delle estensioni subite dagli elementi di fibra posti al di sopra dello strato di fibre invariabili IO_1, di quelle derivanti dalle compressioni apportate agli elementi di fibra posti al di sotto dello stesso strato di fibre invariabili IO_1, e finalmente di quelle provenienti dalla resistenza allo scorrimento trasversale della sezione CD relativamente alla sezione AB. Queste condizioni d'equilibrio risulteranno scrivendo: che deve essere zero la somma algebrica delle forze parallele all'asse del prisma, le quali forze si riducono semplicemente alle reazioni molecolari sviluppate dalle fibre allungate e dalle fibre compresse pel fatto della flessione, e ponendo quindi

$$\Sigma E\omega\frac{(V+v)\theta}{l}=0 \qquad (2);$$

che deve essere zero la somma dei momenti di tutte le forze sollecitanti rispetto all'asse principale $x'Gx$, ossia che devesi avere

$$\Sigma E\omega\frac{(V+v)\theta}{l}y-NK\cos\varphi=0 \qquad (3)$$

(essendo $N\cos\varphi$ la componente della N sempre in un piano perpendicolare all'asse del prisma, ma nel piano passante per l'asse del prisma stesso e per l'asse principale $yG'y'$ della sezione CD, ed $NK\cos\varphi$ il momento di questa componente rispetto all'asse $x'G'x$); che deve essere zero la somma dei momenti di tutte le forze sollecitanti rispetto all'asse principale $yG'y'$, ossia che devesi avere

$$\Sigma E\omega\frac{(V+v)\theta}{l}x-NK\operatorname{sen}\varphi=0 \qquad (4)$$

(essendo $N \operatorname{sen} \varphi$ la seconda delle componenti in cui venne scomposta la forza N e che trovasi nel piano determinato dall'asse del prisma e dall'asse principale $x'G'x$, ed $NK \operatorname{sen} \varphi$ il momento di questa componente rispetto all'asse $yG'y'$); e finalmente che deve essere zero la somma algebrica di tutte le forze dirette normalmente all'asse del prisma, le quali forze si riducono semplicemente alla resistenza allo scorrimento trasversale che sviluppasi nella sezione CD ed alla forza N, per modo che si avrà

$$\Sigma E^{\text{IV}} \omega \delta - N = 0,$$

la qual equazione per il caso di flessioni piccolissime quali sono quelle a cui si possono assoggettare i corpi nelle costruzioni per essere lo scorrimento relativo la tangente trigonometrica dell'angolo che l'elemento di fibra spostata fa colla sua posizione primitiva (num. 70), per confondersi sensibilmente la curva ab_1b_2 colla sua corda ab_2 e questa colla perpendicolare in b_2 ad O_1C_2 e quindi per risultare l'angolo bab_2 pochissimo diverso dall'angolo CO_1C_2, si può ridurre a

$$\Sigma E^{\text{IV}} \omega \operatorname{tang} \theta - N = 0$$

o ancora, attesa la picciolezza dell'angolo misurato dall'arco θ alla cui tangente si può sostituire l'arco stesso, a

$$\Sigma E^{\text{IV}} \omega \theta - N = 0 \tag{5}$$

Sostituendo nelle equazioni (2), (3) e (4) il valore di v dato dalla (1) ed osservando che le quantità E, E^{IV}, l, θ, V e ψ vanno considerate come costanti, le quattro condizioni d'equilibrio diventano

$$E\frac{\theta}{l}(V\Sigma\omega + \cos\psi\Sigma\omega y + \operatorname{sen}\psi\Sigma\omega x) = 0,$$

$$E\frac{\theta}{l}(V\Sigma\omega y + \cos\psi\Sigma\omega y^2 + \operatorname{sen}\psi\Sigma\omega xy) = NK\cos\varphi,$$

$$E\frac{\theta}{l}(V\Sigma\omega x + \cos\psi\Sigma\omega xy + \operatorname{sen}\psi\Sigma\omega x^2) = NK\operatorname{sen}\varphi,$$

$$E^{\text{IV}}\theta\Sigma\omega = N.$$

Ora si ha $\Sigma\omega y = 0$ e $\Sigma\omega x = 0$, giacchè il centro di superficie G' della sezione C'E'D'F' venne preso per origine delle coordinate;

$\Sigma \omega x y = 0$, perchè gli assi $x' G' x$ ed $y G' y'$ sono gli assi principali d'inerzia dell'accennata sezione condotti pel suo centro di superficie; $\Sigma \omega y^2$ e $\Sigma \omega x^2$ non sono altro che i momenti d'inerzia I' ed I'' della superficie della medesima sezione rispetto agli assi $x' G' x$ ed $y G' y'$; $\Sigma \omega = \Omega$ ed $NK = \mu$: cosicchè le quattro condizioni d'equilibrio diventano

$$\left.\begin{aligned} &E\frac{\theta}{l} V \Omega = 0, \\ &E\frac{\theta}{l} I' \cos\psi = \mu \cos\varphi, \\ &E\frac{\theta}{l} I'' \operatorname{sen}\psi = \mu \operatorname{sen}\varphi, \\ &E^{\text{IV}} \theta \Omega = N. \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

Queste equazioni costituiscono il fondamento di belle ed importanti quistioni relative alla flessione dei solidi prismatici sottoposti all'azione di forze contenute in uno stesso piano passante pei loro assi ed a questi perpendicolari, ed immediatamente si passa ad esporre quelle che possono tornare di qualche utilità nella pratica dell'ingegnere costruttore.

89. **Determinazione dell'asse neutro e del piano di flessione.** — La prima delle quattro condizioni d'equilibrio, che nel precedente numero vennero complessivamente indicate (6), non potendo essere verificata che col porre $V = 0$ giacchè è impossibile che si annulli una delle quantità E, θ, l ed Ω, porta a conchiudere che in un prisma omogeneo, nel quale vien cimentata la resistenza alla flessione da forze contenute in uno stesso piano passante per l'asse ed a questo perpendicolari, l'asse neutro della sezione qualunque $C'E'D'F'$ (*fig.* 44) passa pel suo centro di superficie G', e che quindi il fenomeno della flessione succede come lo indica la figura 47. Dividendo poi la terza di dette condizioni per la seconda, si trova

$$\frac{I''}{I'} \operatorname{tang}\psi = \operatorname{tang}\varphi,$$

d'onde

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{I'}{I''} \operatorname{tang}\varphi \qquad (1),$$

il qual valore di $\tang\psi$ dà l'angolo che l'asse neutro UU fa coll'asse $G'x$, giacchè I', I'' e $\tang\varphi$ sono quantità note. Sapendosi ora che l'asse neutro deve passare pel centro di superficie e conoscendosi l'angolo che esso deve fare con $G'x$, trovasi il medesimo compiutamente determinato.

Chiamando a il raggio di girazione della superficie $C'E'D'F'$ rispetto all'asse $yG'y'$ e b il raggio di girazione della medesima superficie rispetto all'asse $xG'x'$ (*n*) si ha

$$I' = b^2\Omega, \qquad I'' = a^2\Omega,$$

(*n*) La radice quadrata del quoziente che si ottiene dividendo il momento d'inerzia della superficie di una data figura piana per la superficie medesima vien detto *raggio di girazione* della superficie stessa rispetto all'asse per rapporto al quale si è valutato il momento d'inerzia, cosicchè chiamando in generale

I il momento d'inerzia della superficie di una figura piana ABC (*fig.* 45) rispetto ad un asse qualunque Ox in essa condotto,

Ω la superficie di detta figura ed

r il raggio di girazione corrispondente,

fra le quantità I, Ω ed r si ha la relazione

$$r = \sqrt{\frac{I}{\Omega}},$$

d'onde

$$r^2\Omega = I.$$

Ciò premesso, nell'ipotesi che gli assi principali passanti per un dato punto O di una superficie piana ABC coincidano cogli assi coordinati Ox ed Oy in questa superficie tracciati e che siano x ed y le coordinate relative ad un punto qualunque dell'ellisse d'inerzia, la sua equazione risulta immediatamente dall'equazione (3) della nota (*m*) facendovi $\Sigma\omega xy = 0$ e cangiando rispettivamente ξ ed υ in x ed y, per cui si ottiene

$$x^2\Sigma\omega y^2 + y^2\Sigma\omega x^2 = C^2.$$

Chiamando ora a il raggio di girazione corrispondente alla superficie ABC rispetto all'asse delle y, e b quello rispetto all'asse delle x, per essere rispettivamente $\Sigma\omega x^2$ e $\Sigma\omega y^2$ i momenti d'inerzia della stessa superficie rispetto ai medesimi assi, si ha

$$\Sigma\omega x^2 = a^2\Omega, \qquad \Sigma\omega y^2 = b^2\Omega,$$

i quali valori di $\Sigma\omega x^2$ e $\Sigma\omega y^2$, posti nell'ultima equazione dell'ellisse d'inerzia, la trasformano in

$$b^2\Omega x^2 + a^2\Omega y^2 = C^2,$$

che, divisa per $a^2b^2\Omega$ dopo d'aver posto $C^2 = a^2b^2\Omega$ per valore della costante C, conduce alla seguente semplice equazione dell'ellisse d'inerzia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

i quali valori di I′ e di I″, posti nell'equazione determinatrice di tang ψ, conducono a

$$\tang \psi = \frac{b^2}{a^2} \tang \varphi \qquad (2).$$

Ricordando ora che l'ellisse d'inerzia ha per equazione, riferita ai due assi principali d'inerzia G′ x e G′ y,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,;$$

supponendo descritta quest'ellisse i cui due semi-assi sono $\overline{G'a} = a$ e $\overline{G'b} = b$ e considerando su essa il punto M di coordinate $\overline{G'P} = x'$ e $\overline{PM} = y'$ in cui viene incontrata dal piano di sollecitazione; immaginando condotta in questo punto la tangente MT all'ellisse incontrante in Q l'asse G′x; essendo, dietro quanto insegna la geometria analitica,

$$\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} = 1$$

l'equazione della tangente all'ellisse nel punto di coordinate x' ed y' e quindi avendosi

$$\tang \mathrm{MQ}x = -\frac{b^2 x'}{a^2 y'}\,;$$

dovendosi avere, per essere supplementari i due angoli M Q x ed M Q G′

$$\tang \mathrm{MQG'} = -\tang \mathrm{MQ}x = \frac{b^2 x'}{a^2 y'} \qquad (3)\,;$$

e finalmente, per essere complementari i due angoli y G′M ed M G′x, risultando

$$\tang \varphi = \tang \mathrm{NG'}\,y' = \tang y\,\mathrm{G'M} = \cot \mathrm{MG'}x = \frac{x'}{y'}\,:$$

per sostituzione di questo valore di tang φ nell'equazione (2) risulta

$$\tang \psi = \frac{b^2 x'}{a^2 y'}.$$

Essendo eguali i secondi membri di quest'ultima equazione e dell'equazione (3), si ricava che l'angolo MQG' è eguale all'angolo $\psi = xG'U$, e quindi che l'asse neutro in una sezione qualunque è parallelo alla tangente all'ellisse centrale d'inerzia nel punto in cui vien essa incontrata dal piano di sollecitazione, o, giacchè l'asse neutro passa pel centro di superficie, che trovasi esso diretto secondo il diametro coniugato di quello secondo il quale il piano di sollecitazione taglia la detta ellisse.

Il piano di flessione è quel piano passante per l'asse del prisma il quale risulta perpendicolare all'asse neutro di una sezione qualunque; la sua traccia VV' sulla sezione $C'E'D'F'$ (*fig.* 44) fa coll'asse $yG'y'$ l'angolo $V'G'y' = xG'U = \psi$; e la deviazione dello stesso piano dal piano di sollecitazione è misurata dall'angolo $V'G'N = \psi - \varphi$.

90. **Equazione della curva secondo cui si dispone l'asse di un prisma omogeneo ed elastico nel quale vien cimentata la resistenza alla flessione; momento inflettente, momento resistente alla flessione e momento di flessibilità.** — In generale chiamasi *curva elastica* quella secondo cui si dispone l'asse di un corpo elastico allorquando il detto asse viene a deformarsi sotto l'azione di date forze estrinseche applicate al corpo, e l'assunto che mi propongo in questo numero sta appunto nel trovare l'equazione della curva elastica secondo cui si dispone l'asse di un solido prismatico omogeneo ed elastico, nel quale vien cimentata la resistenza alla flessione da date forze tutte contenute in uno stesso piano passante per l'asse ed a questo perpendicolari.

Dividendo per I' la seconda e per I'' la terza delle quattro condizioni d'equilibrio che al numero 88 vennero complessivamente indicate (6), elevandole al quadrato e sommando quindi i risultati, trovasi

$$E^2 \frac{\theta^2}{l^2}\left(\cos^2\psi + \operatorname{sen}^2\psi\right) = \mu^2\left(\frac{\cos^2\varphi}{I'^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}\right),$$

d'onde, estraendo la radice quadrata ed osservando che $\cos^2\psi + \operatorname{sen}^2\psi = 1$, ricavasi

$$E\frac{\theta}{l} = \mu\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}} \qquad (1).$$

Rammentando ora che al già citato numero 88 nel considerare le due sezioni trasversali AB e CD (*fig.* 44) si è supposto che esse fossero infinitamente vicine e che, per quanto si è detto nel precedente numero, la parte HG (*fig.* 47) di asse compresa fra queste due sezioni non si è nè allungata nè accorciata pel fatto della flessione, si può stabilire: che la parte $HG = l$ di asse del prisma si è convertita in un arco infinitamente piccolo $HG_1 = ds$ della curva elastica secondo la quale si è disposto il detto asse; che, atteso la piccola flessione subita dal solido, giacchè s'intende sempre di essere nei limiti degli sforzi a cui praticamente si possono assoggettare i corpi nelle costruzioni, l'arco di raggio eguale all'unità e chiudente l'angolo piccolissimo $C_1 G_1 C_2$, eguale all'angolo ARC_2 delle due normali alla curva elastica nei due punti H e G_1, è pure un arco infinitesimo il quale si può rappresentare con $d\tau$; che per conseguenza si può cangiare il $\frac{\theta}{l}$ in $\frac{d\tau}{ds}$; ed infine, essendo ρ il raggio della circonferenza osculatrice alla curva elastica secondo cui si è disposto l'asse del solido e passante pei piani H e G_1, il qual raggio vale $\frac{ds}{d\tau}$, che l'ultima equazione può essere scritta

$$E\frac{1}{\rho} = \mu \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}} \qquad (2).$$

Prendendo ora due assi coordinati ortogonali Oz ed Ou (*fig.* 48) per riferirvi l'equazione della curva elastica OA assunta dall'asse primitivo del prisma, il primo nella direzione di detto asse ed il secondo contenuto nel piano di flessione (il qual piano è compiutamente determinato, giacchè, per quanto si è detto nel precedente numero, passa esso per l'asse primitivo del prisma sottoposto a flessione e fa col piano di sollecitazione un angolo che si può calcolare), chiamando z ed u le coordinate $\overline{OP}$ e $\overline{PM}$ di un punto qualunque dell'accennata curva OA, rammentando che

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{du^2}{dz^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2u}{dz^2}},$$

che per il caso di flessioni piccole, quali sono quelle che fanno l'oggetto di queste ricerche, le tangenti ai diversi punti della curva

OA fanno sempre angoli piccolissimi coll'asse delle z per cui $\frac{d\,u}{d\,z}$ è sempre assai prossimo a zero; e che per conseguenza con sufficiente approssimazione per la pratica si può assumere

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2 u}{d z^2}},$$

e finalmente sostituendo questo valore di ρ nell'equazione (2) si ottiene la seguente semplicissima equazione differenziale di secondo ordine della curva elastica

$$E \frac{d^2 u}{d\,z^2} = \mu \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{I'^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{I''^2}} \qquad (3),$$

nella quale si deve intendere che μ rappresenti quella certa funzione di z che esprime il momento rispetto all'asse neutro di una sezione qualunque CD di tutte le forze che tendono ad inflettere il solido e poste da una medesima parte della sezione qualunque considerata, ed alla quale per conseguenza si può dare il nome di *momento inflettente*

La quantità $\frac{E}{\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{I'^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{I''^2}}} \frac{d^2 u}{d\,z^2}$, che è eguale al momento inflettente μ, rappresenta il momento delle azioni molecolari che arrestano la flessione prodotta dal momento μ delle forze estrinseche e si può chiamare *momento resistente alla flessione;* e prende il nome di *momento di flessibilità* il coefficiente $\frac{E}{\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{I'^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{I''^2}}}$ di $\frac{d^2 u}{d\,z^2}$, indipendente dalla flessione, dipendente soltanto dalla forma e dalla superficie della sezion retta del corpo prismatico sottoposto a flessione e dalle sue proprietà fisiche e che può essere preso siccome esprimente la misura del momento inflettente atto a produrre un certo grado di flessione attorno a un determinato asse fra due sezioni rette vicinissime.

91. Resistenze riferite all'unità di superficie, che in una sezione trasversale qualunque e pel fatto della sola flessione devono opporre le fibre maggiormente allungate e quelle maggiormente compresse. — Supponendo che nella figura 49 sia rappresentato un solido prismatico, omogeneo ed elastico sottoposto alla flessione prodotta da forze contenute in uno stesso piano passante pel suo asse ed a questo perpendicolari, e che siano AB e CD due sue sezioni rette infinitamente vicine, la seconda delle quali in vera forma e grandezza naturale intendesi rappresentata in C′E′D′F′; essendo G′ il centro di superficie di questa sezione ed UU l'asse neutro che alla medesima si riferisce; ponendo che sia F′C′E′ la parte della sezione medesima incontrata dalle fibre che si allungano ed F′D′E′ quella incontrata dalle fibre che si accorciano pel fatto della flessione; essendo C′ e D′ i due punti, il primo collocato sul perimetro della prima parte ed il secondo sul perimetro della seconda parte, che hanno la distanza massima dall'asse neutro UU e pei quali vengono per conseguenza a passare i due elementi di fibra $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ che subiscono rispettivamente il massimo allungamento ed il massimo accorciamento, chiamando

Q_1 la resistenza per trazione riferita all'unità di superficie che oppone l'elemento di fibra AC corrispondente al punto C′,

Q_2 la resistenza per pressione riferita all'unità di superficie che oppone l'elemento di fibra BD corrispondente al punto D′,

ω la superficie elementare costituente la superficie della sezion retta tanto dell'una quanto dell'altra fibra,

v' la distanza $\overline{P'C'}$ della fibra allungata maggiormente distante dall'asse neutro UU,

v'' la distanza Q′D′ della fibra compressa maggiormente distante dallo stesso asse neutro;

ritenendo che le lettere E, θ, l, μ, I′, I″ e φ abbiano i significati che alle medesime vennero attribuiti al numero 88, appoggiandosi ai fondamentali risultati d'esperienza che vennero ammessi al numero 86; e finalmente ammettendo che la flessione metta in giuoco la sola elasticità longitudinale giacchè sono assai piccoli gli allungamenti che le fibre subiscono per ciò che nella flessione si provoca anche la resistenza allo scorrimento trasversale, si ha: che l'elemento di fibra AC incontrante in C′ la sezione C′E′D′F′ subisce un allungamento rappresentato da $v'\theta$, e che l'elemento di fibra BD incontrante in D′ l'or detta sezione si accorcia della quantità $v''\theta$; che il primo di detti elementi presenta una resistenza alla trazione (num. 12) espressa da $E\omega\frac{v'\theta}{l}$, ed il secondo una resistenza alla compressione (num. 29) data da $E\omega\frac{v''\theta}{l}$; che per conseguenza le resistenze Q' e Q'' riferite all'unità di superficie, che oppongono rispettivamente l'elemento di fibra maggiormente allungato A C e quello maggiormente compresso BD, sono determinate dalle equazioni

$$Q_1 = E v' \frac{\theta}{l};$$

$$Q_2 = E v'' \frac{\theta}{l},$$

le quali, ponendovi il valore di $E\frac{\theta}{l}$ dato dall'equazione (1) del numero 90, si trasformano nelle seguenti equazioni determinatrici di Q_1 e di Q_2

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= v' \mu \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{I'^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{I''^2}} \\ Q_2 &= v'' \mu \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{I'^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{I''^2}} \end{aligned}\right\} (1).$$

Da queste equazioni si vede che per un corpo prismatico di data sezione, e pel quale conseguentemente non variano da una sezione all'altra v', v'' e $\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{I'^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{I''^2}}$, i valori di Q_1 e di Q_2 variano proporzionalmente al momento inflettente μ, e che nel corpo che si considera saranno essi massimi per quella sezione relativamente alla quale μ acquista pure un valore massimo.

92. **Condizioni ed equazioni di stabilità dedotte dalle resistenze allo snervamento per trazione, per pressione e per scorrimento trasversale.** — Affinchè un corpo prismatico sottoposto a flessione prodotta da forze contenute in uno stesso piano passante pel suo asse ed a questo perpendicolari si possa dir stabile, è necessario: che in nessun punto della fibra maggiormente allungata venga cimentata la resistenza allo snervamento per trazione; che in nessun punto della fibra maggiormente compressa venga provocata la resistenza allo snervamento per compressione; e finalmente che in nessuna sezione del solido si trovi messa in giuoco la resistenza allo snervamento per scorrimento trasversale. Ciò premesso, chiamando

Q' il coefficiente di snervamento per trazione, ossia la resistenza allo snervamento per trazione riferita all'unità di superficie (numero 14),

Q'' il coefficiente di snervamento per pressione (num. 31),

Q''' il coefficiente di snervamento per scorrimento trasversale (num. 73),

N_m il valor massimo che può acquistare la risultante N delle forze applicate al corpo da un suo estremo fino ad una determinabile sezione trasversale,

μ_m il massimo valore che può acquistare il momento inflettente μ nell'estensione del corpo che si considera

Ω la superficie della sezione trasversale del corpo stesso,

conservando alle lettere v', v'', I', I'' e φ i significati che alle medesime già vennero attribuiti, ed essendo rispettivamente, per quanto si è trovato nel precedente numero,

$$v' \mu_m \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}}$$

$$v'' \mu_m \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}}$$

la tensione e la pressione massime riferite all'unità di superficie che subiscono la fibra maggiormente allungata e quella maggiormente compressa, le condizioni di stabilità affinchè non vengano cimentate le resistenze allo snervamento per trazione e per compressione sono

$$Q' > v' \mu_m \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}}$$

$$Q'' > v'' \mu_m \sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2} + \frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}},$$

alle quali bisogna ancora aggiungere quella che si riferisce allo scorrimento trasversale espresso da

$$Q^{\text{IV}} > \frac{N_m}{\Omega}$$

e che facilmente si deduce dalla condizione di stabilità che venne data al numero 73 col solo cangiamento di T^{v} in N_m.

Chiamando ora m', m'' ed m^{iv} tre coefficienti di stabilità, il primo conveniente alla resistenza all'estensione (num. 14), il secondo adatto alla resistenza alla compressione (num. 31) ed il terzo per la resistenza allo scorrimento trasversale (num. 73), le tre condizioni di stabilità sopra stabilite si possono trasformare nelle seguenti equazioni di stabilità

$$m'Q' = v'\mu_m\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}}$$

$$m''Q'' = v''\mu_m\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}}$$

$$m^{iv}Q^{iv} = \frac{N_m}{\Omega}.$$

Lasciandosi incognita una sola delle dimensioni della sezione trasversale del prisma sottoposto a flessione, esprimendo v', v'', Ω, I' ed I'' in funzione della dimensione incognita e di altre dimensioni cognite di questa sezione trasversale ed essendo noti i valori di Q', Q'' e Q^{v} in seguito ad appositi esperimenti instituiti sull'estensione, sulla compressione e sullo scorrimento trasversale (num. 13, 30 e 72), di m', m'' ed m^{v}, di φ, di N_m e di μ_m, con ciascuna delle tre equazioni di stabilità si potrà calcolare la dimensione lasciata incognita e, dei tre valori che si troveranno, si riterrà il maggiore siccome quello da adottarsi.

93. **Condizioni ed equazioni di stabilità dedotte dalle resistenze alla rottura per trazione, per pressione e per scorrimento trasversale.** — Molti costruttori, partendo dall'idea che sia benissimo possibile di avere le azioni molecolari $m'Q'$, $m''Q''$ ed $m^{v}Q^{v}$ che possono sviluppare i corpi nelle costruzioni senza che venga a mancare la loro stabilità col prendere una data frazione delle corrispondenti resistenze alla rottura, invece delle equazioni di stabilità che vennero date nel precedente numero usano queste altre

$$n'R' = v'\mu_m\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}}$$

$$n''R''=v''\mu_m\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}}$$

$$n^{IV}R^{IV}=\frac{N_m}{\Omega},$$

nelle quali equazioni R', R'' ed R^{IV} rappresentano rispettivamente le resistenze alla rottura riferite all'unità di superficie ossia i coefficienti di rottura per estensione, per compressione e per scorrimento trasversale facilmente ricavabili o dai dati numerici che vennero dati ai numeri 17, 34 e 76, o in seguito ad esperienze sulla resistenza alla rottura per trazione, per pressione e per scorrimento trasversale da instituirsi colle norme che vennero indicate ai già citati numeri 17, 34 e 76 sopra prismi della materia di cui deve essere formato quello pel quale vuolsi determinare una delle dimensioni dalla sua sezion retta coll'applicazione delle ultime tre equazioni di stabilità. Le lettere n', n'' ed n^{IV} rappresentano i coefficienti di stabilità relativi all'estensione, alla compressione ed allo scorrimento trasversale i cui valori si assumeranno colle norme che vennero date ai numeri 18, 40 e 79; e le lettere Ω, v', v'', μ_m, N_m, φ, I' ed I'' conservano il significato che loro vennero attribuiti nei numeri 88, 91 e 92.

94. **Necessità della determinazione dei momenti d'inerzia e degli assi principali d'inerzia delle figure piane.** — L'applicazione delle formole, che vennero instituite sull'equilibrio e sulla stabilità dei solidi prismatici sottoposti alla flessione prodotta da forze contenute in uno stesso piano passante pei loro assi ed a questi perpendicolari, esige che si conoscano i momenti d'inerzia delle sezioni rette dei prismi rispetto agli assi principali d'inerzia in esse condotti, per cui riesce indispensabile di dare le norme generali con cui si possano determinare i detti elementi per una figura piana qualunque e di fermarsi in ispecial modo all'esame di quei casi che sono i più frequenti nella pratica.

95. **Momenti d'inerzia delle sezioni triangolari piene e delle sezioni triangolari vuote rispetto ad assi diversamente condotti nei loro piani.** — I. *Momento d'inerzia della sezione triangolare rispetto ad un suo lato.*

Sia ABC (*fig.* 50) il triangolo proposto, sia $\overline{BC}$ il lato, scelto siccome asse, per rapporto al quale vuolsi il momento d'inerzia, e si chiamino

a la lunghezza del lato $\overline{CB}$ preso come base,

h l'altezza $\overline{CD}$ del triangolo dato

z la distanza $\overline{DI}$ di un elemento superficiale qualunque EFGH ottenuto conducendo parallelamente alla base $\overline{CB}$ le due rette $\overline{EF}$ ed $\overline{HG}$ infinitamente vicine fra di loro e

I_a il domandato momento d'inerzia (o).

Per la similitudine dei due triangoli AEF ed ACB si ha

$$\overline{EF}=\frac{a(h-z)}{h};$$

l'elemento superficiale EFGH, essendo $\overline{IK}=dz$, vale $\frac{a(h-z)}{h}dz$;

il momento d'inerzia di quest'elemento rispetto al lato CB è

$$\frac{a(h-z)}{h}z^2\,dz=a\left(z^2-\frac{z^3}{h}\right)dz;$$

e finalmente il domandato momento d'inerzia del triangolo ABC, che è l'integrale di questo momento d'inerzia elementare preso fra i limiti $z=0$ e $z=h$, vien dato da

$$I_a=a\int_0^h\left(z^2-\frac{z^3}{h}\right)dz=\frac{1}{3}ah^3-\frac{1}{4}ah^3=\frac{1}{12}a\,h^3.$$

II. *Momento d'inerzia della sezione triangolare rispetto ad una retta condotta pel suo centro di superficie parallelamente ad un lato.*

Si sa che fra il momento d'inerzia I di una figura piana rispetto ad un asse qualunque ed il momento d'inerzia I_1 della medesima figura rispetto ad un asse parallelo al primo e passante pel centro di superficie della stessa figura si ha la relazione [nota (m)]

$$I=I_1+d^2\Omega,$$

nella quale d è la distanza dei due assi ed Ω la superficie della figura data. Segue da ciò che nel caso particolare proposto di un triangolo ABC (*fig.* 51) del quale vuolsi il momento d'inerzia I_1

(o) Nel numero che segue si ha il metodo per elementarmente trovare questo momento d'inerzia.

rispetto alla retta FI condotta pel suo centro di superficie G parallelamente alla base CB, siccome ritenute le denominazioni stabilite nel precedente problema per quanto concerne alla base $\overline{CB}$ ed all'altezza $\overline{AD}$ si ha

$$I = I_a = \frac{1}{12} a h^3, \qquad d = \overline{DH} = \frac{1}{3} h, \qquad \Omega = \frac{1}{2} a h,$$

deve essere

$$I_1 = \frac{1}{12} a h^3 - \frac{1}{18} a h^3 = \frac{1}{36} a h^3.$$

III. *Momento d'inerzia della sezione triangolare rispetto ad una retta qualunque condotta nel suo piano parallelamente ad un suo lato.*

Indicando sempre con a la base $\overline{CB}$ (*fig.* 51) e con h l'altezza $\overline{AD}$ del triangolo dato ABC, chiamando D la distanza $\overline{DK}$ della retta F′I′ parallela al lato $\overline{CB}$ per rapporto alla quale vuolsi il momento d'inerzia I ed applicando la nota relazione

$$I = I_1 + d^2 \Omega,$$

nella quale I_1 esprime il momento d'inerzia $\frac{1}{36} a h^3$ del triangolo ABC rispetto alla retta FI condotta pel centro di superficie G parallelamente al lato CB, d la distanza $\overline{HK} = \overline{DK} - \overline{DH} = D - \frac{1}{3} h$ fra le due rette parallele FI ed F′I′, ed Ω la superficie del triangolo ABC espressa da $\frac{1}{2} a h$, si trova

$$I = \frac{1}{36} a h^3 + \left(D - \frac{1}{3} h\right)^2 \frac{1}{2} a h.$$

Svolgendo il quadrato che trovasi indicato nell'espressione di I e riducendo i termini simili, trovasi

$$I = \frac{1}{12} a h^3 + a h D \left(\frac{1}{2} D - \frac{1}{3} h\right).$$

Se la retta per rapporto alla quale vuolsi il momento d'inerzia, sempre parallela al lato CB, è la F″I″ passante pel vertice A, bisogna fare $D = h$ nel valore di I, chiamando I_A il valore particolare che allora acquista il momento d'inerzia I si ha

$$I_A = \frac{1}{4} a h^3.$$

IV. *Momento d'inerzia della sezione triangolare rispetto ad una retta passante pel suo vertice e pel suo centro di superficie.*

Il triangolo proposto sia ABC (*fig.* 52), trovisi in G il suo centro di superficie e sia AD la retta che, passando pel vertice A e pel punto G, divide per mezzo il lato $\overline{BC}$ e che costituisce quella per rapporto alla quale vuolsi il momento d'inerzia. Si chiamino

a il lato $\overline{BC}$ del triangolo dato,
m la mediana $\overline{AD}$,
α l'angolo BDA ed
I il cercato momento d'inerzia.

Dai due triangoli eguali BED e CFD si ha

$$\overline{EB} = \overline{FC} = \frac{a}{2} \operatorname{sen} \alpha,$$

e, considerando $\overline{AD}$ siccome base comune dei due triangoli ABD ed ACD, si può dire che il valore di I è la somma dei momenti d'inerzia di questi triangoli rispetto alla loro base comune, cosicchè si avrà

$$I = \frac{1}{12} m . \frac{a^3}{8} \operatorname{sen}^3 \alpha + \frac{1}{12} m . \frac{a^3}{8} \operatorname{sen}^3 \alpha = \frac{1}{48} m a^3 \operatorname{sen}^3 \alpha.$$

V. *Momento d'inerzia della sezione triangolare rispetto ad una retta qualunque contenuta nel suo piano e passante per un suo vertice.*

Essendo ABC (*fig.* 53) il triangolo dato ed AX la retta condotta pel vertice A relativamente alla quale vuolsi valutare il momento d'inerzia, si chiamino;

y_1 ed y_2 le due perpendicolari $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ abbassate dai punti B e C sulla retta AX,

x_1 ed x_2 le distanze $\overline{AE}$ ed $\overline{AF}$ dei piedi delle dette perpendicolari da A;

Ω la superficie del triangolo ABC;

I il momento d'inerzia domandato.

Siccome la superficie del triangolo dato è la differenza fra quella del triangolo ADC e quella del triangolo ADB si ha

$$\Omega = \frac{1}{2}\overline{AD}.y_2 - \frac{1}{2}\overline{AD}.y_1 \quad (1),$$

$$I = \frac{1}{12}\overline{AD}.y_2^3 - \frac{1}{12}\overline{AD}.y_1^3 \quad (2).$$

Prendendo ora il valore di $\overline{AD}$ dalla (1), il quale è dato da

$$\overline{AD} = \frac{2\Omega}{y_2 - y_1},$$

e sostituendolo nella (2) si trova

$$I = \frac{\Omega}{6}\frac{y_2^3 - y_1^3}{y_2 - y_1},$$

o ancora effettuando la divisione

$$I = \frac{\Omega}{6}(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2).$$

In quanto alla superficie Ω si può essa facilmente esprimere in funzione di x_1, x_2, y_1 ed y_2, giacchè valendo essa AFC—AEB—EFCB, si ha

$$\Omega = \frac{1}{2}x_2 y_2 - \frac{1}{2}x_1 y_1 - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(y_1 + y_2),$$

la quale, a riduzioni fatte, diventa

$$\Omega = \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

VI. *Momento d'inerzia della sezione triangolare rispetto ad una retta qualunque contenuta nel suo piano e passante pel suo centro di superficie.*

La nota relazione

$$I = I_1 + d^2\Omega,$$

che esiste fra il momento d'inerzia I di una figura piana rispetto ad una retta qualunque in essa condotta, fra il momento d'inerzia I_1 della medesima figura rispetto ad una retta parallela alla prima e condotta pel centro di superficie, fra la distanza d di queste due rette e fra la superficie Ω della figura proposta, conduce facilmente a trovare il momento d'inerzia I_1 del triangolo ABC (*fig.* 54) rispetto ad una retta qualsiasi YZ contenuta nel suo piano e passante pel suo centro di superficie G. Immaginando infatti condotta pel vertice A una retta AX parallela alla YZ e ritenendo le denominazioni stabilite nel precedente problema per quanto concerne alle perpendicolari $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ abbassate dai vertici B e C sulla AX, alle distanze $\overline{AE}$ ed $\overline{AF}$ dei piedi delle dette perpendicolari da A ed alla superficie del triangolo dato ABC, il momento d'inerzia I del detto triangolo rispetto alla AX è dato da

$$I=\frac{\Omega}{6}(y_1^2+y_1y_2+y_2^2)\,;$$

ed osservando che il centro di superficie G trovasi sulla retta $\overline{CD}$ che unisce il vertice C col mezzo D del lato $\overline{AB}$ ad una distanza $\overline{DG}$ da D eguale ad $\frac{1}{3}$ DC, che $\overline{DI}=\frac{1}{2}\overline{BE}=\frac{1}{2}y_1$, e che (essendo DL parallela ad AX) $\overline{GK}=\frac{1}{3}\overline{CL}=\frac{1}{3}(\overline{CF}-\overline{LF})=\frac{1}{3}(y_2-\frac{1}{2}y_1)$, risulta

$$d=\overline{GH}=\overline{GK}+\overline{DI}=\frac{1}{3}(y_1-\frac{1}{2}y_1)+\frac{1}{2}y_1=\frac{1}{3}(y_1+y_2).$$

Ponendo questi valori di I e di d nella prima equazione e ricavando il domandato momento d'inerzia I_1 si trova

$$I_1=\frac{\Omega}{18}(y_1^2-y_1y_2+y_2^2),$$

essendo, come nel problema precedente,

$$\Omega=\frac{1}{2}(x_1y_2-x_2y_1).$$

VII. *Momento d'inerzia della sezione triangolare rispetto ad una retta qualunque contenuta nel suo piano.*

Sia XY (*fig.* 55) la retta per rapporto alla quale vuolsi calcolare il momento d'inerzia della superficie del triangolo ABC e si chiamino

Y, Y_1 ed Y_2 le tre perpendicolari $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ e $\overline{CR}$ abbassate dai vertici A, B e C sulla retta XY,

X_1 ed X_2 la distanza $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ delle ultime due perpendicolari dal punto P,

Ω la superficie del triangolo ABC,

I il momento d'inerzia domandato.

Immaginando condotta pel centro di superficie G del triangolo dato la retta X′Y′ parallela alla XY, chiamando I_1 il momento d'inerzia dello stesso triangolo rispetto alla retta X′Y′ e d la distanza $\overline{GS}$, fra I, I_1, d ed Ω si ha là nota relazione

$$I = I_1 + d^2\Omega.$$

Ora, supponendo che la retta AF sia parallela ad X′Y′, dietro quanto si è trovato nel precedente problema si ha

$$I_1 = \frac{\Omega}{18}(\overline{BE}^2 - \overline{BE}.\overline{CF} + \overline{CF}^2),$$

il qual valore di I_1, per essere $\overline{BE} = Y_1 - Y$ e $\overline{CF} = Y_2 - Y$, si trasforma in

$$I_1 = \frac{\Omega}{18}(Y^2 + Y_1^2 + Y_2^2 - YY_1 - YY_2 - Y_1Y_2) \qquad (3),$$

In quanto alla lunghezza d consta essa di $\overline{GH} + \overline{HS}$ e, siccome per quanto si è trovato nel precedente problema $\overline{GH} = \frac{1}{3}(\overline{BE} + \overline{CF})$ ed $\overline{HS} = \overline{AP}$, si ha

$$d = \frac{1}{3}(\overline{BE} + \overline{CF}) + \overline{AP} = \frac{1}{3}(Y + Y_1 + Y_2).$$

Sostituendo ora i valori di I_1 e di d nell'equazione determinatrice di I risulta

$$I = \frac{\Omega}{6}(Y^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + YY_1 + YY_2 + Y_1Y_2) \qquad (4).$$

Si ottiene il valore di Ω in funzione di X_1, X_2, Y, Y_1 ed Y_2 osservando che per quanto si è detto al problema V si ha

$$\Omega=\frac{1}{2}(\overline{AE}.\overline{CF}-\overline{AF}.\overline{BE}),$$

cosicchè, essendo $\overline{AE}=X_1$, $\overline{AF}=X_2$, $\overline{CF}=Y_2-Y$ e $\overline{BE}=Y_1-Y$, risulta

$$\Omega=\frac{1}{2}[X_1(Y_2-Y)-X_2(Y_1-Y)] \qquad (5).$$

Se la retta XY (*fig.* 56), da cui i vertici del triangolo dato ABC hanno le distanze note $\overline{AP}=Y$, $\overline{BQ}=Y_1$ e $\overline{CR}=Y_2$ e relativamente alla quale vuolsi il momento d'inerzia, passa pel centro di superficie G, allora la distanza $\overline{GS}=d$ (*fig.* 55) diventa zero e si ha l'equazione di condizione

$$Y+Y_1+Y_2=0$$

da cui si ricavano le equazioni

$$Y_1+Y_2=-Y$$

$$Y+Y_2=-Y_1$$

$$Y+Y_1=-Y_2,$$

per le quali il valore di I_1 dato dall'equazione (3) e scritto sotto la forma

$$I_1=\frac{\Omega}{18}[Y^2+Y_1^2+Y_2^2-\frac{1}{2}Y(Y_1+Y_2)-\frac{1}{2}Y_1(Y+Y_2)-\frac{1}{2}Y_2(Y+Y_1)]$$

si trasforma in

$$I_1=\frac{\Omega}{12}(Y^2+Y_1^2+Y_2^2) \qquad (6).$$

Il valore di Ω è sempre quello dato dall'equazione (5), nell'applicazione della quale si deve tener conto dei segni delle lunghezze Y, Y_1 ed Y_2, assumendole come positive quando si riferiscono ai vertici posti al di sopra della retta XY e come negative quando si riferiscono a vertici posti al di sotto della stessa retta.

VIII. *Momento d'inerzia della sezione triangolare vuota rispetto ad* *un asse qualunque in essa contenuto e passante pel suo centro di superficie.*

Siano:

Y'', Y_1'' ed Y_2'' le lunghezze delle tre perpendicolari $\overline{PA}$, $\overline{QB}$ ed $\overline{RC}$ (*fig.* 57) abbassate rispettivamente dai vertici A, B e C del perimetro esterno sull'asse XY;

X_1'' ed X_2'' le distanze $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ delle due perpendicolari $\overline{QB}$ ed $\overline{RC}$ dal punto P;

Y', Y_1' ed Y_2' le lunghezze delle tre perpendicolari $\overline{SD}$, $\overline{TE}$ ed $\overline{UF}$ abbassate rispettivamente dai vertici D, E ed F del perimetro interno sullo stesso asse XY;

X_1' ed X_2' le distanze $\overline{ST}$ ed $\overline{SU}$ delle due perpendicolari $\overline{TE}$ ed $\overline{UF}$ dal punto S;

Ω'' ed Ω' le superficie dei due triangoli ABC e DEF date dalle equazioni

$$\Omega''=\frac{1}{2}[X_1''(Y_2''-Y'')-X_2''(Y_1''-Y'')],$$

$$\Omega'=\frac{1}{2}[X_1'(Y_2'-Y')-X_2'(Y_1'-Y')].$$

Quando l'asse XY, passante pel centro di superficie della proposta sezione triangolare vuota, non passa pei centri di superficie dei triangoli ABC e DEF, il domandato momento d'inerzia I si calcola applicando prima la formola (4) per trovare i momenti di inerzia dei detti triangoli rispetto alla retta XY e facendone poscia la differenza, cosicchè risulta

$$I=\frac{\Omega''}{6}(Y''^2+Y_1''^2+Y_2''^2+Y''Y_1''+Y''Y_2''+Y_1''Y_2'')$$

$$-\frac{\Omega'}{6}(Y'^2+Y_1'^2+Y'^2_2+Y'Y'_1+Y'Y'_2+Y'_1Y_2').$$

Se invece l'asse XY passa pei centri di superficie dei due triangoli ABC e DEF, il domandato momento d'inerzia I_1 si ottiene facendo la differenza fra i momenti d'inerzia degli accennati triangoli rispetto alla stessa retta XY, calcolati coll'applicazione della formola (6), per modo che si ha

$$I_1=\frac{\Omega''}{12}(Y''^2+Y_1''^2+Y_2''^2)-\frac{\Omega'}{12}(Y'^2+Y_1'^2+Y_2'^2).$$

Per quanto spetta ai segni da darsi alle lunghezze Y'', Y_1'', Y_2'', Y', Y_1' ed Y_2' vale sempre l'osservazione fatta sul finire del problema VII, ossia si assumeranno come positive quelle riferentisi a vertici posti al di sopra della retta XY, e come negative quelle riferentisi a vertici posti al di sotto della stessa retta.

Le sezioni triangolari vuote non s'incontrano quasi mai nei solidi che vengono impiegati nelle costruzioni per resistere a sforzi di flessione, per cui si crede più che sufficiente la risoluzione del precedente problema VIII sulla determinazione dei momenti d'inerzia di dette sezioni. D'altronde poi colla massima facilità si può passare dalle formole trovate a quelle che convengono pei casi in cui occorrono i momenti d'inerzia di sezioni triangolari vuote rispetto ad assi passanti pei loro centri di superficie e contemporaneamente o paralleli a due lati corrispondenti o passanti per due vertici pure corrispondenti del perimetro esterno e del perimetro interno, i quali due casi, unitamente al caso più generale formante l'oggetto dell'accennato problema VIII, costituiscono i soli che può avvenire di dover considerare in qualche eccezionalissima circostanza della pratica.

96. **Procedimento elementare per trovare il momento d'inerzia della sezione triangolare rispetto ad un suo lato.**— Si scomponga il triangolo dato ABC (*fig.* 58), del quale vuolsi il momento d'inerzia rispetto al lato $\overline{CB}=a$, in elementi superficiali $AC'B'$, $C'B'B''C''$, $C''B''B'''C'''$, $C'''B'''B^{IV}C^{IV}$...... mediante rette $C'B'$, $C''B''$, $C'''B'''$, $C^{IV}B^{IV}$...... parallele a CB, equidistanti e vicinissime; chiamisi h l'altezza $\overline{AD}$ del triangolo proposto e dicasi I_a il domandato momento d'inerzia.

Il momento d'inerzia del triangolo piccolissimo $AC'B'$ rispetto alla retta CB è dato dalla sua superficie $\frac{1}{2}\overline{AD'}.\overline{C'B'}$ moltiplicata per il quadrato della distanza che il suo centro di superficie ha dall'accennata retta CB, ossia da

$$\frac{1}{2}\overline{AD'}.\overline{C'B'}.h^2,$$

giacchè, essendo per ipotesi piccolissima la distanza $\overline{AD'}$ si può ritenere che il centro di superficie dell'accennato piccolissimo triangolo disti da CB di tutta la lunghezza $\overline{AD}=h$.

Ora potendosi decomporre il prodotto $\frac{1}{2}\overline{AD'}.\overline{C'B'}.h^2$ nei due fattori $\frac{1}{2}\overline{AD'}.\overline{C'B'}.h$ ed h il primo dei quali rappresenta il volume del piccolissimo solido AB_1' che si può riguardare siccome un prisma retto triangolare avente per base il triangolo $AC'B'$ e per altezza la retta $\overline{AA_1}$ assunta eguale ad $\overline{AD}$ ossia eguale ad h, e potendosi pure ritenere siccome eguale ad h la distanza del centro di volume del detto prisma triangolare dal piano passante per la retta CB e perpendicolare al piano del triangolo dato ABC, ne deriva che l'accennato prodotto si può considerare siccome il momento del volume del prisma triangolare AB_1' rispetto all'or definito piano. — Analogamente il momento d'inerzia del trapezio elementare $C'B'B''C''$, dato da $\overline{D'D''}.\overline{C''B''}.\overline{DD'}^2$, può essere considerato siccome il momento del volume del piccolissimo prisma $C'B_1''$ (avente per base l'or indicato trapezio e per altezza la retta $\overline{C'C_1'}=\overline{DD'}$) rispetto all'accennato piano dei momenti; e, ragionando nello stesso modo pei momenti d'inerzia dei trapezii $C''B''B'''C'''$, $C'''B'''B^{IV}C^{IV}$, ..., agevolmente si viene a conchiudere che il momento d'inerzia del triangolo ACB è la somma dei momenti rispetto al piano passante per la retta CB e perpendicolare al piano del triangolo stesso dei volumi di tanti piccolissimi prismi le cui basi sono $AC'B'$, $C'B'B''C''$, $C''B''B'''C'''$, $C'''B'''B^{IV}C^{IV}$, ..., le cui altezze sono rispettivamente date dalle rette $\overline{DA}$, $\overline{DD'}$, $\overline{DD''}$, $\overline{DD'''}$, ..., ed i quali costituiscono nel loro assieme la piramide triangolare A_1ACB che avrà adunque per momento del suo volume rispetto al definito piano per rapporto al quale si considerano i momenti il momento d'inerzia domandato.

Essendo $\frac{1}{2}\overline{CB}.\overline{DA}.\frac{1}{3}\overline{AA_1}=\frac{1}{2}ah.\frac{1}{3}h=\frac{1}{6}ah^2$ il volume della piramide triangolare A_1ACB e trovandosi il suo centro di volume G sulla retta A_1E che unisce il vertice A_1 col centro di superficie E della base ACB ai $\frac{3}{4}$ di $\overline{A_1E}$ a partire da A_1, se proiettasi il punto G in F sulla detta base, e se per la linea proiettante GF si immagina un piano parallelo alla retta BC, esso taglia il triangolo ACB secondo la retta IK parallela a CB; la distanza AF è $\frac{3}{4}\overline{AE}$ $=\frac{3}{4}.\frac{2}{3}\overline{AL}=\frac{1}{2}\overline{AL}$, e per conseguenza il punto d'incontro H dell'altezza $\overline{AD}$ del triangolo dato colla retta IK parallela a CB dista da A e da D di $\frac{1}{2}\overline{AD}=\frac{1}{2}h$. Ma $\overline{HD}$, essendo la distanza di due piani perpendicolari a quello del triangolo ACB e passanti, uno pel lato CB e l'altro pel centro di volume G della piramide A_1CB, esprime anche di quanto dista il centro di volume di questa piramide dal piano per rapporto al quale si deve prendere il momento del suo volume onde ottenere il cercato momento d'inerzia I_a, il quale per conseguenza è dato da

$$I_a=\frac{1}{6}ah^2.\frac{1}{2}h=\frac{1}{12}ah^3.$$

Trovato così con un processo elementare il momento d'inerzia di un triangolo rispetto ad un suo lato si ha quanto è necessario per apprendere le soluzioni degli ultimi sette problemi trattati nel precedente numero.

97. **Momenti d'inerzia delle sezioni rettangolari e di quelle composte di parti rettangolari.** — I. *Momenti d'inerzia della sezione rettangolare rispetto ai due assi passanti pel suo centro e paralleli ai suoi lati.*

Al numero 56, esponendo il metodo generale per trovare il momento d'inerzia polare J di una superficie qualunque, si è fatta l'applicazione di questo metodo al caso delle sezioni rettangolari; per dedurre J si calcolarono prima, al detto numero 56 facendo uso delle notazioni di calcolo differenziale ed integrale ed al successivo numero 57 con un procedimento elementare, i momenti d'inerzia I′ ed I″ del rettangolo ABDE (*fig.* 52 e 53) rispetto agli assi xx' ed yy' condotti pel suo centro C, il primo parallelo ai due lati AB ed ED ed il secondo parallelo ai due lati BD ed AE; e, chiamando a la lunghezza del lato $\overline{AB}$ e b quella del lato $\overline{BD}$, si ebbero i seguenti risultati

$$I'=\frac{1}{12}ab^3, \qquad I''=\frac{1}{12}ba^3.$$

Per passare dalla sezione rettangolare alla sezione quadrata basta fare $b=a$, e trovasi allora che risultano eguali i due valori di I′ e di I″.

II. *Momenti d'inerzia della sezione rettangolare vuota rispetto ai due assi passanti pel suo centro e paralleli ai suoi lati.*

Siano

a' e b' i lati $\overline{IF}$ ed $\overline{FG}$ (*fig.* 54) del rettangolo interno,

a'' e b'' i lati $\overline{AB}$ e $\overline{BD}$ del rettangolo esterno,

I' ed I'' i due momenti d'inerzia domandati, il primo rispetto all'asse xx' parallelo ai lati AB, IF, HG ed ED, ed il secondo rispetto all'asse yy' parallelo ai lati AE, IH, FG e BD;

e coincidano in C i centri di superficie dei detti rettangoli. Siccome in generale il momento d'inerzia della superficie di una sezione vuota rispetto ad un determinato asse vale il momento d'inerzia della superficie della sezione intiera diminuito del momento d'inerzia della superficie rappresentante il vuoto, si ha

$$I' = \frac{1}{12}(a''b''^3 - a'b'^3),$$

$$I'' = \frac{1}{12}(b''a''^3 - b'a'^3).$$

Per passare dalle formole trovate pel caso della sezione rettangolare vuota a quelle che convengono per la sezione quadrata pure vuota bisogna fare in esse $b'' = a''$ e $b' = a'$, ed allora risultano eguali i due valori di I' e di I''.

III. *Momenti d'inerzia della sezione di una trave semplice a doppio* T *simmetrico rispetto ai due assi ortogonali* x x' *ed* y y' (*fig.* 59) *passanti pel suo centro di superficie* O *e diretti, uno nel senso della larghezza e l'altro nel senso dell'altezza della sezione.*

Chiamando

a la larghezza $\overline{AB}$ di ciascuna delle tre tavole,

b l'altezza $\overline{BC}$ dell'intiera sezione,

a' la somma $\overline{KI} + \overline{EF}$ delle sporgenze di ciascuna delle due tavole sul gambo del doppio T,

b' l'altezza $\overline{EH}$ del gambo,

osservando che la retta xx' passa pei centri di superficie del rettangolo ABCD non che dei due rettangoli KIML ed EFGH, e che il momento d'inerzia I' della superficie della sezione proposta rispetto all'asse xx' è eguale a quello del rettangolo ABCD diminuito della somma dei momenti d'inerzia dei rettangoli eguali KIML ed EFGH, costituenti un rettangolo unico di lati $\overline{KI} + \overline{EF}$ ed $\overline{EH}$, si ha

$$I' = \frac{1}{12}\left[\overline{AB}.\overline{BC}^3 - (\overline{KI} + \overline{EF})\overline{EH}^3\right],$$

la quale, osservando che $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{KI}+\overline{EF}$ ed $\overline{EH}$ valgono rispettivamente a, b, a' e b', si riduce a

$$I'=\frac{1}{12}(ab^3-a'b'^3).$$

Per trovare il momento d'inerzia I'' della superficie della sezione proposta rispetto all'asse yy', si osserva che quest'asse passa pei centri di superficie dei due rettangoli eguali ABFI e DCGM nonchè pel centro di superficie del rettangolo KEHL, cosicchè il detto momento d'inerzia I'' vale la somma dei momenti d'inerzia dei due primi rettangoli costituenti un rettangolo unico di lati $\overline{AB}$ ed $\overline{FB}+\overline{GC}$ aumentata del momento d'inerzia del terzo rettangolo rispetto al detto asse, e per conseguenza si ha

$$I''=\frac{1}{12}\left[(\overline{FB}+\overline{GC})\overline{AB}^3+\overline{EH}.\overline{HL}^3\right].$$

Osservando ora che $\overline{AB}=a$, che $\overline{FB}+\overline{GC}=b-b'$, che $\overline{EH}=b$ e che $\overline{HL}=a-a'$, il valore di I'' diventa

$$I''=\frac{1}{12}\left[(b-b')a^3+b'(a-a')^3\right].$$

IV. *Momenti d'inerzia della sezione di una trave semplice a doppio* T *simmetrico e con rinforzi, rispetto a due assi ortogonali* xx' *ed* yy' (*fig.* 60) *passanti pel suo centro di superficie* O *e diretti, uno nel senso della larghezza e l'altro nel senso dell'altezza della sezione.*

Ritenendo le denominazioni stabilite nel precedente problema per quanto concerne alle lunghezze delle rette $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{KI}+\overline{EF}$ ed $\overline{EH}$, ammettendo che i due rinforzi eguali $qrst$ e $mnop$ siano tagliati per metà della retta xx' e chiamando $\frac{1}{2}a''$ ciascuna delle due sporgenze $\overline{qr}$ ed $\overline{mn}$, e b'' ciascuna delle due altezze $\overline{rs}$ ed $\overline{no}$, si ottiene facilmente il momento d'inerzia I' della sezione proposta rispetto all'asse xx', giacchè, essendo esso equivalente a quello della sezione a doppio T simmetrico senza rinforzi (quale venne considerata nel precedente problema) aumentato della somma dei momenti d'inerzia dei due rettangoli $qrst$ e $mnop$ corrispondenti ai rinforzi e formanti un rettangolo unico di lati $\overline{qr}+\overline{mn}=a''$ ed $\overline{no}=b''$, vien dato dalla formola

$$\mathrm{I}'=\frac{1}{12}(ab^3-a'b'^3+a''b''^3).$$

In quanto al momento d'inerzia I″ della data sezione a doppio T semplice simmetrico e con rinforzi rispetto alla retta yy', diretta nel senso dell'altezza della sezione stessa e quindi perpendicolare alla retta xx', si può esso ottenere considerandolo siccome la somma dei momenti d'inerzia dei due rettangoli eguali ABFI e DCGM equivalenti ad un rettangolo unico di lati $\overline{\mathrm{AB}}$ ed $\overline{\mathrm{FB}}+\overline{\mathrm{GC}}$, degli altri due rettangoli pure eguali KEmq ed LHpt formanti nel loro complesso un sol rettangolo di lati $\overline{\mathrm{KE}}$ ed $\overline{\mathrm{E}m}+\overline{\mathrm{H}p}$, e finalmente del rettangolo $rnos$. Passando poi l'asse yy', per rapporto al quale vuolsi calcolare il momento d'inerzia I″ pei centri di superficie degli or accennati rettangoli, si ha

$$\mathrm{I}''=\frac{1}{12}\left[(\overline{\mathrm{FB}}+\overline{\mathrm{GC}})\,\overline{\mathrm{AB}}^3+(\overline{\mathrm{E}m}+\overline{\mathrm{H}p})\overline{\mathrm{KE}}^3+\overline{no}.\overline{nr}^3\right].$$

Se ora osservasi che $\overline{\mathrm{FB}}+\overline{\mathrm{GC}}=b-b'$, che $\overline{\mathrm{AB}}=a$, che $\overline{\mathrm{E}m}+\overline{\mathrm{H}p}=b'-b''$, che $\overline{\mathrm{KE}}=a-a'$, che $\overline{no}=b''$ e che $\overline{nr}=a-a'+a''$, il valore di I″ diventa

$$\mathrm{I}''=\frac{1}{12}\left[(b-b')\,a^3+(b'-b'')\,(a-a')^3+b''\,(a-a'+a'')^3\right].$$

V. *Momenti d'inerzia della sezione a doppio* T *simmetrico di una trave composta, costituita da una lamiera continua e da quattro ferri d'angolo, rispetto a due assi ortogonali* xx′ *ed* yy′ (*fig.* 61) *passanti pel suo centro di superficie* O *e diretti, uno nel senso della larghezza* AB *e l'altro nel senso dell'altezza* BC *della sezione.*

Chiamando rispettivamente

a, a' ed a'' le larghezze $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{DC}}$, $\overline{c\mathrm{E}}+\overline{d\mathrm{F}}=\overline{f\mathrm{H}}+\overline{e\mathrm{G}}$ ed $\overline{lg}+\overline{mh}=\overline{ok}+\overline{ni}$,

b, b' e b'' le altezze $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{cf}=\overline{de}$ e $\overline{lo}=\overline{mn}$,

osservando che il momento d'inerzia I′ della sezione proposta vale quello del rettangolo ABCD diminuito della somma dei momenti d'inerzia dei rettangoli cEHf e dFGe costituenti un rettangolo di lati $\overline{c\mathrm{E}}+\overline{d\mathrm{F}}$ e $\overline{cf}$ e dei momenti d'inerzia dei rettangoli $lgko$ ed $mhin$ pure equivalenti ad un sol rettangolo di lati $\overline{lg}+\overline{mh}$ ed $\overline{lo}$, e passando l'asse xx' pel centro di superficie di tutti i detti rettangoli, si ha

$$I'=\frac{1}{12}(ab^3-a'b'^3-a''b''^3).$$

Il momento di inerzia I'' rispetto all'asse yy' e la somma dei momenti d'inerzia dei due rettangoli ABFE e DCGH formanti un rettangolo di lati $\overline{AB}$ ed $\overline{FB}+\overline{GC}$, dei momenti d'inerzia dei rettangoli $cdhg$ ed $feik$ equivalenti ad un rettangolo di lati $\overline{cd}$ ed $\overline{hd}+\overline{ie}$ e finalmente del momento d'inerzia del rettangolo $lmno$ di lati $\overline{lm}$ ed $\overline{mn}$; cosicchè, passando il detto asse pei centri di superficie degli indicati rettangoli, si ha

$$I''=\frac{1}{12}\left[(\overline{FB}+\overline{GC})\,\overline{AB}^3+(\overline{hd}+\overline{ie})\,\overline{cd}^3+\overline{mn}.\overline{lm}^3\right].$$

il qual valore di I'', per essere $\overline{FB}+\overline{GC}=b-b'$, $\overline{AB}=a$, $\overline{hd}+\overline{ie}=b'-b''$, $\overline{cd}=a-a'$, $\overline{mn}=b''$ e $\overline{lm}=a-a'-a''$, si riduce a

$$I''=\frac{1}{12}\left[(b-b')\,a^3+(b'-b'')\,(a-a')^3+b''(a-a'-a'')^3\right].$$

VI. *Momenti d'inerzia della sezione a doppio* T *simmetrico di una trave composta costituita da una lamiera continua cui, mediante quattro ferri d'angolo, sono unite in alto ed in basso delle lamiere ad essa perpendicolari, rispetto a due assi ortogonali* XX' *ed* YY' (*fig.* 62) *passanti pel suo centro di superficie* O *e diretti, uno nel senso della larghezza* AB *e l'altro nel senso dell'altezza* BC *della sezione.*

Siano rispettivamente

a, a', a'' ed a''' le larghezze $\overline{AB}$, $\overline{cI}+\overline{dF}$, $\overline{lg}+\overline{mh}$ e $\overline{tp}+\overline{uq}$,

b, b', b'' e b''' le altezze $\overline{AD}$, $\overline{cf}$, $\overline{lo}$ e $\overline{tz}$.

Il momento d'inerzia I' della sezione proposta rispetto all'asse xx' parallelo alla larghezza AB vale il momento d'inerzia dell'intiero rettangolo ABCD diminuito della somma dei momenti d'inerzia dei rettangoli cIMf e dFGe costituenti un rettangolo unico di lati $\overline{cI}+\overline{dF}$ e $\overline{cf}$, dei due rettangoli $lgko$ ed $mhin$ formanti un rettangolo solo di lati $\overline{lg}+\overline{mh}$ ed $\overline{lo}$ e finalmente dei rettangoli anche eguali $tpsz$ ed $uqrv$ equivalenti al rettangolo di lati $\overline{tp}+\overline{uq}$ e $\overline{tz}$;

cosicchè, passando l'asse xx' pei centri di superficie di tutti gli accennati rettangoli e per le denominazioni stabilite, si ha

$$I' = \frac{1}{12}(ab^3 - a'b'^3 - a''b''^3 - a'''b'''^3).$$

Per avere il momento d'inerzia I″ rispetto all'asse yy' si osserva: che questo momento consta della somma dei momenti d'inerzia dei rettangoli ABFI e DCGM che nel loro complesso si possono considerare siccome formanti un rettangolo di lati $\overline{AB}$ ed $\overline{FB}+\overline{GC}$, dei due rettangoli $cdhg$ ed $feik$ componenti un rettangolo di lati $\overline{cd}$ ed $\overline{hd}+\overline{ie}$, dei rettangoli $lmqp$ ed $onrs$ equivalenti ad un rettangolo di lati $\overline{lm}$ e $\overline{qm}+\overline{rn}$ e finalmente del rettangolo $tuvz$ di lati $\overline{tu}$ ed $\overline{uv}$; che l'asse yy' passa pei centri di superficie di tutti i rettangoli indicati; e che per conseguenza si deve avere

$$I'' = \frac{1}{12}\left[(\overline{FB}+\overline{GC})\,\overline{AB}^3 + (\overline{hd}+\overline{ie})\,\overline{cd}^3 + (\overline{qm}+\overline{rn})\,\overline{lm}^3 + \overline{uv}.\overline{tu}^3\right].$$

Per le denominazioni stabilite sul principio della soluzione di questo problema si ha $\overline{FB}+\overline{GC}=b-b'$, $\overline{AB}=a$, $\overline{hd}+\overline{ie}=b'-b''$, $\overline{cd}=a-a'$, $\overline{qm}+\overline{rn}=b''-b'''$, $\overline{lm}=a-a'-a''$, $\overline{uv}=b'''$ e $\overline{tu}=a-a'-a''-a'''$, cosicchè il valore di I″ si riduce

$$I'' = \frac{1}{12}\left\{\begin{array}{c}(b-b')a^3 + (b'-b'')(a-a')^3 + (b''-b''')(a-a'-a'')^3 \\ + b'''(a-a'-a''-a''')^3.\end{array}\right\}$$

Nel valutare la resistenza alla flessione per le travi composte con sezione della forma di quella di cui or ora vennero trovati i momenti d'inerzia rispetto ai due assi xx' ed yy', ben sovente usano molti pratici di trascurare quella parte di detta resistenza che è dovuta al gambo KEHL, considerando questo non come resistente alla flessione, ma sibbene siccome unicamente destinato a rilegare fra di loro le altre due parti della trave ed a mantenerle alla voluta distanza, ed invece dei momenti d'inerzia I′ ed I″ di cui sonosi dati i valori in funzione delle dimensioni della sezione proposta, sogliono adottarne due altri I_1' ed I_1'' che ottengono togliendo rispettivamente da I′ e da I″ i momenti d'inerzia $\frac{1}{12}a^{\text{iv}}b'^3$ e

$\frac{1}{12} b' a'''^3$ rispetto agli assi xx' ed yy' del rettangolo KEHL rappresentante la sezione del gambo di altezza $\overline{EH} = b'$ e di grossezza $\overline{KE} = a^{iv}$.

Parecchi costruttori, nell'intento di far cosa in favore della stabilità ed anche per semplificazione di calcoli, nel valutare la resistenza alla flessione di una trave composta a doppio T ammettono: che questa resistenza sia unicamente sviluppata dalle due parti costituenti le tavole superiore ed inferiore della trave; che il gambo ed i quattro ferri d'angolo siano unicamente destinati a rilegare ed a mantenere alla voluta distanza le dette due tavole; che la sezione trasversale della trave, per quanto concerne al calcolo dei suoi momenti d'inerzia, sia unicamente ridotta ai due rettangoli eguali ABFI e DCGM (*fig.* 63), essendo $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$ e $\overline{FG} = b'$; e che per conseguenza i due momenti d'inerzia I_2' e I_2'' per rapporto ai due assi xx' ed yy' passanti pel centro di superficie O il primo parallelo ed il secondo perpendicolare alla larghezza AB della sezione proposta, siccome differenze fra quelli dei due rettangoli ABCD ed IFGM rispetto agli stessi assi, siano rispettivamente rappresentati da

$$I_2' = \frac{1}{12} a (b^3 - b'^3),$$

$$I_2'' = \frac{1}{12} (b - b') a^3.$$

Allorquando una trave con sezione a doppio T ha grande altezza in confronto di quella delle sue tavole, e quando vuolsi che da queste soltanto venga sviluppata la necessaria resistenza alla flessione, speditamente e con sufficiente approssimazione per la pratica si può calcolare il momento d'inerzia I_3' della sezione trasversale costituita dai due rettangoli ABFI e DCGM attorno all'asse xx' passante pel centro di superficie O e parallelo alla larghezza AB della sezione stessa, assumendo che esso valga la somma dei prodotti delle due superficie rettangolari accennate pei quadrati delle distanze dei rispettivi centri P e Q dall'asse xx'; cosicchè, essendo $\overline{AB} = \overline{DC} = a$, $\overline{BF} = \overline{CG} = c$ e ponendo $\overline{PQ} = d$, si ha

$$I_3' = \frac{1}{2} a c d^2.$$

VII. *Momenti d'inerzia della sezione di una trave in legno a traliccio, costituita (come lo dimostra la figura* 64) *della parete reticolata e di due ordini di travi longitudinali disposti l'uno in alto e l'altro in basso a mo' di filagne e contro-filagne, rispetto a due assi ortogonali* x x′ *ed* y y′ *passanti pel suo centro di superficie* O *e diretti uno nel senso della larghezza* AB *e l'altro nel senso dell'altezza* BC *della sezione.*

È opinione di quasi tutti i costruttori che, nell'impiego delle travi a traliccio in legno per resistere alla flessione, debbasi soltanto tener conto della resistenza che oppongono le travi longitudinali e che il traliccio si debba risguardare siccome unicamente destinato a mantenere collegate ed alla voluta distanza le dette travi a cui vuolsi affidare tutta la resistenza alla flessione. In vista di questa opinione, tutta in favore della stabilità, ed in modo conveniente per la pratica applicazione delle formole riferentisi alla resistenza alla flessione, si farà il calcolo dei momenti d'inerzia della sezione trasversale della trave a traliccio proposta, considerandola siccome unicamente costituita dai quattro rettangoli eguali AINE, BKPF, DMRH e CLQG.

Ciò premesso, chiamando

a la somma $\overline{\mathrm{IA}}+\overline{\mathrm{KB}}=\overline{\mathrm{MD}}+\overline{\mathrm{LC}}$ delle larghezze dei due rettangoli rappresentanti la sezione in uno stesso ordine di travi longitudinali,

b e *b′* le altezze $\overline{\mathrm{BC}}$ ed $\overline{\mathrm{FG}}$ della sezione data,

il momento d'inerzia I′ rispetto all'asse xx' passante pei centri di superficie dei quattro rettangoli AIMD e BKLC, ENRH a PQGF, essendo la differenza fra il momento d'inerzia del rettangolo di lati $\overline{\mathrm{IA}}+\overline{\mathrm{KB}}$ e $\overline{\mathrm{BC}}$ formato dalla prima coppia degli indicati rettangoli ed il momento d'inerzia del rettangolo di lati $\overline{\mathrm{NE}}+\overline{\mathrm{PF}}$ ed $\overline{\mathrm{FG}}$ risultante dall'unione della seconda coppia, vien dato dalla formola semplicissima

$$\mathrm{I}'=\frac{1}{12}\,a(b^3-b'^3).$$

In quanto al momento d'inerzia I″ rispetto all'asse $y\,y'$ si può dire che esso vale la somma dei momenti d'inerzia dei due rettangoli ABFE e DCGH equivalenti ad un rettangolo di lati $\overline{\mathrm{AB}}$ ed $\overline{\mathrm{FB}}+\overline{\mathrm{GC}}$, meno la somma dei momenti d'inerzia dei due rettangoli IKPN ed MLQR che si possono risguardare siccome formanti un rettangolo di lati $\overline{\mathrm{IK}}$ ed $\overline{\mathrm{NI}}+\overline{\mathrm{RM}}$; e, siccome l'asse yy'

passa pei centri di superficie di tutti i rettangoli or ora accennati, si ha

$$I'' = \frac{1}{12}\left[(\overline{FB}+\overline{GC})\,\overline{AB}^3 - (\overline{NI}+\overline{RM})\,\overline{IK}^3\right].$$

Chiamando ora a' la distanza $\overline{IK}=\overline{ML}$, osservando che $\overline{FB}+\overline{GC} = b-b'$, che $AB=a+a'$ e che $\overline{NI}+\overline{RM}=b-b'$, sostituendo nel valore di I'' e riducendo, si trova

$$I'' = \frac{1}{12}\,a\,(b-b')\,[a^2+3\,a'\,(a+a')].$$

Quando le rette ef ed $e'f'$, condotte parallelamente all'asse xx' pei centri di superficie g e g' delle coppie di rettangoli AINE e BKPF, DMRH e CLQG, hanno distanze piuttosto grandi dall'asse xx' in confronto delle altezze $\overline{FB}$ e GC dei detti rettangoli, il momento d'inerzia I_1' rispetto al detto asse xx' approssimativamente e facilmente si può ottenere moltiplicando la somma delle superficie dei quattro rettangoli AINE, KBFP, DMRH e CLQG pei quadrati delle rispettive distanze dei loro centri di superficie dalla retta xx'. Nel caso della sezione rappresentata nella figura 64, tutto essendo simmetrico rispetto ad xx', chiamando m ed n i due lati di ciascuno degli accennati rettangoli ed h la distanza $\overline{gg'}$ divisa per metà nel punto O, si ha

$$I_1' = m\,n\,h^2.$$

Opinano alcuni autori che nei calcoli relativi alla resistenza alla flessione delle travi a traliccio, anche di questo si possa in qualche modo tener conto, considerandolo siccome formante un tavolato continuo di volume eguale a quello dei pezzi costituenti il traliccio intero; chiamando

V l'indicato volume,

b l'altezza del traliccio,

l la lunghezza di trave a cui esso si estende,

deducono la grossezza x del detto tavolato continuo ipotetico ponendo l'equazione

$$b\,l\,x = V,$$

d'onde

$$x = \frac{V}{b\,l};$$

prendono per momento d'inerzia I_2' relativo all'asse xx' il momento d'inerzia I', conveniente all'ipotesi della non esistenza di traliccio, aumentato del momento d'inerzia $\frac{1}{12}x\,b^3$ del rettangolo $iklm$ di lati $\overline{im}=b$ ed $\overline{ik}=x$ rispetto all'accennato asse; e finalmente assumono per momento d'inerzia I_2'' relativo all'asse yy' il momento I'', pure conveniente all'ipotesi della non esistenza di traliccio, aumentato del momento d'inerzia $\frac{1}{12}b\,x^3$ del medesimo rettangolo $iklm$ per rapporto allo stesso asse yy'.

VIII. *Momenti d'inerzia della sezione a doppio* T *simmetrico di una trave in ferro a traliccio (costituita come lo dimostra la figura* 65*) delle tavole parallele* ABFE *e* DCGH *formate ciascuna da una o più lamiere sovrapposte, delle lamiere* cdhg *ed* feik *perpendicolarmente unite alle tavole mediante ferri d'angolo e della parete reticolata inchiodata a queste ultime lamiere, rispetto a due assi ortogonali* xx' *ed* yy' *passanti pel centro di superficie* O_1 *e diretti, uno nel senso della larghezza* AB *e l'altro nel senso dell'altezza* BC *della sezione.*

Usano alcuni costruttori di ottenere il volume V del ferro componente una determinata lunghezza L della parete reticolata e di calcolare come nel problema precedente quel certo spessore $\overline{lm}+\overline{no}=x$ corrispondente ad una parete continua la quale esige la stessa quantità di ferro che realmente è necessaria per la formazione del traliccio. Ottengono il momento d'inerzia I' rispetto all'asse xx' dicendo che esso vale quello della sezione di una trave a doppio T simmetrico, le cui larghezze a, a', a'' ed a''' sono rispettivamente $\overline{AB}$, $\overline{Et}+\overline{Fu}$, $\overline{IN}+\overline{KO}$ e $\overline{Rv}+\overline{Sz}$ e le cui altezze b, b', b'' e b''' sono $\overline{AD}$, $\overline{tw}$, $\overline{MI}$ ed $\overline{RU}$, aumentato della somma dei momenti d'inerzia dei due rettangoli $mlrs$ ed $nopq$ formanti un rettangolo unico di lati $\overline{lm}+\overline{no}=a^{\text{IV}}$ ed $\overline{ms}=b^{\text{IV}}$ e diminuito del momento d'inerzia del rettangolo $ghik$ di lati $\overline{gh}=a-a'-a''-a'''$ e $\overline{gk}=b^{\text{V}}$. — Il momento d'inerzia I'' rispetto all'asse yy' vale la somma dei momenti d'inerzia dei due rettangoli ABFE e DCGH che nel loro complesso si possono considerare siccome formanti un rettangolo unico di lati $\overline{AB}=a$ e $\overline{BC}-\overline{FG}=b-b'$, dei due rettangoli $tuKI$ e $w\alpha LM$ componenti un rettangolo unico di lati $\overline{tu}=a-a'$ e $\overline{tI}+\overline{Mw}=b'-b''$, dei due rettangoli NOSR e QPTU equivalenti ad un rettangolo di lati $\overline{NO}=a-a'-a''$ ed $\overline{NR}+\overline{QU}=b''-b'''$, dei due rettangoli $vznl$ e $\beta\gamma qr$ formanti un sol rettangolo di lati $\overline{vz}=a-a'-a''-a'''$ e $\overline{vl}+\overline{\beta r}=b'''-b^{iv}$ e del rettangolo $mops$ di lati $\overline{mo}=a-a'-a''-a'''+a^{iv}$ ed $\overline{ms}=b^{iv}$, diminuita del momento d'inerzia del rettangolo $ghik$ di lati $\overline{gh}=a-a'-a''-a'''$ e $\overline{gk}=b^{v}$.

In pratica però quasi tutti i costruttori considerano la parete reticolata ed anche le due parti $cdhg$ ed $feik$ siccome unicamente destinate a rilegare fra di loro le tavole superiore ed inferiore della trave; ritengono siccome resistenti alla flessione talvolta le dette tavole ed i ferri d'angolo, talvolta anche le sole tavole ed adottano i momenti d'inerzia I_1' ed I_1'', oppure I_2' ed I_2'' pei quali si è indicato il processo di calcolo al problema VI, e ben sovente, quando l'altezza della trave è assai grande in confronto di quella delle sue tavole, calcolano il momento d'inerzia rispetto all'asse xx' col metodo spedito ed approssimato di cui si è tenuto cenno alla fine del citato problema.

IX. *Momento d'inerzia della sezione a doppio* T *non simmetrico rispetto a due assi ortogonali* xx' *ed* yy' (*fig.* 66) *passanti pel suo centro di superficie* O *e diretti, uno nel senso della larghezza* AB *e l'altro nel senso dell'altezza* PQ *della sezione.*

Siano:

a ed a'' le larghezze $\overline{DC}$ ed $\overline{AB}$ delle tavole superiore ed inferiore;

a' la grossezza $\overline{ML}$ del gambo;

b l'altezza $\overline{PQ}$ dell'intiera sezione della trave;

b' e b'' le altezze $\overline{CG}$ e $\overline{BF}$ delle due tavole, ed

x la distanza $\overline{QO}$ che il centro di superficie O della proposta sezione ha dalla faccia DC appartenente alla tavola superiore e rappresentata nella retta DC.

La parte di superficie della sezione proposta la quale trovasi al di sopra della retta xx', potendosi decomporre nel rettangolo $cdef$ di lati $\overline{cd}=a'$ e $\overline{cf}=x$ e nei due rettangoli HDfM e GCeL equivalenti a un rettangolo unico di lati $\overline{HM}+\overline{LG}=a-a'$ e $\overline{CG}=b'$, ammette per suo momento (p) rispetto alla detta retta xx'

(p) Per *momento di superficie* di una data figura piana rispetto ad una retta in

$$a'x.\frac{1}{2}x+(a-a')b'\left(x-\frac{b'}{2}\right);$$

Analogamente la parte che trovasi al di sotto di xx', decomponibile nel rettangolo $cdhg$ di lati $\overline{cd}=a'$ e $\overline{cg}=b-x$ e nei due rettangoli AgIE e BhKF che si possono risguardare come formanti un rettangolo unico di lati $\overline{\mathrm{IE}}+\overline{\mathrm{KF}}=a''-a'$ e $\overline{\mathrm{EA}}=b''$, ha per suo momento rispetto alla stessa retta

$$a'(b-x).\frac{1}{2}(b-x)+(a''-a')b''\left(b-x-\frac{b''}{2}\right).$$

Siccome poi la retta xx' passa pel centro di superficie della figura proposta, la somma di questi momenti deve essere nulla, per cui, ponendo l'equazione che esprime questa condizione, raccogliendo in un sol membro tutti i termini contenenti x e nell'altro membro tutti quelli che ne sono indipendenti, si ottiene il seguente valore di x

$$x=\frac{1}{2}\frac{(a-a')b'^2+a'b^2+(a''-a')(2b-b'')b''}{(a-a')b'+a'b+(a''-a')b''}.$$

Conoscendosi la posizione del centro di superficie O, si ottiene il momento d'inerzia I' della sezione proposta rispetto all'asse xx' trovando i momenti d'inerzia delle due parti superiore ed inferiore, e sommandoli. Ora, siccome il momento d'inerzia I di un rettangolo di lati $\overline{\mathrm{AB}}=m$ e $\overline{\mathrm{BD}}=n$ (*fig.* 32) rispetto ad un asse passante pel suo centro di superficie, contenuto nel suo piano e parallelo al lato m vale $\frac{1}{12}mn^3$, e siccome, conoscendosi il momento d'inerzia di una figura piana rispetto ad un dato asse passante pel suo centro di superficie, si trova il momento d'inerzia della stessa figura rispetto ad un asse parallelo al primo coll'aggiungere al momento d'inerzia noto il prodotto della superficie della figura pel quadrato della distanza dei due assi, si ha che il momento d'inerzia

essa condotta intendo il prodotto della superficie di questa figura per la distanza del suo centro di superficie dalla detta retta; e, quando la figura data è scomposta in diverse parti, la somma algebrica dei prodotti di tutte queste parti per le distanze dei loro centri di superficie dalla retta per rapporto alla quale vuolsi il momento.

del rettangolo di lati m ed n rispetto al lato m è $\frac{1}{12}mn^3+\frac{1}{4}mn^3$ $=\frac{1}{3}mn^3$. Nel caso della sezione a doppio T non simmetrico (*fig.* 66), siccome la parte superiore alla retta xx' può essere considerata quale differenza fra il rettangolo DRSC di lati $\overline{\mathrm{DC}}=a$ e $\overline{\mathrm{DR}}=\overline{\mathrm{QO}}=x$ e la somma dei due rettangoli RcMH ed SdLG costituenti un rettangolo unico di lati $\overline{\mathrm{RH}}=x-b$ e $\overline{\mathrm{R}c}+\overline{\mathrm{S}d}=a-a'$, mentre la parte inferiore alla retta xx' si può risguardare quale differenza fra il rettangolo ATUB di lati $\overline{\mathrm{AB}}=a''$ e $\overline{\mathrm{TA}}=\overline{\mathrm{OP}}=b-x$ e la somma dei due rettangoli TcIE ed UdKF formanti un sol rettangolo di lati $\overline{\mathrm{TE}}=b-x-b''$ e $\overline{\mathrm{T}c}+\overline{\mathrm{U}d}=a''-a'$, i momenti d'inerzia delle accennate due parti della superficie della sezione proposta, una superiore e l'altra inferiore alla retta xx', valgono rispettivamente

$$\frac{1}{3}ax^3-\frac{1}{3}(a-a')(x-b')^3$$

$$\frac{1}{3}a''(b-x)^3-\frac{1}{3}(a''-a')(b-x-b'')^3,$$

e quindi il domandato momento d'inerzia I′ della sezione a doppio T non simmetrico vien dato da

$$\mathrm{I}'=\frac{1}{3}\Big[ax^3-(a-a')(x-b')^3+a''(b-x)^3-(a''-a')(b-x-b'')^3\Big].$$

In quanto al momento d'inerzia I″ rispetto alla retta yy' si può esso facilmente ottenere considerandolo come somma dei momenti d'inerzia di tre rettangoli DCGH, MLKI ed EFBA, ed essendo l'asse yy' parallelo ai lati $\overline{\mathrm{DH}}=b'$, $\overline{\mathrm{MI}}=b-b'-b''$ ed $\mathrm{EA}=b''$ degli accennati tre rettangoli e di più passando pei loro centri di superficie, risulta

$$\mathrm{I}''=\frac{1}{12}\Big[b'a^3+(b-b'-b'')a'^3+b''a''^3\Big].$$

Le travi con sezione a doppio T non simmetrico, che avviene di considerare nella pratica, non sempre sono travi semplici come finora si è supposto, ma ben sovente sono travi composte formate da una lamiera continua a cui, mediante quattro ferri d'angolo, sono unite in alto ed in basso delle lamiere ad essa perpendicolari, od anche sono travi a traliccio. Mettendo assieme quanto or ora si è detto per la ricerca dei momenti d'inerzia I′ ed I″ della trave semplice con sezione a doppio T non simmetrico con quanto venne esposto dando la risoluzione dei problemi V, VI ed VIII, sarà cosa sommamente agevole il trovare i momenti d'inerzia delle sezioni a doppio T non simmetrico di travi composte sia in modo rigoroso, sia in modo spedito ed approssimato, ma sufficiente per la pratica.

X. *Momenti d'inerzia della sezione a* T *rispetto a due assi ortogonali* xx′ *ed* yy′ *(fig.* 67*) passanti pel suo centro di superficie* O *e diretti, l'uno nel senso della larghezza* DC *e l'altro nel senso dell'altezza* PQ *della sezione.*

Considerando la sezione a T siccome un caso particolare della sezione a doppio T non simmetrico nella quale (*fig.* 66) $\overline{AB}=\overline{DC}$ e $\overline{BF}=0$, la distanza $\overline{QO}=x$ (*fig.* 67) del centro di superficie O dalla retta DC ed i momenti d'inerzia domandati I′ ed I″ rispetto agli assi xx' ed yy' si ottengono facendo nelle espressioni di x, di I′ e di I″ trovate nel precedente problema $a''=a'$ e $b''=0$, per cui risulta

$$x=\frac{1}{2}\frac{(a-a')b'^2+a'b^2}{(a-a')b'+a'b}$$

$$I'=\frac{1}{3}\Big[a\,x^3-(a-a')(x-b')^3+a'(b-x)^3\Big]$$

$$I''=\frac{1}{12}\Big[b'a^3+(b-b')a'^3\Big].$$

XI. *Momento d'inerzia della sezione di una trave cellulare rispetto all'asse* xx′ *(fig.* 68*) passante pel suo centro di superficie e diretto perpendicolarmente all'altezza* AB *della sezione.*

Si incomincia dal trovare le superficie Ω_1, Ω_2 ed Ω_3 delle sezioni trasversali fatte nelle pareti delle celle superiori, nelle pareti delle celle inferiori e nelle pareti della parte di mezzo; si determinano i centri di superficie O_1, O_2 ed O_3 di queste sezioni, non che il centro di superficie O dell'intiera sezione; pei punti così trovati si immaginano condotte le rette x_1x_1', x_2x_2', x_3x_3' ed xx' perpendicolari ad AB e si cercano le distanze $\overline{OO_1}=d_1$, $\overline{OO_2}=d_2$ ed $\overline{OO_3}=d_3$; si calcolano i momenti d'inerzia I_1, I_2 ed I_3 delle tre superficie di cui vennero trovati i centri rispetto agli assi $x_1 x_1'$, $x_2 x_2'$ ed $x_3 x_3'$; e finalmente, in virtù delle leggi (nota m) di variazione dei momenti d'inerzia rispetto ad assi paralleli, si trova il momento d'inerzia I' dell'intiera sezione relativo all'asse $x\,x'$ dicendo che esso è dato da

$$I' = I_1 + \Omega_1 d_1^2 + I_2 + \Omega_2 d_2^2 + I_3 + \Omega_3 d_3^2.$$

Nel valutare la resistenza delle travi cellulari alla flessione difficilmente i pratici costruttori tengono conto della parte di mezzo che ravvisano siccome destinata a tener unite le parti resistenti in cui si trovano le celle, e quindi semplificano la determinazione del momento d'inerzia trascurando il calcolo di Ω_3, di d_3 e di I_3.

XII. *Momento d'inerzia della sezione ad* U *rispetto all'asse* x x' (*fig.* 69) *passante pel suo centro di superficie* O *e diretto nel senso della larghezza* DC *della sezione.*

Si consideri questa sezione siccome una sezione a T (*fig.* 67), il cui gambo MLKI siasi scomposto in due parti uguali (*fig.* 69) MmiI ed LgkK. Essendo $\overline{DC} = a$, $\overline{Mm} + \overline{Lg} = a'$, $\overline{QP} = b$ e $\overline{CL} = b'$, la posizione del centro di superficie O non varia sia che i due rettangoli MmiI ed LgkK trovinsi riuniti nel mezzo per costituire il gambo MLKI della sezione a T (*fig.* 67), sia che i detti due rettangoli si trovino disposti come lo dimostra la figura 69 onde formare le due parti laterali della sezione ad U; tanto nel caso della sezione a T quanto in quella ad U rimangono al di sopra dell'asse xx' equivalenti superficie coi vari loro elementi aventi rispettivamente le stesse distanze dal detto asse; e quindi la distanza $\overline{QO} = x$ ed il momento d'inerzia I' si ottengono colle stesse formole che nel problema X già vennero date per trovare queste due quantità.

XIII. *Momento d'inerzia della sezione a croce simmetrica rispetto agli assi* x x' *ed* y y' (fig. 70) *passanti pel suo centro di superficie e diretti secondo gli assi dei suoi bracci.*

Essendo $\overline{AE} = \overline{DF} = a$ ed $\overline{EB} = \overline{CF} = b$, i momenti d'inerzia I' ed I'' rispetto ai due assi xx' ed yy' sono eguali e quindi una volta determinato uno di essi rimane determinato anche l'altro. Per trovare I' si osservi che esso vale il momento d'inerzia del rettangolo AIBE di lati $\overline{AE} = a$ ed $\overline{EB} = b$ aumentato della somma dei momenti d'inerzia dei due rettangoli eguali KHCF ed LGMD che si possono considerare siccome formanti un sol rettangolo di lati $\overline{LD} + \overline{KF} = a - b$ ed $\overline{FC} = b$, per modo che si ha

$$I' = \frac{1}{12} b\,(a^3 + a b^2 - b^3).$$

XIV. *Momenti d'inerzia della sezione quadrata con quattro nervature sui prolungamenti delle mediane* xx' *ed* yy' (*fig.* 71) *rispetto alle mediane stesse.*

Sia a il lato $\overline{AB}$ del quadrato formante la parte di mezzo della proposta sezione,

b la lunghezza $\overline{CD}$ di due nervature opposte compresa quella dell'accennato quadro,

c la grossezza di ciascuna nervatura.

I momenti d'inerzia I' ed I'' della sezione proposta rispetto agli assi xx' ed yy' evidentemente sono eguali e, volendosi trovare I', si può dire che esso vale: il momento d'inerzia del rettangolo EFGH di lati $\overline{EH} = b$ ed $\overline{EF} = c$; la somma dei momenti d'inerzia dei due rettangoli AMNO e BILK costituenti un rettangolo unico di lati $\overline{MA} + \overline{IB} = a - c$ e $\overline{AO} = a$; più ancora la somma dei momenti d'inerzia dei due rettangoli TUVX e PQRS che nel loro assieme si possono risguardare come un rettangolo unico di lati $\overline{TU} + \overline{PQ} = b - a$ ed $\overline{UV} = c$. Segue da ciò che l'equazione determinatrice di I' sarà

$$I' = \frac{1}{12}\left[c\,b^3 + (a - c)\,a^3 + (b - a)\,c^3\right].$$

98. Momenti d'inerzia delle sezioni trapezie e delle sezioni parallelogrammiche. — I. *Momento d'inerzia di una sezione trapezia* ABCD (*fig.* 72) *rispetto ad uno dei suoi lati non paralleli.*

Sia AB il lato rispetto al quale vuolsi il momento d'inerzia I del trapezio, e si chiamino:

x_1 ed x_2 le distanze dal punto A dei piedi E ed F delle perpendicolari abbassate dai punti D e C sulla direzione del lato AB;

y_1 ed y_2 le lunghezze $\overline{ED}$ ed $\overline{FC}$ delle accennate perpendicolari;

Ω la superficie del trapezio proposto ABCD.

Immaginando prolungati i due lati non paralleli AB e DC, essi vengono ad incontrarsi in un punto G; il momento d'inerzia domandato I vale il momento d'inerzia del triangolo ADG rispetto al lato AG meno il momento d'inerzia del triangolo BCG rispetto al lato BG; e quindi risulta

$$I = \frac{1}{12}\overline{AG} \cdot y_1^3 - \frac{1}{12}\overline{BG} \cdot y_2^3.$$

Osservando ora che $\frac{1}{2}\overline{AG}.y_1$ ed $\frac{1}{2}\overline{BG}.y_2$ esprimono rispettivamente le aree dei due triangoli ADG e BCG, si ha l'eguaglianza di rapporti

$$\frac{1}{2}\overline{AG}.y_1 : \frac{1}{2}\overline{BG}\,y_2 = y_1^2 : y_2^2,$$

dalla quale, dividendo, si ricava

$$\frac{1}{2}\overline{AG}.y_1 = \Omega\frac{y_1^2}{y_1^2 - y_2^2},$$

$$\frac{1}{2}\overline{BG}.y_2 = \Omega\frac{y_2^2}{y_1^2 - y_2^2}.$$

Questi valori di $\frac{1}{2}\overline{AG}.y_1$ e di $\frac{1}{2}\overline{BG}.y_2$ si sostituiscono nell'espressione di I e risulta

$$I = \frac{1}{6}\,\Omega\,\frac{y_1^4 - y_2^4}{y_1^2 - y_2^2} = \frac{1}{6}\,\Omega\,(y_1^2 + y_2^2).$$

In quanto alla superficie Ω si può essa esprimere in funzione delle quantità date x_1, x_2, y_1 ed y_2. Perciò, considerando i due triangoli simili DAE e CBF, si deduca prima la lunghezza $\overline{BF}$ il cui valore è

$$\overline{BF} = x_1\frac{y_2}{y_1};$$

e quindi si passi a trovare Ω dicendo che vale la superficie del triangolo rettangolo ADE aumentata di quella del trapezio EDCF e diminuita di quella del triangolo rettangolo BCF.

Se i due lati paralleli AD e BC del trapezio sono perpendicolari al lato AB per rapporto al quale si cerca il momento d'inerzia, si ha $x_1 = 0$, $\Omega = \frac{1}{2}(y_1 + y_2)x_2$, ed il valore di I si riduce a

$$I = \frac{1}{12} x_2 (y_1 + y_2)(y_1^2 + y_2^2) \qquad (1).$$

II. *Momento d'inerzia di una sezione parallelogrammica* ABCD (*fig.* 73) *rispetto ad uno dei suoi lati.*

Essendo AB il lato per rapporto al quale vuolsi il momento d'inerzia I del parallelogramma ABCD di base $\overline{AB} = b$ e di altezza $\overline{ED} = a$, si può considerare la proposta figura siccome il trapezio del precedente problema nel caso in cui $y_1 = y_2 = a$, $x_2 = b + x_1$ e $\Omega = ab$, per cui risulta

$$I = \frac{1}{3} b a^3.$$

III. *Momento d'inerzia di una sezione trapezia* ABCD (*fig.* 72) *rispetto ad uno dei suoi lati paralleli.*

Siano rispettivamente b', b'' ed a le due basi parallele $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ e l'altezza $\overline{BI}$ del trapezio proposto, e si immagini esso decomposto nel triangolo ABH e nel parallelogramma BCDH di basi $\overline{AH} = b' - b''$ e $\overline{BC} = b''$ e di altezza comune $\overline{BI} = a$. Il momento d'inerzia I del trapezio ABCD rispetto alla base AD vale la somma dei momenti d'inerzia degli accennati parallelogramma e triangolo rispetto alla retta AD, e quindi si ha

$$I = \frac{1}{3} b'' a^3 + \frac{1}{12}(b' - b'') a^3 = \frac{1}{12} a^3 (b' + 3b'').$$

Volendosi il momento d'inerzia I_1 dello stesso trapezio rispetto ad un asse parallelo alle sue basi e condotto pel suo centro di superficie, bisogna trovare la superficie Ω non che la distanza d del detto centro dalla base AD e allora si deduce il valore di I_1 dalla relazione [nota (*m*)]

$$I = I_1 + d^2 \Omega.$$

99. Momenti d'inerzia delle sezioni poligonali qualunque. — Il più comodo dei metodi che si possano seguire in pratica per trovare il momento d'inerzia della superficie di una sezione poligonale qualunque rispetto ad un asse in essa condotto, consiste nell'abbassare da tutti i suoi vertici altrettante perpendicolari alla retta per rapporto alla quale vuolsi il momento d'inerzia e nel prendere la somma dei momenti d'inerzia rispetto a questa retta di tutte le figure in cui resta decomposto il total poligono proposto. Così, nel caso del poligono rappresentato nella figura 74, il suo momento d'inerzia rispetto alla retta xx' vale la somma dei momenti d'inerzia rispetto a questa retta dei trapezii A′ABB′, B′BCC′, C′CDD′, D′DEE′, F′FGG′, G′GHH′ e dei triangoli rettangoli KF′F, IH′H diminuita della somma dei momenti d'inerzia dei triangoli AA′I, EE′K. I momenti d'inerzia dei trapezii si ottengono coll'equazione (1) del numero precedente e quelli dei triangoli rettangoli si possono avere colla stessa formola supponendo che sia nulla una delle due basi.

Il metodo che ho indicato per trovare il momento d'inerzia di un poligono qualunque rispetto ad un asse in esso condotto, torna anche utile e comodo quando si tratta di poligoni regolari pei quali ben sovente avviene di dover trovare i momenti d'inerzia rispetto ad assi passanti pei loro centri.

100. Momenti d'inerzia delle sezioni circolari e delle sezioni ellittiche. — I. *Momento d'inerzia della sezione circolare rispetto ad un suo diametro* AB (*fig.* 75).

Per il centro O si conducano nel piano del circolo due rette xx' ed yy' perpendicolari fra di loro la prima delle quali si confonda in direzione col diametro AB, e si chiamino x ed y le coordinate del centro d'un elemento di superficie compreso fra due raggi abbraccianti un angolo infinitamente piccolo e fra due archi i cui raggi ammettono una differenza pure infinitamente piccola. I momenti d'inerzia dell'intiero circolo rispetto ai due assi xx' ed yy' sono rispettivamente $\Sigma\omega y^2$ e $\Sigma\omega x^2$ e, siccome queste due somme sono eguali, si ha fra esse ed il domandato momento d'inerzia I rispetto al diametro AB

$$I=\frac{1}{2}(\Sigma\omega y^2+\Sigma\omega x^2).$$

Ora, essendo $\Sigma\omega y^2+\Sigma\omega x^2=\Sigma\omega(x^2+y^2)=\Sigma\omega\overline{OM}^2$, si ha che I non è altro che la metà della somma dei prodotti di tutti gli elementi analoghi all'elemento M in cui si può scomporre l'intiero circolo per quadrati delle loro distanze dal punto O, ossia la metà del momento d'inerzia polare del circolo. Ma, essendo r il raggio del circolo e π il noto rapporto 3,1415....... della circonferenza al diametro, si è trovato (num. 52 e 53) che il detto momento d'inerzia polare vale $\frac{1}{2}\pi r^4$, per cui

$$I = \frac{1}{4}\pi r^4.$$

II. *Momento d'inerzia della sezione circolare vuota rispetto ad un suo diametro.*

Sia r' il raggio interno, r'' il raggio esterno, e siano concentriche le due circonferenze che limitano la sezione proposta. Per quanto già si è detto altre volte nella ricerca dei momenti d'inerzia di sezioni vuote, si avrà che il domandato momento d'inerzia I vien dato da

$$I = \frac{1}{4}\pi(r''^4 - r'^4).$$

III. *Momento d'inerzia della sezione ellittica rispetto ai suoi due assi.*

I due semi-assi dell'ellisse siano rispettivamente $\overline{OA} = a$ e $\overline{OC} = b$. Considerando un elemento di superficie compreso fra due rette FG e F'G' parallele ad AB e vicinissime fra di loro, si ha che il momento d'inerzia I' dell'ellisse rispetto all'asse $x x'$ è dato da

$$I' = \Sigma \overline{FG} . \overline{EE'} . \overline{OE}^2.$$

Ora, immaginando descritta la circonferenza di centro O e di raggio $\overline{OC} = b$, fra la doppia ascissa $\overline{FG}$ dell'ellisse corrispondente alla ordinata $\overline{OE}$ e la doppia ascissa $\overline{HI}$ del circolo corrispondente alla stessa ordinata, si ha

$$\overline{FG} = \frac{a}{b}\overline{HI},$$

per cui il valore di I' diventa

$$I' = \frac{a}{b}\Sigma \overline{HI} . \overline{EE'} . \overline{OE}^2.$$

Ma la somma $\Sigma \overline{HI} . \overline{EE'} . \overline{OE}^2$ non è altro che il momento d'inerzia del circolo di raggio $\overline{OC} = b$ il quale per quanto si è trovato al problema I di questo numero vale $\frac{1}{4}\pi b^4$, cosicchè

$$I' = \frac{1}{4}\pi a b^3.$$

Analogamente, immaginando descritta la circonferenza di centro O e di raggio $\overline{OA}=a$ e considerando una superficie elementare compresa fra due rette vicinissime fra di loro e parallele all'asse CD, con un ragionamento in tutto eguale a quello già fatto per trovare il momento d'inerzia I′, si viene a conchiudere che il momento d'inerzia I″ rispetto all'asse yy' vien dato da

$$I''=\frac{1}{4}\pi b a^3.$$

IV. *Momenti d'inerzia della sezione ellittica vuota rispetto ai due assi dell'ellisse esterna confondentisi in direzione con quelli dell'ellisse interna.*

Essendo

a' e b' i due semi-assi $\overline{OE}$ ed $\overline{OG}$ (*fig.* 77) dell'ellisse interna,

a'' e b'' i due semi-assi $\overline{OA}$ ed $\overline{OC}$ dell'ellisse esterna,

I′ ed I″ i momenti d'inerzia domandati rispetto agli assi xx' ed yy',

e coincidendo in O i loro centri, per quanto già più volte si è detto sul modo di trovare i momenti d'inerzia delle sezioni vuote, si ha

$$I'=\frac{1}{4}\pi(a''b''^3-a'b'^3),$$

$$I''=\frac{1}{4}\pi(b''a''^3-b'a'^3).$$

101. Momenti d'inerzia delle sezioni a contorno curvilineo qualunque. — Diversi sono i metodi che si possono impiegare per ottenere i momenti d'inerzia delle superficie delle sezioni piane a contorno qualunque rispetto ad assi in esse contenuti, ed in quello che segue trovansi esposti il metodo di Poncelet e quello di Belanger.

Essendo ABCDE (*fig.* 78) una superficie piana compresa fra la retta AE, due perpendicolari AB ed ED a questa retta ed una curva BCD, ecco come si applica il metodo di Poncelet alla ricerca del suo momento d'inerzia rispetto all'asse xx' assunto nella direzione AE. Si divida la lunghezza AE in un numero pari $2n$ di parti eguali piccole, pei punti di divisione A_1, A_2, A_3, A_4, ... A_{2n-1} si conducano altrettante perpendicolari all'asse xx' e si chiamino

k le lunghezze eguali $\overline{AA_1}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \ldots\ldots A_{2n-1}E$ delle $2n$ parti in cui si è divisa la retta AE,

$y_0, y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots\ldots y_{2n-1}, y_{2n}$ le lunghezze delle ordinate $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \overline{A_3B_3}, \overline{A_4B_4}, \ldots\ldots, \overline{A_{2n-1}B_{2n-1}}, \overline{ED}$,

y l'ordinata condotta per il punto di divisione qualunque F della AE,

I il momento d'inerzia domandato,

Σ una somma estesa a tutti i momenti d'inerzia delle superficie ABB_1A_1, $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, $A_3B_3B_4A_4$, ..., $A_{2n-1}B_{2n-1}DE$ in cui si è decomposta la superficie intiera ABCDE.

Ciascuna delle piccole figure come la CFGH, componenti la total figura proposta, per la picciolezza di FG si può considerare siccome un rettangolo di lati $\overline{FG}=k$ ed $\overline{FC}=y$; il momento d'inerzia di un tal rettangolo rispetto all'asse xx' vale $\frac{1}{3}ky^3$; e quindi si ha

$$I=\frac{1}{3}\Sigma ky^3.$$

Ora, la somma Σky^3, estesa come sopra si è detto, si può considerare siccome rappresentante l'area di una curva compresa fra una retta lunga $2nk$, fra due perpendicolari y_0^3 ed y_{2n}^3 innalzate per gli estremi di questa retta ed una curva le cui $2n-1$ ordinate intermedie a distanza k le une dalle altre e dopo la y_0^3 sono ordinatamente y_1^3, y_2^3, y_3^3, y_4^3, ... Ciò premesso, applicando la formola di Simpson, torna agevole il trovare l'indicata superficie e, siccome va essa moltiplicata per $1/3$ onde avere il domandato momento d'inerzia I, si ha

$$I=\frac{1}{9}k(y_0^3+4y_1^3+2y_2^3+4y_3^3+2y_4^3+\ldots\ldots+4y_{2n-1}^3+y_{2n}^3) \quad (1).$$

Belanger, considerando una figura piana ABCD (*fig.* 79) compresa fra due rette AB e CD parallele all'asse xx' per rapporto al quale vuolsi il momento d'inerzia e conducendo per un punto qualunque G della xx' la retta GF ad essa perpendicolare, divide la parte EF di questa perpendicolare in un numero pari $2n$ di parti eguali e pei punti di divisione conduce altrettante parallele alla retta xx'. Chiamando

y_0 la distanza $\overline{GE}$ di AB dall'asse xx',

$x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots\ldots, x_{2n-1}, x_{2n}$ le lunghezze delle rette $\overline{AB}$, $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \overline{A_3B_3}, \overline{A_4B_4}, \ldots\ldots, \overline{A_{2n-1}B_{2n-1}}, \overline{DC}$,

x la lunghezza $\overline{HI}$ di una qualunque delle parallele all'asse xx' avente da questo distanza $\overline{GM}=y$,

k la lunghezza di una delle $2n$ parti in cui si è divisa la retta $\overline{EF}$,

I il domandato momento d'inerzia,

Σ una somma estesa a tutti i momenti d'inerzia delle superficie ABB_1A_1, $A_1B_1B_2A_2$, $A_2B_2B_3A_3$, $A_3B_3B_4A_4$, ..., $A_{2n-1}B_{2n-1}CD$ in cui si è decomposta l'intiera figura ABCD,

siccome una qualunque delle piccole figure, HIKL ad esempio, si può considerare siccome un rettangolo di base $\overline{HI}=x$ e di altezza piccolissima $\overline{MN}=k$ col suo centro di superficie distante dall'asse xx' di $\overline{GM}=y$, si ha

$$I=\Sigma kxy^2.$$

Se ora si rammenta come deve essere valutata la somma Σkxy^2, agevolmente si comprende rappresentare essa l'area compresa fra una retta lunga $2nk$, fra due perpendicolari a questa retta lunghe $x_0y_0^2$ e $x_{2n}(y_0+2nk)^2$ ed una curva le cui ordinate intermedie a distanza k le une dalle altre e dopo la perpendicolare $x_0y_0^2$ sono ordinatamente $x_1(y_0+k)^2$, $x_2(y_0+2k)^2$, $x_3(y_0+3k)^2$, $x_4(y_0+4k)^2$, ..., $x_{2n-1}[y_0+(2n-1)k]^2$, cosicchè applicando la formola di Simpson si ottiene

$$I=\frac{1}{3}k\left\{\begin{array}{l} x_0y_0^2+4x_1(y_0+k)^2+2x_2(y_0+2k)^2+4x_3(y_0+3k)^2 \\ +2x_4(y_0+4k)^2+\ldots\ldots+4x_{2n-1}[y_0+(2n\text{-}1)k]^2 \\ +x_{2n}(y_0+2nk)^2 \end{array}\right\} \quad (2).$$

La formola di Poncelet è da preferirsi a quella di Belanger allorquando, in seguito alla forma del contorno della figura data, le diverse parti della linea avente $\frac{1}{3}y^3$ per ordinate si accostano ad archi di parabole coi loro assi perpendicolari all'asse xx' più di quello che la linea avente per ordinate xy^2 abbia le sue diverse parti che si approssimano ad archi di parabole coi loro assi paralleli alla retta xx'. Si prende la seconda formola nel caso contrario. Quando vi ha incertezza sulla convenienza di impiegare l'una piuttosto che l'altra delle due formole, o quando si stima operazione troppo faticosa lo stabilire l'indicato confronto, si possono far servire i risultati ottenuti colle due formole siccome di controllo l'uno dell'altro. Generalmente però basta impiegare una sola delle due formole date e di controllare il risultato ottenuto considerando un certo numero d'ordinate con quello che si ottiene con un numero doppio.

Quando la superficie di cui vuolsi trovare il momento d'inerzia presenta un contorno curvilineo come lo dimostra la figura 80, si conducono prima le due rette AB e CD tangenti alla curva AECF e perpendicolari alla retta xx', e si trovano colla formola (1) i momenti d'inerzia delle due figure BAECD e BAFCD: la loro differenza rappresenta il momento d'inerzia domandato. Se poi l'asse xx' (*fig.* 81) per rapporto al quale vuolsi valutare il momento d'inerzia taglia il contorno della figura data, pei punti d'intersezione B e D si elevano le due perpendicolari BA e DC, colla formola (1) si fanno i momenti d'inerzia delle due parti BACD e BHD, col metodo che si è detto doversi tenere nella ricerca del momento d'inerzia della superficie piana rappresentata nella figura 80 si trovano i momenti d'inerzia delle due superficie AFB e CGD, e la somma dei quattro momenti d'inerzia così ottenuti rappresenta il momento d'inerzia domandato.

Più comoda della formola di Poncelet è quella di Belanger per la valutazione dei momenti d'inerzia nei casi rappresentati dalle figure 80 ed 81. Condotte le due rette RS e TU parallele all'asse xx', nel caso della figura 80 si ottiene il momento d'inerzia rispetto al detto asse applicando l'equazione (2) col fare in essa $x_0 = 0$ ed $x_{2n} = 0$; nel caso poi della figura 81 basta procurarsi i due momenti d'inerzia delle parti BFEGD e BHD applicando la citata equazione (2) ed osservando che $x_{2n} = 0$ ed $y_0 = 0$, e sommare i momenti d'inerzia che così risultano.

102. **Determinazione degli assi principali d'inerzia delle figure piane.** — In quasi tutti i casi che si possono presentare nella pratica dell'ingegnere costruttore si determinano gli assi principali passanti per un determinato punto di una data sezione piana traendo partito dell'osservazione che venne fatta sul finire della nota (m), giacchè generalmente torna possibile il condurre nel piano della sezione e pel punto dato una retta di simmetria la quale costituisce così uno dei due assi principali d'inerzia. Nel caso ben raro in cui non esista l'accennata retta di simmetria è necessario calcolare l'angolo $x'Ox = \varepsilon$ (*fig.* 46) mediante la formola

$$\operatorname{tang} 2\varepsilon = \frac{2\Sigma\omega x y}{\Sigma\omega x^2 - \Sigma\omega y^2},$$

marcata (4) nella citata nota e nella quale $\Sigma\omega x^2$ e $\Sigma\omega y^2$ sono rispettivamente i momenti d'inerzia per rapporto a due assi ortogonali Oy ed Ox condotti pel punto O nel piano della figura data, $\Sigma\omega xy$ una somma estesa a tutti gli elementi della superficie della stessa figura ed ε l'angolo che l'asse principale Ox' da determinarsi fa coll'asse dato Ox. Una volta trovato l'asse principale Ox' passante pel punto O torna agevole il trovare l'asse suo compagno, giacchè trovasi questo perpendicolare al primo

I momenti d'inerzia $\Sigma\omega x^2$ e $\Sigma\omega y^2$ sono elementi facili ad ottenersi mediante le norme che vennero esposte negli ultimi sette numeri, e solo rimane a vedersi come in ogni caso si possa ottenere il valore della somma $\Sigma\omega xy$. Si consideri perciò una figura piana qualunque ABC (*fig.* 82), nel cui piano si trovano i due assi coordinati ortogonali Ox ed Oy, siano $\overline{OE}=a$ ed $\overline{OF}=A$ le ascisse dei due punti A e D del contorno di detta superficie ed i quali sono l'uno più vicino e l'altro più lontano dall'asse Oy, e siano y ed Y quelle certe funzioni di x le quali esprimono rispettivamente le ordinate dei diversi punti delle due parti ACD ed ABD del contorno della superficie piana proposta. Immaginando condotte due rette GL ed HM perpendicolari all'asse delle ascisse ed infinitamente vicine fra di loro, non che due altre rette NQ e PR perpendicolari all'asse delle ordinate e pure infinitamente vicine fra di loro, risulta l'elemento di superficie IKST espresso dal prodotto $dx\,dy$ per cui, cangiando il simbolo Σ nel simbolo $\int\int$ e prendendo il doppio integrale fra convenienti limiti, si ha

$$\Sigma\omega xy = \int_a^A x\,dx \int_y^Y y\,dy.$$

Può avvenire di dover calcolare la somma $\Sigma\omega xy$ di una data figura piana rispetto a due assi in essa condotti conoscendosi la somma $\Sigma\omega x_1 y_1$ della medesima superficie rispetto a due assi paralleli ai primi e passanti pel suo centro di superficie. Può anche accadere di dover risolvere il problema inverso, ed a raggiungere sì l'uno che l'altro dei due scopi serve il seguente semplicissimo teorema: la somma $\Sigma\omega xy$ per una figura qualunque data e per due assi in essa condotti è eguale alla medesima somma per la stessa figura e per rapporto a due assi paralleli passanti pel suo centro di superficie, più il prodotto $\Omega x'y'$ della sua area Ω per le coordinate x' ed y' del suo centro rapportate agli assi primitivi (q).

103. Esperienze dirette a studiare i fenomeni che si manifestano nella flessione dei solidi rettilinei. — Duhamel di Monceaux fu il primo ad instituire esperienze atte a constatare i fatti che si manifestano nella flessione dei solidi rettilinei, e fin dal 1767 (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*) pubblicò i risultati di queste sue esperienze, le quali vennero fatte su legno di salice, giacchè questo legno, oltre di avere densità uniforme e gran pieghevolezza, presenta gli strati annui meno distinti che non gli altri. I pezzi sottoposti ad esperimento, che vennero tagliati a foggia di parallelepipedi con sezione quadrata di metri 0,975 di lunghezza e di metri 0,040 di squadratura, si ricavarono da alberi giovani, badando accuratamente a che il midollo rimanesse secondo il loro asse, orizzontalmente si collocarono su cavalletti posti a distanza di metri 0,925, e si caricarono nel loro mezzo d'un peso che gradatamente si aumentò fino a produrre la rottura. Quattro serie d'esperimenti vennero instituite: nella prima serie si impiegarono cinque pezzi quali or ora si sono descritti; nella seconda serie si cimentarono due pezzi nel cui mezzo e dalla parte della faccia superiore venne praticato un taglio di sega prolungato fino ad 1/3 della loro grossezza; nella terza si esperimentarono pure due pezzi in cui il detto taglio di sega si affondò fino ad 1/2 del loro spessore; e finalmente nella quarta si operò sopra sei pezzi per cui il taglio di sega si estese fino ai 3/4 del loro spessore. In ciascuno

(*q*) Siano

x ed y le coordinate $\overline{OP}$ e $\overline{PM}$ (*fig.* 45) di un punto qualunque M di una figura piana data ABC rispetto a due assi Ox ed Oy in essa condotti,

x_1 ed y_1 le coordinate $\overline{GP_1}$ e $\overline{P_1M}$ dello stesso punto per rapporto ad assi paralleli ai primi passanti pel centro di superficie G,

x' ed y' le due coordinate del detto centro G per rapporto agli assi primitivi Ox ed Oy.

Siccome

$$x = x_1 + x' \qquad\qquad y = y_1 + y',$$

si ha

$$\Sigma \omega x y = \Sigma \omega (x_1 + x')(y_1 + y')$$

la quale, facendo i prodotti ed osservando che x', y' ed $x'y'$ sono costanti, che $\Sigma\omega = \Omega$, che $\Sigma\omega x_1 = 0$ e che $\Sigma\omega y_1 = 0$ (giacchè gli assi a cui intendonsi riferite le coordinate x_1 ed y_1 passano pel centro di superficie G della ABC) si riduce a

$$\Sigma\omega x y = \Sigma\omega x_1 y_1 + \Omega x' y'.$$

dei tagli fatti colla sega venne introdotta una piastretta di legno di quercia secca per riempire il vuoto lasciato dalla grossezza del taglio, e per ciascuna serie d'esperimenti si trovarono i seguenti risultati medii dei pesi i quali cagionarono la rottura:

	Cg
Pei pezzi intieri.	256,91
Pei pezzi segati ad 1/3 del loro spessore . .	269,71
Pei pezzi segati ad 1/2 del loro spessore . .	265,31
Pei pezzi segati ai 3/4 del loro spessore . .	259,76

Dalle citate esperienze evidentemente risulta: che i tagli di sega non hanno indeboliti i pezzi in cui vennero praticati, giacchè essi non hanno impedito alle fibre collocate dalla parte concava di comprimersi contro la piastretta di quercia posta per riempire il giunto lasciato dal taglio, di resistere come se in esse non fosse avvenuta interruzione e quindi di accorciarsi; che le fibre legnose collocate dalla parte della convessità dei pezzi inflessi sonosi allungate; che, dovendo d'altronde gli allungamenti e gli accorciamenti delle diverse fibre essere tanto più grandi quanto più sono esse vicine alle superficie esteriori, devono essi andare diminuendo verso l'interno fino a diventare nulli, in modo da esservi uno strato di fibre le quali non subiscono nè allungamenti, nè accorciamenti. In quanto poi al leggier aumento di resistenza che hanno presentato i pezzi segati, si può esso attribuire a ciò che le piastrette di quercia, più dure del salice di cui tenevano il posto, abbiano offerto un punto d'appoggio più fermo alla compressione delle fibre.

Duhamel instituì delle esperienze analoghe a quelle che or ora si sono riferite anche su pezzi parallelepipedi con sezione rettangolare di pino del Nord colla lunghezza di metri 0,975, colla larghezza di metri 0,016 e collo spessore di metri 0,034, e, praticando i tagli di sega ad 1/3, ad 1/2 ed ai 2/3 di detto spessore a partire dalla faccia concava, trovò che i tagli di sega facilitavano bensì la flessione, ma che, siccome pel salice, non diminuivano considerevolmente la resistenza alla flessione.

Dupin nel suo Corso di meccanica industriale riferisce alcune esperienze che egli eseguì a Rochefort, dalle quali risulterebbe che una sezione piana qualunque di un prisma si conserva ancora sensibilmente piana anche dopo una flessione per cui non sia avvenuto snervamento nel corpo. — Il celebre esperimentatore segnò su due facce parallele di un parallelepipedo rettangolo di legno delle linee rette perpendicolari alle altre due facce, collocò questo solido su due appoggi posti allo stesso livello, lo caricò di un peso nel mezzo della sua lunghezza, riconobbe che, in seguito ad inflessione del corpo, le linee tracciate non cessavano di conservarsi rette e normali alle stesse facce a cui lo erano prima della flessione, e dedusse che le parti di fibre comprese fra due sezioni qualunque prima della flessione restarono comprese fra le stesse sezioni anche dopo, e che per conseguenza si allungarono o si accorciarono di quantità proporzionali alle loro distanze dall'asse intorno a cui si può supporre aver rotato una sezione relativamente all'altra.

Duleau riferisce d'aver forzatamente incurvato un pezzo di ferro con sezione quadrata di metri 0,02 di lato, d'averlo foggiato a guisa di arco di circolo conservando piane le due facce laterali sulle quali aveva segnate delle linee perpendicolari all'asse del pezzo e distanti di metri 0,025 l'una dall'altra, d'avergli fatto subire tre curvature tali che, su una lunghezza d'arco di metri 0,30, le saette corrispondenti erano di metri 0,022, di metri 0,037 e di metri 0,058, e d'aver trovato che le linee rette primitivamente tracciate sulle facce piane anche dopo la flessione erano rette perpendicolari all'asse del pezzo incurvato e che l'allungamento della parte convessa era eguale all'accorciamento della parte concava. Lo esperimentatore dedusse dalla citata esperienza: che le fibre del ferro poste dalla parte convessa avevano subito un allungamento; che quelle situate alla parte concava si erano accorciate; che esisteva nel corpo uno strato di fibre nè allungate nè accorciate; che gli allungamenti e gli accorciamenti delle diverse fibre risultavano proporzionali alle loro distanze dall'asse del pezzo; e che, essendo avvenuto snervamento nelle fibre del corpo esperimentato, a più forte ragione le citate conseguenze si dovevano ritenere come verificate nei ferri non snervati per flessione.

Numerose osservazioni ed esperienze di Fairbairn, di Hodgkinson, di Clark e di altri autori inglesi confermarono i risultati delle citate esperienze di Duhamel, di Dupin e di Duleau. Hodgkinson ha segnalato come nella rottura per flessione dei prismi in ghisa si stacchi verso il mezzo della parte concava una specie di cuneo C (*fig.* 85), il quale talvolta vien lanciato al di sopra del solido, e come questa proiezione sia evidentemente un effetto della pressione che ha luogo in detta parte concava.

Il Morin, nel suo interessante lavoro intitolato *Résistance des matériaux*, riferisce i risultati d'un'esperienza che venne fatta al Conservatorio di arti e mestieri di Parigi sull'estensione e sulla compressione dei solidi sottoposti a flessione, in seguito a proposta e col concorso dell'ingegnere Richard. Un parallelepipedo rettangolo di larice, lungo metri 2, colla sezione trasversale di metri 0,0974 per 0,0975 e pesante chilogrammi 8,9, venne orizzontalmente collocato su due appoggi distanti di metri 1,805. Nel bel mezzo di questo pezzo e perpendicolarmente alla sua lunghezza si collocò un rullo all'asse del quale si appese un piatto che, unitamente ad un carico addizionale di chilogrammi 6,91 ed a quello rappresentante l'azione del peso proprio del solido, costituiva un carico costante di 50 chilogrammi. Nel senso della lunghezza delle facce superiore ed inferiore si praticò in ciascuna di queste facce una piccola scanalatura in cui si introdusse con lieve fregamento una linguetta sottilissima di legno un po' più lunga del prisma sottoposto ad esperimento e che venne unta con poco di grasso nell'intento di renderla più mobile. Appena collocato il solido sugli appoggi, in corrispondenza dei suoi estremi, si segnarono sulla linguetta due tratti finissimi, e quindi si cominciò a collocare dolcemente dei pesi sul piatto. A misura che sotto l'azione di pesi ognor crescenti, il solido s'infletteva, avveniva : che i tratti marcati sulla linguetta superiore sempre più si mostravano sporgenti alle estremità del solido inflesso ; e che i tratti segnati sulla linguetta inferiore rimanevano ricoperti dalle estremità di detto solido con prova manifesta ed incontestabile di accorciamento nella parte concava, di allungamento nella parte convessa e dell'esistenza di fibre nè allungate nè accorciate nell'interno del solido. Sotto il più gran carico poi, che fu di 600 chilogrammi, l'accorciamento della faccia superiore si trovò di metri 0,0017 e l'allungamento della faccia inferiore di metri 0,00195.

Allo stesso Conservatorio di arti e mestieri vennero eseguite nell'anno 1866 altre esperienze, e si instituirono esse su travicelli di larice e di quercia, su travi in ferro e su travi in ghisa. Per fare queste esperienze si stabilirono due robusti massi in pietra da taglio sopra una solida fondazione e si disposero in modo da poter operare anche con portate di 4 metri. Su questi massi si collocarono delle piastre in ferro ben levigate, e la distanza degli spigoli interni di queste piastre determinava la portata delle travi che si sottoponevano ad esperimento orizzontalmente collocandole sulle dette piastre. I carichi si facevano agire nel mezzo della loro lunghezza coll'intermezzo d'un cilindro o rullo al cui asse era appeso un piatto di bilancia sul quale si ponevano delle cassette piene di piccole palle. Per osservare le saette o gli abbassamenti che subiva il mezzo della trave sotto i diversi carichi, colla massima esattezza si tracciavano nel mezzo della portata due linee finissime, una verticale e l'altra orizzontale, e si determinava l'abbassamento della loro intersezione mediante un catetometro che permetteva di valutare i centesimi di millimetro. In ciascuna esperienza si verificava se non era avvenuta depressione negli appoggi, e quando i solidi sottoposti ad esperimento mostravano qualche abbassamento al loro contatto colle piastre, se ne teneva conto diminuendo la misura della saetta di quest'abbassamento. — Nelle facce superiore ed inferiore dei travicelli in legno si praticavano delle scanalature in ciascuna delle quali a dolce fregamento si poneva una linguetta, terminata alle estremità da piccole piastre in ferro su cui, prima della flessione, venivano segnate delle linee di confronto che si estendevano anche sulla trave. Ad una delle estremità del solido sottoposto ad esperimento si fissava sulla faccia superiore e sulla faccia inferiore un ritegno contro il quale si fermava l'estremità della linguetta, in modo che tutta la sua variazione di lunghezza trovavasi riportata all'altra estremità. Dopo la flessione e col mezzo di cannocchiali a reticolo, immediatamente si verificava se aveva luogo la coincidenza fra le linee di confronto di un estremo ed in seguito all'altra estremità si leggeva l'accorciamento delle fibre collocate sulla faccia superiore e l'allungamento delle fibre poste sulla faccia inferiore della trave sottoposta ad esperimento. — Per le travi metalliche operavasi in un modo analogo, ma, invece di misurare gli accorciamenti delle fibre collocate sulla faccia superiore e gli allungamenti delle fibre poste sulla faccia inferiore mediante la linguetta, si faceva uso di sottili lame d'acciaio mantenute in direzioni rettilinee mediante piccoli sostegni forati e disposti sulle dette facce. — Tutte le osservazioni sono state eseguite colla massima diligenza, verificate dal signor Tresca, vice-direttore del Conservatorio il quale ne aveva ordinati i dettagli, e ripetute almeno due volte. Nello scopo di allontanare l'influenza della non omogeneità che poteva verificarsi nelle travi in legno ed anche in quelle metalliche, tutte si esperimentarono mettendo successivamente sotto e sopra ciascuna delle due facce di posa. Le casse costituenti i pesi sotto i quali si instituivano le esperienze, con precauzione e senza produr scosse, venivano poste nel piatto di bilancia, e si aveva l'avvertenza di aspettare qualche tempo prima di misurare le saette e le variazioni di lunghezza delle fibre, per essere sicuri che tutte le oscillazioni erano terminate. — Le esperienze vennero instituite:

1° Su un travicello di larice avente metri 0,16 di larghezza, metri 0,20 di altezza e metri 3,80 di portata:

2° Su due travicelli di quercia con metri 0,15 di larghezza, metri 0,20 di altezza e metri 3,80 di portata, l'uno assai secco e l'altro meno secco;

3° Su una trave semplice in ferro con sezione a doppio T simmetrico avente metri 0,045 di larghezza delle tavole, metri 0,160 di altezza, metri 4 di portata e colle tavole raccordate al gambo del doppio T mediante un contorno arrotondato;

4° Su una trave in ghisa con sezione a doppio T simmetrico colla larghezza delle tavole di metri 0,051, coll'altezza di metri 0,242, collo spessore delle tavole di metri 0,010, collo spessore del gambo di metri 0,015 e colla lunghezza di 4 metri;

5° Su una trave in ghisa con sezione a doppio T non simmetrico lunga 4 metri, colla tavola inferiore larga metri 0,096, colla tavola superiore larga metri 0,032, alta metri 0,243 ed avente rispettivamente gli spessori di metri 0,011 e di metri 0,012 nelle due tavole superiore ed inferiore e nel gambo;

ed il riassunto dei risultati dalle medesime ottenuti si ha nella tavola che segue, integralmente tolta dalla già citata opera del generale Arturo Morin:

INDICAZIONE dei SOLIDI ESPERIMENTATI	NUMERO delle esperienze	RAPPORTO della saetta massima alla portata	SAETTA MEDIA per 100 Cg di carico	ACCORCIAMENTO medio per 100 Cg di carico	ALLUNGAMENTO medio per 100 Cg di carico	RAPPORTO degli accorciamenti agli allungamenti
			mm	mm	mm	mm
Travicello di larice . . .	1	1/234	1,37	0,251	0,245	1,024
Lo stesso travicello voltato	2	1/227	1,38	0,236	0,244	0,967
	3	1/226	1,39	0,253	0,262	0,965
		Media .	1,38	0,246	0,250	0,965
Travicello di quercia assai secco	1	1/272	1,21	0,166	0,210	0,787
	2	1/275	1,19	0,189	0,209	0,905
Lo stesso travicello voltato	3	1/279	1,16	0,165	0,196	0,842
	4	1/279	1,11	0,184	0,209	0,880
		Media. .	1,17	0,176	0,206	0,853
Travicello di quercia meno secco del precedente.	1	1/174	1,84	0,325	0,324	1,005
	2	1/171	1,88	0,310	0,330	0,939
Lo stesso travicello voltato	3	1/167	1,84	0,313	0,335	0,934
	4	1/168	1,83	0,319	0,355	0,899
		Media. .	1,85	0,317	0,336	0,943
Trave in ferro a doppio T simmetrico	1	1/415	0,79	0,096	0,102	0,941
	2	1/376	0,82	0,097	0,100	0,970
La stessa trave voltata .	3	1/398	0,86	0,105	0,112	0,938
	4	1/398	0,85	0,107	0,117	0,915
		Media. .	0,83	0,101	0,108	0,935
Trave in ghisa a doppio T simmetrico	1	1/1120	0,34	0,062	0,058	1,069
	2	1/1150	0,38	0,067	0,068	0,985
La stessa trave voltata .	3	1/1150	0,36	0,060	0,066	0,909
	4	1/1110	0,36	0,064	0,064	1,000
		Media. .	0,36	0,063	0,064	0,991
Trave in ghisa a doppio T non simmetrico posata sulla tavola più	1	»	0,37	0,071	0,055	1,291
larga.	2	1/1138	0,38	0,076	0,052	1,461
		Media. .	»	»	»	1,376
La stessa trave posata sulla tavola più stretta.	1	1/1180	0,38	0,059	0,080	0,737
	2	1/1141	0,38	0,058	0,074	0,784
		Media. .	0,38	»	»	0,760

Dall'esame dei risultati contenuti nella precedente tavola si può dedurre col Morin che nei limiti delle flessioni ammissibili nella pratica sicuramente si verificano i seguenti fatti:

1° Che nei solidi prismatici, caricati di un peso nel loro mezzo le cui sezioni trasversali siano simmetriche rispetto alla verticale ed alla orizzontale passante pel loro centro di superficie gli accorciamenti delle fibre collocate sulla faccia concava sono eguali agli allungamenti delle fibre poste sulla faccia convessa, e che i detti accorciamenti ed allungamenti sono proporzionali ai carichi che producono le flessioni;

2° Che nei solidi prismatici caricati di un peso nel loro mezzo le cui sezioni trasversali sono simmetriche rispetto alla verticale, ma non rispetto all'orizzontale passante pel loro centro di superficie, come avviene per le travi con sezione a doppio T non simmetrico, gli accorciamenti delle fibre della faccia concava e gli allungamenti delle fibre della faccia convessa sono proporzionali alle distanze di queste facce dal piano che loro è parallelo e che passa pei centri di superficie delle diverse sezioni trasversali.

Fra i diversi risultati contenuti nell'ultima tavola, quelli solamente che si riferiscono al travicello di quercia assai secco presentano poca regolarità, ed il Morin attribuisce questo alla presenza di un nodo piuttosto grosso che si riconobbe esistere nel detto travicello. In generale la stessa mancanza di regolarità si manifesta in tutti i solidi non omogenei sottoposti a flessione, per cui il costruttore, che vuol applicare la teoria della flessione nell'assegnare forma e dimensioni convenienti alle diverse parti dei suoi lavori in cui la detta resistenza vien provocata, per quanto gli è possibile deve procurare di porre in opera dei solidi omogenei, senza fenditure, con fibre non interrotte e senza nodi.

104. **Esperienze dirette a ricercare secondo qual legge variano le saette che prendono i solidi parallelepipedi orizzontalmente collocati su due appoggi, sotto l'azione di un peso applicato nel loro mezzo e sotto l'azione di un peso uniformemente distribuito sulla loro lunghezza.** — Queste esperienze fin dal 1811 vennero instituite da Carlo Dupin, dal medesimo furono pubblicate in una memoria presentata all'Istituto di Francia nell'anno 1815, ed ecco una succinta esposizione di quest'importante lavoro.

Preparati dei parallelepipedi rettangoli di quercia, di cipresso, di faggio e di abete lunghi 2 metri ed aventi sezione quadrata di metri 0,03 di lato, vennero essi collocati sopra due sostegni posti ad una distanza di poco inferiore alla loro lunghezza e caricati nel loro mezzo mediante pesi successivamente crescenti. Si osservarono accuratamente le saette che i detti parallelepipedi prendevano sotto i diversi carichi e si ottennero i risultati contenuti nella seguente tavola:

QUALITÀ DEI LEGNI IMPIEGATI	DENSITÀ	SAETTE NEL MEZZO PRODOTTE DAI CARICHI DI						
		4^{Cg}	8^{Cg}	12^{Cg}	16^{Cg}	20^{Cg}	24^{Cg}	28^{Cg}
		mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
Quercia	0,7324	5,8	11,2	17,1	22,6	28,2	34,9	40,6
Cipresso	0,6640	7,0	14,2	21,5	28,7	35,9	44,2	51,0
Faggio	0,6595	8,4	16,9	25,9	34,5	43,4	54,0	63,5
Abete del Nord . . .	0,4428	13,0	26,2	»	»	»	»	»

Facendo il rapporto delle saette ai carichi da cui esse vennero prodotte, il celebre esperimentatore agevolmente potè dedurre essere questi rapporti sensibilmente costanti per una stessa qualità di legno finchè le saette non eccedevano 40 millimetri, e quindi stabilire che le saette subìte da parallelepipedi rettangoli della stessa sostanza, di eguali dimensioni, collocati orizzontalmente su due appoggi e caricati di pesi diversi nel loro mezzo devono essere proporzionali a carichi, finchè le dette saette si possono tollerare nelle costruzioni.

Confrontando le saette prese dai parallelepipedi sui quali Dupin instituì le sue esperienze colle loro densità, agevolmente si riconosce come ai legni più densi corrispondano le saette minori, per cui sembra potersi conchiudere che in parallelepipedi di eguali dimensioni e sottoposti all'azione di carichi identici le saette diminuiscono colla loro densità, e quindi che la resistenza dei legni alla flessione cresce colla loro densità.

Carlo Dupin mediante apposite esperienze ha anche cercato di confrontare l'effetto di carichi uniformemente distribuiti con quello di carichi agenti nel mezzo della lunghezza di un solido prismatico orizzontalmente collocato su due appoggi, ed i risultati di tali esperienze sono riportati nella tavola che segue:

QUALITÀ, FORMA E DIMENSIONI DEI SOLIDI ESPERIMENTATI	CARICO uniformemente distribuito	SAETTA corrispondente	CARICO che posto nel mezzo produce la stessa saetta
Parallelepipedo di quercia colla sezione trasversale avente metri 0,02 di lato verticale e metri 0,03 di lato orizzontale	Cg 9,0	mm 32	Cg 5,818
Cilindro di quercia col diametro di metri 0,02 .	3,0	48	1,900
Lo stesso cilindro	7,5	123	4,750

Trovando i rapporti fra i carichi della quarta e quelli della seconda colonna, si viene a riconoscere che essi sono poco diversi da 0,625 che è il rapporto di 5 ad 8, e quindi si può conchiudere che per prismi di egual sostanza e di eguali dimensioni i pesi da porsi nel mezzo o da distribuirsi uniformemente su essi per ottenere eguali saette devono stare fra loro come 5 ad 8, ossia ancora che per produrre in un dato prisma una determinata saetta è necessario applicare nel suo mezzo un peso che sia soltanto i 5/8 di quello che bisognerebbe distribuire uniformemente su tutta la sua lunghezza per ottenere la medesima saetta.

Se poi si prende un solido parallelepipedo, se orizzontalmente si colloca su due appoggi prima in piatto e poi in coltello, si riconosce che le saette prese sono ben diverse nei due casi, e Dupin, operando su un parallelepipedo d'abete avente metri 0,03 e metri 0,02 per lati della sua sezione trasversale, ottenne i risultamenti che trovansi consegnati nella tavola che segue:

Carichi posti nel mezzo del solido esperimentato	2^{Cg}	4^{Cg}	6^{Cg}	8^{Cg}	10^{Cg}
Saette trovandosi il solido colla dimensione $0^{m},02$ verticale	16^{mm}	32^{mm}	48^{mm}	64^{mm}	80^{mm}
Saette trovandosi il solido colla dimensione $0^{m},03$ verticale	6,80	14	21,30	28,50	37,60

Facendo i rapporti delle saette corrispondenti alla prima posizione data al solido con quelle corrispondenti alla seconda, si trovano essi poco discosti da 2,25, il qual numero si può assumere siccome rappresentante il loro valor medio; e, osservando che le due dimensioni della sezione trasversale del parallelepipedo sottoposto ad esperimento stanno fra loro come 3 a 2 e che 2,25 non è altro che il quoziente del quadrato di 3 ossia di 9 per il quadrato di 2 ossia per 4, si può conchiudere con Dupin che le saette prese da un parallelepipedo collocato orizzontalmente su due appoggi, prima colla dimensione minore e poi colla dimensione maggiore della sua sezion retta verticale, stanno fra di loro in ragione diretta dei quadrati delle dimensioni orizzontali, ossia in ragione inversa dei quadrati delle dimensioni verticali, ossia ancora che le saette sono in ragione inversa del prodotto della dimensione orizzontale della sezione trasversale per il cubo della dimensione verticale. — Alla stessa conseguenza arrivò Dupin sottoponendo ad esperimento un altro parallelepipedo d'abete avente metri 0,03 e metri 0,02 per lati della sezione trasversale.

Altre utili esperienze sono quelle dirette a riconoscere come nei solidi parallelepipedi caricati di un peso nel loro mezzo debbano variare le saette che essi prendono col variare le distanze dei punti d'appoggio. Dupin fece variare le distanze dei punti d'appoggio senza però ridurre le lunghezze dei solidi sottoposti ad esperimento le quali erano sempre un po' maggiori di 2 metri, cosicchè, oltre i punti d'appoggio, esisteva sempre una parte del solido su cui veniva instituito l'esperimento, la quale contribuiva ad attenuare l'effetto del carico e per conseguenza anche la saetta. È però facile il vedere come la diminuzione di saetta prodotta da questa condizione di cose debba essere impercettibile, e come il non tenerne conto ben poco possa influire sul risultato finale delle esperienze, le quali vennero instituite su un parallelepipedo di quercia avente metri 0,02 e metri 0,03 per lati della sua sezione trasversale, posto di piatto e pesante chilogrammi 0,94 e su un parallelepipedo di abete del Nord con metri 0,02 e 0,03 per lati della sua sezione trasversale, pure posto di piatto e pesante chilogrammi 1,104. La tavola che segue dà i principali risultati di queste esperienze:

PARALLELEPIPEDO DI QUERCIA

Distanze degli appoggi.	m 1,0	m 1,2	m 1,4	m 1,6	m 1,8	m 2,0
Saette	mm 6,0	mm 10,8	mm 16,7	mm 25,0	mm 36,0	mm 49,0

PARALLELEPIPEDO DI ABETE DEL NORD

Distanze degli appoggi.	m 1	m 1,25	m 1,5	m 1,75	m 2
Saette	mm 10	mm 21,90	mm 36,7	mm 58,00	mm 84

Se ora si fanno i cubi delle distanze degli appoggi e se le saette si dividono pei cubi corrispondenti, si trova che approssimativamente tutti questi quozienti risultano eguali, per cui sembra potersi stabilire con Dupin che le saette che prendono i solidi parallelepipedi di egual sostanza, aventi le stesse dimensioni nella loro sezione trasversale ed orizzontalmente collocati su due appoggi posti a diverse distanze stanno fra loro come i cubi di queste distanze.

Tutti i risultati che Dupin fece conoscere per via di esperienze, come in seguito si vedrà, sono perfettamente in accordo con quanto si deduce dalla teoria sulla resistenza alla flessione; ma convien ricordare che essi si verificano soltanto finchè nei solidi sottoposti a flessione non vien provocata la resistenza allo snervamento.

105. **Risultati a cui possono condurre le esperienze sulla flessione**. — Instituendo delle esperienze sulla resistenza dei solidi prismatici alla flessione e seguendo in esse metodi accurati e valevoli ad inspirare fiducia, quali sono quelli che già vennero adottati al Conservatorio di arti e mestieri di Parigi (num. 103), si possono determinare: gli accorciamenti delle fibre situate sulle facce divenute concave; gli allungamenti delle fibre poste sulle facce diventate convesse; le saette delle curve secondo cui si sono disposti gli assi dei solidi sottoposti a flessione; i carichi massimi sotto cui l'elasticità non è ancora alterata, i quali carichi sono i più grandi di quelli che, divisi per gli accorciamenti e per gli allungamenti corrispondenti, danno dei quozienti sensibilmente costanti; le saette

corrispondenti agli accennati carichi massimi; ed i carichi che immediatamente producono la flessione.

Integrando l'equazione differenziale del secondo ordine indicata (3) al numero 90 per avere l'equazione $u = f(z)$ della curva secondo cui si è disposto l'asse del solido sottoposto ad esperimento e ponendo in essa i dati del problema, l'ascissa del punto per cui sperimentalmente si è trovata la saetta invece di z, e questa saetta invece di u, si può calcolare il valore di E che entra nell'accennata equazione e così ottenere il coefficiente di elasticità del prisma sul quale si è prodotta la flessione. Questo metodo di determinazione dei coefficienti di elasticità già venne seguito da varii esperimentatori, i quali quasi sempre sono arrivati a risultamenti poco diversi da quelli che si deducono operando come già si è detto al numero 13.

Alcuni ingegneri, dopo d'aver instituite delle esperienze sulla resistenza alla rottura per flessione operando sopra solidi prismatici orizzontalmente collocati su due appoggi, aventi sezioni trasversali simmetriche rispetto a due rette fra loro perpendicolari e passanti pei centri di superficie, calcolarono, applicando una delle due equazioni (1) del numero 91, le quali nel caso della sezione simmetrica rispetto alle due rette accennate diventano identiche, il valore di $Q_1 = Q_2$ e, confrontando questo valore colle resistenze alla rottura per estensione e per compressione, riferite all'unità di superficie, trovarono quasi sempre dei notevoli disaccordi i quali diedero pretesto, ad alcuni di promuovere delle obbiezioni contro la teoria sulla resistenza alla flessione, ad altri di dubitare dell'esattezza della medesima. Se però si osserva come la detta teoria si fondi a fatti che con moltissima approssimazione si verificano bensì nei limiti degli sforzi a cui si assoggettano i corpi nelle costruzioni, ma non quando si sottopongono essi a sforzi capaci di produrre la rottura, agevolmente si comprende come alle formole teoriche non debbasi attribuire una generalità di cui non sono suscettive, e come i disaccordi debbano essere i risultati ordinarii che si possono attendere dalla loro verificazione sperimentale per deformazioni e per forze molecolari capaci di produrre la rottura.

106. **Formole convenienti al caso della flessione prodotta in un solido rettilineo da forze perpendicolari al suo asse e contenute nel piano passante per uno degli assi principali centrali d'inerzia di tutte le sezioni trasversali.** — In questo caso l'angolo $NG'y'$ (*fig.* 47), che al numero 88 venne chiamato φ, eviden-

temente è nullo, e quindi torna facile il dedurre le seguenti conseguenze:

1° Che il valore dell'angolo $x\,G'U = \psi$ dato dall'equazione (2) del numero 89 è anche nullo, per cui l'asse neutro U U diventa perpendicolare al piano di sollecitazione e con questo si confonde il piano di flessione;

2° Che le equazioni (2) e (3) del numero 90, ponendo $EI' = \varepsilon$, si riducono a

$$\varepsilon\frac{1}{\rho} = \mu \qquad (1),$$

$$\varepsilon\frac{d^2 u}{d z^2} = \mu \qquad (2),$$

nelle quali ε rappresenta il momento di flessibilità;

3° Che le equazioni (1) del numero 91, esprimenti le resistenze riferite all'unità di superficie che in una sezione qualunque e pel fatto della sola flessione debbono opporre le fibre maggiormente allungate e quelle maggiormente compresse, diventano

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \frac{v'\mu}{I'} \\ Q_2 &= \frac{v''\mu}{I'} \end{aligned}\right\} \quad (3);$$

4° Che le equazioni di stabilità dedotte dalle resistenze allo snervamento (num. 92) assumono le semplicissime forme

$$\left.\begin{aligned} m'Q' &= \frac{v'\mu_m}{I'} \\ m''Q'' &= \frac{v''\mu_m}{I'} \\ m^{IV}Q^{IV} &= \frac{N_m}{\Omega} \end{aligned}\right\} \quad (4);$$

5° Che lo stesso ha luogo per le equazioni di stabilità dedotte dalla resistenza alla rottura (num. 93), le quali risultano

$$\left.\begin{aligned} n' R' &= \frac{v' \mu_m}{I'} \\ n'' R'' &= \frac{v'' \mu_m}{I'} \\ n^{IV} R^{IV} &= \frac{N_m}{\Omega} \end{aligned}\right\} \quad (5).$$

107. Problemi sulla determinazione delle curve elastiche secondo cui si dispongono gli assi di solidi prismatici orizzontalmente disposti su non più di due appoggi, caricati di pesi e con sezioni trasversali simmetriche rispetto alle verticali passanti pei loro centri di superficie. — Fra i molteplici problemi che si possono risolvere considererò quelli che sono di uso più frequente nella pratica; esaminerò alcuni casi di solidi orizzontalmente incastrati per un estremo e di solidi orizzontalmente disposti sopra due appoggi senza e con incastramento; e per quanto spetta ai pesi producenti la flessione tratterò il caso in cui trovansi essi concentrati in dati punti e quello in cui sono uniformemente distribuiti lungo i prismi che li sostengono. La simmetria di tutte le sezioni trasversali rispetto alla verticale passante pei loro centri di superficie necessariamente rende soddisfatta la condizione di essere contenuto nel piano di sollecitazione uno degli assi principali centrali d'inerzia di ciascuna delle sezioni stesse, e quindi è l'equazione (2) del precedente numero quella che conduce alla risoluzione dei problemi che seguono.

I. *Trovare l'equazione della curva* AB (*fig.* 84) *secondo cui si dispone l'asse di un solido prismatico orizzontalmente incastrato pel suo estremo* A, *caricato d'un peso all'altro estremo* B *e di un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza.*

Si assuma il punto A, centro della sezione d'incastro, per origine delle coordinate, la orizzontale Az per asse positivo delle ascisse z e la verticale Au per asse positivo delle ordinate u. Si chiamino

a la distanza orizzontale $\overline{AB'}$ fra il centro A della sezione d'incastro ed il centro B dell'estrema sezione libera,

P il peso applicato in B,

p il peso costante distribuito su ogni unità di lunghezza del solido sottoposto a flessione,

z ed u le due coordinate $\overline{Am'}$ ed $\overline{m'm}$ di un punto qualunque della curva secondo cui si dispone l'asse del prisma incastrato a motivo della flessione prodotta dai pesi che il medesimo sopporta,

s la saetta o abbassamento $\overline{B'B}$ che subisce l'estremo del suo asse,

α l'angolo zTB che la tangente alla curva nel punto B fa coll'asse Az.

Il momento inflettente μ rispetto all'asse neutro della sezione trasversale che ha il suo centro nel punto m consta del momento $P(a-z)$ del peso P applicato all'estremo B e del momento $\frac{1}{2}p(a-z)^2$ del peso $p(a-z)$ che trovasi uniformemente distribuito sul tratto mB del solido considerato, il qual peso, atteso la piccola flessione subita dall'asse del solido, giacchè si suppone che le forze estrinseche non abbiano prodotto lo snervamento, si può considerare siccome applicato in un punto della verticale che passa per il mezzo dell'orizzontale m'B' e quindi a distanza $\frac{1}{2}(a-z)$ dal punto m. La somma dei momenti indicati, costituente il momento inflettente, deve fare il momento resistente alla flessione $\varepsilon\frac{d^2u}{dz^2}$, e quindi si ha la seguente equazione differenziale del secondo ordine della curva AB

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dz^2}=P(a-z)+\frac{1}{2}p(a-z)^2.$$

Essendo costante il momento di flessibilità ε, riesce facile l'integrare una prima volta quest'equazione e, determinando la costante in modo che per $z=0$ risulti $\frac{du}{dz}=0$, si ottiene

$$\varepsilon\frac{du}{dz}=P\left(az-\frac{1}{2}z^2\right)+\frac{1}{2}p\left(a^2z-az^2+\frac{1}{3}z^3\right).$$

Integrando una seconda volta ed osservando che per $z=0$ si ha $u=0$, si trova l'equazione della curva AB la quale si riduce a

$$\varepsilon u=P\left(\frac{1}{2}az^2-\frac{1}{6}z^3\right)+\frac{1}{2}p\left(\frac{1}{2}a^2z^2-\frac{1}{3}az^3+\frac{1}{12}z^4\right).$$

Per avere ora i valori di $\tang \alpha$ e di s basta porre nelle ultime due equazioni $z=a$ ed osservare che allora $\frac{du}{dz}$ ed u diventano rispettivamente eguali a $\tang \alpha$ e ad s, cosicchè si ha

$$\tang \alpha = \frac{a^2}{2\varepsilon}\left(\mathrm{P}+\frac{1}{3}pa\right) \qquad (1),$$

$$s=\frac{a^3}{\varepsilon}\left(\frac{1}{3}\mathrm{P}+\frac{1}{8}pa\right) \qquad (2).$$

In un prisma sottoposto a flessione sempre esiste il peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza, giacchè siccome tale va considerato il peso del prisma stesso. Quando però questo peso è piccolo in confronto del peso P si può trascurare ed allora, chiamando rispettivamente α' ed s' i valori che prendono l'angolo $\mathrm{BT}z$ e la saetta $\overline{\mathrm{BB}'}$ e facendo nelle equazioni (1) e (2) $p=0$, si ha

$$\tang \alpha' = \frac{\mathrm{P}a^2}{2\varepsilon},$$

$$s' = \frac{\mathrm{P}a^3}{3\varepsilon}.$$

Quando invece la flessione è solamente prodotta da un peso uniformemente distribuito sulla lunghezza del prisma, bisogna fare $\mathrm{P}=0$ nelle citate equazioni (1) e (2) ed i valori α'' ed s'' dell'angolo $\mathrm{BT}z$ e della saetta $\overline{\mathrm{BB}'}$ diventano

$$\tang \alpha'' = \frac{pa^3}{6\varepsilon},$$

$$s'' = \frac{pa^4}{8\varepsilon}.$$

Supponendo che ad uno stesso solido prismatico si applichi prima il peso P all'estremo B e poi lo stesso peso P uniformemente distribuito su tutta la sua lunghezza, la saetta corrispondente al primo caso è rappresentata dal valore di s' e quella del secondo caso dal valore di s'' ponendo in esso P invece di pa, e risulta quindi che il rapporto della prima saetta alla seconda è

$$\frac{s'}{s''}=\frac{8}{3}.$$

Ossia, che l'abbassamento subito dall'estremo libero del solido è nel caso del peso concentrato all'estremo assai maggiore di quello che si verifica quando lo stesso peso è uniformemente distribuito e che la quantità di cui si abbassa l'estremo B nel secondo caso è appena i 3/8 di quella che ha luogo nel primo.

II. *Trovare le equazioni delle curve* AB_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{m-1}B_m$ (*fig.* 85), *secondo le quali si dispone l'asse di un solido prismatico orizzontalmente incastrato pel suo estremo* A, *caricato di pesi nei punti* B_1, B_2, B_3, ..., B_{m-1}, B_m *e di un peso uniformemente distribuito su ciascuno dei tratti* AB_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{m-1}B_m$.

I dati del problema sono:

a_1, a_2, a_3, ..., a_m, ossia le distanze orizzontali che i punti B_1, B_2, B_3, ... e B_m hanno rispettivamente dai punti A, B_1, B_2, ... e B_{m-1}, le quali distanze per flessioni piccole quali sono quelle tollerabili nelle costruzioni si possono ritenere siccome sensibilmente eguali alle lunghezze dei tratti AB_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{m-1}B$ della curva AB_m secondo la quale si è disposto l'asse del solido;

P_1, P_2, P_3, ..., P_{m-1} e P_m, ossia i pesi applicati nei punti B_1, B_2, B_3, ..., B_{m-1} e B_m;

p_1, p_2, p_3, ... e p_m, ossia i pesi distribuiti su ogni unità di lunghezza dei tratti AB_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{m-1}B_m$ del solido sottoposto a flessione.

Assumendo A, centro della sezione d'incastro, per origine delle coordinate, l'orizzontale Az per asse delle ascisse e la verticale Au volta all'ingiù per asse delle ordinate, considerando nel solido una sezione qualunque per ciascuno dei tratti AB_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{m-1}B_m$ ed essendo m_1, m_2, m_3, ..., m_m i centri di superficie di queste sezioni e quindi i punti in cui si proiettano i corrispondenti assi neutri, facilmente si possono stabilire le equazioni differenziali del secondo ordine delle curve affettate dai detti tratti, giacchè producono un momento inflettente: i pesi P_1, P_2, P_3, ..., P_{m-1}, P_m ed i pesi uniformemente distribuiti sui tratti m_1B_1, B_1B_2, B_2B_3, ..., $B_{m-1}B_m$ per rapporto all'asse neutro rappresentato in m_1; i pesi P_2, P_3, ..., P_{m-1} e P_m ed i pesi uniformemente distribuiti sui tratti $m_2 B_2$, $B_2 B_3$, ..., $B_{m-1} B_m$ per rapporto all'asse neutro rappresentato in m_2; i pesi P_3, ..., P_{m-1}, P_m ed i pesi uniformemente distribuiti sui tratti $B_2 B_3$, ..., $B_{m-1} B_m$ per rapporto all'asse neutro rappresentato in m_3; .... ; e finalmente il peso P_m ed il peso uniformemente distribuito sul tratto $m_m B_m$ per rapporto all'asse neutro rappresentato in m_m.

Una volta stabilite le m equazioni differenziali del secondo ordine degli m tratti di cui componesi l'intiera curva AB_m, ciascuna di essa deve essere integrata due volte di seguito. Le integrazioni di quella relativa al tratto AB_1 vanno fatte in modo che per $z=0$ risultino $\frac{du}{dz}=0$ ed $u=0$. Ponendo $z=a_1$ nell'equazione che dà il valore di $\frac{du}{dz}$ ed in quella che dà il valore di u, si trovano la tangente trigonometrica dell'angolo α_1 che la tangente alla curva nel punto B_1 fa coll'asse delle z e l'ordinata $\overline{B_1'B_1}=s_1$ del punto B_1. Determinate le due quantità $\tan \alpha_1$ ed s_1, si passa all'integrazione dell'equazione differenziale del secondo ordine relativa al tratto $B_1 B_2$, si determinano le due costanti in modo che per $z=a_1$ i valori di $\frac{du}{dz}$ e di u risultino rispettivamente $\tan \alpha_1$ ed s_1 e, ponendo a_1+a_2 invece di z nelle espressioni di $\frac{du}{dz}$ e di u, si trovano la tangente trigonometrica dell'angolo α_2 che la tangente alla curva nel punto B_2 fa coll'asse delle z e l'ordinata $\overline{B_2'B_2}=s_2$. Così procedendo si ottiene l'espressione generale di $\frac{du}{dz}$ e di u per il tratto $B_2 B_3$ e si arriva a determinare la tangente dell'angolo α_3 della tangente nel punto B_3 coll'asse delle z e l'ordinata $\overline{B_3'B_3}=s_3$. Passando successivamente da uno all'altro tratto in cui trovasi divisa la curva $B_3 B_m$, si finisce col trovare l'equazione della curva $B_{m-1} B_m$, la tangente trigonometrica dell'angolo $B_m T z=\alpha_m$ e la saetta $\overline{B_m'B_m}=s_m$, e così si ha la completa risoluzione del problema.

III. *Trovare l'equazione della curva* AB (*fig.* 86) *secondo cui si dispone l'asse di un solido prismatico orizzontalmente collocato su due appoggi e caricato di un peso nel suo punto di mezzo* C *e di un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza.*

Si prenda nel punto A l'origine delle coordinate, l'asse delle ascisse orizzontale, l'asse delle ordinate verticale colla parte positiva volta all'ingiù, e si chiamino:

$2a$ la distanza $\overline{AB}$ dei due appoggi;

2P il peso applicato nel punto di mezzo C del solido;

p il peso costante distribuito su ogni unità della lunghezza $\overline{AB}$;

z ed u le due coordinate $\overline{Am'}$ ed $\overline{mm'}$ di un punto qualunque della curva AC;

s l'abbassamento $\overline{C'C}$ che pel fatto della flessione ha subito il mezzo C dell'asse del solido.

Supponendo che i due appoggi in A e B siano talmente fatti da aver luogo in ciascuno di essi una sola reazione verticale, nel presente caso, in cui tutte le forze applicate al prisma trovansi simmetricamente disposte rispetto al mezzo C′ della distanza dei due appoggi, ogni reazione è rappresentata da una forza $P+ap$ verticale e volta all'insù e le due parti CA e CB della curva secondo cui si è disposto l'asse del prisma dopo la flessione sono identiche, cosicchè determinata la prima parte CA di detta curva rimane anche determinata la seconda parte CB.

Il momento inflettente μ rispetto all'asse neutro della sezione trasversale avente il suo centro in m vale il momento $2P(a-z)$ del peso 2P applicato in C aumentato del momento $\frac{1}{2}p(2a-z)^2$ del peso $p(2a-z)$ uniformemente distribuito sul tratto m'B applicato nel mezzo di detto tratto e diminuito del momento $(P+ap)(2a-z)$ della reazione $P+ap$ applicata in B, cosicchè applicando l'equazione (2) del numero 106 e convenientemente riducendo, risulta

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dz^2}=-(P+pa)z+\frac{1}{2}pz^2.$$

Integrando quest'equazione, ed osservando che per $z=a$ si deve avere $\frac{du}{dz}=0$ a motivo della simmetria con cui trovansi disposte le forze estrinseche per rapporto al punto di mezzo C del solido sottoposto a flessione, si ha

$$\varepsilon\frac{du}{dz}=\frac{1}{2}(P+pa)(a^2-z^2)+\frac{1}{6}p(z^3-a^3).$$

Integrando una seconda volta, e determinando la costante colla condizione che per $z=0$ sia $y=0$, si ottiene l'equazione

$$\varepsilon u = \frac{1}{2}(P+pa)\left(a^2 z - \frac{1}{3}z^3\right) + \frac{1}{6}p\left(\frac{1}{4}z^4 - a^3 z\right),$$

la quale è l'equazione della curva AC.

La saetta $\overline{C'C} = s$ si ottiene facendo nell'ultima equazione $z = a$ ed $u = s$, e risulta

$$s = \frac{a^3}{3\varepsilon}\left(P + \frac{5}{8}pa\right).$$

Quando il peso uniformemente distribuito su tutta la lunghezza della trave è trascurabile in confronto del peso P applicato nel suo mezzo, la saetta $\overline{C'C}$ prende un valore s' espresso da

$$s' = \frac{Pa^3}{3\varepsilon}.$$

Se invece esiste il solo peso uniformemente distribuito sull'intiera lunghezza della trave e non il peso P applicato nel suo mezzo, la saetta $\overline{C'C}$ acquista un valore s'' dato dalla formola

$$s'' = \frac{5}{24}\frac{pa^4}{\varepsilon}.$$

Supponendo ora che la trave orizzontalmente collocata sui due appoggi A e B sia a sezione rettangolare, che siano rispettivamente m ed n la larghezza ossia il lato orizzontale e l'altezza di questa sezione, che il peso 2P si applichi dapprima nel mezzo C e che quindi si distribuisca uniformemente sulla lunghezza AB, siccome ε vale il coefficiente d'elasticità E moltiplicato per il momento d'inerzia I′ che nel caso della sezione rettangolare di lato orizzontale m e verticale n è $\frac{1}{12}mn^3$, bisogna fare nelle due espressioni di s' e di s''

$$\varepsilon = EI' = \frac{1}{12}Emn^3 \qquad pa = P,$$

ed allora esse diventano

$$s' = 4 \frac{P a^3}{E m n^3},$$

$$s'' = \frac{5}{2} \frac{P a^3}{E m n^3}.$$

Se poi si fa il rapporto della saetta s' alla saetta s'' si ha

$$\frac{s'}{s''} = \frac{8}{5}.$$

Dall'ultima espressione di s' si deduce che a circostanze eguali le saette prese da travi con sezione rettangolare, orizzontalmente collocate su due appoggi e caricate di un peso nel loro mezzo sono:

1° Proporzionali ai carichi che producono la flessione;

2° In ragione inversa della larghezza e del cubo dell'altezza della sezione trasversale;

3° Proporzionali ai cubi della distanza degli appoggi.

Dall'equazione la quale esprime il rapporto $\frac{s'}{s''}$ risulta che la saetta s'' prodotta da un carico uniformemente ripartito è i 5/8 di quella s' dovuta allo stesso carico posto nel mezzo della trave. Queste leggi, le quali vennero dedotte da formole teoriche stabilite sulla flessione dei solidi rettilinei, trovansi luminosamente confermate dalle esperienze di Carlo Dupin delle quali si è fatto un breve cenno al numero 104.

IV. *Trovare le equazioni delle due curve* AC *e* CB (*fig.* 87) *secondo le quali si dispone l'asse di un solido prismatico orizzontalmente collocato su due appoggi* A *e* B, *caricato d'un peso in un punto qualunque* C *della sua lunghezza, e di pesi uniformemente distribuiti su ciascuno dei tratti* AC *e* CB.

I dati del problema sono la distanza $AB = 2a$ dei due appoggi, il peso $2P$ applicato nel punto qualunque C della lunghezza della trave e la distanza orizzontale $\overline{AC'} = b$ di questo punto dal punto A assunto come origine delle coordinate, il peso costante p_1 distribuito su ogni unità di lunghezza di AC' ed il peso costante p_2 distribuito su ogni unità di lunghezza di $C'B$.

Chiamando rispettivamente R_1 ed R_2 le due reazioni verticali che gli appoggi esercitano in A ed in B contro gli estremi della trave, torna agevole il calcolarle mediante le due equazioni

$$2P+p_1 b+p_2(2a-b)-R_1-R_2=0$$

$$2Pb+\frac{1}{2}p_1 b^2+\frac{1}{2}p_2(4a^2-b^2)-2R_2 a=0$$

fornite dalla statica dei corpi solidi, la prima delle quali esprime che la somma algebrica delle forze verticali è nulla, e la seconda che la somma algebrica dei momenti di tutte queste forze rispetto al punto A è pure nulla. Una volta determinate le due reazioni R_1 ed R_2, ecco qual è il procedimento che conduce alla determinazione delle due curve AC e CB.

Si chiami α l'angolo che la tangente alla curva ACB nel punto C fa coll'asse delle z, ed s l'abbassamento $\overline{CC'}$ del punto C sotto l'orizzontale AB. Scrivasi l'equazione differenziale del secondo ordine conveniente alla parte AC dell'intiera curva AB prendendo per origine di coordinate il punto A, l'asse delle z orizzontale e quindi diretto secondo AB e l'asse delle u verticale volto all'ingiù; quest'equazione si integri due volte di seguito colla condizione che per $z=b$ risulti $\frac{du}{dz}=\operatorname{tang}\alpha$ e che per $z=0$ si abbia $u=0$; e nell'equazione finita fra le coordinate z ed u che così risulta si faccia $z=b$ onde ricavare il valore dell'ordinata $\overline{C'C}=s$. Fatto questo, scrivasi l'equazione differenziale del secondo ordine conveniente alla parte CB dell'intiera curva AB; si integri due volte di seguito colla condizione che per $z=b$ si abbia $\frac{du}{dz}=\operatorname{tang}\alpha$ e che per $z=2a$ risulti $u=0$; e nell'equazione fra le coordinate z ed u che così ottiensi si faccia $z=b$ per nuovamente ricavare il valore dell'ordinata $\overline{C'C}=s$. Si eguaglino fra loro i due valori di s e risulta un equazione fra i dati del problema e la tangente trigonometrica dell'angolo α la quale per tal modo rimane determinata. Il valore di tang α posto in una delle due espressioni della saetta s e nelle due equazioni fra le coordinate z ed u, l'una spettante al ramo AC e l'altro al rame CB, permette di trovare l'abbassamento s che pel fatto della flessione viene a subire il punto d'applicazione del peso 2P ed in pari tempo le due equazioni fra le coordinate z ed u degli accennati rami.

V. *Trovare l'equazione della curva* ACB (*fig.* 88) *secondo cui si dispone l'asse di un solido prismatico orizzontalmente incastrato alle sue estremità, caricato di un dato peso nel suo punto di mezzo* C *e d'un peso uniformemente distribuito su tutta la sua lunghezza.*

I dati di questo problema sono come quelli del problema III, e l'unica diversità che esiste fra l'uno e l'altro sta in ciò che i due appoggi posti in A ed in B, invece di essere due semplici punti fissi, sono incastramenti che mantengono orizzontali le tangenti alla curva ACB nei suoi estremi A e B. Si può ammettere che quest'effetto venga prodotto per mezzo di pressioni verticali discendenti esercitate sui prolungamenti del solido al di là delle sezioni fatte in A ed in B, sulle quali continuerebbero a svilupparsi delle reazioni verticali ascendenti. Se adunque si trasportano nel punto B tutte le pressioni esercitate verso l'estremità di destra, bisognerà aggiungere una coppia a queste forze trasportate, e la stessa cosa avrà luogo per l'appoggio di sinistra. Segue da ciò che le reazioni opposte dagli appoggi fatti in modo da produrre un incastramento orizzontale vengono sostituite da una forza verticale applicata in ciascuno dei due appoggi A e B e da una coppia il cui momento verrà indicato con M. In quanto alla forza verticale si osserva che, se il carico consiste in un peso 2P applicato nel mezzo del solido ed in un peso $2pa$ uniformemente ripartito su tutta la lunghezza $\overline{AB}$, è essa la medesima per ciascun appoggio ed eguale a $P+pa$. Il momento M della coppia si determina col metodo che immediatamente vado ad esporre.

Si prenda per origine delle coordinate il centro A della sezione d'incastro a sinistra, l'asse delle ascisse orizzontale e passante per conseguenza pel centro B dell'altra sezione d'incastro, l'asse delle ordinate verticale e volto all'ingiù. Essendo i pesi simmetricamente disposti rispetto al mezzo C del solido sottoposto a flessione, i due rami AC e BC dell'intiera curva ACB sono eguali per modo che basta occuparsi solo di uno di essi. Considerando nel solido una sezione trasversale qualunque il cui centro sia in m sul ramo AC, il momento inflettente μ rispetto all'asse delle fibre invariabili contenuto in questa sezione è lo stesso momento inflettente che venne cercato per risolvere il problema III aumentato del già definito momento M per cui l'equazione (2) del numero 106 diventa

$$\varepsilon \frac{d^2 u}{d z^2} = -(P+pa) z + \frac{1}{2} p z^2 + M \qquad (3).$$

Integrando quest'equazione in modo che per $z=0$ sia $\frac{du}{dz}=0$, si ottiene

$$\varepsilon\frac{du}{dz}=-\frac{1}{2}(\mathrm{P}+pa)z^2+\frac{1}{6}pz^3+\mathrm{M}z.$$

Ora, a motivo della simmetria con cui si trovano disposti i pesi rispetto al mezzo del solido, per $z=a$ deve essere $\frac{du}{dz}=0$, cosicchè risulta la seguente equazione determinatrice del momento M

$$0=-\frac{1}{2}\mathrm{P}\,a^2-\frac{1}{3}p\,a^3+\mathrm{M}a,$$

d'onde

$$\mathrm{M}=\frac{1}{2}\mathrm{P}\,a+\frac{1}{3}p\,a^2 \qquad (4).$$

Determinato il momento M, si può facilmente ottenere l'equazione della curva ACB. Perciò nell'espressione di $\varepsilon\frac{du}{dz}$ si sostituisca il trovato valore di M, e risulta

$$\varepsilon\frac{du}{dz}=-\frac{1}{2}(\mathrm{P}+p\,a)\,z^2+\frac{1}{6}p\,z^3+\left(\frac{1}{2}\mathrm{P}\,a+\frac{1}{3}p\,a^2\right)z,$$

la quale, integrata in modo che per $z=0$ sia $u=0$, conduce a trovare la seguente equazione della curva ACB

$$\varepsilon u=\frac{1}{24}p\,z^4-\frac{1}{6}(\mathrm{P}+p\,a)\,z^3+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{P}+\frac{1}{3}p\,a\right)a\,z^2.$$

L'abbassamento C′C$=s$ subìto dal mezzo C dell'asse del prisma sottoposto a flessione non è altro che il valore di u che ricavasi dall'ultima equazione quando in essa si ponga $z=a$, per cui si ha

$$s=\frac{a^3}{12\,\varepsilon}\left(\mathrm{P}+\frac{p\,a}{2}\right).$$

Se il peso uniformemente distribuito è trascurabile a fronte del peso P, la saetta $\overline{C'C}$ prende il valore s' espresso da

$$s' = \frac{P a^3}{12 \varepsilon},$$

il qual risultato, confrontato col valore di s' ottenuto nel risolvere il problema III riferentesi al caso di un solido non incastrato ma sibbene semplicemente collocato su due appoggi, porta a conchiudere che la saetta che prende un solido prismatico orizzontalmente incastrato alle due estremità e caricato d'un dato peso nel suo mezzo è appena 1/4 di quella che prenderebbe qualora lo stesso solido fosse semplicemente appoggiato.

Quando non esiste il peso applicato nel mezzo del solido ma soltanto il peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza, il valore s'' della saetta $\overline{C'C}$ è

$$s'' = \frac{p a^4}{24 \varepsilon},$$

ossia appena 1/5 della saetta che lo stesso solido prenderebbe qualora invece degli incastramenti vi fossero due semplici appoggi alle estremità.

Supponendo ora che il peso $p\,a$ uniformemente distribuito fra le due sezioni sia equivalente al peso P, in conseguenza di questa ipotesi facendo $p\,a = P$ nell'espressione di s'' e facendo quindi il rapporto di s' ad s'', si trova

$$\frac{s'}{s''} = 2,$$

ossia che la saetta o massima ordinata della curva secondo cui si è disposto l'asse del prisma nel caso del peso concentrato nel suo mezzo è doppia di quella che si verifica quando lo stesso peso è uniformemente distribuito.

Importa ora di studiare come varia in una sezione qualunque il momento inflettente μ, il quale non essendo altro che il secondo membro dell'equazione (5), quando si sostituisca ad M il suo valore dato dall'equazione (4), per una sezione qualunque di ascissa z vien dato da

$$\mu = \frac{1}{2} p z^2 - (P + p a) z + \frac{1}{2} P a + \frac{1}{3} p a^2.$$

Questa quantità, la quale è positiva per $z=0$ e negativa per $z=a$, diventa nulla per un valore z' di z compreso fra 0 ed a il quale facilmente può essere calcolato mediante l'equazione

$$\frac{1}{2} p z'^2 - (P + pa) z' + \frac{1}{2} P a + \frac{1}{3} p a^2 = 0 \qquad (5),$$

Per l'ascissa z' il momento inflettente μ diventa nullo e lo stesso succede del coefficiente differenziale $\frac{d^2 u}{d z^2}$, per cui la curva presenta un'inflessione nel punto D corrispondente a detta ascissa. I momenti inflettenti per le diverse sezioni comprese fra A e D sono tutti positivi e sono tutti negativi quelli per le sezioni comprese fra D e C. La curva ADC sarà dunque convessa verso l'asse delle z da A in D e concava invece da D in C, o in altri termini fra le diverse fibre del solido si troveranno allungate nel tratto AD quelle poste al di sopra dello strato delle fibre invariabili, ed accorciate quelle collocate al di sotto di detto strato, e precisamente il contrario avrà luogo per le fibre poste nel tratto DC.

Trascurando il peso uniformemente distribuito in confronto del peso applicato nel mezzo del solido sottoposto a flessione, il valore di z' dato dall'equazione (5) si riduce ad $\frac{a}{2} = 0{,}500\,a$; diventa invece $a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0{,}423\,a$ quando vi è il solo peso uniformemente distribuito; e questi due valori costituiscono due limiti fra i quali è compreso il detto valore di z' nel caso della simultanea esistenza del peso applicato nel mezzo e del peso uniformemente distribuito.

VI. *Trovare le equazioni delle due curve* AC *e* CB (*fig.* 89) *secondo le quali si dispone l'asse di un solido prismatico orizzontalmente incastrato in ciascuna delle sue estremità, caricato di un dato peso in un determinato punto* C *della sua lunghezza e di un peso uniformemente distribuito fra le due sezioni d'incastro.*

Conoscendosi la distanza orizzontale $\overline{AB}$ dei due appoggi, la distanza $\overline{AC}$ dal punto d'applicazione del peso concentrato nel punto C, il valore di questo peso ed i pesi costanti distribuiti su ogni unità di lunghezza di AC′ e di C′B, ecco l'indicazione succinta del metodo da tenersi onde arrivare alla completa risoluzione del problema. Suppongasi che gli incastramenti nei due punti A e B siano rispettivamente prodotti da due reazioni verticali R_1 ed R_2 congiunte a due coppie di momenti M_1 ed M_2. Prendendo per origine delle coordinate il centro della sezione d'incastro A, l'asse della z orizzontale e quindi diretto secondo AB, l'asse della u verticale volto all'ingiù, e partendo dall'equazione differenziale del secondo ordine relativa al ramo AC ed integrando quest'equazione due volte di seguito in modo che per $z=0$ siano $\frac{du}{dz}=0$ ed $u=0$, si trovino due equazioni esprimenti i valori di $\varepsilon\frac{du}{dz}$ ed εu per un punto qualunque del detto ramo e si ricavino da esse i valori di $\varepsilon\frac{du}{dz}$ e di εu corrispondenti al punto C. Formando dopo l'equazione differenziale del secondo ordine relativa al ramo CB si integri anche due volte di seguito e le due costanti si determinino in modo che per z eguale all'ascissa del punto C $\varepsilon\frac{du}{dz}$ ed εu siano quelli già determinati, considerando il detto punto siccome appartenente al ramo AC. I due valori di $\varepsilon\frac{du}{dz}$ e di εu che così si trovano si eguaglino a zero ponendo in essi l'ascissa del punto B, e così si ottengono due equazioni colle quali si possono calcolare R_2 e M_2 in funzione dei dati del problema. Ottenuti i valori di R_2 e di M_2, trovansi determinate le equazioni dei due rami AC e CB e riesce agevole il discutere i loro andamenti come si è fatto nel precedente problema.

Volendosi calcolare la reazione R_1 ed il momento M_1, si avrà ricorso alle due equazioni che vengono fornite dalla statica dei corpi solidi le quali risultano dal porre che la somma algebrica delle forze verticali applicate al solido deve esser nulla, e che la somma algebrica dei momenti di tutte queste forze e dei momenti M_1 e M_2 rispetto al punto A deve esser nulla.

VII. *Determinare le due curve* AC *e* CB (*fig.* 90) *secondo le quali si dispone l'asse di un solido prismatico orizzontalmente collocato su due appoggi, incastrato per un estremo ed appoggiato all'altro, caricato di un dato peso in un punto* C *della sua lunghezza e di un peso uniformemente distribuito su ciascuno dei due tratti* AC *e* CB.

I dati della quistione sono quelli stessi del problema precedente, ossia la distanza orizzontale $\overline{AB}$ dei due appoggi, la distanza orizzontale $\overline{AC'}$ fra il punto d'applicazione del peso concentrato nel punto C e la sezione d'incastro A, il valore di questo peso, e ciascuno dei due pesi costanti distribuiti sulle unità di lunghezza dei tratti AC' e $C'B$. Si tratta di determinare le reazioni R_1 ed R_2 applicate in A ed in B, il momento di una coppia M da unirsi alla forza R_1 per tener conto dell'incastramento, e le due equazioni delle due curve AC e CB rispetto ai due assi coordinati Az ed Au, passanti pel centro della sezione d'incastro, orizzontale il primo, verticale e volto all'ingiù il secondo.

Applicata l'equazione (2) del numero 106 per una sezione qualunque posta fra A e C, si integri la medesima due volte di seguito colle condizioni che per $z=0$ siano $\frac{du}{dz}=0$ ed $u=0$, e nelle due equazioni che così risultano si ponga per z l'ascissa $\overline{AC'}$ del punto C onde avere i due valori di $\varepsilon\frac{du}{dz}$ e di εu relativi al detto punto. Si venga dopo ad applicare la già citata equazione (2) del numero 106 per una sezione qualunque situata fra C e B ed integrando si determinino le due costanti in modo che per z eguale all'ascissa del punto C i valori di $\varepsilon\frac{du}{dz}$ e di εu siano quelli che già sonosi trovati considerando il punto C siccome appartenente al ramo AC. Il valore di εu così ottenuto si eguagli a zero ponendo in esso l'ascissa AB del punto B invece di z e si ottiene un'equazione la quale permette di determinare la reazione R_2. Il valore di R_2 posto nelle equazioni delle curve dei due rami AC e CB rende compiutamente determinati i coefficienti della variabile z che entra in queste equazioni le quali si prestano allora ad essere discusse.

La reazione R_1 ed il momento M si calcolano ponendo che la somma algebrica delle forze verticali applicate al solido sottoposto a flessione deve essere nulla, e che lo stesso deve succedere della somma algebrica dei momenti di tutte queste forze e del momento M rispetto al punto A.

108. **Problemi sulla determinazione delle sezioni pericolose, dei momenti inflettenti e degli sforzi di taglio massimi per solidi prismatici orizzontalmente disposti su non più di due appoggi e caricati di pesi.** — Due sono le sezioni pericolose da

considerarsi nei solidi prismatici omogenei sottoposti alla flessione prodotta da forze contenute in uno stesso piano passante pei loro assi ed a questi perpendicolari. La prima è quella per rapporto alla quale il momento inflettente μ acquista il maggior valore assoluto μ_m (num. 91); la seconda è quell'altra per cui la risultante N di tutte le forze applicate al solido fra essa sezione ed una delle due sezioni estreme, la qual forza è quella che tende a produrre lo scorrimento trasversale e che chiamasi anche *sforzo di taglio*, acquista pure il maggior valore assoluto N_m (num. 92).

I. *Determinare le sezioni pericolose, il momento inflettente e lo sforzo di taglio di maggior valore assoluto per un solido prismatico orizzontalmente incastrato pel suo estremo* A (*fig.* 84), *caricato di un peso all'estremo* B *e di un peso uniformemente distribuito su tutta la sua lunghezza.*

Essendo a la lunghezza orizzontale AB' del solido, P il peso applicato nel centro di superficie B della sua base estrema, e p il peso costante distribuito su ogni unità di lunghezza di AB; se si considera una sezione trasversale qualunque di centro m posta a distanza $\overline{Am'}=z$ dalla sezione d'incastro, il momento inflettente μ e lo sforzo di taglio N rispetto alla detta sezione nascono dalle forze applicate al tratto mB, le quali si riducono al peso P ed al peso uniformemente distribuito su mB, per cui si ha

$$\mu = P(a-z) + \frac{1}{2}p(a-z)^2$$

$$N = P + p(a-z).$$

Cercando ora qual è quel valore di z compreso fra 0 ed a al quale corrisponde il maggior valore di μ si trova che esso è 0. Si deduce da ciò che la sezione d'incastro è la sezione pericolosa per rapporto alla flessione, e che il valore di μ_m vien dato da

$$\mu_m = a\left(P + \frac{1}{2}pa\right).$$

Lo stesso valore $z=0$, cui corrisponde il maggior valore di μ, è pur quello cui corrisponde il maggior valore di N, cosicchè la sezione pericolosa per rapporto allo scorrimento trasversale è anche la sezione d'incastro, ed il valore di N_m risulta dalla formola

$$N_m = P + pa.$$

I valori di μ_m e di N_m si rendono adatti al caso in cui il peso uniformemente distribuito è trascurabile a fronte del peso applicato in B facendo in essi $p=0$; ed è facendo $P=0$ che si ottengono quelli che convengono al caso in cui esiste solamente il peso uniformemente distribuito.

II. *Determinare le sezioni pericolose, il momento inflettente e lo sforzo di taglio di maggior valore assoluto per un solido prismatico orizzontalmente collocato su due appoggi e caricato di un peso in un dato punto* C (*fig.* 87).

Se chiamansi

$2a$ la distanza orizzontale $\overline{AB}$ dei due appoggi,

2P la forza applicata nel punto C e

b la distanza orizzontale $\overline{AC'}$ fra l'appoggio A ed il detto punto, le reazioni R_1 ed R_2 prodotte dagli appoggi contro il solido che su essi trovasi orizzontalmente disposto vengono date dalle equazioni della statica dei corpi solidi applicate al detto solido. Una di queste equazioni è

$$2P-R_1-R_2=0$$

esprimente che la somma algebrica delle forze verticali è nulla, e l'altra

$$2Pb-2R_2a=0$$

la quale dice che la somma algebrica dei momenti di tutte le forze rispetto al punto A è pure nulla. Ricavando il valore di R_2 dalla seconda equazione si ha

$$R_2=\frac{Pb}{a},$$

e sostituendolo nella prima si deduce

$$R_1=\frac{P(2a-b)}{a}.$$

Considerando ora la parte di corpo compresa fra A e C, il momento inflettente μ_1 e la sforzo di taglio N_1 rispetto ad una sezione qualunque passante pel punto m_1 di ascissa $\overline{Am_1'}=z$ sono prodotti dalle forze applicate al solido nell'intervallo m_1B, le quali sono il peso $2P$ e la reazione R_2 sull'appoggio B, e quindi ammettono i valori

$$\mu_1 = 2P(b-z) - R_2(2a-z)$$

$$N_1 = 2P - R_2.$$

Considerando invece la parte di corpo compresa fra C e B, il momento inflettente μ_2 e lo sforzo di taglio N_2 rispetto ad una sezione qualunque passante per m_2 di ascissa $\overline{Am_2'} = z$ derivanti unicamente dalla reazione R_2, trovansi espressi da

$$\mu_2 = -R_2(2a-z)$$

$$N_2 = -R_2.$$

Per decidere a qual sezione trasversale del solido sottoposto a flessione corrisponde il momento inflettente μ_m di maggior valore assoluto si scrivano in altro modo i valori di μ_1 e di μ_2 ponendo

$$\mu_1 = -2P(z-b) + R_2(z-2a)$$

$$\mu_2 = +R_2(z-2a),$$

ed immediatamente risulta come tanto il massimo di μ_1 quanto quello di μ_2, il primo fra $z=0$ e $z=b$ ed il secondo fra $z=b$ e $z=2a$ corrispondano a $z=b$. Segue da ciò che la sezione pericolosa per rapporto alla flessione è quella corrispondentemente alla quale trovasi applicato il peso $2P$, e che per conseguenza il momento inflettente μ_m di maggior valore assoluto è quel valore assoluto particolare che prende μ_1 oppure μ_2 quando in uno di essi si faccia $z=b$. Ponendo nell'espressione di μ_1 l'ultimo indicato valore di z, eliminando R_2, convenientemente riducendo e tenendo soltanto conto del valore assoluto del secondo membro, si trova

$$\mu_m = P\frac{b(2a-b)}{a} \qquad (1).$$

Per ottenere il maggior valore assoluto N_m di N basta osservare che N_1 ed N_2 sono costanti, che i loro valori assoluti sono rispettivamente R_1 ed R_2, che R_2 è maggiore o minore di R_1 secondochè b è maggiore o minore di a, e che per conseguenza la sezione pericolosa relativamente allo scorrimento trasversale è una delle sezioni corrispondenti al minore dei due tratti CA e CB in cui l'asse ACB del solido vien diviso dal punto C cui trovasi applicato il peso 2P. Nel caso particolare della figura 87 si suppone che il punto d'applicazione C del peso 2P sia più vicino all'appoggio B anzichè all'appoggio A e quindi si ha

$$N_m = R_2 = \frac{Pb}{a} \qquad (2).$$

Allorquando il peso 2P trovasi applicato in un punto posto ad egual distanza fra A e B (*fig.* 86) la sezione di mezzo del solido è la sezione pericolosa relativamente alla flessione, e le due sezioni corrispondenti agli appoggi sono egualmente pericolose sotto il riguardo della rottura per scorrimento trasversale. In questo caso basta fare $b = a$ nelle equazioni (1) e (2) per avere i valori di μ_m e di N_m.

Il momento inflettente μ_m e lo sforzo di taglio N_m variano col cangiare della posizione del peso 2P ossia col variare di b. Il valore di μ_m, contenendo la distanza b soltanto al numeratore nel prodotto dei due fattori b e $2a-b$ i quali sono le due parti in cui la distanza $\overline{AB} = 2a$ dei due appoggi viene divisa dalla direzione del peso 2P, acquista il massimo valore quando $b = 2a - b$ ossia quando $b = a$. Il valore di N_m invece, trovandosi espresso dal solo fattore b moltiplicato per la costante $\frac{P}{a}$, prende il più gran valore quando si considera il peso 2P in quella posizione dell'intervallo compreso fra i due appoggi per la quale b ha il più gran valore, ossia quando $b = 2a$. Segue da ciò che per un solido prismatico orizzontalmente collocato su due appoggi e sul quale si muove un dato peso ha luogo il massimo valore del momento inflettente quando il peso trovasi a metà distanza dagli appoggi, il massimo valore dello sforzo di taglio quando il detto peso trovasi in una delle due sezioni d'appoggio.

III. *Determinare le sezioni pericolose, il momento inflettente e lo sforzo di taglio di maggior valore assoluto per un solido prismatico orizzontalmente collocato su due appoggi e caricato di un peso uniformemente distribuito nell'intervallo compreso fra gli appoggi stessi.*

Essendo $2a$ la distanza orizzontale AB (*fig.* 86) dei due appoggi e p il peso costante distribuito su ogni unità di lunghezza della accennata distanza AB, ciascuna delle due reazioni prodotte sul solido dagli appoggi vale pa. Il momento inflettente μ e lo sforzo di taglio N rispetto ad una sezione qualunque passante per m, derivando dal peso uniformemente distribuito su $\overline{m'B}=2a-z$ e dalla reazione prodotta dall'appoggio B, vengono espressi da

$$\mu=\frac{1}{2}p(2a-z)^2-pa(2a-z)$$

$$N=p(2a-z)-pa.$$

Ponendo ora il momento inflettente μ sotto la forma

$$\mu=\frac{1}{2}p(z-2a)^2+pa(z-2a)$$

ed osservando come per l'uniforme distribuzione dei carichi su AB la curva ACB debba essere simmetrica rispetto al suo mezzo C, agevolmente si riconosce come il momento inflettente μ debba avere il maggior valore per quella sezione della parte di solido di asse AC per la quale il valore di z ha il più gran valore, ossia per la sezione di mezzo. La sezione pericolosa sotto il rapporto della resistenza alla flessione è adunque quella posta ad egual distanza dagli appoggi, e quindi il maggior valore assoluto μ_m del momento inflettente si ottiene facendo $z=a$ nell'espressione di μ e trascurando il segno che esso prende, per cui

$$\mu_m=\frac{1}{2}pa^2 \qquad (3).$$

In quanto al valore massimo N_m dello sforzo di taglio, esso ha luogo quando l'ascissa z che entra in uno dei termini negativi dell'espressione generale di N diventa il più piccolo possibile ossia quando $z=0$. Cosicchè la sezione pericolosa sotto il rapporto della resistenza allo scorrimento trasversale è una delle due sezioni d'appoggio ed il più gran valore di N_m, il quale risulta dall'espressione generale di N ponendo in essa $z=0$, vien data da

$$N_m=pa.$$

Se nell'equazione (1) del precedente problema si fa $b=a$ si ha il valore assoluto del maggior momento inflettente nel caso di un solido prismatico orizzontalmente collocato su due appoggi caricato d'un peso 2P nel suo mezzo, e risulta Pa il valore di questo massimo momento inflettente. Supponendo ora che il peso 2P invece di essere applicato nel mezzo del solido prismatico sia uniformemente distribuito sulla distanza $2a$ degli appoggi, si ha $pa = P$, e quindi il secondo membro dell'equazione (3) esprimente il massimo valore assoluto del momento inflettente nel caso del peso uniformemente distribuito diventa $\frac{1}{2}Pa$, cosicchè sotto il riguardo del momento inflettente di maggior valore assoluto il peso uniformemente distribuito sull'intiera distanza degli appoggi fa lo stesso effetto della metà dello stesso peso concentrato nel mezzo.

IV. *Determinare le sezioni pericolose, il momento inflettente e lo sforzo di taglio di maggior valore assoluto per un solido prismatico orizzontalmente collocato su due appoggi e caricato di due pesi posti ad egual distanza dalla sua sezione di mezzo.*

La distanza $\overline{AB}$ (*fig.* 91) dei due appoggi A e B sia $2a$, P ciascuno dei due pesi applicati in D ed in E e b le distanze orizzontali eguali $\overline{AD'}$ e $\overline{BE'}$ dei loro punti d'applicazione dai punti A e B. L'asse del solido, sotto l'azione dei pesi P, si dispone secondo una curva ADCEB composta delle quattro parti AD, DC, CE ed EB; a motivo della simmetrica disposizione dei carichi rispetto al mezzo C, il ramo AD è identico al ramo BE ed il ramo CD al ramo CE; e quindi basta occuparsi dei due rami AD e CD giacchè gli altri due si trovano nelle medesime condizioni.

Ciò premesso, se considerasi una sezione qualunque il cui centro di superficie sia il punto m_1 di ascissa $\overline{Am_1'} = z$, il momento inflettente μ_1 rispetto a questa sezione, essendo quello causato dai due pesi P applicati uno in D e l'altro in E e dalla reazione che ha luogo in B di valore P, o altrimenti quello causato dall'unica reazione che si verifica in A pure di valore P, vien dato da

$$\mu_1 = -Pz;$$

e lo sforzo di taglio N_1 per la stessa sezione, somma algebrica delle forze applicate al solido da m_1 in B, ha per valore

$$N_1 = P.$$

Per una sezione qualunque invece appartenente al ramo DC col suo centro nel punto m_2 di ascissa $Am_2' = z$, il momento inflettente μ_2, essendo quello prodotto dal peso applicato in E e dalla reazione che si verifica in B, vale

$$\mu_2 = -Pb \qquad (4);$$

e lo sforzo di taglio N_2 ha un valore nullo giacchè tale è il valore della somma algebrica delle forze applicate al solido da m_2 in B.

Per stabilire qual è la sezione pericolosa sotto il riguardo della resistenza alla flessione, basta osservare che il maggior valore assoluto di μ_1 ha luogo per il massimo valore che può prendere l'ascissa z considerata siccome appartenente ad un punto della curva AD. Questo massimo di z si verifica per $z=b$, il valore assoluto del momento inflettente μ_1 diventa Pb e quindi eguale al maggior valore assoluto di μ_2 che si conserva costante per tutte le sezioni del solido aventi il loro centro sulla parte CD della curva ADCEB. Le due sezioni in D ed in C sono adunque due sezioni egualmente pericolose sotto il rapporto della flessione ed il valore assoluto μ_m del maggior momento inflettente è

$$\mu_m = Pb.$$

Tutte le sezioni del solido aventi i loro centri di superficie fra A e D e fra B ed E sono egualmente pericolose sotto il rapporto della resistenza allo scorrimento trasversale, giacchè per tutte queste sezioni lo sforzo di taglio conserva il valore assoluto P.

L'equazione (4) porta a conchiudere: come il momento inflettente μ_2, relativo ad una sezione qualunque avente il suo centro di superficie sulla curva DCE limitata dai punti d'applicazione dei pesi, sia costante; come, per quanto risulta dall'equazione (1) del numero 106, debbano essere costanti il momento resistente alla flessione ed il valore di ρ; e come per conseguenza la curva DCE debba essere un arco di circolo.

Se oltre i pesi applicati nei due punti D ed E esiste anche un peso uniformemente distribuito sulla lunghezza del solido, riesce facile il dimostrare come la sezione pericolosa relativamente alla flessione sia quella corrispondente al punto di mezzo C dell'asse del prisma inflesso, e come ambedue le sezioni corrispondenti agli appoggi A e B si debbano risguardare come pericolose sotto il rapporto della resistenza allo scorrimento trasversale.

V. *Determinare le sezioni pericolose, il momento inflettente e lo sforzo di taglio di maggior valore assoluto per un solido prismatico orizzontalmente collocato su due appoggi e caricato di un peso uniformemente distribuito su una data parte della sua lunghezza.*

La distanza orizzontale dei due appoggi sia $\overline{AB}=2a$ (*fig.* 92); b e b' rappresentino rispettivamente le distanze orizzontali $\overline{AD'}$ ed $\overline{AE'}$ dei due estremi D ed E della parte di solido su cui esiste il peso uniformemente distribuito; e sia p il peso costante distribuito su ogni unità di lunghezza di D′E′ ed anche di DE, giacchè, trattandosi di flessioni tollerabili nella pratica delle costruzioni, l'arco di curva DE può sempre essere risguardato siccome sensibilmente confondentesi colla sua proiezione orizzontale D′E′ sulla retta che unisce i due appoggi. Chiamando R_1 ed R_2 le reazioni prodotte in A ed in B dagli appoggi sui quali il solido trovasi collocato, si possono esse determinare applicando al corpo sottoposto a flessione le equazioni fornite dalla statica dei corpi solidi. Nel presente caso queste equazioni si riducono a

$$p(b'-b)-R_1-R_2=0$$

$$\frac{1}{2}p(b'^2-b^2)-2R_2a=0,$$

la prima delle quali esprime che è nulla la somma algebrica di tutte le forze applicate al corpo, e la seconda che è nulla la somma algebrica di tutte queste forze rispetto al punto A. Dalla seconda di queste equazioni si ricava

$$R_2=\frac{p(b'^2-b^2)}{4a}$$

e quindi dalla prima

$$R_1=\frac{p(b'-b)(4a-b'-b)}{4a}.$$

Ponendo in A l'origine delle z da valutarsi orizzontalmente da A verso B e chiamando μ_1, μ_2 e μ_3 i momenti inflettenti relativi a tre diverse sezioni qualunque aventi il loro centro di superficie, la prima in m_1 fra A e D, la seconda in m_2 fra D ed E e la terza in m_3 fra E e B, si trovano per espressioni dei detti momenti, considerandoli siccome prodotti dalle forze rispettivamente applicate al solido fra m_1 e B, fra m_2 e B e fra m_3 e B,

$$\mu_1 = p\,(b' - b)\left(\frac{b'+b}{2} - z\right) - R_2\,(2a - z)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}\,p\,(b' - z)^2 - R_2\,(2a - z)$$

$$\mu_3 = -R_2\,(2a - z).$$

Ponendo in questi valori di μ_1, μ_2 e μ_3 quello già trovato di R_2, si ottengono queste altre espressioni

$$\mu_1 = \frac{p(b'-b)(b'+b-4a)}{4a}\,z,$$

$$\mu_2 = \frac{p\,(b'-z)^2}{2} - \frac{p\,(b'^2-b^2)\,(2a-z)}{4a} \qquad (5),$$

$$\mu_3 = -\frac{p\,(b'^2-b^2)\,(2a-z)}{4a},$$

dalle quali risulta: che il più gran valore assoluto μ_1' di μ_1 ha luogo per il massimo valore che può prendere l'ascissa z considerata siccome appartenente ad un punto della curva AD e quindi per $z=b$; che il più gran valore assoluto μ_3' di μ_3 si verifica per il minimo valore che può avere l'ascissa z considerata come esprimente la distanza orizzontale di un punto qualunque della curva EB dall'origine A e quindi per $z=b'$; che, essendo

$$\frac{d\mu_2}{dz} = -p\,(b'-z) + \frac{p\,(b'^2-b^2)}{4a} \qquad (6),$$

il valore Z di z che corrisponde ad un massimo o ad un minimo di μ_2 è dato dall'equazione

$$-4a(b'-Z) + b'^2 - b^2 = 0$$

d'onde

$$Z = b' - \frac{b'^2-b^2}{4a} \qquad (7).$$

Il valore del momento inflettente che corrisponde al valore particolare Z di z si ottiene colla formola (5); ha esso il valore negativo

$$-\frac{1}{2}p(b'^2-b^2)\left(1+\frac{b'^2-b^2}{16a^2}-\frac{b'}{2a}\right);$$

e, siccome il $\frac{d^2\mu_2}{dz^2}$ che ricavasi dall'equazione (6) è la quantità positiva p, corrisponde esso ad un massimo e non ad un minimo.

Indicando con μ_2' il valore assoluto del massimo del momento inflettente μ_2, si deve decidere quale è la maggiore delle tre quantità μ_1', μ_2' e μ_3'. Si osservi perciò che μ_1' non è altro che il valore assoluto preso da μ_2 nel caso particolare di $z=b$; che μ_3' non è altro che il valore assoluto preso pure da μ_2 nel caso particolare di $z=b'$; e finalmente che essendo μ_1' e μ_3' due valori particolari di μ_2 ciascuno di quelli deve essere minore del massimo valore assoluto μ_2' di questo, per modo che la sezione pericolosa sotto il riguardo della flessione vien determinata dal valore di Z che ricavasi dall'equazione (7) ed il valore assoluto del maggior momento inflettente è

$$\mu_m=\mu_2'=\frac{1}{2}p\,(b'^2-b^2)\left(1+\frac{b'^2-b^2}{16a^2}-\frac{b'}{2a}\right).$$

Gli sforzi di taglio N_1, N_2 ed N_3 relativi alle sezioni trasversali aventi i loro centri di superficie nei punti m_1, m_2 ed m_3 sono

$$N_1=p(b'-b)-R_2=R_1$$

$$N_2=p\,(b'-z)-R_2$$

$$N_3=-R_2,$$

e, per essere l'ascissa z relativa ad un punto qualunque della curva DE maggiore di b, agevolmente si riconosce essere il valore assoluto di N_2 sempre minore dei valori assoluti di N_1 e di N_3. Per stabilire quale dei due valori assoluti di N_1 e di N_3 è il maggiore, basta osservare: che essi valgono rispettivamente le reazioni R_1 ed R_2; che R_2 è maggiore o minore di R_1 secondochè $\frac{b+b'}{2}$ è maggiore o minore di a; e che per conseguenza la sezione pericolosa relativamente allo scorrimento trasversale è una sezione della più corta delle due parti del solido sulle quali non trovasi il peso uniformemente distribuito. Nel caso della figura 92 in cui $\frac{\overline{AD'}+\overline{AE'}}{2}=\frac{b+b'}{2}$ è maggiore di $\frac{\overline{AB}}{2}=a$ la sezione pericolosa sotto il rapporto della resistenza allo scorrimento trasversale è una delle sezioni che hanno il loro centro di superficie sulla curva EB, e tutte le sezioni che si riferiscono a questo tratto di solido sono egualmente pericolose finchè si considera il solo peso distribuito uniformemente su DE. Il valore di N_m sarà adunque dato da

$$N_m=R_2=\frac{p(b'^2-b^2)}{4a}.$$

Allorquando il tratto DE sul quale esiste il peso uniformemente distribuito ha il suo mezzo in corrispondenza del mezzo C del prisma sottoposto a flessione, essendo $\overline{AD'}=\overline{BE'}$, fra b, b' e $2a$ si ha la relazione

$$b'=2a-b,$$

e quindi i valori di R_1, R_2, Z, μ_m ed N_m prendono rispettivamente i valori R_1', R_2', Z', μ_m' ed N_m' espressi da

$$R_1'=R_2'=p(a-b)$$

$$Z'=a$$

$$\mu_m'=\frac{1}{2}p\,(a^2-b^2)$$

$$N_m'=R_1=R_2=p(a-b).$$

Le due quantità μ_m ed N_m variano col variare della posizione del tratto DE sul quale esiste il sovraccarico. Per un solido prismatico orizzontalmente collocato su due appoggi e sul quale si muove un sovraccarico di data lunghezza uniformemente distribuito su questa, torna agevole il dimostrare: che il massimo valore del momento inflettente ha luogo nel mezzo del solido allorquando con questo mezzo coincide quello del sovraccarico; che il massimo dello sforzo di taglio si verifica in una delle sezioni d'appoggio appena un'estremità del sopraccarico la raggiunge.

VI. *Determinare le sezioni pericolose, il momento inflettente e lo sforzo di taglio di maggior valore assoluto per un solido prismatico orizzontalmente collocato su due appoggi e caricato di un peso uniformemente distribuito sulla superficie di un trapezio orizzontale avente la linea che divide per mezzo i due lati paralleli nel piano verticale passante per l'asse del solido.*

Si chiamino

$2a$ la distanza orizzontale $\overline{AB} = \overline{A_1 B_1}$ (*fig.* 93) dei due appoggi,

b la base $\overline{A_2 A_3}$ del trapezio su cui trovasi uniformemente distribuito il carico che gravita sul solido che si considera,

c la base $\overline{B_2 B_3}$ dello stesso trapezio,

q il peso costante distribuito su ogni unità di superficie del trapezio $A_2 A_3 B_3 B_2$,

R_1 ed R_2 le reazioni che gli appoggi in A ed in B esercitano sulle estremità del corpo sottoposto a flessione e

z la distanza orizzontale Am' del centro di superficie m di una sezione qualunque dall'origine A.

Il peso sopportato dal solido orizzontalmente collocato sui due appoggi A e B vale la superficie del trapezio $A_2 A_3 B_3 B_2$ moltiplicata per q, e quindi vien espresso da

$$a(b+c)q.$$

Questo peso poi trovasi applicato nel centro di superficie G_1 del detto trapezio e quindi la sua distanza $AG' = \overline{A_1 G_1}$ da A vale

$$\frac{2a}{3}\,\frac{b+2c}{b+c}.$$

Ponendo ora, come già si è fatto in altri problemi di questo numero e del numero precedente, le condizioni somministrate dalla statica dei corpi solidi, si hanno le seguenti equazioni determinatrici delle reazioni R_1 ed R_2

$$a(b+c)q - R_1 - R_2 = 0$$

$$\frac{2}{3}a^2(b+2c)q - 2aR_2 = 0,$$

dalle quali si ricavano i seguenti valori di R_2 e di R_1

$$R_2 = \frac{1}{3} a (b + 2c) q$$

$$R_1 = \frac{1}{3} a (2b + c) q.$$

Determinate così le due reazioni R_1 ed R_2 si passi alla ricerca del momento inflettente μ rispetto all'asse neutro della sezione qualunque avente in m il suo centro di superficie, e per far questo si incominci dal calcolare la lunghezza della retta $\overline{m_2 m_3}$ condotta nel trapezio parallelamente alle sue basi a distanza $\overline{A_1 m_1} = \overline{A m'} = z$ dal punto di mezzo A_1 della base $A_2 A_3$. Immaginando condotta per A_2 una retta $A_2 F_1$ parallela ad $A_3 B_3$, interseca essa la $m_2 m_3$ in H_1, risulta la retta $\overline{B_2 F_1} = c - b$ e quindi la retta $\overline{m_2 m_3} = b'$, che è la somma di $\overline{H_1 m_3} = b$ con $H_1 m_2 = \frac{c-b}{2a} z$, vien data da

$$b' = b + \frac{c-b}{2a} z \qquad (8).$$

Il peso insistente al trapezio $m_2 m_3 B_3 B_2$ ha per valore

$$\frac{1}{2} (b' + c)(2a - z) q;$$

il punto d'applicazione di questo peso, il qual punto si confonde col centro di superficie dell'or accennato trapezio, dista da m_1 della quantità

$$\frac{2a - z}{3} \; \frac{b' + 2c}{b' + c};$$

e quindi il momento inflettente μ, causato dal peso insistente alla parte di solido compresa fra la sezione passante per m e l'appoggio B e dalla reazione che il detto appoggio fa contro il solido, ha per valore

$$\mu = \frac{1}{6} (b' + 2c)(2a - z)^2 q - \frac{1}{3} a (b + 2c)(2a - z) q,$$

il quale, ponendo per b' il valore somministrato dalla (8) e riducendo, diventa

$$\mu = -\frac{1}{6} q\,(2az - z^2)\left(\frac{c-b}{2a} z + c + 2b\right) \quad (9).$$

Per trovare ora quel valore particolare Z di z il quale determina le sezione pericolosa bisogna fare il coefficiente differenziale di μ per rapporto a z ed eguagliarlo a zero. Così facendo si trova che l'equazione determinatrice di Z è

$$Z^2 + \frac{4ab}{c-b} Z - \frac{4a^2(2b+c)}{3(c-b)} = 0$$

dalla quale si ricava il seguente valore di Z

$$Z = \frac{2a}{c-b}\left(\sqrt{\frac{b^2+bc+c^2}{3}} - b\right).$$

Il valore assoluto μ_m del massimo momento inflettente si ottiene ponendo nella (9) μ_m invece di μ, Z invece di z e trascurando il segno meno che precede il secondo membro, e quindi si ha

$$\mu_m = \frac{1}{6} q\,(2aZ - Z^2)\left(\frac{c-b}{2a} Z + c + 2b\right).$$

Per quanto spetta agli sforzi di taglio è facile il vedere come essi variino per le diverse sezioni del solido e come per le due sezioni corrispondenti agli appoggi assumano valori più grandi di quelli che hanno per qualunque sezione intermedia. Queste due sezioni adunque sono le sezioni pericolose sotto il rapporto della resistenza allo scorrimento trasversale e, siccome i valori assoluti degli sforzi di taglio che ad esse si riferiscono sono le reazioni R_1 ed R_2, risulta che la vera sezione pericolosa è quella che corrisponde all'appoggio che produce la reazione maggiore, ossia quella che corrisponde all'appoggio posto verso la base maggiore del trapezio sul quale esiste il peso uniformemente distribuito. Nel caso della figura 93 R_2 è evidentemente maggiore di R_1 perchè c è maggiore di b, e quindi il valore assoluto N_m del più gran sforzo di taglio è

$$N_m = \frac{1}{3} a (b + 2c) q.$$

VII. *Determinare le sezioni pericolose, il momento inflettente e lo sforzo di taglio di maggior valore assoluto per un solido prismatico orizzontalmente incastrato alle sue due estremità, caricato di un dato peso nel suo punto di mezzo e d'un peso uniformemente distribuito su tutta la sua lunghezza.*

Nel problema V del precedente numero già si è detto come il momento inflettente μ rispetto alla sezione qualunque passante per m sia espresso dall'equazione

$$\mu = \frac{1}{2} p z^2 - (P + p a) z + \frac{1}{2} P a + \frac{1}{3} p a^2,$$

dove a è la semi-distanza orizzontale $\overline{AC'}$ (*fig.* 88) dei due appoggi, P la metà del peso applicato nel mezzo C della parte di solido compresa fra le due sezioni d'incastramento, p il peso costante distribuito su ogni unità della lunghezza di questa parte di solido, z l'ascissa $\overline{Am'}$ del centro di superficie m della sezione a cui si riferisce il momento inflettente μ. Questo momento, positivo per tutte le sezioni comprese fra il punto A ed il punto d'inflessione D la cui ascissa z' si determina mediante l'equazione (5) del citato problema, diventa negativo per le sezioni comprese fra D e C; per cui, diminuendo il suo valore dalla sezione corrispondente al punto A per diventar nullo nella sezione corrispondente al punto D e di nuovo crescendo in valore assoluto al di là di quest'ultima sezione per nuovamente diventar nullo nella sezione corrispondente al punto E posto da C ad una distanza orizzontale $\overline{C'E'} = \overline{C'D'}$, ammette esso i più grandi valori assoluti per $z = 0$ e per $z = a$ e questi valori sono

$$\frac{1}{2} P a + \frac{1}{3} p a^2$$

$$\frac{1}{2} P a + \frac{1}{6} p a^2$$

Di questi due valori il primo è evidentemente più grande del secondo, per cui, nel caso di un solido orizzontalmente incastrato alle sue estremità, caricato di un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza, le due sezioni d'incastro sono egualmente pericolose sotto il riguardo della resistenza alla flessione ed il valore di μ_m vien dato da

$$\mu_m = \frac{1}{2} P a + \frac{1}{3} p a^2 \qquad (10).$$

In quanto agli sforzi di taglio non danno essi luogo ad alcuna considerazione particolare: è facile il riconoscere come le due sezioni d'incastro siano pure egualmente pericolose sotto il rapporto della resistenza allo scorrimento trasversale e come si debba avere

$$N_m = P + p a.$$

Facendo nell'equazione (1) del problema II $b = a$ si ha che il valore assoluto del maggior momento inflettente per un solido prismatico orizzontalmente posto su due appoggi e caricato di un peso $2P$ nel suo mezzo è Pa. Facendo nell'equazione (10) $p = 0$ si ha che il valore assoluto del maggior momento inflettente per un solido prismatico orizzontalmente incastrato alle sue due estremità e caricato pure d'un peso $2P$ nel suo mezzo è $\frac{1}{2} P a$. L'incastramento adunque diminuisce il valor assoluto del maggior momento inflettente, e, nel caso di un solido orizzontalmente disposto e caricato nel suo mezzo, lo riduce alla metà di quello che avrebbe luogo per il solido semplicemente appoggiato.

Nel caso di un solido prismatico orizzontalmente appoggiato alle sue estremità e caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza, siccome risulta dall'equazione (5) del problema III, il valore assoluto del maggior momento inflettente, il quale si verifica nella sezione di mezzo, è $\frac{1}{2} p a^2$. Nel caso di un solido prismatico orizzontalmente incastrato alle sue due estremità e caricato pure d'un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza, come lo fa vedere l'equazione (10) quando in essa si faccia $P = 0$, il valore di μ_m, che ha luogo alla sezione d'incastramento, diventa $\frac{1}{3} p a^2$; e quindi nel caso di un solido orizzontalmente disposto e caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza l'incastramento riduce il valor assoluto del maggior momento inflettente ai $\frac{2}{3}$ di quello che avrebbe luogo per il solido semplicemente appoggiato.

Se nell'equazione (10) si fa $p=0$ si ha il maggior momento inflettente μ_m' per un solido prismatico orizzontalmente incastrato alle sue due estremità e caricato d'un peso $2P$ nel suo mezzo; se nella stessa equazione si pone $P=0$ si ha il maggior momento inflettente μ_m'' quando il solido è incastrato orizzontalmente alle sue estremità e caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza; ed i due valori di μ_m' e di μ_m'' risultano

$$\mu_m' = \frac{1}{2} P a$$

$$\mu_m'' = \frac{1}{3} p a^2.$$

Supponendo ora che il peso $2P$ invece di essere applicato nel mezzo del solido si trovi uniformemente distribuito sulla distanza $\overline{AB} = 2a$ dei due appoggi si ha $pa = P$ e quindi il valore di μ_m'' diventa $\frac{1}{3} P a$, cosicchè, per un solido orizzontalmente incastrato e sotto il riguardo del momento inflettente di maggior valore il peso uniformemente distribuito sull'intiera distanza dagli appoggi fa lo stesso effetto dei $\frac{2}{3}$ dello stesso peso concentrato nel mezzo.

109. Calcolo di una delle dimensioni della sezione trasversale di un solido prismatico omogeneo sottoposto a flessione. — Due casi convien considerare nell'esporre le norme che devono guidare il costruttore nella determinazione delle dimensioni della sezione trasversale di un solido prismatico ed omogeneo sottoposto a flessione: il caso in cui la sezione trasversale del corpo è simmetrica rispetto al suo asse neutro; ed il caso in cui questa simmetria non ha luogo. Nell'uno e nell'altro caso si risolve il problema applicando le equazioni di stabilità che vennero date al numero 92, oppure quelle del successivo numero 93. Le equazioni di stabilità del numero 92 convengono pei casi in cui si conoscono i coefficienti di snervamento per trazione, per pressione e per scorrimento trasversale; e le equazioni di stabilità del numero 93 si adoperano quando sono noti i coefficienti di rottura.

Verificandosi la simmetria della sezione trasversale del solido rispetto al suo asse neutro, con metodi e con ragionamenti analoghi a quelli tenuti nel risolvere i diversi problemi del precedente numero si cerchino i più grandi valori assoluti μ_m ed N_m dei momenti inflettenti e degli sforzi di taglio che hanno luogo nelle diverse sezioni del solido sotto l'azione delle forze le più sfavorevoli. A motivo della simmetria della sezione trasversale rispetto all'asse neutro i due valori di v' e di v'' sono eguali e quindi diventano identici i due secondi membri delle equazioni di stabilità relative alla flessione. Conoscendosi i coefficienti di rottura R' e R'', si osserva quale dei due è minore e, chiamando R_p il più piccolo degli accennati coefficienti, ed n il relativo coefficiente di stabilità, risultano le seguenti equazioni determinatrici di una delle dimensioni della sezione trasversale del solido considerato

$$\left.\begin{aligned} n R_p &= v' \mu_m \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{I'^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{I''^2}} \\ n^{IV} R^{IV} &= \frac{N_m}{\Omega} \end{aligned}\right\} (1),$$

nelle quali n^{IV}, R^{IV}, φ, I' I'' ed Ω hanno i significati che loro vennero attribuiti ai numeri 88, 92 e 93. Quando invece dei coefficienti di rottura sono noti i coefficienti di snervamento Q' e Q'', chiamando Q_p il più piccolo di questi coefficienti ed m il relativo coefficiente di stabilità, si cangia nelle due ultime equazioni nR_p in mQ_p ed $n^{IV}R^{IV}$ in $m^{IV}Q^{IV}$. Mediante le equazioni (2) si determina una stessa dimensione della sezione trasversale del solido e dei due valori trovati si assume il maggiore.

Quando la sezione trasversale di un corpo prismatico sottoposto a flessione non è simmetrica rispetto all'asse neutro si prenda, come al numero 90, l'asse del corpo per asse della z ed una retta ad esso perpendicolare contenuta nel piano di flessione per asse delle u, e si chiamino:

μ_m' il più gran momento inflettente positivo, prendendo per senso positivo quello di un momento che tende a far venire l'asse delle z positive su quello delle u positive;

μ_m'' il più gran valore assoluto dei momenti inflettenti negativi;

u' la più gran distanza dei diversi elementi della sezione trasversale del solido dall'asse neutro, essendo presi questi elementi dalla parte delle u negative, ossia da quella parte dello strato delle fibre invariabili in cui si trovano le fibre allungate dove il momento inflettente è positivo;

u'' la distanza massima analoga dalla parte delle u positive, ossia da quella parte dello strato delle fibre invariabili in cui si trovano le fibre accorciate dove il momento inflettente è pure positivo;

N_m il più gran valore assoluto dello sforzo di taglio.

Il momento inflettente $\mu_m{}'$ produce un'estensione dalla parte delle u negative ed una compressione dalla parte delle u positive, ed i valori massimi delle tensioni e delle pressioni riferite all'unità di superficie e sopportate rispettivamente dalle fibre maggiormente allungate e maggiormente compresse sono (num. 91)

$$u'\mu_m{}'\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}}$$

$$u''\mu_m{}'\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}}.$$

Analogamente il momento inflettente di valor assoluto $\mu_m{}''$ produce un'estensione dalla parte delle u positive ed una compressione dall'altra parte, ed i valori massimi delle tensioni e delle pressioni corrispondenti riferite all'unità di superficie sono

$$u''\mu_m{}''\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}}$$

$$u'\mu_m{}''\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}}.$$

Segue da ciò che nel caso in cui siano noti i coefficienti di rottura per estensione, per compressione e per scorrimento trasversale si devono risolvere le equazioni di stabilità

$$\left.\begin{array}{r}
n'R' = u'\mu_m' \sqrt{\dfrac{\cos^2\varphi}{I'^2} + \dfrac{\text{sen}^2\varphi}{I''^2}} \\[2ex]
n'R' = u''\mu_m'' \sqrt{\dfrac{\cos^2\varphi}{I'^2} + \dfrac{\text{sen}^2\varphi}{I''^2}} \\[2ex]
n''R'' = u''\mu_m' \sqrt{\dfrac{\cos^2\varphi}{I'^2} + \dfrac{\text{sen}^2\varphi}{I''^2}} \\[2ex]
n''R'' = u'\mu_m'' \sqrt{\dfrac{\cos^2\varphi}{I'^2} + \dfrac{\text{sen}^2\varphi}{I''^2}} \\[2ex]
n^{IV}R^{IV} = \dfrac{N_m}{\Omega}
\end{array}\right\} (2),$$

nelle quali basta cangiare $n'R'$ in $m'Q'$, $n''R''$ in $m''Q''$ ed $n^{IV}R^{IV}$ in $m^{IV}Q^{IV}$, quando invece dei coefficienti di rottura si conoscono i coefficienti di snervamento, e nelle quali alle lettere n', n'', n^{IV}, R', R'', R^{IV}, φ, I', I'', m', m'', m^{IV}, Q', Q'' e Q^{IV} bisogna conservare i significati che loro vennero attribuiti nei già citati numeri 88, 92 e 93. Mediante queste equazioni di stabilità, si trovano cinque diversi valori di quella dimensione della sezione trasversale del solido lasciata incognita, ed il maggiore di questi cinque valori è quello da adottarsi. In parecchi casi invece di risolvere cinque equazioni per determinare la dimensione incognita basta il risolverne tre, e questo avviene: quando i momenti inflettenti sono dello stesso stegno per tutte le sezioni del solido sottoposto a flessione; quando è possibile riconoscere quale dei due prodotti $u'\mu_m'$ e $u''\mu_m''$ è il maggiore, e quale è pure il maggiore dei due prodotti $u''\mu_m'$ ed $u'\mu_m''$. La prima, la terza e la quinta equazione sono quelle da risolversi allorquando tutti i momenti inflettenti sono positivi; la seconda, la quarta e la quinta sono quelle da considerarsi quando tutti questi momenti sono negativi; quella cui corrisponde il più grande dei due prodotti $u'\mu_m'$ ed $u''\mu_m''$, quella cui corrisponde il maggior degli altri due prodotti $u''\mu_m'$ ed $u'\mu_m''$, e finalmente la quinta costituiscono le tre equazioni da risolversi quando si può vedere quale per ciascuna delle due accennate coppie di prodotti è il maggiore, giacchè allora si tien conto della massima delle tensioni e della massima delle pressioni riferite all'unità di superficie le quali si verificano in tutta l'estensione del solido.

Tanto nel caso di un solido prismatico con sezione trasversale simmetrica rispetto all'asse delle fibre invariabili, quanto in quello in cui questa simmetrìa non ha luogo, le equazioni determinatrici di una dimensione della sezione trasversale, riferentisi alla flessione, notevolmente si semplificano allorquando il piano di sollecitazione contiene uno degli assi principali centrali d'inerzia di ogni sezione; giacchè, essendo allora $\varphi = 0$, le citate equazioni assumono la forma delle equazioni di stabilità che vennero date al numero 106.

110. **Disposizioni e forme più convenienti da assegnarsi alle sezioni trasversali dei solidi da impiegarsi per resistere alla flessione.** — Essendo ε il momento di flessibilità $\dfrac{E}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\varphi}{I'^2}+\dfrac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}}}$ (num. 90), il quale si riduce semplicemente ad EI' (num. 106) nel caso della flessione prodotta in un solido rettilineo da forze perpendicolari al suo asse e contenute nel piano passante per uno degli assi principali centrali d'inerzia di tutte le sezioni trasversali; e conservando alle lettere E, φ, I' ed I'' i significati che loro vennero attribuiti al numero 88, dall'equazione (2) del citato numero 90 si deduce

$$\mu = \varepsilon \frac{1}{\rho}.$$

Quest'equazione mostra come il momento inflettente μ atto a produrre una data flessione sia proporzionale al momento di flessibilità ε, e quindi ne deriva come fra due corpi prismatici, con sezioni trasversali di forma e dimensioni diverse od anche soltanto diversamente collocate e forniti di identiche o di differenti proprietà fisiche, sia capace di sopportare il maggior momento inflettente e quindi sia più utile ad essere impiegato per resistere alla flessione quello cui corrisponde il maggior momento di flessibilità. Ecco alcuni semplicissimi problemi diretti a far vedere come, mediante il calcolo dei momenti di flessibilità, possa il costruttore in ogni caso assegnare le posizioni e le forme più convenienti ai solidi che deve impiegare per resistere alla flessione.

I. *Una trave con sezione rettangolare si deve orizzontalmente collocare su due appoggi e caricare di pesi; si domanda se è più conveniente porla in opera tenendo verticale la dimensione minore oppure tenendo verticale la dimensione maggiore della sua sezione trasversale.*

Essendo a il lato minore e b il lato maggiore della sezione trasversale della trave, ponendola in opera col lato b verticale, il corrispondente momento di flessibilità ε_1 vien dato da

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{12} \mathrm{E} a b^3,$$

mentre ponendola in opera col lato a verticale, il relativo momento di flessibilità ε_2 si trova espresso da

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{12} \mathrm{E} a^3 b.$$

Il rapporto dei due momenti di flessibilità è

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{b^2}{a^2},$$

e, siccome $b^2 > a^2$, si ha $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$; cosicchè convien disporre la trave mantenendo verticale la maggiore delle due dimensioni della sua sezione trasversale.

II. *Trovare se per resistere alla flessione conviene di più impiegare un cilindro pieno oppure un cilindro vuoto della stessa materia e di sezione equivalente a quella del cilindro pieno.*

Chiamando r il raggio della sezione del cilindro pieno, r' ed r'' i raggi interno ed esterno del cilindro vuoto, ε_1 il momento di flessibilità relativo al primo solido ed ε_2 il momento di flessibilità relativo al secondo solido, siccome il piano di sollecitazione passa per gli assi principali centrali d'inerzia di tutte le sezioni si ha

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{4} \mathrm{E} \pi r^4$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{4} \mathrm{E} \pi (r''^4 - r'^4).$$

Il rapporto del momento di flessibilità ε_1 al momento di flessibilità ε_2 vien espresso da

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\frac{r^4}{r''^4-r'^4}=\frac{r^2 . r^2}{(r''^2+r'^2)(r''^2-r'^2)}$$

ossia ancora, per essere a motivo dell'equivalenza delle due sezioni del cilindro pieno e del cilindro vuoto

$$r''^2-r'^2=r^2,$$

da

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}=\frac{r''^2-r'^2}{r''^2+r'^2}.$$

Ora si ha evidentemente $r''^2-r'^2<r''^2+r'^2$ e quindi anche $\varepsilon_1<\varepsilon_2$, cosicchè il cilindro vuoto, essendo quello che ammette il maggior momento di flessibilità, resiste alla flessione meglio del cilindro pieno equivalente e di egual materia.

III. *Sopra due appoggi terminati superiormente da un piano inclinato all'orizzonte si deve collocare una trave in ferro destinata a sopportare un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza; si domanda se è più conveniente di fare questa trave con sezione rettangolare oppure con sezione a doppio* T *simmetrico.*

In questo caso il piano di sollecitazione non passa per gli assi principali centrali d'inerzia delle sezioni trasversali delle travi e quindi nel calcolo dei momenti di flessibilità bisogna adottare la formola

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{E}}{\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{\mathrm{I}'^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\mathrm{I}''^2}}}$$

Per la trave con sezione rettangolare, essendo α l'angolo BEO (*fig.* 94) del piano in cui sono contenuti i due appoggi coll'orizzonte, xx' ed yy' gli assi principali centrali d'inerzia di detta sezione, il primo parallelo ed il secondo perpendicolare all'accennato piano, I_1' ed I_1'' i valori particolari che prendono i momenti d'inerzia I' ed I'' nel caso della sezione proposta e GV la verticale passante pel centro di superficie G la quale fa l'angolo $\mathrm{V}\,\mathrm{G}y' = 360^0 - \varphi = \alpha$, il momento di flessibilità ε_1 vien espresso da

$$\varepsilon_1 = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\mathrm{I}_1'^2} + \frac{\mathrm{sen}^2 \alpha}{\mathrm{I}_1''^2}}}.$$

Per la trave con sezione a doppio T simmetrico di altezza $\overline{\mathrm{AD}}$ eguale e di superficie equivalente a quelle della sezione rettangolare, e collocata sugli stessi appoggi sui quali questa già si suppose collocata, essendo ancora l'asse principale centrale d'inerzia xx' parallelo ed il suo compagno yy' perpendicolare al piano degli appoggi e per conseguenza mantenendosi α l'angolo $360^0 - \varphi = \mathrm{V}\,\mathrm{G}y'$, il corrispondente momento di flessibilità ε_2 vien dato da

$$\varepsilon_2 = \frac{\mathrm{E}}{\sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\mathrm{I}_2'^2} + \frac{\mathrm{sen}^2 \alpha}{\mathrm{I}_2''^2}}},$$

esprimendo rispettivamente I_2' ed I_2'' i momenti d'inerzia della sezione a doppio T per rapporto agli assi xx' ed yy'.

Ora, a parità di superficie e di altezza nelle sezioni delle due travi, i momenti d'inerzia I_2' ed I_2'' della sezione a doppio T sono evidentemente maggiori dei corrispondenti momenti d'inerzia I_1' ed I_1'' della sezione rettangolare, giacchè le superficie di queste sezioni si possono considerare siccome composte di un egual numero di elementi superficiali i quali, più nella prima che nella seconda, trovansi distanti dagli assi per rapporto a cui si prendono i momenti. Si può adunque dire: che $\mathrm{I}_2' > \mathrm{I}_1'$ e che $\mathrm{I}_2'' > \mathrm{I}_1''$; che

$$\sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\mathrm{I}_2'^2} + \frac{\mathrm{sen}^2 \alpha}{\mathrm{I}_2''^2}} < \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\mathrm{I}_1'^2} + \frac{\mathrm{sen}^2 \alpha}{\mathrm{I}_1''^2}};$$

che $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$; e che finalmente una trave con sezione a doppio T simmetrico è più conveniente per resistere alla flessione di una trave con sezione rettangolare della stessa materia, di egual altezza e della medesima superficie.

111. Applicazione della teoria sulla resistenza alla flessione alla risoluzione di alcuni semplici problemi. — I. *Una trave* *in ghisa avente sezione rettangolare coi lati di metri* 0,08 *e di metri* 0,10 *venne orizzontalmente collocata su due appoggi posti a distanza di* 4 *metri e caricata del peso di chilogrammi* 400 *nel suo mezzo. Trovare il coefficiente d'elasticità della ghisa costituente la detta trave nell'ipotesi che siasi verificato un abbassamento di metri* 0,01 *nel mezzo dell'asse del solido disposto colla massima dimensione della sua sezione trasversale verticale e che il peso del decimetro cubo di ghisa sia di chilogrammi* 7,202.

Il peso applicato nel mezzo della trave ed il peso della trave stessa, il quale uniformemente si trova distribuito nella sua lunghezza, costituiscono le forze che hanno prodotta la flessione, e l'equazione mediante la quale si deve calcolare il coefficiente di elasticità è

$$s = \frac{a^3}{3\varepsilon}\left(\mathrm{P} + \frac{5}{8}pa\right) \qquad (1),$$

già trovata risolvendo il problema III del numero 107 ed esprimente la saetta s che prende nel mezzo un solido prismatico orizzontalmente collocato su due appoggi distanti $2a$ caricato di un peso $2\mathrm{P}$ nel suo mezzo e di un peso uniformemente distribuito in ragione di p chilogrammi per ogni unità della sua lunghezza. Prendendo il metro per unità di lunghezza, il chilogramma per unità di forza, osservando che p deve esprimere in chilogrammi il peso di una parte di trave lunga l'unità e rammentando che ε vale il coefficiente d'elasticità E moltiplicato per il momento di inerzia I′, si ha:

$$2a = 4^{\mathrm{m}}, \quad a = 2^{\mathrm{m}}, \quad s = 0^{\mathrm{m}},01, \quad 2\mathrm{P} = 400^{\mathrm{Cg}}, \quad \mathrm{P} = 200^{\mathrm{Cg}},$$

$$p = 7,202 \times 10 \times 1 \times 0,8 = 57^{\mathrm{Cg}},616;$$

$$\mathrm{I}' = \frac{1}{12}\,0,08 \times (0,10)^3 = \frac{0,00002}{3}, \qquad \varepsilon = \frac{0,00002}{3}\,\mathrm{E}.$$

Ponendo i valori di a, s, P, p ed ε nell'equazione (1) risulta

$$0,001 = \frac{2^3}{3\,\frac{0,00002}{3}\,\mathrm{E}}\left(200 + \frac{5}{8}\,57,616 \times 2\right)$$

d'onde si ricava

$$E = 10880800000^{Cg},$$

cosicchè il domandato coefficiente d'elasticità riferito al metro quadrato è di chilogrammi 10880800000, ossia di chilogrammi 10880 quando si riferisce al millimetro quadrato.

II. *Trovare qual è la saetta che prende nel suo mezzo una trave in ferro orizzontalmente collocata su due appoggi posti a distanza di* 8 *metri, avente sezione costante a doppio* T *simmetrico le cui dimensioni* $\overline{AB}$, $\overline{EF} = \overline{KI}$, $\overline{BC}$ *ed* $\overline{EH}$ (*fig.* 59) *sono rispettivamente metri* 0,12, *metri* 0,055, *metri* 0,32 *e metri* 0,30, *e caricata d'un peso uniformemente distribuito in ragione di* 200 *chilogrammi per ogni metro della sua lunghezza.*

Due sono le forze le quali concorrono a produrre flessione nella trave, il peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza ed il peso proprio della trave medesima, e questi due pesi, considerati nell'intervallo fra i due appoggi, costituiscono un peso unico il quale va risguardato siccome uniformemente distribuito sulla lunghezza del solido pel quale devesi determinare la saetta s'' usando della formola

$$s'' = \frac{5}{24} \frac{p\, a^4}{\varepsilon} \tag{2}$$

già trovata risolvendo il problema III del numero 107.

Prendendo il metro per unità di lunghezza, il metro quadrato per unità di superficie, il chilogramma per unità di forza ed assumendo chilogrammi 7,77 siccome esprimenti il peso del decimetro cubo di ferro, la superficie della sezione della trave è data da

$$\overline{AB} \times \overline{BC} - (\overline{EF} + \overline{KI})\overline{EH} = 0{,}12 \times 0{,}32 - 0{,}11 \times 0{,}30 = 0^{mq},0054,$$

e quindi il peso della sua unità di lunghezza vale

$$0{,}54 \times 10 \times 7{,}77 = 41^{Cg},958.$$

Essendo poi

$$2a = 8^m \qquad\qquad a = 4^m,$$

$$p = 200 + 41{,}958 = 241^{Cg},958,$$

$$I' = \frac{1}{12}\left[0,12 \times (0,32)^3 - 0,11 \times (0,30)^3\right] = 0,00008,$$

$$E = 18492000000 \qquad \varepsilon = EI' = 1479360,$$

l'espressione di s'' dà

$$s'' = \frac{5}{24}\,\frac{241,958 \times 4^4}{1479360} = 0^m,0087\,;$$

cosicchè il mezzo dell'asse della trave per il fatto della flessione verrà a trovarsi di metri 0,0087 sotto la orizzontale passante pei due punti in cui quest'asse è incontrato dalle sezioni corrispondenti ai due appoggi.

III. *Una trave di larice rosso lunga* 6 *metri ed avente sezione rettangolare i cui lati* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$ (*fig.* 96) *devono stare fra loro come* 4 *a* 5 *va collocato su due appoggi colle loro superficie superiori poste in un piano* EF *inclinato all'orizzonte di un angolo* FEO = 25° *e caricata di un peso uniformemente distribuito in ragione di* 200 *chilogrammi per ogni metro della sua lunghezza. Determinare la direzione dell'asse neutro e trovare i due lati da assegnarsi alla sezione trasversale della trave affinchè abbia essa la necessaria stabilità.*

Se chiamasi x la lunghezza del lato $\overline{AB}$ espressa in metri, vien data da $\frac{5}{4}x$ quella del lato $\overline{BC}$; ed immaginando condotte pel centro G del rettangolo le direzioni xx' ed yy' degli assi principali centrali d'inerzia, la prima delle quali è parallela e la seconda perpendicolare al lato AB, i momenti d'inerzia I' ed I'' rispetto a questi assi sono rispettivamente

$$I' = \frac{1}{12}x.\left(\frac{5}{4}x\right)^3 = \frac{25}{16}\frac{5}{48}x^4$$

$$I'' = \frac{1}{12}x^3.\frac{5}{4}x = \frac{5}{48}x^4.$$

Osservando ora che la traccia del piano di sollecitazione sopra il piano della sezione ABCD è la retta verticale GV, si ha che l'angolo $VGy' = \varphi$ è eguale all'angolo $FEO = 25°$ e che quindi l'angolo $UGx = \psi$ che l'asse neutro UU fa coll'asse delle x, il qual angolo vien dato dall'equazione (1) del numero 89, ammette il valore deducibile dall'equazione

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{25}{16}\operatorname{tang} 25^\circ,$$

d'onde

$$\psi = 36^\circ 4' 38''.$$

Per trovare quali lati deve avere la sezione trasversale della trave affinchè essa presenti la necessaria stabilità basta osservare che i due valori di v'' e di v', i quali sulla figura trovansi rispettivamente rappresentati dalle due perpendicolari $\overline{CH}$ ed $\overline{AI}$ abbassate dai due vertici C ed A sull'asse neutro UU, sono eguali fra di loro e che quindi servono le equazioni (1) del numero 109. Siccome $R'' = 4500000^{Cg}$ è minore di $R' = 8500000^{Cg}$ (numeri 34 e 17) si ha

$$R_p = 4500000^{Cg};$$

si può assumere come coefficiente di rottura per scorrimento trasversale (numero 76)

$$R^{IV} = 1300000^{Cg},$$

e come valore dei coefficienti di stabilità (num. 40 e 79)

$$n = n^{IV} = \frac{1}{10}.$$

I valori di R_p e di R^{IV} sono riferiti al metro quadrato.

In quanto ai valori μ_m e di N_m sono quelli che vennero trovati risolvendo il problema III del numero 108, quando in essi si faccia

$$a = \frac{6}{2} = 3^m, \qquad p = 200^{Cg},$$

e quindi ammettono i valori numerici

$$\mu_m = \frac{1}{2} 200 \times 3^2 = 900,$$

$$N_m = 200 \times 3 = 600^{Cg}.$$

Per esprimere il valore di v' in funzione dei dati del problema e dell'incognita x, dal punto L in cui la retta xx' taglia il lato BC si conducano le due rette LK ed LM, la prima parallela e la seconda perpendicolare all'asse neutro. Dalla figura risulta

$$\overline{CH} = \overline{CK} + \overline{LM},$$

e, siccome $\overline{GL} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}x$, $\overline{CL} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{5}{8}x$ e $BCK = UGx = \psi = 36^\circ\,4'\,38''$, dai triangoli rettangoli CKL e GML si hanno i seguenti valori di $\overline{CK}$ e di $\overline{LM}$

$$\overline{CK} = \frac{5}{8} x \cos 36^\circ 4' 38''$$

$$\overline{LM} = \frac{1}{2} x \operatorname{sen} 36^\circ 4' 38'',$$

i quali posti nell'espressione di $\overline{CH}$ conducono ad ottenere

$$\overline{CH} = v' = \frac{1}{2} x \left(\frac{5}{4} \cos 36^\circ\, 4' 38'' + \operatorname{sen} 36^\circ\, 4' 38'' \right) = 0{,}7996x.$$

La superficie Ω della sezion retta della trave sottoposta a flessione è espressa da

$$\Omega = x . \frac{5}{4} x = \frac{5}{4} x^2;$$

e finalmente la quantità $\sqrt{\frac{\cos^2 \varphi}{I'^2} + \frac{\operatorname{sen}^2 \varphi}{I''^2}}$ che trovasi nel secondo membro della prima delle equazioni di stabilità (1) del numero 109 vale

$$\sqrt{\frac{\cos^2 25^\circ}{\left(\frac{25}{16}\cdot\frac{5}{48}x^4\right)^2}+\frac{\operatorname{sen}^2 25^\circ}{\left(\frac{5}{48}x^4\right)^2}}=\frac{48}{5}\frac{1}{x^4}\sqrt{\frac{256}{625}\cos^2 25^\circ+\operatorname{sen}^2 25^\circ}$$

$$=6{,}8897\frac{1}{x^4}.$$

Sostituendo nelle citate equazioni di stabilità i valori di n, n^{IV}, R_p, R^{IV}, μ_m, N_m, v', Ω, e $\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'}+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}}$, si hanno le seguenti equazioni determinatrici di due distinti valori di x, il maggiore dei quali sarà quello da adottarsi affinchè sotto tutti i rapporti si abbia la necessaria stabilità,

$$\frac{1}{10}4500000=0{,}7996\,x.900\times 6{,}8897\frac{1}{x^4}$$

$$\frac{1}{10}1300000=\frac{600}{\frac{5}{4}x^2}$$

Risolvendo la prima equazione trovasi

$$x=0^{\text{m}},2225$$

e risolvendo la seconda risulta

$$x=0^{\text{m}},061\,;$$

cosicchè il valore di x ricavato dalla seconda equazione di stabilità è quello che determina il lato $\overline{AB}$ da assegnarsi alla sezione trasversale della trave, il quale, in conformità del risultato ottenuto, deve essere di metri 0,2225. Il lato $\overline{BC}$ poi, dovendo essere i 5/4 di $\overline{AB}$, ammette il valore di metri 0,2781.

IV. *Determinare lo spessore da assegnarsi alla tavola superiore ed alla tavola inferiore di una trave in ferro con sezione a doppio* T *simmetrico ed a parete continua, orizzontalmente collocata su due appoggi distanti fra di loro di 40 metri, in modo da essere orizzontale l'asse principale centrale d'inerzia* XX′ (*fig.* 62), *caricata di un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza in ragione di*

5000 *chilogrammi per ogni metro e della cui sezione trasversale si conoscono le seguenti dimensioni:*

$$\overline{AB}=a=0^m,40,\ \overline{Ic}+\overline{Fd}=a'=0^m,145,$$

$$\overline{gl}+\overline{hm}=a''=0^m,21,\ \overline{pt}+\overline{qu}=a'''=0^m,03;$$

$$\overline{cf}=b'=4^m,\ \overline{lo}=b''=3^m,97,\ \overline{tz}=b'''=3^m,76.$$

Per la disposizione che ha la trave sui suoi appoggi il piano di sollecitazione passa per uno degli assi principali centrali d'inerzia delle sue sezioni trasversali; per la simmetrìa di ciascuna delle dette sezioni rispetto agli assi neutri loro corrispondenti i due valori di v' e di v'' sono eguali; e quindi si risolve il problema applicando le equazioni (1) del numero 109 semplificate, col porre $\varphi=0$. Assumendo il metro per unità di lunghezza, il metro quadrato per unità di superficie ed il chilogramma per unità di forza, siccome $R''=25000000^{Cg}$ è minore di $R'=40000000^{Cg}$ (num. 34 e 17), si ha

$$R_p=25000000^{Cg},$$

e (num. 76)

$$R^{IV}=\frac{4}{5}R'=32000000^{Cg}.$$

I coefficienti di stabilità n ed n^{IV} si possono prendere eguali ed espressi da (num. 40 e 79)

$$n=n^{IV}=\frac{1}{6}.$$

Chiamando x la somma dei due spessori eguali $\overline{FB}$ e $\overline{GC}$, le due distanze eguali v' e v'' delle fibre maggiormente allungate e maggiormente accorciate dall'asse neutro xx' ammettono il valore espresso da

$$v'=v''=\frac{1}{2}\overline{cf}+\overline{GC}=\frac{1}{2}(4+x).$$

Il momento d'inerzia della superficie della sezione trasversale, che è il valore che prende il momento d'inerzia I' trovato risolvendo il problema VI del numero 97 quando in esso si pongano i valori noti di a, a', a'', a''', b', b'' e b''' e quando si faccia

$$b = b' + x = 4 + x,$$

vien dato da

$$I' = \frac{1}{12}\Big[0{,}40\,(4+x)^3 - 0{,}145 \times 4^3 - 02{,}1 \times (3{,}97)^3 - 0{,}03 \times (3{,}76)^3\Big],$$

ossia, riducendo ad un solo tutti i termini cogniti, da

$$I' = \frac{1}{12}\Big[0{,}40\,(4+x)^3 - 24{,}0146\Big].$$

La superficie Ω, che si ottiene togliendo dalla superficie del rettangolo ABCD quelle dei rettangoli *cIMf* e *dFGe*, *lgko ed mhin*, *tpsz ed uqrv*, vien data da

$$\Omega = 0{,}40\,(4+x) - 0{,}145 \times 4 - 0{,}21 \times 3{,}97 - 0{,}03 \times 3{,}76$$

ossia ancora da

$$\Omega = 0{,}40\,(4+x) - 1{,}5265.$$

Per quanto spetta ai valori di μ_m e di N_m si ottengono essi colle formole che vennero trovate risolvendo il problema III del numero 108 e facendo in queste formole

$$a = \frac{40}{2} = 20^m, \qquad p = 5000^{Cg},$$

per cui si ha

$$\mu_m = \frac{1}{2}\,5000 \times 20^2 = 1000000$$

$$N_m = 5000 \times 20 = 100000.$$

I valori di n, n^{IV}, R_p, R^{IV}, v', I', Ω, μ_m ed N_m si sostituiscano nelle equazioni (1) del numero 109 dopo di aver fatto in esse $\varphi = 0$ e si ottiene

$$\frac{1}{6}25000000=\frac{\frac{1}{2}(4+x)1000000}{\frac{1}{12}\left[0,40\,(4+x)^3-24,0146\right]}$$

$$\frac{1}{6}32000000=\frac{100000}{0,40(4+x)-1,5265}.$$

La prima di queste equazioni si riduce a

$$(4+x)^3=3,6\,(4+x)+60,0365$$

d'onde

$$4+x=4^m,222$$

ed

$$x=0^m,222;$$

cosicchè, complessivamente considerando le due tavole superiore ed inferiore, devono esse presentare, affinchè la trave sia abbastanza stabile sotto il rapporto della resistenza alla flessione, uno spessore totale di metri 0,222 ed aver quindi ognuna delle due lo spessore di metri 0,111. Dalla seconda equazione si ricava

$$4+x=3^m,863$$

d'onde

$$x=-0^m,137,$$

risultato il quale essendo negativo significa che per avere nella trave la sufficiente stabilità sotto il rapporto della resistenza allo scorrimento trasversale non sono necessarie le due tavole ABFI e DCGM, e che la lastra verticale ed i ferri d'angolo danno già un eccesso di stabilità sotto questo riguardo.

112. Solidi omogenei ad asse rettilineo e di egual resistenza alla flessione. — Al numero 91 vennero trovati pei solidi prismatici sottoposti a flessione i valori della resistenza alla trazione Q_1 e della resistenza alla pressione Q_2 riferite all'unità di superficie ed opposte rispettivamente dalle fibre maggiormente allungate e da quelle maggiormente compresse, e si fece osservare come i valori di queste resistenze variino crescendo o diminuendo da una sezione all'altra col crescere o col diminuire del momento inflettente μ. Segue da ciò che assegnando ad un solido prismatico il quale si deve impiegare per resistere alla flessione una sezione trasversale di superficie eguale a quella che vale ad ottenere la necessaria stabilità nella sezione cui corrisponde il più gran valore assoluto μ_m del momento inflettente μ, in tutte le altre sezioni si ha un eccesso di stabilità coll'inconveniente di materia sprecata, e che quindi i solidi rettilinei a sezione trasversale costante non sono i più convenienti ad essere impiegati per resistere alla flessione. Esprimendo che le resistenze alla trazione ed alla pressione riferite all'unità di superficie e sviluppate dalle fibre maggiormente allungate e da quelle maggiormente compresse sono costanti in tutte le sezioni di un solido sottoposto a flessione e, regolando le superficie di dette sezioni in modo che questa condizione sia verificata, si fa in modo che il pericolo di rottura sia lo stesso in tutte le sezioni del corpo e si ottiene così un *solido di egual resistenza alla flessione.*

In questi solidi, affinchè presentino essi la necessaria stabilità, fa d'uopo che le costanti a cui si eguagliano le accennate due resistenze riferite all'unità di superficie siano i coefficienti di snervamento Q′ e Q″ (num. 92), oppure i coefficienti di rottura R′ ed R″ (num. 93) per trazione e per pressione moltiplicati pei rispettivi coefficienti di stabilità. Segue da ciò che, ritenendo le denominazioni stabilite nei numeri 88, 91, 92 e 93, le equazioni le quali conducono a determinare dei solidi di egual resistenza alla flessione sono:

$$\left.\begin{aligned} m'Q' &= v'\mu\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}} \\ m''Q'' &= v''\mu\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

quando si conoscono i coefficienti di snervamento Q′ e Q″ per la materia di cui i solidi sono costituiti; e

$$\left.\begin{aligned} n'R' &= v'\mu\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}} \\ n''R'' &= v''\mu\sqrt{\frac{\cos^2\varphi}{I'^2}+\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{I''^2}} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

allorquando sono noti i coefficienti di rottura R′ ed R″.

Pel caso di solidi rettilinei orizzontalmente disposti, caricati di pesi ed aventi sezioni trasversali simmetriche rispetto alla verticale passante pei loro centri di superficie, ed in genere per tutti i casi in cui trovasi verificata la condizione di essere contenuto nel piano di sollecitazione uno degli assi principali centrali d'inerzia di ciascuna delle sezioni trasversali dei solidi stessi le equazioni (1) e (2) notevolmente si semplificano giacchè $\varphi=0$, e si riducono a

$$\left.\begin{aligned} m'Q' &= \frac{v'\mu}{I'} \\ m''Q'' &= \frac{v''\mu}{I'} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

quando si conoscono i coefficienti di snervamento, a

$$\left.\begin{aligned} n'R' &= \frac{v'\mu}{I'} \\ n''R'' &= \frac{v''\mu}{I'} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

quando sono noti i coefficienti di rottura.

Allorquando vuolsi determinare un solido di egual resistenza alla flessione con sezione simmetrica rispetto all'asse delle fibre invariabili, basta di applicare una sola delle due equazioni contenute nei sistemi (1), (2), (3) o (4) e di applicare la prima di ciascun sistema quando è più facile che il solido si rompa per estensione anzichè per compressione, di applicare invece la seconda quando il primo modo di rottura è meno facile del secondo. Se invece la sezione trasversale del solido di egual resistenza non è simmetrica rispetto all'asse neutro è necessario di applicare ambedue le equazioni di uno stesso sistema e di prendere quello dei due risultati che somministra le sezioni trasversali di maggiori dimensioni.

Nel dedurre le sezioni trasversali di un solido di egual resistenza alla flessione può darsi che in alcuni siti non presenti esso la necessaria resistenza allo scorrimento trasversale, la qual resistenza sempre trovasi messa in giuoco quando esiste flessione prodotta da forze normali all'asse del corpo. Sommamente importa l'accertarsi di questo fatto e dove il solido ammette una sezione deficiente sotto questo rapporto convenientemente aumentarla determinandola coll'equazione

$$m^{\text{IV}}Q^{\text{IV}}=\frac{N}{\Omega} \tag{5}$$

quando si conosce Q^{IV} ossia il coefficiente di snervamento per scorrimento trasversale, e coll'equazione

$$n^{\text{IV}}R^{\text{IV}}=\frac{N}{\Omega} \tag{6}$$

quando invece è dato R^{IV} ossia il coefficiente di rottura per scorrimento trasversale. In quanto alle lettere m^{IV}, n^{IV}, N ed Ω che entrano nelle due ultime equazioni, hanno esse i significati che loro vennero attribuiti nei numeri 88, 92 e 93.

Visto così quanto vi ha di più generale sui solidi di egual resistenza alla flessione, convien esaminare alcuni casi particolari per ben far comprendere lo spirito col quale devono essere applicate le stabilite equazioni, ed ecco immediatamente alcuni semplici ed importanti problemi.

I. *Determinare il profilo longitudinale di un solido omogeneo di egual resistenza incastrato orizzontalmente per una sua estremità, caricato all'altra d'un peso, colle facce laterali contenute in due piani verticali paralleli, e terminato al di sopra ed al di sotto da due superficie cilindriche simmetricamente disposte rispetto al piano orizzontale passante per l'asse.*

Si chiamino

a la lunghezza $\overline{\text{AB}}$ del solido (*fig.* 97),

b la sua larghezza, ossia la distanza dei due piani verticali da cui lateralmente vien limitato,

P il peso applicato all'estremità B,

z l'ascissa $\overline{AN}$ corrispondente al centro di superficie di una sezione qualunque,

u le due ordinate eguali $\overline{NM}$ ed $\overline{NM'}$ dei punti M ed M' di ascissa z appartenenti rispettivamente ai profili o direttrici delle superficie cilindriche inferiore e superiore,

U la semi-altezza $\overline{AC}=\overline{AC'}$ della sezione d'incastro,

u' la semi-altezza $\overline{BD}=\overline{BD'}$ della sezione estrema cui trovasi applicato il peso P.

Supponendo che nel corpo più facilmente possa avvenire la rottura per estensione anzichè per compressione, siccome il piano di sollecitazione passa per uno degli assi principali centrali d'inerzia di ogni sezione, si può partire dalla prima equazione del sistema (4), e facendo in essa

$$v'=u, \qquad \mu=P(a-z), \qquad I'=\frac{1}{12}b(2u)^3=\frac{2}{3}bu^3,$$

si trova

$$n'R'=\frac{uP(a-z)}{\frac{2}{3}bu^3},$$

e quindi

$$u^2=\frac{3P(a-z)}{2bn'R'} \qquad (7).$$

Facendo in quest'equazione $\overline{BN}=(a-z)=z'$, si ha

$$u^2=\frac{3Pz'}{2bn'R'},$$

ossia che le ordinate u dei profili delle due superficie cilindriche superiore ed inferiore devono variare come le ordinate di una parabola di vertice B, di asse BA e di parametro $\frac{3P}{2bn'R'}$.

La semi-altezza $\overline{AC}=U$ della sezione d'incastro si ottiene facendo nell'equazione (7) $u=U$ e $z=0$, per cui

$$U=\sqrt{\frac{3aP}{2bn'R'}}.$$

Per quanto spetta alla semi-altezza $\overline{BD} = u'$ della sezione estrema cui trovasi applicato il peso P, sembra potersi essa dedurre dall'equazione (7) ponendo in essa $u = u'$ e $z = a$, e così procedendo trovasi $u' = 0$. Questo risultato deriva da ciò che l'accennata equazione (7) non tien conto delle azioni dovute allo scorrimento trasversale, e per ottenere un risultato veramente pratico conviene dedurre il valore di u' dall'equazione (6). Si osservi perciò che per una sezione qualunque del solido si ha

$$N = P \qquad \Omega = 2bu,$$

per cui la citata equazione (6) diventa

$$n^{\text{IV}} R^{\text{IV}} = \frac{P}{2bu},$$

d'onde

$$u = \frac{P}{2bn^{\text{IV}} R^{\text{IV}}},$$

ossia che le ordinate u dei profili delle superficie superiore ed inferiore del solido, affinchè sia esso di egual resistenza sotto il rapporto dello scorrimento trasversale, devono essere costanti. Segue da ciò che la semi-altezza u' della sezione cui trovasi applicato il peso P deve essere

$$u' = \frac{P}{2bn^{\text{IV}} R^{\text{IV}}},$$

che i due profili della superficie superiore e della superficie inferiore del corpo devono presentare ciascuno una parte parabolica ed una parte rettilinea, e che la sezione EE′ la quale separa le parti paraboliche dalle rettilinee è quella la cui ascissa AF vien determinata ricavando dall'equazione (7) il valore di z che corrisponde al valore particolare u' di u.

II. *Determinare il profilo longitudinale di un solido omogeneo di egual resistenza incastrato orizzontalmente per una sua estremità, caricato di un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza, colle facce laterali contenute fra due piani verticali paralleli, e generato da un rettangolo avente per lato orizzontale la distanza degli accennati* *piani verticali il quale si muove parallelamente a se stesso percorrendo col mezzo del suo lato superiore la orizzontale* AB (*fig.* 98).

Si ritengano le denominazioni già stabilite nel precedente problema per quanto concerne alla lunghezza, alla larghezza del solido, all'ascissa di una sezione qualunque, e si chiamino

p la parte di peso uniformemente distribuito la quale corrisponde all'unità di lunghezza di solido,

u l'altezza $\overline{NM}$ di una sezione qualunque a distanza $\overline{AN}=z$ dalla sezione d'incastro,

U l'altezza $\overline{AC}$ dell'intiera sezione d'incastro.

Nell'ipotesi che si conosca essere nel corpo più facile la rottura per compressione anzichè quella per estensione, passando il piano di sollecitazione per uno degli assi principali centrali d'inerzia delle sezioni trasversali del solido, si può immediatamente partire dalla seconda delle equazioni del sistema (4) e dall'equazione (6). In queste equazioni si faccia

$$v''=\frac{1}{2}u, \qquad \mu=\frac{1}{2}p(a-z)^2, \qquad I'=\frac{1}{12}bu^3$$

$$N=p(a-z), \qquad \Omega=bu,$$

e si ottengono le due equazioni

$$n''R''=\frac{\frac{1}{2}u\cdot\frac{1}{2}p(a-z)^2}{\frac{1}{12}bu^3}$$

$$n^{IV}R^{IV}=\frac{p(a-z)}{bu},$$

dalle quali si deducono i seguenti valori di u

$$u=(a-z)\sqrt{\frac{3p}{bn''R''}} \tag{8}$$

$$u=\frac{p(a-z)}{bn^{IV}R^{IV}} \tag{9}.$$

Il primo valore di u indica che il solido, per essere di egual resistenza alla flessione, deve avere le altezze delle sue sezioni trasversali variabili secondo le ordinate di una linea retta la quale passa per l'estremo B dell'orizzontale AB, ed il secondo valore di u accenna che per essere il solido di egual resistenza allo scorrimento trasversale deve pure avere le altezze delle sue sezioni trasversali variabili secondo le ordinate di una linea retta passante anche per l'estremo B, ma generalmente diversa dalla prima.

Ponendo nelle ultime due equazioni $z=0$, si ottengono due valori particolari U′ ed U″ di u corrispondenti alla sezione d'incastro, e questi valori sono

$$U'=a\sqrt{\frac{3p}{bn''R''}}$$

$$U''=\frac{ap}{bn^{\mathrm{IV}}R^{\mathrm{IV}}}.$$

Quando U′ risulta maggiore di U″, si assume per altezza U di detta sezione il trovato valore di U′ e le altezze di tutte le altre sezioni del solido dovranno variare come le ordinate u della retta rappresentata dall'equazione (8). Quando invece si trova U′ minore di U″, si assume U″ per valore di U, e le altezze di tutte le sezioni del solido devono variare come le ordinate della retta rappresentata dall'equazione (9).

Il solido considerato in questo problema ha per suo asse, ossia per linea luogo geometrico dei centri di superficie di tutte le sue sezioni, non una linea retta perpendicolare alla risultante di tutte le forze che producono la flessione, ma sibbene la linea BE che unisce il centro E della sezione d'incastro col mezzo della lunghezza dello spigolo rappresentato nel punto B, per cui i risultati ottenuti non si possono dire esatti, ma sibbene soltanto approssimati, e tanto più prossimi ai veri quanto più la linea EB poco si scosta dall'asse perpendicolare alla direzione della risultante delle forze producenti la flessione. Quest'osservazione si estende in generale a tutti i casi in cui si vogliono fare dei solidi di egual resistenza generati (num. 10) da una figura piana di forma costante e di grandezza variabile secondo una certa legge, la quale si muove parallelamente a se stessa e percorrendo con un determinato suo punto una retta data perpendicolare alla direzione delle forze producenti flessione, e pei quali la linea luogo geometrico dei centri di superficie di tutte le figure generatrici non è quella fissata come direttrice del loro movimento.

III. *Determinare il profilo longitudinale di un solido omogeneo di egual resistenza orizzontalmente collocato su due appoggi, caricato di un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza ed avente per sezione trasversale un triangolo isoscele colla sua base orizzontale costantemente della stessa lunghezza e posta sulla faccia superiore del corpo.*

Siano:

$2a$ la distanza orizzontale $\overline{AB}$ (*fig.* 99) dei due appoggi,

b la larghezza costante della faccia superiore del solido ossia le lunghezze delle basi di tutti i triangoli isosceli costituenti le sue sezioni trasversali,

p la parte di peso uniformemente distribuito la quale corrisponde all'unità di distanza dei due appoggi,

z l'ascissa $\overline{AN}$ corrispondente al centro di superficie di una sesione qualunque,

u l'ordinata $\overline{NM}$ del punto M di ascissa z appartenente al profilo longitudinale della superficie superiore del solido,

U l'ordinata $\overline{CD}$ del punto D posto nel mezzo del detto profilo longitudinale,

u' le ordinate eguali $\overline{AE}$ e $\overline{BF}$ dei punti E ed F delle sezioni d'appoggio ed appartenenti pure al profilo della superficie superiore del solido.

Non essendo le sezioni trasversali del solido simmetriche rispetto ai corrispondenti assi neutri, ma d'altronde passando il piano di sollecitazione per uno dei loro assi principali centrali d'inerzia, si può arrivare a risolvere il problema mediante le due equazioni (4) congiunte all'equazione (6).

Essendo u la distanza del centro di superficie di una sezione qualunque dalla sua base, vien espressa da $3u$ l'altezza di questa sezione e quindi i valori di v', v'', I ed Ω sono

$$v' = 2u, \qquad v'' = u$$

$$I = \frac{3}{4}\, b\, u^3, \qquad \Omega = \frac{3}{2}\, b\, u.$$

In quanto ai valori assoluti del momento inflettente μ e dello sforzo di taglio N, assumendo l'asse delle u positive all'insù, per la sezione qualunque MM' trovansi essi espressi da

$$\mu = p\left(az - \frac{1}{2}z^2\right)$$

$$N = p(a - z),$$

Sostituendo i trovati valori di v', v'', μ, I', N ed Ω nelle già citate equazioni (4) e (6) si ha

$$n'R' = \frac{2up\left(az - \frac{1}{2}z^2\right)}{\frac{3}{4}bu^3},$$

$$n''R'' = \frac{up\left(az - \frac{1}{2}z^2\right)}{\frac{3}{4}bu^3},$$

$$n^{IV}R^{IV} = \frac{p(a - z)}{\frac{3}{2}bu}$$

dalle quali si ricavano i seguenti valori di u

$$u = 2\sqrt{\frac{p}{3bn'R'}}\sqrt{2az - z^2} \qquad (10)$$

$$u = 2\sqrt{\frac{p}{6bn''R''}}\sqrt{2az - z^2} \qquad (11)$$

$$u = \frac{2p(a - z)}{3bn^{IV}R^{IV}} \qquad (12).$$

Il primo ed il secondo valore di u indicano che il solido, per essere di egual resistenza alla flessione, deve avere per profilo della sua superficie superiore una semi-ellisse ADB; ed il terzo valore di u dimostra che il solido, per essere di egual resistenza allo scorrimento trasversale, deve avere per profilo della sua superficie superiore una linea retta passante per il mezzo C dell'asse AB, Ponendo nelle due prime equazioni $z = a$ si trovano generalmente due diversi valori di u ed il maggiore dei due rappresenta l'ordinata $\overline{CD} = U$ del profilo della superficie superiore del solido nel suo mezzo e quindi anche l'asse verticale dell'ellisse ADB.

Facendo poi $z = 0$ nella terza equazione si ottiene l'ordinata $\overline{AE} = u'$ del profilo della superficie superiore del solido nelle sezioni d'appoggio e quindi a che distanza dall'origine A la retta EC taglia l'asse delle u.

Eguagliando il secondo membro dell'equazione (12) al secondo membro dell'equazione (10) o dell'equazione (11) secondochè è quella o questa che dà il maggior valore di u per $z = a$, e risolvendo l'equazione che ne risulta per rapporto a z si ottiene l'ascissa $\overline{AG}$ del punto H in cui la retta EC incontra l'ellisse ADB. Cosicchè per tutte le sezioni del solido comprese fra A e G le ordinate u varieranno come quelle della retta EH, e per tutte le sezioni comprese fra H e C le ordinate u varieranno come quelle della semi-ellisse ADB. Per la parte di corpo posto a dritta della sezione di mezzo il profilo sarà come quello già definito per la parte di corpo posto a sinistra della stessa sezione.

Il solido di egual resistenza, di cui già si è determinato il profilo della sua superficie superiore presenta al di sotto uno spigolo E'H'D'I'F' e consiste esso in una linea spezzata, composta dei due tratti rettilinei E'H', I'F' e dell'arco ellittico H'D'I' la quale si costruisce duplicando per una sezione qualunque l'ordinata corrispondente del profilo della superficie superiore del solido.

Nella determinazione dei solidi di egual resistenza caricati di pesi si può anche tener conto dei loro pesi e così arrivare a risultati che nulla lascino a desiderare allorquando si considerano dal lato teorico. I metodi però che conducono a questi risultati rigorosi richiedono calcoli lunghi e difficili inammessibili in pratica, per cui usano i costruttori di tener conto soltanto delle forze che nelle circostanze più sfavorevoli devono sopportare i solidi che vogliono costrurre lasciandosi guidare dal solo sentimento pratico nel fare a dette forze un aumento diretto a non trascurare totalmente il peso dei solidi stessi. Molti ingegneri suppongono che i corpi, per cui vogliono determinare la legge di variazione delle sezioni trasversali affinchè siano di egual resistenza, abbiano sezioni costanti di forma eguale a quella prestabilita e di dimensioni che loro vengono suggerite dal criterio pratico e quindi, procedendo come in questo numero si è insegnato, determinano una delle dimensioni delle loro sezioni trasversali. Considerando i risultati di questa prima operazione siccome solamente approssimativi, è possibile dedurne dei più esatti incominciando il calcolo coll'attribuire a ciascuna sezione del corpo le dimensioni trovate, e giungere così ad avere altre dimensioni più o meno differenti dalle prime. Col mezzo di queste ultime dimensioni si può instituire un nuovo calcolo e così continuare col metodo delle approssimazioni successive finchè due operazioni che si succedono conducono presso a poco al medesimo risultato. Generalmente però l'ingegnere pratico si accontenta dei risultati che ottiene nella prima operazione, e, quantunque questo modo di procedere difficilmente possa essere giustificato sotto il punto di vista teorico, pure senza riserva vien ammesso dai costruttori, giacchè l'esperienza ha ormai dimostrato che molti solidi di egual resistenza così determinati convenientemente hanno resistito a tutte le prove.

115. **Nozioni generali sul problema avente per oggetto di studiare la flessione e la stabilità dei solidi rettilinei collocati su più di due appoggi e caricati perpendicolarmente ai loro assi.** — Come si vedrà nell'ultimo volume di questo lavoro sull'arte di fabbricare esponendo le norme da seguirsi nel dare progetti di costruzioni civili, stradali ed idrauliche, lo studio della flessione e della stabilità dei solidi rettilinei posti su più di due appoggi e caricati perpendicolarmente ai loro assi costituisce un problema il quale, nelle moderne costruzioni, e principalmente nello stabilimento dei ponti in ferro a più travate rettilinee, gode di importanti applicazioni pratiche e la cui risoluzione deve quindi riuscire del massimo interessamento per l'ingegnere costruttore. Volendosi trovare il momento inflettente relativo ad una sezione qualunque di un solido disposto e caricato, come si è detto, immediatamente si presenta una seria difficoltà, in quanto che le reazioni degli appoggi non sono forze le quali subito si possano conoscere, essendo insufficiente la statica dei corpi solidi alla loro determinazione. Navier, e molti altri autori, seguendo l'idea che naturalmente si presenta in tale circostanza, hanno instituito un calcolo preliminare per ottenere queste reazioni, e quindi, conoscendo così tutte le forze esteriori applicate al solido, passarono al calcolo dei momenti inflettenti. Questa idea però non è quella che nel modo il più spedito ed il più semplice conduce alla risoluzione del problema. Quando si pongono le equazioni differenziali

delle curve elastiche secondo cui si dispongono gli assi delle diverse parti nelle quali convien immaginar diviso il solido, a seconda del numero degli appoggi e del modo d'applicazione dei pesi, si introducono in queste equazioni tanto le forze cognite quanto quelle incognite; convenientemente integrandole si giunge ad una serie di condizioni nelle quali entrano le reazioni incognite e che unitamente alle equazioni somministrate dalla statica dei corpi solidi conducono a determinarle; ma siccome tutte le incognite entrano in ciascuna equazione, ne deriva l'imbarazzo di un calcolo lungo, faticoso e non suscettibile di pratiche applicazioni.

L'idea che ebbe l'ingegnere Clapeyron di prendere per incognite ausiliarie i momenti inflettenti sugli appoggi notevolmente semplificò la risoluzione del problema avente per oggetto lo studio della flessione e della stabilità dei solidi rettilinei orizzontalmente posti su più di due appoggi e caricati di pesi, ed è in questa felicissima idea, dovuta al genio del citato ingegnere, che si trova la vera sorgente di tutti i perfezionamenti che in seguito ricevette la risoluzione di quest'importante problema. Clapeyron, assumendo per incognite i momenti inflettenti sugli appoggi, introdusse contemporaneamente nel calcolo gli sforzi di taglio e le inclinazioni delle curve elastiche secondo le quali si disponevano gli assi dei solidi nei medesimi punti; l'ingegnere Bertot per il primo manifestò l'idea di conservare come incognite i soli momenti inflettenti sugli appoggi; e nuovamente Clapeyron, non si sa se guidato dai lavori di Bertot o dagli stessi suoi studi anteriori, nel 1857 presentò all'Accademia delle Scienze di Parigi un'interessante memoria nella quale, senza introdurre nel calcolo gli sforzi di taglio e le inclinazioni delle curve degli assi dei solidi in corrispondenza delle sezioni d'appoggio, fece conoscere il modo di assumere come incognite ausiliarie i soli momenti inflettenti sugli appoggi e di procedere quindi alla loro determinazione. Così facendo riesce possibile di stabilire una serie di equazioni del primo grado, molto semplici, in numero sufficiente per determinare tutti i momenti inflettenti sugli appoggi in ciascuna delle quali non entrano che tre degli accennati momenti. Questa serie di equazioni assai facilmente si può far risultare dall'impiego di una sola e medesima relazione per tutti i gruppi di due travate successive, la qual relazione, ad imitazione di quanto fecero gli ingegneri Bertot e Clapeyron, e seguendo il metodo esposto dall'ingegnere professore Bresse nella prima parte della pregievole sua opera intitolata *Cours de mécanique appliquée professé à l'école impériale des ponts et chaussées*, verrà trovata pel caso di un solido rettilineo nel suo stato primitivo, orizzontalmente posto su due appoggi, caricato di pesi e con sezione trasversale simmetrica rispetto alla verticale passante pel suo centro di superficie. Il problema così ristretto abbraccia tutti i casi che si possono presentare nella pratica dell'ingegnere costruttore, e quindi credo fuor di proposito il trattare la quistione sotto un punto di vista più generale.

Gli appoggi hanno una certa lunghezza nella direzione parallela all'asse del solido che sostengono, ma nell'instituire i calcoli si ammette che ciascuno di essi produca lo stesso effetto a cui si arriverebbe fissando il centro della sezione corrispondente al mezzo dell'appoggio, cosicchè, non tenendosi conto di una specie d'incastramento che ha luogo sugli appoggi stessi, l'accennata ipotesi conduce a considerare il solido siccome posto in condizioni di resistenza più sfavorevoli di quello in cui trovasi in realtà. Nel calcolare il momento inflettente μ e lo sforzo di taglio N che si producono nelle diverse sezioni trasversali del corpo si suppone innanzi tutto che esso sia prismatico, ossia di sezione costante; si ammette in seguito che questi valori di μ e di N siano quelli che realmente si verificherebbero nel solido da determinarsi, e si calcolano le sezioni trasversali in modo da aversi in tutte e per quanto è possibile un egual grado di stabilità, ossia in modo che il solido almeno approssimativamente si possa dire di eguale resistenza.

114. Equazione dei momenti inflettenti su tre appoggi successivi. — Siano LM ed MN (*fig.* 100) due travate contigue ossia due parti, corrispondenti all'intervallo fra tre appoggi successivi, di una trave o solido orizzontalmente disposto, sostenuto in più punti, e si chiamino:

a' ed a'' le lunghezze $\overline{LM}$ ed $\overline{MN}$ ossia le distanze orizzontali dei mezzi dei tre appoggi successivi L, M ed N,

p' e p'' i pesi per ogni unità di lunghezza che gravitano rispettivamente sulle due parti LM ed MN,

m', m'' e m''' i momenti inflettenti relativi alle sezioni corrispondenti agli appogg L, M ed N,

z' ed u' le due coordinate $\overline{Lm'}$ ed $\overline{m'm}$ di un punto qualunque m della curva secondo cui si dispone l'asse della parte LM del solido dopo la flessione, relativamente agli assi coordinati Lz ed Lu, orizzontale il primo e diretto secondo l'asse del corpo, verticale il secondo e colla sua parte positiva rivolta all'insù.

Il valore del momento inflettente μ per la sezione qualunque in m vien dato dalla somma dei momenti di tutte le forze applicate al solido fra questa sezione e l'estremità di dritta posta dalla parte delle z positive. Ora, tutte le forze applicate alla travata MN ed alle travate successive danno ciascuna un momento che ammette una espressione del primo grado in z' e quindi anche la somma di questi momenti sarà un'espressione del primo grado in z'; il carico uniformemente distribuito lungo mM, di valore $p'(a'-z')$, valutando come positivi quei momenti che tendono a far girare da Lz verso Lu, produce il momento $-\frac{1}{2}p'(a'-z')^2$; e quindi il momento inflettente per rapporto alla sezione qualunque m della travata LM si può esprimere con $A'+B'z'-\frac{1}{2}p'z'^2$, essendo A' e B' delle costanti le quali risultano svolgendo il quadrato ed effettuando il prodotto nell'espressione $-\frac{1}{2}p'(a'-z')^2$ e raccogliendo tutti i termini indipendenti da z' non che quelli che contengono la prima potenza di quest'incognita. Ponendo il trovato valore del momento inflettente nell'equazione (2) del numero 106 invece di μ, si ha la seguente equazione differenziale della curva secondo cui si dispone l'asse del solido sottoposto a flessione fra i due appoggi L ed M

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dz^2}=A'+B'z'-\frac{1}{2}p'z'^2 \qquad (1).$$

Integrando quest'equazione una prima volta e determinando la costante in modo che per il punto L ossia per $z'=0$ il $\frac{du}{dz}$ abbia un valore che indica con T', si ha

$$\varepsilon\left(\frac{du'}{dz'}-T'\right)=A'z+\frac{1}{2}B'z'^2-\frac{1}{6}p'z'^3;$$

e, chiamando ora T'' il valore di $\frac{du'}{dz'}$ per il punto M la cui ascissa vale a', risulta

$$\varepsilon(T''-T')=A'a'+\frac{1}{2}B'a'^2-\frac{1}{6}p'a'^3 \qquad (2).$$

Integrando ancora la penultima equazione e determinando la costante in modo che per il punto L, ossia per $z'=0$, sia $u=0$, si trova

$$\varepsilon(u-\mathrm{T}'z)=\frac{1}{2}\mathrm{A}'z'^2+\frac{1}{6}\mathrm{B}'z'^3-\frac{1}{24}p'z'^4 \qquad (\alpha),$$

dalla quale, siccome per il punto M, ossia per $z=a'$, si ha $u=0$, si deduce

$$-\varepsilon\mathrm{T}'=\frac{1}{2}\mathrm{A}'a'+\frac{1}{6}\mathrm{B}'a'^2-\frac{1}{24}p'a'^3 \qquad (3),$$

e, sottraendo quest'ultima equazione dall'equazione (2), risulta la seguente equazione determinatrice di $\varepsilon\mathrm{T}''$

$$\varepsilon\mathrm{T}''=\frac{1}{2}\mathrm{A}'a'+\frac{1}{3}\mathrm{B}'a'^2-\frac{1}{8}p'a'^3 \qquad (4).$$

Ponendo ora l'origine delle ascisse al centro della sezione trasversale corrispondente al secondo appoggio M, il momento inflettente per una sezione qualunque della travata MN si può esprimere con $\mathrm{A}''+\mathrm{B}''z''-\frac{1}{2}p''z''^2$, essendo A'' e B'' delle costanti analoghe alle costanti A' e B'; e, mediante calcoli in tutto simili a quelli instituiti per trovare l'equazione (3), si può arrivare ad ottenere la equazione analoga

$$-\varepsilon\mathrm{T}''=\frac{1}{2}\mathrm{A}''a''+\frac{1}{6}\mathrm{B}''a''^2-\frac{1}{24}p''a''^3 \qquad (5).$$

Si elimini T'' fra le equazioni (4) e (5) e, combinandole per somma onde raggiungere lo scopo, si ottiene

$$\frac{1}{2}\mathrm{A}'a'+\frac{1}{2}\mathrm{A}''a''+\frac{1}{3}\mathrm{B}'a'^2+\frac{1}{6}\mathrm{B}''a''^2-\frac{1}{8}p'a'^3-\frac{1}{24}p''a''^3=0 \qquad (6).$$

Osservando ora che il momento inflettente $\mathrm{A}'+\mathrm{B}'z'-\frac{1}{2}p'z'^2$ deve prendere rispettivamente i valori m' e m'' pei punti L ed M, ossia per $z'=0$ e per $z'=a'$ quando si considera la travata LM e quando è per conseguenza in L l'origine delle coordinate, si ha

$$A' = m', \qquad A' + B'a' - \frac{1}{2}p'a'^2 = m'',$$

d'onde

$$A' = m', \qquad B' = \frac{1}{2}p'a' + \frac{m'' - m'}{a'} \qquad (7).$$

Analogamente, siccome il momento inflettente $A'' + B''z'' - \frac{1}{2}p''z''^2$ deve prendere rispettivamente i valori m'' e m''' pei punti M ed N, ossia per $z''=0$ e per $z''=a''$ quando si considera la travata MN e quando per conseguenza trovasi in M l'origine delle coordinate, risulta

$$A'' = m'', \qquad B'' = \frac{1}{2}p''a'' + \frac{m''' - m''}{a''}.$$

I trovati valori di A', B', A'' e B'' si pongano nell'equazione (6) ed ottiensi allora la seguente equazione fra i tre momenti inflettenti m', m'' ed m''' su tre appoggi successivi ed i dati a', a'', p' e p''

$$\frac{1}{6}m'a' + \frac{1}{3}m''a'' + \frac{1}{24}p'a'^3 + \frac{1}{3}m''a' + \frac{1}{24}p''a''^3 + \frac{1}{6}m'''a'' = 0,$$

la quale, moltiplicando per 6 e convenientemente raccogliendo i termini moltiplicati per m', m'', m''' e quelli indipendenti da questi momenti, dà luogo alla seguente rimarchevole relazione fra i momenti inflettenti su tre appoggi successivi

$$m'a' + 2m''(a' + a'') + m'''a'' + \frac{1}{4}(p'a'^3 + p''a''^3) = 0 \quad (8).$$

115. **Determinazione dei momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti agli appoggi.** — Sia $n+1$ il numero degli appoggi A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1}, A_n, A_{n+1} (*fig.* 101) sui quali il solido trovasi orizzontalmente collocato e si chiamino:

a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n le lunghezze delle n travate;

p_1, p_2, p_3, ..., p_{n-1}, p_n i pesi che gravitano sull'unità di lunghezza di ciascuna delle n travate;

m_1, m_2, m_3, ..., m_{n-1}, m_n, ed m_{n+1} i momenti inflettenti relativi alle sezioni le quali corrispondono agli $n+1$ appoggi.

Chiamando z_1 l'ascissa $\overline{A_1 m_1'}$ del centro di superficie m_1 di una sezione qualunque della prima travata, ed R_1 la reazione del primo appoggio A_1, evidentemente il momento inflettente μ_1 relativo alla detta sezione qualunque, assumendo l'asse positivo della u verticale e volto all'insù, si può esprimere con

$$\mu_1 = R_1 z_1 - \frac{1}{2} p_1 z_1^2,$$

la qual relazione fa vedere che per $z_1 = 0$ si ha $\mu_1 = m_1 = 0$ ossia che il momento inflettente sul primo appoggio è nullo.

Analogamente, se appellansi z_n' la distanza orizzontale $\overline{A_{n+1} m_n'}$ del centro di superficie m_n di una sezione qualunque dell'ultima travata dal suo estremo A_{n+1}, μ_n il momento inflettente relativo a questa sezione ed R_{n+1} la reazione prodotta sul solido dall'ultimo appoggio A_{n+1}, risulta la relazione

$$\mu_n = R_{n+1} z_n' - \frac{1}{2} p_n z_n'^2,$$

dalla quale si deduce che per $z_n' = 0$ si ha $\mu_n = m_{n+1} = 0$, ossia che anche per la sezione corrispondente all'ultimo appoggio il momento inflettente è nullo.

Trovati i momenti inflettenti m_1 ed m_{n+1} relativi alle sezioni le quali corrispondono al primo ed all'ultimo appoggio, per stabilire $n-1$ equazioni fra gli $n-1$ momenti inflettenti che si riferiscono alle sezioni le quali insistono agli appoggi intermedii, si applica l'equazione (8) dei tre momenti inflettenti su tre appoggi successivi alla 1^{ma} ed alla 2^{da}, alla 2^{da} ed alla 3^{za}, alla 3^{za} ed alla 4^{ta}, ..., alla $(n-2)^{ma}$ ed alla $(n-1)^{ma}$, e finalmente alla $(n-1)^{ma}$ ed alla n^{ma} travata. Non dimenticando che i momenti m_1 ed m_{n+1} sugli appoggi estremi sono nulli, l'applicazione dell'indicata equazione (8) nel modo accennato conduce alle seguenti $n-1$ equazioni

$$2m_2(a_1+a_2)+m_3 a_2+\frac{1}{4}(p_1 a_1^3+p_2 a_2^3)=0,$$

$$m_2 a_2+2m_3(a_2+a_3)+m_4 a_3+\frac{1}{4}(p_2 a_2^3+p_3 a_3^3)=0,$$

$$m_3 a_3 + 2 m_4 (a_3 + a_4) + m_5 a_4 + \frac{1}{4}(p_3 a_3^3 + p_4 a_4^3) = 0,$$

. . . .

$$m_{n-2} a_{n-2} + 2 m_{n-1} (a_{n-2} + a_{n-1}) + m_n a_{n-1} + \frac{1}{4}(p_{n-2} a^3_{n-2} + p_{n-1} a^3_{n-1}) = 0\,,$$

$$m_{n-1} a_{n-1} + 2 m_n (a_{n-1} + a_n) + \frac{1}{4}(p_{n-1} a^3_{n-1} + p_n a_n^3) = 0,$$

dalle quali assai facilmente si possono dedurre le $n-1$ incognite m_2, m_3, m_4, ..., m_{n-2}, m_{n-1} ed m_n.

116. **Determinazione dei momenti inflettenti per una sezione qualunque di ciascuna delle n travate in cui resta diviso un solido rettilineo orizzontalmente collocato su più di due appoggi.** — Questa determinazione riesce della massima facilità allorquando già si conoscono i momenti inflettenti sugli appoggi. Infatti, considerando una travata qualunque LM (*fig.* 102) caricata di un peso costante p su ogni unità della sua lunghezza, e ponendo l'origine delle coordinate all'estremità sinistra L del suo asse coll'asse positivo delle ascisse z passante per l'altro estremo M e coll'asse dell'ordinate positive volto all'insù, già si è visto (num. 114) come il momento inflettente μ relativo ad una sezione qualunque di questa travata si possa esprimere con

$$\mu = \mathrm{A} + \mathrm{B} z - \frac{1}{2} p z^2,$$

e, chiamando m' ed m'' i momenti inflettenti relativi alle sezioni dei due appoggi limitanti la detta travata di lunghezza a, si ha

$$\mathrm{A} = m'\,, \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{2} p a + \frac{m'' - m'}{a}\,;$$

per modo che il valore di μ diventa

$$\mu = m' + \left(\frac{1}{2} p a + \frac{m'' - m'}{a}\right) z - \frac{1}{2} p z^2.$$

Considerando ora una trave sostenuta da $n+1$ appoggi, ritenendo le denominazioni già stabilite nel precedente numero per quanto concerne alle distanze degli appoggi, ai momenti inflettenti per le sezioni che ad essi corrispondono, ai pesi uniformemente distribuiti, ed osservando che per la 1^{ma} travata $m'=m_1=0$ ed $m''=m_2$, che per la 2^{da} travata $m'=m_2$ ed $m''=m_3$, che per la 3^{za} $m'=m_3$ ed $m''=m_4$, ..., che per la $(n-1)^{ma}$ travata $m'=m_{n-1}$ ed $m''=m_n$ e finalmente che per n^{ma} od ultima travata $m'=m_n$ ed $m''=m_{n+1}=0$, i valori μ_1, μ_2, μ_3, ..., μ_{n-1} e μ_n dei momenti inflettenti relativi ad una sezione qualunque di ciascuna delle n travate, a partire dalla prima posta a sinistra (*fig.* 101) ed andando ordinatamente all'ultima, ammettono le espressioni

$$\mu_1=\left(\frac{1}{2}p_1a_1+\frac{m_2}{a_1}\right)z_1-\frac{1}{2}p_1z_1^2,$$

$$\mu_2=m_2+\left(\frac{1}{2}p_2a_2+\frac{m_3-m_2}{a_2}\right)z_2-\frac{1}{2}p_2z_2^2,$$

$$\mu_3=m_3+\left(\frac{1}{2}p_3a_3+\frac{m_4-m_3}{a_3}\right)z_3-\frac{1}{2}p_3z_3^2,$$

. . . .

$$\mu_{n-1}=m_{n-1}+\left(\frac{1}{2}p_{n-1}a_{n-1}+\frac{m_n-m_{n-1}}{a_{n-1}}\right)z_{n-1}-\frac{1}{2}p_{n-1}z^2_{n-1},$$

$$\mu_n=m_n+\left(\frac{1}{2}p_na_n-\frac{m_n}{a_n}\right)z_n-\frac{1}{2}p_nz_n^2.$$

nelle quali le ascisse z_1, z_2, z_3, ..., z_{n-1} e z_n hanno rispettivamente le loro origini nel centro della sezione corrispondente all'appoggio di sinistra di ciascuna travata ossia nei punti A_1, A_2, A_3, ..., A_{n-1} ed A_n.

117. Determinazione degli sforzi di taglio in una sezione qualunque di ciascuna delle travate di un solido rettilineo orizzontalmente collocato su più di due appoggi. — Si consideri una travata qualunque intermedia LM (*fig.* 102) e di questa travata una sua sezione qualunque in m il cui centro abbia per ascissa $\overline{Lm'}=z$. Lo sforzo di taglio corrispondente alla detta sezione evidentemente è la somma algebrica di tutte le forze applicate al solido a diritta della stessa sezione fino alla sua estremità. e sia ΣP questa somma. Se una di queste forze componente la somma ΣP vien indicata con P e se la distanza del suo punto d'applicazione dall'origine L è b, essa per rapporto all'asse neutro della sezione fatta in m produce il momento $P(b-z)$; quindi la somma algebrica dei momenti di tutte le forze la cui somma algebrica costituisce lo sforzo di taglio corrispondente alla sezione passante per m vien espressa da $\Sigma P(b-z)=\Sigma P b - z\Sigma P$; e siccome la somma di questi momenti deve fare il momento inflettente μ relativo alla detta sezione, si ha

$$\mu=\Sigma P b-z\Sigma P.$$

Quest'equazione, differenziata per rapporto a z, dà, per essere ΣP e $\Sigma P b$ indipendenti dall'accennata variabile,

$$\Sigma P=-\frac{d\mu}{dz},$$

ossia che lo sforzo di taglio in una sezione qualunque di ciascuna travata ha per espressione il coefficiente differenziale per rapporto a z dell'espressione del momento inflettente relativo alla medesima travata con tutti i segni cangiati.

Ciò premesso, chiamando rispettivamente N_1, N_2, N_3, ..., N_{n-1} ed N_n gli sforzi di taglio relativi ad una sezione qualunque della 1ma, della 2da, della 3^{za}, ..., dell'$(n-1)^{ma}$ e del n^{ma} travata e ritenendo le denominazioni già date nel precedente numero ai momenti inflettenti, si avranno le seguenti semplicissime equazioni determinatrici delle espressioni degli sforzi di taglio

$$N_1=-\frac{d\mu_1}{dz_1},$$

$$N_2=-\frac{d\mu_2}{dz_2},$$

$$N_3=-\frac{d\mu_3}{dz_3},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$N_{n-1}=-\frac{d\mu_{n-1}}{dz_{n-1}},$$

$$N_n=-\frac{d\mu_n}{dz_n}.$$

118. Determinazione delle reazioni degli appoggi. — Vogliasi trovare la reazione R prodotta contro un solido prismatico da uno qualunque degli appoggi i quali orizzontalmente lo sostengono, e sia in M (*fig.* 100) quest'appoggio. Considerando nel solido due sezioni infinitamente vicine alla sezione d'appoggio, una a destra passante per M′, l'altra a sinistra passante per M″, e chiamando rispettivamente N′ ed N″ gli sforzi di taglio in dette sezioni, siccome gli sforzi di taglio valgono le somme algebriche di tutte le forze che trovansi applicate al solido a diritta delle sezioni a cui essi si riferiscono, se si indica con ΣP questa somma per la sezione passante pel punto M′ posto a diritta dell'appoggio M, si ha

$$N' = \Sigma P$$

$$N'' = R + \Sigma P.$$

Sottraendo la prima di queste equazioni dalla seconda si deduce

$$R = N'' - N',$$

ossia che la reazione di un appoggio qualunque non è altro che la differenza degli sforzi di taglio di due sezioni infinitamente vicine all'appoggio e poste, l'una a sinistra e l'altra a destra del medesimo.

Ciò premesso se, nel caso di un solido rettilineo orizzontalmente collocato su $n+1$ appoggi e formanti quindi n travate, si chiamano

$R_1, R_2, R_3, \ldots\ldots, R_n$ ed R_{n+1} le $n+1$ reazioni prodotte rispettivamente dal 1^{mo}, dal 2^{do}, dal 3^{zo}, ..., dal n^{mo} e dal $(n+1)^{mo}$ appoggio,

$N_1', N_2', N_3', \ldots\ldots, N_n'$ gli sforzi di taglio relativi a sezioni infinitamente vicine ai detti appoggi ed a dritta dei medesimi,

$N_1'', N_2'', \ldots\ldots, N_3''$ ed N_n'' gli sforzi di taglio per sezioni infinitamente vicine agli stessi appoggi ed a sinistra dei medesimi, si hanno le seguenti equazioni determinatrici delle reazioni

$$R_1 = -N_1'$$

$$R_2 = N_1'' - N_2'$$

$$R_3 = N_2'' - N_3'$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$R_n = N_{n-1}'' - N_n'$$

$$R_{n+1} = N_n''.$$

119. Rappresentazione grafica dei momenti inflettenti relativi alle diverse sezioni di un solido rettilineo orizzontalmente collocato su più di due appoggi. — Essendo MN (*fig.* 103) una qualunque delle parti o travate in cui un solido rettilineo orizzontalmente collocato su $n+1$ appoggi rimane diviso dagli appoggi stessi, ponendo l'origine delle coordinate nel centro M della sezione corrispondente all'appoggio di sinistra, assumendo orizzontale e verso destra l'asse positivo della ascissa z, verticale e volto all'insù l'asse positivo delle ordinate u, essendo A e B due costanti e p il peso uniformemente distribuito su MN e corrispondente all'unità di lunghezza, si sa (num. 114) che il momento inflettente μ relativo ad una sezione qualunque della parte MN di solido vien espresso da

$$\mu = A + Bz - \frac{1}{2} p z^2 \qquad (1).$$

Ora, variando questo valore di μ da sezione a sezione col variare di z, dando a z diversi valori si possono ottenere i corrispondenti valori di μ e quindi si può costrurre una curva avente per ascisse i valori attribuiti all'incognita z e per ordinate u i corrispondenti valori di μ. Questa curva rappresenta secondo qual legge variano nella parte di solido compresa fra i due appoggi successivi M ed N i momenti inflettenti delle diverse sezioni ed importa nella pratica di conoscere che curva è e come trovasi disposta.

Trasportando tutti i termini dell'equazione (1) nel primo membro si ha

$$\frac{1}{2} p z^2 + \mu - Bz - A = 0 \qquad (2).$$

Essendo quest'equazione del secondo grado fra le ascisse z e le ordinate μ non può rappresentare che un ellisse, od un iperbole, od una parabola, e, siccome è zero la differenza fra il quadrato del coefficiente del prodotto μz ed il quadruplo del prodotto dei coefficienti di μ^2 e di z^2, rappresenta essa una parabola.

Per trovare come è disposta la parabola rappresentata dall'equazione (2) e quindi anche dall'equazione (1), suppongasi trasportata l'origine degli assi coordinati conservando agli assi medesimi le direzioni primitive. Chiamando h e k due indeterminate, z' ed μ' le coordinate di un punto qualunque della parabola, si ha

$$z = z' + h$$

$$\mu = \mu' + k,$$

per cui l'equazione (2) diventa

$$\frac{1}{2} p z'^2 + (p h - \mathrm{B}) z' + \frac{1}{2} p h^2 + \mu' + k - \mathrm{B} h - \mathrm{A} = 0;$$

e, determinando le due quantità indicate con h e k in modo da ottenere l'equazione della parabola sotto la forma più semplice col porre

$$p h - \mathrm{B} = 0$$

$$\frac{1}{2} p h^2 + k - \mathrm{B} h - \mathrm{A} = 0,$$

si ottiene

$$h = \frac{\mathrm{B}}{p} \qquad (3),$$

$$k = \frac{\mathrm{B}^2}{2p} + \mathrm{A} \qquad (4),$$

$$\mu' = -\frac{1}{2} p z'^2.$$

Questi risultati fanno vedere: che i nuovi assi, essendo paralleli agli assi primitivi e quindi ortogonali, passano pel vertice della parabola; che l'ascissa e l'ordinata di questo vertice rispetto agli assi Mz ed Mu sono rispettivamente i valori di h e di k dati dalle equazioni (3) e (4); che l'asse della curva è verticale; e che il parametro della medesima, indipendente dalla distanza degli appoggi M ed N è dipendente soltanto dal peso uniformemente ripartito sulla parte di solido che fra essi esiste, è $\frac{2}{p}$.

La notata indipendenza del parametro della parabola, le cui ordinate rappresentano i momenti inflettenti per le diverse sezioni di una qualunque delle travate, porta a conchiudere: che per il caso in cui il peso uniformemente ripartito è lo stesso per tutta la lunghezza del solido basta descrivere una sol volta la parabola di parametro $\frac{2}{p}$, tagliarsi un'apposita sagoma ed adattarla successivamente fra gli appoggi in modo che il suo vertice coincida col vertice relativo alla travata che si considera, determinato colle formole (3) e (4), ed in modo che il suo asse abbia una direzione perpendicolare alla retta che segna la distanza dei due appoggi; che per il caso in cui il peso uniformemente ripartito non si mantiene lo stesso per tutte le travate, senza però essere diverso per tutte le accennate parti, basta procurarsi solamente tante sagome paraboliche quanti sono i detti pesi diversi.

Le curve paraboliche, come ACB, le cui ordinate perpendicolari all'asse Mz rappresentano i momenti inflettenti relativi alle sezioni determinate dalle ascisse contate dall'origine M e corrispondenti alle dette ordinate, chiaramente dimostrano come generalmente in ciascuna travata il momento inflettente debba cangiare di segno, e come, assumendo l'asse positivo delle u verticale e volto all'insù e per verso dei momenti positivi quello che tende a far andare l'asse Mz sull'asse Mu, il momento inflettente debba generalmente essere negativo per le sezioni comprese fra l'appoggio di sinistra M ed il punto D in cui la parabola dei momenti incontra l'asse Mz, diventar positivo per le sezioni comprese fra i punti D ed E in cui la detta parabola incontra per la seconda volta l'indicato asse delle ascisse e nuovamente diventare negativo per le sezioni comprese fra il punto E e l'appoggio di destra N. Pei tratti MD ed EN le fibre del solido le quali subiscono allungamenti sono quelle comprese fra la sua superficie superiore e lo strato delle fibre invariabili; nel tratto DE trovansi distese le fibre comprese fra la superficie inferiore del solido e lo strato delle fibre invariabili; ed in corrispondenza dei punti D ed E la curva secondo cui si è disposto l'asse del solido nell'intervallo fra i due appoggi M ed N cangia di curvatura, cosicchè, essendo convessa verso l'asse delle z fra M e D e fra E ed N, diventa concava verso lo stesso asse fra D ed E. Le posizioni poi di questi ultimi due punti i quali, considerati sull'asse del solido, costituiscono due punti d'inflessione si ottengono eguagliando a zero l'espressione del momento inflettente per una sezione qualunque della parte di solido posta fra M ed N e cercando i valori particolari Z' e Z'' di z che soddisfano a quest'equazione.

L'ordinata $\overline{CC'}$ la quale corrisponde al vertice della parabola dei momenti ACB rappresenta il massimo momento inflettente. Il valore dell'ascissa $\overline{MC'} = Z'''$ che corrisponde a questo momento massimo ed il suo valore μ_m non sono altro che i valori di h e di k dati rispettivamente delle equazioni (3) e (4); e, essendo rispettivamente m' ed m'' i momenti inflettenti sui due appoggi M ed N, si ottiene il maggior valore assoluto dei momenti inflettenti che si verificano per le sezioni della travata MN nel più grande dei tre valori assoluti di μ_m, m' ed m''.

120. **Rappresentazione grafica degli sforzi di taglio relativi alle diverse sezioni di un solido orizzontalmente collocato su più di due appoggi.** — Partendo dall'espressione generale del momento inflettente in una sezione qualunque di qualsiasi travata MN (*fig.* 103)

$$\mu = A + Bz - \frac{1}{2} p z^2,$$

facendone la prima derivata per rapporto a z (num. 117) e cangiando in essa i segni si trova la seguente espressione generale dello sforzo di taglio

$$N = -B + pz.$$

Questa equazione dimostra che, assumendo gli sforzi di taglio come ordinate di una linea di ascisse z, essi variano colla legge colla quale variano le ordinate della retta la quale, riferita ai due assi Mz ed Mu, taglia l'asse delle u a distanza $-$B dall'origine M e l'asse delle z a distanza $\frac{B}{p}$. Ora $\frac{B}{p}$ rappresenta, come si è trovato nel precedente numero, l'ascissa del vertice della parabola ossia l'ascissa di quella sezione cui corrisponde il massimo momento inflettente, cosicchè la retta le cui ordinate rappresentano gli sforzi di taglio si costruisce portando sull'asse delle u la lunghezza $-$B da M in F ed unendo il punto F col punto C'.

Evidentemente lo sforzo di taglio di maggior valore assoluto, per una travata qualunque come MN, ha luogo in una delle due sezioni d'appoggio e per quella la quale maggiormente dista dal punto C', ossia dal centro della sezione cui corrisponde il momento inflettente rappresentato dall'ordinata del vertice della parabola dei momenti.

121. Calcoli per lo stabilimento di una trave orizzontalmente sostenuta in quattro punti. — Siano A_1, A_2, A_3 ed A_4 (*fig.* 104) i quattro appoggi, la distanza orizzontale fra l'appoggio A_1 e l'appoggio A_2 suppongasi eguale alla distanza orizzontale fra l'appoggio A_3 e l'appoggio A_4, il peso uniformemente distribuito sulla travata $A_1 A_2$ si assuma eguale a quello pure uniformemente distribuito sulla travata $A_3 A_4$, e si chiamino:

a_1, a_2 ed a_3 le tre distanze orizzontali $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_2 A_3}$ ed $\overline{A_3 A_4}$,

p_1, p_2 e p_3 i pesi per metro corrente posti rispettivamente da A_1 in A_2, da A_2 in A_3 e da A_3 in A_4,

m_1, m_2, m_3 ed m_4 i momenti inflettenti relativi alle sezioni della trave le quali corrispondono ai mezzi dei quattro appoggi A_1, A_2, A_3 ed A_4,

μ_1, μ_2 e μ_3 i momenti inflettenti relativi ad una sezione qualunque della prima travata $A_1 A_2$, della seconda travata $A_2 A_3$ e della terza travata $A_3 A_4$,

Z_1', Z_2' e Z_3' le ascisse dei punti d'inflessione D_1, D_2 e D_3 più vicini alle rispettive origini A_1, A_2 ed A_3,

Z_1'', Z_2'' e Z_3'' le ascisse dei punti d'inflessione E_1, E_2 ed E_3 più lontani dalle accennate origini,

Z_1''', Z_2''' e Z_3''' le ascisse $\overline{A_1 C_1'}$, $\overline{A_2 C_2'}$ ed $\overline{A_3 C_3'}$ dei centri di superficie delle tre sezioni, ciascuna delle quali trovasi intermedia a due appoggi a cui, in ogni travata, corrisponde il valor massimo del momento inflettente,

μ_{1m}, μ_{2m} e μ_{3m} i valori degli or indicati momenti inflettenti massimi,

N_1, N_2 ed N_3 gli sforzi di taglio relativi ad una sezione qualunque della prima, della seconda e della terza travata,

N_1', N_2' ed N_3' gli sforzi di taglio in sezioni infinitamente vicine agli appoggi e poste alla loro diritta,

N_1'', N_2'' ed N_3'' gli sforzi di taglio in sezioni pure infinitamente vicine agli appoggi, ma poste sulla loro sinistra,

R_0, R_1, R_2 ed R_3 le quattro reazioni prodotte dagli appoggi contro la trave.

Partendo dall'equazione dei tre momenti inflettenti su tre appoggi successivi, ossia dall'equazione (8) del numero 114, applicando quest'equazione, prima per gli appoggi A_1, A_2 ed A_3 sopportanti la prima e la seconda travata e quindi per gli appoggi A_2, A_3 ed A_4 corrispondenti alla seconda ed alla terza travata, ed osservando che i momenti inflettenti m_1 ed m_4 sul primo e sull'ultimo appoggio (num. 115) sono nulli, si hanno le due equazioni

$$2m_2(a_1+a_2)+m_3a_2+\frac{1}{4}(p_1a_1^3+p_2a_2^3)=0$$

$$m_2a_2+2m_3(a_2+a_1)+\frac{1}{4}(p_2a_2^3+p_1a_1^3)=0,$$

dalle quali si ottiene

$$m_2=m_3=-\frac{(p_1a_1^3+p_2a_2^3)(a_2+2a_1)}{4(4a_1^2+8a_1a_2+3a_2^2)}.$$

Per ottenere le espressioni dei momenti μ_1, μ_2 e μ_3 basta osservare che l'espressione generale del momento inflettente μ per una sezione qualunque di una travata qualsiasi caricata del peso p per ogni unità della sua lunghezza a ed a cui corrisponde il momento inflettente m' sull'appoggio di sinistra ed il momento inflettente m'' sull'appoggio di destra, è

$$\mu=\mathrm{A}+\mathrm{B}z-\frac{1}{2}pz^2,$$

essendo

$$\mathrm{A}=m', \qquad \mathrm{B}=\frac{1}{2}pa+\frac{m''-m'}{a},$$

e rappresentando z la distanza del centro di superficie della sezione qualunque dal centro di superficie di quella sezione la quale corrisponde al mezzo dell'appoggio di sinistra della travata. Nel caso particolare proposto si ha: per la prima travata $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$

$$z=z_1, \qquad p=p_1, \qquad a=a_1, \qquad m'=m_1=0, \qquad m''=m_2$$

$$\mathrm{A}=0, \qquad \mathrm{B}=\frac{1}{2}p_1a_1+\frac{m_2}{a_1},$$

e quindi

$$\mu_1=\left(\frac{1}{2}p_1a_1+\frac{m_2}{a_1}\right)z_1-\frac{1}{2}p_1z_1^2;$$

per la seconda travata $A_2 A_3$

$$z = z_2, \quad p = p_2, \quad a = a_2, \quad m' = m_2, \quad m'' = m_3 = m_2,$$

$$A = m_2, \qquad B = \frac{1}{2} p_2 a_2,$$

d'onde

$$\mu_2 = m_2 + \frac{1}{2} p_2 a_2 z_2 - \frac{1}{2} p_2 z_2^2;$$

per la terza travata $A_3 A_4$

$$z = z_3, \quad p = p_3 = p_1, \quad a = a_3 = a_1, \quad m' = m_3 = m_2, \quad m'' = m_4 = 0,$$

$$A = m_2, \qquad B = \frac{1}{2} p_1 a_1 - \frac{m_2}{a_1}$$

per cui

$$\mu_3 = m_2 + \left(\frac{1}{2} p_1 a_1 - \frac{m_2}{a_1}\right) z_3 - \frac{1}{2} p_1 z_3^2.$$

Eguagliando a zero le tre espressioni dei momenti inflettenti μ_1, μ_2 e μ_3 si hanno le equazioni del secondo grado

$$\left(\frac{1}{2} p_1 a_1 + \frac{m_2}{a_1}\right) z_1 - \frac{1}{2} p_1 z_1^2 = 0,$$

$$m_2 + \frac{1}{2} p_2 a_2 z_2 - \frac{1}{2} p_2 z_2^2 = 0,$$

$$m_2 + \left(\frac{1}{2} p_1 a_1 - \frac{m_2}{a_1}\right) z_3 - \frac{1}{2} p_1 z_3^2 = 0.$$

I due valori di z_1 dati dalla prima di queste tre equazioni rappresentano rispettivamente le ascisse Z_1' e Z_1'' dei punti d'inflessione D_1 ed E_1 nella prima travata; si ha

$$Z_1' = 0,$$

$$Z_1'' = a_1 + \frac{2 m_2}{p_1 a_1};$$

e l'essere nullo il valore di Z_1' accenna come nella prima travata siavi un sol punto d'inflessione ossia che uno dei due punti di inflessione viene a trovarsi nel centro di superficie della sezione del solido la quale corrisponde al primo appoggio. Le due radici che vengono somministrate dalla seconda delle tre ultime equazioni non sono altro che le ascisse Z_2' e Z_2'' dei punti d'inflessione D_2 ed E_2 nella seconda travata e si ha

$$Z_2'=\frac{a_2}{2}-\sqrt{\frac{a_2^2}{4}+\frac{2m_2}{p_2}},$$

$$Z_1''=\frac{a_2}{2}+\sqrt{\frac{a_2^2}{4}+\frac{2\,m^2}{p_2}}.$$

Le due radici a cui si arriva risolvendo la terza delle tre equazioni del secondo grado sono i due valori delle ascisse Z_3' e Z_3'' dei punti d'inflessione D_3 ed E_3 nella terza travata, e vengono essi dati da

$$Z_3'=-\frac{2\,m_2}{p_1\,a_1},$$

$$Z_3''=a_1,$$

e chiaramente appare come nell'ultima travata, analogamente a quello che si verifica dalla prima per essere $Z_3''=a_1$, esiste un sol punto d'inflessione ossia che il punto d'inflessione E_3 viene a coincidere col centro di superficie della sezione del solido la quale corrisponda all'ultimo appoggio.

Per trovare le ascisse Z_1''', Z_2''' e Z_3''' dei centri di superficie delle tre sezioni poste rispettivamente nella prima, nella seconda e nella terza travata ed alle quali corrispondono i momenti inflettenti massimi, basta osservare (num. 119) che esse sono date dai rapporti $\frac{B}{p}$ che alle medesime convengono, per cui traendo partito dei valori di B e di p già trovati in questo numero nel formare le espressioni dei momenti inflettenti μ_1, μ_2 e μ_3, si ha

$$Z_1'''=\frac{1}{2}\,a_1+\frac{m_2}{p_1\,a_1},$$

$$Z_2'''=\frac{1}{2}\,a_2,$$

$$Z_3'''=\frac{1}{2}\,a_1-\frac{m_2}{p_1\,a_1}.$$

In quanto ai momenti massimi μ_{1m}, μ_{2m} e μ_{3m} si possono essi ottenere sostituendo rispettivamente invece di z_1, z_2 e z_3 i valori or trovati di Z_1''', Z_2''' e Z_3''' nelle espressioni generali già calcolate dei momenti inflettenti μ_1, μ_2 e μ_3. Osservando però (num. 119) che in modo generale trovansi espressi i detti momenti massimi da $\frac{B^2}{2p}+A$, riesce più facile il loro calcolo quando si facciano i valori che prende quest'espressione per ciascuna travata traendo partito dei valori di A, B e p già dedotti per ottenere le espressioni di μ_1, μ_2 e μ_3. Così procedendo si trova

$$\mu_{1m}=\frac{p_1 a_1^2}{8}+\frac{m_2}{2}\left(1+\frac{m_2}{p_1 a_1^2}\right),$$

$$\mu_{2m}=\frac{p_2 a_2^2}{8}+m_2,$$

$$\mu_{3m}=\frac{p_1 a_1^2}{8}+\frac{m_2}{2}\left(1+\frac{m_2}{p_1 a_1^2}\right)=\mu_{1m}.$$

Per quanto spetta agli sforzi di taglio in una sezione qualunque di una trave orizzontalmente collocata su più appoggi, già si è detto (num. 117) come essi vengano espressi dai coefficienti differenziali coi segni cangiati delle espressioni dei momenti inflettenti relativi alle travate per cui si considerano gli sforzi di taglio, presi i detti coefficienti differenziali per rapporto alle ascisse z. Segue da ciò che nel presente caso particolare si ha

$$N_1=-\frac{1}{2}p_1 a_1-\frac{m_2}{a_1}+p_1 z_1,$$

$$N_2=-\frac{1}{2}p_2 a_2+p_2 z_2,$$

$$N_3=-\frac{1}{2}p_1 a_1+\frac{m_2}{a_1}+p_1 z_3.$$

I valori degli sforzi di taglio N_1', N_2' ed N_3' in sezioni infinitamente vicine agli appoggi e poste a dritta degli appoggi stessi si ottengono ponendo zero invece di z_1, di z_2 e di z_3 nelle espressioni or ora trovate di N_1, N_2 ed N_3, per cui

$$N_1' = -\frac{1}{2} p_1 a_1 - \frac{m^2}{a_1},$$

$$N_2' = -\frac{1}{2} p_2 a_2,$$

$$N_3' = -\frac{1}{2} p_1 a_1 + \frac{m_2}{a_1}.$$

I valori degli sforzi di taglio N_1'', N_2'' ed N_3'' in sezioni pure infinitamente vicine agli appoggi e poste alla loro sinistra si deducono ancora dalle espressioni di N_1, N_2 ed N_3 facendo rispettivamente in esse $z_1 = a_1$, $z_2 = a_2$ e $z_3 = a_3 = a_1$, per cui

$$N_1'' = \frac{1}{2} p_1 a_1 - \frac{m_2}{a_1},$$

$$N_2'' = \frac{1}{2} p_2 a_2,$$

$$N_3'' = \frac{1}{2} p_1 a_1 + \frac{m_2}{a_1}.$$

Finalmente, conoscendosi i valori di N_1', N_2', N_3', N_1'', N_2'' ed N_3'', torna facile il trovare (num. 118) le reazioni R_1, R_2, R_3 ed R_4 dei quattro appoggi, ed i loro valori sono

$$R_1 = -N_1' = \frac{1}{2} p_1 a_1 + \frac{m_2}{a_1},$$

$$R_2 = N_1'' - N_2' = \frac{1}{2}(p_1 a_1 + p_2 a_2) - \frac{m_2}{a_1},$$

$$R_3 = N_2'' - N_3' = \frac{1}{2}(p_2 a_2 + p_1 a_1) - \frac{m_2}{a_1} = R_2,$$

$$R_4 = N_3'' = \frac{1}{2} p_1 a_1 + \frac{m_2}{a_1} = R_1.$$

122. Risultati dei calcoli instituiti per lo stabilimento di una trave orizzontalmente collocata su quattro appoggi in un caso particolare. — Sia una trave come quella considerata nel precedente numero e, ritenute tutte le denominazioni che nello stesso numero vennero stabilite, abbiasi:

$$a_1 = 64^{m},08, \qquad a_2 = 74^{m},40;$$

$$p_1 = 1900^{Cg}, \qquad p_2 = 5900^{Cg}.$$

Le incognite da determinarsi sono:

1° I momenti inflettenti m_1, m_2, m_3 ed m_4 sugli appoggi:

2° I momenti inflettenti μ_1, μ_2 e μ_3 relativi ad una sezione qualunque di ciascuna delle tre travate;

3° Le ascisse Z_1' e Z_1'', Z_2' e Z_2'', Z_3' e Z_3'' dei punti d'inflessione;

4° Le ascisse Z_1''', Z_2''' e Z_3''' dei centri di superficie delle tre sezioni cui corrispondono i momenti inflettenti di valor massimo;

5° I valori μ_{1m}, μ_{2m} e μ_{3m} degli or indicati momenti inflettenti massimi;

6° Gli sforzi di taglio N_1, N_2 ed N_3 relativi ad una sezione qualunque di ognuna delle tre travate;

7° Gli sforzi di taglio N_1' ed N_1'', N_2' ed N_2'', N_3' ed N_3'' in sezioni infinitamente vicine agli appoggi;

8° Le reazioni R_1, R_2, R_3 ed R_4 dei quattro appoggi.

Tutte queste incognite si calcolano sostituendo i dati valori di a_1, a_2, p_1 e p_2 nelle formole che vennero trovate nel precedente numero, ed ecco i risultati a cui si arriva, raccolti nelle due tavole che immediatamente seguono, la prima delle quali contiene quanto si riferisce ai momenti inflettenti e la seconda quanto si riferisce agli sforzi di taglio.

TAVOLA contenente i principali risultati relativi ai momenti inflettenti

NUMERO D'ORDINE degli appoggi	MOMENTI INFLETTENTI sugli appoggi	NUMERO D'ORDINE delle travate	ESPRESSIONI GENERALI dei MOMENTI INFLETTENTI in ciascuna travata	ASCISSE dei punti d'inflessione	ASCISSE dei CENTRI DELLE SEZIONI di massimo momento inflettente	MASSIMI MOMENTI INFLETTENTI
1°	$m_1 = 0$			m	m	
		1ª	$\mu_1 = 28345\, z_1 - 950\, z_1^2$	$Z_1' = 0$ $Z_1'' = 29{,}84$	$Z_1''' = 14{,}88$	$\mu_{1m} = 211443$
2°	$m_2 = -2084579$					
		2ª	$\mu_2 = -2084579 + 219480\, z_2 - 2950\, z_2^2$	$Z_2' = 11{,}18$ $Z_2'' = 63{,}22$	$Z_2''' = 37{,}20$	$\mu_{2m} = 1997748$
3°	$m_3 = -2084579$					
		3ª	$\mu_3 = -2084579 + 93407\, z_3 - 950\, z_3^2$	$Z_3' = 34{,}24$ $Z_3'' = 64{,}08$	$Z_3''' = 49{,}20$	$\mu_{3m} = 211443$
4°	$m_4 = 0$					

TAVOLA contenente i principali risultati relativi agli sforzi di taglio

NUMERO D'ORDINE delle travate	ESPRESSIONI GENERALI DEGLI SFORZI DI TAGLIO in ciascuna travata	ASCISSE DEI PUNTI in cui gli sforzi di taglio sono nulli	SFORZI DI TAGLIO in sezioni infinitamente vicine agli appoggi	NUMERO D'ORDINE degli appoggi	REAZIONI degli APPOGGI
		m	Cg		Cg
1ª	$N_1 = -28345 + 1900 z_1$	$Z_1''' = 14,88$	$N_1' = -28345$	1°	$R_1 = 28345$
			$N_1'' = 93407$		
				2°	$R_2 = 312887$
2ª	$N_2 = -219480 + 5900 z_2$	$Z_2''' = 37,20$	$N_2' = -219480$		
			$N_2'' = 219480$		
				3°	$R_3 = 312887$
3ª	$N_3 = -93407 + 1900 z_3$	$Z_3''' = 49,20$	$N_3' = -93407$		
			$N_3'' = 28345$	4°	$R_4 = 28345$

Mediante gli elementi che trovansi marcati nelle tabelle date, riesce della massima facilità il passare alle costruzioni grafiche di cui in modo generale si è parlato nei numeri 119 e 120. Tracciata una retta orizzontale OO (*fig.* 104) rappresentante il piano orizzontale da cui superiormente sono terminati gli appoggi, in una conveniente scala si collochino gli assi dei detti appoggi alle distanze che loro corrispondono fissando così i punti A_1, A_2, A_3, A_4. Si costruisca dopo una conveniente scala grafica per la valutazione dei momenti inflettenti sul disegno, e sulle verticali determinate dai detti punti A_1, A_2, A_3 ed A_4 al di sotto dei punti stessi si portino le lunghezze $\overline{A_2B_2}$ ed $\overline{A_3B_3}$ contenenti rispettivamente tante unità prese sulla scala dei momenti inflettenti quante sono unità nei numeri che danno i valori dei momenti m_2 ed m_3. Servendosi della scala già adottata per fissare le posizioni degli appoggi si portino i valori delle ascisse Z_1', Z_2', Z_3', Z_1'', Z_2'' e Z_3'' dei punti d'inflessione, non che quelli delle ascisse Z_1''', Z_2''' e Z_3''' dei centri delle sezioni cui corrispondono i momenti massimi. Con ciò rimangono determinati sulla orizzontale OO i punti A_1, A_2, A_3, A_4, E_1, D_2, E_2, D_3, C_1', C_2' e C_3'; elevando per questi ultimi tre punti altrettante perpendicolari alla OO e prendendo su esse le lunghezze $\overline{C_1'C_1}$, $\overline{C_2'C_2}$, $\overline{C_3'C_3}$ lunghe rispettivamente tante unità prese sulla scala dei momenti inflettenti quante sono unità nei valori dei momenti inflettenti massimi μ_{1m}, μ_{2m} e μ_{3m} si trovano i vertici C_1, C_2 e C_3 delle parabole le cui ordinate rappresentano i momenti inflettenti, e così si può dire: che per la parabola relativa alla prima travata si conoscono i quattro punti A_1, C_1, E_1 e B_2; che per la parabola relativa alla seconda travata sono noti i cinque punti B_2, D_2, C_2, E_2, e B_3; che per la parabola relativa alla terza travata si conoscono i quattro punti B_3, D_3, C_3 ed A_4. Attribuendo alle ascisse z_1, z_2 e z_3 che trovansi nelle espressioni dei momenti inflettenti μ_1, μ_2 e μ_3 registrate nella quarta colonna della prima delle due tavole date, si possono trovare altre ordinate delle parabole, portar a posto le ascisse mediante la scala delle distanze, le ordinate mediante la scala dei momenti inflettenti e così costurre le dette curve per punti. Osservando che per le parabole dei momenti (num. 119), di cui già si conoscono i parametri, sono anche note le posizioni dei vertici e le direzioni degli assi i quali sono verticali e rivolti all'ingiù per le parti che attraversano le curve, torna anche facile il costrurle coll'intersecazione di archi di circolo determinando prima fuochi e direttrici. Generalmente però riesce più spedito in pratica il disegnarsi sopra carta consistente, qual è la buona carta da disegno, le parabole i cui parametri sono il doppio dell'unità divisa per i pesi corrispondenti all'unità di lunghezza delle travate diversamente cariche, e procurarsi così tante sagome quante sono le dette travate. Nel caso particolare considerato bisogna dunque descrivere le due parabole di parametri $\frac{2}{p_1}$ e $\frac{2}{p_2}$ e ritagliare la carta sulla quale vennero descritte secondo le parabole stesse. La sagoma della parabola di parametro $\frac{2}{p_1}$ adattata sul disegno in modo che il suo vertice coincida col punto C_1 e che il suo asse sia nella direzione C_1C_1' permette di tracciare la parabola $A_1C_1E_1B_2$, e la medesima sagoma serve alla descrizione dell'altra parabola $B_3D_3C_3A_4$ quando si disponga in modo che il suo vertice coincida con C_3 e che cada nella direzione C_3C_3' il suo asse. Per descrivere la parabola di mezzo $B_2D_2C_2E_2B_3$ serve la sagoma della parabola di parametro $\frac{2}{p_2}$. I punti estremi d'appoggio A_1 ed A_4, le estremità B_2 e B_3 delle ordinate rappresentanti i momenti inflettenti relativi alle sezioni corrispondenti agli appoggi intermedii ed i punti d'inflessione sono evidentemente altrettanti punti che servono a controllare l'esattezza del tracciamento delle parabole con sagome.

Per quanto spetta alle rette le cui ordinate rappresentano gli sforzi di taglio, ecco in qual modo si possono esse descrivere sul disegno. Nell'espressione di N_1 pongasi $z_1=0$, nell'espressione di N_2 si faccia $z_2=0$ ed in quella di N_3 si metta $z_3=0$; i valori di N_1, N_2 ed N_3 che allora risultano si possono ritenere siccome rappresentanti le ordinate delle indicate rette in corrispondenza delle sezioni della trave poste sui mezzi dei tre appoggi A_1, A_2 ed A_3 e quindi portando rispettivamente queste ordinate in una conveniente scala in A_1b_1, A_2b_2 ed A_3b_3 si ha un punto per ciascuna delle tre rette le cui ordinate rappresentano gli sforzi di taglio in ognuna delle travate. Unendo il punto b_1 con C_1', il punto b_2 con C_2', il punto b_3 con C_3' e prolungando le rette da essi determinate fino alle verticali passanti pei punti A_2, A_3 ed A_4, risultano in $b_1C_1'f_2$, $b_2C_2'f_3$ e $b_3C_3'f_4$ le rette le cui ordinate rappresentano gli sforzi di taglio.

Nella pratica importa generalmente di conoscere solamente i valori assoluti dei momenti inflettenti e degli sforzi di taglio, e quindi per prendere da una sol parte dell'orizzontale OO tutte le ordinate che rappresentano i momenti inflettenti e pure da una sol parte quelle che rappresentano gli sforzi di taglio si usa di riportare le parti di parabola che cadono sotto la orizzontale O O, come le $E_1B_2D_2$ ed $E_2B_3D_3$, al di sopra in $E_1B_2'D_2$ ed $E_2B_3'D_3$, e di segnare le parti delle rette che cadono sopra la detta orizzontale, come $C_1'f_2$, $C_2'f_3$ e $C_3'f_4$, al di sotto in $C_1'f_2'$, $C_2'f_3'$ e $C_3'f_4'$.

123. **Determinazione di una delle dimensioni di una sezione trasversale qualunque di un solido rettilineo collocato su più di due appoggi.** — Da quanto si è detto sulla resistenza dei solidi rettilinei orizzontalmente posti su più di due appoggi e caricati di pesi risulta che per tutte le loro sezioni trasversali si possono conoscere i momenti inflettenti μ e gli sforzi di taglio N, sia deducendoli numericamente dalle espressioni dei momenti inflettenti e degli sforzi di taglio per ciascuna travata, sia considerandoli come ordinate, per rapporto alla orizzontale su cui vennero segnate le distanze degli appoggi, di archi parabolici e di linee rette, i primi disegnati al di sopra e le seconde tracciate al di sotto di detta orizzontale. Essendo nota la forma della sezione trasversale, in funzione delle quantità date che ad essa si riferiscono e della dimensione che vuolsi determinare si possono esprimere le distanze v' e v'' delle fibre maggiormente allungate e di quelle maggiormente accorciate dall'asse neutro, il momento di inerzia I della sezione pure rispetto all'asse neutro e la superficie Ω della sezione stessa. Di più sapendosi di qual materia è costituito il solido, si possono dir noti i coefficienti di rottura R', R'' ed R^{IV} per estensione, per compressione e per scorrimento trasversale ed i relativi coefficienti di stabilità n', n'' ed n^{IV}, oppure i coefficienti di snervamento Q', Q'' e Q^{IV} cogli adatti coefficienti di stabilità m', m'' ed m^{IV}. Ciò premesso, si determina la dimensione incognita di una data sezione mediante le equazioni di stabilità del numero 93, oppure con quelle del numero 92, ed applicandone due sole (num. 109) oppure tutte e tre secondochè la sezione del solido è simmetrica o disimmetrica rispetto al suo asse neutro.

124. **Equazioni delle curve elastiche secondo cui si dispongono gli assi delle diverse travate di una trave orizzontalmente collocata su più di due appoggi.** — Essendo MN (*fig.* 103) una travata qualunque sostenuta da due appoggi distanti orizzontalmente di $MN = a$, chiamando p il peso distribuito in modo costante su ogni unità della sua lunghezza, rappresentando T la tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente alla curva secondo cui si dispone l'asse della trave in M fa coll'asse Mz preso come asse delle ascisse, A e B due costanti, ε il momento di flessibilità, z ed u le due coordinate del centro di superficie di una sezione qualunque

della travata che si considera, col ragionamento che venne tenuto al numero 114 per dedurre le equazioni (α) e (3), si possono stabilire le equazioni

$$\varepsilon(u - \mathrm{T}z) = \frac{1}{2}\mathrm{A}z^2 + \frac{1}{6}\mathrm{B}z^3 - \frac{1}{24}pz^4$$

$$-\varepsilon\mathrm{T} = \frac{1}{2}\mathrm{A}a + \frac{1}{6}\mathrm{B}a^2 - \frac{1}{24}pa^3.$$

Moltiplicando la seconda di queste equazioni per z e quindi sottraendola dalla prima si deduce l'equazione

$$\varepsilon u = \frac{1}{2}z\left[\mathrm{A}(z-a) + \frac{1}{3}\mathrm{B}(z^2 - a^2) - \frac{1}{12}p(z^3 - a^3)\right],$$

che è appunto l'equazione domandata, e nella quale si possono introdurre i momenti inflettenti m' ed m'' sugli appoggi M ed N invece di A e di B, giacchè per le relazioni (7) del citato numero 114 si ha

$$\mathrm{A} = m', \qquad \mathrm{B} = \frac{1}{2}pa + \frac{m'' - m'}{a}.$$

Facendo $u = f$ e $z = \frac{1}{2}a$ nell'espressione di εu si ottiene la saetta f nel mezzo della travata, e dopo fatte tutte le riduzioni vien essa data da

$$f = \frac{a^2}{8\varepsilon}\left(-\mathrm{A} - \frac{1}{2}\mathrm{B}a + \frac{7}{48}pa^2\right).$$

ARTICOLO II.

Flessione prodotta nei solidi rettilinei da forze parallele ai loro assi.

125. Come può avvenire flessione in un solido prismatico sotto l'azione di una forza parallela al suo asse. — Allorquando un corpo prismatico trovasi sotto l'azione di una forza T′ che tende ad allontanare (*fig.* 105), oppure di una forza T″ che tende ad avvicinare (*fig.* 106) la sezione CD per rapporto alla sezione vicinissima AB, se le dette forze sono parallele all'asse del solido senza coincidere con esso, avviene che le fibre nè si allungano, nè si accorciano tutte di quantità eguali, e talvolta persino succede che alcune si allungano ed altre si accorciano. Segue da ciò che la sezione CD più non si conserva parallela alla sezione AB e che quella, supposta piana anche dopo la deformazione e trasportata in C_1D_1, prende un doppio movimento di translazione e di rotazione rispetto a questa. Il piano in cui trovavasi la sezione CD prima della deformazione vien incontrato dal piano in cui essa si trasporta dopo la deformazione, e la linea secondo cui quest'incontro avviene costituisce l'*asse neutro* della sezione CD. Se la detta intersezione trovasi nel corpo, alcune fibre si allungano, alcune altre si accorciano, e quelle che per essa vengono a passare non subiscono nè allungamenti, nè accorciamenti. Se la stessa intersezione cade fuori del corpo è segno che tutte le fibre trovansi allungate nel caso espresso dalla figura 105, ed accorciate in quello rappresentato dalla figura 106. In un solido prismatico adunque sollecitato da una forza parallela, ma non coincidente col suo asse, analogamente a quanto succede per la flessione prodotta nei prismi da forze perpendicolari ai loro assi, ha luogo rotazione di una sezione qualunque rispetto ad una sezione infinitamente vicina, per ciascuna delle sezioni del corpo esiste un asse neutro, e quindi si verificano dei fatti in tutto analoghi a quelli che si manifestano nella flessione quale venne studiata nel precedente articolo.

Che le sezioni primitivamente piane siano anche piane dopo la deformazione, che le fibre si comportino come altrettanti piccoli prismi isolati non aventi alcuna aderenza fra di loro e che in uno stesso corpo omogeneo il valore del coefficiente di elasticità longitudinale sia lo stesso tanto per le fibre allungate quanto per le fibre accorciate, sono le ipotesi che servono di base allo studio della flessione prodotta nei solidi prismatici da forze parallele, ma non coincidenti coi loro assi, ed i risultati a cui si arriva sono sufficientemente esatti per la pratica finchè le forze estrinseche non superano quelle capaci di produrre lo snervamento nel corpo cui trovansi applicate.

126. **Equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari che si sviluppano in una sezion retta qualunque di un corpo prismatico ed omogeneo sotto l'azione di una forza parallela al suo asse; centro di tensione.** — Essendo AB e CD due sezioni trasversali infinitamente vicine fra di loro (*fig.* 110) ed

appartenenti ad un solido prismatico il quale trovasi sotto l'azione di una forza T′ che, supposta applicata secondo l'asse zz', tende ad allontanare la seconda sezione dalla prima, si può dire: che la sezione CD, portandosi in C_1D_1, subisce relativamente alla sezione AB un movimento di translazione ed un movimento di rotazione attorno ad un asse situato nel suo piano e proiettato in O_1; che questi due movimenti tendono soltanto ad allungare o ad accorciare le fibre del corpo; che non vien provocata la resistenza allo scorrimento trasversale; e che in tutta l'estensione della sezione CD, rappresentata in vera forma e grandezza nella figura C′E′D′F′, non vien provocata che l'elasticità longitudinale con allungamento di tutte le fibre, oppure con allungamento di alcune e con accorciamento di alcune altre a seconda della direzione della forza T′ e della posizione del suo punto d'applicazione. Le equazioni d'equilibrio fra la forza T′ e le forze molecolari che si sviluppano nella sezion retta qualunque CD si deducono con un procedimento in tutto analogo a quello che già venne seguito al numero 88, tralasciando però quella che si riferisce allo scorrimento trasversale, ed ecco un'esposizione succinta e spedita del modo di arrivare a queste equazioni.

Si indichino con ω, Ω, x, y, v, l, V, ψ, θ, I′, I″ ed E le quantità già designate colle stesse lettere nel citato numero 88, e si chiamino m ed n l'ascissa $\overline{G'K}$ e l'ordinata $\overline{KH'}$ del punto d'incontro H′ della forza T′ col piano della sezione CD, nella quale vennero assunti per assi coordinati gli assi principali centrali d'inerzia $xG'x'$ ed $yG'y'$ della figura C′E′D′F′.

Ragionando come al numero 88 si trova: che

$$v = y\cos\psi + x\,\mathrm{sen}\,\psi \qquad (1);$$

che la tensione sopportata dall'elemento di fibra ab ha per espressione

$$E\omega\frac{(V+v)\theta}{l};$$

che il momento di questa forza rispetto all'asse delle x è

$$E\omega\frac{(V+v)\theta}{l}y;$$

che il momento della medesima forza rispetto all'asse delle y vale

$$E\omega\frac{(V+v)\theta}{l}x;$$

e che le equazioni d'equilibrio si riducono a

$$\Sigma E\omega\frac{(V+v)\theta}{l}-T'=0,$$

$$\Sigma E\omega\frac{(V+v)\theta}{l}y-T'n=0,$$

$$\Sigma E\omega\frac{(V+v)\theta}{l}x-T'm=0,$$

la prima delle quali esprime che è zero la somma algebrica delle forze parallele all'asse del prisma, la seconda che deve essere zero la somma dei momenti delle forze estrinseche e delle forze molecolari rispetto all'asse principale $xG'x'$, e la terza che deve essere zero la somma dei momenti delle stesse forze rispetto all'asse principale $yG'y'$.

Sostituendo nelle ultime tre equazioni il valore di v dato dalla (1), rammentando che il punto G' è centro di superficie della figura C'E'D'F' e che gli assi coordinati $xG'x'$ ed $yG'y'$ sono assi principali centrali d'inerzia, si ottengono, a motivo delle semplificazioni di cui venne data ragione al numero 88, le seguenti equazioni di equilibrio ridotte alla loro forma più semplice

$$\left.\begin{aligned} E\frac{\theta}{l}V\Omega&=T' \\ E\frac{\theta}{l}I'\cos\psi&=T'n \\ E\frac{\theta}{l}I''\operatorname{sen}\psi&=T'm \end{aligned}\right\}\quad(2).$$

Il punto H' pel quale necessariamente passa la risultante di tutte le azioni molecolari, giacchè esse fanno equilibrio alla forza data T', chiamasi *centro di tensione*.

127. Determinazione dell'asse neutro. — La determinazione dell'asse neutro U'U' (*fig.* 110) si farà cercando l'angolo $xGU=\psi$

dell'asse della x colla retta UU ad esso parallela condotta pel centro di superficie G′ della sezione C′E′D′F′, e trovando il punto O_1' oppure il punto L in cui la retta $o'o_1'$ perpendicolare oppure la retta ll_1 facente un dato angolo con UU incontra l'asse neutro domandato.

Per ottenere l'angolo ψ dividasi la terza delle tre equazioni (2) del numero precedente per la seconda e si ottiene

$$\frac{I''}{I'}\tang\psi = \frac{m}{n},$$

d'onde

$$\tang\psi = \frac{I'}{I''}\frac{m}{n} \qquad (1).$$

In questa formola invece dei momenti d'inerzia I' ed I'' si possono mettere i raggi di girazione b e a della superficie C′E′D′F′, il primo rispetto all'asse xG′x' ed il secondo rispetto all'asse yG′y', per cui essendo

$$I' = b^2\Omega \qquad I'' = a^2\Omega,$$

risulta

$$\tang\psi = \frac{b^2}{a^2}\frac{m}{n} \qquad (2).$$

Osservando ora che $\frac{m}{n}$ esprime la tangente trigonometrica dell'angolo KH′G′ = H′G′y agevolmente si comprende come, chiamando *piano di sollecitazione* il piano determinato dall'asse del prisma e dalla forza sollecitante, il rapporto $\frac{m}{n}$ altro non sia che la tangente dell'angolo che ai numeri 88 ed 89 venne indicato con φ, e come per conseguenza, in conformità di quanto si trovò al citato numero 89, l'asse neutro debba essere parallelo alla tangente MT all'ellisse centrale d'inerzia nel punto in cui vien essa incontrata dal piano di sollecitazione o, in altri termini, nel punto M in cui la detta ellisse vien incontrata dalla retta che unisce il punto G′ col punto H′.

Per trovare la distanza $\overline{G'O_1'} = V$ dell'asse neutro dal centro di superficie G′ dividasi per I′ la seconda e per I″ la terza delle già citate equazioni (2) del numero precedente, si elevino dopo al quadrato e si sommino i risultati. Così procedendo si trova

$$E^2 \frac{\theta^2}{l^2}(\cos^2\psi + \operatorname{sen}^2\psi) = T'^2 \left(\frac{n^2}{I'^2} + \frac{m^2}{I''^2}\right),$$

d'onde, estraendo la radice quadrata ed osservando che $\cos^2\psi + \operatorname{sen}^2\psi = 1$, si ricava

$$E\frac{\theta}{l} = T' \sqrt{\frac{n^2}{I'^2} + \frac{m^2}{I''^2}} \qquad (3).$$

Questo valore di $E\frac{\theta}{l}$ si sostituisca nella prima delle equazioni (2) del precedente numero e si ricavi il valore della distanza V la quale rimane allora determinata in funzione delle quantità cognite m, n, Ω, I′ ed I″ mediante l'equazione

$$V = \frac{1}{\Omega\sqrt{\frac{n^2}{I'^2} + \frac{m^2}{I''^2}}} \qquad (4),$$

oppure mediante l'equazione

$$V = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{b^4} + \frac{m^2}{a^4}}} \qquad (5),$$

quando nella (4) si pongono per I′ e per I″ i loro valori in funzione della superficie Ω e dei raggi di girazione a e b.

Invece di trovare il punto O_1' dell'asse neutro mediante la distanza $\overline{G'O_1'} = V$ che esso ha dal centro di superficie G′, si può determinare il punto L in cui il detto asse incontra il prolungamento della retta G′H′ che unisce il punto G′ col punto H′. Perciò, chiamando

φ l'angolo $MG'y$,
U la domandata lunghezza $\overline{G'L}$,
U_1 la lunghezza della retta $\overline{H'G'}$ e
p la lunghezza $\overline{G'M}$ del semi-diametro dell'ellisse centrale d'inerzia

coniugato dal diametro $\overline{RS}$ parallelo alla direzione M T dell'asse neutro,

si ha dal triangolo rettangolo $G'O_1'L$ in cui l'angolo $G'LO_1'$ vale l'angolo $H'G'U = 90° - \varphi + \psi$

$$U = \frac{V}{\cos(\varphi - \psi)}.$$

Ponendo in quest'equazione il valore di V dato dalla (5) ed osservando che dal triangolo rettangolo $H'KG'$ si ha

$$m = U_1 \operatorname{sen}\varphi, \qquad n = U_1 \cos\varphi,$$

risulta

$$U = \frac{1}{\cos(\varphi - \psi)} \frac{a^2 b^2}{U_1 \sqrt{a^4 \cos^2\varphi + b^4 \operatorname{sen}^2\varphi}},$$

il qual valore di U, per essere

$$\cos(\varphi - \psi) = \cos\varphi \cos\psi + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{b^2}{a^2}\frac{m}{n} = \frac{b^2}{a^2}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}$$

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\psi}} = \frac{a^2 \cos\varphi}{\sqrt{a^4\cos^2\varphi + b^4 \operatorname{sen}^2\varphi}}$$

$$\operatorname{sen}\psi = \frac{\operatorname{tang}\psi}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\psi}} = \frac{b^2 \operatorname{sen}\varphi}{\sqrt{a^4\cos^2\varphi + b^4\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

si riduce a

$$U = \frac{a^2 b^2}{a^2\cos^2\varphi + b^2\operatorname{sen}^2\varphi}\frac{1}{U_1}.$$

Ma, essendo a e b i due semi-assi principali $\overline{G'a}$ e $\overline{G'b}$ dell'ellisse centrale d'inerzia, e φ l'angolo che il semi-diametro $\overline{G'M} = p$ fa col semi-asse principale $\overline{Gb} = b$ nella cui direzione venne assunto l'asse delle y, si ha

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = p^2,$$

per cui il valore di U prende la semplicissima forma

$$U = \frac{p^2}{U_1} \qquad (6).$$

Si può anche ottenere un'espressione della distanza $\overline{G'O_1'} = V$ del centro di superficie G′ dall'asse neutro U′U′, semplice quanto quella di $\overline{G'L} = U$, nel seguente modo. Dai triangoli H′h′G′, MmG′ e G′O₁′L si ricavino rispettivamente i valori delle ipotenuse $\overline{G'H'} = U_1$, $\overline{G'M} = p$ e $\overline{G'L} = U$ in funzione dell'angolo $H'G'U = 90° - \varphi + \psi$ e dei cateti $\overline{H'h'} = V_1$, $\overline{Mm} = G$ e $\overline{G'O_1'} = V$. Così facendo si ottiene

$$U_1 = \frac{V_1}{\cos(\varphi - \psi)},$$

$$p = \frac{G}{\cos(\varphi - \psi)},$$

$$U = \frac{V}{\cos(\varphi - \psi)},$$

e sostituendo questi valori di U_1, p ed U nell'equazione (6) risulta

$$V = \frac{G^2}{V_1} \qquad (7).$$

Le equazioni (1) e (2) trovate in questo numero danno la direzione dell'asse neutro, ed un suo punto si trova mediante una delle equazioni (4), (5), (6) e (7).

128. Tensione in qualsiasi punto di qualunque sezion retta; tensione media. — Si consideri sempre la sezion retta CD (*fig.* 110) e vogliasi l'espressione della tensione q riferita all'unità di superficie nel suo punto b' distante della quantità $\overline{b'q} = v$ dalla retta UU condotta pel centro di superficie G′ parallelamente all'asse neutro U′U′ e di coordinate $\overline{G'p} = x$ e $\overline{pb'} = y$.

L'elemento di fibra $\overline{ab}$, lungo primitivamente l, sotto l'azione della forza T′ subisce l'allungamento bb_1, il quale per essere $\overline{bG} = \overline{b'q} = v$ e $\overline{GO_1} = \overline{G'O_1'} = V$ vien espresso da $(V + v)\theta$, giacchè $\overline{bb_1}$

si può considerare siccome un piccolissimo arco di circolo di raggio $V+v$ e chiudente l'angolo CO_1C_1 cui corrisponde l'arco θ di raggio eguale all'unità. Segue da ciò che l'espressione di q (numero 12) è

$$q=E\frac{(V+v)\theta}{l},$$

la quale, dopo d'avervi sostituito il valore di $E\frac{\theta}{l}$ che ricavasi dalla prima delle equazioni (2) del numero 126, si riduce a

$$q=\frac{T'}{\Omega}\left(1+\frac{v}{V}\right) \qquad (1).$$

Con questa equazione, determinata la distanza V con una delle formole del numero precedente, si può trovare la tensione q riferita all'unità di superficie in un punto qualunque b' distante della quantità $\overline{b'q}=v$ dalla retta UU parallela all'asse neutro U′U′, ed attribuendo a v il segno + oppure il segno —, secondo che si riferisce ad un punto come b' posto da quella parte della retta UU dalla quale esiste l'incontro H′ della forza tendente T′ col piano della sezione CD oppure dalla parte opposta, il valore di q rappresenta una tensione quando risulta positivo, ed una tensione negativa ossia una pressione quando riesce negativo.

Si possono anche trovare altre espressioni della tensione q in un punto qualunque b' della sezione CD e fra tutte merita in ispecial modo di essere considerata quella che è funzione delle coordinate x ed y di detto punto. Se dalla prima delle equazioni (2) del numero 126 si ricava il valore di $E\frac{\theta}{l}$, sostituendolo nella seconda e nella terza di dette equazioni, immediatamente si deducono i seguenti valori di $\cos\psi$ e di $\operatorname{sen}\psi$

$$\cos\psi=\frac{nV\Omega}{I'}, \qquad \operatorname{sen}\psi=\frac{mV\Omega}{I''},$$

i quali sostituiti nell'equazione (1) del citato numero 126 conducono a trovare

$$v=V\Omega\left(\frac{n}{I'}y+\frac{m}{I''}x\right).$$

Questo valore di v si ponga nell'ultima espressione di q, la quale diventa

$$q = T'\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{n}{I'}y + \frac{m}{I''}x\right) \qquad (2),$$

od anche

$$q = \frac{T'}{\Omega}\left(1 + \frac{n}{b^2}y + \frac{m}{a^2}x\right) \qquad (3),$$

quando invece dei momenti I′ ed I″ si pongono i loro valori rispettivi $b^2\Omega$ ed $a^2\Omega$ espressi in funzione dei raggi di girazione. Alle quantità m, n, x ed y si devono dare i segni che loro convengono per rapporto alle posizioni che occupano rispetto agli assi coordinati; ed allora, come già si è detto in questo numero, rappresenta una tensione un valore positivo ed una tensione negativa o pressione un valore negativo di q.

Volendosi trovare il valore di q per l'*elemento di fibra media*, ossia per l'elemento di fibra passante pel centro di superficie G′, bisogna fare $v = 0$ nell'equazione (1) oppure $x = 0$ ed $y = 0$ nell'equazione (2), e chiamando allora q_1 il valore particolare che prende q, risulta

$$q_1 = \frac{T'}{\Omega}$$

ossia che l'elemento di fibra media sopporta la stessa tensione qualunque sia il punto d'applicazione della forza T′, la qual tensione è ciò che chiamasi *tensione media*.

129. **Allungamento subito da un elemento di fibra qualunque; allungamento subìto dall'elemento di fibra media; deviazione della sezion retta del prisma.** — Considerando l'elemento di fibra $\overline{ab}$ (*fig.* 110) compreso fra le due sezioni AB e CD, l'allungamento $\overline{bb_1} = z$ dal medesimo subìto si può esprimere (num. 12) con

$$z = \frac{q\omega l}{E\omega} = \frac{ql}{E},$$

essendo E il coefficiente di elasticità, l la lunghezza del detto elemento, ω la superficie della sua sezione trasversale e q la tensione riferita all'unità di superficie, che il medesimo sopporta.

Il valore di z rappresenta un allungamento oppure un accorciamento (allungamento negativo) secondo che trovasi preceduto dal segno $+$ o dal segno $-$.

Volendosi trovare l'allungamento $\overline{GG_1}=z_1$ subìto dall'elemento di fibra media HG bisogna porre nell'espressione di z quel valore particolare q_1 di q che corrisponde a $v=0$ (numero 128) e risulta

$$z_1=\frac{T'l}{E\Omega},$$

ossia che l'elemento di fibra media subisce lo stesso allungamento come se la forza T′ fosse non solo parallela, ma proprio diretta secondo l'asse del prisma.

Trovandosi sotto l'azione della forza T′ il prisma di cui AB e CD sono due sezioni vicinissime, e supponendo che la sezione CD sia invariabile di posizione, dopo la deformazione il piano CD passa in C_1D_1, e si tratta di avere l'espressione analitica dell'angolo $CO_1C_1=\gamma$. Si osservi perciò che l'asse neutro, ossia lo spigolo dell'angolo diedro che vuolsi valutare, è parallelo alla retta UU e che dista da questa retta di $\overline{O_1'G'}=\overline{O_1G}=V$, che l'allungamento $\overline{GG_1}$ subìto dall'elemento di fibra media è il valore di z_1 or ora trovato e che dalla figura GO_1G_1, che si può risguardare come un triangolo rettangolo, si ha

$$\operatorname{tang}\gamma=\frac{z_1}{V}.$$

130. Resistenze riferite all'unità di superficie opposte dalle fibre maggiormente allungate e da quelle maggiormente compresse. — L'equazione (1) del numero 128 può essere scritta

$$q=\frac{T'}{\Omega}\frac{V+v}{V},$$

e da essa immediatamente risulta: che la tensione sopportata in una sezion retta qualsiasi da una fibra qualunque, la qual tensione costituisce la resistenza che essa fibra oppone, è proporzionale alla sua distanza $V+v$ dall'asse neutro; che le fibre maggiormente distanti dal detto asse sono quelle che sopportano la maggior tensione riferita all'unità di superficie; che vi sono soltanto fibre sopportanti una maggior tensione positiva quando l'asse neutro in una sezione qualunque cade fuori del corpo considerato; e finalmente che esistono alcune fibre le quali sopportano una maggior tensione positiva ed alcune altre che sopportano una maggior tensione negativa, ossia una maggiore pressione, quando l'asse neutro trovasi nell'interno del corpo.

Ciò premesso, considerando il caso rappresentato dalla figura 110 in cui l'asse neutro U′U′ cade nell'interno del corpo, e chiamando

Q_1 la tensione riferita all'unità di superficie, sopportata da quel elemento di fibra il quale, trovandosi per rapporto all'asse neutro da quella stessa parte in cui esiste il centro di tensione, maggiormente dista dall'asse neutro medesimo,

Q_2 il valore assoluto della tensione, ossia la pressione pure riferita all'unità di superficie, sopportata da quel elemento di fibra il quale, trovandosi per rapporto all'asse neutro dalla parte opposta a quella in cui esiste il centro di tensione, maggiormente dista dal detto asse,

v' la distanza dell'elemento di fibra cui corrisponde la tensione Q_1 dalla retta UU condotta pel centro di superficie G′ parallelamente all'asse neutro,

v'' la distanza, assunta come positiva, dell'elemento di fibra cui corrisponde la pressione Q_2 pure della retta UU,

e ritenendo che le lettere Ω, V e T′ abbiano i significati che alle medesime già vennero attribuiti nei precedenti numeri, si ha (numero 128)

$$Q_1 = \frac{T'}{\Omega}\left(1 + \frac{v'}{V}\right)$$

$$Q_2 = \frac{T'}{\Omega}\left(-1 + \frac{v''}{V}\right).$$

131. Condizioni ed equazioni di stabilità. — Una volta determinata la tensione riferita all'unità di superficie che sopporta la fibra maggiormente allungata e la tensione negativa o pressione, pure riferita all'unità di superficie, che sostiene la fibra maggiormente compressa, affinchè il solido veramente si possa dir stabile è necessario che queste resistenze siano inferiori a quelle che corrispondono allo snervamento per estensione e per compressione, per modo che, nell'ipotesi che si conoscano i coefficienti di snervamento Q′ e Q″, il primo per trazione (num. 14) ed il secondo per compressione (num. 51), si hanno le condizioni di stabilità

$$\frac{T'}{\Omega}\left(1+\frac{v'}{V}\right)<Q'$$

$$\frac{T'}{\Omega}\left(-1+\frac{v''}{V}\right)<Q'',$$

le quali, chiamando m' ed m'' due coefficienti di stabilità, il primo conveniente per la resistenza all'estensione (num. 14) ed il secondo adatto per la resistenza alla compressione (num. 31), facilmente si traducono nelle seguenti equazioni di stabilità

$$\frac{T'}{\Omega}\left(1+\frac{v'}{V}\right)=m'Q'$$

$$\frac{T'}{\Omega}\left(-1+\frac{v''}{V}\right)=m''Q''.$$

Quando invece dei coefficienti di snervamento Q' e Q'' sono noti i coefficienti di rottura R' ed R'' (num. 17 e 34), il primo relativo all'estensione ed il secondo relativo alla compressione, invece delle equazioni di stabilità che or ora vennero stabilite, convien adottare le due

$$\frac{T'}{\Omega}\left(1+\frac{v'}{V}\right)=n'R'$$

$$\frac{T'}{\Omega}\left(-1+\frac{v''}{V}\right)=n''R'',$$

nelle quali n' ed n'' sono due coefficienti di stabilità i cui valori vanno assunti colle norme che vennero date ai numeri 18 e 40.

132. **Linee di egual tensione; posizioni diverse dell'asse neutro quando il centro di tensione varia; superficie centrale di una sezione.** — Per tutti i punti d'una linea qualunque EF (*fig.* 110) tracciata nella sezione C'E'D'F' e parallela alla retta UU condotta pel centro di superficie G' in direzione dell'asse neutro U'U', non variando la distanza v, il valore della tensione q riferita all'unità di superficie, come chiaramente lo dimostra l'equazione (1) del numero 128, si conserva costante. Per questa ragione tutte le rette condotte in una data sezione parallelamente al suo asse neutro chiamansi *linee di egual tensione;* la loro direzione è conosciuta

a priori come quella di UU quando è dato il punto d'applicazione H' del forza T', giacchè questa direzione, coniugata di G'H' nell'ellisse centrale d'inerzia, non è altro che quella della tangente a quest'ellisse nel punto posto su G'H'.

Se il centro di tensione H' varia di posizione partendo dal centro di superficie G' ed indefinitamente allontanandosi sulla direzione del raggio vettore $G'l_1$, la direzione delle linee di eguale tensione per quanto evidentemente risulta dal già detto non cangia; ma lo stesso non succede della posizione dell'asse neutro la cui distanza dal centro di superficie G', espressa da $V = \frac{G^2}{V_1}$ (num. 127), varia dall'infinito fino a zero. Così, allorquando il punto H' è assai vicino al punto G', l'asse neutro incontra la $G'o'$ ad una grandissima distanza, la quale progressivamente diminuisce e diventa nulla quando il punto H' siasi allontanato indefinitamente. Segue da ciò che, nell'ipotesi di spostamenti del centro di tensione lungo la retta Aa (*fig.* 107) di necessità vi devono esistere due sue posizioni particolari α ed α' per cui ciascuno dei due assi neutri corrispondenti non abbia che un punto comune colla sezione trasversale data.

Se per il centro di superficie G' si immaginano condotte, oltre la retta Aa, tante altre rette Bb, Cc, Dd, ... e determinate sulle medesime le coppie dei punti β e β', γ e γ', δ e δ', ... analoghi ad α e ad α', unendo tutti questi punti si ottiene un contorno il quale limita una data parte della superficie della sezione proposta, e questa superficie così limitata è quella che chiamasi *superficie centrale*. Il contorno della superficie centrale è una linea la quale facilmente può essere costrutta per una data sezione, ed ecco il metodo per procedere alla sua determinazione tanto nel caso di una sezione limitata da una linea poligonale, quanto in quello di una sezione limitata da una linea curva.

Essendo ABCD (*fig.* 108) la sezione poligonale per la quale vuolsi determinare la superficie centrale, G' il suo centro di superficie, xx' ed yy' gli assi principali dell'ellisse centrale d'inerzia ed $aba'b'$ quest'ellisse, si conducano alla medesima le due tangenti MT ed NT la prima parallela al lato AB e l'altra parallela al lato AD. Egli è evidente che, stando il centro di tensione nell'interno dell'angolo MG'N, le linee di egual tensione avranno una direzione compresa fra quella delle accennate tangenti, poichè tale è la direzione che può avere una tangente qualunque all'ellisse in un punto fra M ed N. Segue da ciò che le linee di egual tensione corrispondenti ad un centro di tensione posto nell'interno del detto angolo contemporaneamente tagliano le direzioni dei due lati AB ed AD, e che se l'asse neutro incontra il perimetro ABCD in un sol punto, questo non può essere che un punto comune alle due direzioni AB ed AD e quindi il vertice A. Ciò premesso, chiamando X ed Y le due coordinate note del punto A rispetto agli assi xx' ed yy', ξ e υ quelle del centro di tensione ed esprimendo mediante la formola (3) del numero 128 che la tensione è nulla in A, si ha

$$1+\frac{\upsilon}{b^2}Y+\frac{\xi}{a^2}X=0 \qquad (1),$$

la qual equazione, essendo di primo grado fra ξ e υ e dovendosi applicare fra le posizioni G'M e G'N del raggio vettore a tutti i centri di tensione posti sul contorno della superficie centrale, fa vedere che nell'angolo MG'N la superficie centrale deve essere terminata dalla retta per cui si conosce l'equazione fra le sue coordinate ξ e υ. A ciascun vertice del perimetro della sezione proposta corrisponde un'altra retta nel contorno della superficie centrale, e l'assieme di tante rette, eguali in numero al numero dei lati del perimetro della sezione poligonale per cui si cerca la superficie centrale, costituisce il perimetro dal quale questa superficie trovasi contorniata.

Quando la sezione di cui vuolsi trovare la superficie centrale è limitata da una linea curva qualunque, una volta determinato il suo centro di superficie G' (*fig.* 109) e tracciata l'ellisse centrale d'inerzia $aba'b'$, si incominci dal tirare in essa una corda cd, si divida per mezzo in e e si conduca la retta AB determinata dal punto G' e dal punto e. Fatto questo, al contorno della sezione proposta si conduca la tangente CD parallela alla corda cd e quindi anche parallela alla tangente all'ellisse centrale d'inerzia in f, si determini il punto d'incontro E di quella tangente con AB e si misurino $\overline{G'f}=p$ e $\overline{G'E}=U$. Tra p, U e la distanza U_1 del centro di tensione corrispondente all'asse neutro CD dal punto G' si ha la relazione (num. 127)

$$U=\frac{p^2}{U_1} \qquad (2),$$

per modo che, conoscendosi p ed U, rimane determinata la distanza U_1 la quale, portata da G' in α su quella delle due parti in cui la AB è divisa dal punto G' che non è incontrata dalla tangente

CD al contorno della sezione proposta, somministra nel punto α un punto della curva limitante la superficie centrale. Conducendo per G′ altre rette ed operando su esse come si è fatto per rapporto alla AB si possono trovare, come si è trovato il punto α, quanti altri punti si vogliono e quindi tracciare il contorno della superficie centrale.

Una volta determinata la superficie centrale per la sezion retta di un dato prisma si può dire: che tutte le sue fibre si allungano quando il centro di tensione cade entro la superficie centrale; che tutte le fibre si allungano pure, ma che ne esiste una posta sulla superficie laterale del solido che non si allunga nè si accorcia, quando il centro di tensione è sul contorno della superficie centrale; e che vi sono alcune fibre che si allungano ed alcune altre che si accorciano quando il centro di tensione trovasi fuori della superficie centrale.

133. **Problemi sulla determinazione della superficie centrale.** — I. *Determinare la superficie centrale per una sezione rettangolare* ABCD (*fig.* 111) *i cui lati* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$ *sono rispettivamente* m *e* n.

Tirando le due rette xx' ed yy' le quali dividono per mezzo i lati opposti si ottengono in esse gli assi principali centrali d'inerzia e nel loro incontro O risulta il centro di superficie della sezione proposta. La superficie Ω ed i momenti d'inerzia I′ ed I″, il primo rispetto all'asse xx' ed il secondo rispetto all'asse yy', ammettono i valori

$$\Omega = mn, \qquad I' = \frac{1}{12} m n^3, \qquad I'' = \frac{1}{12} n m^3,$$

per cui i quadrati dei raggi di girazione a e b risultano

$$a^2 = \frac{I''}{\Omega} = \frac{1}{12} m^2, \qquad b^2 = \frac{I'}{\Omega} = \frac{1}{12} n^2.$$

Siccome la sezione di cui vuolsi trovare la superficie centrale è un quadrilatero, anche quest'ultima deve avere forma quadrilatera, e per trovare un suo lato, per esempio quello corrispondente al vertice A, non si ha che da sostituire nell'equazione (1) del precedente numero i trovati valori di a^2 e b^2 non che le coordinate dell'accennato vertice le quali sono rispettivamente $X = -\frac{1}{2} m$ ed $Y = -\frac{1}{2} n$. Così procedendo si trova l'equazione

$$\frac{\frac{\nu}{n}}{6}+\frac{\frac{\xi}{m}}{6}=1$$

la quale evidentemente rappresenta la retta che congiunge il punto E col punto F presi in modo che $\overline{OE}$ sia $\frac{1}{6}n=\frac{1}{6}\overline{BC}$ e che $\overline{OF}$ sia $\frac{1}{6}m=\frac{1}{6}\overline{AB}$. In ciascuno degli altri tre angoli formati dagli assi coordinati xx' ed yy' passanti pel centro O del rettangolo si troverà una retta collocata in una posizione simile, e quindi ne deriva che la superficie centrale è un paralellogramma i cui vertici dividono le mediane $\overline{LM}$ e $\overline{KI}$ in tre parti eguali.

II. *Determinare la superficie centrale per una sezione circolare di raggio* $OA=r$ (*fig.* 112).

Per questa sezione i due momenti d'inerzia I' ed I'' sono eguali e vengono essi dati da

$$I'=I''=\frac{1}{4}\pi r^4.$$

Segue da ciò che i due raggi di girazione a e b sono pure eguali, che i loro quadrati trovansi espressi da

$$a^2=b^2=\frac{1}{4}r^2,$$

e che l'ellisse d'inerzia è un circolo di raggio $\frac{1}{2}r$.

S'immagini ora condotto nel circolo dato il diametro qualunque AB e cerchisi il centro di tensione D su questo diametro in modo che il suo estremo B sia il punto per cui passa l'asse neutro corrispondente, il quale, dovendo essere parallelo alla tangente in C alla circonferenza del circolo d'inerzia sarà perpendicolare al detto diametro e quindi tangente alla circonferenza della sezione proposta. Perciò si adopera l'equazione (2) del precedente numero facendo in essa

$$p=\overline{OC}=\frac{1}{2}r\,; \qquad U=\overline{OB}=r,$$

e si ottiene la distanza $U_1 = \overline{OD}$ ponendo

$$U_1 = \frac{p^2}{U} = \frac{1}{4} r.$$

Quest'espressione di U_1 è indipendente dalla posizione del diametro AB e le due quantità p ed U che in essa entrano sono costanti, per modo che la superficie centrale è un circolo di raggio $\overline{OD} = \frac{1}{4} r = \frac{1}{4} \overline{OA}$.

III. *Determinare la superficie centrale per una corona circolare di raggio interno* $\overline{OC} = r'$ *e di raggio esterno* $\overline{OA} = r''$ (*fig.* 115).

I due momenti d'inerzia I' ed I'' sono eguali fra di loro, e lo stesso avviene pei due raggi di girazione; si ha

$$I' = I'' = \frac{1}{4} \pi (r''^4 - r'^4),$$

$$a^2 = b^2 = \frac{1}{4} (r''^2 + r'^2)$$

e quindi l'ellisse d'inerzia è un circolo di raggio $\frac{1}{2} \sqrt{r''^2 + r'^2}$ graficamente rappresentato dalla retta $\overline{OG}$ determinata col tirare la retta EF e col dividerla per metà in G.

Condotto ora un diametro arbitrario AB si osservi che

$$p = \overline{OH} = \frac{1}{2} \sqrt{r''^2 + r'^2}, \qquad U = \overline{OB} = r''$$

e che per conseguenza il valore di U_1, somministrato dall'applicazione dell'equazione (2) del numero precedente, è

$$U_1 = \overline{OI} = \frac{1}{4} \frac{r''^2 + r'^2}{r''}.$$

Questo valore di U_1, dipendendo solamente dai raggi r'' ed r' i quali sono costanti, è pure costante e quindi la superficie centrale è un circolo.

Se lo spessore della corona circolare è assai piccolo si può assumere $r' = r''$ ed allora il raggio della circonferenza che limita la superficie centrale diventa $\frac{1}{2} r''$.

134. Solidi prismatici compressi da forze parallele ai loro assi. — Allorquando la forza T'' (*fig.* 106) la quale sollecita un corpo prismatico non secondo il suo asse ma sibbene in una direzione a questa parallela, supposta trasportata parallelamente a se stessa fino a passare pel detto asse, tende ad avvicinare la sezione qualunque CD alla sezione vicinissima AB, precisamente con metodi in tutto analoghi a quelli che vennero seguìti nei numeri 126, 127, 128, 129, 130, 131 e 132 si possono trovare: le equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari; la direzione e la posizione dell'asse neutro; la pressione riferita all'unità di superficie in un punto qualunque della sezione trasversale del solido; l'accorciamento subìto da un elemento di fibra qualunque e quello subìto dall'elemento di fibra media; la resistenza riferita all'unità di superficie opposta dalle fibre maggiormente compresse e da quelle maggiormente allungate; le condizioni e le equazioni di stabilità; le linee di egual pressione; le posizioni diverse che prende l'asse neutro col variare di quella del punto d'incontro H della forza premente T'' colla sezione trasversale del corpo, il qual punto chiamasi *centro di pressione*, e la superficie centrale.

Ritenendo tutte le denominazioni che già vennero stabilite nei citati numeri e brevemente riepilogando in modo conveniente al caso di una forza premente T'' tutte le formole che già vennero trovate, si ha:

1° Che le equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari sono

$$E\frac{\theta}{l}V\Omega = T''$$

$$E\frac{\theta}{l}I'\cos\psi = T''n$$

$$E\frac{\theta}{l}I''\operatorname{sen}\psi = T''m\,;$$

2° Che la direzione dell'asse neutro vien determinata da una delle due equazioni

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{I'}{I''}\frac{m}{n}$$

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{b^2}{a^2}\frac{m}{n},$$

e che quindi è parallela alla tangente all'ellisse centrale d'inerzia nel punto in cui viene essa incontrata dal piano di sollecitazione ossia dalla retta che unisce il centro di superficie col centro di pressione;

3° Che un punto dell'asse neutro trovasi mediante una delle quattro equazioni

$$V = \frac{1}{\Omega \sqrt{\frac{n^2}{I'^2} + \frac{m^2}{I''^2}}}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{\frac{n^2}{b^4} + \frac{m^2}{a^4}}}$$

$$U = \frac{p^2}{U_1}$$

$$V = \frac{G^2}{V_1},$$

e che il centro di superficie in ogni sezione trasversale del corpo che si considera cade sempre fra il centro di pressione e l'asse neutro;

4° Che la pressione q riferita all'unità di superficie in un punto qualunque di una sezione trasversale del corpo si ottiene con una delle tre equazioni

$$q = \frac{T''}{\Omega}\left(1 + \frac{v}{V}\right)$$

$$q = T''\left(\frac{1}{\Omega} + \frac{n}{I'}y + \frac{m}{I''}x\right)$$

$$q = \frac{T''}{\Omega}\left(1 + \frac{n}{b^2}y + \frac{m}{a^2}x\right),$$

che questa pressione varia proporzionalmente alla distanza del punto per cui viene essa considerata dall'asse neutro, giacchè la prima espressione può essere posta sotto la forma

$$q = \frac{T''}{\Omega} \frac{V+v}{V},$$

in cui $V+v$ è appunto la distanza di un punto qualunque dall'asse neutro, e che, assumendo T'' positiva e dando alle quantità v, m, n, x ed y i segni che loro convengono per le convenzioni stabilite al numero 128, il valore di q che ricavasi rappresenta una pressione oppure una tensione secondochè è preceduto dal segno $+$ o dal segno $-$.

5° Che la pressione q_1 per l'elemento di fibra media vien data da

$$q_1 = \frac{T''}{\Omega}$$

ossia che il detto elemento sopporta la stessa pressione qualunque sia il punto d'applicazione della forza T'' e che sopporta la *pressione media;*

6° Che l'accorciamento subito da un elemento di fibra qualunque non è altro che il valore di z dato dall'equazione

$$z = \frac{q\,l}{E}$$

il quale, tenendo conto del segno di q, rappresenta un accorciamento od un allungamento secondo che risulta positivo o negativo;

7° Che l'accorciamento corrispondente all'elemento di fibra media è

$$z_1 = \frac{T''\,l}{E\,\Omega}$$

ossia che l'elemento di fibra media subisce lo stesso accorciamento come se la forza T'' fosse non solo parallela ma proprio diretta secondo l'asse del prisma;

8° Che l'angolo γ esprimente la deviazione della sezion retta del prisma si può calcolare colla formola

$$\tang \gamma = \frac{z_1}{V};$$

9° Che le resistenze Q_1 e Q_2 opposte rispettivamente dalle fibre maggiormente compresse e da quelle maggiormente allungate ammettono i valori assoluti

$$Q_1 = \frac{T''}{\Omega}\left(1 + \frac{v'}{V}\right)$$

$$Q_2 = \frac{T''}{\Omega}\left(-1 + \frac{v''}{V}\right);$$

10° Che le equazioni di stabilità, allorquando si conoscono i coefficienti di snervamento Q'' e Q' il primo per compressione ed il secondo per trazione, sono

$$\frac{T''}{\Omega}\left(1 + \frac{v'}{V}\right) = m'' Q''$$

$$\frac{T''}{\Omega}\left(-1 + \frac{v''}{V}\right) = m' Q',$$

e che diventano esse

$$\frac{T''}{\Omega}\left(1 + \frac{v'}{V}\right) = n'' R''$$

$$\frac{T''}{\Omega}\left(-1 + \frac{v''}{V}\right) = n' R'$$

quando, invece dei coefficienti di snervamento, si hanno i valori R'' ed R' dei coefficienti di rottura il primo relativo alla compressione ed il secondo relativo alla trazione;

11° Che le linee di egual pressione limitanti la superficie centrale corrispondente ad una data sezione si possono determinare coll'equazione

$$1 + \frac{\upsilon}{b^2} Y + \frac{\xi}{a^2} X = 0$$

nel caso di una sezione poligonale, e coll'equazione

$$U = \frac{p^2}{U_1}$$

in quello di una sezione a contorno curvilineo qualunque.

135. **Ripartizione d'un carico totale sulla base di un prisma non avente aderenza col suo appoggio.** — Allorquando un corpo prismatico è collocato sulla faccia piana di un resistente ed immobile appoggio e che trovasi sottoposto all'azione di una o più forze la cui risultante è parallela all'asse senza però passare per l'asse medesimo, se non vi ha aderenza fra questo corpo ed il suo appoggio, affinchè l'equilibrio esista, devono essere necessariamente soddisfatte queste due condizioni: la risultante deve passare nell'interno del minimo poligono convesso che contiene tutti i punti di contatto del corpo col piano su cui trovasi collocato; essa deve agire in modo che, supposta trasportata parallelamente a se stessa fino ad operare secondo l'asse, tenda a serrare il corpo contro la sua base.

Suppongasi ora di avere un prisma sottoposto all'azione della forza premente T″ (*fig.* 114), per il quale trovansi verificate le accennate due condizioni, e sia da trovarsi la pressione riferita alla unità di superficie in un punto qualunque della sua base AB. Due casi ben diversi si possono presentare nella risoluzione di questo problema: il primo ha luogo quando, supponendo il prisma prolungato nell'interno del suo sostegno in modo che AB diventi una sezion retta intermedia, la posizione dell'asse neutro per detta sezione cade fuori di essa, cosicchè gli elementi di fibra che l'attraversano si trovano compressi; il secondo si verifica quando il detto asse neutro cade sulla sezione AB, cosicchè ha luogo accorciamento in alcuni elementi di fibra ed allungamento in alcuni altri. Il primo caso avviene quando la forza premente T″ agisce nell'interno della superficie centrale corrispondente alla sezion retta AB ossia quando entro detta superficie trovasi il centro di pressione H; il secondo caso ha luogo quando questo centro H cade fuori dell'indicata superficie centrale.

Trovandosi il centro di pressione nell'interno della superficie si può ammettere che le cose avvengano come se realmente avesse luogo il prolungamento del prisma, giacchè la mancanza d'aderenza fra la base di detto prisma e la superficie su cui è collocato non impedisce alle azioni repulsive necessarie per l'equilibrio di svilupparsi come in un corpo continuo. Segue da ciò che il caso in cui la forza premente agisce nell'interno della superficie centrale non abbisogna di uno studio particolare, e che si trova esso compreso nella teoria già esposta nei precedenti numeri di questo articolo.

Quando il centro di pressione cade fuori della superficie centrale, l'asse neutro trovasi nella sezione AB, sopportano una pressione tutti i punti collocati dalla stessa parte del centro di pressione per rapporto all'asse neutro e dovrebbero sopportare una tensione tutti quelli situati dalla parte opposta. Ora, questo in nessun modo si può ammettere, imperocchè l'appoggio che sostiene il prisma è bensì capace di esercitare su di esso delle azioni repulsive, ma, mancandovi l'aderenza, non si comprende come possa dar luogo a delle azioni attrattive. Quanto si è detto in questo capitolo è adunque insufficiente per risolvere il problema nel caso in cui il centro di pressione cade fuori della superficie centrale corrispondente alla base AB, ed è necessaria una risoluzione speciale fondata su ciò che la detta base d'appoggio AB va considerata siccome divisa in due parti, una resistente alla pressione e l'altra non resistente a sforzo alcuno.

136. **Determinazione della linea che, nella base di un solido prismatico non avente aderenza col suo appoggio e sollecitato da una forza premente parallela al suo asse, separa la parte premuta da quella non premuta; modo di trovare la pressione riferita all'unità di superficie in un punto qualunque della parte compressa; come si deduce la pressione massima riferita alla unità di superficie e come si stabilisce l'equazione di stabilità.** — Nella risoluzione di questo problema si parte dall'ipotesi che, dopo la deformazione prodotta dalla forza premente, i punti d'una sezion retta qualunque CD (*fig.* 114) vicinissima alla base AB si conservino ancora su una superficie piana C′D′ in quella parte di detta sezione in cui si verificano delle pressioni. Ammettendo quest'ipotesi risulta che nella parte premuta la pressione riferita all'unità di superficie segue la stessa legge della pressione o della trazione in un punto qualunque della sezione trasversale di un prisma retto; per modo che basta trovare la linea di separazione fra la superficie premuta e quella sulla quale non si esercita nè pressione nè tensione, ed una volta determinata questa linea si può far astrazione della parte non premuta, e determinare nell'altra la pressione in ciascun punto colle formole che vennero riportate al numero 134.

Innanzi tutto la linea di separazione che vuolsi trovare è una linea retta, giacchè, essendo essa il luogo in cui si trovano tutti i punti della parte resistente della base pei quali non vi ha nè pressione nè tensione, costituisce l'asse neutro di detta parte. Che poi quest'asse neutro si debba considerare come una linea retta, immediatamente risulta da ciò che, determinando la pressione riferita all'unità di superficie sulla parte premuta della base con una delle equazioni del citato numero 134, si viene ad ammettere l'esistenza di linee rette di egual pressione una delle quali è appunto l'asse neutro.

Ciò premesso, ecco come in ogni caso si può procedere per trovare approssimativamente e per tentativi la linea di separazione della parte premuta da quella che non sopporta sforzo alcuno. Essendo H il centro di pressione, ossia l'intersezione della forza premente colla base del prisma, ed essendo ABCD (*fig.* 115) il contorno di detta base, in una direzione qualunque XY si conduca una serie di rette parallele fra le due posizioni estreme TT′ e tt', tangenti al contorno ABCD se esso è curvilineo e non aventi che un punto comune al medesimo quando è poligonale; e si cerchi per ciascuna di queste linee, per esempio per EF, il punto H′, centro di pressione nell'ipotesi che sia EF l'asse neutro corrispondente. Per trovare il punto H′ convien determinare il centro di superficie della figura EBF, descrivere l'ellisse centrale d'inerzia corrispondente $aba'b'$, condurre a quest'ellisse la tangente IK parallela ad EF, unire il punto di contatto I col punto G e prolungare questa retta sino al suo incontro L colla EF, misurare $\overline{GI} = p$ e $\overline{GL} = U$, e finalmente determinare $\overline{GH'} = U_1$ colla nota relazione (num. 134)

$$U = \frac{p^2}{U_1}.$$

Il luogo geometrico di tutti i punti così ottenuti conducendo diverse parallele ad EF costituisce una curva MN che parte dal perimetro della superficie centrale e va al perimetro ABCD. Facendo variare la direzione XY si ottengono altre curve analoghe alla MN tutte irradianti attorno alla superficie centrale. Determina l'asse neutro quella di queste curve che passa pel centro di pressione H; e quella retta PQ, cui corrisponde il punto H come centro di pressione della superficie PBQ, separa la parte premuta dalla parte che non subisce nè pressione nè tensione.

Allorquando la sezione ABCD ha tal figura ed il centro di pressione H tal posizione da conoscersi già preventivamente la direzione della linea di separazione della parte premuta da quella che non lo è, riesce facile il trovare la distanza del centro di pressione dalla linea suddetta, ed ecco il ragionamento che conduce a questa determinazione.

Siano: ABCD (*fig.* 116) la base per la quale vuolsi determinare la retta che separa la parte premuta da quella che non soffre sforzo alcuno; Ox la domandata retta che si assume come asse delle ascisse; Oy una retta ad essa perpendicolare che prendesi per asse delle ordinate; ed H il centro di pressione. Se prendesi un elemento di superficie qualunque in M e se chiamansi

ω la superficie di detto elemento,

y l'ordinata $\overline{MM'}$ del suo centro,

y_1 l'ordinata $\overline{HH'}$ del centro di pressione,

siccome la pressione riferita all'unità di superficie è proporzionale (num. 134) alla distanza di quest'elemento dall'asse neutro si ha: che la pressione elementare sulla superficie ω è espressa da $K\omega y$, essendo K una quantità costante; che il momento di questa pressione rispetto all'asse Ox vale $K\omega y^2$; che la somma $K\Sigma\omega y$ delle pressioni elementari deve fare la total forza premente T''; che la somma $K\Sigma\omega y^2$ dei momenti di tutte le pressioni elementari rispetto a detto asse Ox deve eguagliare il momento $T''y_1$ della forza T''; e che per conseguenza risultano le equazioni

$$T''=K\Sigma\omega y,$$

$$T''y_1=K\Sigma\omega y^2.$$

Ponendo nella seconda di queste equazioni il valore di T'' dato dalla prima, si ottiene la seguente equazione determinatrice della distanza $\overline{HH'}=y_1$ che la retta, la quale separa la parte premuta dalla parte che non sostiene sforzo alcuno, ha dal centro di pressione H

$$y_1=\frac{\Sigma\omega y^2}{\Sigma\omega y}.$$

La pressione q riferita all'unità di superficie in un punto qualunque della parte PBQ della base ABCD (*fig.* 115), la pressione massima pure riferita all'unità di superficie e l'equazione di stabilità, che è quella sola relativa alla pressione, si ottengono applicando le convenienti formole del numero 134 col fare totalmente astrazione dell'altra parte PDQ.

137. **Problemi sulla determinazione della linea retta che, nella base di un solido prismatico non avente aderenza col suo appoggio e sollecitato da una forza premente parallela al suo asse, separa la parte premuta dalla parte non premuta, sulla ricerca della pressione massima e della conveniente equazione**

di stabilità. — I. *Trovare la retta che separa la parte premuta da quella che non sopporta sforzo alcuno, la pressione massima riferita all'unità di superficie e l'equazione di stabilità per un pilastro a base rettangolare* ABCD (*fig.* 117), *premuto da una forza* T″ *la quale agisce nel piano perpendicolare alla base del pilastro e passante pei punti di mezzo* E *ed* F *dei lati opposti* BC *ed* AD.

In questo caso le linee di egual pressione sulla superficie premuta sono evidentemente linee rette perpendicolari ad EF, giacchè, assegnando ad esse questa direzione, la superficie separata dall'asse neutro riesce un rettangolo il cui lato parallelo a BC è anche parallelo alla tangente all'ellisse centrale d'inerzia, corrispondente al detto rettangolo, nel punto in cui vien essa incontrata dalla retta che unisce il centro di superficie del rettangolo medesimo, il qual centro è sempre posto sulla retta EF, col centro di pressione H.

Ciò premesso, ponendo $\overline{AB}=a$ e $\overline{BC}=b$, essendo O il centro dell'intiero rettangolo ABCD, H il centro di pressione e trovandosi esso nella superficie centrale per cui il rapporto $\frac{\overline{OH}}{\overline{OE}}=m$ riesce $<\frac{1}{3}$ (num. 133), l'asse neutro è una retta UU la cui distanza $\overline{OT}$ dal centro O vien data dall'ultima delle formole stabilite al numero 134. In questa formola bisogna porre invece di G^2 il valore del quadrato del semi-asse dell'ellisse centrale d'inerzia disposto secondo FE che vale $\frac{1}{12}a^2$ ed invece di V_1 la distanza $\overline{OH}=m.\overline{OE}$ $=\frac{1}{2}ma$, per cui

$$V=\frac{a}{6m}.$$

La pressione massima ha luogo nei punti maggiormente distanti dall'asse neutro e quindi in tutti i punti dello spigolo BC e, facendo nell'espressione di Q_1 del numero 134, $\Omega=ab$, $v'=\frac{1}{2}a$ e $V=\frac{a}{6m}$ si trova

$$Q_1=\frac{T''}{ab}(1+3m).$$

L'equazione di stabilità, nel caso in cui sia noto il coefficiente di rottura per pressione, evidentemente risulta

$$\frac{T''}{ab}(1+3m)=n''R''.$$

Quando il centro di pressione H cade fuori della superficie centrale, la qual cosa ha luogo se $m>\frac{1}{3}$, chiamando Y la distanza EL della domandata retta KI separante la parte premuta della base ABCD dalla parte che non sopporta sforzo alcuno e prendendo come elemento di superficie una lista rettangolare $MNnm$ di lati $\overline{MN}=a$ ed $\overline{Mm}=dy$, si faccia nell'ultima equazione del precedente numero

$$y_1=\overline{HL}=\overline{EL}-\overline{EH}=Y-\frac{1}{2}a(1-m)$$

$$\Sigma\omega y=\int_0^Y a\,dy\,.\,y=\frac{1}{2}a\,Y^2$$

$$\Sigma\omega y^2=\int_0^Y a\,dy\,.\,y^2=\frac{1}{3}a\,Y^3.$$

Si ottiene allora l'equazione

$$Y-\frac{1}{2}a(1-m)=\frac{2}{3}Y$$

d'onde

$$Y=\frac{3}{2}a(1-m),$$

cosicchè il lato KI del rettangolo premuto IBCK avente il suo centro in G dista dal lato BC del triplo della distanza $\overline{EH}=\frac{1}{2}a(1-m)$ del centro di pressione dallo stesso lato.— Venendo ora a cercare il valore Q_1 della massima pressione riferita all'unità di superficie, basta osservare che essa si verifica in tutti i punti di BC giacchè sono questi punti quelli che maggiormente distano dall'asse neutro IK, e che per conseguenza vien data dalla formola stabilita al numero 134 per trovare il valore di Q_1 facendo in essa

$$\Omega = \overline{IK} \times \overline{EL} = \frac{3}{2} ab (1 - m),$$

$$v' = \overline{GE} = \frac{3}{4} a (1 - m),$$

$$V = GL = \frac{3}{4} a (1 - m).$$

Il valore di Q_1 adunque risulta

$$Q_1 = \frac{T''}{ab} \frac{4}{3(1-m)},$$

e l'equazione di stabilità, nel caso in cui si conosce R'' ossia il coefficiente di rottura per schiacciamento, è (num. 134)

$$\frac{T''}{ab} \frac{4}{3(1-m)} = n'' R''.$$

II. *Trovare la retta la quale separa la parte premuta da quella che non sopporta sforzo alcuno, la pressione massima riferita all'unità di superficie e l'equazione di stabilità per un sostegno a base circolare che si trova sotto l'azione di una forza premente* T'' *diretta parallelamente al suo asse.*

Sia r il raggio $\overline{OC}$ (*fig.* 118) della base circolare del sostegno, H il centro di pressione ed m il rapporto $\frac{\overline{OH}}{\overline{OC}}$. Se $m < \frac{1}{4}$ il centro di pressione (num. 133) trovasi nell'interno della superficie centrale e quindi tutta la superficie del circolo di raggio r sopporta pressione; se invece $m > \frac{1}{4}$ il centro di pressione non cade nella superficie centrale ed importa allora di determinare la retta che separa la parte premuta da quella che non sopporta sforzo alcuno.

Incominciando dall'esaminare il caso in cui $m < \frac{1}{4}$, l'asse neutro è una retta EF posta fuori della data sezione circolare ABCD, ed è nel punto C che ha luogo la massima pressione Q_1 riferita all'unità di superficie. Per trovare questo valore di Q_1 bisogna esprimere in funzione di r e di m le quantità Ω, v' e V che entrano nella formola stabilita al numero 134 per trovare la pressione massima riferita all'unità di superficie. In quanto alla superficie Ω della base premuta vale πr^2; la distanza $V = \overline{OM}$ dell'asse neutro EF dal centro O, essendo l'ellisse centrale d'inerzia un circolo di raggio $\frac{1}{2}r$ (num. 133) e quindi essendo la linea di egual pressione perpendicolari a OH vien data dalla formola del numero 134 esprimente il valore di V quando in essa si faccia $G = \frac{1}{2}r$ e $V_1 = mr$, per cui si ha $V = \dfrac{\left(\frac{1}{2}r\right)^2}{mr} = \dfrac{r}{4m}$; finalmente, essendo in C il punto di tutta la sezione proposta il quale sopporta la maggior pressione riferita all'unità di superficie, si ha $v' = \overline{OC} = r$. Sostituendo i trovati valori di Ω, v' e V nell'espressione di Q_1, si ha

$$Q_1 = \frac{T''}{\pi r^2}(1 + 4m),$$

e quindi l'equazione di stabilità, quando si conosce il coefficiente di rottura per compressione per la materia di cui il sostegno è costituito alla sua base, risulta

$$\frac{T''}{\pi r^2}(1 + 4m) = n''R''.$$

Il problema diventa più complicato allorquando il centro di pressione H cade fuori della superficie centrale, la qual cosa avviene quando $m > \frac{1}{4}$. In questo caso, essendo IK la retta che separa il segmento ICK su cui si verifica compressione dall'altro IAK sul quale non ha luogo nè compressione nè estensione, convien determinarla di posizione servendosi dell'ultima equazione del precedente numero. Assumendo come incognita l'angolo $COK = \varphi$ che il raggio OK fa col raggio OC il quale unisce il centro C della intiera base del sostegno col centro di pressione H, si divida la superficie ICK mediante rette parallele alla corda IK, presa come asse delle ascisse coll'origine in L, in superficie rettangolari elementari lunghe $2x$ ed alte dy e si osservi che

$$y_1 = \overline{LH} = \overline{OH} + \overline{OL} = r(m - \cos\varphi),$$

$$\omega = 2x\,dy,$$

$$\overline{LC} = \overline{CO} + \overline{OL} = r(1 - \cos\varphi).$$

Partendo ora dall'ultima formola del numero precedente, sostituendo in essa i trovati valori di y_1 e di ω, e ponendo invece del simbolo Σ il simbolo $\int$ preso fra limiti convenienti dopo di avere moltiplicati i due membri di detta formola per $\Sigma\omega y$, si ottiene l'equazione

$$r(m - \cos\varphi)\int_0^{r(1-\cos\varphi)} xy\,dy = \int_0^{r(1-\cos\varphi)} xy^2 dy \quad (1),$$

nella quale x ed y non rappresentano più che le coordinate d'un punto qualunque D dell'arco CK per rapporto ai due assi ortogonali Lx ed Ly. Ora, se appellasi ψ l'angolo COD che fa col raggio OC il raggio OD diretto all'indicato punto, si ha

$$x = \overline{FD} = r\,\mathrm{sen}\,\psi,$$

$$y = \overline{OF} + \overline{OL} = r(\cos\psi - \cos\varphi),$$

$$dy = -r\,\mathrm{sen}\,\psi\,d\psi.$$

Questi valori di x, y e dy posti nell'equazione (1) portano a cangiare la variabile y nella ψ, e per estendere gli integrali quanto quelli della citata equazione, bisogna prenderli fra i limiti $\psi = \varphi$ e $\psi = 0$, per cui si ha

$$(m - \cos\varphi)\int_0^{\varphi} \mathrm{sen}^2\psi(\cos\psi - \cos\varphi)\,d\psi = \int_0^{\varphi} \mathrm{sen}^2\psi(\cos\psi - \cos\varphi)^2 d\psi \quad (2).$$

Per effettuare le integrazioni che entrano in quest'equazione basta rammentare che

$$\int \mathrm{sen}^2\psi\cos\psi\,d\psi = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}^3\psi,$$

$$\int \operatorname{sen}^2\psi\, d\psi = \frac{1}{2}\psi - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\psi\cos\psi,$$

$$\int \operatorname{sen}^2\psi\cos^2\psi\, d\psi = \frac{1}{8}\psi + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^3\psi\cos\psi - \frac{1}{8}\operatorname{sen}\psi\cos\psi,$$

i quali integrali, presi fra i limiti 0 e φ e sostituiti nell'equazione (2), conducono ad ottenere

$$(m-\cos\varphi)\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\varphi - \frac{1}{2}\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi\right)$$

$$= \frac{1}{8}\varphi + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^3\varphi\cos\varphi - \frac{1}{8}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi\cos^2\varphi$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi\cos^3\varphi,$$

dalla quale si ricava

$$m = \frac{\frac{1}{4}\varphi - \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3\varphi\cos\varphi - \frac{1}{4}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}{\frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\varphi - \varphi\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi},$$

ossia ancora, ponendo $\frac{1}{4}$ fattor comune al numeratore ed osservando che $\frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\varphi = \operatorname{sen}^3\varphi - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\varphi$, e che $\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$,

$$m = \frac{1}{4}\,\frac{\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - \frac{2}{3}\operatorname{sen}^3\varphi\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi - \varphi\cos\varphi - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\varphi}.$$

Delle due quantità m e φ che entrano in quest'equazione la prima è nota, e quindi per tentativi si può trovare la seconda ossia l'angolo $COK = \varphi$. Una volta determinato quest'angolo, egli è evidente che rimane fissata la posizione della corda IK la quale separa la parte premuta ICK dell'intiera base dalla parte IAK che non sopporta nè pressione nè estensione, ed altro più non rimane a farsi, per giungere alla completa risoluzione del problema, che trovare la pressione massima riferita all'unità di superficie prodotta nel prisma avente per base il segmento circolare ICK dalla forza nota T″ applicata nel punto H talmente collocato da essere IK l'asse neutro corrispondente. Perciò si osservi: che

$$\overline{\mathrm{LK}}=r\,\mathrm{sen}\,\varphi, \qquad \overline{\mathrm{LO}}=-r\cos\varphi;$$

che la superficie Ω del segmento ICK, somma di quella del settore OICKO con quella del triangolo IOK, vien data da

$$\Omega=r^2(\varphi-\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi),$$

essendo φ la lunghezza dell'arco di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo COK; e che la distanza $\overline{\mathrm{OG}}=d$ dal centro di superficie G del detto segmento dal centro O del circolo, cui il segmento stesso appartiene, ammette il valore

$$d=\frac{\frac{1}{12}\overline{\mathrm{IK}}^3}{\text{superficie ICK}}=\frac{2}{3}\,\frac{r\,\mathrm{sen}^3\varphi}{\varphi-\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi}.$$

Il punto della base premuta ICK nel quale ha luogo la maggior pressione riferita all'unità di superficie è quello che maggiormente dista dall'asse neutro IK, ossia è il punto C. Questa pressione massima si ha ponendo

$$v'=\overline{\mathrm{GC}}=\overline{\mathrm{OC}}-\overline{\mathrm{OG}}=r-d=\frac{1}{3}r\,\frac{3\varphi-3\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi-2\,\mathrm{sen}^3\varphi}{\varphi-\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi},$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}=\overline{\mathrm{LG}}&=\overline{\mathrm{LO}}+\overline{\mathrm{OG}}=-r\cos\varphi+d\\&=\frac{1}{3}r\,\frac{-3\varphi\cos\varphi+3\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos^2\varphi+2\,\mathrm{sen}^3\varphi}{\varphi-\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi},\end{aligned}$$

ed il trovato valore di Ω nell'espressione di Q_1 del numero 134. Fatte tutte le riduzioni, si ottiene

$$Q_1=\frac{\mathrm{T}''}{r^2}\,\frac{1-\cos\varphi}{\mathrm{sen}\,\varphi-\varphi\cos\varphi-\frac{1}{3}\mathrm{sen}^3\varphi},$$

e quindi l'equazione di stabilità, nell'ipotesi che si conosca il coefficiente di rottura per pressione, risulta

$$\frac{T''}{r^2}\,\frac{1-\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi-\varphi\cos\varphi-\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\varphi}=n''R''.$$

158. **Applicazione della teoria esposta nel presente capitolo al caso di corpi prismatici ed omogenei disposti coi loro assi verticali tenendo anche conto dei loro pesi, al caso di corpi non prismatici ma ad asse rettilineo, e restrizioni a cui la medesima teoria va soggetta in alcuni casi particolari.** — Allorquando un corpo prismatico disposto col suo asse verticale, trovasi assoggettato all'azione di una forza tendente od a quella di una forza premente, se le dimensioni del corpo sono considerevoli non si può generalmente trascurare l'azione del proprio peso nel calcolo delle tensioni o delle pressioni per i diversi punti di una sezione qualunque CD (*fig.* 105 *e* 106), e per tenerne conto bisogna assumere, come forza tendente nel caso della figura 105 la risultante della forza T′ e del peso della parte di corpo superiore alla sezione CD, come forza comprimente nel caso della figura 106 la risultante della forza T″ e del peso della parte di corpo posta pure superiormente alla sezione CD. Per centro di tensione o di compressione poi non si deve assumere il punto d'applicazione H della forza T′ o della forza T″ sulla sezione CD, ma sibbene il punto d'applicazione dell'indicata risultante.

Allorquando, invece di un corpo prismatico, si ha da considerare un corpo ad asse rettilineo con sezione normale all'asse variabile da un sito all'altro, la teoria che venne esposta sulla flessione dei solidi prismatici posti sotto l'azione di forze parallele ai loro assi si può ancora applicare ed ottenere così le tensioni o le pressioni le quali si verificano nei diversi punti di parecchie sezioni del solido pel quale si vogliono studiare le condizioni d'equilibrio.

Quando la massima tensione o la massima pressione riferita alla unità di superficie varia, per un solido assoggettato all'azione di forze parallele al suo asse, da sezione a sezione, importa di determinare la sezione pericolosa che è quella per rapporto alla quale ha il più gran valore il coefficiente di stabilità, ossia il quoziente della massima tensione o della massima pressione riferita alla unità di superficie per il relativo coefficiente di snervamento o di rottura. La massima tensione e la massima pressione riferita alla unità di superficie non sono altro che le resistenze all'allungamento ed all'accorciamento rispettivamente opposte dalle fibre maggiormente allungate e da quelle maggiormente compresse; queste resistenze si possono adunque ritenere siccome eguali alle forze traenti o comprimenti da applicarsi per ogni unità di superficie della sezione di dette fibre per produrre gli allungamenti e gli accorciamenti che effettivamente subiscono le fibre maggiormente allungate e quelle maggiormente compresse, e quindi la regola data per trovare la sezione pericolosa è perfettamente in accordo con quella dei numeri 20, 21 e 43.

Vi sono poi dei casi in cui le ipotesi sulle quali si fonda la teoria che venne esposta in quest'articolo in nessun modo si trovano verificate. Così, se una colonna in metallo di piccolo diametro e portante un peso si appoggia su un largo zoccolo in pietra, si può colle formole che vennero stabilite determinare la pressione in ciascun punto della colonna; ma non conviene applicarle alla determinazione delle pressioni sulla superficie superiore del zoccolo, giacchè, a motivo della deformazione, questa superficie non può rimanere piana come si è ammesso nella deduzione delle indicate formole, ma ha luogo una certa depressione nei dintorni dei punti che direttamente si trovano sotto l'azione della colonna stessa. Osservando però che questa deformazione è locale e che essa va diminuendo a misura che nel zoccolo si considerano delle sezioni sempre più distanti dalla sua superficie superiore; agevolmente si comprende come si possa far uso delle formole per studiare la maniera con cui si ripartisce la pressione su una sezione del zoccolo posta a sufficiente distanza dalla sua faccia superiore. Una analoga eccezione in generale ha luogo per tutti i punti di quei corpi a cui direttamente si applicano delle forze considerevoli, i quali punti vengono rinforzati con un eccesso di materia di cui i costruttori ben conoscono la necessità. Queste osservazioni vennero fatte per rammentare al costruttore quanto importi di non dare alle formole teoriche un'estensione più grande di quella di cui sono suscettive; è necessario di aver presenti in ciascuna applicazione le ipotesi su cui si fondano le formole che si vogliono impiegare e rendersi conto fino a qual punto trovansi esse soddisfatte, se pur non vuolsi andar incontro a gravi inconvenienti, non derivanti da imperfezioni di teoria, ma da imperizia nell'applicarla.

139. **Flessione di un solido prismatico nel quale le dimensioni della sezione trasversale sono piccole in confronto dell'altezza.** — Se considerasi un solido prismatico fissato per l'estremo

A (*fig.* 119), compresso nella direzione dell'asse all'altro estremo B, e se almeno una delle dimensioni della sezione trasversale è piccola in confronto dell'altezza, agevolmente si comprende come vi possano essere delle cause accidentali capaci di far inflettere il corpo e come il medesimo possa dopo rimanere ad asse curvilineo e mantenersi così in equilibrio sotto l'azione della forza comprimente T.

I difetti d'omogeneità nella materia costituente il solido, il modo con cui all'estremità riceve l'azione della forza premente, la disposizione e la forma dei ritegni che lo obbligano a prendere in alcuni siti questa anzichè quell'altra disposizione influiscono sulla direzione del piano in cui viene a trovarsi la curva B′DA secondo la quale si dispone l'asse primitivo BA. Nel caso però di un corpo il quale può essere considerato siccome perfettamente omogeneo e come libero d'inflettersi in qualunque direzione passante per l'asse primitivo, è naturale l'ammettere che l'accennato piano sia quello cui corrisponde il momento di flessibilità di minor valore, ossia quello che è perpendicolare al maggior asse principale dell'ellisse centrale d'inerzia della sezione trasversale, e che quindi in un solido con sezione rettangolare sia perpendicolare al lato maggiore della sezione medesima.

Nei numeri che immediatamente seguono si risolveranno alcuni problemi relativi ai solidi prismatici verticalmente disposti e caricati di un peso alla loro base superiore, ossia verranno trattate le più importanti quistioni pratiche riferentisi ai *solidi caricati di punta;* si ammetterà che il piano di flessione sia perpendicolare al maggior asse principale dell'ellisse centrale d'inerzia della sezione trasversale del solido che si considera; ad imitazione di quanto finora venne fatto da tutti gli autori che trattarono quest'argomento, si supporrà che l'asse neutro in ciascuna sezione passi pel suo centro di superficie; e quindi l'equazione (2) del numero 106 sarà quella che verrà adottata per esprimere che il momento resistente alla flessione $\varepsilon \frac{d^2 u}{d z^2}$ in una sezione qualunque deve eguagliare il momento inflettente μ rispetto all'asse delle fibre invariabili della stessa sezione.

140. Problemi sulla flessione dei solidi prismatici caricati di punta. — I. *Flessione di un solido prismatico caricato di punta, appoggiato in* A (*fig.* 119) *ad un piano orizzontale fisso colla sua base inferiore, costretto a mantenere il centro di superficie della sua* *base superiore sulla verticale passante per quello della base inferiore e compresso dal peso T agente nella direzione dell'accennata verticale.*

Si assuma per origine di coordinate il centro di superficie A della base inferiore, per asse della ascisse la verticale Az e per asse delle ordinate la orizzontale Au posta in quel piano in cui viene a disporsi la curva B′CA presa dall'asse del solido. Considerando nel corpo una sezione qualunque passante pel punto m del suo asse B′CA di coordinate $\overline{Am'}=z$ ed $\overline{m'm}=u$, l'equazione esprimente che vi è equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari è quella che si ottiene ponendo che il momento resistente alla flessione deve essere eguale al momento inflettente rispetto all'asse delle fibre invariabili contenuto in detta sezione; e per conseguenza, siccome il momento inflettente rispetto all'asse delle fibre invariabili passante per m vien espresso da $-Tu$, si ha

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dz^2}=-Tu \qquad (1).$$

Per integrare quest'equazione differenziale del secondo ordine si faccia

$$\frac{du}{dz}=p,$$

d'onde

$$dz=\frac{du}{p} \qquad \text{e} \qquad \frac{d^2u}{dz^2}=\frac{dp}{dz}=\frac{pdp}{du}.$$

Sostituendo il valore di $\frac{d^2u}{dz^2}$ nella (1) risulta

$$\varepsilon pdp=-Tudu,$$

dalla quale, integrando, chiamando C una costante e ponendo invece di p il suo valore $\frac{du}{dz}$, si ricava la seguente equazione differenziale del primo ordine

$$\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)^2=-\frac{1}{2}Tu^2+C.$$

Passando ora alla determinazione della costante C, si osserva che la tangente alla curva B′CA nel suo punto di mezzo C deve essere parallela all'asse della z e che quindi per tal punto il $\frac{du}{dz}$ deve essere nullo. Segue da ciò che, chiamando s l'ordinata $\overline{C'C}$ dell'accennato punto, immediatamente si ha

$$C = \frac{1}{2} T s^2,$$

per cui

$$\varepsilon \left(\frac{du}{dz}\right)^2 = T(s^2 - u^2).$$

Separando le variabili, si ottiene

$$dz = \sqrt{\frac{\varepsilon}{T}} \frac{du}{\sqrt{s^2 - u^2}};$$

integrando coll'osservare che per $z=0$ si deve avere $u=0$, risulta

$$z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{T}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{sen} = \frac{u}{s}\right);$$

e quindi

$$u = s \operatorname{sen} \sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}\, z \qquad (2).$$

Quest'equazione rappresenta la sinusoide secondo cui si dispone l'asse primitivo AB prendendo la posizione ACB′; ma questa curva non si può dire determinata finchè non si conosce la sua ordinata massima o saetta s.

Chiamando a la lunghezza primitiva $\overline{AB}$ del corpo ed osservando che nei limiti delle flessioni ammissibili in pratica si può ritenere $\overline{AB'} = \overline{AB}$, facendo $z=a$ nell'equazione (2) si deve avere $u=0$, per cui

$$\operatorname{sen} \sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}\, a = 0,$$

ossia $a\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}$ deve essere un multiplo della mezza circonferenza, o in altri termini, indicando con i un numero intiero qualunque ed essendo π il noto rapporto della circonferenza al diametro, si deve avere

$$a\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}=i\pi \tag{3},$$

d'onde

$$T=\frac{i^2\pi^2\varepsilon}{a^2}.$$

Ponendo in quest'equazione la serie nei numeri interi 1, 2, 3, ..., si trovano i seguenti valori particolari T_1, T_2, T_3, ..., di T

$$T_1=\frac{\pi^2\varepsilon}{a^2},\quad T_2=4\frac{\pi^2\varepsilon}{a^2},\quad T_3=9\frac{\pi^2\varepsilon}{a^2},\ \ldots\ldots,$$

i quali portano a conchiudere essere i diversi valori di T eguali alla quantità $\frac{\pi^2\varepsilon}{a^2}$ moltiplicata per i quadrati dei numeri naturali; essere T_1 l'or indicata quantità, ossia il più piccolo valore che prende T; e per conseguenza non potersi verificare flessione sotto l'azione di detta forza se essa non raggiunge almeno il limite $\frac{\pi^2\varepsilon}{a^2}$.

Ricavando ora il valore di $\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}$ dall'equazione (3) e sostituendolo nell'equazione (2) si trova

$$u=s\,\mathrm{sen}\,\frac{i\pi z}{a}.$$

Per i valori di z espressi da

$$z=\frac{a}{i},\quad z=2\frac{a}{i},\quad z=3\frac{a}{i},\ \ldots\ldots,\ z=(i-1)\frac{a}{i},\quad z=a,$$

$\frac{i\pi z}{a}$ diventa un multiplo della mezza circonferenza e quindi dalla ultima equazione si deduce che, pei detti valori di z, u diviene zero. Se poi nella stessa equazione si pongono per z i precedenti valori diminuiti di $\frac{1}{2}\frac{a}{i}$ si ottiene che i valori di u diventano alternativamente s e $-s$. Segue da ciò che la sinusoide secondo cui si dispone l'asse primitivo AB sarebbe disposta come lo indica la figura 119 nel caso di $i=1$, come lo dimostra la figura 120 nel caso di $i=2$, come appare dalla figura 121 nel caso di $i=3$ e come è indicato nella figura 122 nel caso di $i=4$; ed in generale si può stabilire che, qualunque sia il valore di i, esso corrisponde al caso di una curva la quale attraversa $i-1$ volte la verticale Az.

II. *Flessione di un solido prismatico caricato di punta verticalmente incastrato all'estremità inferiore* A (*fig.* 123) *e libero all'estremità superiore* B *sulla quale agisce la forza premente* T.

Si chiami a la lunghezza primitiva del solido alla quale si può ritenere siccome sensibilmente eguale la proiezione AB′ del suo asse deformato AB sulla verticale Az, e si assumano le direzioni degli assi coordinati come nel precedente problema coll'avvertenza che la parte positiva dell'asse delle ordinate risulti da quella parte verso la quale dopo la deformazione viene a disporsi l'asse del corpo. Il momento inflettente rispetto all'asse delle fibre invariabili di una sezione qualunque, il cui centro di superficie è rappresentato nel punto m di coordinate $\overline{Am'}=z$ e $\overline{mm'}=u$, vien espresso da T $(s-u)$, essendo s l'ordinata massima ossia quella corrispondente all'estremità libera B dell'asse AB dopo la flessione, e quindi l'equazione di equilibrio fra i momenti delle forze estrinseche e delle forze molecolari rispetto al detto asse di fibre invariabili risulta (num. 106)

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dz^2}=\mathrm{T}(s-u).$$

Quest'equazione, facendo $\frac{du}{dz}=p$ ed eliminando come nel precedente problema la variabile z, conduce a

$$\varepsilon p dp=-\mathrm{T}(s-u)\,d(s-u)$$

la quale, in seguito ad una prima integrazione fatta col determinare la costante in modo che per $u=0$ sia $p=\frac{du}{dz}=0$, dà

$$\varepsilon\left(\frac{d u}{d z}\right)^2=\mathrm{T}[s^2-(s-u)^2].$$

Separando le variabili quest'ultima equazione può esser scritta

$$d z=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mathrm{T}}}\,\frac{-d(s-u)}{\sqrt{s^2-(s-u)^2}},$$

la quale, integrata col determinare la costante in modo che per $u=0$ sia $z=0$, conduce a trovare

$$z=\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mathrm{T}}}\operatorname{arc}\left(\cos=\frac{s-u}{s}\right),$$

d'onde

$$\frac{s-u}{s}=\cos\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\varepsilon}}z$$

ed

$$u=s\left(1-\cos\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\varepsilon}}z\right) \tag{4}.$$

Quest'equazioue è quella della curva AB secondo cui si dispone l'asse del solido dopo la flessione la quale, come nel problema precedente, non si può dire determinata finchè non si conosce l'ordinata $\overline{\mathrm{B'B}}=s$ rappresentante lo spostamento subito dal centro di superficie della base superiore dalla verticale Az.

Ponendo nella precedente equazione $z=a$ il valore di u diventa s, per cui risulta

$$\cos\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\varepsilon}}\,a=0.$$

Segue da ciò che $a\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\varepsilon}}$ deve essere un multiplo impari del quarto di circonferenza, ossia che, essendo i un numero intiero, si deve avere

$$a\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\varepsilon}}=\frac{(2i+1)\pi}{2} \qquad (5),$$

d'onde

$$\mathrm{T}=\frac{(2i+1)^2\pi^2\varepsilon}{4a^2}.$$

Se in questa equazione invece di i si pone la serie dei numeri 0, 1, 2, ..., si ottengono i seguenti valori particolari T_1, T_2, T_3, ... di T

$$\mathrm{T}_1=\frac{\pi^2\varepsilon}{4a^2},\quad \mathrm{T}_2=9\frac{\pi^2\varepsilon}{4a^2},\quad \mathrm{T}_3=25\frac{\pi^2\varepsilon}{4a^2}, \ldots\ldots,$$

dai quali si deduce: essere i diversi valori di T eguali alla quantità $\frac{\pi^2\varepsilon}{4a^2}$ moltiplicata per i quadrati dei numeri impari; essere T_1 l'or indicata quantità e quindi il più piccolo valore che prende T; non potersi verificare flessione sotto l'azione della forza premente se essa non raggiunge il detto più piccolo valore.

Ricavando ora il valore di $\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\varepsilon}}$ dall'equazione (5) e sostituendolo nell'equazione (4), si trova

$$u=s\left[1-\cos\frac{(2i+1)\pi}{2a}z\right] \qquad (6).$$

Quest'equazione, facendo successivamente

$$z=0,\quad z=\frac{a}{2i+1},\quad z=2\frac{a}{2i+1},\quad z=3\frac{a}{2i+1},$$

$$z=4\frac{a}{2i+1},\quad z=5\frac{a}{2i+1},\quad z=6\frac{a}{2i+1},\quad z=7\frac{a}{2i+1},$$

. . . .

$$z=(i-1)\frac{a}{2i+1},\quad z=i\frac{a}{2i+1},$$

dà soltanto quattro valori di u i quali sono 0, s, $2s$ ed s ed i quali successivamente si riproducono. — Nel caso di $i=0$ si ha $2i+1=1$, ed i valori u_1 ed u_2 di u, che ricavansi dall'equazione (6) per $z=0$ e per $z=a$, sono rispettivamente 0 ed s, per cui la curva secondo la quale si dispone l'asse del solido è della forma di quella rappresentata colla figura 123. Quando $i=1$ risulta $2i+1=3$, i valori particolari u_1, u_2, u_3 ed u_4 di u, che ricavansi dalla (6) per $z=0$, $z=\frac{a}{3}$, $z=2\frac{a}{3}$ e $z=a$, sono rispettivamente 0, s, $2s$ ed s, e la curva secondo cui si dispone l'asse del solido è della forma di quella disegnata nella figura 124. Se $i=2$ riesce $2i+1=5$, i valori particolari u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 ed u_6, che prende l'ordinata u data dalla già citata formola (6) per $z=0$, $z=\frac{a}{5}$, $z=2\frac{a}{5}$, $z=3\frac{a}{5}$, $z=4\frac{a}{5}$ e $z=a$, sono rispettivamente 0, s, $2s$, s, 0 ed s, e quindi la curva elastica presa dall'asse del solido riesce della forma di quella della figura 125. In modo analogo si possono trovare le curve nei casi di $i=3, 4, 5,$ ....

III. *Flessione di un solido prismatico caricato di punta, verticalmente incastrato alle due estremità e col centro dell'estremità superiore* B (*fig.* 126) *scorrevole sulla verticale del centro dell'estremità inferiore* A.

Ritenendo le denominazioni che già vennero ammesse nella risoluzione degli altri due problemi e chiamando M il momento della coppia prodotta dall'incastramento all'estremo B, si ha la seguente equazione d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari (num. 106)

$$\varepsilon\frac{d^2u}{dz^2}=-\mathrm{T}u+\mathrm{M}.$$

Facendo ora

$$u=u'+\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{T}} \qquad (7),$$

la stabilita equazione differenziale del secondo ordine diventa

$$\varepsilon\frac{d^2u'}{dz^2}=-\mathrm{T}u',$$

la quale, essendo della forma dell'equazione (1) posta nel risolvere il problema I, integrata una prima volta conduce a

$$\frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{du'}{dz}\right)^2 = -\frac{1}{2}\mathrm{T}\,u'^2 + \mathrm{C}.$$

Per determinare ora la costante C si osserva, come nel già citato problema I, che la tangente alla curva B′CA nel punto di mezzo C deve essere parallela all'asse delle z; e che quindi per tal punto il $\frac{du'}{dz}$ deve essere nullo come lo è il $\frac{du}{dz}$. Ora, essendo s l'ordinata $\overline{\mathrm{C'C}}$, per $u = s$ si ha dall'equazione (7) $u' = s - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{T}}$, per cui

$$\mathrm{C} = \frac{1}{2}\mathrm{T}\left(s - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{T}}\right)^2,$$

e quindi

$$\varepsilon\left(\frac{du'}{dz}\right)^2 = \mathrm{T}\left[\left(s - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{T}}\right)^2 - u'^2\right] \qquad (8).$$

Essendo il solido incastrato alle due estremità, per $z = 0$ e per $z = \overline{\mathrm{AB'}}$ sensibilmente eguale ad $\overline{\mathrm{AB}} = a$ i due valori corrispondenti di u diventano nulli, i due valori di u' si riducono a $-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{T}}$ ed a zero quelli di $\frac{du'}{dz}$. Segue da ciò che tanto pel primo quanto pel secondo degli accennati valori di z si ha la stessa condizione

$$0 = \left(s - \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{T}}\right)^2 - \frac{\mathrm{M}^2}{\mathrm{T}^2},$$

dalla quale facilmente si ricava

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{T}s}{2}.$$

Questo valore di M si ponga nell'equazione (7) e si ottiene il valore di u' espresso da

$$u' = u - \frac{s}{2},$$

il quale, sostituito nella (8) unitamente al valore di M, conduce a trovare

$$\varepsilon\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = \mathrm{T}(su-u^2).$$

Separando in quest'equazione le variabili, si ha

$$dz = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mathrm{T}}}\frac{du}{\sqrt{su-u^2}},$$

ed integrando risulta

$$z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mathrm{T}}}\,\mathrm{arc}\left(\cos = \frac{s-2u}{s}\right) + \mathrm{C}.$$

La costante C deve essere determinata in modo che per $z=0$ sia $u=0$, per cui

$$\mathrm{C} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mathrm{T}}}\,\mathrm{arc}\,(\cos = 1) = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mathrm{T}}}\,2i\pi,$$

e la relazione fra le due coordinate z ed u, rappresentante l'equazione della curva secondo cui si dispone l'asse del solido, diventa

$$z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mathrm{T}}}\left[\mathrm{arc}\left(\cos = \frac{s-2u}{s}\right) - 2i\pi\right].$$

Volendosi la formola esprimente il valore dell'ordinata u, si incominci dal ricavare dall'ultima equazione

$$\frac{s-2u}{s} = \cos\left[\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\varepsilon}}\,z + 2i\pi\right];$$

si svolga dopo il coseno della somma dei due archi $\sqrt{\frac{\mathrm{T}}{\varepsilon}}\,z$ e $2i\pi$, osservando che $\cos 2i\pi = 1$ e che $\mathrm{sen}\, 2i\pi = 0$; e si ricavi il valore di u, il quale vien dato da

$$u = \frac{s}{2}\left(1 - \cos\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}\, z\right) \qquad (9),$$

ed il quale, come già si è visto nei due precedenti problemi, non si può dire determinato finchè non si conosce la saetta s.

Se, per essere sensibilmente $AB' = AB = a$ nei limiti delle flessioni ammissibili in pratica, si fa $z = a$ nell'equazione (9) si deve avere $u = 0$. Segùe da ciò che

$$1 - \cos\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}\, a = 0,$$

e che quindi

$$a\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}} = 2\,i\,\pi \qquad (10),$$

essendo i un numero intero. Ricavando il valore di T dall'ultima equazione risulta

$$T = \frac{4\,i^2\,\pi^2\,\varepsilon}{a^2},$$

e se in quest'equazione si pone invece di i la serie dei numeri interi 1, 2, 3, ... si ottengono i valori particolari T_1, T_2, T_3, ... di T espressi da

$$T_1 = \frac{4\pi^2\varepsilon}{a^2}, \quad T_2 = 4\,\frac{4\pi^2\varepsilon}{a^2}, \quad T_3 = 9\,\frac{4\pi^2\varepsilon}{a^2}, \; \ldots\ldots$$

Il più piccolo valore adunque della forza T necessaria per produrre la flessione è $\frac{4\pi^2\varepsilon}{a^2}$, essa è quattro volte maggiore di quella che corrisponde al caso del solido solamente appoggiato, e moltiplicando T_1 ossia l'accennato più piccolo valore di T per i quadrati dei numeri 2, 3, ... si ottengono i valori delle forze prementi T_2, T_3, ...

Se ora dall'equazione (10) si ricava il valore di $\sqrt{\frac{T}{\varepsilon}}$ e se vien esso sostituito nell'equazione (9), l'espressione di u diventa

$$u = \frac{s}{2}\left(1 - \cos\frac{2i\pi}{a}z\right) \tag{11}$$

e, facendo successivamente in essa

$$z=0, \quad z=\frac{a}{2i}, \quad z=2\frac{a}{2i}, \quad z=3\frac{a}{2i}$$

$$z=4\frac{a}{2i}, \quad z=5\frac{a}{2i}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; .$$

$$. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad z=(2i-1)\frac{a}{2i}, \quad z=a,$$

sempre ed alternativamente si trova 0 ed s per valori di u.

Nel caso in cui $i=1$, i valori u_1, u_2 ed u_3 di u che ricavansi dall'equazione (11) per $z=0$, per $z=\frac{a}{2}$ e per $z=a$ sono rispettivamente 0, s e 0, per cui la curva secondo cui si dispone l'asse del solido è della forma di quella rappresentata nella figura 126. Se $i=2$, i valori u_1, u_2, u_3, u_4 ed u_5 di u, che vengono somministrati dall'equazione (11) per $z=0$, $z=\frac{a}{4}$, $z=\frac{a}{2}$, $z=3\frac{a}{4}$ e $z=a$, sono rispettivamente 0, s, 0, s e 0, e la curva è quella rappresentata nella figura 127. Facendo $i=3$, ai valori di z espressi da 0, $\frac{a}{6}$, $\frac{a}{3}$, $\frac{a}{2}$, $2\frac{a}{3}$, $5\frac{a}{6}$ ed a corrispondono alternativamente 0 ed s per valori di u, e la curva corrispondente è quella disegnata nella figura 128. In generale si può dire che la curva secondo cui si dispone l'asse del solido è tutta disposta dalla medesima parte dell'asse della z, che è tangente a quest'asse in punti egualmente distanti fra di loro e che sono $i+1$ questi punti di contatto, quando si comprendono anche i due estremi A e B.

141. Accrescimento di resistenza dovuta alla presenza di ritegni nei solidi caricati di punta; limite degli sforzi comprimenti capaci di produrre flessione. — I problemi che vennero discussi nel precedente numero chiaramente dimostrano come i solidi prismatici caricati di punta possano inflettersi in diversi modi e come ad ognuno di questi modi di flessione corrispondano delle forze comprimenti pure diverse.

Se, per fissare le idee, si considera il solido semplicemente appoggiato alla sua estremità inferiore A e costretto a conservare il centro di superficie della sua base superiore sulla verticale di quello della base inferiore, può darsi che la curva secondo cui si dispone l'asse del solido pel fatto della flessione non tagli o che tagli in uno o più punti l'asse verticale o direzione primitiva Az dell'asse medesimo prima della deformazione; e, essendo $T_1 = \frac{\pi^2 \varepsilon}{a^2}$ (num. 140, prob. I) il limite inferiore della forza premente capace d'incurvare il corpo senza che il suo asse deformato B′CA (*fig.* 119) tagli la verticale Az, devono essere $T_2 = 4 \frac{\pi^2 \varepsilon}{a^2}$, $T_3 = 9 \frac{\pi^2 \varepsilon}{a^2}$ e $T_4 = 16 \frac{\pi^2 \varepsilon}{a^2}$ i limiti inferiori delle forze prementi capaci di produrre le flessioni rispettivamente rappresentate nelle figure 120, 121 e 122. Disponendo adunque dei ritegni in modo che, avvenendo flessione, debba l'asse deformato tagliare la verticale Az un certo numero di volte, notevolmente si aumenta la forza premente che esso può sopportare prima che avvenga la flessione; e per un certo numero $i-1$ di ritegni disposti a distanze eguali, si possono trovare i limiti inferiori delle forze prementi T capaci di produrre flessione mediante la formola

$$T = \frac{i^2 \pi^2 \varepsilon}{a^2}.$$

Quanto si è detto per il caso di un solido prismatico caricato di punta, soltanto appoggiato ad un resistente piano orizzontale colla sua base superiore e costretto a mantenere il centro di superficie della sua base superiore sulla verticale passante per quello della base inferiore, si applica in generale a tutti i casi di solidi caricati di punta, per cui si può stabilire:

1° Che i ritegni notevolmente aumentano la resistenza alla flessione in un solido prismatico caricato di punta;

2° Che, essendo dato il numero dei ritegni, si possono trovare i siti su cui collocarli lungo la verticale rappresentante l'asse primitivo di detto solido, discutendo colle norme seguite nella risoluzione dei problemi del precedente numero l'equazione della curva secondo cui quest'asse si dispone pel fatto della flessione e cercando i punti che l'asse deformato ha di comune coll'asse primitivo;

3° Che, facendo nell'espressione generale della forza premente, la quale nei problemi del numero precedente venne indicata con T, quel valore particolare di i che corrisponde alla curva di forma compatibile collo stabilito numero di ritegni, si può trovare il limite dello sforzo comprimente capace di produrre flessione.

142. **Determinazione del numero dei ritegni da porsi lungo un prisma caricato di punta affinchè, sotto l'azione di una data forza premente, siano trascurabili gli effetti della flessione.** — Per risolvere questa quistione basta calcolare, come si è indicato al numero 140, i limiti inferiori delle forze prementi T_1, T_2, T_3, ..., T_{i-1} e T_i capaci di produrre flessione, e quindi paragonarli colla data forza premente T.

Nel caso di solidi prismatici disposti come quelli di cui venne studiata la flessione nei problemi I e III del citato numero 140, non si pone ritegno (*fig.* 119 *e* 126) quando si ha $T < T_1$; se ne pone uno in D a metà distanza fra A e B (*fig.* 120 *e* 127) quando $T > T_1$ ma $< T_2$; se ne mettono due, uno in D e l'altro in E in modo da dividere in tre parti eguali la lunghezza $\overline{AB}$ (*fig.* 121 *e* 128) quando $T > T_2$ ma $< T_3$; ed in generale si pongono $i - 1$ ritegni a distanze eguali quando T è $> T_{i-1}$ ma $<$ di T_i.

In modo analogo si può determinare il numero dei ritegni da impiegarsi nel caso di solidi prismatici verticalmente incastrati all'estremità inferiore e coll'estremità superiore libera (num. 140, prob. II). Non occorre ritegno quando $T < T_1$; si deve porre un ritegno in D ai 4/5 di AB′ a partire da A (*fig.* 125) quando, essendo $T > T_1$ è però $<$ di T_3; è necessario collocarne uno ai 4/7 della lunghezza del solido a partire dalla sua base inferiore quando $T > T_3$ ma $< T_4$; importa di porne due, uno ai 4/9 e l'altro agli 8/9 della lunghezza del solido a partire dalla sua base inferiore quando $T > T_4$ ma $< T_5$; si devono pure impiegare due ritegni, uno ai 4/11 e l'altro agli 8/11 della lunghezza del solido a partire dalla base inferiore quando $T > T_5$ ma $< T_6$, ecc.

143. **Condizioni ed equazioni di stabilità pei solidi rettilinei caricati di punta; sezione pericolosa.** — Nelle costruzioni accuratamente bisogna badare a che i solidi caricati di punta non si trovino soggetti ad inflettersi. Una volta presa questa precauzione facendo uso di un conveniente numero di ritegni, se pur il bisogno lo richiede, la forza premente che agisce secondo l'asse del solido dà soltanto luogo ad una compressione, e quindi le condizioni e

le equazioni di stabilità da applicarsi nella pratica sono quelle che già vennero date ai numeri 31 e 40. Nell'applicare le indicate equazioni di stabilità accuratamente bisogna badare qual è il rapporto dell'altezza della parte di solido compresa fra due ritegni successivi alla minima dimensione della sua sezione trasversale e modificare i coefficienti di rottura riportati al numero 34 a seconda delle norme che vennero date nel seguente numero 35.

L'equazione di stabilità deve essere applicata ponendo in essa per Ω il valor particolare di quella sezione orizzontale del corpo nella quale più facilmente che in qualunque altra sezione può avvenire lo schiacciamento. Questa sezione è quella che chiamasi *sezione pericolosa* e vien essa determinata cercando nel corpo quella per rapporto alla quale è massimo il valore del coefficiente di stabilità, ossia il quoziente della forza premente per la resistenza totale allo snervamento od alla rottura per pressione che ad essa corrisponde. Nel caso di un solido prismatico caricato di punta, la sua sezione orizzontale infima costituisce evidentemente la sezione pericolosa.

ARTICOLO III.

Flessione prodotta nei solidi rettilinei da forze riducibili ad una risultante unica incontrante i loro assi.

144. **Fenomeni che avvengono in un solido rettilineo sotto l'azione di una forza comunque diretta ed incontrante il suo asse.** — Una forza applicata ad un solido rettilineo in direzione obbliqua al suo asse, ma in modo da incontrarlo, può sempre essere scomposta in due forze, l'una longitudinale ossia parallela, e l'altra normale ossia perpendicolare al detto asse. Sotto l'azione di queste forze contemporaneamente vien messa in giuoco l'elasticità longitudinale e l'elasticità trasversale; ha luogo flessione; e, a seconda dell'intensità, del senso secondo cui agiscono e del punto d'applicazione delle forze stesse, avviene o che alcune fibre del corpo si allungano mentre altre si accorciano, o che tutte si allungano, o che tutte si accorciano.

145. **Equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari che si sviluppano in una sezion retta qualunque di un corpo prismatico ed omogeneo.** — Siano AB e CD (*fig.* 129)

due sezioni trasversali infinitamente vicine fra di loro di un solido prismatico ed omogeneo il quale trovasi sotto l'azione di forze riducibili alla risultante unica R, applicata in L, contenuta nel piano determinato da questo punto e dall'asse zz' del prisma, e quindi scomponibile nelle due componenti T ed N dirette, la prima parallelamente e l'altra normalmente al detto asse; si consideri un elemento qualunque ab di fibra compreso fra le dette due sezioni; sia b' l'intersezione di questa fibra colla sezione CD rappresentata in vera forma e grandezza nella figura C′E′D′F′; si indichino con ω, Ω, x, y, v, l, θ, V, φ, ψ, I′, I″, E ed E^{IV} le quantità già designate colle stesse lettere al numero 88; e si chiamino

K la distanza del punto d'applicazione L della forza R dal piano della sezione CD,

μ il momento NK della forza N rispetto alla detta sezione CD,

m ed n l'ascissa $\overline{G'K}$ e l'ordinata $\overline{KH'}$ del punto d'incontro H′ della forza T col piano della sezione CD nella qual vennero assunti per assi coordinati gli assi principali centrali d'inerzia $xG'x'$ ed $yG'y'$ della figura C′E′D′F′.

Procedendo come al numero 88 si trova: che

$$v = y\cos\psi + x\,\mathrm{sen}\,\psi \qquad (1);$$

che la resistenza all'estensione sopportata dall'elemento di fibra ab è

$$E\,\omega\,\frac{(V+v)\theta}{l};$$

che i due momenti di questa forza per rapporto ai due assi delle x e delle y sono rispettivamente

$$E\,\omega\,\frac{(V+v)\theta}{l}\,y,$$

$$E\,\omega\,\frac{(V+v)\theta}{l}\,x;$$

e che la resistenza allo scorrimento trasversale opposta dal considerato elemento di fibra può essere espressa da

$$E^{IV}\,\omega\,\delta.$$

Osservando ora che le forze estrinseche sono la T e la N, torna agevole il trovare che le condizioni d'equilibrio sono

$$\Sigma\, E\, \omega \frac{(V+v)\,\theta}{l} - T = 0,$$

$$\Sigma\, E\, \omega \frac{(V+v)\,\theta}{l}\, y - T n - NK \cos\varphi = 0,$$

$$\Sigma\, E\, \omega \frac{(V+v)\,\theta}{l}\, x - T m - NK \operatorname{sen}\varphi = 0,$$

$$\Sigma\, E^{IV} \omega \theta - N = 0,$$

la prima delle quali esprime che è zero la somma algebrica delle forze parallele all'asse del prisma, la seconda che è nulla la somma dei momenti delle forze estrinseche e delle forze molecolari rispetto all'asse principale $x G' x'$, la terza che è pure nulla la somma dei momenti delle stesse forze rispetto all'asse principale $y G' y'$ e la quarta che è zero la somma algebrica di tutte le forze dirette normalmente all'asse del prisma. Ponendo in queste quattro equazioni d'equilibrio il valore di v dato dall'equazione (1), non dimenticando che il punto G' è centro di superficie della figura C'E'D'F', che gli assi coordinati $x G' x'$ ed $y G' y'$ sono assi principali centrali di inerzia e che il prodotto NK venne indicato con μ, per le semplificazioni di cui si parlò al numero 88, si ottiene

$$\left.\begin{aligned} & E \frac{\theta}{l} V \Omega = T \\ & E \frac{\theta}{l} I' \cos\psi = T n + \mu \cos\varphi \\ & E \frac{\theta}{l} I'' \operatorname{sen}\psi = T m + \mu \operatorname{sen}\varphi \\ & E^{IV} \theta \Omega = N \end{aligned}\right\} \quad (2).$$

Facendo $T = 0$ nelle equazioni d'equilibrio or ora trovate si deducono le quattro equazioni d'equilibrio marcate (6) al numero

88; e risultano quelle marcate (2) al numero 126 eguagliando a zero il valore di N e quindi quello di μ, e cangiando T in T'.

Per quanto spetta ai segni da darsi alle diverse quantità che entrano nelle equazione (2), si deve ritenere: che alle coordinate m ed n conviene il segno che loro corrisponde a seconda della posizione del punto H' per rapporto agli assi coordinati $xG'x'$ ed $yG'y'$; che la forza T, assunta come positiva quando tende a produrre allontanamento della sezione CD dalla sezione AB, va considerata come negativa quando è diretta in modo da produrre avvicinamento delle stesse sezioni; e che la forza N, già risguardata come positiva quando scomposta in due componenti parallele agli assi coordinati xx' ed yy', quest'ultima tende a far venire l'asse del prisma sulla $G'y'$, va presa come negativa quando la detta sua componente trovasi diretta in guisa da produrre una rotazione contraria. Per essere poi

$$\mu = NK, \qquad \varphi = NG'y' = G'H'K, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{m}{n},$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

e dovendosi considerare K come una distanza positiva, ai prodotti $\mu \operatorname{sen}\varphi$ e $\mu\cos\varphi$ convengono i segni che loro attribuiscono le quantità m, n ed N.

146. **Determinazione dell'asse neutro.** — L'asse neutro U'U' (*fig.* 129) in una sezione trasversale qualunque si determina come al numero 127, cercando cioè l'angolo $xG'U = \psi$ dell'asse delle ascisse $xG'x'$ colla retta UU condotta pel centro di superficie G' parallelamente all'asse neutro da determinarsi, e calcolando la distanza $\overline{G'0'} = V$ di quest'asse dall'accennato centro di superficie. Dividendo la terza delle tre equazioni (2) del numero precedente per la seconda si ottiene il valore della tangente dell'angolo ψ; si calcola la quantità $E\,\frac{\theta}{l}$ elevando al quadrato la seconda e la terza delle citate equazioni (2) dopo d'averle rispettivamente divise per I' e per I'', sommandole ed estraendo le radici quadrate dai due membri dell'equazione che risulta; finalmente si trova l'espressione della distanza V sostituendo il valore di $E\,\frac{\theta}{l}$ nella prima delle

stesse equazioni (2). Analizzando i valori di tangψ e di V che così si ottengono, si deduce: che in ogni sezione l'asse neutro è parallelo alla tangente all'ellisse centrale d'inerzia nel punto in cui vien essa incontrata dal *piano di sollecitazione*, ossia dal piano determinato dall'asse del prisma e della forza T; e che varia generalmente da sezione a sezione la distanza dell'asse neutro dal corrispondente centro di superficie.

Ammesse le convenzioni stabilite nel precedente numero sui segni da darsi alla quantità m, n, T ed N, un valore positivo di V corrisponde ad un asse neutro che incontra la parte negativa dell'asse delle y, mentre un valore negativo di V corrisponde ad un asse neutro che incontra la parte positiva dello stesso asse.

147. **Equazione della curva secondo cui si dispone l'asse di un solido prismatico ed omogeneo.** — Combinando, come venne indicato nel numero precedente, la seconda e la terza delle equazioni (2) del numero 145 si ricavi il valore di $E\frac{\theta}{l}$ e nell'equazione che risulta, per essere le due sezioni AB e CD (*fig.* 129) infinitamente vicine, invece del rapporto $\frac{\theta}{l}$ si metta il quoziente $\frac{1}{\rho}$ (num. 90), essendo ρ il raggio della circonferenza osculatrice alla curva elastica secondo cui, pel fatto della flessione, si dispone l'asse del solido. Così procedendo, si ottiene un'equazione fra il raggio di curvatura ρ, il coefficiente d'elasticità longitudinale E, i momenti d'inerzia I' ed I'', le coordinate m ed n, l'angolo φ, la forza T ed il momento inflettente μ, quest'equazione, la quale come si è fatto al numero 90 si può riferire a due assi coordinati ortogonali, il primo nella direzione dell'asse primitivo del solido ed il secondo nel piano di flessione, è appunto l'equazione richiesta.

148. **Resistenze riferite all'unità di superficie opposte dalle fibre maggiormente allungate e da quelle maggiormente compresse.** — Siano: Q_1 la resistenza per trazione riferita all'unità di superficie che, fra due sezioni vicinissime AB e CD (*fig.* 129), oppone quell'elemento delle fibre allungate cui corrisponde la distanza massima v' dalla retta UU condotta pel centro di superficie G' parallelamente all'asse neutro U' U'; Q_2 la resistenza per pressione, riferita pure all'unità di superficie, che fra le stesse sezioni sviluppa quell'elemento delle fibre accorciate che ha la distanza massima v'' dall'accennata retta UU; ed ω la superficie elementare della sezion retta di ambo i detti elementi di fibra. Si attribuiscano alle lettere E, θ ed l i significati che già alle medesime

vennero dati al numero 88, e non si dimentichi che V è la distanza fra le due rette UU ed U′U′, ossia la distanza del centro di superficie G′ dall'asse neutro U′U′, da assumersi come positiva o come negativa, secondo che incontra la parte negativa o la parte positiva dell'asse delle ordinate y. Quell'elemento delle fibre allungate distante v' dalla retta UU subisce un allungamento rappresentato da $(v'+V)\,\theta$ e quell'elemento delle fibre accorciate distante v'' dalla stessa retta UU si accorcia di $(v''-V)\,\theta$; il primo di questi elementi sviluppa una resistenza alla trazione (num. 12) data da $E\omega\,(v'+V)\,\frac{\theta}{l}$, ed il secondo una resistenza alla pressione espressa da $E\omega\,(v''-V)\frac{\theta}{l}$; e finalmente le resistenze Q_1 e Q_2 riferite all'unità di superficie ed opposte rispettivamente dall'elemento di fibra maggiormente allungato e da quello maggiormente compresso, quando si ammetta che la flessione provochi la sola elasticità longitudinale, giacchè sono assai piccoli gli allungamenti che le fibre subiscono per ciò che nella flessione si provoca anche la resistenza allo scorrimento trasversale, si possono determinare colle equazioni

$$Q_1 = E\,(v'+V)\,\frac{\theta}{l}$$

$$Q_2 = E\,(v''-V)\,\frac{\theta}{l},$$

le quali, ponendovi il valore di $E\,\frac{\theta}{l}$ che ricavasi dalla prima delle equazioni (2) del numero 145, si trasformano nelle seguenti

$$Q_1 = \frac{T}{\Omega}\left(1+\frac{v'}{V}\right)$$

$$Q_2 = \frac{T}{\Omega}\left(-1+\frac{v''}{V}\right).$$

Può accadere che queste formole diano valori negativi di Q_1 e di Q_2. Quando questo avviene è segno che è una pressione quella resistenza che si è supposta una tensione, e viceversa che è una tensione quella resistenza che si è supposta una pressione.

149. **Condizioni ed equazioni di stabilità.** — Affinchè fra due sezioni vicinissime AB e CD (*fig.* 129) un corpo ad asse rettilineo si possa dir stabile sotto l'azione di forze riducibili ad una forza unica passante pel suo asse, si richiede che l'elemento di fibra maggiormente allungato e che quello maggiormente compresso sviluppino resistenze inferiori a quelle che corrispondono allo snervamento per estensione e per compressione, e che nell'intiera sezione CD non venga messa in giuoco la resistenza allo snervamento per scorrimento trasversale. Segue da ciò che si avranno le condizioni di stabilità ponendo che le resistenze riferite all'unità di superficie opposte dalla fibra maggiormente allungata e da quella maggiormente compressa, e che la resistenza allo scorrimento trasversale, pure riferita all'unità di superficie, sono rispettivamente minori dei coefficienti di snervamento Q', Q'' e Q^{IV} (num. 13, 30 e 72), il primo per estensione, il secondo per compressione ed il terzo per scorrimento trasversale. In quanto alle equazioni di stabilità, risultano esse eguagliando le dette resistenze, o ai coefficienti di snervamento Q', Q'' e Q^{IV} moltiplicati pei relativi coefficienti di stabilità m', m'', ed m^{IV} (num. 14, 31 e 73), o ai coefficienti di rottura R', R'' ed R^{IV} (num. 17, 34 e 76) moltiplicate pei corrispondenti coefficienti di stabilità n', n'' ed n^{IV} (num. 18, 40 e 79).

150. **Formole convenienti al caso della flessione prodotta in un corpo prismatico ed omogeneo da forze contenute nel piano passante per uno degli assi principali centrali d'inerzia di tutte le sezioni trasversali, col punto d'applicazione della loro risultante sull'asse del solido.** — In questo caso, considerando due sezioni vicinissime AB e CD (*fig.* 130) e componendo in una sola tutte le forze R', R'', R''',....... applicate al corpo fra la sezione CD e la sezione estrema EF, si ottiene una risultante unica R scomponibile nelle due componenti T ed N, la prima diretta e l'altra normale all'asse del prisma. Trovandosi sull'asse LI il punto d'applicazione H dell'accennata risultante, si confonde col centro di superficie della sezione CD il punto d'incontro della forza T col piano della sezione stessa, per cui sono nulle le coordinate m ed n di questo punto. Essendo nel piano passante per uno degli assi principali centrali d'inerzia tutte le forze R', R'', R''',......., la loro risultante R e la forza T, anche la forza N si trova nel detto piano, per cui è pur nullo il valore dell'angolo φ. Segue da ciò che le formole (2) del numero 145 si semplificano nel caso di un prisma omogeneo sollecitato da forze contenute nel piano passante per uno

degli assi principali centrali d'inerzia di tutte le sezioni trasversali col punto d'applicazione della loro risultante sull'asse del solido, e che diventano

$$\left.\begin{aligned} & E\frac{\theta}{l}V\Omega = T \\ & E\frac{\theta}{l}I'\cos\psi = \mu \\ & E\frac{\theta}{l}I''\operatorname{sen}\psi = 0 \\ & E^{\prime v}\theta\Omega = N \end{aligned}\right\} \quad (1).$$

Per trovare la direzione dell'asse neutro, dividasi la terza delle equazioni or ora stabilite per la seconda. Si deduce che è nullo l'angolo ψ, e che l'asse neutro U'U' è perpendicolare al piano di sollecitazione col quale si confonde il piano di flessione.

Dividendo per I' la seconda delle quattro equazioni (1) e per I'' la terza, elevandole al quadrato e sommando le due equazioni che risultano, si trova

$$E^2\frac{\theta^2}{l^2}(\cos^2\psi + \operatorname{sen}^2\psi) = \frac{\mu^2}{I'^2},$$

d'onde, estraendo la radice quadrata ed osservando che $\cos^2\psi + \operatorname{sen}^2\psi = 1$, ricavasi

$$E\frac{\theta}{l} = \frac{\mu}{I'} \quad (2).$$

Ponendo questo valore di $E\frac{\theta}{l}$ nella prima delle equazioni (1) e risolvendola per rapporto a V si trova per distanza $\overline{G'O'} = V$ dell'asse neutro U'U' dal centro di superficie G'

$$V = \frac{TI'}{\mu\Omega} \quad (3).$$

Sostituendo il rapporto $\frac{1}{\rho}$ al rapporto $\frac{\theta}{l}$ e facendo, come al numero 106, $EI' = \varepsilon$, si ottiene per equazione della curva elastica secondo cui si dispone l'asse del prisma

$$\varepsilon \frac{1}{\rho} = \mu,$$

la quale, assumendo due assi coordinati ortogonali Oz ed Ou (*fig.* 48) per riferirvi l'equazione di detta curva, il primo nella direzione dell'asse primitivo del prisma ed il secondo contenuto nel piano di flessione, e rammentando che per flessioni piccole (num. 90)

$$\rho = \frac{1}{\frac{d^2 u}{d z^2}},$$

si riduce a

$$\varepsilon \frac{d^2 u}{d z^2} = \mu \qquad (4),$$

nella quale il momento inflettente μ va considerato siccome positivo quando nella rotazione che tende a produrre agisce in modo da far venire l'asse delle z sulla parte positiva dell'asse delle u, e come negativo quando agisce in senso contrario.

Per quanto spetta alle resistenze Q_1 e Q_2 riferite all'unità di superficie, che in una sezione qualunque oppongono le fibre maggiormente allungate e quelle maggiormente compresse, immediatamente si deducono dalle ultime equazioni del numero 148 e, ponendo in esse il valore di V dato dall'equazione (3), si ha

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \frac{v' \mu}{I'} + \frac{T}{\Omega} \\ Q_2 &= \frac{v'' \mu}{I'} - \frac{T}{\Omega} \end{aligned}\right\} \qquad (5).$$

151. Equazioni di stabilità, e determinazione di una delle dimensioni della sezione trasversale di un solido prismatico ed omogeneo sollecitato da forze disposte come si è detto nel numero precedente. — Si consideri un prisma il cui asse, sotto l'azione delle forze estrinseche, si è disposto secondo una linea curva, convessa in alcuni siti e concava in alcuni altri verso l'asse delle ascisse z assunto nella direzione dell'asse primitivo del corpo. Per un tal solido, prendendo come verso positivo dei momenti inflettenti quello che tende a far venire l'asse positivo delle ascisse z su quello positivo delle ordinate u, ed assumendo quest'ultimo in modo da essere positivi i momenti inflettenti dove la detta curva è convessa verso l'asse delle ascisse, saranno negativi i momenti inflettenti dove la stessa curva è concava; ed immaginandolo scomposto in tante parti separate dalle sezioni trasversali corrispondenti ai punti d'appoggio, ai punti d'applicazione delle forze estrinseche concentrate ed ai punti d'inflessione, bisogna applicare le equazioni di stabilità a ciascuna di queste parti. Perciò, chiamando per una qualunque delle parti in cui si è immaginato diviso il corpo

μ' e μ'' i valori assoluti dei momenti inflettenti per le sezioni cui corrispondono gli elementi di fibra i quali sopportano rispettivamente la tensione massima e la pressione massima,

u' la distanza dell'elemento di fibra il quale sopporta la tensione massima da una parallela all'asse neutro condotta pel centro di superficie,

u'' la distanza dell'elemento di fibra che sopporta la pressione massima dall'accennata parallela all'asse neutro,

T′ e T″ i valori delle forze longitudinali relative alle sezioni trasversali cui corrispondono i momenti inflettenti μ' e μ'', si ha che la tensione e pressione massime riferite all'unità di superficie sono rispettivamente espresse da

$$\frac{u'\mu'}{I'} + \frac{T'}{\Omega} \qquad (1),$$

$$\frac{u''\mu''}{I'} - \frac{T''}{\Omega} \qquad (2).$$

La tensione e la pressione massime Q_{1m} e Q_{2m}, per un determinato tratto di solido inflesso in cui i momenti inflettenti sono positivi, si trovano sostituendo nelle espressioni (1) e (2) invece di μ' e di μ'' il valore generale del momento inflettente μ, ed invece di T′ e di T″ il valore generale della forza longitudinale T per lo stesso tratto e prendendo i massimi valori di cui sono suscettive le dette espressioni. Analogamente si calcolano la tensione e la pressione massime Q_{1m} e Q_{2m} per un tratto di solido inflesso per cui i momenti inflettenti sono negativi, e solo bisogna avvertire che essendo μ' e μ'' i valori assoluti di due momenti inflettenti negativi, in loro vece bisogna mettere il valore generale del momento inflettente pel tratto che si considera coi segni cangiati.

Affinchè la parte di solido per cui sonosi trovati i valori di Q_{1m} e di Q_{2m} si possa dir stabile è necessario che queste tensione e pressione massime siano rispettivamente eguali ai coefficienti di rottura per estensione e per compressione moltiplicati pei relativi coefficienti di stabilità, cosicchè le domandate equazioni di stabilità saranno

$$n'R' = Q_{1m}, \qquad n''R'' = Q_{2m},$$

alle quali converrà ancora aggiungere l'altra relativa allo scorrimento trasversale

$$n^{\text{IV}} R^{\text{IV}} = \frac{N_m}{\Omega},$$

essendo N_m lo sforzo di taglio di maggior valore assoluto, ossia il maggior valore assoluto che può prendere la forza N per la considerata parte di prisma. — Le lettere n', n'', n^{IV}, R', R'', R^{IV} ed Ω hanno i significati che già altre volte loro vennero dati, e, quando invece dei coefficienti di rottura R', R'' ed R^{IV} si conoscono i coefficienti di snervamento Q', Q'' e Q^{IV}, basta cangiare nelle stabilite equazioni $n'R'$ in $m'Q'$, $n''R''$ in $m''\,Q''$ ed $n^{\text{IV}}R^{\text{IV}}$ in $m^{\text{IV}}Q^{\text{IV}}$.

Le trovate equazioni di stabilità, impiegate nel calcolo di una delle dimensioni della sezione trasversale di un solido prismatico, applicandole alle diverse parti in cui conviene immaginar diviso questo corpo per l'esistenza di punti d'appoggio, di punti d'applicazione di forze concentrate e di punti d'inflessione, conducono a valori diversi della dimensione incognita, ed il più grande di questi valori è quello da adottarsi.

152. **Problemi sulla determinazione delle sezioni pericolose, delle tensioni e delle pressioni massime riferite all'unità di superficie e degli sforzi di taglio massimi per solidi prismatici inclinati, simmetrici rispetto al piano verticale passante pei loro assi e carichi di pesi contenuti in questo piano.** — Alcuni problemi di uso frequente nella pratica, quali sono quelli di solidi inclinati appoggiati in due o più punti della loro lunghezza e carichi di pesi uniformemente distribuiti sulla loro proie-

zione orizzontale, saranno quelli che verranno risolti in questo numero; e, siccome la simmetrìa dei solidi rispetto al piano verticale passante pei loro assi è causa che il piano di sollecitazione passi per uno degli assi principali centrali d'inerzia di ciascuna delle loro sezioni trasversali, serviranno di guida nella loro risoluzione le generali nozioni premesse nel precedente numero.

I. *Determinare le sezioni pericolose, le tensioni e le pressioni massime riferite all'unità di superficie e lo sforzo di taglio di maggior valore assoluto per un solido prismatico* AB (*fig.* 131) *sorretto alla estremità inferiore* A *da un apposito sostegno, appoggiato per l'estremità superiore* B *contro la parete verticale di un ritegno fisso e caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale* AC.

Siano:

a la lunghezza orizzontale $\overline{AC}$ del solido proposto AB,

α l'angolo BAC che misura l'inclinazione dell'asse di detto solido coll'orizzonte,

p il peso che gravita sopra ogni unità di lunghezza della proiezione orizzontale AC.

Immaginando sostituite al sostegno A le due reazioni Q e V, orizzontale la prima e verticale la seconda, ed al ritegno B la reazione orizzontale Q′; osservando che vale pa il peso totale distribuito fra A e B, il qual peso trovasi applicato nel mezzo della lunghezza del corpo, e che è $a \operatorname{tang} \alpha$ la differenza di livello fra A e B; ed applicando al solido AB le equazioni d'equilibrio somministrate dalla statica dei corpi solidi, si ha

$$Q' = Q,$$

$$V = pa,$$

$$Q' a \operatorname{tang} \alpha = \frac{1}{2} p a^2,$$

d'onde

$$Q' = Q = \frac{pa}{2 \operatorname{tang} \alpha}.$$

La risultante R delle due reazioni Q e V costituisce la reazione del sostegno A, eguale e contraria alla spinta che contr'esso esercita il solido AB. Questa spinta vien data da

$$R = \sqrt{Q^2 + V^2} = pa \sqrt{\frac{1}{4\,\text{tang}^2\,\alpha} + 1},$$

e fa essa coll'orizzonte un angolo la cui tangente è

$$\frac{V}{Q} = 2\,\text{tang}\,\alpha.$$

Le forze applicate al solido AB e delle quali tutte bisogna tener conto nel risolvere il problema, sono: il peso pa che si scompone in una forza normale $pa \cos \alpha$ uniformemente distribuita tendente a produrre inflessione, ed in una forza longitudinale $pa \,\text{sen}\, \alpha$ anch'essa uniformemente distribuita, ed il cui effetto nel produrre compressione cresce a partire dalla sommità B fino all'estremità inferiore A; la reazione orizzontale $Q' = Q$ applicata in B, la cui componente normale $Q \,\text{sen}\, \alpha$ contribuisce a produrre inflessione, mentre la componente longitudinale $Q \cos \alpha$ comprime uniformemente il solido su tutta la sua lunghezza; la reazione R del sostegno in A la quale però non entrerà esplicitamente nei calcoli che verranno instituiti.

Per ottenere i valori della tensione massima Q_{1m} e della pressione massima Q_{2m} è necessario conoscere il valore generale del momento inflettente μ e quello della forza longitudinale T. In quanto al valore di μ in un punto qualunque m d'ascissa $\overline{Am'} = z$, per flessioni piccolissime quali sono quelle che si possono ammettere nella pratica, consta del momento $\frac{1}{2}\, p\,(a - z \cos \alpha)^2$ del peso $p\,(a - z \cos \alpha)$ uniformemente distribuito sulla proiezione orizzontale del tratto mB ed applicato nel mezzo di detto tratto, diminuito del momento $Q\,(a\,\text{tang}\,\alpha - z\,\text{sen}\,\alpha)$ della spinta $Q' = Q$ applicata in B. Il valore poi della forza comprimente T risulta sommando la componente longitudinale $p\,\text{sen}\,\alpha\,(a - z \cos \alpha)$ del peso uniformemente distribuito su mB colla componente longitudinale $Q \cos \alpha$ della spinta Q'. Per cui i valori generali del momento inflettente μ e della forza comprimente T in un punto qualunque m sono espressi da

$$\mu = \frac{1}{2}\, p\,(a - z \cos \alpha)^2 - Q\,(a\,\text{tang}\,\alpha - z\,\text{sen}\,\alpha),$$

$$T = p\,\text{sen}\,\alpha\,(a - z \cos \alpha) + Q \cos \alpha.$$

Il valore del momento inflettente μ coi segni cangiati, giacchè la curva secondo cui si dispone l'asse del solido è concava verso l'asse delle ascisse, ed il valore di T pure coi segni cangiati, giacchè esso rappresenta una pressione e tensione negativa, devono essere posti nelle espressioni (1) e (2) del numero 151, il primo invece di μ' e di μ'', il secondo invece di T$'$ e di T$''$; dopo bisogna cercare quali sono i valori particolari z' ed z'' di z determinanti le due sezioni cui corrispondono i due valori massimi di dette espressioni eguagliando a zero le loro derivate rispetto ad x; sostituire i trovati valori di z' e di z'' nelle espressioni di μ e di T coi segni cangiati per avere i valori assoluti μ' e μ'' dei momenti inflettenti per le sezioni cui corrispondono gli elementi di fibra che sopportano rispettivamente la tensione massima e la pressione massima e le forze longitudinali T$'$ e T$''$ relative alle stesse sezioni; e finalmente mettere i valori di μ', μ'', T$'$ e T$''$ nelle citate espressioni (1) e (2) del numero 151 le quali rappresentano allora rispettivamente i valori di Q_{1m} e di Q_{2m} (*r*). Così procedendo ed avendo riguardo al trovato valore di Q, si deduce che l'ascissa z' determinante la sezione in cui ha luogo la massima tensione riferita all'unità di superficie è data da

$$z'=\frac{pa\cos\alpha-Q\,\mathrm{sen}\,\alpha}{p\cos^2\alpha}+\frac{I'\,\mathrm{tang}\,\alpha}{u'\Omega}=\frac{a}{2\cos\alpha}+\frac{I'\,\mathrm{tang}\,\alpha}{u'\Omega}\quad(1);$$

che l'ascissa z'' a cui corrisponde la sezione nella quale si verifica la massima pressione riferita all'unità di superficie viene espressa da

$$z''=\frac{pa\cos\alpha-Q\,\mathrm{sen}\,\alpha}{p\cos^2\alpha}-\frac{I'\,\mathrm{tang}\,\alpha}{u''\Omega}=\frac{a}{2\cos\alpha}-\frac{I'\,\mathrm{tang}\,\alpha}{u''\Omega}\quad(2);$$

che i valori di μ', μ'', T$'$ e T$''$ sono

$$\mu'=\frac{p}{2}\left(\frac{a^2}{4}-\frac{I'^2\,\mathrm{sen}^2\alpha}{u'^2\Omega^2}\right),$$

(*r*) Le espressioni (1) e (2) del numero 151, quando si pongano in esse il valore di μ coi segni cangiati invece di μ' e μ'' e quello di T pure coi segni cangiati invece di T$'$ e T$''$, diventano del 2° grado in z, e quindi i loro valori massimi nonchè i corrispondenti valori di z' e z'' si possono anche determinare col metodo elementare che venne seguito al numero 84.

$$\mu'' = \frac{p}{2}\left(\frac{a^2}{4} - \frac{I'^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{u''^2\Omega^2}\right),$$

$$T' = p\left(-\frac{a}{2\operatorname{sen}\alpha} + \frac{I'\operatorname{sen}^2\alpha}{u'\Omega}\right),$$

$$T'' = p\left(\frac{a}{2\operatorname{sen}\alpha} - \frac{I'\operatorname{sen}^2\alpha}{u''\Omega}\right);$$

e che la tensione e pressione massime Q_{1m} e Q_{m2} ammettono rispettivamente i valori espressi da

$$Q_{1m} = \frac{p}{2}\left(\frac{a^2 u'}{4I'} - \frac{a u'\Omega - I'\operatorname{sen}^3\alpha}{u'\Omega^2\operatorname{sen}\alpha}\right) \tag{3},$$

$$Q_{2m} = \frac{p}{2}\left(\frac{a^2 u''}{4I'} + \frac{a u''\Omega + I'\operatorname{sen}^3\alpha}{u''\Omega^2\operatorname{sen}\alpha}\right) \tag{4}.$$

Per quanto spetta al maggior valore assoluto N_m dello sforzo di taglio, si osserva che per la sezione trasversale qualunque m la componente normale N della risultante di tutte le forze applicate al tratto mB di solido, avendo riguardo al valore di Q, vien data da

$$N = p(a - z\cos\alpha)\cos\alpha - Q\operatorname{sen}\alpha = p\left(\frac{1}{2}a - z\cos\alpha\right)\cos\alpha,$$

la quale acquista il maggior valore assoluto

$$N_m = \frac{1}{2}pa\cos\alpha \tag{5}$$

per $z = 0$ e per $z = \frac{a}{\cos\alpha}$ ossia per le sezioni estreme.

Le equazioni (1) e (2) determinano rispettivamente le sezioni pericolose per rapporto all'estensione ed alla compressione; le equazioni (3) e (4) danno la tensione e la pressione massime riferite all'unità di superficie nelle dette sezioni pericolose; e l'equazione (5) dà il massimo sforzo di taglio il quale si verifica nelle sezioni estreme che sono due sezioni egualmente pericolose sotto il rapporto della resistenza allo scorrimento trasversale.

Sostituendo i valori di Q_{1m}, di Q_{2m} e di N_m nelle tre equazioni di stabilità del numero precedente, e procedendo alla determinazione di una delle dimensioni della sezione trasversale del solido prismatico considerato in questo problema, si trova che, pei materiali che vengono impiegati nelle costruzioni e per le forme sotto cui si impiegano, dà generalmente il maggior valore dell'incognita la seconda delle dette equazioni di stabilità; cosicchè nel maggior numero dei casi basta al costruttore di trovare soltanto la sezione pericolosa per rapporto alla compressione ed il corrispondente valore Q_{2m} della pressione massima riferita all'unità di superficie in detta sezione.

II. *Determinare la sezione pericolosa sotto il rapporto della resistenza alla compressione e la pressione massima riferita all'unità di superficie per un solido prismatico* AC (*fig.* 132) *uniformemente caricato di pesi e collocato su tre punti equidistanti ed in linea retta.*

Siano A, B e C i tre appoggi, il primo fatto in modo da opporre al solido una reazione longitudinale Q ed una reazione normale R, il secondo ed il terzo disposti in guisa da opporre soltanto delle reazioni normali R_1 ed R_2; si chiamino

a la proiezione orizzontale $\overline{AF}$ dell'asse del prisma considerato,

α l'angolo CAF misurante l'inclinazione del detto asse coll'orizzonte,

p il peso che gravita sopra ogni unità della lunghezza della proiezione orizzontale AF;

e si suppongano tolti gli appoggi ed in loro vece sostituite le reazioni che essi esercitano contro il solido.

Essendo p il peso che gravita sopra ogni unità di lunghezza della proiezione orizzontale AF del prisma considerato, il peso totale che il medesimo sopporta è pa, la componente di questo peso secondo l'asse primitivo AC del prisma è $pa \operatorname{sen} \alpha$, e vale $pa \cos \alpha$ quella diretta normalmente allo stesso asse. La forza Q si determina dicendo che essa deve essere eguale alla componente longitudinale del total peso pa, cosicchè

$$Q = pa \operatorname{sen} \alpha;$$

e fra le tre reazioni R, R_1 ed R_2 si hanno le due condizioni somministrate dalla statica dei corpi solidi

$$R+R_1+R_2-pa\cos\alpha=0 \qquad (6)$$

$$\frac{1}{2}R_1\frac{a}{\cos\alpha}+R_2\frac{a}{\cos\alpha}-\frac{1}{2}pa^2=0 \qquad (7),$$

la prima delle quali esprime che si annulla la somma di tutte le forze dirette normalmente all'asse AC del solido, e la seconda che si annulla pure la somma dei momenti delle stesse forze rispetto all'estremo A.

Prendendo ora per origine di coordinate il centro della sezione trasversale corrispondente all'appoggio B, assumendo l'asse delle ascisse z' nella direzione dell'asse primitivo del corpo e l'asse delle ordinate u' perpendicolare a Bz e volto all'ingiù, per una sezione qualunque il cui centro m ha l'ascissa $\overline{Bm'}=z'$, il momento inflettente μ, constando del momento $\frac{1}{2}p\left(\frac{1}{2}a-z'\cos\alpha\right)^2$ del peso $p\left(\frac{1}{2}a-z'\cos\alpha\right)$ uniformemente distribuito sulla proiezione orizzontale del tratto mC ed applicato nel mezzo di detto tratto; diminuito del momento $R_2\left(\frac{1}{2}\frac{a}{\cos\alpha}-z'\right)$ della reazione R_2, ammette il valore espresso da

$$\mu=\frac{1}{2}p\left(\frac{1}{2}a-z'\cos\alpha\right)^2-R_2\left(\frac{1}{2}\frac{a}{\cos\alpha}-z'\right).$$

Ponendo questo valore del momento inflettente nell'equazione (4) del numero 150, si ottiene la seguente equazione differenziale della curva secondo cui si dispone l'asse del solido sottoposto a flessione fra i due appoggi B e C

$$\varepsilon\frac{d^2u'}{dz'^2}=\frac{1}{2}p\left(\frac{1}{2}a-z'\cos\alpha\right)^2-R_2\left(\frac{1}{2}\frac{a}{\cos\alpha}-z'\right);$$

e quest'equazione, integrata in modo che per il punto B ossia per $z=0$ si abbia $\frac{du'}{dz'}=0$ giacchè, atteso la simmetria delle componenti normali dei pesi uniformemente distribuiti su BA e su BC per rapporto al punto B, si può ritenere siccome diretta secondo l'asse primitivo Az la tangente all'asse deformato nel detto punto B, dà

$$\varepsilon \frac{du'}{dz'} = \frac{1}{2} p \left(\frac{1}{4} a^2 z' - \frac{1}{2} a z'^2 \cos\alpha + \frac{1}{3} z'^3 \cos^2\alpha \right)$$
$$- R_2 \left(\frac{1}{2} \frac{a}{\cos\alpha} z' - \frac{1}{2} z'^2 \right).$$

Integrando ancora quest'equazione in modo che per il punto B, ossia per $z' = 0$, si abbia $u' = 0$, risulta

$$\varepsilon u' = \frac{1}{4} p \left(\frac{1}{4} a^2 z'^2 - \frac{1}{3} a z'^3 \cos\alpha + \frac{1}{6} z'^4 \cos^2\alpha \right)$$
$$- \frac{1}{2} R_2 \left(\frac{1}{2} \frac{a}{\cos\alpha} z'^2 - \frac{1}{3} z'^3 \right),$$

la quale, dovendo dare $u' = 0$ per $z' = \overline{BC} = \frac{1}{2} \frac{a}{\cos\alpha}$, conduce alla seguente relazione fra i dati del problema e la reazione R_2

$$0 = \frac{1}{4} p \left(\frac{1}{16} \frac{a^4}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{24} \frac{a^4}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{96} \frac{a^4}{\cos^2\alpha} \right)$$
$$- \frac{1}{2} R_2 \left(\frac{1}{8} \frac{a^3}{\cos^3\alpha} - \frac{1}{24} \frac{a^3}{\cos^3\alpha} \right),$$

da cui si deduce

$$R_2 = \frac{3}{16} a p \cos\alpha.$$

Questo valore di R_2 si ponga nell'equazione (7), e si trova allora il seguente valore di R_1

$$R_1 = \frac{5}{8} p a \cos\alpha.$$

Il valore di R si può dedurre dall'equazione (6) ponendo in essa gli ottenuti valori di R_1 e R_2, e si ottiene

$$R = \frac{3}{16} a p \cos\alpha.$$

Assumendo il centro A della sezione estrema più bassa per origine delle ascisse z, prendendo come verso positivo dei momenti quello che tende a far venire l'asse Az sull'asse Au, chiamando μ_1 e μ_2 i momenti inflettenti relativi a due diverse sezioni qualunque appartenenti, una alla parte di solido AB e l'altra alla parte di solido BC, ed avendo riguardo ai trovati valori di R_1 e di R_2, si ha

$$\mu_1 = \frac{1}{2}p(a - z\cos\alpha)^2 - \frac{5}{8}ap\left(\frac{1}{2}\frac{a}{\cos\alpha} - z\right)\cos\alpha$$

$$-\frac{3}{16}ap\left(\frac{a}{\cos\alpha} - z\right)\cos\alpha = \frac{1}{2}pz\left(z\cos\alpha - \frac{3}{8}a\right)\cos\alpha,$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2}p(a - z\cos\alpha)^2 - \frac{3}{16}ap\left(\frac{a}{\cos\alpha} - z\right)\cos\alpha$$

$$= \frac{5}{16}pa^2 - \frac{1}{16}pz(13a - 8z\cos\alpha)\cos\alpha.$$

Ottenute le espressioni generali dei momenti inflettenti relativi alle parti di solido AB e CD, bisogna decidere per quali tratti di detto solido questi momenti sono positivi e per quali tratti sono negativi. Considerando il valore di μ_1 subito si riconosce che esso va a zero per $z = 0$ e per $z = \frac{3}{8}\frac{a}{\cos\alpha}$, e considerando quello di μ_2 facilmente si vede che esso si annulla per $z = \frac{5}{8}\frac{a}{\cos\alpha}$ e per $z = \frac{a}{\cos\alpha}$. Segue da ciò che prendendo le distanze $\overline{AD'}$ ed $\overline{AE'}$ le quali siano rispettivamente i 3/8 ed i 5/8 della lunghezza $\overline{AC}$ si hanno le ascisse dei due punti d'inflessione D ed E che presenta la curva secondo cui si dispone l'asse del prisma considerato, e che i momenti inflettenti, i quali hanno valori negativi finchè si riferiscono a sezioni trasversali appartenenti ai tratti AD ed EC, diventano positivi quando vengono presi rispetto a sezioni trasversali appartenenti ai tratti DB e BE.

Trovate le reazioni Q, R, R_1 ed R_2 e determinate le parti di solido separate dai punti d'appoggio e dai punti d'inflessione, quali sono le AD, DB, BE ed EC, ecco come si procede per la ricerca della sezione pericolosa sotto il rapporto della resistenza alla compressione, nonchè della pressione massima riferita all'unità di superficie.

Per la parte di solido AD si ha che il momento inflettente μ e che la forza longitudinale T ammettono i valori

$$\mu=\frac{1}{2}pz\left(z\cos\alpha-\frac{3}{8}a\right)\cos\alpha \qquad (8),$$

$$T=p(a-z\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha \qquad (9),$$

da applicarsi per valori di z compresi fra 0 e $\frac{3}{8}\frac{a}{\cos\alpha}$. Il valore di μ conservandosi negativo per valori di z compresi fra gli or accennati limiti e quello di T rappresentando una pressione o tensione negativa, si devono essi sostituire coi segni cangiati nell'espressione (2) del numero 151 invece di μ'' e di T'', ed immediatamente risulta l'espressione la cui derivata per rapporto a z, eguagliata a zero, conduce a trovare quel valore particolare z' di z il quale determina la sezione pericolosa nel tratto AD. Questo valore di z' è

$$z'=\frac{3}{16}\frac{a}{\cos\alpha}-\frac{I'\operatorname{tang}\alpha}{u''\Omega} \qquad (10);$$

corrispondono ad esso i valori particolari μ'' e T'' di μ e di T, coi segni cangiati, dati da

$$\mu''=\frac{p}{2}\left(\frac{9}{256}a^2-\frac{I'^2\operatorname{sen}^2\alpha}{u''^2\Omega^2}\right),$$

$$T''=-p\left(\frac{13}{16}a+\frac{I'\operatorname{sen}\alpha}{u''\Omega}\right)\operatorname{sen}\alpha,$$

e la pressione massima Q_{2m} riferita all'unità di superficie ammette il valore

$$Q_{2m}=\frac{p}{2}\left(\frac{9}{512}\frac{a^2u''}{I'}+\frac{I'\operatorname{sen}^2\alpha}{u''\Omega^2}+\frac{13}{8}\frac{a\operatorname{sen}\alpha}{\Omega}\right) \qquad (11).$$

Per la parte di solido DB il momento inflettente μ e la forza longitudinale T ammettono i valori (8) e (9) già trovati, da applicarsi fra $z=\frac{3}{8}\frac{a}{\cos\alpha}$ e $z=\frac{1}{2}\frac{a}{\cos\alpha}$. Il momento inflettente μ si conserva positivo per tutti i valori di z compresi fra gli accennati limiti, ed il valore di T rappresenta sempre una pressione o tensione negativa, per cui ponendo nell'espressione (2) del numero 151 il valore di μ coi propri segni invece di μ'' ed il valore di T coi segni cangiati invece di T'', si ottiene l'espressione

$$\frac{u'' p z (8 z \cos\alpha - 3a)\cos\alpha}{16\,\mathrm{I}'} + \frac{p(a - z\cos\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\Omega}.$$

Quest'espressione, crescendo col crescere di z, mostra ad evidenza come la sezione pericolosa nel tratto DB sia quella che corrisponde all'appoggio B e come la pressione massima Q_{2m} in detta sezione sia il valore particolare che prende l'espressione stessa per $z = \frac{1}{2}\frac{a}{\cos\alpha}$, per cui

$$Q_{2m} = \frac{pa}{2}\left(\frac{1}{16}\frac{a u''}{\mathrm{I}'} + \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\Omega}\right) \qquad (12).$$

Se ora si osserva che le forze perpendicolari alla lunghezza del solido sono simmetricamente disposte rispetto al suo mezzo B, e che la forza comprimente cresce da una sezione all'altra andando dall'estremo C all'estremo A, agevolmente si comprende come la pressione massima debba sicuramente aver luogo in una sezione del tratto AB anzichè in una sezione dell'altro tratto BC, e quindi come sia inutile l'instituire per quest'ultimo le ricerche che vennero fatte pel primo. La sezione determinata dall'equazione (10) e quella corrispondente all'appoggio B sono adunque due sezioni pericolose, e di queste sezioni è maggiormente pericolosa quella cui corrisponde il più grande dei due valori di Q_{2m} somministrati dalle equazioni (11) e (12).

153. **Solidi omogenei ad asse rettilineo e di egual resistenza.** — La legge secondo cui devono variare le sezioni di solidi sottoposti all'azione di forze riducibili ad una risultante unica comunque diretta ed incontrante i loro assi, affinchè siano essi di egual resistenza, si trova con un metodo in tutto analogo a quello che venne seguito al numero 112 parlando dei solidi omogenei ad asse rettilineo e di egual resistenza sotto l'azione di forze contenute in uno stesso piano passante pei loro assi ed a questi perpendicolari. I valori delle resistenze Q_1 e Q_2 riferite all'unità di superficie, che

in una sezione qualunque oppongono le fibre maggiormente allungate e quelle maggiormente compresse, vanno eguagliati ai coefficienti di snervamento Q' e Q'' (num. 92) oppure ai coefficienti di rottura R' ed R'' (num. 93) per trazione e per pressione moltiplicati pei rispettivi coefficienti di stabilità, e le diverse sezioni del solido che si vuol fare di egual resistenza devono essere prese in modo da soddisfare a quella delle due equazioni che loro dà il maggior valore. Una volta determinate le sezioni trasversali in modo che il corpo sia di egual resistenza sotto il rapporto della tensione massima o della pressione massima che in ciascuna di esse si sviluppa, bisogna ancora accertarsi se esso presenta la necessaria resistenza allo scorrimento trasversale, e convenientemente ingrossarlo dove presenta una sezione deficiente, determinando questa come si è detto al già citato numero 112.

CAPITOLO VII.

Resistenza all'innalzamento.

154. **Condizione ed equazione di stabilità per un corpo il quale trovasi sotto l'azione di una forza che tende a sollevarlo.** — Allorquando un corpo trovasi sotto l'azione di una forza la quale, agendo verticalmente dal basso all'alto, tende a sollevarlo distaccandolo dai suoi appoggi, il peso del corpo stesso opponesi a questo sollevamento, il quale in nessun modo può aver luogo tuttavolta che la forza sollevante trovasi direttamente opposta ed inferiore al detto peso. Segue da ciò che, chiamando

T^v la forza verticale la quale tende a produrre l'innalzamento di un dato corpo e

P il peso di questo corpo,

si avrà la condizione di stabilità

$$T^v < P,$$

la quale si può tradurre nell'equazione di stabilità

$$T^v = n^v P,$$

essendo n^v un coefficiente di stabilità che, pel motivo indicato al numero 81 nel fissare i valori del coefficiente di stabilità n_1^{IV}, si assume variabile fra 4/5 e 2/5.

155. **Uso dell'equazione di stabilità relativa alla resistenza all'innalzamento, e determinazione del solido di più facile innalzamento.** — L'equazione di stabilità che venne stabilita nel precedente numero serve principalmente a risolvere i seguenti problemi:

1° *Trovare a qual forza* T^V, *direttamente opposta al peso di un corpo, si può questo sottoporre, affinchè non venga sollevato;*

2° *Trovare qual peso* P *deve avere un corpo, affinchè non venga sollevato da una forza* T^V *direttamente opposta al peso del corpo stesso.*

Avviene ben sovente nella pratica delle costruzioni di dover considerare dei corpi i quali si trovano in tali condizioni da poter avvenire in essi un sollevamento parziale, anzichè un sollevamento totale. Se il sollevamento parziale tende a manifestarsi più facilmente per una parte che per un'altra del corpo dato, esiste un *solido di più facile innalzamento* il quale dà luogo a delle *sezioni pericolose* nelle superficie secondo le quali si stacca dal corpo intiero. Il solido di più facile innalzamento si determina cercando quella parte del solido intiero per rapporto alla quale è massimo il valore del coefficiente di stabilità, ossia il valore della forza che tende a produrre il sollevamento per il corrispondente peso che vi si oppone.

156. **Verificazione della stabilità di un condotto in muratura entro il quale si esercita una pressione idrostatica che tende a sollevare il vôlto che lo copre.** — Rappresenti la figura 133 la sezione trasversale di un condotto orizzontale in muratura costituito d'una platea e delle opere di fondazione che terminano al livello AB, di due piedritti AL e BN e di un vôlto LMNCDE sovraccaricato fino alla superficie cilindrica proiettata nella linea IOH. Attraverso a questo condotto passi dell'acqua la quale prima di entrare in esso sale al livello marcato dalla linea PR; e suppongasi che possa avvenire il sollevamento di un masso come $mDpqrst$, separantesi dal vôlto secondo i giunti mt e pq diretti normalmente alla superficie d'intrados e del sovrastante sovraccarico secondo i piani verticali ts e qr. Si riferisca la curva, che si suppone simmetrica rispetto alla verticale Dy, a due assi coordinati, si assuma per origine il punto culminante D dell'indicata curva, per asse delle ascisse si prenda la tangente Dx in D, per asse delle ordi-

nate la verticale Dy. Si consideri una parte di condotto lunga la unità, e si chiamino:

a la differenza di livello $\overline{DQ}$ fra il punto D ed il livello del liquido prima di entrare nel condotto;

p il peso dell'unità di volume di liquido;

x ed y le due coordinate $\overline{Dp'}$ e $\overline{p'p}$ del punto p posto dalla retta Dy alla distanza che dalla medesima retta ha il punto m;

x' ed y' le due coordinate $\overline{Du'}$ ed $\overline{u'u}$ d'un punto qualunque u dell'arco Dp.

Supponendo chiuso il condotto all'estremità per la quale sorte il liquido e quindi ammettendo il caso più sfavorevole d'una pressione idrostatica (s) contro la superficie d'intrados del vôlto, sopra l'elemento di superficie rappresentato nell'archetto $uv = ds'$, il qual elemento non è altro che una strettissima lista rettangolare lunga l'unità e larga ds', ha luogo una pressione elementare ad esso normale e misurata dal peso di un cilindro liquido avente per base la detta lista di superficie $1 \times ds'$ e per altezza la differenza livello $\overline{uu''} = a + y'$ fra il punto u e la orizzontale PR, per cui questa pressione elementare vien espressa da

$$p\,(a + y')\,ds';$$

la sua componente verticale ammette il valore

$$p\,(a + y')\,dx';$$

e la totale spinta verticale che si esercita contro la parte di superficie d'intrados del vôlto rappresentata in mDp vien data da

$$p\int_{-x}^{x}(a + y')\,dx'.$$

Conoscendosi l'equazione della curva EDC rispetto ai due assi coordinati Dx e Dy, si ha il valore di y' in funzione di x'; può essere effettuata l'integrazione, e così si può avere in funzione della variabile x l'espressione generale della spinta verticale che agisce su una parte qualunque della superficie d'intrados del vôlto,

(s) Nel numero che segue è indicato un procedimento elementare per ottenere la pressione verticale che ha luogo sopra una parte qualunque della superficie d'intrados del vôlto del condotto.

come $m\mathrm{D}p$, simmetricamente estendentesi per rapporto alla generatrice suprema rappresentata nel punto D, e che tende a sollevare il masso $m\mathrm{D}pqrst$ il cui peso sarà pure esprimibile per x allorquando si conosca con qual legge vennero tracciate le due linee LMN ed IOH. Chiamando rispettivamente $f(x)$ e $\varphi(x)$ le espressioni della forza verticale agente dal basso all'alto che tende a produrre il sollevamento e del peso agente dall'alto in basso che a questo sollevamento si oppone, l'equazione di stabilità del numero 154 conduce a trovare

$$n^{\mathrm{v}} = \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

dalla quale equazione si può dedurre quali sono le sezioni pericolose e giudicare del grado di stabilità del condotto sotto il rapporto della resistenza al sollevamento. Per determinare le sezioni pericolose bisogna cercare qual è quel valore particolare di x che rende massimo, per valori di x compresi fra 0 ed $\overline{\mathrm{SC}}$, il valore di n^{v}; per decidere poi della stabilità del condotto serve il valore massimo di n^{v} e si dirà: che esiste lo stretto equilibrio quando $n^{\mathrm{v}}=1$, che vi è stabilità se $n^{\mathrm{v}}<1$ e che la stabilità è tanto più grande quanto più n^{v} è una frazione piccola, e finalmente che non vi ha equilibrio quando $n^{\mathrm{v}}>1$.

L'espressione $\int_{-x}^{x}(a+y')\,dx'$ rappresenta evidentemente la superficie $m\mathrm{D}pp''m''$, per cui si può dire che $p\int_{-x}^{x}(a+y')\,dy'$ è il peso di un cilindro d'acqua avente per base la detta superficie e per altezza l'unità. Questa semplicissima osservazione conduce a risolvere il problema anche nel caso in cui non si conosca l'equazione della curva EDC, purchè in iscala piuttosto grande si abbia il disegno della sezione trasversale del condotto. Considerando diverse parti $m\mathrm{D}p$, $m_1\mathrm{D}p_1$, $m_2\mathrm{D}p_2$, ... della superficie d'intrados del vôlto, basta fare le superficie $m\mathrm{D}pp''m''$, $m_1\mathrm{D}p_1p_1''m_1''$, $m_2\mathrm{D}p_2p_2''m_2''$, ... e moltiplicarle per p onde ottenere le pressioni verticali T^{v}, $\mathrm{T}_1^{\mathrm{v}}$, $\mathrm{T}_2^{\mathrm{v}}$, ... che su esse hanno luogo per una lunghezza eguale all'unità: trovando i pesi P, P_1, P_2, ... dei massi $m\mathrm{D}pqrst$, $m_1\mathrm{D}p_1q_1r_1s_1t_1$, $m_2\mathrm{D}p_2q_2r_2s_2t_2$, ... che rispettivamente operano contro le dette pressioni verticali e facendo i quozienti $\frac{T}{P}, \frac{T_1}{P_1}, \frac{T_2}{P_2}$, ..., si hanno altrettanti valori diversi n^v, n_1^v, n_2^v, ... del coefficiente di stabilità. Il più grande dei detti quozienti rappresenta esattamente o per approssimazione il più gran valore del coefficiente di stabilità, è quello cui corrisponde il solido di più facile innalzamento, determina le sezioni pericolose, e, secondo che risulta eguale o minore o maggiore dell'unità, porta a decidere se nel condotto e per rapporto alla resistenza al sollevamento vi ha lo stretto equilibrio o se vi ha stabilità o se questa manca.

157. **Procedimento elementare per ottenere la pressione verticale che ha luogo sopra una parte qualunque della superficie d'intrados del vôlto del condotto considerato nel precedente numero.** — Ritenendo che l'arco EDC (*fig.* 133) sia una linea poligonale di lati piccolissimi alternativamente verticali ed orizzontali, la superficie d'intrados del vôlto del condotto rappresentata nell'arco Dp (*fig.* 134) può essere risguardata come una superficie poliedrica a facce strettissime alternativamente orizzontali e verticali a partire da D, per cui la pressione verticale che il liquido produce contro la superficie rappresentata in Dp altro non può essere che la somma di tutte le pressioni che hanno luogo sulle piccole facce orizzontali Dα, $\alpha'\beta$, $\beta'\gamma$, ... Ora, essendo p il peso dell'unità di volume di liquido e considerando una parte di vôlto lunga l'unità, la somma delle pressioni che hanno luogo sulle indicate strettissime facce orizzontali è

$$p(\overline{DQ}.\overline{D\alpha}+\overline{\alpha'\alpha''}.\overline{\alpha'\beta}+\overline{\beta'\beta''}.\overline{\beta'\gamma}+ ....),$$

e, siccome la somma dei prodotti entro parentesi non è altro che la somma delle aree piccolissime DQ$\alpha''\alpha'$, $\alpha'\alpha''\beta''\beta'$, $\beta'\beta''\gamma''\gamma'$, ... costituente l'aree totale DQ$p''p$, agevolmente si viene a conchiudere come la pressione verticale sulla superficie cilindrica lungo l'unità e rappresentata in Dp altro non sia che il peso del cilindro d'acqua avente per base la superficie DQ$p''p$ e per altezza l'unità, e come per conseguenza quella che ha luogo sulla superficie cilindrica mDp debba essere il peso del cilindro d'acqua pure alto l'unità ed avente per base la superficie $mm''p''p$. Ciò premesso, torna agevole il trovare le pressioni verticali che il liquido produce contro diverse parti (*fig.* 133) mDp, m_1Dp_1, m_2Dp_2, ... della superficie d'intrados per una lunghezza di condotto eguale all'unità, e verificare la stabilità dell'edifizio sotto il rapporto della resistenza all'innalzamento procedendo come si è indicato sul finire del precedente numero.

158. **Resistenza all'innalzamento tenendo conto della coesione dei materiali.** — Nel valutare la resistenza all'innalzamento usano alcuni costruttori di tener anche conto della coesione che mantiene unito il masso soggetto a sollevamento a quello che rimane immobile quando questo fatto avvenga. Se il distacco del primo masso dal secondo tende ad avvenire secondo superficie piane orizzontali, la forza di coesione che si oppone al sollevamento si valuta siccome una resistenza allo strappamento operante in senso verticale e dall'alto al basso; se il detto distacco può solo manifestarsi secondo superficie verticali, la forza che tende ad impedirlo si considera come risultante dalle resistenze che si sviluppano nelle dette superficie di separazione ed agenti pure dall'alto al basso; se finalmente le superficie di separazione sono piani inclinati si usano dai pratici due metodi ben diversi nel valutare la resistenza dovuta alla coesione. Considerando, per esempio, il caso della resistenza al sollevamento che presenta il masso $m\mathrm{D}pqrst$ (*fig.* 133) quando contro la sua faccia $m\mathrm{D}p$ si esercita una pressione idrostatica dal basso all'alto, ammettono taluni che normalmente a ciascuno dei giunti piani ml e pq si sviluppi una resistenza allo strappamento diretta dall'alto al basso e che in ciascuno dei giunti verticali ts e qr nasca una resistenza allo scorrimento pure diretta dall'alto dal basso; altri invece, ritenendo come vero quanto si è detto per le resistenze allo scorrimento che si sviluppano negli or accennati giunti verticali, partono dall'idea che i giunti mt e pq non siano realmente piani ma sibbene superficie poliedriche formate da piccolissime facce rettangolari alternativamente verticali ed orizzontali, dicono che su tutte le piccole facce orizzontali, il cui complesso fa le proiezioni orizzontali tt' e qq' di mt e di pq, hanno luogo delle resistenze allo strappamento producenti una resistenza unica diretta verticalmente dall'alto al basso, e che su tutte le piccole facce verticali, dal cui complesso risultano le proiezioni verticali mt' e pq' di mt e di pq, si sviluppano delle resistenze allo scorrimento formanti una risultante unica anche verticale ed agente dall'alto al basso.

Chiamando

R' la resistenza alla rottura per strappamento riferita all'unità di superficie,

R^{v} la resistenza alla rottura per scorrimento pure riferita all'unità di superficie, P il peso del masso il quale è soggetto ad innalzamento per effetto d'una pressione idrostatica che verticalmente contro esso si esercita dal basso all'alto,

evidentemente risulta da quanto si è detto: che la resistenza all'innalzamento per un masso, il quale tende a staccarsi dai suoi sostegni secondo due superficie orizzontali ciascuna delle quali presenta l'area Ω, è espressa da

$$P + 2R'\Omega;$$

che la resistenza all'innalzamento per un masso, il quale può essere levato dai suoi sostegni per distacco secondo due superficie verticali ciascuna delle quali ha l'area ω, vale

$$P + 2R^{IV}\omega;$$

e finalmente che la resistenza all'innalzamento per un masso come $mDpqrst$, il quale può staccarsi dai suoi sostegni secondo i giunti verticali st ed rq aventi ciascuno la superficie ω e secondo i giunti mt e pq presentanti ciascuno la superficie Ω e facenti l'angolo α colla verticale, può essere valutata, secondo alcuni, coll'espressione

$$P + 2R'\Omega \operatorname{sen}\alpha + 2R^{IV}\omega \qquad (1),$$

dove $R'\Omega \operatorname{sen}\alpha$ esprime la componente verticale della resistenza dovuta alla coesione che si sviluppa normalmente a ciascuno dei due giunti mt e pq; secondo altri coll'espressione

$$P + 2\Omega(R' \operatorname{sen}\alpha + R^{IV}\cos\alpha) + 2R^{IV}\omega \qquad (2),$$

nella quale $2R'\Omega \operatorname{sen}\alpha$ è la risultante di tutte le resistenze allo strappamento che hanno luogo sulle piccole facce orizzontali che nel loro complesso costituiscono le proiezioni orizzontali tt' e qq' di mt e di pq, e $2R^{IV}\Omega\cos\alpha$ la risultante di tutte le risistenze allo scorrimento che hanno luogo sulle piccole facce verticali formanti nel loro assieme le proiezioni verticali mt' e pq' dei detti giunti mt e pq.

Evidentemente la resistenza all'innalzamento che si ottiene applicando l'espressione (2) supera della quantità $2\Omega R^{IV}\cos\alpha$ quella che vien data dall'espressione (1); e siccome nella pratica delle costruzioni, allorquando non è ben certo in qual modo si sviluppano le resistenze, è prudente consiglio l'attenersi a quei risultati che sono in favore della stabilità, un cauto costruttore, il quale voglia anche tener conto della coesione dei materiali nel valutare la resistenza all'innalzamento per un condotto contro il cui vôlto si esercita una pressione verticalmente diretta dal basso all'alto, dovrà servirsi nei suoi calcoli dell'espressione (1) anzichè dell'espressione (2), e per la sicurezza dell'opera dovrà fare in modo che il coefficiente di stabilità non sia maggiore di 1/10.

CAPITOLO VIII.

Resistenza al rovesciamento.

159. **Condizione ed equazione di stabilità per un corpo il quale trovasi sotto l'azione di forze che tendono a rovesciarlo.** — Se date forze operano sopra un corpo in modo da produrre il suo rovesciamento od anche solamente il rovesciamento di una sua parte, e se il peso del corpo stesso si oppone a che questo fatto avvenga; affinchè il corpo si possa dir stabile è necessario che il momento del suo peso rispetto alla retta, intorno alla quale tende ad aver luogo la rotazione con cui incomincia il rovesciamento, sia maggiore della somma algebrica dei momenti di tutte le altre forze applicato al corpo rispetto alla medesima retta. Segue da ciò che, chiamando

P il peso del corpo e

c il suo braccio ossia la sua distanza dalla retta intorno alla quale può aver luogo il rovesciamento,

M' la somma algebrica dei momenti di tutte le altre forze applicate al corpo rispetto all'accennata retta,

si deve avere la condizione di stabilità

$$M' < Pc\,,$$

e quindi l'equazione di stabilità

$$M' = n^{\mathrm{VI}} Pc$$

nella quale n^{VI} è un coefficiente di stabilità che, pel motivo indicato al numero 81 nel fissare i valori del coefficiente di stabilità n^{IV}, si può assumere siccome variabile fra 4/5 e 2/5.

160. Uso dell'equazione di stabilità relativa alla resistenza al rovesciamento e determinazione del solido di più facile rovesciamento. — L'uso dell'equazione di stabilità del numero precedente sta principalmente nel risolvere questi due problemi pratici:

1° *Trovare a qual momento rovesciante* M' *si può assoggettare un dato corpo prismatico affinchè non abbia luogo il suo rovesciamento;*

2° *Trovare una delle dimensioni della sezion retta di forma cognita da assegnarsi ad un corpo prismatico di sostanza nota, affinchè non venga rovesciato sotto l'azione di un dato momento rovesciante* M'.

Allorquando i corpi che sono soggetti a rovesciamento presentano una tal forma ed una tal struttura da essere più facile il rovesciamento per questa anzichè per l'altra parte, si fa luogo alla ricerca del *solido di più facile rovesciamento* e quindi alla ricerca della *sezione pericolosa*, lo quale non è altro che il giunto secondo cui il detto solido tende a staccarsi dalla parte che rimane immobile al momento in cui il rovesciamento comincia a manifestarsi. Si determina il solido di più facile rovesciamento cercando quella parte del corpo intiero, a cui essa appartiene, per rapporto alla quale è massimo il valore del coefficiente di stabilità, ossia il valore del quoziente del momento rovesciante M' per il corrispondente momento resistente Pc.

161. Verificazione della stabilità di un muro il quale può essere rovesciato da una forza che obbliquamente agisce contro una sua faccia. — Sia ABCD (*fig.* 135) la sezione trasversale di un muro che si suppone di lunghezza eguale all'unità, costrutto per strati regolari aventi date inclinazioni all'orizzonte e sottoposto all'azione di una forza R, cognita di direzione e d'intensità, la quale agisce contro la faccia BC in un punto determinato I in modo da essere possibile il rovesciamento della parte FECD in seguito a rotazione della medesima attorno allo spigolo orizzontale rappresentato nel punto F. Evidentemente il giunto di separazione della parte che può essere rovesciata dalla parte rimanente di muro deve incontrare la faccia BC secondo una linea rappresentata nel punto E posto al di sotto del punto d'applicazione I della forza R; e, chiamando x la distanza $\overline{CH}$ del piano orizzontale passante per E dallo spigolo rappresentato in C, quando sia compiutamente determinata di forma e di grandezza la sezione ABCD torna agevole l'esprimere in funzione di x e dei dati del problema il momento della forza R rispetto allo spigolo F, il qual momento vale la somma algebrica dei momenti delle sue componenti orizzontale e verticale Q e V rispetto allo spigolo medesimo, nonchè il momento, pure rispetto allo spigolo F, del peso P della parte di muro lunga l'unità rappresentata in F E C D. Chiamando $F(x)$ il momento rovesciante, ossia il detto momento della forza R, e $\Phi(x)$ il momento che si oppone al rovesciamento, ossia l'indicato momento del peso P, l'equazione di stabilità del numero 159 conduce ad esprimere il coefficiente di stabilità n^{VI} con

$$n^{VI} = \frac{F(x)}{\Phi(x)}.$$

Cercando qual è il più gran valore che può prendere questo coefficiente di stabilità fra i limiti di $x = \overline{CK}$ e di $x = \overline{CL}$ si determina quel valore particolare di x che fissa dove esiste la sezione pericolosa, e lo stesso più gran valore di n^{VI} porta a decidere del grado di stabilità del muro. Esiste lo stretto equilibrio se $n^{VI} = 1$; vi ha stabilità quando $n^{IV} < 1$, e questa è tanto più grande quanto più n^{VI} è una frazione piccola; e finalmente non vi può essere equilibrio quando $n^{VI} > 1$.

Soventi volte riesce operazione lunga e difficile il trovare le due funzioni $F(x)$ e $\Phi(x)$ il cui quoziente rappresenta il coefficiente di stabilità, ed allora si può risolvere il problema col seguente semplicissimo procedimento pratico. Disegnata in una scala piuttosto grande la sezione trasversale del muro, al di sotto del punto d'applicazione I della forza R si conducano diverse rette EF, E_1F_1, E_2F_2, ... rappresentanti altrettanti giunti secondo i quali può essere possibile il rovesciamento per distacco delle parti di muro F E C D, F_1E_1CD, F_2E_2CD, ...; si facciano i momenti rovescianti M, M_1, M_2, ... della forza R rispetto agli spigoli rappresentati nei punti F, F_1, F_2, .,..... valutando i bracci corrispondenti con misure prese sul disegno; si calcolino i pesi P, P_1, P_2, ... delle accennate parti; graficamente si determinino i punti d'applicazione di questi pesi ossia i centri di gravità delle stesse parti; sul disegno si misurino i bracci c, c_1, c_2, ... di questi pesi rispetto agli spigoli F, F_1, F_2, ...; e finalmente si facciano i rapporti $\frac{M}{Pc}$, $\frac{M_1}{P_1c_1}$, $\frac{M_2}{P_2c_2}$, ... i quali rappresenteranno altrettanti valori diversi n^{VI}, n_1^{VI}, n_2^{VI}, ... del coefficiente di stabilità. Il più grande dei detti rapporti, esattamente od almeno con molta approssimazione, se i giunti EF, E_1F_1, E_2F_2, ... vennero condotti abbastanza vicini, dà il più gran valore del coefficiente di stabilità; il giunto cui corrisponde questo più gran rapporto costituisce la sezione pericolosa; e lo stesso quoziente, secondochè risulta eguale o minore o maggiore dell'unità, porta a decidere se per rapporto alla resistenza al rovesciamento vi ha nel muro lo stretto equilibrio, o se vi ha stabilità, o se questa manca.

162. **Pressione massima riferita all'unità di superficie sullo spigolo attorno al quale tende a farsi il rovesciamento di un solido prismatico, e modo di verificare se su questo spigolo non esiste pericolo di schiacciamento dei materiali.** — Essendo EF (*fig.* 136) la sezione pericolosa per un solido prismatico, per un muro a cagion d'esempio, contro il quale agisce la spinta R applicata in I per produrre il rovesciamento attorno allo spigolo rappresentato nel punto F, e supponendo trasportate sulle proprie direzioni fino in O la forza spingente R nonchè il peso del solido FECD di più facile rovesciamento, si può trovare la loro risultante S. Quando non ha luogo rovesciamento, la direzione di questa risultante incontra sicuramente il giunto EF in un punto determinato L, e supponendo trasportata da detta risultante S sulla sua direzione fino ad essere applicate in L si possono avere le sue due componenti N e T, la prima normale al giunto EF e l'altra contenuta nel piano del giunto stesso. Se il punto L si confonde col punto di mezzo M di EF, la pressione N che ha luogo sulla superficie rettangolare rappresentata in EF si ripartisce uniformemente e quindi la pressione massima Q_1 riferita all'unità di superficie sullo spigolo F, come su qualunque altro punto del giunto EF, vien espressa da

$$Q_1 = \frac{N}{\Omega},$$

essendo Ω la superficie di detto giunto. Se il punto L non si confonde col punto M, ma se la distanza ML è minore di $1/3$ MF, ponendo $\frac{\overline{ML}}{\overline{MF}} = m$, si ha che la massima pressione Q_1 riferita all'unità di superficie ha luogo sullo spigolo F e che, per quanto si è detto nella risoluzione del problema I del numero 137, vien data da

$$Q_1 = \frac{N}{\Omega}(1 + 3m) \qquad (1).$$

Se il punto L dista da M più di $1/3\ \overline{MF}$, una parte soltanto della base EF soffre pressione; questa parte, come è facile rendersi ragione in seguito a quanto si è detto nel risolvere il problema I del già citato numero 137, si determina ponendo $\overline{FE'}=3.\overline{FL}$; e la pressione massima Q_1 riferita all'unità di superficie che ha luogo sullo spigolo F vien data dalla formola

$$Q_1=\frac{N}{\Omega}\frac{4}{3(1-m)} \qquad (2).$$

Se il punto L dista dal punto M di 1/3 MF trovasi premuta l'intiera base EF, ma la pressione sullo spigolo rappresentato in E è nulla; e, come risulta tanto dalla formola (1) quanto dalla formola (2) (*t*), la pressione massima riferita all'unità di superficie, che ha luogo sullo spigolo F, vien data da

$$Q_1=2\frac{N}{\Omega}.$$

Può avvenire che il punto L, invece di trovarsi fra M ed F, cada fra M ed E. In questo caso lo spigolo intorno cui tende a farsi il rovesciamento non è più lo spigolo F, ma sibbene lo spigolo E; ed è su quest'ultimo che ha luogo la massima pressione riferita all'unità di superficie.

Affinchè sullo spigolo attorno al quale tende a farsi il rovesciamento non siavi pericolo di schiacciamento dei materiali, si richiede che la pressione Q_1 riferita all'unità di superficie sia minore del coefficiente di rottura per schiacciamento relativo alla materia che in detto spigolo si trova; e si ha stabilità quando la detta pressione è eguale o minore del prodotto del coefficiente di snervamento (num. 30) o del coefficiente di rottura (num. 34) pel relativo coefficiente di stabilità (num. 31 e 40).

(*t*) Le formole (1) e (2) non sono altro che le due espressioni di Q_1 già trovate al numero 137 nel risolvere il problema I, nelle quali alla forza premente T'' si è sostituita la forza N ed al prodotto *a b* l'area Ω che esso rappresenta.

CAPITOLO IX.

Resistenza dei solidi inizialmente curvi.

163. **Assunto del presente capitolo.** — La resistenza dei solidi inizialmente curvi (num. 10) verrà studiata soltanto nel caso particolare di un solido avente per asse, ossia per linea luogo geometrico dei centri di superficie delle sue sezioni trasversali, una curva piana, e nell'ipotesi che si trovino nel piano di questa curva tutte le forze estrinseche, nonchè uno degli assi principali dell'ellisse centrale d'inerzia di ciascuna sezione trasversale. In questo caso, il quale comprende tutte le quistioni che nella pratica si possono presentare all'ingegnere costruttore e il quale per conseguenza è il solo necessario a conoscersi da coloro cui questo corso è destinato, la direzione dell'asse neutro in qualsiasi sezione è già determinata, giacchè, dovendo essere coniugata, nell'ellisse centrale d'inerzia, del diametro che trovasi nel piano delle forze estrinseche, il qual diametro è per ipotesi asse principale, è perpendicolare al detto piano che è pur quello in cui trovasi l'asse del corpo.

164. **Fenomeni che si manifestano in un solido inizialmente curvo sotto l'azione di forze estrinseche contenute nel piano dell'asse del solido.** — Essendo AB e CD (*fig.* 137) due sezioni trasversali vicinissime di un solido inizialmente curvo avente per asse la curva zz', ciascuna delle forze che trovansi applicate al corpo a dritta della sezione CD si può immaginare scomposta in una componente tangenziale diretta normalmente al piano dell'or accennata sezione ossia parallela alla tangente alla curva zz' nel punto G', ed in una seconda componente normale parallela al piano della sezione CD e quindi perpendicolare alla detta tangente GT. Tutte le componenti tangenziali danno generalmente luogo ad una risultante unica che mette in giuoco l'elasticità longitudinale e che, a seconda del senso secondo cui opera, tende ad allontanare o ad avvicinare la sezione CD alla sezione AB, e quindi ad allungare o ad accorciare la parte EG dell'asse del corpo; la risultante unica, cui generalmente danno luogo le forze normali, provoca l'elasticità trasversale, giacchè tende a staccare la parte di

solido che trovasi a dritta della sezione CD da quella che trovasi a sinistra; e finalmente, siccome le forze sollecitanti non passano pel punto G, hanno esse un momento rispetto alla retta perpendicolare al piano della curva zz' passante per l'or indicato punto per cui tendono a produrre rotazione della sezione CD relativamente alla sezione AB e quindi flessione. L'asse zz' del solido subisce delle deformazioni e, tuttochè siano esse effettivamente piccole nei corpi sottoposti all'azione di forze estrinseche non capaci di produrre in essi lo snervamento, pure non sono tali da potersi assolutamente trascurare.

165. **Equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari che si sviluppano in una sezione trasversale qualunque di un solido inizialmente curvo.** — Essendo AB e CD (*fig.* 137) due sezioni trasversali infinitamente vicine di un solido omogeneo inizialmente curvo posto nelle condizioni già espresse al numero 163, si chiamino:

ω la superficie elementare della sezione d'un elemento di fibra ab e

Ω la superficie della totale sezione trasversale del solido;

v la distanza $\overline{Gb}$ del centro della sezione dell'elemento di fibra ab dalla retta, perpendicolare al piano in cui è contenuto l'asse del corpo, rappresentata nel punto G;

l l'archetto EG limitato ai centri di superficie delle due sezioni AB e CD;

θ l'arco di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo infinitamente piccolo CLA che, nello stato primitivo del solido, fa il piano della sezione CD con quella della sezione AB, e

θ' l'arco di raggio eguale all'unità il quale chiude l'angolo $C_2L'A$ che il piano C_2D_2, in cui viene a trasportarsi la sezione CD dopo la deformazione, fa col piano della sezione AB;

V la distanza $\overline{GO}=\overline{G_1O_1}$ che l'asse neutro della sezione CD, rappresentato nel punto O finchè il solido non si suppone deformato e nel punto O_1 quando il solido si è deformato, ha dal centro di superficie di detta sezione;

T la somma delle componenti delle forze estrinseche applicate alla parte di corpo posta a diritta della sezione CD, le quali sono perpendicolari al piano di questa sezione;

N la somma delle componenti delle dette forze estrinseche, le quali sono parallele al piano di questa sezione, e

μ la somma dei momenti delle medesime forze rispetto alla retta contenuta nel piano della sezione CD perpendicolare al piano in cui si trova l'asse $z\,z'$ del corpo e rappresentata nel punto G;

I' il momento d'inerzia della superficie della sezione CD rispetto alla retta proiettata nel punto G la quale, per essere uno degli assi principali dell'ellisse centrale d'inerzia di ciascuna sezione nel piano dell'asse $z\,z'$ del solido che si considera, è asse principale della sezione CD;

E un numero esprimente il coefficiente d'elasticità longitudinale della materia di cui il solido è formato;

E^{IV} il coefficiente d'elasticità trasversale;

δ lo scorrimento relativo $\frac{GG_1}{EG}$ (num. 70) subìto dalla sezione CD relativamente alla sezione AB;

Σ una somma estesa a tutte le superficie elementari ω.

Ciò premesso, essendo l'angolo $CO_1C_2 = LO_1L' = C_2L'A - CLA$, l'arco di raggio eguale all'unità che lo chiude vale $\theta' - \theta$. L'elemento di fibra ab, avente per sezione ω e distante della quantità $V+v$ dall'asse neutro rappresentato e proiettato nel punto O_1, pel fatto della flessione prova un allungamento od un accorciamento che si può esprimere con $(V+v)(\theta'-\theta)$, purchè prendasi v negativo dalla parte della retta rappresentata e proiettata nel punto G verso la quale si verificano accorciamenti di fibre; la tensione o la pressione corrispondente vien data, per quanto si è detto ai numeri 12 e 29 parlando dell'estensione e dalla compressione, da

$$E\omega\frac{(V+v)(\theta'-\theta)}{l};$$

il momento di questa forza rispetto alla parallela all'asse neutro rappresentata nel punto G, è

$$E\omega\frac{(V+v)(\theta'-\theta)}{l}v;$$

e la resistenza allo scorrimento trasversale che oppone il considerato elemento di fibra può essere espressa da

$$E^{IV}\omega\,\delta.$$

Le domandate condizioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari si ottengono ponendo le condizioni esprimenti che tutta la parte di corpo, posta a diritta della sezione CD per chi osserva la figura 137, trovasi in equilibrio sotto l'azione delle forze estrinseche e delle forze molecolari dalle medesime messe in giuoco. Queste condizioni risultano scrivendo: che deve essere zero la somma algebrica delle forze parallele alla direzione E G T della parte EG di asse del solido compresa fra le due sezioni vicinissime AB e CD, e quindi si ha per prima condizione

$$\Sigma E\omega \frac{(V+v)(\theta'-\theta)}{l} - T = 0 \qquad (1);$$

che deve essere zero la somma dei momenti di tutte le forze rispetto alla retta rappresentata e proiettata nel punto G, per cui si ha come seconda condizione

$$\Sigma E\omega \frac{(V+v)(\theta'-\theta)}{l} v - \mu = 0 \qquad (2);$$

e finalmente che deve essere zero la somma algebrica di tutte le forze dirette normalmente all'asse del prisma, per cui si ha la terza condizione d'equilibrio

$$\Sigma E^{IV} \omega \delta - N = 0,$$

la quale per il caso di deformazioni piccolissime quali sono quelle cui si possono assoggettare i corpi nelle costruzioni, per essere lo scorrimento relativo la tangente trigonometrica dell'angolo che l'elemento di fibra spostata fa colla sua posizione primitiva (num. 70), per confondersi sensibilmente le due curve ab ed ab_1b_2 colle loro corde e queste colle perpendicolari in b ed in b_2 ad O C e ad O_1C_2, per risultare l'angolo bab_2 di ben poco diverso dall'angolo CO_1C_2 e finalmente potendosi sostituire alla tangente di quest'angolo piccolissimo la lunghezza dell'arco $\theta'-\theta$ che lo chiude, si può ridurre a

$$\Sigma E^{IV} \omega (\theta'-\theta) - N = 0 \qquad (3).$$

Osservando ora che le quantità E, E^{IV}, s, $\theta'-\theta$ e V vanno considerate come costanti, che $\Sigma\omega = \Omega$, che $\Sigma\omega v = 0$ giacchè la retta rappresentata nel punto G perpendicolarmente alla quale si valutano le distanze v passa pel centro di superficie della sezione CD, e che $\Sigma\omega v^2$ non è altro che il momento d'inerzia I' della superficie dell'or indicata sezione rispetto alla retta rappresentata nel punto G, le condizioni d'equilibrio (1), (2) e (3) diventano

$$\left.\begin{aligned} &E\frac{\theta'-\theta}{l}V\Omega=T\\ &E\frac{\theta'-\theta}{l}I'=\mu\\ &E^{IV}(\theta'-\theta)\Omega=N \end{aligned}\right\} \quad (4).$$

La forza tangenziale T va assunta come positiva quando tende ad allontanare la sezione CD dalla sezione AB, e come negativa quando agisce in modo da aver tendenza ad avvicinare le stesse sezioni; la forza N va risguardata come positiva quando è rivolta dalla parte verso cui trovasi l'intersezione delle due sezioni trasversali AB e CD, come negativa quando agisce in senso contrario; ed i momenti parziali, dalla cui somma algebrica risulta il momento μ, vanno considerati come positivi quando agiscono sulla parte di corpo posta a dritta della sezione CD in modo da far rotare la tangente GT verso la parte di normale in G all'asse zz' la quale passa pel centro di curvatura corrispondente al detto punto, come negativi quando operano in modo da produrre una rotazione contraria a quella indicata.

166. **Determinazione dell'asse neutro.** — Nei limiti entro i quali si è ristretto lo studio della resistenza dei solidi inizialmente curvi (num. 165), l'asse neutro in una sezione qualunque di uno di questi solidi è perpendicolare al piano in cui sono contenute le forze estrinseche, cosicchè per la completa sua determinazione non si ha che da trovare la sua distanza V dal centro della sezione in cui si trova. Perciò dividasi la prima delle equazioni (4) del numero precedente per la seconda, e dall'equazione che risulta si ricavi il valore di V il quale vien dato da

$$V=\frac{TI'}{\mu\,\Omega}.$$

Ammesse le convenzioni stabilite nel precedente numero sui segni della quantità T, N e μ, un valore positivo di V accenna ad un asse neutro posto tra il centro di superficie G ed il centro di curvatura L, mentre un valore negativo di V corrisponde ad un asse neutro che incontra il prolungamento della retta LG.

167. Variazioni di coordinate subite dall'asse di un solido inizialmente curvo nel deformarsi sotto l'azione di date forze estrinseche. — Siccome le due sezioni trasversali AB e CD (*fig.* 137) vennero supposte infinitamente vicine fra di loro nel dedurre al numero 165 le equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari, e siccome queste equazioni sono fondate su ciò che nel solido considerato non avvenga snervamento e che quindi siano piccolissime le deformazioni che in esso si verificano, i due archi θ e θ' si possono rappresentare con due archi infinitesimi $d\tau$ e $d\tau'$ e coll'arco pure infinitesimo ds l'arco $EG = l$. Segue da ciò che facendo il prodotto $EI' = \varepsilon$, essendo ε il momento di flessibilità, la seconda delle equazioni (4) del numero 165 può essere scritta

$$\varepsilon \frac{d\tau' - d\tau}{ds} = \mu,$$

d'onde

$$d\tau' - d\tau = \frac{1}{\varepsilon} \mu \, ds,$$

nella quale $d\tau$ e $d\tau'$ sono rispettivamente gli archi chiudenti gli angoli elementari fatti da due normali successive all'asse primitivo e dalle due normali corrispondenti all'asse deformato del solido che si considera.

Prendendo per origine di coordinate un punto della curva secondo cui è foggiato l'asse primitivo per cui voglionsi trovare le variazioni di coordinate, per asse della ascisse z la tangente a detta curva e per asse delle ordinate u la normale, siccome $d\tau' - d\tau$ misura la differenza fra l'angolo fatto da due normali successive all'asse deformato e quello fatto dalle corrispondenti normali successive all'asse primitivo, il valore di $\tau' - \tau$, che ottiensi integrando l'ultima equazione e che vien dato da

$$\tau' - \tau = \frac{1}{\varepsilon} \int \mu \, ds \tag{1}$$

esprime la differenza fra gli angoli τ' e τ che le normali all'asse deformato ed all'asse primitivo corrispondenti alla stessa sezione fanno coll'asse delle u, angoli che sono eguali a quelli che le toccanti alle due curve nei punti medesimi fanno coll'asse delle z.

Ammettendo ora che, fatto

$$\tau' - \tau = \varphi \qquad (2),$$

sia φ un angolo molto piccolo, giacchè le deformazioni che si possono far subire ai corpi che vengono impiegati nelle costruzioni devono essere tali da non produrre in essi lo snervamento, si può ritenere con grandissima approssimazione

$$\cos\varphi = 1 \quad \text{e} \quad \operatorname{sen}\varphi = \varphi.$$

Allora, siccome dalla (2) si ha

$$\tau' = \tau + \varphi,$$

torna agevole il dedurre

$$\cos\tau' = \cos\tau - \varphi \operatorname{sen}\tau,$$

$$\operatorname{sen}\tau' = \operatorname{sen}\tau + \varphi\cos\tau,$$

e quindi il ricavare le seguenti espressioni di $\varphi = \tau' - \tau$

$$\left.\begin{aligned} \varphi = \tau' - \tau = \frac{\cos\tau - \cos\tau'}{\operatorname{sen}\tau} \\ \varphi = \tau' - \tau = \frac{\operatorname{sen}\tau' - \operatorname{sen}\tau}{\cos\tau} \end{aligned}\right\} \qquad (3).$$

Ma, essendo z ed u le coordinate del punto dell'asse primitivo cui corrisponde la normale che fa l'angolo τ coll'asse delle u, z' ed u' le coordinate dello stesso punto sull'asse deformato cui per conseguenza corrisponde la normale che fa l'angolo τ' pure coll'asse delle u, ed osservando che ds', differenziale dell'arco nell'asse deformato, si può ritenere siccome eguale a ds differenziale dell'arco nell'asse primitivo, si ha dalla geometria

$$\cos\tau = \frac{dz}{ds}, \qquad \cos\tau' = \frac{dz'}{ds},$$

$$\operatorname{sen}\tau = \frac{du}{ds}, \qquad \operatorname{sen}\tau' = \frac{du'}{ds};$$

e quindi si ottiene dalle equazioni (3)

$$\tau' - \tau = \frac{dz - dz'}{du},$$

$$\tau' - \tau = \frac{du' - du}{dz}.$$

Sostituendo in queste equazioni il valore di $\tau' - \tau$ dato dalla (1) e ricavando i valori di $dz' - dz$ e $du' - du$, si ha

$$dz' - dz = -\frac{1}{\varepsilon} du \int \mu\, ds,$$

$$du' - du = \frac{1}{\varepsilon} dz \int \mu\, ds;$$

e finalmente integrando si ottiene

$$\left.\begin{aligned} z' - z &= -\frac{1}{\varepsilon} \int du \int \mu\, ds \\ u' - u &= \frac{1}{\varepsilon} \int dz \int \mu\, ds \end{aligned}\right\} \quad (4).$$

Queste ultime due equazioni danno, in funzione delle forze estrinseche ed in seguito a conoscenza della forma dell'asse primitivo di un solido inizialmente curvo, le variazioni di coordinate, e quindi servono a determinare l'asse deformato.

168. **Resistenze riferite all'unità di superficie, che in una stessa sezione normale oppongono le fibre maggiormente allungate e quelle maggiormente compresse.** — Si chiamino: Q_1 la resistenza per trazione riferita all'unità di superficie che, fra due

sezioni vicinissime AB e CD (*fig.* 157) normali all'asse $z\,z'$, oppone l'elemento di fibra AC cui corrisponde la distanza massima v' dalla retta parallela all'asse neutro condotta pel centro di superficie della sezione CD e rappresentata nel punto G; Q_2 la resistenza per pressione, pure riferita all'unità di superficie, che fra le stesse sezioni sviluppa l'elemento di fibra BD che ha la distanza massima v'' dall'accennata retta rappresentata nel punto G; ed ω la superficie elementare della sezion retta di ciascuno degli indicati elementi di fibra. Alle lettere E, θ, θ' ed l si attribuiscano i significati che già alle medesime vennero dati al numero 165; e non si dimentichi che V è la distanza fra le due rette rappresentate nei due punti G ed O, ossia la distanza dal centro di superficie G della sezione CD dall'asse neutro in essa contenuto e tutto rappresentato nel punto O, finchè si considera la detta sezione siccome ancora appartenente al solido non deformato. Quell'elemento delle fibre allungate, il quale dista v' dalla retta parallela all'asse neutro proiettata nel punto G, subisce un allungamento rappresentato da $(v'+V)(\theta'-\theta)$, e quell'elemento delle fibre accorciate distinte v'' dalla stessa retta si accorcia di $(v''-V)(\theta'-\theta)$. Il primo dei detti elementi sviluppa una resistenza alla trazione (num. 12) data da $E\omega\,(v'+V)\dfrac{\theta'-\theta}{l}$; il secondo una resistenza alla pressione espressa da $E\omega\,(v''-V)\dfrac{\theta'-\theta}{l}$; e quindi le resistenze Q_1 e Q_2 riferite all'unità di superficie ed opposte rispettivamente dall'elemento di fibra maggiormente allungato e da quello maggiormente compresso, quando si trascurino i piccoli allungamenti che le fibre subiscono per ciò che generalmente nel cimentare la resistenza dei solidi inizialmente curvi vien anche messa in giuoco l'elasticità trasversale, si possono determinare colle equazioni

$$Q_1 = E\,(v'+V)\frac{\theta'-\theta}{l},$$

$$Q_2 = E\,(v''-V)\frac{\theta'-\theta}{l},$$

le quali, quando in esse si ponga il valore di $E\dfrac{\theta'-\theta}{l}$ che ricavasi dalla prima delle equazioni (4) del numero 165, ed il valore di V trovato al numero 166, diventano

$$Q_1 = \frac{T}{\Omega}\left(1 + \frac{v'}{V}\right) = \frac{v'\mu}{I'} + \frac{T}{\Omega},$$

$$Q_2 = \frac{T}{\Omega}\left(-1 + \frac{v''}{V}\right) = \frac{v''\mu}{I'} - \frac{T}{\Omega}.$$

Quando nell'applicare queste formole avviene di trovare dei valori negativi di Q_1 e di Q_2, bisogna dire che è una pressione quella resistenza che si è supposta una tensione, e viceversa che è una tensione quella resistenza che si è supposta una pressione.

169. **Equazioni di stabilità; determinazione di una delle dimensioni della sezione trasversale di un solido omogeneo inizialmente curvo; sezioni pericolose.** — Sia AB (*fig.* 138) l'asse curvilineo di un solido a sezione trasversale costante; Az ed Au siano due assi coordinati posti nel piano della curva AB, il primo tangente ed il secondo normale alla curva stessa; e prendasi come verso positivo dei momenti inflettenti quello che tende a far venire l'asse positivo delle ascisse z su quello positivo delle ordinate u, già previamente assunto in modo da essere positivi i momenti inflettenti dove la curva secondo cui si dispone l'asse del solido deformato è convessa verso l'asse delle ascisse. Ragionando come si è fatto al numero 151, bisogna immaginare l'intiero solido deformato siccome scomposto in tante parti separate dalle sezioni trasversali corrispondenti ai punti d'appoggio, ai punti d'applicazione delle forze estrinseche concentrate ed ai punti d'inflessione, e stabilire le equazioni di stabilità per ciascuna di queste parti. Perciò, considerando una qualunque delle parti in cui il corpo si può immaginare diviso e chiamando

μ' e μ'' i valori assoluti dei momenti inflettenti per le sezioni cui corrispondono gli elementi di fibra i quali sopportano rispettivamente la tensione massima e la pressione massima,

u' la distanza dell'elemento di fibra il quale supporta la tensione massima da una parallela all'asse neutro condotta pel centro di superficie della sezione cui corrisponde il momento inflettente μ',

u'' la distanza dell'elemento di fibra il quale sopporta la pressione massima pure da una parallela all'asse neutro condotta pel centro di superficie della sezione cui corrisponde il momento inflettente μ'',

T′ e T″ le forze tangenziali riferentisi alle sezioni cui corrispondono i momenti inflettenti μ' e μ'', si ha che la tensione e la pressione massime riferite all'unità di superficie, per quel che risulta dal precedente numero, sono espresse da

$$\frac{u'\mu'}{I'}+\frac{T'}{\Omega} \qquad (1),$$

$$\frac{u''\mu''}{I'}-\frac{T''}{\Omega} \qquad (2).$$

La tensione e la pressione massime Q_{1m} e Q_{2m}, per un tratto di solido cui corrispondono dei momenti inflettenti positivi si trovano sostituendo nelle stabilite espressioni (1) e (2) invece di μ' e di μ'' il valore generale del momento inflettente μ, ed invece di T' e di T'' il valore generale della forza tangenziale T per lo stesso tratto, e prendendo i valori massimi di cui sono suscettive le dette espressioni nei limiti della parte di solido che si considera. Analogamente si calcolano la tensione e la pressione massime Q_{1m} e Q_{2m} per un tratto di solido cui corrispondono dei momenti inflettenti negativi, e solo bisogna avvertire che, essendo μ' e μ'' i valori assoluti di due momenti inflettenti negativi, in loro vece bisogna mettere il valore generale del momento inflettente pel tratto che si considera coi segni cangiati.

Una parte di solido per cui siansi già trovati i valori della tensione massima Q_{1m} e della pressione massima Q_{2m}, si può dir stabile allorquando la detta tensione e la detta pressione sono rispettivamente eguali ai coefficienti di rottura per estensione e per compressione moltiplicati pei relativi coefficienti di stabilità. Le domandate equazioni di stabilità sono adunque

$$n'R'=Q_{1m}, \qquad n''R''=Q_{2m},$$

alle quali è necessario l'aggiungere ancora l'altra

$$n^{IV}R^{IV}=\frac{N_m}{\Omega}$$

relativa allo scorrimento trasversale, dove N_m è lo sforzo di taglio di maggior valore assoluto, ossia il maggior valore assoluto che può prendere la forza normale N per la parte di solido cui queste equazioni si riferiscono. — Le lettere n', n'', n^{IV}, R', R'', R^{IV} ed Ω hanno i significati che già altre volte loro vennero dati, e, quando invece dei coefficienti di rottura R', R'' ed R^{IV} si conoscono i coefficienti di snervamento Q', Q'' e Q^{IV}, basta cangiare nelle stabilite equazioni $n'R'$ in $m'Q'$, $n''R''$ in $m''Q''$ ed $n^{IV}R^{IV}$ in $m^{IV}Q^{IV}$, essendo m', m'' ed m^{IV} i coefficienti di stabilità relativi alle resistenze allo snervamento.

Instituendo le equazioni di stabilità per le diverse parti in cui conviene immaginare diviso un solido inizialmente curvo per l'esistenza di punti d'appoggio, di punti d'applicazione di forze concentrate e di punti d'inflessione, ed applicandole al calcolo di una delle dimensioni della sezione trasversale del solido stesso, si ottengono generalmente valori diversi della dimensione incognita, ed il più grande di questi valori è quello da adottarsi. Per ognuna poi delle accennate parti si devono considerare tre *sezioni pericolose:* la prima è la sezione pericolosa sotto il rapporto della resistenza all'estensione nella quale si verifica la tensione massima Q_{1m} e quindi il valore massimo del coefficiente di stabilità n'; la seconda è la sezione pericolosa sotto il rapporto della resistenza alla compressione nella quale ha luogo la pressione massima Q_{2m} e quindi il valor massimo del coefficiente di stabilità n''; e finalmente la terza è quella pericolosa sotto il rapporto della resistenza allo scorrimento trasversale per la quale si trova il valor massimo N_m della forza normale e quindi il valor massimo del coefficiente di stabilità n^{IV}.

170. **Problemi sulle deformazioni di archi a sezione trasversale costante coi loro assi disposti in piani verticali, e caricati di pesi.** — I solidi inizialmente curvi che più di frequente avviene di dover considerare nella pratica sono foggiati ad arco di circolo. Le curve circolari secondo cui sono disposti gli assi di questi solidi hanno generalmente le loro corde orizzontali; e, nei casi più frequenti della pratica, i pesi che producono le deformazioni o sono uniformemente distribuiti sulla loro proiezione orizzontale, o sono uniformemente distribuiti sulla loro lunghezza, od anche sono distribuiti in parte nel primo ed in parte nel secondo modo. In quello che segue verranno risoluti due soli problemi sulle deformazioni degli archi circolari; e, seguendo sempre la via di approssimazione che venne tenuta nell'esporre la teoria generale dei solidi inizialmente curvi, si riterrà che le azioni delle forze estrinseche, anche dopo le deformazioni, si possano valutare

come se gli archi non avessero cangiato di forma, sebbene tutti i loro punti siansi realmente spostati.

I. *Trovare le deformazioni subìte da un solido avente un arco di circolo* BAC (*fig.* 139) *per suo asse primitivo, collocato su due appoggi posti allo stesso livello, libero di scorrere sui medesimi e caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale.*

Prendasi per origine delle coordinate il colmo A dell'arco di circolo secondo il quale si suppone foggiato l'asse primitivo del solido che si considera; la tangente Az in questo punto, prolungata dalla parte del punto B, si assuma per asse poisitivo delle ascisse z; la parte Au posta al di sotto del punto A, della verticale che passa per A, sia l'asse positivo delle ordinate u; e si chiamino:

r il raggio dell'arco BAC;

Φ l'angolo AOB, e

p il peso riferito all'unità di lunghezza della proiezione orizzontale del detto arco:

Q la reazione orizzontale dell'appoggio contro l'estremità B, diretta da B verso D, e causata da ciò che una certa resistenza d'attrito tende ad impedire lo scorrimento di detta estremità;

V la reazione verticale dell'appoggio contro lo stesso estremo B e diretta dal basso all'alto;

φ l'angolo MOA che la normale MO in un punto qualunque M dell'asse primitivo fa colla verticale Au.

Considerando del solido dato soltanto la metà che trovasi a destra della sezione verticale passante pel punto culminante A, giacchè, a motivo della perfetta simmetrìa che il corpo e le forze ad esso applicate hanno per rapporto al piano verticale dell'indicata sezione, la metà di sinistra trovasi nelle identiche condizioni della metà di destra, si cerchino innanzi tutto i valori di dz, du, ds e μ da porsi nei secondi membri delle ultime due equazioni del numero 167. Dal triangolo MEO rettangolo in E, in cui $\overline{\mathrm{EM}}=z$ ed $\overline{\mathrm{EO}}=r-u$, si ha

$$z=r\operatorname{sen}\varphi, \qquad r-u=r\cos\varphi;$$

e quindi differenziando, risulta

$$dz=r\cos\varphi\, d\varphi, \qquad du=r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi.$$

Il valore di ds, ammettendo che dφ sia un arco di raggio eguale all'unità chiudente un angolo elementare, vien dato da

$$ds = r\,d\varphi;$$

i due cateti $\overline{DB}$ e $\overline{DO}$ del triangolo BDO rettangolo in D ammettono i valori espressi da

$$\overline{DB} = r\,\mathrm{sen}\,\Phi, \qquad \overline{DO} = r\cos\Phi;$$

la distanza orizzontale $\overline{BF}$ e la distanza verticale $\overline{FM}$ del punto M dal punto B sono date da

$$\overline{BF} = \overline{DB} - \overline{EM} = r(\mathrm{sen}\,\Phi - \mathrm{sen}\,\varphi),$$

$$\overline{FM} = \overline{EO} - \overline{DO} = r(\cos\varphi - \cos\Phi);$$

e finalmente il momento inflettente μ, il quale consta del momento $\frac{1}{2}pr^2(\mathrm{sen}\,\Phi - \mathrm{sen}\,\varphi)^2$ del peso $pr(\mathrm{sen}\,\Phi - \mathrm{sen}\,\varphi)$ distribuito sull'arco MB proporzionalmente alla sua proiezione orizzontale, aumentato del momento $Qr(\cos\varphi - \cos\Phi)$ della reazione orizzontale Q e diminuito del momento $Vr(\mathrm{sen}\,\Phi - \mathrm{sen}\,\varphi)$ della reazione verticale V, trovasi espresso da

$$\mu = \frac{1}{2}pr^2(\mathrm{sen}\,\Phi - \mathrm{sen}\,\varphi)^2 + Qr(\cos\varphi - \cos\Phi) - Vr(\mathrm{sen}\,\Phi - \mathrm{sen}\,\varphi).$$

La reazione verticale V non è altro che la metà del peso totale sopportato dall'arco intiero; il suo valore adunque è

$$V = pr\,\mathrm{sen}\,\Phi \qquad (1),$$

e quindi il valore di μ si riduce a

$$\mu = \frac{pr^2}{2}(\mathrm{sen}^2\varphi - \mathrm{sen}^2\Phi) + Qr(\cos\varphi - \cos\Phi) \qquad (2).$$

I trovati valori di dz, du, ds e μ si pongano nei secondi membri delle equazioni del numero 167 esprimenti lo spostamento $z'-z$ nel senso dell'asse delle ascisse e lo spostamento $u'-u$ nel senso dell'asse delle ordinate per il punto qualunque M dell'asse primitivo del solido. Così facendo e prendendo gl'integrali fra i limiti che loro convengono si ottengono le equazioni

$$z'-z=-\frac{1}{\varepsilon}r^3\left\{\begin{array}{l}+\frac{pr}{2}\int_0^\varphi \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\int_0^\varphi(\operatorname{sen}^2\varphi-\operatorname{sen}^2\Phi)\,d\varphi\\[2ex] +Q\int_0^\varphi \operatorname{sen}\varphi\, d\varphi\int_0^\varphi(\cos\varphi-\cos\Phi)\,d\varphi\end{array}\right\} \quad (3),$$

$$u'-u=\frac{1}{\varepsilon}r^3\left\{\begin{array}{l}+\frac{pr}{2}\int_0^\varphi \cos\varphi\, d\varphi\int_0^\varphi(\operatorname{sen}^2\varphi-\operatorname{sen}^2\Phi)\,d\varphi\\[2ex] +Q\int_0^\varphi \cos\varphi\, d\varphi\int_0^\varphi(\cos\varphi-\cos\Phi)\,d\varphi\end{array}\right\} \quad (4).$$

Osservando ora che Φ è costante e che

$$\int d\varphi=\varphi, \qquad \int\cos\varphi\, d\varphi=\operatorname{sen}\varphi,$$

$$\int\operatorname{sen}\varphi^2\, d\varphi=\frac{1}{2}(\varphi-\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi),$$

si ha

$$\int_0^\varphi(\operatorname{sen}^2\varphi-\operatorname{sen}^2\Phi)\,d\varphi=\varphi\left(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}^2\Phi\right)-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi,$$

$$\int_0^\varphi(\cos\varphi-\cos\Phi)\,d\varphi=-\varphi\cos\Phi+\operatorname{sen}\varphi.$$

Chiamando A_z e B_z i due integrali che moltiplicano rispettivamente le quantità $\frac{pr}{2}$ e Q nell'espressione di $z'-z$, A_u e B_u

quelli che moltiplicano le stesse quantità nell'espressione di $u'-u$, e ponendo in essi i valori degli integrali or ora trovati, si ha

$$A_z=\int_0^\varphi\left[\varphi\left(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}^2\Phi\right)\operatorname{sen}\varphi-\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi\right]d\varphi,$$

$$B_z=\int_0^\varphi(-\varphi\cos\Phi\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}^2\varphi)\,d\varphi,$$

$$A_u=\int_0^\varphi\left[\varphi\left(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}^2\Phi\right)\cos\varphi-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi\right]d\varphi,$$

$$B_u=\int_0^\varphi(-\varphi\cos\Phi\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi)\,d\varphi.$$

Osservando ora che

$$\int\varphi\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi=-\varphi\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi,\quad\int\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\varphi\operatorname{sen}\varphi+\cos\varphi,$$

$$\int\operatorname{sen}^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\varphi,\quad\int\operatorname{sen}\varphi\cos^2\varphi\,d\varphi=-\frac{1}{3}\cos^3\varphi,$$

$$\int\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi;$$

e non dimenticando i già riportati valori di $\int\cos\varphi\,d\varphi$, $\int\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi$ ed $\int\operatorname{sen}^2\varphi\,d\varphi$, i valori di A_z, B_z, A_u e B_u diventano

$$A_z=\left(\frac{1}{2}-\operatorname{sen}^2\Phi\right)(-\varphi\cos\varphi+\operatorname{sen}\varphi)-\frac{1}{6}\operatorname{sen}^3\varphi,$$

$$B_z = \cos\Phi(\varphi\cos - \operatorname{sen}\varphi) + \frac{1}{2}(\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi),$$

$$A_u = \left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen}^2\Phi\right)(\varphi\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi - 1) + \frac{1}{6}(\cos^3\varphi - 1),$$

$$B_u = \cos\Phi(-\varphi\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi + 1) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi.$$

I trovati valori di A_z, B_z, A_u e B_u si pongano nelle equazioni (3) e (4) invece dei quattro integrali che in esse si trovano, e si ottengono le seguenti espressioni generali dello spostamento orizzontale $z' - z$ e dello spostamento verticale $u' - u$ subito da un punto qualunque M dell'asse BAC:

$$z' - z = -\frac{1}{\varepsilon} r^3 \left\{ \begin{array}{l} + \dfrac{pr}{2}\left[\begin{array}{r} \left(\dfrac{1}{2} - \operatorname{sen}^2\Phi\right)(-\varphi\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi) \\ - \dfrac{1}{6}\operatorname{sen}^3\varphi \end{array} \right] \\ + Q\left[\begin{array}{c} \cos\Phi(\varphi\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \\ + \dfrac{1}{2}(\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi) \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (5),$$

$$u' - u = \frac{1}{\varepsilon} r^3 \left\{ \begin{array}{l} + \dfrac{pr}{2}\left[\begin{array}{r} \left(\dfrac{1}{2} - \operatorname{sen}^2\Phi\right)(\varphi\operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi - 1) \\ + \dfrac{1}{6}(\cos^3\varphi - 1) \end{array} \right] \\ + Q\left[\begin{array}{c} \cos\Phi(-\varphi\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi + 1) \\ + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi \end{array} \right] \end{array} \right\} \quad (6).$$

La reazione Q che entra in queste formole è una forza cognita, giacchè, rappresentando essa la resistenza d'attrito che ha luogo fra l'appoggio e l'estremità inferiore B del solido, deve valere la pressione $V = pr \operatorname{sen} \Phi$ che ha luogo sul detto appoggio moltiplicata per un adatto coefficiente d'attrito f, per cui

$$Q = fpr \operatorname{sen} \Phi.$$

Gli spostamenti $z' - z$ ed $u' - u$ trovansi adunque espressi in funzione dei dati del problema e dell'angolo variabile φ, e quindi è possibile il determinarli per un punto qualunque dell'asse primitivo del solido considerato. Sul modo di valutarli però è necessario avere un'avvertenza che immediatamente passo ad indicare. Pel fatto delle deformazioni che, sotto l'azione delle forze estrinseche, avvengono nell'arco BAC (*fig.* 140), l'estremo B prende una posizione B′ spostandosi orizzontalmente della quantità $\overline{BB'}$; il vertice A si abbassa lungo la verticale Au venendo in A′ e spostandosi verticalmente della quantità $\overline{AA'}$; la curva secondo cui si dispone l'asse primitivo BA del solido diventa la B′A′; ed il punto qualunque M della prima curva passa in un punto M′ della seconda curva. Ora, nel valutare gli spostamenti subìti dal punto qualunque M, bisogna conservare nella loro posizione gli assi coordinati e quindi supporre che la curva B′A′ si elevi parallelamente a se stessa finchè il punto A′ sia venuto in A. Il punto M′ si eleva verticalmente di $\overline{M'M''} = \overline{AA'}$; il suo spostamento orizzontale è la distanza orizzontale $\overline{Mm''}$ dei punti M ed M″ ed il suo spostamento verticale è la distanza verticale $\overline{M''m''}$ degli stessi punti. L'abbassamento $\overline{AA'}$ del colmo dell'arco è evidentemente eguale all'innalzamento $\overline{B'B''}$ dell'estremo B′ allorquando l'asse deformato B′A′ si suppone trasportato parallelamente a se stesso in B″A, e quindi la ricerca dell'abbassamento $\overline{A'A}$ del vertice A si riduce a trovare la distanza verticale $\overline{B'B''}$ fra il punto B ed il punto B″.

Quando le superficie superiori degli appoggi siano superficie ben levigate e quando lo stesso avvenga per le superficie che inferiormente terminano l'arco che essi sostengono, si può trascurare la resistenza Q dovuta all'attrito, e quindi ottenere le seguenti espressioni degli spostamenti $z' - z$ ed $u' - u$:

$$z' - z = \frac{1}{\varepsilon} \frac{pr^4}{2} \left[\left(\frac{1}{2} - \operatorname{sen}^2 \Phi \right) (\varphi \cos \varphi - \operatorname{sen} \varphi) + \frac{1}{6} \operatorname{sen}^3 \varphi \right];$$

$$u'-u=\frac{1}{\varepsilon}\frac{pr^4}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\text{sen}^2\Phi\right)(\varphi\,\text{sen}\,\varphi+\cos\varphi-1)+\frac{1}{6}(\cos^3\varphi-1)\right].$$

Facendo in queste equazioni $\varphi=\Phi$ si ha, dalla prima lo spostamento orizzontale $\overline{BB'}=\Delta z$ dell'estremo B dell'arco primitivo BAC, dalla seconda l'abbassamento $\overline{AA'}=\overline{B'B''}=\Delta u$ del colmo A; e quindi i valori di Δz e di Δu risultano

$$\Delta z=\frac{1}{\varepsilon}\frac{pr^4}{2}\left[\Phi\cos\Phi\left(\frac{1}{2}-\text{sen}^2\Phi\right)-\frac{1}{2}\text{sen}\,\Phi+\frac{7}{6}\text{sen}^3\Phi\right],$$

$$\Delta u=\frac{1}{\varepsilon}\frac{pr^4}{2}\left[\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2}-\text{sen}^2\Phi\right)(\Phi\,\text{sen}\,\Phi+\cos\Phi)+\text{sen}^2\Phi\\ \qquad\qquad\qquad+\frac{1}{6}\cos^3\Phi-\frac{2}{3}\end{array}\right],$$

dove Φ rappresenta l'arco di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo AOB (*fig.* 139).

Se l'arco primitivo BAC è una mezza circonferenza di circolo si ha

$$\Phi=\frac{\pi}{2},\qquad \text{sen}\Phi=1,\qquad \cos\Phi=0;$$

gli spostamenti orizzontale e verticale di un suo punto qualunque sono dati dalle formole

$$z'-z=\frac{1}{\varepsilon}\frac{pr^4}{4}\left[\frac{1}{3}\text{sen}^3\varphi-\varphi\cos\varphi+\text{sen}\,\varphi\right],$$

$$u'-u=\frac{1}{\varepsilon}\frac{pr^4}{4}\left[\frac{1}{3}(\cos^3\varphi-1)-\varphi\,\text{sen}\,\varphi-\cos\varphi+1\right];$$

e gli spostamenti dell'estremo B e del colmo A risultano rispettivamente

$$\Delta z = \frac{1}{3}\frac{p r^4}{\varepsilon},$$

$$\Delta u = \frac{4 - 3\pi}{24}\frac{p r^4}{\varepsilon} = -0,226\frac{p r^4}{\varepsilon}.$$

Il segno — da cui trovasi preceduto il valore di Δu dipende da ciò che l'ordinata $\overline{B''H}$ (*fig.* 140) dell'estremo B″ dell'asse deformato, supposto elevato parallelamente a se stesso finchè il suo punto culminante A′ viene a coincidere col punto A, è minore dell'ordinata $\overline{BI}$ dell'estremo B dell'arco primitivo. Il costruttore però non deve tener conto alcuno di questo segno, e solo deve badare al valore assoluto dell'abbassamento Δu subìto dal punto culminante dell'arco.

II. *Trovare le deformazioni subite da un solido avente un arco di circolo* BAC (*fig.* 141) *per suo asse primitivo, collocato su due appoggi posti allo stesso livello, cogli estremi* B *e* C *fissi e caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza.*

Si assumano gli assi coordinati come nel problema precedente, si ritengano le denominazioni in questo problema stabilite per quanto concerne al raggio dell'arco BAC, all'angolo AOB ed all'angolo MOA, e si chiami q il peso che gravita sopra ogni unità di lunghezza dell'arco proposto. Suppongasi che l'appoggio B sia fatto in modo da opporre, contro l'estremo corrispondente del solido per cui si vogliono studiare le deformazioni, una reazione orizzontale Q volta verso l'interno dell'arco ossia da B verso D, ed una reazione verticale V diretta dal basso all'alto; s'immagini tolto il detto appoggio ed in sua vece sostituite le dette reazioni; e, come nel problema precedente, si consideri soltanto la metà AB dell'intiero arco BAC. Le lunghezze $\overline{EM} = z$ ed $\overline{EO} = r - u$, i differenziali dz, du e ds, non che le lunghezze $\overline{DB}$, $\overline{DO}$, $\overline{BF}$ ed $\overline{FM}$ ammettono gli stessi valori già trovati nel risolvere il precedente problema; il peso elementare che trovasi su un arco infinitesimo mm', fissato di posizione mediante l'angolo $mOA = \psi$ e di lunghezza $r\,d\psi$, vale $qr\,d\psi$; il braccio di questo peso rispetto all'orizzontale rappresentata nel punto M è $\overline{me} - \overline{ME} = r(\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi)$; il momento elementare del medesimo peso rispetto all'accennata orizzontale è $qr^2(\operatorname{sen}\psi - \operatorname{sen}\varphi)\,d\psi$; e finalmente il momento di tutto il peso uniformemente distribuito sull'arco BM per rapporto alla stessa retta, trovasi espresso da

$$q\,r^2\int_\varphi^\Phi(\operatorname{sen}\psi-\operatorname{sen}\varphi)\,d\psi$$

$$=q\,r^2\Big[(\varphi-\Phi)\operatorname{sen}\varphi+\cos\varphi-\cos\Phi\Big].$$

Il momento inflettente μ, il quale consta del momento ora trovato e di quello delle due forze Q e V pure rispetto all'orizzontale rappresentata nel punto M, ammette il valore

$$\mu=q\,r^2\Big[(\varphi-\Phi)\operatorname{sen}\varphi+\cos\varphi-\cos\Phi\Big]$$

$$+Q\,r(\cos\varphi-\cos\Phi)-V\,r(\operatorname{sen}\Phi-\operatorname{sen}\varphi),$$

il quale, per essere il peso V sopportato dal mezzo arco espresso dal

$$V=q\,r\,\Phi,$$

si riduce a

$$\mu=q\,r^2(\varphi\operatorname{sen}\varphi-\Phi\operatorname{sen}\Phi)+r\,(q\,r+Q)\,(\cos\varphi-\cos\Phi).$$

I valori noti di $d\,z$, $d\,u$, $d\,s$ e μ si pongano ora nei secondi membri delle due ultime equazioni del numero 167, esprimenti lo spostamento $z'-z$ nel senso dell'asse delle ascisse e lo spostamento $u'-u$ nel senso dell'asse delle ordinate per il punto qualunque M dell'asse primitivo del solido; ed immediatamente si ottiene

$$z'-z=-\frac{1}{\varepsilon}\,r^3\left\{\begin{aligned}&+q\,r\int_0^\varphi\operatorname{sen}\varphi\,d\varphi\int_0^\varphi(\varphi\operatorname{sen}\varphi-\Phi\operatorname{sen}\Phi)\,d\varphi\\&+(q\,r+Q)\int_0^\varphi\operatorname{sen}\varphi\,d\,\varphi\int_0^\varphi(\cos\varphi-\cos\Phi)\,d\varphi\end{aligned}\right\}\quad(7),$$

$$u'-u=\frac{1}{\varepsilon}r^3\left\{\begin{array}{l}+qr\int_0^{\varphi}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\varphi}(\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi-\Phi\,\mathrm{sen}\,\Phi)\,d\varphi\\[2ex]+(qr+Q)\int_0^{\varphi}\cos\varphi\,d\varphi\int_0^{\varphi}(\cos\varphi-\cos\Phi)\,d\varphi\end{array}\right\}\quad(8).$$

Ricordando ora che $\int d\varphi$ ed $\int\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi$ sono integrali già noti di cui vennero riportati i valori nel precedente problema, riesce agevole il trovare che

$$\int_0^{\varphi}(\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi-\Phi\,\mathrm{sen}\,\Phi)\,d\varphi=-\varphi\cos\varphi+\mathrm{sen}\,\varphi-\varphi\Phi\,\mathrm{sen}\,\Phi.$$

Chiamando poi A_z e A_u i due integrali che moltiplicano la quantità qr nelle espressioni di $z'-z$ e di $u'-u$ e ponendo in essi il valore dell'integrale ultimo trovato, si ha

$$A_z=\int_0^{\varphi}(-\varphi\Phi\,\mathrm{sen}\,\Phi\,\mathrm{sen}\,\varphi-\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi+\mathrm{sen}^2\varphi)\,d\varphi,$$

$$A_u=\int_0^{\varphi}(-\varphi\Phi\,\mathrm{sen}\,\Phi\cos\varphi-\varphi\cos^2\varphi+\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi)\,d\varphi,$$

i quali, tenendo presenti i valori di $\int\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi$, $\int\varphi\cos d\varphi$, $\int\mathrm{sen}^2\varphi\,d\varphi$, ed $\int\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi\,d\varphi$ di già riportati nel precedente problema, ed osservando che

$$\int \varphi \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}(\varphi \operatorname{sen}^2\varphi - \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi),$$

$$\int \varphi \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi\right),$$

diventano

$$\begin{aligned} A_z = {} & \Phi \operatorname{sen}\Phi\,(\varphi\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \\ & - \frac{1}{2}\left(\varphi\operatorname{sen}^2\varphi - \frac{3}{2}\varphi + \frac{3}{2}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_u = {} & \Phi \operatorname{sen}\Phi\,(-\varphi\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi + 1) \\ & - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varphi^2 + \varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi - \frac{3}{2}\operatorname{sen}^2\varphi\right). \end{aligned}$$

Questi valori di A_z e di A_u, nonchè i valori di B_z e di B_u i quali vennero trovati nel problema precedente e che sono eguali agli integrali che moltiplicano la somma $qr + Q$ nelle equazioni (7) e (8), si sostituiscano in queste stesse equazioni; e così facendo si ottengono le seguenti espressioni generali dello spostamento orizzontale $z' - z$ e dello spostamento verticale $u' - u$ subito da un punto qualunque M dell'arco BAC:

$$z' - z = -\frac{1}{\varepsilon} r^3 \left\{ \begin{aligned} & + qr \left[\begin{aligned} & + \Phi\operatorname{sen}\Phi\,(\varphi\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \\ & - \frac{1}{2}\left(\varphi\operatorname{sen}^2\varphi - \frac{3}{2}\varphi + \frac{3}{2}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\right) \end{aligned} \right] \\ & + (qr + Q) \left[\begin{aligned} & + \cos\Phi\,(\varphi\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \\ & + \frac{1}{2}\left(\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\right) \end{aligned} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9),$$

$$u'-u=\frac{1}{\varepsilon}r^3\left\{\begin{array}{l}+qr\left[\begin{array}{l}+\Phi\,\mathrm{sen}\,\Phi(-\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi-\cos\varphi+1)\\-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varphi^2+\varphi\,\mathrm{sen}\varphi\cos\varphi-\frac{3}{2}\mathrm{sen}^2\varphi\right)\end{array}\right]\\+(qr+Q)\left[\begin{array}{l}\cos\Phi(-\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi-\cos\varphi+1)\\\qquad\qquad+\frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\varphi\end{array}\right]\end{array}\right\}\quad(10).$$

Nelle trovate espressioni degli spostamenti $z'-z$ ed $u'-u$ entra la reazione Q, rappresentante in intensità la spinta orizzontale che l'arco esercita in B ed in C contro ciascuno dei due appoggi, la quale è ancora incognita. Per determinarla basta osservare che lo spostamento orizzontale del punto B deve essere nullo e che conseguentemente l'equazione (9) deve dare $z'-z=0$ per $\varphi=\Phi$. L'equazione a cui si arriva, facendo $z'-z=0$ e $\varphi=\Phi$ nella citata equazione (9) e convenientemente riducendo, è

$$Q(-2\Phi-4\Phi\cos^2\Phi+6\,\mathrm{sen}\,\Phi\cos\Phi)$$
$$=qr(9\Phi-10\Phi\,\mathrm{sen}^2\Phi+4\Phi^2\,\mathrm{sen}\Phi\cos\Phi-9\,\mathrm{sen}\,\Phi\cos\Phi)$$

dalla quale si ricava

$$Q=qr\frac{9\Phi-10\Phi\,\mathrm{sen}^2\Phi+4\Phi^2\,\mathrm{sen}\Phi\cos\Phi-9\,\mathrm{sen}\,\Phi\cos\Phi}{-2\Phi-4\Phi\cos^2\Phi+6\,\mathrm{sen}\,\Phi\cos\Phi}\quad(11).$$

Determinata la reazione orizzontale Q, si può trovare l'abbassamento Δu del colmo dell'arco. Perciò basta fare $u'-u=\Delta u$ e $\varphi=\Phi$ nell'equazione (10). Così procedendo e riducendo, si trova

$$\Delta u=\frac{1}{\varepsilon}r^3\left\{\begin{array}{l}+qr\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{4}\Phi^2+\Phi\mathrm{sen}\Phi-\Phi^2\,\mathrm{sen}^2\Phi-\frac{5}{2}\Phi\mathrm{sen}\Phi\cos\Phi\\\qquad+\cos\Phi-\frac{9}{4}\cos^2\Phi+\frac{5}{4}\end{array}\right]\\+Q\left(-\Phi\,\mathrm{sen}\,\Phi\cos\Phi+\cos\Phi-\frac{3}{2}\cos^2\Phi+\frac{1}{2}\right)\end{array}\right\}\quad(12).$$

Uno fra i diversi punti del semi-arco AB subisce il massimo spostamento orizzontale S_0, e si determina questo spostamento cercando prima quel valore particolare φ' di φ che rende massimo il valore di $z'-z$, e cangiando nell'equazione (9) $z'-z$ in S_0 e φ in φ'. Per avere l'equazione determinatrice di quel valore particolare φ' dell'angolo φ corrispondente al punto che subisce il massimo spostamento orizzontale, bisogna fare la prima derivata del valore di $z'-z$ dato dalla formola (9), ed eguagliarla a zero. Così procedendo si trova che l'equazione mediante la quale si può determinare l'angolo φ' è

$$q\,r\left[2\,\text{sen}^2\varphi'-\varphi'\,\text{sen}\,\varphi'(\cos\varphi'+\Phi\,\text{sen}\,\Phi+\cos\Phi)\right]$$
$$-Q\,\text{sen}\,\varphi'(\varphi'\cos\Phi-\text{sen}\,\varphi')=0 \qquad (13)$$

e che il corrispondente massimo spostamento orizzontale vien dato da

$$S_0=-\frac{1}{\varepsilon}r^3\left\{\begin{array}{l}+q\,r\left[\begin{array}{l}+(\Phi\,\text{sen}\,\Phi+\cos\Phi)(\varphi'\cos\varphi'-\text{sen}\,\varphi')\\ -\frac{1}{2}(\varphi'\,\text{sen}^2\varphi'-\frac{5}{2}\varphi'+\frac{5}{2}\text{sen}\,\varphi'\cos\varphi')\end{array}\right]\\ \\ +Q\left[\cos\Phi(\varphi'\cos\varphi'-\text{sen}\,\varphi')+\frac{1}{2}(\varphi'-\text{sen}\,\varphi'\cos\varphi')\right]\end{array}\right\}.$$

Quando l'arco BAC è una mezza circonferenza di circolo si ha

$$\Phi=\frac{\pi}{2}, \qquad \text{sen}\,\Phi=1, \qquad \cos\Phi=0,$$

ed i valori di Q, $z'-z$, $u'-u$ e Δu, somministrati rispettivamente dalle equazioni (11), (9), (10) e (12), diventano:

$$Q=\frac{q\,r}{2};$$

$$z'-z=\frac{1}{\varepsilon}\frac{q\,r^4}{2}\left[\pi(\text{sen}\,\varphi-\varphi\cos\varphi)+\varphi\,\text{sen}^2\varphi-3\varphi+3\,\text{sen}\,\varphi\cos\varphi\right];$$

$$u'-u=\frac{1}{\varepsilon}\frac{q r^4}{2}\left[\begin{array}{c}\pi(1-\varphi\operatorname{sen}\varphi-\cos\varphi)\\ -\frac{1}{2}\varphi^2-\varphi\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+3\operatorname{sen}^2\varphi\end{array}\right];$$

$$\Delta u=-\frac{5\pi^2-8\pi-24}{16}\frac{q r^4}{\varepsilon}=-0{,}013\frac{q r^4}{\varepsilon}.$$

L'equazione determinatrice dell'angolo φ' cui corrisponde il massimo spostamento orizzontale S_o, la quale risulta ponendo nella (13) i valori di Φ, senΦ, cosΦ e Q che convengono al caso in cui l'arco BAC è una mezza circonferenza, si riduce a

$$\pi\varphi'+2\varphi'\cos\varphi'-5\operatorname{sen}\varphi'=0,$$

cui corrisponde un angolo φ' compreso fra 62° e 63°, ma assai prossimo a 63°; e finalmente il massimo spostamento S_o ammette il valore

$$S_o=\frac{1}{\varepsilon}\frac{q r^4}{2}\left[\pi(\operatorname{sen}\varphi'-\varphi'\cos\varphi')+\varphi'\operatorname{sen}^2\varphi'-3\varphi'+3\operatorname{sen}\varphi'\cos\varphi'\right],$$

il quale, assumendo l'angolo φ' di 63°, si riduce a

$$S_o=0{,}009\frac{q r^4}{\varepsilon}.$$

171. Problemi sulla stabilità di archi a sezione trasversale costante, coi loro assi disposti in piani verticali, e caricati di pesi. — Per stare all'esame di quelle sole quistioni che possono ricevere delle utili applicazioni, si considereranno quei solidi inizialmente curvi il cui asse è un arco di circolo nella sua forma primitiva, e si supporrà che le sezioni normali dei solidi arcuati di cui vuolsi studiare la stabilità siano simmetriche rispetto alle orizzontali passanti pei loro centri di superficie, e quindi nel cercare le sezioni pericolose si avrà riguardo soltanto alla resistenza alla compressione, giacchè pei materiali che vengono generalmente impiegati nelle costruzioni, più della rottura per estensione e per scorrimento trasversale, è facile che avvenga la rottura per compressione.

Determinare la sezione pericolosa sotto il rapporto della resistenza alla compressione e la pressione massima riferita all'unità di superficie per un solido avente un arco di circolo BAC (*fig.* 141) *per suo asse primitivo, collocato su due appoggi posti allo stesso livello, cogli estremi* B *e* C *fissi*, *e caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale.*

Si assumano gli assi coordinati come nei due problemi del numero precedente e si ritengano tutte le denominazioni che vennero stabilite per risolvere il problema I, intendendo che la forza Q rappresenti la spinta orizzontale che l'arco esercita contro ciascun appoggio, la quale spinta è eguale e direttamente contraria alla componente orizzontale della reazione che ciascun appoggio esercita contro l'arco. Ragionando come nel già citato problema I del precedente numero si trova: che la forza V, componente verticale della reazione di ciascun appoggio contro l'estremo corrispondente dell'arco, è data da

$$V = pr \operatorname{sen} \Phi \qquad (1);$$

che il momento inflettente μ, rispetto alla orizzontale rappresentata nel punto qualunque M dell'arco AB, si ottiene colla formola

$$\mu = \frac{pr^2}{2}(\operatorname{sen}^2 \varphi - \operatorname{sen}^2 \Phi) + Qr(\cos\varphi - \cos\Phi) \qquad (2);$$

e che lo spostamento orizzontale $z - z'$ subito dal punto qualunque M, a motivo delle deformazioni che avvengono nell'arco sotto l'azione delle forze estrinseche, ammette il valore dato da

$$z' - z = -\frac{1}{\varepsilon} r^3 \left\{ \begin{array}{l} +\dfrac{pr}{2}\left[\begin{array}{c} \left(\dfrac{1}{2} - \operatorname{sen}^2\Phi\right)(-\varphi\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi) \\ -\dfrac{1}{6}\operatorname{sen}^3\varphi \end{array} \right] \\ \\ +Q\left[\begin{array}{c} \cos\Phi(\varphi\cos\varphi - \operatorname{sen}\varphi) \\ +\dfrac{1}{2}(\varphi - \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi) \end{array} \right] \end{array} \right\}.$$

Venendo ora alla determinazione della spinta orizzontale Q, si dirà che lo spostamento orizzontale $z'-z$ deve essere nullo per il punto B, ossia che per $\varphi=\Phi$ si deve avere $z'-z=0$. Ponendo questa condizione, si trova che l'equazione determinatrice di Q risulta

$$Q(3\Phi+6\Phi\cos^2\Phi-9\operatorname{sen}\Phi\cos\Phi)$$
$$=\frac{pr}{2}(3\Phi\cos\Phi-6\Phi\operatorname{sen}^2\Phi\cos\Phi-3\operatorname{sen}\Phi+7\operatorname{sen}^3\Phi),$$

d'onde

$$Q=\frac{pr}{2}\,\frac{3\Phi\cos\Phi-6\Phi\operatorname{sen}^2\Phi\cos\Phi-3\operatorname{sen}\Phi+7\operatorname{sen}^3\Phi}{3\Phi+6\Phi\cos^2\Phi-9\operatorname{sen}\Phi\cos\Phi} \quad (3).$$

Per determinare la sezione pericolosa sotto il rapporto della resistenza alla compressione nonchè la pressione massima Q_{2m} riferita all'unità di superficie, è necessario conoscere, oltre il valore generale del momento inflettente μ dato dall'equazione (2), anche quello della forza tangenziale T. Questa forza tangenziale è una pressione la quale, per la sezione trasversale qualunque determinata dal punto M cui corrisponde il raggio MO che fa l'angolo $MOA=\varphi$ colla verticale Au, consta della somma algebrica delle componenti secondo la tangente in M della reazione orizzontale Q, della reazione verticale V e del peso $pr(\operatorname{sen}\Phi-\operatorname{sen}\varphi)$ distribuito sull'arco BM; che per conseguenza vien data da

$$T=Q\cos\varphi+V\operatorname{sen}\varphi-pr(\operatorname{sen}\Phi-\operatorname{sen}\varphi)\operatorname{sen}\varphi;$$

e che, ponendo per V il valore dato dalla (1), si riduce a

$$T=Q\cos\varphi+pr\operatorname{sen}^2\varphi \quad (4).$$

Il momento inflettente μ non si conserva positivo per tutta l'estensione dell'arco AB; si annulla per quelle sezioni cui corrispondono gli angoli φ dati dall'equazione

$$\frac{pr^2}{2}(\operatorname{sen}^2\varphi-\operatorname{sen}^2\Phi)+Qr(\cos\varphi-\cos\Phi)=0,$$

e quindi per le due sezioni corrispondenti ai punti per cui gli angoli φ prendono rispettivamente i valori particolari φ_1 e φ_2 dati da

$$\cos\varphi_1 = \cos\Phi, \qquad \cos\varphi_2 = \frac{2Q}{pr} - \cos\Phi \qquad (5).$$

Convien però osservare che la seconda soluzione non determina sezione alcuna del solido, se non quando l'angolo φ_2 è reale e più piccolo di Φ. Osservando poi che $\mathrm{sen}^2\varphi - \mathrm{sen}^2\Phi$ è eguale a $\cos^2\Phi - \cos^2\varphi$, il momento inflettente μ può essere scritto

$$\mu = \frac{pr^2}{2}\left(\cos\varphi - \cos\Phi\right)\left(\frac{2Q}{pr} - \cos\varphi - \cos\Phi\right) \qquad (6).$$

e siccome il fattore $\cos\varphi - \cos\Phi$ è positivo giacchè $\varphi < \Phi$, ne deriva che il segno di μ dipende dal segno che prende il fattore $\frac{2Q}{pr} - \cos\varphi - \cos\Phi$. Ma per $\varphi = \varphi_2$ questo fattore diventa zero; prende il segno — per $\varphi < \varphi_2$, giacchè aumenta la parte negativa; ed acquista il segno + per $\varphi > \varphi_2$ perchè la parte negativa diminuisce. Segue da ciò che, quando l'angolo φ_2 è reale e piu piccolo di Φ, il momento inflettente è negativo per la sezione la quale passa pel colmo A; si conserva negativo per tutte le sezioni corrispondenti a punti compresi fra A ed N, essendo N quel punto dell'asse del solido per cui l'angolo φ ha il valore particolare φ_2; e finalmente è positivo per tutte le sezioni le quali corrispondono a punti compresi fra N e B.

Allorquando l'angolo φ_2 determinato coll'equazione (5) riesce minore dell'angolo Φ, due sono le pressioni massime riferite all'unità di superficie che importa di conoscere: la prima sarà la pressione massima che si verifica per la sezione pericolosa del tratto AN; l'altra la pressione massima che ha luogo per la sezione pericolosa del tratto BN. La più grande di queste due pressioni massime costituirà la più grande delle pressioni che si verificano nel corpo considerato.

Incominciando dal ricercare la pressione massima che ha luogo nella parte di solido il cui asse primitivo è rappresentato in AN, nell'espressione (2) del numero 169 bisogna porre invece di μ'' il valore generale di μ dato dalla formola (6) coi segni cangiati, giacchè per una sezione qualunque di questo tratto il momento inflettente ha sempre un valore negativo; invece di T'' il valore generale di T dato dalla formola (4) anche coi segni cangiati, giacchè la forza tangenziale rappresenta una pressione o tensione negativa. Una volta fatte queste sostituzioni, trovasi che l'accennata espressione diventa

$$\frac{u''pr^2\left(\cos\varphi-\cos\Phi\right)\left(\cos\varphi+\cos\Phi-\frac{2Q}{pr}\right)}{2I'}$$
$$+\frac{Q\cos\varphi+pr\,\mathrm{sen}^2\varphi}{\Omega} \quad (7).$$

Osservo ora che, se si rappresentano i diversi valori che prende quest'espressione pei valori di φ compresi fra 0 e φ_2 mediante le ordinate di una curva avente per ascisse i valori corrispondenti di $\cos\varphi$, questa curva riesce un arco di parabola colla sua convessità volta verso l'asse delle ascisse; giacchè mettendo nell'accennata espressione $1-\cos^2\varphi$ a luogo di $\mathrm{sen}^2\varphi$ e chiamando a^2 il quadrato del raggio di girazione espresso da $a^2=\frac{I'}{\Omega}$, il coefficiente di $\cos^2\varphi$ diventa

$$\frac{u''pr^2}{2I'}-\frac{pr}{\Omega}=\frac{pr}{\Omega}\left(\frac{u''r}{2a^2}-1\right),$$

il quale, per essere a minore o tutto al più eguale ad u'' e $2a$ sempre minore di r, è necessariamente quantità positiva. Segue da ciò che il più gran valore della pressione riferita all'unità di superficie, per la parte di solido il cui asse è rappresentato in AN, deve corrispondere ad uno dei due limiti dell'angolo φ, voglio dire a $\varphi=0$ oppure a $\varphi=\varphi_2$. All'angolo $\varphi=0$ corrisponde la pressione Q_{2m}' espressa da

$$Q_{2m}'=\frac{u''pr^2\left(1-\cos\Phi\right)\left(1+\cos\Phi-\frac{2Q}{pr}\right)}{2I'}+\frac{Q}{\Omega} \quad (8).$$

Per quanto spetta al valore della pressione massima nella sezione che corrisponde a $\varphi=\varphi_2$ è inutile di occuparci, giacchè, appartenendo il punto N tanto all'arco AN quanto all'arco BN, si deve trovare il detto valore fra quelli delle pressioni massime per le diverse sezioni che hanno i loro centri sull'ultimo accennato arco.

Passando ora alla ricerca della sezione pericolosa e della corrispondente pressione massima Q_{2m}'' riferita all'unità di superficie per la parte di solido il cui asse primitivo è rappresentato in BN, bisogna porre nell'espressione (2) del numero 169: invece di μ'' il valore generale del momento inflettente μ dato dalla formola (6) coi proprii segni, giacchè per una sezione qualunque di questo tratto il detto momento si conserva positivo; invece di T″ il valore generale di T dato dalla formola (4) coi segni cangiati, perchè rappresenta esso una pressione o tensione negativa. Così facendo si trova che l'accennata espressione diventa

$$\frac{u''pr^2\left(\cos\varphi-\cos\Phi\right)\left(\dfrac{2Q}{pr}-\cos\varphi-\cos\Phi\right)}{2I'} + \frac{Q\cos\varphi+pr\,\mathrm{sen}^2\varphi}{\Omega} \qquad (9).$$

Quel valore particolare φ' dell'angolo φ che rende massima questa espressione, e che si deduce eguagliando a zero la sua prima derivata rispetto a φ, determina la sezione pericolosa; e, essendo

$$pr(2I'+ru''\Omega)\cos\varphi'-Q(I'+ru''\Omega)=0$$

l'equazione che risulta eguagliando a zero la detta derivata dopo d'aver cangiato φ in φ', si ha

$$\cos\varphi'=\frac{Q}{pr}\,\frac{I'+ru''\Omega}{2I'+ru''\Omega} \qquad (10).$$

Questo valore di φ', posto nell'espressione (9) invece di φ, dà la pressione massima Q_{2m}'' riferita all'unità di superficie nella sezione pericolosa, e quindi si ha

$$Q_{2m}''=\frac{u''pr^2\left(\cos\varphi'-\cos\Phi\right)\left(\dfrac{2Q}{pr}-\cos\varphi'-\cos\Phi\right)}{2I'} + \frac{Q\cos\varphi'+pr\,\mathrm{sen}^2\varphi'}{\Omega} \qquad (11).$$

Se avvenisse il caso di trovare per φ' un angolo maggiore di Φ la sezione cui corrisponde la pressione Q_{2m}'' sarebbe fuori dei limiti dell'arco proposto; la sezione pericolosa fra tutte quelle appartenenti alla parte di solido il cui asse è BN sarebbe la sezione d'imposta; e la pressione massima Q_{2m}''' in questa sezione risulterebbe facendo nell'espressione (9) $\varphi = \Phi$, per cui

$$Q_{2m}''' = \frac{Q\cos\Phi + pr\,\mathrm{sen}^2\Phi}{\Omega} \tag{12}.$$

Se finalmente l'angolo φ_2, il cui coseno è dato dalla formola (5), si trova maggiore di Φ, bisogna cercare il valor massimo dell'espressione (7) il quale, per quanto si è detto sulla parabola le cui ordinate la rappresentano, avrà luogo per uno dei due limiti di $\varphi = 0$ o di $\varphi = \Phi$. In questo caso adunque la pressione massima riferita all'unità di superficie che ha luogo in tutta l'estensione del solido è la maggiore di quelle date dalle equazioni (8) e (12), e la sezione pericolosa è, alla chiave dell'arco quando $Q_{2m}' > Q_{2m}'''$, all'imposta quando $Q_{2m}' < Q_{2m}'''$.

Riepilogando i risultati della fatta discussione, si viene a conchiudere che, per determinare la pressione massima riferita all'unità di superficie, bisogna prima calcolare Q, φ_2 e φ' mediante le formole (3), (5) e (10), e quindi procedere in questo modo:

1° Se φ_2 e φ' sono minori di Φ, si prende per pressione massima il più grande dei due valori dati dalle formole (8) e (11), il primo dei quali corrisponde all'estrados ed alla chiave, il secondo all'intrados ed alle reni dell'arco;

2° Se φ_2 è minore di Φ, ma se φ' è maggiore di Φ, si prende per pressione massima il più grande dei due valori dati dalle formole (8) e (12), il primo dei quali corrisponde all'estrados ed alla chiave, il secondo all'intrados ed all'imposta dell'arco;

3° Se φ_2 è maggiore di Φ, si prende ancora per pressione massima il più grande dei due valori dati dalle formole (8) e (12), i quali corrispondono rispettivamente alla chiave ed all'imposta dell'arco.

Venendo ora al caso particolare in cui l'arco BAC è una mezza circonferenza di circolo, si ha

$$\Phi = \frac{\pi}{2}, \qquad \mathrm{sen}\Phi = 1, \qquad \cos\Phi = 0 \tag{13}.$$

La spinta orizzontale Q data dall'equazione (3) si riduce a

$$Q = \frac{4}{3\pi}pr = 0{,}4244.pr \tag{14}.$$

Gli angoli φ_1 e φ_2 determinanti le due sezioni per cui i momenti inflettenti sono nulli, sono quelli dati dalle equazioni

$$\cos\varphi_1 = 0, \qquad \cos\varphi_2 = \frac{8}{3\pi},$$

cui corrispondono gli angoli

$$\varphi_1 = 90^\circ, \qquad \varphi_2 = 31^\circ 55';$$

e l'angolo φ' può essere calcolato mediante la formola

$$\cos\varphi' = \frac{4}{3\pi}\,\frac{1 + r u'' \Omega}{2I' + r u'' \Omega} = 0{,}4244\,\frac{I' + r u'' \Omega}{2I' + r u'' \Omega} \qquad (15).$$

Essendo l'angolo φ_2 minore dell'angolo Φ, e lo stesso avvenendo dell'angolo φ', come è facile l'accorgersi dal valore del suo coseno, bisogna prendere per pressione massima la più grande delle due pressioni Q_{2m}' e Q_{2m}'' date dalle formole (8) e (11), la prima delle quali corrisponde all'estrados ed alla chiave, la seconda all'intrados ed alle reni dell'arco; e che si ottengono ponendo rispettivamente, nell'equazione (8) i valori di $\cos\Phi$ e di Q dati dalle equazioni (13) e (14), nell'equazione (11) i valori di $\cos\Phi$, Q e $\cos\varphi'$ dati dalle equazioni (13), (14) e (15).

Il problema che or ora si è risoluto, e che è il più semplice di quelli che si possono presentare nella pratica dell'ingegnere costruttore, mostra ad evidenza quanto sia lungo e difficile il voler analiticamente determinare la sezione pericolosa e la pressione massima riferita all'unità di superficie che in essa si verifica per un solido inizialmente curvo. Generalmente torna più facile nella pratica: il formarsi l'espressione generale del momento inflettente μ per passare ad avere lo spostamento orizzontale $z' - z$ e quindi la spinta orizzontale Q; il procurarsi l'espressione generale della forza tangenziale T; ed il calcolarsi varii valori di μ e di T corrispondenti a diversi valori dell'angolo φ, per poi ottenere dall'applicazione delle ultime due formole del numero 168 i valori di Q_1 e di Q_2 per le sezioni corrispondenti agli assunti valori di φ. Un'apposita tavola, contenente i diversi valori dell'angolo φ non che i corrispondenti valori delle tensioni Q_1 e delle pressioni Q_2, permetterà di discernere qual è il massimo valore di Q_1, quale il massimo di Q_2, e quindi quali sono le sezioni pericolose sotto il rapporto della resistenza all'estensione ed alla compressione. Si possono anche costruire due curve prendendo per ascisse gli angoli φ, oppure una loro linea trigonometrica e per ordinate dell'una i valori di Q_1, per ordinate dell'altra i valori di Q_2. L'ordinata maggiore della prima curva dà la tensione massima riferita all'unità di superficie, e l'ascissa corrispondente a quest'ordinata determina la sezione pericolosa sotto il rapporto della resistenza all'estensione; l'ordinata maggiore della seconda curva dà la pressione massima, e la sua ascissa precisa la sezione pericolosa sotto il rapporto della resistenza alla pressione.

172. **Ricerca delle espressioni generali del momento inflettente μ e della forza tangenziale T in due casi che ben sovente si presentano nella pratica delle costruzioni.** — Non sempre i pesi di cui trovansi caricati gli archi che avviene di dover considerare nella pratica sono uniformemente distribuiti sulle proiezioni orizzontali e sulle lunghezze degli archi stessi; ed avvengono ben di frequente delle circostanze in cui i detti pesi hanno una distribuzione uniforme sulle superficie curve di fusi o di porzioni di fusi cilindrici e sferici. Io non starò a fare per questi casi tutte le ricerche a cui mi sono accinto nei due precedenti numeri, e mi accontenterò di indicare come si trova l'espressione generale del momento inflettente μ e della forza tangenziale T, dalle quali espressioni si passa poi facilmente, con processi analoghi a quelli tenuti nei citati due numeri, a trovare tutti gli elementi riferentisi alle deformazioni, alle sezioni pericolose ed alle tensioni e pressioni massime.

Per il caso di un solido inizialmente curvo il cui asse è un arco di circolo AB (*fig.* 142), appoggiato in A contro un piano verticale, fissato in B, colla tangente orizzontale in A e sopportante un peso uniformemente distribuito su una porzione di fuso cilindrico coprente il trapezio $A_2B_2B_3A_3$, le cui basi sono $\overline{B_2B_3}=a$ e $\overline{A_2A_3}=b$ ed avente per altezza la distanza orizzontale $\overline{A_1B_1}=\overline{DB}=r\,\text{sen}\,\Phi$ fra i due estremi A e B, la parte di fuso cilindrico corrispondente ad un arco infinitesimo $m'm$, fissato di posizione mediante l'angolo $mOA=\psi$, è quella coprente il trapezio elementare $m_2m_2'm_3'm_3$; e questa parte di fuso, essendo

$$mm'=r\,d\psi, \qquad \overline{A_1m_1}=\overline{em}=r\,\text{sen}\,\psi,$$

$$\overline{m_2m_3}=\overline{m_2\text{I}}+\overline{\text{I}m_3}=(a-b)\frac{\text{sen}\,\psi}{\text{sen}\,\Phi}+b,$$

ammette per superficie

$$\left[(a-b)\frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\Phi}+b\right]r\,\mathrm{d}\psi.$$

Se chiamasi p' il peso che trovasi sull'unità di superficie della porzione di fuso cilindrico che copre il trapezio $A_2B_2B_3A_3$, il peso elementare corrispondente all'arco mm' vien espresso da

$$p'\left[(a-b)\frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\Phi}+b\right]r\,\mathrm{d}\psi \qquad (1);$$

il braccio di questo peso elementare, rispetto alla orizzontale passante pel centro di superficie M della sezione normale determinata dall'angolo $AOM=\varphi$, è

$$\overline{mn}=\overline{me}-\overline{ME}=r(\operatorname{sen}\psi-\operatorname{sen}\varphi);$$

e finalmente il momento del detto peso elementare, rispetto all'accennata orizzontale ammette il valore

$$p'\left[(a-b)\frac{\operatorname{sen}\psi}{\operatorname{sen}\Phi}+b\right](\operatorname{sen}\psi-\operatorname{sen}\varphi)\,r^2\,\mathrm{d}\psi \qquad (2).$$

Integrando l'espressione (1) fra i limiti $\psi=\varphi$ e $\psi=\Phi$, si ha per espressione del peso totale sopportato dall'arco MB

$$p'r\left[\frac{(a-b)}{\operatorname{sen}\Phi}\int_{\varphi}^{\Phi}\operatorname{sen}\psi\,\mathrm{d}\psi+b\int_{\varphi}^{\Phi}\mathrm{d}\psi\right]$$

$$=p'r\left[-b\varphi+\frac{a-b}{\operatorname{sen}\Phi}\cos\varphi-(a-b)\cot\Phi+b\Phi\right] \qquad (3);$$

ed integrando fra gli stessi limiti l'espressione (2), si ottiene per espressione del momento dell'accennato peso rispetto alla orizzontale passante pel punto M.

$$p'r^2\left\{\begin{aligned}&\frac{a-b}{\operatorname{sen}\Phi}\int_\varphi^\Phi \operatorname{sen}^2\psi\, d\psi+\left[b-(a-b)\frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\Phi}\right]\int_\varphi^\Phi \operatorname{sen}\psi\, d\psi\\&-b\operatorname{sen}\varphi\int_\varphi^\Phi d\psi\end{aligned}\right\}$$

$$=p'r^2\left\{\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\frac{a-b}{\operatorname{sen}\Phi}\varphi+b\varphi\operatorname{sen}\varphi+\left[(a-b)\cot\Phi-b\Phi\right]\operatorname{sen}\varphi\\&+b\cos\varphi-\frac{1}{2}\frac{a-b}{\operatorname{sen}\Phi}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi+\frac{1}{2}\frac{a-b}{\operatorname{sen}\Phi}\Phi\\&-\frac{1}{2}(a+b)\cos\Phi\end{aligned}\right\} \quad (4).$$

Osservando ora che la reazione verticale V non è altro che il peso portato dall'arco AB, si ottiene il valore di V facendo $\varphi=0$ nel secondo membro dell'eguaglianza (3), per cui

$$V=p'r\left[\frac{a-b}{\operatorname{sen}\Phi}-(a-b)\cot\Phi+b\Phi\right].$$

Il momento inflettente μ consta del momento rappresentato dal secondo membro dell'eguaglianza (4), aumentato del momento della reazione orizzontale Q e diminuito del momento della reazione V, per cui, convenientemente riducendo, si trova

$$\mu=p'r^2\left\{\begin{aligned}&-\frac{1}{2}\frac{a-b}{\operatorname{sen}\Phi}\varphi+b\varphi\operatorname{sen}\varphi+\frac{a-b}{\operatorname{sen}\Phi}\operatorname{sen}\varphi\\&+b\cos\varphi-\frac{1}{2}\frac{a-b}{\operatorname{sen}\Phi}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\\&-b\Phi\operatorname{sen}\Phi+\frac{1}{2}\frac{a-b}{\operatorname{sen}\Phi}\Phi\\&+\frac{1}{2}(a-3b)\cos\Phi+b-a\end{aligned}\right\}+Qr(\cos\varphi-\cos\Phi).$$

Finalmente resta a farsi la forza tangenziale T, la quale essendo data da

$$T = Q\cos\varphi + V\operatorname{sen}\varphi$$

$$-p'r\left[-b\varphi + \frac{a-b}{\operatorname{sen}\Phi}\cos\varphi - (a-b)\cot\Phi + b\Phi\right]\operatorname{sen}\varphi,$$

per il noto valore di V, diventa

$$T = Q\cos\varphi + p'r\left(b\varphi - \frac{a-b}{\operatorname{sen}\Phi}\cos\varphi + \frac{a-b}{\operatorname{sen}\Phi}\right)\operatorname{sen}\varphi.$$

Venendo a considerare il caso di un solido inizialmente curvo, il cui asse è un arco di circolo AB (*fig.* 143), appoggiato in A contro un resistente piano verticale, fisso in B, colla tangente orizzontale in A e sopportante un peso uniformemente distribuito su una porzione di fuso sferico coprente il settore $B_2O_1B_3$ di raggio $\overline{O_1B_1} = \overline{DB} = r\operatorname{sen}\Phi$ e d'ampiezza $B_2O_1B_3 = \alpha°$, la piccolissima parte di fuso sferico corrispondente ad un arco infinitesimo mm' dell'asse del solido che si considera, fissato di posizione mediante l'angolo $mOA = \psi$, è quella coprente la porzione elementare di corona circolare $m_2m_2'm_3'm_3$, ed essendo

$$mm' = r\,d\psi, \qquad \overline{O_1m_1} = \overline{em} = r\operatorname{sen}\psi,$$

$$m_2m_1m_3 = \frac{\alpha^0}{180°}\pi r\operatorname{sen}\psi$$

ammette per superficie

$$\frac{\alpha^0}{180°}\pi r^2\operatorname{sen}\psi\,d\psi.$$

Il peso elementare corrispondente alla or trovata superficie elementare, essendo p' il peso che trovasi sull'unità di superficie della considerata porzione di fuso sferico, vien espresso da

$$\frac{\alpha^0}{180°}\pi r^2 p'\operatorname{sen}\psi\,d\psi \qquad (5);$$

la distanza del punto d'applicazione di questo peso dalla verticale AO, che può essere considerata siccome la distanza del centro di gravità dell'arco $m_2 m_1 m_3$ dal centro O_1, è quarta proporzionale dopo la lunghezza dell'arco $m_2 m_1 m_3$, la sua corda $\overline{m_2 m_3}$ ed il suo raggio $\overline{O_1 m_1}$, e quindi vale

$$\frac{360^\circ}{\alpha^\circ}\frac{r\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\alpha}{\pi}\mathrm{sen}\,\psi;$$

il braccio poi del detto peso elementare rispetto all'orizzontale passante pel centro di superficie M della sezione normale del solido considerato, determinata dall'angolo $AOM=\varphi$, siccome differenza fra la distanza or ora trovata ed EM, è

$$r\left(\frac{360^\circ}{\alpha^\circ}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\alpha}{\pi}\mathrm{sen}\,\psi-\mathrm{sen}\,\varphi\right);$$

e finalmente il momento dello stesso peso elementare, rispetto alla accennata sezione, vale

$$\frac{\alpha^\circ}{180^\circ}\pi r^3 p'\left(\frac{360^\circ}{\alpha^\circ}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\alpha}{\pi}\mathrm{sen}\,\psi-\mathrm{sen}\,\varphi\right)\mathrm{sen}\,\psi\,d\psi \quad (6).$$

Facendo per brevità nello scrivere

$$\frac{\alpha^\circ}{180^\circ}\pi=A \quad \text{e quindi} \quad \frac{360^\circ}{\alpha^\circ}\frac{1}{\pi}=\frac{2}{A},$$

le espressioni (5) e (6) diventano rispettivamente

$$A p' r^2 \,\mathrm{sen}\,\psi\,d\psi,$$

$$p' r^3\left(2\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{2}\alpha\,\mathrm{sen}\,\psi-A\,\mathrm{sen}\,\varphi\right)\mathrm{sen}\,\psi\,d\psi;$$

e, integrandole fra i limiti $\psi=\varphi$ e $\psi=\Phi$, si ottengono le seguenti espressioni del peso totale portato dall'arco MB e del momento dello stesso peso rispetto alla orizzontale passante pel punto M

$$A p' r^2 \int_\varphi^\Phi \operatorname{sen}\psi\, d\psi = A p' r^2 (\cos\varphi - \cos\Phi) \qquad (7),$$

$$p' r^3 \left[2 \operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha \int_\varphi^\Phi \operatorname{sen}^2\psi\, d\psi - A \operatorname{sen}\varphi \int_\varphi^\Phi \operatorname{sen}\psi\, d\psi \right]$$

$$= p' r^3 \left[\begin{array}{c} -\varphi \operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha + \left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha - A\right) \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \\ + A \cos\Phi \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha (\Phi - \operatorname{sen}\Phi \cos\Phi) \end{array} \right] \qquad (8).$$

Volendosi trovare il valore della reazione verticale V prodotta dall'appoggio B contro l'estremo corrispondente dell'arco, la quale non è altro che il peso sopportato dall'arco AB, bisogna fare $\varphi = 0$ nel secondo membro dell'eguaglianza (7), e si ha

$$V = A p' r^2 (1 - \cos\Phi).$$

Il momento inflettente μ, che consta del momento rappresentato dal secondo membro dell'eguaglianza (8), aumentato del momento della reazione orizzontale Q e diminuito del momento della reazione verticale V, una volta fatte le riduzioni, trovasi espresso da

$$\mu = p' r^3 \left\{ \begin{array}{c} + \left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha - A\right) \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \\ - \varphi \operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha + A \operatorname{sen}\varphi - A \operatorname{sen}\Phi \\ + \Phi \operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha \\ - \left(\operatorname{sen}\frac{1}{2}\alpha - A\right) \operatorname{sen}\Phi \cos\Phi \end{array} \right\} + Q r (\cos\varphi - \cos\Phi).$$

Finalmente la forza tangenziale T, che vale

$$T = Q\cos\varphi + V\,\mathrm{sen}\,\varphi - Ap'r^2(\cos\varphi - \cos\Phi)\,\mathrm{sen}\,\varphi,$$

per il trovato valore di V si riduce a

$$T = Q\cos\varphi + Ap'r^2(1 - \cos\varphi)\,\mathrm{sen}\,\varphi.$$

Il valore di μ, sostituito nell'espressione di $z' - z$ che venne trovata al numero 167, permette di avere il valore generale dello spostamento orizzontale $z' - z$; facendo nell'espressione di $z' - z$ $\varphi = \Phi$, si determina la spinta orizzontale Q; trovata questa spinta si può fare l'espressione dello spostamento orizzontale $u' - u$, e determinare l'abbassamento Δu subito dal vertice dell'arco; coll'espressione di $z' - z$, essendo noto Q, si può trovare qual è il sito in cui ha luogo il massimo spostamento orizzontale S_0 e questo spostamento stesso; finalmente colle espressioni generali di μ e di T si possono precisare le sezioni pericolose sotto il rapporto della resistenza all'estensione ed alla compressione e determinare in queste sezioni le tensioni e le pressioni massime, vuoi analiticamente, vuoi mediante la costruzione delle curve le cui ascisse rappresentano diversi valori dell'angolo φ o di una sua linea trigonometrica, e le cui ordinate sono le corrispondenti tensioni e pressioni massime riferite all'unità di superficie e calcolate colle ultime due formole del numero 168.

CAPITOLO X.

Archi equilibrati.

173. Archi equilibrati ed assunto del presente capitolo. — Chiamansi *archi equilibrati* quelli i quali sono talmente foggiati che, sotto l'azione delle forze estrinseche da cui trovansi sollecitati, non sono soggetti ad inflessione, ma solo a compressione o ad estensione, cosicchè non può in essi avvenire nè rotazione, nè scorrimento di una sezione qualunque relativamente ad una sezione vicinissima.

In questo capitolo si tratterà degli archi equilibrati che più di frequente avviene di dover considerare nella pratica delle costruzioni, ossia degli archi aventi il loro asse in uno stesso piano verticale, sostenuti da due appoggi situati allo stesso livello e simmetrici rispetto al piano verticale egualmente distante dagli appoggi e perpendicolare a quello in cui trovasi l'asse.

174. **Equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari in un arco equilibrato.** — Sia BAC (*fig.* 144) l'asse di un arco sostenuto in B ed in C da due appoggi, situati in uno stesso piano orizzontale, e simmetrico rispetto alla verticale DA passante pel mezzo dell'orizzontale BC. Le forze applicate all'arco si trovino contenute nel piano in cui esiste il suo asse; suppongansi tolti i due appoggi ed a ciascuno di essi sostituita la corrispondente reazione contro l'estremo dell'arco. Se considerasi un punto qualunque M dell'asse del solido e se immaginasi la sezione normale passante per questo punto, l'arco è equilibrato quando la risultante di tutte le forze ad esso applicate da B in M trovasi diretta secondo la tangente al suo asse in M, giacchè in questo caso gli elementi di fibra compresi fra la sezione normale passante per M ed una sezione infinitamente vicina vengono o tutti compressi o tutti allungati. Ciò premesso, assumasi il punto culminante A dell'asse dell'arco per origine di coordinate, l'asse delle ascisse z orizzontale, l'asse positivo delle ordinate u verticale e dalla parte verso la quale incontra la corda BC; invece di considerare l'arco intiero si consideri soltanto la sua metà AB, giacchè per l'ammessa simmetria rispetto alla verticale DA le due metà AB ed AC sono precisamente in identiche condizioni; e si chiamino

z ed u le due coordinate $\overline{AP}$ e $\overline{PM}$ di un punto qualunque M dell'asse dell'arco;

s la lunghezza di un arco qualunque AM;

S la lunghezza dell'arco AB;

F la forza riferita all'unità di lunghezza dell'arco AB in un suo punto qualunque N;

ψ l'angolo F E z che questa forza fa coll'asse A z;

Q la spinta orizzontale che l'arco esercita contro il ritegno B, la qual spinta è eguale e direttamente contraria alla componente orizzontale della reazione che il ritegno produce contro l'arco;

V la pressione che l'arco produce sul ritegno B, la qual pressione è eguale e direttamente contraria alla componente verticale della reazione con cui il ritegno opera contro l'arco;

T la risultante di tutte le forze applicate all'arco da B in M, la qual risultante, affinchè l'arco sia equilibrato, deve essere diretta secondo la tangente in M all'asse BAC, e di più essere eguale e direttamente contraria alla reazione che l'arco AM esercita contro l'arco MB, ossia all'azione molecolare che viene provocata sulla sezione normale determinata dal punto M.

L'arco MB si può ora considerare siccome sollecitato: in B da una forza orizzontale Q diretta da B verso D e da una forza verticale V volta dal basso all'alto; su tutta la sua lunghezza della forza totale corrispondente alla forza F distribuita su ogni unità di lunghezza; ed in M della forza tangenziale T operante come è indicato dalla figura. Per l'equilibrio poi dell'indicato arco, sollecitato da forze come si è detto, è necessario: che si annulli la somma algebrica di tutte le componenti parallele all'asse delle z; che lo stesso succeda per la somma algebrica di tutte le componenti parallele all'asse delle u. Le componenti della T secondo gli assi delle z e delle u sono rispettivamente

$$T\frac{dz}{ds}, \qquad T\frac{du}{ds};$$

essendo F la forza riferita all'unità di lunghezza dell'arco AB, vale $F\,ds$ quella applicata all'arco elementare ds, e le componenti parallele agli assi delle z e delle u di questa forza elementare sono rispettivamente

$$F\,ds.\cos\psi, \qquad F\,ds.\operatorname{sen}\psi;$$

le somme di queste componenti per l'arco MB trovansi quindi espresse da

$$\int_s^S F\cos\psi.\,ds, \qquad \int_s^S F\operatorname{sen}\psi.\,ds;$$

e quindi le condizioni d'equilibrio per l'arco qualunque BM si riducono a

$$T\frac{dz}{ds}+\int_s^S F\cos\psi.\,ds-Q=0,$$

$$\mathrm{T}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}+\int_s^{\mathrm{S}}\mathrm{F}\,\mathrm{sen}\,\psi.\mathrm{d}s-\mathrm{V}=0.$$

Mediante queste equazioni, come verrà messo in chiaro dalla risoluzione di alcuni problemi che verranno trattati nel numero che segue, si possono determinare: le reazioni Q e V; la curva che deve presentare l'asse di un arco affinchè sia equilibrato sotto l'azione di date forze; e l'azione molecolare T provocata in una sezione normale qualunque.

175. **Problemi sugli archi equilibrati.** — I. *Trovare la curva secondo la quale deve essere foggiato l'asse di un arco, affinchè sia equilibrato sotto l'azione di un peso uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale; determinare la spinta orizzontale e la pressione in una sezione normale qualunque dell'arco.*

Siano

p il peso corrispondente all'unità di lunghezza della proiezione orizzontale dell'arco,

c la semicorda $\overline{\mathrm{BD}}$ (*fig.* 144) ed

m la sua monta $\overline{\mathrm{DA}}$.

Si ha

$$\mathrm{F}\,\mathrm{d}s=p\,\mathrm{d}x, \qquad \psi=90^{\circ},$$

$$\int_s^{\mathrm{S}}\mathrm{F}\cos\psi.\mathrm{d}s=0, \qquad \int_s^{\mathrm{S}}\mathrm{F}\,\mathrm{sen}\,\psi.\mathrm{d}s=p(c-z),$$

e quindi dalle generali equazioni d'equilibrio del numero precedente si ha

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{T}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}&=\mathrm{Q}\\ \mathrm{T}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}&=\mathrm{V}-p(c-z)\end{aligned}\right\}\quad(1).$$

Dividendo la seconda per la prima di queste equazioni, ed osservando che la somma delle due reazioni verticali in B ed in C deve fare il peso $2pc$ distribuito sull'arco totale, per cui

$$V = pc,$$

immediatamente risulta

$$\frac{du}{dz} = \frac{pz}{Q}.$$

Integrando quest'equazione e determinando la costante in modo che per $z=0$ sia $u=0$, si trova

$$u = \frac{pz^2}{2Q} \qquad (2).$$

Per determinare la spinta orizzontale Q basta notare che per il punto B, ossia per $z=c$ deve essere $u=m$, cosicchè dall'ultima equazione si deduce

$$Q = \frac{pc^2}{2m}.$$

Il trovato valore di Q si ponga nell'equazione (2) e risulta l'equazione

$$u = \frac{m}{c^2} z^2,$$

la quale rappresenta la curva secondo cui deve essere foggiato l'asse dell'arco, affinchè sia esso equilibrato. Questa curva evidentemente è una parabola col vertice in A, avente per suo asse la verticale Au e passante pei due punti B e C.

Per trovare la pressione in una sezione normale qualunque dell'arco, si elevino al quadrato le equazioni (1), si sommino, e nell'equazione che risulta si sostituiscano i trovati valori di V e Q. Così facendo si trova

$$T = p\sqrt{\frac{c^4}{4m^2} + z^2}.$$

Esaminando questo valore di T facilmente si vede che esso ha il minimo valore per $z=0$ ossia per la sezione che corrisponde alla chiave dell'arco, dove diventa eguale alla spinta orizzontale Q; e che cresce per sezioni normali che vanno allontanandosi dalla chiave, in modo da acquistare all'imposta dell'arco il valor particolare T′ dato da

$$T'=pc\sqrt{\frac{c^2}{4m^2}+1}=\frac{pc^2}{2m}\sqrt{1+\frac{4m^2}{c^2}}.$$

Quando l'arco è a monta molto depressa, $\frac{4m^2}{c^2}$ è una frazione trascurabile a fronte dell'unità; il valore di T′ diventa eguale a $\frac{pc^2}{2m}$, ossia eguale alla pressione che ha luogo alla chiave; e quindi con molta approssimazione si può ritenere che in ogni sezione dell'arco si verifichi la stessa pressione.

II. *Trovare la curva secondo cui deve essere foggiato l'asse di un arco, affinchè sia equilibrato sotto l'azione di un peso uniformemente distribuito nella sua lunghezza; determinare la spinta orizzontale e la pressione in una sezione normale qualunque dell'arco.*

Si ritengano le denominazioni stabilite nel precedente problema per quanto concerne alla corda ed alla monta dell'arco, e si chiamino:

S la lunghezza del semi-arco AB;

s quella di una sua porzione qualunque AM;

q il peso che gravita su ogni unità di lunghezza dell'arco AB.

Si ha

$$F=q, \qquad \psi=90^\circ,$$

$$\int_s^S F\cos\psi\,.\,ds=0, \qquad \int_s^S F\,\mathrm{sen}\,\psi\,.\,ds=q(S-s),$$

e quindi le generali condizioni d'equilibrio, stabilite nel numero precedente, diventano

$$\left.\begin{aligned} T\frac{dz}{ds}&=Q \\ T\frac{du}{ds}&=V-q(S-s) \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Dividendo ora la seconda per la prima di queste equazioni ed osservando che

$$V=qS,$$

si trova

$$\frac{du}{dz}=\frac{qs}{Q},$$

dalla quale si ricava

$$s\,dz=\frac{Q}{q}\,du, \tag{4}$$

che è l'equazione differenziale della catenaria omogenea secondo la quale deve essere foggiato l'asse dell'arco, affinchè sia equilibrato.

Per trovare ora una relazione finita fra le due coordinate z ed u, si elevino al quadrato le equazioni (3) e si sommino quindi membro a membro. Così procedendo, ed avuto riguardo al trovato valore di V, immediatamente si ottiene

$$T=\sqrt{Q^2+q^2s^2} \tag{5}$$

Se ora si suppone che la pressione T sia quella che ha luogo sulla sezione del solido corrispondente al punto M (*fig.* 145), e se si viene a considerare sulla mezza catenaria AB un punto M' infinitamente vicino al punto M in modo che risulti $MM'=ds$, la pressione in M' è un po' diversa da quella che ha luogo in M, e si può essa esprimere con $T+dT$. L'aumento di pressione dT da altro non può essere prodotto che dal peso $q\,ds$ corrispondente all'arco infinitesimo MM', e quindi deve essere eguale alla componente di questo peso secondo MT, per cui si ha

$$dT=q\,ds.\cos M'MM'';$$

ma $\cos M'MM''=\frac{du}{ds}$, per cui

$$dT=q\,du,$$

la qual equazione, integrata col determinare la costante in modo che per il punto A ossia per $u=0$ sia la pressione T eguale alla reazione orizzontale Q, conduce a questa seconda espressione di T

$$T=qu+Q \qquad (6).$$

I due valori di T dati dall'ultima e dall'equazione (5) si eguaglino fra di loro, si elevino al quadrato i due membri dell'equazione che risulta e si ricavi il valore s. Allora si trova

$$s=\sqrt{u^2+2\frac{Q}{q}u} \qquad (7);$$

ed a motivo della relazione (4) si deduce

$$dz=\frac{Q}{q}\frac{du}{\sqrt{u^2+2\frac{Q}{q}u}},$$

che è l'equazione differenziale del primo ordine della catenaria, espressa per le coordinate z ed u. Integrando quest'equazione e determinando la costante in modo che per $u=0$ sia $z=0$ si ottiene il seguente valore dell'ascissa z espresso per il logaritmo neperiano dell'ordinata u

$$z=\frac{Q}{q}\log\frac{u+\frac{Q}{q}+\sqrt{u^2+2\frac{Q}{q}u}}{\frac{Q}{q}} \qquad (8),$$

la quale, dovendo dare $z=c$ per $u=m$, permette di determinare Q mediante l'equazione

$$c=\frac{Q}{q}\log\frac{m+\frac{Q}{q}+\sqrt{m^2+2\frac{Q}{q}m}}{\frac{Q}{q}} \qquad (9).$$

La determinazione della spinta orizzontale Q mediante l'ultima equazione riesce generalmente operazione talmente laboriosa che i pratici a mala pena s'accingono ad effettuarla, ed in generale torna più spedito di ragionare e di operare come segue. Le catenarie omogenee rappresentate dall'equazione (8) contenente il sol parametro $\frac{Q}{q}$, non altrimenti che i circoli, le parabole, le logaritmiche, ecc., hanno la proprietà di essere tutte simili fra di loro, e quindi ne deriva che, costruendo una di queste curve assumendo per $\frac{Q}{q}$ un valore arbitrario A e prendendo sovr'essa i valori di z', u' ed s' per un punto qualunque della curva, basta accrescere o diminuire tutte queste quantità nella ragione di $A:\frac{Q}{q}$ onde avere per la catenaria di parametro $\frac{Q}{q}$ le coordinate z ed u non che l'arco s pel punto omologo a quello considerato sulla curva di parametro A. Ciò premesso, essendo AB (*fig.* 146) una mezza catenaria tipo costrutta per punti mediante l'equazione (8) fissandosi un valore arbitrario A del parametro $\frac{Q}{q}$ e volendosi trovare il valore di Q corrispondente al caso della catenaria di semicorda data c e di monta pure data m, si costruisca il triangolo rettangolo DCA i cui cateti $\overline{AC}$ e $\overline{CD}$ siano rispettivamente di tante unità, prese sulla scala che servì a costruire la catenaria tipo, quante sono nelle lunghezze c ed m; dal punto d'incontro E dell'ipotenusa AD colla catenaria si conduca l'ordinata EF; si misurino $\overline{AF}$ ed $\overline{FE}$ e siano rispettivamente c' ed m' le loro lunghezze; e finalmente si deduca il valore di Q da una delle due equazioni

$$\frac{Q}{q}=A\frac{c}{c'},$$

$$\frac{Q}{q}=A\frac{m}{m'},$$

la prima delle quali esprime la proporzionalità dei parametri della catenaria da costruirsi e della catenaria tipo alle ascisse di due punti omologhi e la seconda la proporzionalità degli stessi parametri alle ordinate degli stessi punti.

Una volta determinato il parametro $\frac{Q}{q}$, si ottengono le due coordinate z ed u di un punto della catenaria da costruirsi omologo del punto della catenaria tipo le cui coordinate sono z' ed u' mediante le equazioni

$$z = \frac{\frac{Q}{q}}{A} z', \qquad u = \frac{\frac{Q}{q}}{A} u'.$$

Sostituendo il valore di Q, determinato coll'equazione (9) oppure colla costruzione della catenaria tipo, nell'equazione (6), si trova la pressione T in una sezione normale qualunque il cui centro è determinato dall'ordinata u. Questa pressione si riduce a Q per la chiave dell'arco ed acquista il valore particolare T′ dato dall'equazione

$$T' = qm + Q$$

per la sezione d'imposta.

III. *Trovare la curva secondo cui deve essere foggiato l'asse di un arco, affinchè sia equilibrato sotto l'azione di una forza diretta normalmente al detto asse ed uniformemente distribuita sulla sua lunghezza.*

Si ritengano le denominazioni già stabilite nel risolvere il problema I per quanto si riferisce alla corda ed alla monta dell'arco, e si chiami N la forza applicata normalmente all'arco per ogni unità della sua lunghezza.

Considerando un punto qualunque m dell'arco BAC (*fig.* 147), ed immaginando condotta per quel punto la direzione normale della forza riferita all'unità di lunghezza in esso applicata, si ha

$$\psi = NEz = 180^\circ - AEN = 180^\circ - mm'm'',$$

essendo $mm'm''$ uno dei due angoli acuti del triangolo differenziale $mm''m'$ i cui lati sono $\overline{mm''} = dz$, $\overline{m'm''} = du$ ed $\overline{mm'} = ds$. Ora

$$\cos\psi = -\cos mm'm'' = -\frac{du}{ds},$$

$$\operatorname{sen}\psi = \operatorname{sen} m m' m'' = \frac{dz}{ds},$$

$$F = N,$$

$$\int_s^S F\cos\psi \,.\, ds = -\int_u^m N du = -N(m-u),$$

$$\int_s^S F\operatorname{sen}\psi \,.\, ds = \int_z^c N dz = N(c-z);$$

per cui le generali equazioni d'equilibrio del precedente numero danno

$$\left.\begin{aligned} T\frac{dz}{ds} &= Q + N(m-u) \\ T\frac{du}{dz} &= V - N(c-z) \end{aligned}\right\} (10).$$

Dividendo la seconda per la prima di queste equazioni, si ottiene

$$\frac{du}{dz} = \frac{V - N(c-z)}{Q + N(m-u)} \qquad (11),$$

dalla quale, osservando che per $z=0$ ed $u=0$ deve essere $\frac{du}{dz}=0$, si deduce

$$V = Nc \qquad (12).$$

Per trovare la spinta orizzontale Q si ponga nell'equazione (11) il trovato valore di V, e quindi si integri determinando la costante in modo che per $z=0$ sia $u=0$. Così procedendo si trova l'equazione

$$(Q+Nm)u - \frac{1}{2}Nu^2 = \frac{1}{2}Nz^2 \qquad (13),$$

la quale, dovendo essere verificata per $z=c$ ed $u=m$, dà il seguente valore di Q

$$Q=\frac{1}{2}N\frac{c^2-m^2}{m}.$$

L'equazione (13), posta sotto la forma

$$z^2=\frac{2(Q+Nm)}{N}u-u^2,$$

mostra ad evidenza come essa rappresenti una circonferenza di circolo riferito al vertice ed avente il suo centro sull'asse delle u, e quindi come debba essere un arco di circolo la curva BAC secondo cui bisogna foggiare l'asse dell'arco considerato affinchè sia esso equilibrato. Intanto osservando che, chiamando r il raggio dell'accennato arco, fra le quantità c, m ed r si ha la relazione

$$c^2=2mr-m^2,$$

si deduce:

$$r=\frac{c^2+m^2}{2m} \tag{14}$$

per valore del raggio dell'arco quando si conosce la sua semicorda e la sua monta;

$$Q=N(r-m) \tag{15}$$

per valore della spinta orizzontale; e

$$z^2=2ru-u^2 \tag{16}$$

per equazione della circonferenza di circolo cui appartiene l'arco BAC.

Resta ancora da trovarsi il valore di T. Perciò nelle equazioni (10) si sostituiscano i valori di V e di Q dati rispettivamente dalle equazioni (12) e (16), si elevino al quadrato, si sommino e finalmente dall'equazione che risulta si ricavi il valore di T, il quale trovasi espresso da

$$T = \sqrt{N^2(r-u)^2 + N^2 z^2} = N\sqrt{r^2 + z^2 - (2ru - u^2)},$$

o più semplicemente, a motivo dell'equazione (16), da

$$T = Nr.$$

Questo valore di T, essendo costante, mostra come la pressione non varii da sezione a sezione dell'arco.

176. **Osservazioni sugli archi circolari a monta molto depressa ed a sezione normale costante.** — Prendendo il valore della spinta orizzontale Q quale venne trovato al numero 171 pel caso di un arco circolare caricato di un peso uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale, sviluppando in serie i seni ed i coseni di Φ e trascurando le potenze della lunghezza dell'arco Φ superiori alla quinta nel fare questi sviluppi, si può avere un'espressione approssimata della spinta orizzontale Q assai bene adatta per gli archi circolari a monta molto depressa, a sezione costante e caricati di pesi uniformemente distribuiti sulla loro proiezione orizzontale. Le serie che danno il seno ed il coseno di un arco Φ in funzione della lunghezza dell'arco stesso sono

$$\operatorname{sen}\Phi = \Phi - \frac{\Phi^3}{1.2.3} + \frac{\Phi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\Phi^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots,$$

$$\cos\Phi = 1 - \frac{\Phi^2}{1.2} + \frac{\Phi^4}{1.2.3.4} - \frac{\Phi^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots,$$

le quali, qualora credasi l'arco Φ abbastanza piccolo da potersi trascurare le sue potenze superiori alla quinta, si riducono a

$$\operatorname{sen}\Phi = \Phi - \frac{\Phi^3}{6} + \frac{\Phi^5}{120},$$

$$\cos\Phi = 1 - \frac{\Phi^2}{2} + \frac{\Phi^4}{24}.$$

Sostituendo questi valori di sen Φ e di cos Φ nella citata espressione della spinta Q, facendo i prodotti e trascurando, come si è detto, le potenze dell'arco Φ superiori alla quinta, si trova

$$Q=\frac{pr}{2}\,\frac{+\left(3\Phi-\frac{3}{2}\Phi^3+\frac{1}{8}\Phi^5\right)-(6\Phi^3-5\Phi^5)-\left(3\Phi-\frac{1}{2}\Phi^3+\frac{1}{40}\Phi^5\right)+(7\Phi^3-\frac{7}{2}\Phi^5)}{+3\Phi+(6\Phi-6\Phi^3+2\Phi^5)-\left(9\Phi-6\Phi^3+\frac{6}{5}\Phi^5\right)}=pr.$$

Ora, se in un circolo di raggio r si considera un arco di semicorda c e di monta m, si ha dalla geometria la relazione

$$c^2=2mr-m^2,$$

la quale, potendosi trascurare m^2 a fronte di $2mr$ allorquando si tratta di un arco circolare a monta molto depressa, si riduce a

$$c^2=2mr,$$

d'onde

$$r=\frac{c^2}{2m}.$$

Ponendo questo valore approssimato di r nell'ultima trovata espressione di Q si deduce

$$Q=\frac{pc^2}{2m},$$

che è lo stesso valore della spinta orizzontale Q che venne trovata nel risolvere il problema I del precedente numero; cosicchè un arco circolare a monta molto depressa e caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale si trova, per rapporto alla spinta orizzontale, nelle stesse condizioni di un arco equilibrato.

Per quanto si è detto al numero 171, le pressioni massime riferite all'unità di superficie in un arco circolare a monta molto depressa, con sezione normale costante e caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale, hanno luogo alla chiave ed all'imposta, e queste due pressioni sono rispettivamente date dalle formole (8) e (12) del citato numero. Ora, se nelle stesse formole, facendo l'ipotesi di un arco il quale abbia monta assai depressa, si pone $\cos\Phi = 1$ e se trascurasi un termine moltiplicato per $\operatorname{sen}^2\Phi$, si trova che le pressioni totali supposte uniformemente ripartite sulle sezioni a cui si riferiscono, sono eguali alla spinta orizzontale Q; ed essendo questo conforme a quanto si è notato sul finire del problema I del numero precedente, si può conchiudere: che un arco circolare a monta molto depressa e caricato di un peso uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale è, anche per rapporto alle pressioni massime che hanno luogo alla chiave ed all'imposta, nelle stesse condizioni di un arco equilibrato.

Quanto si è detto per rapporto al trovarsi pressochè nelle condizioni d'un arco equilibrato un arco circolare a monta molto depressa, con sezione costante e caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale, si estende dai pratici anche ad un arco circolare a monta molto depressa, con sezione costante e caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza. Infatti, essendo la lunghezza di un tal arco poco diversa dalla sua corda ed essendo sempre piccoli gli angoli che le tangenti nei diversi suoi punti fanno coll'orizzontale, senza notevole errore si può ammettere che un peso uniformemente distribuito sulla lunghezza dell'arco sia identico ed agisca come un peso uniformemente distribuito sulla sua corda.

177. **Accorciamento subito dall'asse di un arco collocato su due appoggi posti allo stesso livello e simmetrico rispetto al piano verticale perpendicolare alla orizzontale che unisce i centri delle due sezioni d'imposta.** — Su una sezione qualunque di un arco equilibrato ha sempre luogo una pressione diretta tangenzialmente all'asse dell'arco stesso, la quale ha per effetto di produrre in esso un accorciamento. Per valutare quest'accorciamento si consideri sull'asse primitivo del solido arcuato un archetto $\mathrm{M}m = \mathrm{d}s$ (*fig.* 144), il quale pel fatto della compressione verrà ridotto alla minor lunghezza $\mathrm{M}m' = \mathrm{d}s'$. L'arco $\mathrm{d}s$ avrà così subìto un accorciamento $\mathrm{d}s - \mathrm{d}s'$, sarà in esso avvenuto un accorciamento proporzionale $\frac{\mathrm{d}s - \mathrm{d}s'}{\mathrm{d}s}$, e la forza che avrà prodotto quest'accorciamento proporzionale sarà la pressione T diretta secondo la tangente in M, per modo che (num. 29) si avrà l'equazione

$$T = E'' \Omega \frac{ds - ds'}{ds},$$

dove E″ è il coefficiente d'elasticità relativo alla compressione per la sostanza di cui l'arco è formato ed Ω la sezione normale dell'arco stesso nel punto M. Ricavando dalla stabilita equazione il valore di $ds - ds'$, si ottiene

$$ds - ds' = \frac{1}{E''} \frac{T}{\Omega} ds,$$

e quindi, integrando fra i limiti $s = 0$ ed $s = S$ per avere il totale accorciamento $S - S'$ subito dal mezzo arco AB, si ha

$$S - S' = \frac{1}{E''} \int_0^S \frac{T}{\Omega} ds \qquad (1).$$

Nello stabilimento degli archi equilibrati si determinano generalmente le superficie delle diverse sezioni trasversali in modo che in esse si verifichi la stessa pressione riferita all'unità di superficie, calcolando Ω mediante l'equazione di stabilità (num. 40)

$$T = n'' R'' \Omega \qquad (2);$$

ed in questo caso l'equazione che dà l'accorciamento $S - S'$ subito dal mezzo arco AB si riduce a

$$S - S' = \frac{n'' R''}{E''} S.$$

Quando il valore di Ω non venne determinato per le diverse sezioni normali dell'arco mediante l'equazione (2), per calcolare coll'equazione (1) l'accorciamento $S - S'$ è necessario conoscere T ed Ω in funzione dell'arco s, oppure T, Ω ed s in funzione di una delle due coordinate ortogonali dell'asse del solido.

L'equazione (1) non solo si presta al calcolo dell'accorciamento subito dall'asse di un mezzo arco equilibrato, ma ben anche a quello subito dall'asse di un arco a sezione costante, come quelli di cui si è tenuto discorso nel precedente capitolo. Se Ω è costante, il valore di $S'-S$ può essere scritto

$$S'-S=\frac{1}{E''\Omega}\int_0^S T\,d\,s,$$

e per ottenere il valore di $S'-S$ si richiede che la forza tangenziale T sia data in funzione di s, oppure che si conoscano T ed s in funzione di una stessa variabile riferentesi ai diversi punti dell'asse primitivo del solido.

CAPITOLO XI.

Verificazione della stabilità dei vôlti in muratura.

178. **Assunto del presente capitolo.** — La figura e le dimensioni generali di una vôlta sono sempre determinate dalla destinazione dell'edifizio di cui essa fa parte, e quindi si devono considerare come dati l'apertura, la superficie d'intrados, l'altezza dei piedritti e la distribuzione dei pesi che la vôlta deve sopportare. Dietro l'esempio di vôlte analoghe a quella che vuolsi progettare, già costrutte e che hanno fatto buona prova, si fissano gli spessori che par conveniente assegnare dalla chiave alle imposte, e così si ultima il progetto della vôlta di cui vuolsi studiare la stabilità. Fatto questo, il costruttore s'accinge a verificare se la vôlta progettata è tale da mantenersi in equilibrio sui suoi piedritti quando sarà costrutta, ed a studiare le modificazioni da introdursi nel suo progetto qualora non riscontri in esso la necessaria stabilità.

Il metodo di verificazione di stabilità delle vôlte, che verrà indicato in questo capitolo, si applica soltanto a quelle vôlte grosse le quali devono mantenersi in equilibrio per mutuo contrasto dei materiali, e quindi si considererà soltanto il caso delle grosse vôlte a botte le quali si possono dire le sole che avviene di dover considerare nella pratica delle costruzioni. Tutte le altre vôlte, che generalmente hanno tali spessori da doversi annoverare fra le vôlte sottili, anzichè per mutuo contrasto dei materiali, si reggono per tenacità dei cementi; e lo studio della loro resistenza, che per le vôlte a botte si può fondare sui principii esposti nei due ultimi capitoli parlando degli archi elastici, costituisce un problema il quale presenta delle serie difficoltà e che in modo plausibile non venne ancora risolto per tutte le vôlte sottili diverse dalle vôlte a botte.

179. **Esperienze ed osservazioni sul modo con cui avviene la rottura nelle vôlte a botte.** — Le esperienze che finora vennero eseguite sopra modelli di vôlte a botte caricate pel di sopra, e le osservazioni che da parecchi ingegneri vennero fatte sopra arconi in pericolo di cadere e sopra i materiali di arconi già rovinati, hanno dimostrato che la rottura principalmente avviene, o per strisciamento, o per rotazione, o per la combinazione dei due fenomeni di strisciamento e di rotazione.

Una vôlta a botte può rompersi per strisciamento in due distinti modi: o cadendo all'indentro due parti A e B (*fig.* 148), strisciando ciascuna su un giunto inclinato, ed innalzandosi una piccola parte C nel mezzo; o scorrendo all'infuori due parti A e B (*fig.* 149) strisciando ciascuna di esse su un giunto orizzontale ed abbassandosi la parte di mezzo C.

La rottura per rotazione si manifesta generalmente in tre distinte maniere: quando la vôlta non è di monta molto rialzata nè di monta molto depressa o che è non molto caricata sui fianchi, il vertice tende ad abbassarsi ed i fianchi a sollevarsi, e la vôlta si scompone in quattro parti A, A′, B e B′ (*fig.* 150) aprendosi alla chiave verso l'intrados, sui fianchi verso l'estrados ed all'imposta oppure lungo i piedritti verso l'intrados; quando la vôlta è a monta piuttosto rialzata oppure a monta qualunque, ma molto caricata sui fianchi, si manifesta invece una tendenza al sollevamento del vertice ed all'abbassamento dei fianchi, e, se avviene la rottura, essa si manifesta per scomposizione del masso murale nelle quattro parti A, A′, B e B′ (*fig.* 151) aprendosi alla chiave verso l'estrados, sui fianchi verso l'intrados ed all'imposta verso l'estrados; quando la vôlta è a monta molto depressa, la rottura tende generalmente a farsi con aprimento alla chiave verso l'intrados, con aprimento all'imposta verso l'estrados e quindi con abbassamento del vertice della vôlta.

Si è ancora osservato che nella rottura delle vôlte a botte talvolta incomincia a verificarsi aprimento alla chiave in seguito ad un piccolo allontanamento dei piedritti, ciascuno dei quali viene così a strisciare su un giunto orizzontale. Il masso murale posto al di sopra del piano su cui avviene lo strisciamento si divide allora in quattro parti, due delle quali, quelle concorrenti alla chiave, tendono a crollare all'indentro girando intorno ad uno spigolo posto all'intrados.

180. **Spinta orizzontale**. — In una vôlta a botte composta di due parti eguali separate fra di loro da un giunto verticale, l'azione del peso sopportato dalla vôlta produce perpendicolarmente a questo giunto, fra le due metà, una pressione, per cui si può immaginare soppressa mezza vôlta ed in sua vece sostituita una forza orizzontale (*fig.* 152) eguale all'indicata pressione, e che prende il nome di *spinta orizzontale*. Se questa spinta è tanto grande da essere capace di spingere all'infuori la totalità od anche solamente una parte della mezza vôlta a cui si suppone applicata, oppure se essa è così piccola da non poter impedire che la detta mezza vôlta del tutto od in parte venga a cadere all'indentro, il sistema non può stare in equilibrio; ed il contrario avviene quando la spinta orizzontale ha tal valore da impedire che parte alcuna della vôlta venga a cadere all'indentro, senza spingere qualche altra parte all'infuori.

181. **Punto d'applicazione della spinta orizzontale, e punto d'applicazione della pressione sopra il giunto nel quale trovasi lo spigolo di rotazione**. — Nel verificare la stabilità di una vôlta a botte si supporrà che la vôlta si trovi a tal punto da essere imminente l'apparizione dei primi segni di rotazione, e si cercherà se, anche in questa sfavorevole circostanza, trovasi in equilibrio.

In una vôlta a botte stanno per manifestarsi i primi segni di rotazione, quando, tendendo essa ad aprirsi alla chiave verso l'intrados (*fig.* 150) o verso l'estrados (*fig.* 151), incominciano le due parti A ed A′ a staccarsi in modo da aver luogo fra loro una mutua pressione, la quale si può supporre ripartita sul giunto CD in guisa che sia nullo il valore della pressione riferita all'unità di superficie lungo la generatrice D, secondo la quale l'aprimento incomincia a verificarsi, che abbia un valor massimo la pressione riferita all'unità di superficie lungo la generatrice C intorno alla quale sta per avvenire la rotazione, e che talmente cresca da D verso C da stare la pressione riferita all'unità di superficie in un punto qualunque E a quella che ha luogo in C come la distanza $\overline{DE}$ sta alla distanza $\overline{DC}$. Ammessa quest'ipotesi di ripartizione della pressione totale sul giunto verticale CD, che si suppone rappresentato nella figura 153, ne deriva che, considerando il vôlto siccome un solido prismatico nelle vicinanze del detto giunto, fra la distanza

$\overline{OD}=V$ del centro di superficie O del rettangolo GHIK dalla retta GH su cui è nulla la pressione riferita all'unità di superficie, la distanza $\overline{OF}=V_1$ del punto d'applicazione della pressione su tutto il giunto dal detto centro O ed il quadrato G^2 del semi-asse dell'ellisse centrale d'inerzia disposto secondo CD pel caso della sezione rettangolare, si deve avere la relazione (num. 127 e 134)

$$V=\frac{G^2}{V_1},$$

la quale, essendo $V=\frac{1}{2}\overline{DC}$ e $G^2=\frac{1}{12}\overline{DC}^2$, conduce a trovare

$$V_1=\overline{OF}=\frac{1}{6}\overline{DC},$$

per cui

$$\overline{CF}=\frac{1}{2}\overline{DC}-\frac{1}{6}\overline{DC}=\frac{1}{3}\overline{DC},$$

ossia il punto d'applicazione della spinta orizzontale, rappresentata dalla pressione che ha luogo sul giunto verticale CD (*fig.* 150 e 151), si può supporre ad 1/3 dell'altezza del detto giunto a partire dallo spigolo C intorno al quale tende ad aver luogo la rotazione.

Quanto si è conchiuso per il punto d'applicazione della spinta orizzontale sul giunto verticale posto alla chiave del vôlto, si può anche estendere ai punti d' applicazione delle pressioni su quei giunti inclinati come MN, contenenti gli spigoli intorno ai quali inferiormente tendono a rotare le due parti di vôlta A ed A', che l'una contro l'altra vengono ad appoggiarsi alla chiave.

182. **Formole che servono a verificare la stabilità di una vôlta a botte.** — Sia una vôlta a botte in cui la rottura tende a manifestarsi nel modo sotto il quale più di frequente si presenta nella pratica, ossia per aprimento alla chiave verso l'intrados e per aprimento sui fianchi verso l'estrados, e, trascurando coesione ed aderenza delle malte, vogliasi trovare quali sono le spinte orizzontali che si devono supporre applicate contro il giunto verticale AB (*fig.* 152), nel suo punto H quando una data parte ABCD della vôlta è in procinto di staccarsi dalla parte sottostante: 1° per

rotazione attorno allo spigolo d'intrados rappresentato in D; 2° per rotazione attorno allo spigolo d'estrados rappresentato in C; 3° per scorrimento da C verso D lungo il giunto CD; 4° per scorrimento da D verso C lungo lo stesso giunto.

Si chiamino:

a l'altezza $\overline{AB}$ del giunto verticale alla chiave;

a' la lunghezza $\overline{DC}$ del giunto inclinato;

b e b' le distanze orizzontali $\overline{DE}$ e $\overline{CF}$ fra gli spigoli rappresentati in D ed in C ed il punto d'applicazione G del peso della parte di vôlta rappresentata in ABCD e del sovraccarico corrispondente;

c e c' le differenze di livello od altezze $\overline{AL}$ ed $\overline{AK}$ fra la generatrice suprema dell'intrados e gli stessi spigoli;

α l'angolo COB che il piano del giunto CD fa colla verticale;

P il peso della parte di vôlta rappresentata in ABCD e del sovraccarico ad essa corrispondente;

Q, Q', Q'' e Q''' le quattro spinte orizzontali domandate;

f il coefficiente d'attrito per la materia di cui è formato il vôlto.

La spinta orizzontale Q, corrispondente al caso in cui la parte di vôlta ABCD sia in procinto di rotare intorno allo spigolo d'intrados rappresentato in D, si ottiene osservando che le forze ad essa applicate sono: il peso P, la spinta Q e la reazione R che la parte di vôlta sottostante al giunto DC produce contro la parte superiore. Il peso P trovasi applicato al centro di gravità G, la spinta Q, per quanto si è detto del precedente numero, si può supporre applicata in H ad 1/3 di $\overline{BA}$ a partire dal punto B; e la reazione R, anche per quanto si è detto nel precedente numero, si può supporre applicata in I ad 1/3 di $\overline{DC}$ a partire dal punto D. La reazione R è eguale e direttamente contraria all'azione che la parte di vôlta sottostante al giunto DC riceve dalla parte superiore al detto giunto, ed ammette due componenti, una orizzontale e l'altra verticale rispettivamente eguali a Q ed a P, perchè devono farsi equilibrio tanto le forze orizzontali quanto quelle verticali applicate al corpo ABCD.

La distanza orizzontale $\overline{IM}$ del punto I dallo spigolo rappresentato nel punto D è data da

$$\overline{IM} = \frac{1}{3} a' \operatorname{sen} \alpha;$$

la distanza verticale $\overline{MD}$ dello stesso punto dal medesimo spigolo vien espressa da

$$\overline{MD}=\frac{1}{3}a'\cos\alpha;$$

e finalmente per l'equilibrio di rotazione del masso ABCD intorno allo spigolo rappresentato in D deve essere verificata l'equazione

$$Q\left(\frac{2}{3}a+c\right)-Pb-\frac{1}{3}Qa'\cos\alpha-\frac{1}{3}Pa'\,\mathrm{sen}\,\alpha=0,$$

dalla quale si ricava

$$Q=P\frac{3b+a'\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2a+3c-a'\cos\alpha} \qquad (1).$$

La spinta orizzontale Q', per il caso in cui la parte di vôlta ABCD sia in procinto di rotare attorno allo spigolo d'estrados rappresentato in C, si ottiene con un metodo in tutto analogo a quello seguito per trovare la spinta orizzontale Q; e, ponendo che la reazione prodotta dalla parte di vôlta sottostante al giunto CD contro il masso ABCD sia applicata ad 1/3 di $\overline{CD}$ a partire dal punto C, si ha per esprimere l'equilibrio di rotazione attorno ad detto spigolo la condizione

$$Q'\left(\frac{2}{3}a+c'\right)-Pb'+\frac{1}{3}Q'a'\cos\alpha+\frac{1}{3}Pa'\,\mathrm{sen}\,\alpha=0,$$

dalla quale si deduce

$$Q'=P\frac{3b'-a'\,\mathrm{sen}\,\alpha}{2a+3c'+a'\cos\alpha} \qquad (2).$$

La spinta orizzontale Q'', per il caso in cui la parte di vôlta ABCD sia in procinto di scorrere in basso strisciando lungo il giunto CD, si trova osservando: che sono rispettivamente $Q''\,\mathrm{sen}\,\alpha$ e $Q''\cos\alpha$ le due componenti della forza Q'' parallela e normale al piano dell'indicato giunto, $P\cos\alpha$ e $P\,\mathrm{sen}\,\alpha$ le componenti analoghe del peso P; che vale $P\cos\alpha-Q''\,\mathrm{sen}\,\alpha$ la forza che tende a far scorrere in basso il masso ABCD ed $f\,(Q''\cos\alpha+P\,\mathrm{sen}\,\alpha)$ la forza che si oppone a questo scorrimento; e che per conseguenza si ha l'equazione d'equilibrio

$$P\cos\alpha - Q''\operatorname{sen}\alpha = f(Q''\cos\alpha + P\operatorname{sen}\alpha),$$

d'onde

$$Q'' = P\frac{\cos\alpha - f\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + f\cos\alpha} \qquad (3).$$

Finalmente la spinta orizzontale Q''' per il caso in cui la parte di vôlta ABCD sia in procinto di scorrere da D verso C lungo il giunto CD si ottiene in modo analogo a quello tenuto per avere la spinta Q''. La forza che tende a produrre lo scorrimento è $Q'''\operatorname{sen}\alpha - P\cos\alpha$, la forza che a questo scorrimento si oppone è $f(Q'''\cos\alpha + P\operatorname{sen}\alpha)$, per cui la condizione d'equilibrio è

$$Q'''\operatorname{sen}\alpha - P\cos\alpha = f(Q'''\cos\alpha + P\operatorname{sen}\alpha),$$

dalla quale si ricava

$$Q''' = P\frac{\cos\alpha + f\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\alpha - f\cos\alpha} \qquad (4).$$

183. **Procedimento pratico per verificare la stabilità di una vôlta a botte.** — Si incomincia dal rappresentare in disegno, ed in una scala tanto grande che non abbiansi a temere degli errori di qualche importanza nelle operazioni grafiche che si devono eseguire, una parte di vôlta compresa fra due piani verticali perpendicolari alla sua lunghezza, e distanti di 1 metro l'uno dall'altro. Questo disegno conterrà: il profilo ABCD (*fig.* 154) della metà della vôlta propriamente detta; il profilo ADEXZGF di un piedritto; il profilo CHIED del riempimento di muratura; il profilo HLMI di un masso fittizio di muratura in modo che il suo peso abbia sul vôlto la stessa azione, che ha il peso di un riempimento, ben sovente esistente sul primo riempimento ed avente peso specifico diverso da quello della muratura; e finalmente il profilo LNOM pure di un masso fittizio di muratura determinato in modo che il suo peso produca lo stesso effetto del massimo carico accidentale che sulla vôlta deve gravitare. Fatto questo, si divide il profilo della vôlta propriamente detta ABCD, mediante linee dirette secondo i suoi giunti; ed al di sopra di ciascuno dei punti di divisione dell'estrados si conducono altrettante linee verticali che si considerano siccome altrettanti giunti possibili di rottura. Prendendo per unità di lunghezza

il metro e per unità di superficie il metro quadrato, si trovano: le lunghezze dei giunti $\overline{BC}$, $\overline{b_1 c_1}$, $\overline{b_2 c_2}$, $\overline{b_3 c_3}$, ...; le superficie delle diverse parti $BNn_1c_1b_1$, $BNn_2c_2b_2$, $BNn_3c_3b_3$,........, non che i loro centri di superficie g_1, g_2, g_3, ...; le distanze orizzontali fra i centri g_1, g_2, g_3, ..., ed i punti b_1 e c_1, b_2 e c_2, b_3 e c_3, ..., coll'avvertenza di considerare come negative quelle distanze che cadono a sinistra dei punti collocati sull'intrados; le distanze verticali fra il punto B ed i punti b_1 e c_1, b_2 e c_2, b_3 e c_3, ..., valutando come negative quelle relative ai punti dell'estrados che trovansi al di sopra dell'orizzontale condotta per B; e finalmente gli angoli che i diversi giunti b_1 c_1, b_2 c_2, b_3 c_3, ..., fanno colla verticale.

Chiamando

a l'altezza $\overline{BC}$ del giunto alla chiave,

a'_1, a'_2, a'_3, ... le lunghezze dei giunti inclinati b_1 c_1, b_2 c_2, b_3 c_3, ...,

b_1, b_2, b_3, ... le distanze orizzontali dei centri di gravità g_1, g_2, g_3, ... dai punti rappresentati sulla figura in b_1, b_2, b_3, ...,

c_1, c_2, c_3, ... le differenze di livello fra il punto culminante B dell'intrados ed i punti b_1, b_2, b_3, ...,

α_1, α_2, α_3, ... gli angoli che i diversi giunti b_1 c_1, b_2 c_2, b_3 c_3, ... fanno alla verticale,

S_1, S_2, S_3, ... la superficie delle diverse parti $BNn_1c_1b_1$, $BNn_2c_2b_2$, $BNn_3c_3b_3$ ....,

Π il peso del metro cubo di muratura,

P_1, P_2, P_3, ... i pesi dei diversi massi murali rappresentati in $BNn_1c_1b_1$, $BNn_2c_2b_2$, $BNn_3c_3b_3$, ... ed espressi rispettivamente dai prodotti ΠS_1, ΠS_2, ΠS_3, ...,

mediante la formola (1) del numero precedente, in cui si sostituiranno per a' le lunghezze a'_1, a'_2, a'_3, ..., per b le lunghezze b_1, b_2, b_3, ..., per c le lunghezze c_1, c_2, c_3, ..., per α gli angoli α_1, α_2, α_3, ... e per P i pesi P_1, P_2, P_3, ...; si potranno trovare le spinte corrispondenti Q_1, Q_2, Q_3, ... fino a quella che corrisponde al masso BNSDA. Costruendo una curva le cui ascisse siano i valori degli angoli α_1, α_2, α_3, ... e le cui ordinate i corrispondenti valori Q_1, Q_2, Q_3, ..., l'ordinata massima di questa curva rappresenterà la massima delle spinte orizzontali possibili nella vôlta, e la sua ascissa farà conoscere la posizione del giunto a cui corrisponde questa spinta massima Q_m. Ordinariamente non si costruisce la curva di cui or ora si è parlato e si prende per valore di Q_m il massimo di tutti i valori di Q_1, Q_2, Q_3, ...

Una volta trovato il valore di Q_m bisogna accertarsi se esso non è capace di rovesciare la vôlta facendone rotare una sua parte attorno ad uno dei suoi spigoli c_1, c_2, c_3, ... posti all'estrados. Perciò, essendo

b_1', b_2', b_3', ... le distanze orizzontali dei centri di gravità g_1, g_2, g_3, ... dai punti c_1, c_2, c_3, ...,

c'_1, c'_2, c'_3, ... le differenze di livello fra il punto culminante B dell'intrados ed i punti c_1, c_2, c_3, ...,

si sostituiscano nella formola (2) del numero precedente, per a' le lunghezze a'_1, a'_2, a'_3, ..., per b' le lunghezze b'_1, b'_2, b_3', ..., per c' le lunghezze c'_1, c'_2, c'_3, ..., per α gli angoli α_1, α_2, α_3, ..., per P i pesi P_1, P_2, P_3, ...; si calcolino le corrispondenti spinte Q'_1 Q'_2 Q'_3, ... per portare le parti di vôlta $BNn_1c_1b_1$, $BNn_2c_2b_2$, $BNn_3c_3b_3$, ... in procinto di rotare attorno agli spigoli c_1, c_2, c_3, ... situati sull'estrados; e se tutte quante queste spinte sono maggiori di Q_m è sicuro che la massima delle spinte possibili non può produrre rovesciamento di una parte di vôlta facendola rotare intorno ad uno spigolo posto sul suo estrados.

Bisogna ora verificare se nessuna delle parti di vôlta $BNn_1c_1b_1$, $BNn_2c_2b_2$, $BNn_3c_3b_3$, ... può cadere in basso scorrendo sui giunti inclinati b_1c_1, b_2c_2, b_3c_3, ... Perciò nell'equazione (3) del numero precedente si pongano successivamente per α gli angoli α_1, α_2, α_3, ..., per P i pesi P_1, P_2, P_3, ..., e si trovino le spinte orizzontali Q''_1, Q''_2, Q''_3, ... da applicarsi al giunto verticale BC, affinchè le dette parti di vôlta siano in procinto di scorrere in basso. Questo scorrimento non avrà luogo se il valore di Q_m supera tutti quelli che si trovano per Q''_1, Q''_2, Q''_3, ...

Finalmente bisogna accertarsi che la spinta massima Q_m non è capace di far scorrere all'insù una delle parti di vôlta $BNn_1c_1b_1$, $BNn_2c_2b_2$, $BNn_3c_3b_3$, ... Per far questo nell'equazione (4) del numero precedente bisogna successivamente porre gli angoli α_1, α_2, α_2, ... invece di α ed i pesi P_1, P_2, P_3, ... invece di P; e calcolare le spinte Q'''_1, Q'''_2, Q'''_3, ... necessarie a portare le dette parti di vôlta in procinto di scorrere all'insù. Non sarà a temersi questo scorrimento allorquando tutte le spinte così calcolate risultano maggiori in Q_m.

Allorquando il metodo di verificazione or ora esposto conduce a riconoscere che la vôlta progettata non può stare in equilibrio, bisogna variare la sua sezione trasversale; accingersi quindi ad una nuova verificazione, e così continuare a variare ed a verificare, finchè si arriva ad un tal profilo da presentare una vôlta in equilibrio in seguito al dato metodo di verificazione.

La posizione del giunto cui corrisponde la spinta massima Q_m dipende dalla forma della curva d'intrados, dagli spessori che ha la vôlta e dai sovraccarichi che essa sopporta. L'esperienza però ed il metodo di verificazione che venne esposto dimostrano che ordinariamente questo giunto si trova a circa 30° a partire dall'imposta per le vôlte a botte a tutta monta; a circa 50° a partire dall'imposta per le vôlte a monta depressa aventi per direttrice dell'intrados una mezza ovale la cui monta sia fra 1/3 ed 1/4 della corda; e finalmente all'imposta per le vôlte a monta depressa aventi per curva direttrice della superficie d'intrados un arco di circolo d'ampiezza minore di 120°.

184. **Verificazione della stabilità dei piedritti di una vôlta a botte.** — La verificazione della stabilità dei piedritti consiste nell'accertarsi se la spinta orizzontale Q_m, determinata come si è detto nel precedente numero, non è capace di produrre, nè un principio di scorrimento della mezza vôlta sopra un giunto orizzontale AX (*fig.* 154) posto al livello dell'imposta A o di poco al disotto, nè un principio di rovesciamento del piedritto colla mezza vôlta che esso sopporta facendolo rotare attorno allo spigolo esterno G della sua base inferiore.

Per verificare se non può aver luogo principio di scorrimento, da A verso X, sul giunto orizzontale AX, nell'equazione (4) del numero 182, pongasi per P il total peso del masso ABNOX e si faccia $\alpha = 90^\circ$. Se trovasi un valore di Q''' maggiore di Q_m, è segno che per avere un principio di scorrimento sul giunto AX è necessaria una spinta orizzontale maggiore di Q_m, e che per conseguenza questo scorrimento riesce impossibile. Quando Q''' risulta minore di Q_m, quest'ultima forza è sufficiente a produrre lo scorrimento, e per opporvisi è necessario ingrossare il piedritto. — Per determinare l'aumento di grossezza $\overline{XX'} = x$ da assegnarsi al piedritto per una data altezza $\overline{XU} = h$, affinchè sia lontano il pericolo di scorrimento sul giunto AX, si osservi che la forza la quale tende a produrre lo scorrimento è la spinta Q_m, che la forza la quale opponesi allo scorrimento è l'attrito che sviluppasi su AX', rappresentato da $f(P + \Pi h x)$, essendo Π il peso del metro cubo di muratura, che finalmente il valore di x può essere determinato coll'equazione di stabilità

$$Q_m = n_1^{IV} f(P + \Pi h x),$$

dalla quale si ricava

$$x = \frac{1}{h\Pi}\left(\frac{Q_m}{n_1^{IV} f} - P\right),$$

essendo n_1^{IV} un coefficiente di stabilità il cui valore va assunto come si è detto al numero 81.

Per verificare se non può aver luogo un principio di rovesciamento del piedritto e della mezza vôlta che esso sopporta per rotazione attorno allo spigolo esterno G della sua base inferiore FG, nell'equazione (2) del numero 182 pongasi: per P il peso di tutto il masso murale sovrastante al piano orizzontale FG; per b' la distanza orizzontale del punto d'applicazione di questo peso dallo spigolo G; per c' l'altezza del punto B sul punto G; per a' la larghezza FG; e 90° invece dell'angolo α. Se trovasi un valore di Q' maggiore di Q_m, evidentemente non può avvenire nella vôlta principio di rovesciamento, giacchè la forza Q_m che trovasi applicata al sistema non raggiunge la forza Q' che è il limite inferiore di quelle che sono capaci di produrlo. Se invece Q' risulta minore di Q_m, è questa sufficiente a produrre nel sistema un principio di rovesciamento, e per opporvisi è necessario ingrossare il piedritto. — Per trovare l'aumento di grossezza $\overline{GG'} = X$ da assegnarsi al piedritto per una stabilita altezza $\overline{GZ} = H$, affinchè il sistema trovisi in buone condizioni di stabilità si osservi: che il peso del prisma di muratura GZZ'G' vale $\Pi H X$; che la componente verticale della reazione esercitata dalle fondazioni contro la faccia G'F, la qual reazione si suppone applicata ad 1/3 di G'F a partire da G', è $P + \Pi H X$; che il momento rovesciante è

$$Q_m\left(\frac{2}{3}a + c'\right);$$

che il momento resistente vale

$$P(b' + X) + \frac{1}{2}\Pi H X^2 - \frac{1}{3}(a' + X)(P + \Pi H X);$$

e finalmente che l'equazione di stabilità relativa al rovesciamento, mediante la quale si può trovare X, risulta

$$Q_m\left(\frac{2}{3}a+c'\right)=\nu\left[P(b'+X)+\frac{1}{2}\Pi H X^2-\frac{1}{3}(a'+X)(P+\Pi H X)\right],$$

nella quale si deve assumere per valore del coefficiente di stabilità ν una frazione assai prossima all'unità od anche l'unità stessa, giacchè si è trascurata l'aderenza delle malte, la quale non può a meno che avere qualche benefica influenza sulla resistenza al rovesciamento. Trasportando tutti i termini in un sol membro, ordinando secondo le potenze della lettera X e facendo andar via i denominatori, l'ultima equazione si riduce a

$$\nu\Pi H X^2+2\nu(2P-a'\Pi H)X$$
$$+2\left[\nu P(3b'-a')-Q_m(2a+3c')\right]=0,$$

dalla quale, ponendo

$$\nu\Pi H=A,$$

$$\nu(2P-a'\Pi H)=B,$$

$$2\left[\nu P(3b'-a')-Q_m(2a+3c')\right]=C,$$

si ricava

$$X=\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{A}.$$

185. **Verificazione della stabilità di una vôlta a botte e dei suoi piedritti sotto il rapporto della resistenza allo schiacciamento.** — Par fare questa verificazione è necessario conoscere, per ciascuno dei giunti, in cui si è scomposta la vôlta onde fare la verificazione del numero 183, nonchè per alcune sezioni orizzontali dei piedritti, quali sono i punti d'applicazione delle pressioni che su essi esercitano le parti di volta sovrastanti, per poi passare a dedurre la massima pressione riferita all'unità di superficie nel modo già adottato risolvendo il problema I del numero 147.

Sia ABCD (*fig.* 155) una parte qualunque di vôlta a botte, nella quale si è supposto poter avvenire la rottura per aprimento alla chiave verso l'intrados, e per cui vennero determinate, come si è detto nel già citato numero 185, la forza verticale P rappresentante il peso della detta parte di vôlta aumentato di tutti i carichi che su essa si trovano, la distanza di questa forza dal punto D e quindi anche dal piano verticale AB, e la spinta orizzontale Q_m applicata nel punto H posto ad 1/3 dell'altezza $\overline{BA}$ a partire dal punto B. Immaginando trasportate sulle loro rispettive direzioni le due forze P e Q_m fino a trovarsi applicate nel punto E in cui la orizzontale Ho passante per H incontra la verticale vv' passante pel punto d'applicazione del peso P, la pressione che la parte di vôlta ABCD esercita sul giunto CD, la qual pressione è eguale e direttamente contraria alla reazione che la detta parte di vôlta riceve dalla parte sottostante, è rappresentata in intensità e direzione dalla diagonale del rettangolo EQ_mRP i cui lati hanno lunghezze proporzionali alle due forze P e Q_m, ed il punto d'applicazione della detta pressione sul giunto CD è l'incontro F della direzione dell'accennata diagonale colla retta CD. Ora, trovandosi la curva d'intrados ADI riferita a due assi coordinati Ax ed Ay, orizzontale il primo e verticale il secondo, e conoscendosi l'altezza $\overline{AH}$ del punto H sull'origine A, nonchè la distanza $\overline{EH}$ della verticale vv' dalla verticale By, ed essendo fissata la posizione del punto D sulla curva ADI e quindi per rapporto agli assi coordinati, si possono scrivere, sia l'equazione della retta DC normale alla detta curva in un suo punto dato, sia l'equazione della retta EF passante pel punto E di coordinate note. Avendosi le equazioni di queste due rette si possono trovare le coordinate del loro punto d'intersezione F e quindi passare a trovare la distanza FD.

Una volta determinato il punto d'applicazione F della pressione R sul giunto CD nonchè il suo valore, suppongasi questa pressione trasportata sulla propria direzione col punto di applicazione in F e si trovi la sua componente N normale al detto giunto. Questa componente N si ottiene osservando, che la pressione R fa colla orizzontale un angolo $o'FR' = oER = \varphi$ dato da

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{P}{Q_m},$$

che l'angolo $o'FN$ è eguale all'angolo $CDV = \alpha$ che il giunto

DC fa colla verticale, che l'angolo $NFR' = o'FN - o'FR' = \psi$ vien dato da

$$\psi = \alpha - \varphi,$$

che

$$R = \sqrt{P^2 + Q_m^2},$$

e finalmente che

$$N = R \cos \psi.$$

Determinata la componente N della pressione R che ha luogo sul giunto CD e trovata la distanza $\overline{DF}$ del suo punto d'applicazione F dal punto D posto sull'intrados, ecco come si determina la massima pressione riferita all'unità di superficie che ha luogo sul detto giunto. Se il punto F si confonde col punto di mezzo M di CD, la pressione N che ha luogo sulla superficie rettangolare rappresentata in CD si ripartisce uniformemente, e quindi la pressione N_1 riferita all'unità di superficie in un punto qualunque del giunto CD vien espressa da

$$N_1 = \frac{N}{a'}$$

essendo $a' \times 1 = a'$ la superficie di detto giunto. Se il punto F non si confonde col punto M, se è posto fra il punto M e l'intrados, e se la distanza $\overline{MF}$ è minore di $1/3\ \overline{MD}$, ponendo $\frac{\overline{MF}}{\overline{MD}} = m$, si ha che la massima pressione N_1 riferita all'unità di superficie ha luogo sullo spigolo D e che, per quanto si è detto nella risoluzione del problema I del numero 157, vien data da

$$N_1 = \frac{N}{a'}(1 + 3m) \qquad (1).$$

Se il punto F, trovandosi ancora fra l'intrados ed il punto M, dista da questo punto più di 1/3 di $\overline{MD}$, una parte soltanto del giunto CD soffre pressione; questa parte, come è facile rendersi ragione in seguito a quanto si è detto nel risolvere il problema I del già citato numero 137, si determina prendendola eguale a $3.\overline{DF}$; e la pressione massima N_1 riferita all'unità di superficie che ha luogo sullo spigolo D vien data dalla formola

$$N_1 = \frac{N}{a'} \frac{4}{3(1-m)} \qquad (2).$$

Se, il punto F, sempre posto fra l'intrados ed il punto M, dista da questo di $1/3\ \overline{MD}$ trovasi premuta l'intiera base CD, ma la pressione sullo spigolo rappresentato in C è nulla; e, come risulta tanto dalla formola (1) quanto dalla formola (2), la pressione massima riferita all'unità di superficie, che ha luogo sullo spigolo D, vien data da

$$Q_1 = 2\frac{N}{a'} \qquad (3).$$

Quando il punto F invece di trovarsi fra l'intrados ed il punto di mezzo M del giunto CD trovasi in F′ fra il punto M e l'estrados, ossia quando la distanza del punto d'applicazione della forza N da D è maggiore di $\overline{DM} = \frac{1}{2}a'$, la massima pressione ha luogo sullo spigolo d'estrados C, e servono a calcolarla le formole (1), (2) e (3), coll'avvertenza però che nelle formole (1) e (2) bisogna mettere per m il rapporto $\dfrac{\overline{DF'} - \overline{DM}}{\overline{MC}}$.

Applicando il metodo ora esposto, si possono trovare le pressioni massime riferite all'unità di superficie su quanti giunti si vogliono della vôlta e dei piedritti; e non vi sarà pericolo di schiacciamento dei materiali quando la pressione massima riferita all'unità di superficie in questi giunti è minore del coefficiente di rottura per schiacciamento relativo alla materia che si trova dove questa pressione ha luogo. Si ha poi stabilità quando la detta pressione è eguale o inferiore al prodotto del coefficiente di snervamento (num. 30) o del coefficiente di rottura (num. 33) per pressione moltiplicati pei relativi coefficienti di stabilità (num. 31 e 40).

186. **Procedimento grafico per verificare la stabilità di una vôlta a botte.** — Questo procedimento consiste nel disegnarsi in iscala piuttosto grande il profilo di mezza vôlta, precisamente come si è detto al numero 185; nel dividere la parte ABCD (*fig.* 156)

di questo profilo, la quale rappresenta la mezza vôlta propriamente detta in un numero tale di parti che si possano considerare le curve d'intrados e d'estrados siccome linee rette da un punto di divisione all'altro; nel segnare al di sopra di ciascun punto di divisione dell'estrados altrettante linee verticali da considerarsi come tanti giunti possibili nei riempimenti e nel sovraccarico; nel dividere anche il piedritto mediante giunti orizzontali; nel tracciare le due linee HIK ed LMS luoghi geometrici dei punti che sono rispettivamente ad 1/3 delle lunghezze dei giunti a partire dall'intrados e dall'estrados; nel trovare le superficie delle diverse parti $\mathrm{AN}n_1b_1a_1$, $\mathrm{AN}n_2b_2a_2$, $\mathrm{AN}n_3b_3a_3$, ... $\mathrm{AN}c\mathrm{CD}$, $\mathrm{ANO}c_1\mathrm{d}_1$, $\mathrm{ANO}c_2\mathrm{d}_2$, ... non che le posizioni dei centri di superficie delle stesse parti; nel determinarsi prima la spinta orizzontale; e nel tracciarsi finalmente la curva luogo geometrico dei punti d'applicazione delle diverse pressioni che i massi rappresentati in $\mathrm{AN}n_1b_1a_1$, $\mathrm{AN}n_2b_2a_2$, $\mathrm{AN}n_3b_3a_3$, ... $\mathrm{AN}c\mathrm{CD}$ producono rispettivamente sui giunti a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, ... DC, nonchè dei punti d'applicazione delle pressioni che i massi rappresentati in $\mathrm{d}_1\mathrm{DANO}c_1$, $\mathrm{d}_2\mathrm{DANO}c_2$, ... FDANOG esercitano rispettivamente sui giunti orizzontali d_1c_1, d_2c_2, d_3c_3, ... FG.

Si trova la spinta orizzontale cercando qual è la forza da applicarsi in L normalmente al giunto AB, affinchè i massi $\mathrm{AN}n_1b_1a_1$, $\mathrm{AN}n_2b_2a_2$, $\mathrm{AN}n_3b_3a_3$, ... $\mathrm{AN}c\mathrm{CD}$ non siano in pericolo di rotare attorno ai corrispondenti spigoli d'intrados a_1, a_2, a_3, ... D. Perciò, considerando una parte qualunque $\mathrm{AN}nba$ del disegnato profilo, si trovi l'intersezione u della orizzontale $\mathrm{L}o$ colla verticale vv' passante pel suo centro di superficie; a partire da u si prenda la verticale $\overline{up}$ talmente lunga da rappresentare un numero proporzionale al peso del masso murale lungo l'unità rappresentato in $\mathrm{AN}nba$; si unisca il punto u col punto h, giacchè si suppone che sul giunto, pel quale esiste maggior pericolo di rotazione attorno al corrispondente spigolo d'intrados, la pressione si trovi applicata ad 1/3 della sua lunghezza a partire dal punto in cui è rappresentato il detto spigolo (num. 181); e si costruisca il rettangolo avente per un lato up, e la sua diagonale nella direzione uh. Il lato orizzontale $\overline{u\mathrm{Q}}$ di questo rettangolo va considerato siccome la spinta orizzontale applicata in L quando la vôlta, aprendosi alla chiave verso l'intrados, sta per aprirsi nel giunto ab verso l'estrados rotando attorno allo spigolo rappresentato in a. Quest'operazione si faccia per tutte le parti di vôlta poste fra il giunto verticale della chiave ed i giunti a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, ... fino al giunto DC; ed il maggiôr lato orizzontale del rettangolo analogo ad $uprQ$ rappresenta quella forza che si assume come rappresentante la spinta orizzontale Q_m della vôlta.

Trovata la spinta Q_m, ecco come si procede per costrurre la curva luogo geometrico dei punti d'applicazione delle pressioni che si verificano sui diversi giunti. La pressione su un giunto qualunque, per esempio sul giunto xy, è rappresentata in intensità e direzione dalla risultante della spinta orizzontale Q_m e del peso P del masso rappresentato in $ANzyx$, e per conseguenza il punto d'applicazione di questa pressione si ottiene supponendo le due forze Q_m e P trasportate sulle loro direzioni fino a trovarsi applicate nel loro punto d'intersezione U, costruendo il rettangolo $UPRQ_m$ e trovando l'intersezione α della diagonale di questo rettangolo col giunto yx. Per ciascuno dei giunti $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$, ... DC, $d_1 c_1$, $d_2 c_2$, $d_3 c_3$, ... FG si trovino i punti analoghi ad α, e tutti questi punti uniti con una linea continua daranno la curva luogo geometrico dei punti d'applicazione delle pressioni sui diversi giunti, la qual curva chiamasi *curva delle pressioni.*

Quando la curva delle pressioni si trova tutta fra le due curve HIK ed LMS, è impossibile che nella vôlta e nel suo piedritto avvenga rottura per rotazione, giacchè tutte le parti comprese fra i diversi piani di giunto trovansi premute le une contro le altre; e non può aver luogo rottura per scorrimento quando le direzioni di tutte le diagonali dei rettangoli analoghi ad $UPRQ_m$ fanno colla normale al giunto corrispondente un angolo minore dell'angolo la cui tangente è il coefficiente d'attrito f della materia di cui il vôlto si vuol formare. Per riconoscere poi se può aver luogo rottura per schiacciamento dei materiali; graficamente si trovano le componenti N normali ai rispettivi giunti delle pressioni R, e si misurano le distanze dei loro punti d'applicazione, i quali sono determinati dalle intersezioni della curva delle pressioni coi giunti, dai punti di mezzo dei giunti stessi. Facendo i rapporti m delle distanze ora indicate alle semi-lunghezze dei giunti si possono calcolare colle formole (1), (2) e (3) del numero precedente le massime pressioni riferite all'unità di superficie sui diversi giunti considerati nel costrurre la curva delle pressioni e quindi servirsi di queste massime pressioni per accertarsi, come si è detto sul finire del precedente numero, se è possibile o se non è possibile che avvenga schiacciamento dei materiali.

187. Cenno sul modo di verificare la stabilità di una vôlta a botte in cui la rottura tende avvenire per apertura alla chiave

verso l'estrados. — Quanto si è detto nei numeri 182, 183, 184, 185 e 186 sul modo di verificare la stabilità di una vôlta a botte in cui la rottura tende a manifestarsi per aprimento alla chiave verso l'intrados e sui fianchi verso l'estrados (*fig.* 150), si applica anche al caso di una vôlta in cui la rottura tende ad aver luogo per aprimento alla chiave verso l'estrados e per aprimento sui fianchi verso l'*intrados* (*fig.* 151). Nello stabilire però le formole analoghe a quelle del numero 182 bisogna supporre che il punto d'applicazione della spinta orizzontale sia ad 1/3 della larghezza del giunto di chiave a partire dall'intrados. Nel trovare il valore di Q bisogna ammettere che la rotazione tenda a manifestarsi attorno ad uno spigolo dell'estrados, e viceversa attorno ad uno spigolo dell'intrados nella deduzione del valore di Q'. La spinta massima Q_m si trova cercando qual è la massima delle forze da supporsi applicata orizzontalmente contro il giunto CD ad 1/3 di CD a partire da C per portare una parte di vôlta in procinto di rotare attorno ad uno spigolo dell'estrados; e la verificazione della stabilità della costruzione sotto il rapporto della rotazione e dello scorrimento consiste nell'accertarsi se la spinta Q_m, sufficiente per impedire che una parte qualunque di vôlta scorra all'indentro, è invece insufficiente a produrre scorrimento all'infuori e rotazione su uno spigolo dell'intrados.

CAPITOLO XII.

Scorrimento longitudinale nei corpi sottoposti a flessione.

188. **Come può avvenire scorrimento longitudinale nei corpi sottoposti a flessione.** — Si considerino due solidi prismatici A e B (*fig.* 157) aventi la stessa lunghezza *a*, la stessa larghezza *b* ed il medesimo spessore *c*; suppongasi che questi due solidi siano orizzontalmente incastrati in modo da formare un solido unico come lo indica la figura; e pongasi che all'estremità libera di questo solido si trovi applicato un peso P. Se i due solidi A e B sono soltanto sovrapposti e se trascurasi la resistenza d'attrito che si può sviluppare sulla faccia di contatto, sotto l'azione del peso P

s'inflettono come due distinti corpi prismatici; sulle loro facce superiori, che pel fatto della flessione diventano convesse, si trovano le fibre che subiscono il massimo allungamento; e sulle loro facce inferiori, che pel fatto della flessione diventano concave, sono collocate le fibre le quali provano il massimo accorciamento. Per quanto risulta dalla risoluzione del problema I del numero 108, le sezioni pericolose nei due solidi sono quelle d'incastro; il maggior valore del momento inflettente μ_m è dato da

$$\mu_m = Pa;$$

il momento d'inerzia di ciascuna delle sezioni trasversali dei due corpi rispetto all'asse neutro corrispondente è $\frac{1}{12} bc^3$; e quindi la tensione e la pressione massime Q_1 e Q_2 (num. 106), riferite all'unità di superficie ed opposte rispettivamente dalle fibre maggiormente allungate e da quelle maggiormente compresse, ammettono il valore

$$Q_1 = Q_2 = \frac{3Pa}{bc^2}.$$

Se invece dei due solidi A e B si ha un solido unico pure di lunghezza a e di larghezza b, ma di spessore $2c$ eguale a quello che presenta la sovrapposizione dei due parallelepipedi A e B, la tensione e la pressione massime Q_1' e Q_2' riferite all'unità di superficie ed opposte rispettivamente dalle fibre maggiormente allungate e da quelle maggiormente compresse, essendo $\frac{1}{12} b . 8c^3 = \frac{2}{3} bc^3$ il momento d'inerzia di ciascuna sezione trasversale dell'intiero solido rispetto al corrispondente asse neutro, vengono date da

$$Q_1' = Q_2' = \frac{1}{2} \frac{3Pa}{bc^2}.$$

Confrontando fra loro i trovati valori di Q_1 e di Q_1' immediatamente si vede come il primo sia doppio del secondo, come per rendere questo eguale a quello basta intendere che all'estremo del solido costituito d'un sol pezzo sia applicato un peso doppio del peso P, e come per conseguenza presentano lo stesso grado di stabilità due solidi parallelepipedi delle stesse dimensioni, incastrati orizzontalmente per un estremo e caricati di un peso all'altro estremo, l'uno costituito di due pezzi sovrapposti e l'altro formato d'un sol pezzo, allorquando trovasi il secondo caricato d'un peso doppio di quello che porta il primo. Il diverso modo di resistere di questi due solidi proviene dalla possibilità di scorrimento delle fibre poste sulla faccia inferiore del solido A lungo le fibre poste sulla faccia superiore del solido B nella sezione longitudinale CD, il qual scorrimento diventa impossibile nel solido formato d'un sol pezzo a motivo dell'adesione laterale delle fibre.

Supponendo che i due corpi A e B siano uniti lungo tutta la faccia CD, finchè essi non scorrono l'uno sull'altro il solido che risulta dal loro complesso presenta la stessa resistenza alla flessione del solido di eguali dimensioni in un sol pezzo; ma, avvenendo che le due parti A e B non si trovino abbastanza unite, può avvenire il loro scorrimento prima che avvenga rottura per estensione o per compressione nelle fibre maggiormente allungate od in quelle maggiormente compresse, per cui importa il saper determinare i valori delle forze che tendono a produrre lo scorrimento longitudinale delle fibre nei corpi sottoposti a flessione.

189. **Forza che tende a produrre lo scorrimento longitudinale relativo ad una sezione qualunque parallela allo strato delle fibre invariabili.** — Questa forza, che facilmente si potrebbe determinare anche pei solidi rettilinei sottoposti alla flessione prodotta da forze comunque dirette e passanti pei loro assi, verrà qui determinata soltanto in alcuni casi particolari e principalmente pei solidi omogenei ad asse rettilineo con sezione rettangolare e con sezione a doppio T simmetrico sollecitati da forze passanti pei loro assi ed a questi perpendicolari.

I. *Determinazione della forza che tende a produrre lo scorrimento longitudinale in un solido prismatico a sezione rettangolare.*

Sia una trave a sezione rettangolare $A'B'B''A''$ (*fig.* 158), orizzontalmente collocata, col lato AB verticale e sottoposta all'azione di pesi passanti pel suo asse. Si chiamino

μ il momento inflettente relativo alla sezione trasversale qualunque AB;

N lo sforzo di taglio per la stessa sezione;

dz la lunghezza $\overline{OQ}$ della parte di asse del prisma compresa fra le due sezioni infinitamente vicine AB e CD;

a la lunghezza del lato orizzontale $\overline{A'A''}$ della sezione trasversale del solido, e

b la lunghezza del lato verticale $A''B''$;

v la distanza fra il centro di superficie O′ ed una parallela qualunque K′K″ all'asse neutro N′N″;

I il momento d'inerzia del rettangolo A′B′B″A″ rispetto all'accennato asse neutro.

Come risulta dalla prima delle equazioni (3) del numero 106 applicata al caso in quistione e, non per la fibra maggiormente allungata, ma per una fibra intermedia ai due strati delle fibre invariabili e delle fibre maggiormente allungate, la tensione longitudinale per ogni unità di superficie della lista infinitamente piccola H′K′K″H″ è $\frac{v\mu}{\mathrm{I}}$; e, siccome l'area di questa lista vale il prodotto del lato $\overline{\mathrm{K'K''}}=a$ per il lato infinitesimo $\overline{\mathrm{K'H'}}=\mathrm{d}v$, essa sopporta una tensione totale espressa da $\frac{a\mu}{\mathrm{I}}v\,\mathrm{d}v$. La somma di queste tensioni per la parte A′M′M″A″, ossia la forza Q che tende a produrre lo scorrimento longitudinale su un piano qualunque M′M″ parallelo allo strato delle fibre invariabili e distante da questo della quantità $\mathrm{N'M'}=v'$, sarà adunque data da

$$\mathrm{Q}=\int_{v'}^{\frac{1}{2}b}\frac{a\mu}{\mathrm{I}}v\,\mathrm{d}v=\frac{a\mu}{2\mathrm{I}}\left(\frac{1}{4}b^2-v'^2\right),$$

oppure, per essere $\mathrm{I}=\frac{1}{12}ab^3$, da

$$\mathrm{Q}=6\,\frac{\mu}{b^3}\left(\frac{1}{4}b^2-v'^2\right) \qquad (1).$$

Nella sezione CD, la somma analoga a Q prende il valore

$$\mathrm{Q}+\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z=\frac{6}{b^3}\left(\frac{1}{4}b^2-v'^2\right)\left(\mu+\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z\right);$$

vi ha quindi una forza $\frac{6}{b^3}\left(\frac{1}{4}b^2-v'^2\right)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z$ la quale tende a far scorrere il prisma LMAC parallelamente alla direzione OQ; e questa forza per una parte di solido compresa fra le due sezioni i cui centri di superficie hanno rispettivamente le coordinate z' e z'', ammette il valore T_2^{IV} dato da

$$T_2^{IV} = \frac{6}{b^3}\left(\frac{1}{4}b^2 - v'^2\right)\int_{z'}^{z''} \frac{d\mu}{dz}\,dz \qquad (2).$$

II. *Determinazione della forza che tende a produrre lo scorrimento longitudinale in un solido prismatico con sezione trasversale a doppio* T *simmetrico.*

Considerando il caso di una trave con sezione trasversale a doppio T simmetrico in cui la sezione del gambo occupi solamente una piccola parte della superficie dell'intiera sezione, e per la quale i bracci abbiano spessore trascurabile a fronte dell'altezza $\overline{BC} = b$ (*fig.* 63) della trave, per modo che con grandissima approssimazione si possa ritenere che sia anche eguale a b la distanza PQ dei centri di superficie delle sezioni trasversali ABFI e DCGM delle due tavole; e ritenendo che le lettere a, μ, I, v, v' e Q abbiano i significati che loro vennero attribuiti nel precedente problema, ma che v' sia compreso fra $\frac{1}{2}\overline{BC}$ ed $\frac{1}{2}\overline{FG}$, si ha

$$Q = \frac{a\mu}{2I}\left(\frac{1}{4}b^2 - v'^2\right),$$

la quale, per essere con molta approssimazione $I = \frac{1}{2}acb^2$ (num. 97, probl. VI) quando assumasi $\overline{BF} = \overline{CG} = c$, si riduce a

$$Q = \frac{\mu}{cb^2}\left(\frac{1}{4}b^2 - v'^2\right).$$

Considerando poi una parte di trave compresa fra due sezioni trasversali i cui centri di superficie ammettono rispettivamente le ascisse z' e z'', ragionando come nel numero precedente sul trovato valore di Q, si ottiene che la forza T_2^{IV} la quale tende a produrre lo scorrimento longitudinale per una lunghezza di trave eguale a $z'' - z'$, vien data da

$$T_2^{\text{IV}}=\frac{1}{c\,b^2}\left(\frac{1}{4}b^2-v'^2\right)\int_{z'}^{z''}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z \qquad (3).$$

III. *Determinazione della forza che tende a produrre lo scorrimento longitudinale in un solido ad asse rettilineo, di egual resistenza, incastrato orizzontalmente per un suo estremo e caricato all'altro estremo d'un peso* P (*fig.* 97).

Considerando la forza che tende a produrre lo scorrimento sul piano orizzontale AB passante per l'asse del corpo, ed essendo $\overline{M'M}=2u$ l'altezza di una sezione trasversale qualunque posta a distanza $\overline{BN}=z$ dal punto d'applicazione P del peso, il valore di Q risulta evidentemente quello dato dall'equazione (1) quando in esso si faccia $v'=0$ e $b=2u$, cosicchè

$$Q=\frac{3}{4}\frac{\mu}{u}.$$

Differenziando ora per ottenere la forza che tende a produrre lo scorrimento longitudinale fra due sezioni infinitamente vicine distanti fra di loro delle quantità $\mathrm{d}z$, bisogna considerare u siccome variabile in funzione di z e porre

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z=\frac{3}{4u}\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z-\frac{3\mu}{4u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z.$$

Nella risoluzione del problema I del numero 112 già si è trovato che il valore di u varia nel proposto solido di egual resistenza proporzionalmente alla radice quadrata della distanza fra la sezione considerata ed il punto in cui agisce il peso P, per modo che, quando si chiami C una costante, avendosi

$$u^2=Cz, \qquad\qquad \frac{du}{dz}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{z}},$$

e d'altronde essendo

$$\mu = P z, \qquad \frac{d\mu}{dz} = P,$$

il valore di $\frac{dQ}{dz} dz$ si riduce a

$$\frac{dQ}{dz} dz = \frac{3}{8} \frac{P}{\sqrt{C}} \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Integrando quest'espressione della forza che tende a produrre lo scorrimento longitudinale fra due sezioni infinitamente vicine fra i limiti z' e z'', si ottiene la forza T_2^{IV} che tende a produrre lo scorrimento longitudinale fra le due sezioni trasversali distanti dal punto B della quantità z' e z'' e la quale vien quindi espressa da

$$T_2^{IV} = \frac{3}{8} \frac{P}{\sqrt{C}} \int_{z'}^{z''} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{3}{4} \frac{P}{\sqrt{C}} \left(\sqrt{z''} - \sqrt{z'} \right) \qquad (4).$$

190. Sezione di un solido per la quale è massimo il valore della forza che tende a produrre lo scorrimento longitudinale. — L'equazione (2) del numero precedente, la quale si riferisce al caso di un solido parallelepipedo caricato di pesi e disposto in modo da avere due facce orizzontali e due verticali, mette in evidenza come il valore di T_2^{IV} diventi massimo per $v' = 0$, ossia per la sezione longitudinale la quale coincide collo strato delle fibre invariabili. E questo è vero per un solido di sezione qualunque, giacchè, derivando la forza la quale tende a produrre lo scorrimento su una sezione longitudinale qualunque dalla somma delle tensioni che sopportano le fibre allungate poste fra questa sezione e la superficie laterale del solido divenuta convessa pel fatto della flessione, essa acquista evidentemente il valore massimo quando nel determinarla si comprendono tutte le fibre che sopportano tensione, ossia quando si cerca il suo valore per la sezione longitudinale coincidente collo strato delle fibre invariabili.

191. Condizione ed equazione di stabilità dedotte dalla resistenza alla rottura per scorrimento longitudinale. — Essendo T_2^{IV} la forza tendente a produrre il fenomeno dello scorrimento longitudinale, in un dato corpo rettilineo sottoposto a flessione, nella sezione longitudinale per cui il detto fenomeno più facilmente può avvenire,

R_2^{IV} il coefficiente di rottura per scorrimento longitudinale, ossia la resistenza alla rottura per scorrimento longitudinale riferita all'unità di superficie della sezione su cui lo scorrimento sta per avvenire,

Ω l'area di questa sezione,

si ha che la resistenza alla rottura per scorrimento longitudinale opposta dal corpo alla forza T_2^{IV} è

$$R_2^{IV}\,\Omega,$$

che quindi si ha per condizione di stabilità

$$T_2^{IV} < R_2^{IV}\,\Omega,$$

e che per conseguenza si ha l'equazione di stabilità

$$T_2^{IV} = n_2^{IV}\,R_2^{IV}\,\Omega,$$

dove n_2^{IV} è un numero minore dell'unità, assunto per coefficiente di stabilità, e che generalmente suolsi prendere non maggiore di 1/6 pei metalli e non maggiore di 1/10 per gli altri materiali.

192. **Uso dell'equazione di stabilità relativa allo scorrimento longitudinale, e determinazione della sezione pericolosa.** — Nei solidi sottoposti a flessione, il valore di T_2^{IV}, ossia il valore della forza che tende a produrre lo scorrimento longitudinale, come chiaramente lo dimostrano anche le equazioni (2), (3) e (4) del numero 189, è funzione del momento inflettente e quindi delle forze estrinseche sollecitanti il solido che si considera; per cui la condizione di stabilità può servire a verificare se non può avvenire scorrimento longitudinale in un dato solido inflesso sotto l'azione di determinate forze estrinseche, e l'equazione di stabilità si presta alla risoluzione dei seguenti problemi:

1° *Trovare quali forze estrinseche si possono far sopportare ad un dato solido rettilineo sottoposto a flessione, affinchè in esso non avvenga scorrimento in una sezione longitudinale parallela a quella che corrisponde allo strato delle fibre invariabili.*

2° *Trovare quali superficie devono presentare le sezioni longitudinali di un solido rettilineo di forma nota, affinchè non possa su esse avvenire scorrimento.*

La *sezione pericolosa* per un dato solido rettilineo, ossia quella sezione sulla quale più facilmente che su qualunque altra può avvenire lo scorrimento longitudinale, si determina cercando la sezione longitudinale per cui è massimo il valore del coefficiente di stabilità, ossia il quoziente della forza che su essa tende a produrre lo scorrimento per la corrispondente resistenza che sulla sezione medesima può essere sviluppata.

193. **Conseguenze che risultano dalla teoria sullo scorrimento longitudinale.** — Lo svilupparsi di forze, che tendono a produrre lo scorrimento longitudinale nei solidi sottoposti a flessione, rende ragione di alcuni fenomeni che sovente si manifestano nei solidi che avviene di dover impiegare nelle costruzioni e di spiegare: le disgiunzioni longitudinali che non di rado hanno luogo nei solidi di piccola lunghezza sottoposti all'azione di forze che li fanno inflettere e principalmente quelle che tanto frequentemente si trovano nelle travi in legno; le differenze che si notano nelle resistenze dei pezzi di legno le cui fibre sono disposte in modi diversi relativamente alla direzione delle forze che li fanno inflettere; perchè due travi sovrapposte in modo da toccarsi solamente per una superficie piana, ma non invariabilmente unite l'una all'altra, non s'inflettono come una trave unica di dimensioni eguali a quelle del loro complesso; perchè per formare una trave unica mediante la riunione di due o più travi, si usa legarle fortemente con fasciature, di tagliare i pezzi che si uniscono a dentiere che ingranano le une colle altre, e d'interporre fra i medesimi delle biette in legno seguendo disposizioni analoghe a quelle che già vennero indicate nella parte già pubblicata di questo lavoro sull'arte di fabbricare, nel volume che tratta dei *Lavori generali d'architettura civile, stradale ed idraulica*, alla pagina 397 ed al numero 283.

CAPITOLO XIII.

Equilibrio di alcuni sistemi composti e di alcuni sistemi articolati.

194. **Assunto del presente capitolo.** — I sistemi composti che più di frequente si presentano nella pratica delle costruzioni sono le travi in legno formate di pezzi sovrapposti, le travi costituite da pezzi sovrapposti e da pezzi uniti di punta, le travi armate, le travi in legno a traliccio e le travi metalliche a parete continua ed a parete reticolata. I sistemi articolati poi che al costruttore avviene di dover considerare si riducono principalmente alle incavallature in legno ed alle incavallature metalliche. Nella parte già pubblicata di questo lavoro sull'arte di fabbricare, al volume che tratta dei *Lavori generali d'architettura civile, stradale ed idraulica* già si indicò, all'articolo I del capitolo VIII, quali sono le disposizioni generalmente usate nella pratica per la costruzione delle travi composte, ed all'articolo II dello stesso capitolo quali sono i principali tipi d'incavallature. In questo capitolo, senza pretendere di voler fare uno studio completo sull'equilibrio e sulla determinazione degli sforzi sopportati dalle diverse parti degli svariati sistemi composti ed articolati, verranno esaminati alcuni pochi casi di travi composte, d'incavallature e di travi armate; e quest'esame, nel mentre sarà sufficiente per le ordinarie circostanze della pratica, servirà anche a dare una norma dei procedimenti da seguirsi in casi non identici, ma analoghi a quelli che verranno esaminati.

195. **Sforzi a cui sono assoggettati i chiodi che vengono impiegati nella formazione delle travi metalliche composte.** — I chiodi ribaditi a caldo, che vengono adoperati nella formazione delle travi metalliche composte per mantenere fra loro unite le lamiere ed i ferri speciali, possono trovarsi sottoposti a due diversi sforzi: ad uno sforzo che tende a romperli per trazione, diretto secondo i loro assi, e proveniente da ciò che i chiodi ribaditi, appena posti in opera e ancora caldi, premono l'una contro l'altra le lastre che riuniscono e tendono ad accorciarsi al sopravvenire del loro raffreddamento; ad uno sforzo che tende a romperli per scorrimento trasversale il quale può manifestarsi allorquando, vinta

la pressione che i chiodi producono contro le lastre che riuniscono col tirare una di esse e prodotto lo scorrimento di questa sulle altre, lo sforzo di trazione esercitato sulla lastra che vuolsi separare dalle altre si trasmette ai chiodi in direzione perpendicolare ai loro assi. Per vedere come possa essere provocata la resistenza allo scorrimento trasversale nei chiodi che si adoperano per la formazione delle travi metalliche composte, basta considerare due lamiere A (*fig.* 159), fissate per le loro estremità superiori, ed una lamiera B unita alle prime mediante chiodi ribaditi a caldo e sottoposta ad un sufficiente sforzo di trazione. Se i diametri dei fori, come generalmente avviene nelle chiodature fra lamiere, sono di qualche poco più grandi dei diametri dei chiodi, la lamiera B, tirata nel senso della freccia S, incomincierà a scorrere fra le lamiere A, e, quando le superficie superiori dei fori praticati nella lamiera B saranno arrivate a contatto delle superficie superiori dei chiodi, lo sforzo di trazione che sull'ultima accennata lamiera si esercita viene trasmesso ai chiodi in senso normale ai loro assi, i quali trovansi così evidentemente assoggettati a sforzi operanti a romperli per scorrimento trasversale.

196. **Determinazione della resistenza delle chiodature.** — Due sono le resistenze che convien considerare nelle chiodature di lamiere e di ferri speciali: la resistenza allo scorrimento lungo le superficie di contatto delle lastre unite, la qual resistenza va considerata come una potente resistenza d'attrito prodotta dalla considerevole pressione che i chiodi esercitano contro le lastre serrate fra le loro capocchie; la resistenza allo scorrimento trasversale che possono presentare i chiodi quando, per una causa qualunque, già trovasi distrutta la detta resistenza d'attrito.

La prima resistenza sperimentalmente può essere determinata inchiodando fra due liste di lamiera A, con fori circolari sensibilmente eguali al diametro del chiodo da impiegarsi per la chiodatura, una lista di lamiera B (*fig.* 159), in cui siasi praticato un foro di forma ovale coll'asse maggiore diretto nel senso della sua lunghezza e coll'asse minore sensibilmente eguale al diametro del detto chiodo; fissando le estremità delle lamiere A, ed esercitando sulla lamiera B uno sforzo di trazione ognor crescente fino a produrre lo scorrimento di questa fra quelle. Quest'esperienza già venne instituita, e si trovò che per far scorrere la lamiera B fra le lamiere A è necessario produrre sulla lamiera B uno sforzo di trazione che mediamente sia di chilogrammi 15 per ogni millimetro quadrato di superficie della sezione trasversale del chiodo.

Per determinare la seconda resistenza che convien considerare nelle chiodature, ossia la resistenza di taglio o resistenza allo scorrimento trasversale nei chiodi, si può operare come segue: o continuare a produrre sulla lamiera B, quando già venne distrutta la prima resistenza, delle tensioni ognor crescenti finchè avviene la rottura del chiodo che unisce la detta lamiera alle lamiere A; oppure porre il chiodo, per cui vuolsi esperimentare la resistenza allo scorrimento, fra le due guance di un robusto blocco di ghisa in modo da trovarsi appoggiato fra le dette guance, ed operare mediante apposita leva per esercitare normalmente all'asse del chiodo delle pressioni note ognor crescenti fino a quella capace di produrre la rottura. Instituendo l'esperienza col primo metodo si produce la rottura del chiodo per taglio doppio, e si potrebbe facilmente produrre la rottura per taglio semplice, per taglio triplo, per taglio quadruplo, ecc., adottando le unioni di lamiere rappresentate nelle figure **160**, **161** e **162**, fissando le lamiere A e producendo le tensioni ognor crescenti nelle lamiere B. Instituendo invece l'esperienza col secondo metodo, si produce la rottura del chiodo per semplice taglio quando esso trovasi appoggiato ad una delle guance del blocco che impiegasi per fare l'esperimento e che dall'altra parte è libero, e si produce la rottura per doppio taglio, allorquando il chiodo venne disposto in modo da avere appoggio nell'una e nell'altra guancia. Già parecchie esperienze vennero eseguite sulla resistenza alla rottura per scorrimento trasversale nei chiodi che vengono impiegati per chiodature di lamiere, e da queste esperienze risultò:

1° Che la detta resistenza è proporzionale alla somma delle superficie delle sezioni dei chiodi sui quali la rottura tende a manifestarsi, per modo che questa resistenza in un chiodo su cui vien cimentata la resistenza alla rottura per taglio doppio, triplo, quadruplo, ecc. è doppia, tripla, quadrupla, ecc. di quella che ha luogo in un chiodo in cui vien provocata la resistenza alla rottura per taglio semplice;

2° Che questa resistenza non è maggiore di quella alla rottura per trazione che può presentare il ferro di cui sono formati i chiodi, e non minore dei 4/5 della stessa resistenza alla rottura per trazione;

3° Che la resistenza alla rottura per scorrimento trasversale, detta anche coefficiente di rottura per scorrimento trasversale, pei chiodi che d'ordinario vengono impiegati nella formazione delle travi metalliche, si può assumere siccome variabile fra 32 e 40 chilogrammi per millimetro quadrato di superficie sulla quale tende a manifestarsi la rottura.

197. **Numero dei chiodi da impiegarsi nelle chiodature, quando vuolsi tener conto dell' attrito che esse fanno nascere sulla superficie di contatto delle lamiere che tengono unite.** — Avvengono dei casi in cui si devono costrurre delle travi metalliche composte colla condizione che in esse non debbano avvenire deformazioni più grandi di quelle che presenterebbero qualora fossero d'un sol pezzo, e per le quali non si possono tollerare le maggiori deformazioni possibili per ciò che i chiodi non riempiono perfettamente i corrispondenti fori. In tali circostanze è d'uopo ottenere che la resistenza allo scorrimento lungo la superficie di contatto delle lamiere, prodotta dall'attrito causato dalla considerevole pressione che i chiodi esercitano contro le lastre serrate fra le loro capocchie, sia sufficiente a dare un'unione stabile e duratura; e si può fare in modo che venga messo in giuoco soltanto 1/3 dello sforzo capace di produrre l'accennato scorrimento. Segue da ciò che, ritenendo di 15 chilogrammi per millimetro quadrato di sezione di chiodo l'accennato sforzo, sarà di chilogrammi 5 quello che si potrà far sopportare alle chiodature, affinchè siano in condizioni di stabilità sufficientemente buone; per guisa che, ammettendo di non voler far sopportare alle lamiere uno sforzo di trazione maggiore di 5 chilogrammi pure per millimetro quadrato della loro sezione normale alla forza traente, si può stabilire che, facendo le chiodature in modo da essere la somma della superficie delle sezioni trasversali dei fusti dei chiodi eguale alla superficie della sezione della lamiera interrotta, resiste la connessione come se nella lamiera non avesse luogo interruzione di continuità.

Ritenendo, come generalmente si usa in pratica, che il diametro del fusto dei chiodi sia il doppio dello spessore delle lamiere da unirsi e che la loro capocchia sferica abbia il suo diametro eguale al triplo dell'indicato spessore; e supponendo che due lastre A e B (*fig.* 163) debbano essere unite per sovrapposizione, mediante una fila di chiodi, e chiamando

s lo spessore delle lamiere,

a la distanza che fra asse ed asse devono avere due chiodi successivi,

siccome da quanto or ora si è stabilito risulta ad evidenza che la superficie della sezione trasversale del fusto di ogni chiodo deve essere eguale alla superficie della sezione fatta nella parte di lamiera, supposta non perforata, intercetta fra gli assi di due chiodi successivi, si ha la semplicissima equazione

$$as = \pi s^2,$$

d'onde, assumendo $\pi = \frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7}$,

$$a = 3s + \frac{1}{7}s \qquad (1).$$

La distanza fra asse ed asse di due chiodi successivi deve adunque essere tre volte lo spessore della lamiera più un settimo dello stesso spessore, e quindi, essendo $3s$ il diametro delle capocchie, i chiodi devono trovarsi così vicini da esservi fra una capocchia e l'altra il piccolissimo intervallo di un settimo dello spessore della lamiera.

Se invece l'unione delle due lamiere A e B si vuol fare con due file di chiodi, come lo dimostra la figura 164, è la superficie della sezione retta di due chiodi che deve eguagliare la sezione fatta nella parte di lamiera intercetta fra gli assi di due chiodi successivi di una medesima fila, e quindi, attribuendo alle lettere a ed s i significati che già loro vennero dati, e ritenendo le relazioni già stabilite fra il diametro del fusto dei chiodi, il diametro delle capocchie e lo spessore delle lamiere, si ricava

$$a = 6s + \frac{2}{7}s.$$

Questa formola fa vedere che quando la chiodatura fra due lamiere si vuol fare con due file di chiodi, in ciascuna fila devono questi distare da asse ad asse di sei volte lo spessore della lamiera più i due settimi dello stesso spessore; cosicchè, essendo $3s$ il diametro delle capocchie, vi rimarrà fra una capocchia e l'altra l'intervallo di tre volte lo spessore della lamiera più i due settimi dello stesso spessore. — Per quanto spetta alla distanza fra le due file di chiodi, si può essa assumere in modo che gli assi di due chiodi successivi A e B di una stessa fila e l'asse del chiodo C, che corrisponde al mezzo dell'intervallo fra i due primi, passino per tre punti collocati nei tre vertici di un medesimo triangolo equilatero; o tutto al più in modo che la distanza fra le due file di chiodi DE ed FG sia eguale alla distanza esistente fra asse ed asse di due chiodi successivi di una medesima fila.

La distanza poi da lasciarsi dai bordi H ed I (*fig.* 163 e 164) delle lamiere alle linee passanti per gli assi delle vicine file di chiodi, deve essere almeno eguale alla distanza fra asse ed asse di due chiodi successivi.

Quanto si è detto sulle chiodature di due lamiere da unirsi per sovrapposizione, si applica pure alle chiodature destinate a fermare una lamiera A fra due lamiere fisse B (*fig.* 165). La somma delle superficie delle sezioni delle lamiere fisse, fatte parallelamente alla direzione nella quale si vogliono eseguire le chiodature, deve almeno eguagliare la superficie della sezione fatta nella lamiera A parallelamente alla stessa direzione: e si deve prendere per spessore *s* quello dell'ultima indicata lamiera.

Quando due lamiere, da porsi l'una di seguito all'altra, non devono essere unite per sovrapposizione, ma sibbene mediante un coprigiunto, la congiunzione deve essere considerata come il complesso di due unioni successive per sovrapposizione, le quali si riducono a sovrapporre la lamiera A (*fig.* 166) al coprigiunto C, e quindi la lamiera B allo stesso coprigiunto. Analogamente l'unione rappresentata nella figura 167 colla quale due lamiere A e B si pongono l'una di seguito all'altra fra due coprigiunti C e C′ deve essere considerata come il complesso di due unioni diverse, la prima destinata a serrare la lamiera A fra i detti coprigiunti, e la seconda destinata a fermare la lamina B fra gli stessi coprigiunti.

In alcuni casi alle capocchie, che nell'atto della chiodatura si fanno dalla parte verso cui il chiodo si ribadisce, si dà non una forma sferica, ma sibbene una forma conica col diametro della base eguale a due volte il diametro del fusto del chiodo e coll'altezza eguale ad una volta e mezzo il raggio di detto fusto. Stando alla formola (1), queste chiodature non sono evidentemente possibili con una sola fila di chiodi, perchè le capocchie verrebbero a sovrapporsi, e, quando vuolsi che esse resistano per l'attrito che producono sulle superficie di contatto delle lamiere che uniscono, è imperiosa necessità di distribuire i chiodi in due file.

198. **Numero dei chiodi da impiegarsi nelle chiodature quando vuolsi tener conto della resistenza di taglio, ossia della resistenza allo scorrimento trasversale opposto dai chiodi medesimi.** — Facendo in modo che la stabilità di una chiodatura sia affidata

alla resistenza dovuta all'attrito che ha luogo sulla superficie di contatto delle lamiere che i chiodi mantengono unite, per quanto risulta dalle deduzioni del precedente numero, i chiodi vengono a trovarsi troppo vicini gli uni agli altri, il loro numero è considerevole e quindi riesce lunga e dispendiosa la mano d'opera per collocarli a posto. Per questi motivi torna generalmente conveniente nella pratica di trascurare affatto l'accennata resistenza d'attrito e di affidare la stabilità delle chiodature alla resistenza di taglio ossia alla resistenza allo scorrimento trasversale che i chiodi possono opporre.

Le esperienze già citate al numero 196 hanno dimostrato, che la resistenza allo scorrimento trasversale nei chiodi generalmente impiegati per le connessioni di lamiere si può ritenere siccome eguale alla resistenza alla trazione delle lamiere stesse. Segue da ciò che per avere chiodature stabili basta far in modo che la somma delle superficie delle sezioni, sulle quali vien provocata la resistenza allo scorrimento trasversale di un chiodo, sia eguale alla superficie della sezione prodotta da un piano passante per gli assi di due chiodi successivi nella lamiera fra essi esistente. Partendo da questo principio nel valutare la resistenza delle chiodature, si tien anche conto dell'indebolimento che, pel fatto della perforazione, subiscono le lamiere, il qual indebolimento non deve mai essere dimenticato nella determinazione degli spessori da assegnarsi alle lamiere che devono essere inchiodate.

Si incominci dall'esaminare il caso di due lamiere che si devono unire per sovrapposizione mediante una sola fila di chiodi (*fig.* 163); come nel numero precedente, si supponga che il diametro del fusto dei chiodi sia il doppio dello spessore della lamiera, e che il diametro delle capocchie sferiche sia il triplo della l'accennato spessore; si chiami s la grossezza della lamiera ed a la distanza fra asse ed asse di due chiodi successivi. La superficie circolare della sezione trasversale del fusto di un chiodo deve essere eguale alla superficie rettangolare della sezione fatta nella lamiera (supposta non perforata) da un piano passante per gli assi di due chiodi successivi diminuita della superficie pure rettangolare della sezione fatta dallo stesso piano in un foro, e quindi, ammettendo che il diametro di un foro sia precisamente eguale a quello di un chiodo, si ha l'equazione

$$\pi s^2 = as - 2s^2,$$

d'onde

$$a = (\pi + 2)s;$$

ossia ancora, ritenendo per valore di π la sola parte intera 3,

$$a = 5s.$$

La distanza fra asse ed asse di due chiodi successivi deve adunque essere eguale a cinque volte lo spessore della lamiera, e quindi essendo $3s$ il diametro delle capocchie, vi esisterà fra una capocchia e la successiva un intervallo eguale a due volte lo spessore della lamiera. — La sezione rettangolare prodotta nella lamiera da un piano passante per gli assi di due chiodi successivi e limitata agli assi dei chiodi stessi, per 2/5 della sua lunghezza è occupata dai fori e quindi soltanto per gli altri 3/5 si può considerare come sezione resistente. Segue da ciò che una lamiera da inchiodarsi ad un'altra lamiera per sovrapposizione, onde soppperire all'indebolimento prodotto dalla perforazione, deve presentare un tale spessore da essere non solo capace di resistere allo sforzo di trazione T' cui realmente trovasi assoggettata, ma ad uno sforzo T_1' dato da

$$T_1' - \frac{2}{5} T_1' = T',$$

d'onde

$$T_1' = \frac{5}{3} T';$$

per cui, dovendosi con una sola fila di chiodi e per sovrapposizione inchiodare ad una lamiera un'altra lamiera di lunghezza nota che deve sopportare un determinato sforzo di trazione T', si determina lo spessore comune alle due lamiere colla condizione che siano esse sufficienti a stabilmente sopportare i $5/3\ T'$, e quindi si fa la chiodatura in modo che la distanza fra asse ed asse di due chiodi successivi sia il quintuplo dello spessore trovato.

Volendosi fare l'unione di due lamiere soprapposte con due file di chiodi, si determina la distanza fra due chiodi successivi qualunque A e B (*fig.* 164) di una stessa fila, ponendo la condizione che la somma delle resistenze di taglio, opposte dal mezzo chiodo

A e dal mezzo chiodo B della prima fila, nonchè dall'intiero chiodo C della seconda fila, eguagli la resistenza alla trazione che può presentare la lamiera non interrotta fra i due chiodi A e B. La somma delle superficie delle sezioni circolari dei fusti di due chiodi deve adunque eguagliare la superficie rettangolare della sezione fatta nella lamiera (supposta non perforata) da un piano passante per gli assi di due chiodi successivi di una medesima fila diminuita della superficie pure rettangolare della sezione fatta dallo stesso piano in due mezzi fori ossia in un foro intiero; e quindi si ha l'equazione

$$2\pi s^2 = as - 2s^2,$$

d'onde

$$a = 2(\pi + 1)s,$$

ossia ancora, ritenendo la sola parte intiera del valore di π,

$$a = 8s.$$

Questo risultato fa vedere che la distanza fra asse ed asse di due chiodi successivi deve essere eguale ad otto volte lo spessore della lamiera, e, essendo $3s$ i diametri delle capocchie, vi esisterà fra due capocchie successive di una stessa fila di chiodi un intervallo eguale a cinque volte lo spessore della lamiera. — La sezione rettangolare, fatta nella lamiera da un piano passante per gli assi di due chiodi successivi di una stessa fila e limitata agli assi dei chiodi stessi, pei 2/8 della sua lunghezza è occupata dai fori, e quindi soltanto per gli altri 6/8 si può considerare come sezione resistente. Una lamiera adunque da inchiodarsi ad un'altra lamiera per sovrapposizione e mediante due file di chiodi, si trova in buone condizioni di stabilità quando, per sopperire all'indebolimento prodotto dalla perforazione, presenta un tale spessore da essere non solo capace di resistere allo sforzo T' cui realmente trovasi assoggettata, ma ad uno sforzo T_1' dato da

$$T_1' - \frac{2}{8}T_1' = T',$$

d'onde

$$T_1' = \frac{4}{3}T';$$

per cui, dovendosi unire due lamiere per sovrapposizione e mediante due file di chiodi, bisogna innanzi tutto determinare lo spessore comune alle due lamiere colla condizione che siano in grado di poter sopportare uno sforzo di trazione che sia i 4/5 di quello a cui realmente sono assoggettate, e quindi si fa la chiodatura in modo che la distanza fra asse ed asse di due chiodi successivi sia otto volte lo spessore trovato. — Per quanto spetta alla distanza da lasciarsi fra le due file di chiodi, quando questa distanza si misuri fra i piani paralleli passanti per gli assi di due chiodi successivi dell'una e dell'altra fila, si può ritenere: che essa non debba essere maggiore di quella che risulta facendo in modo che gli assi dei due chiodi successivi A e B di una stessa fila e l'asse del chiodo C, che corrisponde al mezzo dell'intervallo fra i due primi, passino per tre punti collocati nei vertici di un medesimo triangolo equilatero; e che non debba essere minore di cinque volte il raggio del fusto dei chiodi.

La distanza da lasciarsi dai bordi H ed I (*fig.* 163 e 164) delle lamiere alle linee passanti per gli assi delle vicine file di chiodi, per comune consenso dei pratici, si può assumere di cinque volte lo spessore della lamiera.

Allorquando una lamiera A (*fig.* 165) si deve inchiodare fra due lamiere fisse B, si osserva che nei chiodi, invece di una, si hanno due sezioni resistenti allo scorrimento trasversale, e per conseguenza nel caso di una chiodatura da eseguirsi con una sol fila di chiodi si determina, in funzione dello spessore s della lamiera A, la distanza a fra asse ed asse di due chiodi successivi collo stabilire l'equazione

$$2\pi s^2 = as - 2s^2,$$

d'onde, ritenendo soltanto la parte intiera del valore di π,

$$a = 8s.$$

In questo caso, per tener conto dell'indebolimento prodotto dalla perforazione della lamiera A, si deve evidentemente determinare il suo spessore s in modo che sia capace di sopportare uno sforzo di trazione T_1' che sia i 4/5 dello sforzo T' cui realmente trovasi assoggettata, e fare l'inchiodatura in guisa che la distanza fra asse ed asse di due chiodi successivi sia di otto volte lo spessore della lamiera A.

Se invece la lamiera A si vuol inchiodare alle lamiere B con due file di chiodi, vi sono quattro sezioni di fusti di chiodi che resistono allo scorrimento trasversale per ogni parte di lamiera A avente larghezza eguale alla distanza da lasciarsi fra gli assi di due chiodi successivi d'una stessa fila, e quindi questa distanza si deve determinare coll'equazione

$$4\pi s^2 = as - 2s^2,$$

d'onde, ritenendo sempre la sola parte intiera del valore di π,

$$a = 14s.$$

In questo caso, la forza di trazione T_1' colla quale si deve determinare lo spessore s della lamiera, affinchè, anche dopo la perforazione necessaria ad operare l'inchiodatura, sia in buone condizioni di stabilità sotto l'azione dello sforzo di trazione T' cui realmente va assoggettata, si determina colla condizione

$$T_1' - \frac{2}{14} T_1' = T',$$

d'onde

$$T_1' = \frac{7}{6} T',$$

ossia lo spessore s della lamiera A si deve determinare supponendo che essa debba sopportare uno sforzo di trazione che sia i 7/6 dello sforzo T' che effettivamente sopporta.

L'unione rappresentata nella figura 166, la quale si presta per disporre l'una di seguito all'altra due lamiere A e B inchiodando ciascuna di esse ad un coprigiunto C, va considerata siccome il complesso di due unioni successive per sovrapposizione, ossia della lamiera A alla lamiera C e della lamiera B pure alla lamiera C. In modo analogo l'unione rappresentata colla figura 167, nella quale s'impiegano due coprigiunti C e C′ per porre due lamiere A e B l'una di seguito all'altra, deve essere considerata come il complesso di due unioni successive del genere di quella rappresentata nella figura 165, la prima destinata a fermare la lamiera A fra i detti coprigiunti, e la seconda per serrare la lamiera B fra gli stessi coprigiunti.

199. Norme generali per il calcolo delle dimensioni delle travi metalliche a parete continua. — La resistenza alla flessione ossia ai momenti inflettenti, la resistenza allo scorrimento trasversale detta anche resistenza di taglio e la resistenza allo scorrimento longitudinale, sono quelle che sempre vengono provocate nelle travi metalliche che si impiegano nelle costruzioni.

Alle sole lamiere disposte in piani perpendicolari a quello di sollecitazione ed ai ferri d'angolo suolsi affidare la resistenza alla flessione, ossia ai momenti inflettenti, nelle travi metalliche a parete continua; e si fa in modo che gli sforzi di taglio vengano per intiero sopportati dall'accennata parete. La teoria sulla flessione, che lungamente venne svolta al capitolo VI, dimostra come i momenti inflettenti e gli sforzi di taglio variino nelle diverse sezioni trasversali dei solidi rettilinei sottoposti a flessione, e come per conseguenza, nell'intento di ottenere la maggior economia di materia e per avere delle travi che si trovino nelle condizioni di solidi di egual resistenza, debba convenire di far variare dall'una all'altra le superficie delle loro sezioni trasversali. Essendo impossibile il fabbricare delle lamiere e dei ferri speciali le cui sezioni variino con una data legge continua dall'una all'altra, e d'altronde avendosi in commercio delle lamiere e dei ferri speciali con spessori variabilissimi, ma costanti da un loro estremo all'altro, è impossibile il fare delle travi metalliche composte, che si trovino precisamente nelle condizioni di solidi di egual resistenza, e solo bisogna accontentarsi di comporle in modo che si approssimino ad essere in tali condizioni. Per ottenere questo, dove i momenti inflettenti hanno grandi valori assoluti si impiega per resistere alla flessione l'assieme di lastre sovrapposte in numero maggiore di quelle che si adoperano dove i momenti inflettenti hanno valori assoluti piccoli, e, dove gli sforzi di taglio presentano i maggiori valori assoluti, s'impiegano lamiere più spesse di quelle che si adoperano dove gli sforzi di taglio hanno valori minori. Le variazioni nel numero delle lamiere destinate a resistere alle flessioni e nello spessore di quelle destinate a resistere agli sforzi di taglio si devono poi fare in modo che nella trave risulti sempre un eccesso anzichè un difetto di stabilità.

Accuratamente bisogna badare che le pareti verticali non vengano, sotto l'azione delle forze estrinseche, a subire degli spostamenti laterali; per allontanare la possibilità di tali eventi, conviene rinforzarle con apposite nervature ad esse inchiodate quando sono molto alte, e, nei varii casi che si possono presentare nella pratica delle costruzioni, quasi mai conviene assegnare ad esse uno spessore che sia al disotto di 0,005.

A motivo della forza che tende a produrre lo scorrimento longitudinale in un solido rettilineo sottoposto a flessione, della qual forza si può valutare l'intensità in una sezione longitudinale qualunque colle norme che vennero date nel precedente capitolo, le lamiere che si inchiodano ai ferri d'angolo per resistere alla flessione nella costruzione delle travi in ferro sono sollecitate a staccarsi dai ferri d'angolo stessi ed a separarsi l'una dall'altra. La resistenza delle chiodature si oppone a tale separazione, e pone l'assieme delle dette lamiere e dei ferri d'angolo nelle condizioni di poter resistere alla flessione come se fosse costituito d'un sol pezzo. Queste chiodature adunque devono essere convenientemente eseguite; importa che presentino la maggior robustezza dove la forza che tende a produrre lo scorrimento longitudinale acquista il più gran valore; e, se i chiodi hanno lo stesso diametro, è generalmente un errore il porli a distanze eguali. Per seguire un processo pratico in accordo coi dettami della teoria, conviene immaginare divisa la lunghezza della trave in varie parti non molto lunghe; e calcolare, se per esempio trattasi d'una trave con sezione a doppio T, per ciascuna di queste parti la forza che tende a produrre lo scorrimento longitudinale sulla superficie di posa della lamiera maggiormente distante dallo strato delle fibre invariabili dalla lamiera che ad essa trovasi unita; determinare il numero dei chiodi necessarii a sviluppare, per la considerata lunghezza di trave, una tal resistenza che permanentemente ed in modo stabile sia capace di opporsi alla forza che tende a produrre lo scorrimento longitudinale; e distribuire il trovato numero di chiodi in modo uniforme sulla corrispondente lunghezza di trave.

Le travi metalliche composte in ferro, oltre le inchiodature di cui or ora si è parlato, altre numerose ne esigono per unire la parete continua ai ferri d'angolo, per porre l'una di seguito all'altra le lamiere che costituiscono la parete continua, e per sopperire mediante coprigiunti alla deficienza di lunghezza delle lamiere resistenti alla flessione e dei ferri speciali. Per fare tutte queste chiodature servono le norme che vennero date nel precedente numero.

200. **Norme generali per il calcolo delle dimensioni delle travi a parete reticolata.** — Le travi a parete reticolata, al pari di quelle a parete continua, devono resistere alla flessione ossia ai momenti inflettenti, allo scorrimento trasversale ossia agli sforzi di taglio ed allo scorrimento longitudinale.

Queste travi, quando sono di ferro, presentano per resistere alla flessione le lamiere disposte in piani perpendicolari a quello di sollecitazione, i ferri d'angolo e le parti piene delle pareti verticali, le filagne e le controfilagne quando sono di legno. I tralicci sono unicamente destinati a far in modo che le accennate parti resistenti alla flessione, poste le une nelle regioni più basse e le altre nelle regioni più alte delle travi, lavorino solidariamente, ed importa determinare le dimensioni delle diverse parti di cui essi si compongono in modo che stabilmente siano capaci di sopportare gli sforzi di trazione e di compressione ai quali trovansi sottoposti.

Per determinare le superficie delle sezioni rette dei diversi pezzi componenti un traliccio, incomincio dall'osservare: che, considerando una trave orizzontalmente collocata su due appoggi e caricata d'un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza, resistono alla trazione quei pezzi che incontrano l'asse verticale DD' (*fig.* 168) della trave al di sotto del punto F posto all'intersezione del detto asse coll'asse orizzontale OO'; che resistono alla compressione quei pezzi, i quali incontrano l'asse DD' al di sopra del punto F; e che questo diverso modo di resistere dei pezzi diretti nell'uno e nell'altro senso deriva da ciò che i loro punti d'attacco colle parti resistenti alla flessione tendono a subire spostamenti tanto più grandi quanto più sono prossimi alla sezione di mezzo EC. Ciò premesso, suppongasi che siano:

a la semi-lunghezza $\overline{AC}$ di una trave a traliccio;

x la distanza di una sezione trasversale qualunque MN dall'appoggio vicino A;

p la parte di peso uniformemente ripartito sulla trave che corrisponde all'unità di lunghezza;

α l'angolo acuto che misura l'inclinazione degli assi dei diversi pezzi componenti il traliccio all'orizzonte.

Supponendo tolto il traliccio della parte di trave che trovasi a diritta della sezione qualunque MN, affinchè l'altra parte $AGMN$ possa mantenersi nelle stesse condizioni d'equilibrio in cui trovasi realmente quando esiste la parte che si suppone tolta, bisogna tener conto delle azioni molecolari sviluppate in detta sezione dai diversi pezzi componenti il traliccio; e queste azioni in modo semplicissimo possono essere determinate quando si osservi che, non dovendo il traliccio resistere ai momenti inflettenti, devono esse fare equilibrio allo sforzo di taglio che si verifica nella sezione MN. Ora, essendo questo sforzo di taglio la differenza fra la reazione pa prodotta dall'appoggio contro la trave ed il peso px uniformemente distribuito sulla lunghezza AN, vale esso $p(a-x)$; e siccome, chiamando T′ la resistenza alla trazione opposta da un qualunque dei pezzi del traliccio incontranti l'asse verticale DD′ al di sotto del punto F e T″ la resistenza alla pressione opposta da uno qualunque dei pezzi del traliccio incontranti il detto asse al di sopra dello stesso punto, sono

$$T' \operatorname{sen} \alpha, \qquad T'' \operatorname{sen} \alpha$$

le loro componenti verticali, le cui somme devono eguagliare il trovato sforzo di taglio, indicando queste somme col simbolo Σ, si ha

$$\operatorname{sen} \alpha\, (\Sigma T' + \Sigma T'') = p\,(a-x),$$

d'onde

$$\Sigma T' + \Sigma T'' = \frac{p\,(a-x)}{\operatorname{sen} \alpha}.$$

Il complesso dei pezzi del traliccio deve adunque nella sezione trasversale MN sviluppare le tensioni e le compressioni la cui somma è $\frac{p\,(a-x)}{\operatorname{sen} \alpha}$, e quindi, chiamando Ω la somma delle superficie delle sezioni rette degli accennati pezzi si può essa determinare coll'equazione di stabilità

$$\frac{p\,(a-x)}{\operatorname{sen} \alpha} = n\,R\,\Omega$$

essendo n un coefficiente di stabilità da assumersi siccome variabile fra 1/10 ed 1/6 per le travi metalliche e fra 1/10 ed 1/15 per le travi in legno, ed R il più piccolo dei due coefficienti di rottura per estensione e per compressione relativo alla materia di cui i pezzi del traliccio sono costituiti.

La distanza fra asse ed asse di due pezzi successivi di un traliccio può oscillare fra limiti assai variabili. Alcuni ingegneri usano far in modo che questa distanza sia tale da essere i vani prossimamente eguali ai pieni; alcuni altri l'assumono molto più grande e persino superiore ad 1 metro. Una volta stabilita la distanza a cui vogliousi collocare i diversi pezzi di un traliccio e quindi i punti a, b, c, ... ed a', b', c', ..., in cui i loro assi vengono ad intersecare le linee AB e GH sulle quali si vogliono effettuare le loro chiodature colle parti resistenti alla flessione, ecco come si può impiegare l'ultima equazione nella determinazione delle superficie delle sezioni rette da assegnarsi ai diversi pezzi. Chiamando m il numero dei pezzi del traliccio tagliati da una sezione trasversale qualunque MN della trave ed ω la superficie della sezion retta di uno qualunque di questi pezzi, si ha $\Omega = m\,\omega$, e quindi dalla citata equazione di stabilità si ricava

$$\omega = \frac{p\,(a-x)}{m\,n\,\mathrm{R}\operatorname{sen}\alpha} \qquad (1).$$

Ponendo in quest'equazione $x=0$, si ha la superficie ω_0 della sezion retta da assegnarsi ai pezzi del traliccio i quali incontrano la sezione trasversale AG; ponendo nella stessa equazione $x=\overline{\mathrm{A}a}$, si ottiene la superficie ω_1 da darsi alla sezion retta dei due pezzi ad' ed $a'd$ partenti dai punti a ed a'; facendo $x=\overline{\mathrm{A}b}$, risulta la superficie ω_2 della sezion retta dei due pezzi be' e $b'e$ i quali partono dalla sezione trasversale della trave determinata da due punti b e b'; e continuando collo stesso metodo si possono ottenere le superficie delle sezioni rette di tutti i pezzi componenti il traliccio fino ai due PQ ed RS che incontrano nel mezzo o che sono più prossimi ad incontrar nel mezzo l'asse OO′. Determinate per tal modo le superficie delle sezioni trasversali della metà dei pezzi componenti il traliccio, le stesse superficie verranno assegnate all'altra metà facendo in modo che abbiano egual sezione trasversale i pezzi simmetricamente posti rispetto all'asse verticale DD′.

Allorquando è quistione, non di una trave a traliccio per cui gli sforzi di taglio sono gli stessi in sezioni trasversali equidistanti da quella di mezzo, ma d'una trave in cui gli sforzi di taglio variano in modo non simmetrico rispetto alla detta sezione di mezzo, nella formola (1) che dà il valore di ω, convien porre invece di $p\,(a-x)$ i valori assoluti degli sforzi di taglio per le sezioni trasversali della trave corrispondenti ai punti in cui gli assi dei pezzi del traliccio incontrano le linee sulle quali trovansi gli assi delle loro chiodature coi pezzi resistenti alla flessione. Nel fare il calcolo conviene, incominciando da un estremo della trave o dello scompartimento di trave che si considera, progredire fino a trovare le superficie delle sezioni trasversali dei due pezzi del traliccio i cui assi incontrano l'asse orizzontale della trave nel punto in cui questo interseca la sezione alla quale corrisponde il minor valore assoluto dello sforzo di taglio, e quindi fare lo stesso calcolo a partire dall'altro estremo per trovare le superficie delle sezioni trasversali degli altri pezzi del traliccio.

Le pareti reticolate, al pari delle pareti continue, sono soggette a subire degli spostamenti laterali, quando abbiano spessore troppo piccolo i pezzi di cui esse sono composte, ed è per ovviare a questo inconveniente che, nei varii casi di travi reticolate che può avvenire di dover considerare all'ingegnere costruttore, quasi mai conviene assumere tale spessore al disotto di metri 0,005.

Venendo ora all'angolo che gli assi dei diversi pezzi di un traliccio devono fare coll'orizzonte, riesce facile il dimostrare che si ha la più grande economia di materia quando si fa esso di 45°. Infatti, risulta dalla formola (1) che la superficie della sezion retta di un pezzo qualunque di un traliccio è proporzionale al rapporto $\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$, che la lunghezza dello stesso pezzo è proporzionale alla sua proiezione orizzontale e quindi al rapporto $\frac{1}{\cos\alpha}$, e che il suo volume è proporzionale al rapporto $\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}$. Ora è minimo questo rapporto, e per conseguenza è minimo il volume che ad esso è proporzionale, quando il denominatore $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$ è massimo, il che avviene quando $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$, ossia quando $\alpha = 45°$.

Per quanto spetta alle inchiodature da eseguirsi nelle travi a parete reticolata si osserveranno le norme che vennero date nei precedenti numeri 197, 198 e 199.

201. **Ipotesi generalmente ammesse nel calcolo delle dimensioni delle incavallature.** — Nell'applicare i principii della statica e le diverse formole relative alla resistenza dei materiali, al calcolo delle forze, cui trovansi assoggettati i varii pezzi delle incavallature, ed alla determinazione delle dimensioni che a questi pezzi conviene assegnare affinchè si trovino in buone condizioni di stabilità, si fa generalmente astrazione dalla rigidità delle congiunzioni e dall'attrito considerevole che questi sistemi incontrano sui loro appoggi; e così notevolmente si semplificano le risoluzioni dei problemi in favore della stabilità, giacchè si trascurano due resistenze che in genere concorrono ad accrescere la solidità dei sistemi articolati. Per quanto spetta alle forze estrinseche da cui le incavallature sono caricate, o si riducono esse ad un peso

uniformemente distribuito sulla loro proiezione orizzontale, oppure ad un peso uniformemente ripartito sulle proiezioni orizzontali di superficie triangolari, trapezie e coniche. In quello che immediatamente segue si discutono alcuni problemi, in cui si suppone che le forze estrinseche siano pesi ripartiti nel primo dei modi indicati, e si lascia che il lettore, con ragionamenti analoghi a quelli che servirono di guida nel risolvere il problema VI del numero 108 e nel trovare al numero 172 le espressioni del momento inflettente μ e della forza tangenziale T, si deduca come dovrebbero essere modificate le soluzioni quando si verificassero altre maniere di ripartizione dei pesi.

202. **Incavallatura di piccola portata**. — Si consideri l'incavallatura della forma più semplice, ossia quella unicamente costituita d'una catena orizzontale AB (*fig.* 169), appoggiata orizzontalmente a due muri, e di due puntoni eguali AC e BC i quali a vicenda si contrastano nel vertice C.

Chiamando

$2a$ la portata $\overline{AB}$ dell'incavallatura,

α l'angolo CAB che misura l'inclinazione dell'asse del puntone coll'orizzonte,

p il peso che gravita sopra ogni unità di lunghezza della proiezione orizzontale dei due puntoni,

si ha: che la catena sopporta all'estremo A la pressione pa, e che, sostituendo al puntone BC la spinta orizzontale Q che esso esercita contro l'altro puntone AC, quest'ultimo si trova in circostanze identiche a quelle del solido prismatico considerato nel problema I del numero 152; che la pressione massima Q_{2m} riferita all'unità di superficie, la quale si verifica nella sezione pericolosa del puntone, è quella data dalla formola (4) del citato numero; e finalmente che l'equazione di stabilità relativa alla compressione (num. 151) è

$$n''R''=\frac{p}{2}\left(\frac{a^2u''}{4I'}+\frac{a\,u''\,\Omega+I'\operatorname{sen}^3\alpha}{u''\Omega^2\operatorname{sen}\alpha}\right) \qquad (1).$$

Si potrebbero anche porre le equazioni di stabilità relative alla estensione ed allo scorrimento trasversale; ma, siccome i legnami ed i ferri, che generalmente vengono impiegati nella costruzione dei puntoni per incavallature ammettono un coefficiente di rottura per compressione minore di quello di rottura per estensione, ed hanno quasi sempre sezioni trasversali simmetriche rispetto alle orizzontali passanti pei loro centri di superficie, i puntoni i quali si trovano in buone condizioni di stabilità per rapporto alla resistenza alla compressione, lo sono ancora meglio sotto il rapporto della resistenza all'estensione ed allo scorrimento trasversale, e quindi l'equazione di stabilità relativa alla compressione è la sola che ordinariamente al costruttore importa di considerare nella determinazione delle dimensioni dei puntoni per incavallature.

Venendo ora alla determinazione dello sforzo, cui trovasi assoggettata la catena, si osserva che essa deve sopportare: la spinta orizzontale Q, che ognuno dei puntoni esercita in ciascuna delle sue estremità; il peso p' uniformemente distribuito su ogni unità di lunghezza della catena stessa e proveniente dal proprio peso e talvolta anche dal peso d'un'impalcatura con un sovrappostovi sovraccarico permanente od accidentale. La spinta orizzontale Q prodotta da uno dei puntoni, per esempio dal punto AC sull'estremità A della catena, si determina ragionando come nel problema I del numero 152; ammette lo stesso valore che già venne trovato risolvendo il citato problema; e quindi si calcola colla formola

$$Q = \frac{pa}{2 \operatorname{tang} \alpha}.$$

Considerando la catena siccome un solido orizzontalmente collocato su due appoggi, caricato di pesi e sottoposto ad una forza tendente Q, contro ciascuno dei suoi estremi ha luogo la reazione verticale $a(p+p')$ diretta dal basso all'alto e la pressione pure verticale ap diretta dall'alto al basso. Ad ogni estremo della catena si può dunque supporre applicata la forza verticale $a(p+p')-ap = ap'$ diretta dal basso all'alto, per cui, prendendo l'origine delle coordinate in A, l'asse delle ascisse z nella direzione AB e l'asse delle ordinate u al disotto del punto A, i valori generali del momento inflettente μ e della forza tendente T risultano

$$\mu = \frac{1}{2} p' z^2 - p' a z,$$

$$T = \frac{pa}{2 \operatorname{tang} \alpha}.$$

Il valore del momento inflettente μ coi segni cangiati, giacchè si conserva negativo pei valori di z compresi fra $z=0$ e $z=2a$, ed il valore di T col proprio segno, giacchè rappresenta esso una tensione, si devono porre nelle espressioni (1) e (2) del numero 151, il primo invece di μ' e di μ'' il secondo invece di T′ e T″; e dopo bisogna cercare quali sono i valori particolari z' e z'' di z determinanti le due sezioni cui corrispondono i due valori massimi di dette espressioni. Facendo le indicate sostituzioni, differenziando le espressioni che risultano per rapporto a z ed eguagliando a zero le loro derivate, si trova

$$z' = z'' = a,$$

il qual risultato facilmente si poteva prevedere giacchè, essendo costante la tensione T, la sezione pericolosa deve essere quella cui corrisponde il valore massimo del momento inflettente μ. La sezione pericolosa, tanto per riguardo all'estensione quanto per riguardo alla compressione, è adunque quella di mezzo, cui corrispondono i valori

$$\mu' = \mu'' = \frac{1}{2} p' a^2,$$

$$\mathrm{T}' = \mathrm{T}'' = \frac{pa}{2 \operatorname{tang} \alpha};$$

segue da ciò che la tensione massima Q_{1m} e la pressione massima Q_{2m}, riferite all'unità di superficie, ammettono i valori

$$Q_{1m} = \frac{a}{2}\left(\frac{p' a u_1'}{I_1'} + \frac{p}{\Omega_1 \operatorname{tang} \alpha}\right),$$

$$Q_{2m} = \frac{a}{2}\left(\frac{p' a u_1''}{I_1'} - \frac{p}{\Omega_1 \operatorname{tang} \alpha}\right);$$

e che finalmente per la catena si avranno le due equazioni di stabilità (num. 151)

$$\left.\begin{aligned} n'\mathrm{R}' &= \frac{a}{2}\left(\frac{p' a u_1'}{I_1'} + \frac{p}{\Omega_1 \operatorname{tang} \alpha}\right) \\ n''\mathrm{R}'' &= \frac{a}{2}\left(\frac{p' a u_1''}{I_1'} - \frac{p}{\Omega_1 \operatorname{tang} \alpha}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2),$$

la prima delle quali è relativa all'estensione e la seconda alla compressione. È inutile di considerare l'equazione di stabilità relativa alla resistenza di taglio, giacchè le travi in legno e le spranghe prismatiche in ferro, che s'impiegano per formare le catene delle incavallature, si trovano generalmente in migliori condizioni di stabilità sotto il rapporto della resistenza di taglio, anzichè sotto il rapporto delle resistenze all'estensione ed alla compressione.

Fissandosi preventivamente le dimensioni della sezion retta del puntone meno una ed esprimendo la superficie Ω, il momento d'inerzia I' e la distanza u'' in funzione delle dimensioni note e di quella incognita, si determina questa mediante l'equazione (1). Analogamente, lasciando incognita una sola delle dimensioni della sezion retta della catena ed esprimendo Ω_1, I_1', u_1' ed u_1'' in funzione delle dimensioni cognite e della dimensione incognita, colle equazioni (2) si trovano due valori di quella dimensione della sezione trasversale della catena la quale venne lasciata incognita, ed il maggior di questi valori è quello da adottarsi siccome rappresentante la cercata dimensione.

203. **Incavallature di portata media.** — Un'incavallatura di portata media e di un uso frequentissimo nella pratica consiste: in due puntoni AC e BC (*fig.* 170); nel monaco verticale CF, contro il quale vengono ad appoggiarsi le due estremità superiori dei puntoni; nelle due razze GE e GD sorrette dal monaco e destinate ad impedire l'inflessione del puntone; e nella catena orizzontale AB che verso le sue estremità riceve in due intagli obliqui gli estremi inferiori dei puntoni e che nel suo mezzo è sostenuta mediante una staffa in ferro HF che va ad attaccarsi al monaco. Gli sforzi a cui trovansi assoggettati i diversi pezzi di questa incavallatura e le loro dimensioni si calcolano generalmente trascurando i pesi del monaco e delle razze siccome piccoli relativamente a quelli degli altri pezzi ed a quelli sopportati dai puntoni; e, per uniformarsi a quanto generalmente succede nella pratica nonchè per maggior semplicità di calcolo, si ammette che i due punti D ed E in cui gli assi delle razze incontrano gli assi dei puntoni siano nel mezzo della lunghezza di questi ultimi. Alle lettere a, α, p e p' si attribuiscano i significati che loro vennero dati nel precedente numero, e si chiami β l'angolo GDC il quale misura l'inclinazione dell'asse di una razza coll'asse del corrispondente puntone.

Uno qualunque dei due puntoni, per esempio il puntone AC, si può risguardare siccome un solido prismatico, obliquamente disposto, uniformemente caricato di pesi e sostenuto in tre punti equidistanti ed in linea retta, per cui trovasi esso in condizioni analoghe a quelle del solido che già venne considerato nel problema II del numero 152. La pressione normale all'asse del puntone, che ha luogo contro la razza DF nel punto D, vien dunque espresso da

$$\frac{5}{8} pa\cos\alpha,$$

la quale, dovendo essere eguale alla componente normale all'asse del puntone della pressione Q che sopporta la detta razza, conduce all'equazione d'equilibrio

$$Q\operatorname{sen}\beta = \frac{5}{8} pa\cos\alpha,$$

d'onde

$$Q = \frac{5}{8} pa \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}.$$

E l'equazione di stabilità per una qualunque delle due razze (num. 40) risulta

$$\frac{5}{8} pa \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = n''R''\Omega_1 \qquad (1).$$

La catena AB, trovandosi sostenuta nel suo punto di mezzo dalla staffa FH, si deve considerare siccome un solido il cui asse fa coll'orizzonte un angolo nullo e collocato su tre appoggi equidistanti. La detta staffa, sopportando i 5/8 del peso della catena, trovasi adunque assoggettata ad uno sforzo di trazione T' dato da

$$T' = \frac{5}{4} p'a;$$

per cui l'equazione di stabilità che ad essa si adatta è (num. 18)

$$\frac{5}{4} p'a = n'R'\Omega_2 \qquad (2).$$

Dicendo Z la pressione verticale che ciascuno dei puntoni esercita sulla catena nell'estremo in cui a questa si incastra, eguale e contraria alla reazione verticale dell'estremo della catena sul puntone, ed osservando che la parte di peso di catena che non è sopportata dalla staffa si bipartisce sugli appoggi dell'incavallatura, ciascuno di questi appoggi deve sopportare una pressione verticale espressa da

$$Z+\frac{3}{8}p'a;$$

e, siccome questa pressione vale la metà del peso dell'incavallatura e del peso che essa sopporta, si ha l'equazione

$$Z+\frac{3}{8}p'a=pa+p'a,$$

dalla quale si ricava

$$Z=pa+\frac{5}{8}p'a.$$

Chiamando ora T la tensione orizzontale della catena, eguale e contraria alla reazione orizzontale che ha luogo sull'estremo A del puntone, e scomponendo, tanto questa tensione orizzontale, quanto la forza verticale Z in due, l'una normale e l'altra parallela al puntone, le due componenti normali, prese coi segni che loro competono, devono eguagliare la pressione normale

$$\frac{3}{16}pa\cos\alpha$$

esercitata dal puntone nel punto A, e quindi l'equazione

$$Z\cos\alpha-T\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{16}pa\cos\alpha,$$

dalla quale, dopo d'aver sostituito per Z il suo valore, si ricava

$$T=\frac{a}{16}(13p+10p')\cot\alpha.$$

Questa tensione è costante per qualsiasi sezione della catena; si avrà quindi nel solido una sola sezione pericolosa tanto per riguardo all'estensione quanto per riguardo alla compressione; e corrisponderà essa al valore massimo del momento inflettente μ per una sezione qualunque della catena. Ora prendendo per origine di coordinate l'estremo A dell'asse della catena, per asse delle ascisse z l'asse stesso della catena, e per asse delle ordinate la verticale Au condotta al disotto del punto A, il valore generale del momento inflettente μ per una sezione trasversale qualunque della mezza catena AH trovasi espresso da

$$\mu=\frac{1}{2}p'z^2-\frac{3}{8}p'az.$$

Questo momento inflettente si annulla per $z=0$ e per $z=\frac{3}{4}a$; si conserva negativo per valori di z compresi fra questi limiti; e colla differenziazione si riconosce che acquista il massimo valore assoluto

$$\frac{9}{128}p'a^2$$

per $z=\frac{3}{8}a$. Il momento inflettente μ acquista segno positivo e prende valori ognor crescenti quando si fa variare l'ascissa z fra $z=\frac{3}{4}a$ e $z=a$, e si trova che per $z=a$ diventa

$$\frac{1}{8}p'a^2.$$

I due più grandi valori assoluti che può adunque prendere il momento inflettente μ nella metà AH della catena sono $\frac{9}{128}p'a^2$ e $\frac{1}{8}p'a^2$, il secondo dei quali è evidentemente maggiore del primo, giacchè, ridotto ad avere il denominatore 128, diventa $\frac{16}{128}p'a^2$. Per la parte BH di catena, trovandosi essa nelle stesse condizioni in cui trovasi la parte AH, il massimo valore del momento inflettente è pur quello che già si è trovato aver luogo nella sezione trasversale corrispondente al punto H. Dalla fatta discussione risulta che per la catena la tensione massima Q_{1m} e la pressione massima Q_{2m}, riferite all'unità di superficie, vengono date dalle formole

$$\left.\begin{aligned} Q_{1m} &= \frac{a}{8}\left(\frac{p'au_3'}{I_3'} + \frac{13p+10p'}{2\Omega_3}\cot\alpha\right), \\ Q_{2m} &= \frac{a}{8}\left(\frac{p'au_3''}{I_3'} - \frac{13p+10p'}{2\Omega_3}\cot\alpha\right); \end{aligned}\right.$$

e che finalmente le relative equazioni di stabilità sono (num. 151).

$$\left.\begin{aligned} n'R' &= \frac{a}{8}\left(\frac{p'au_3'}{I_3'} + \frac{13p+10p'}{2\Omega_3}\cot\alpha\right) \\ n''R'' &= \frac{a}{8}\left(\frac{p'au_3''}{I_3'} - \frac{13p+10p'}{2\Omega_3}\cot\alpha\right) \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Il monaco CF sopporta la tensione totale $\frac{5}{4}p'a$ sopportata dalla staffa, più ancora la somma delle componenti verticali delle pressioni a cui trovansi assoggettate le due razze DG ed EG. Ora, essendo

$$ACH = 90° - CAH = 90° - \alpha$$

$$CGD = 180° - ACH - GDC = 90° - (\beta - \alpha),$$

la somma delle accennate due componenti della pressione Q sopportata da ciascuna delle due razze vale

$$2Q \operatorname{sen}(\beta - \alpha);$$

lo sforzo di trazione T_1' cui trovasi sottoposto il monaco, vien dato dalla formola

$$T_1' = \frac{5}{4}p'a + 2Q\operatorname{sen}(\beta - \alpha),$$

ossia ancora, sostituendo a Q il valore già trovato in funzioni dei dati del problema, dà

$$T_1' = \frac{5}{4} a \left[p' + p \frac{\cos\alpha \operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\operatorname{sen}\beta} \right];$$

e quindi risulta

$$\frac{5}{4} a \left[p' + p \frac{\cos\alpha \operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{\operatorname{sen}\beta} \right] = n' R' \Omega_4 \qquad (4),$$

per equazione di stabilità (num. 18) atta a determinare la superficie della sezione trasversale del monaco.

Rimane ancora a trovarsi l'equazione di stabilità relativa ad uno dei puntoni, e per far questo importa innanzi tutto conoscere la pressione orizzontale Q' che ciascuno di essi esercita contro l'estremo superiore del monaco, la qual pressione è eguale e direttamente contraria alla reazione orizzontale che il monaco vi contrappone. Perciò, considerando il puntone AC, basta scrivere l'equazione esprimente la condizione che vi ha equilibrio di traslazione fra tutte le forze orizzontali ad esso applicate. Queste forze sono: la reazione domandata Q', la componente orizzontale $Q\cos(\beta - \alpha)$ della reazione d'intensità Q che la razza FD esercita in D contro il detto puntone e la reazione T con cui la catena reagisce sull'estremo A del puntone medesimo; e quindi l'equazione determinatrice di Q' è

$$Q' + Q\cos(\beta - \alpha) = T,$$

dalla quale, mettendovi per Q e per T i loro valori in funzione dei dati del problema, si deduce

$$Q' = \frac{a}{8} \left[\frac{13p + 10p'}{2\operatorname{sen}\alpha} - \frac{5p\cos(\beta - \alpha)}{\operatorname{sen}\beta} \right] \cos\alpha.$$

Considerando ora il puntone AC siccome un solido prismatico caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale e sollecitato in C dalla forza orizzontale Q' diretta da C verso x e dalla forza verticale $\frac{1}{2} T_1'$ operante da C verso H, in D dalla forza obliqua Q diretta da D verso y, in A dalla forza orizzontale T rivolta da A verso H e dalla forza verticale Z agente dal basso all'alto. Osservando che la sezione pericolosa sotto il riguardo della resistenza alla rottura per compressione è generalmente, pei puntoni che vengono impiegati nelle incavallature dei tetti, una delle sezioni corrispondenti agli appoggi intermedii (*u*), si ha: che pel puntone AC si verifica la pressione massima riferita all'unità di superficie nella sezione corrispondente al punto D; che il momento inflettente μ'' relativo a questa sezione è espresso da

$$\mu''=\frac{1}{8}pa^2+\frac{1}{4}T_1'a-\frac{1}{2}Q'a\,\mathrm{tang}\,\alpha;$$

che la forza comprimente T″ relativa alla stessa sezione è

(*u*) Per convincersi che le sezioni d'appoggio sono generalmente quelle, in cui più facilmente può avvenire rottura per compressione nei puntoni i quali vengono impiegati nelle incavallature, basta osservare: che, nel caso di un puntone uniformemente caricato sulla sua proiezione orizzontale, l'espressione della resistenza Q_2 (num. 150) riferita all'unità di superficie che in una sezione qualunque oppone la fibra maggiormente compressa, e quindi la stessa pressione sopportata da questa fibra, ha la forma parabolica

$$Q_2=Az^2+Bz+C,$$

essendo z l'ascissa del centro di superficie di una sezion retta qualunque del puntone contata sul suo asse a partire dall'estremo inferiore; che, dando a z diversi valori, calcolando i corrispondenti valori di Q_2 e costruendo per le diverse parti di puntone comprese fra due appoggi, le curve paraboliche le cui ascisse sono gli assunti valori di z e le cui ordinate i trovati valori di Q_2, ciascuna di queste curve, analogamente a quanto si è trovato (numeri 119 e 122, figure 103 e 104) nella rappresentazione grafica dei momenti inflettenti relativi alle diverse sezioni di un solido rettilineo orizzontalmente collocato su più di due appoggi, presenta un'ordinata massima assoluta per una sezione intermedia a quelle degli appoggi ed un'ordinata massima relativa in corrispondenza degli appoggi stessi; che finalmente, entro i limiti delle inclinazioni che soglionsi assegnare ai puntoni delle incavallature e per le forme usate in pratica, il massimo fra i massimi assoluti e relativi che hanno luogo nelle ordinate delle curve paraboliche anzidette si verifica sempre su uno degli appoggi intermedii. La verità dell'ultima conclusione non si può dimostrare in modo generale; per ogni caso particolare bisogna costrurre le curve delle pressioni massime riferite all'unità di superficie per ciascuna delle parti in cui si può immaginare diviso il puntone dalle sezioni corrispondenti agli appoggi per accertarsi che la pressione massima Q_{2m} ha luogo in una di queste; oppure, non volendosi costrurre le dette curve, si può cercare la sezione pericolosa ed il valore di Q_{2m} col metodo tenuto nel risolvere il problema II del numero 152. Il signor Generale Celestino Sachero nel § 16 del suo commendevole lavoro intitolato *Studii sulla stabilità delle armature dei tetti*, prende ad esame dei puntoni di forma speciale, ed è ragionando su essi che dimostra come la rottura per compressione sia sempre più probabile nelle sezioni corrispondenti agli appoggi intermedii anzichè in qualunque altra sezione.

$$T'' = \frac{1}{2} p a \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2} T_1' \operatorname{sen} \alpha + Q \cos \beta + Q' \cos \alpha ;$$

che la pressione massima Q_{2m} riferita all'unità di superficie in detta sezione, quando si pongono per T_1', Q e Q' i loro valori in funzione dei dati del problema, si riduce a

$$Q_{2m} = \frac{a}{16} \left[\frac{p a u_5''}{2 I_5'} + \frac{(8 + 5 \cos^2 \alpha) p + 10 p'}{\Omega_5 \operatorname{sen} \alpha} \right] ;$$

e finalmente che l'equazione di stabilità per il puntone è (num. 151)

$$n'' R'' = \frac{a}{16} \left[\frac{p a u_5''}{2 I_5'} + \frac{(8 + 5 \cos^2 \alpha) p + 10 p'}{\Omega_5 \operatorname{sen} \alpha} \right] \quad (5).$$

Riepilogando quanto venne detto in questo numero pel calcolo delle dimensioni da assegnarsi ai diversi pezzi dell'incavallatura rappresentata nella figura 170, si può dire: che ricavando il valore di Ω_1 dall'equazione (1) si ha la superficie della sezione trasversale di ciascuna delle due razze; che risolvendo l'equazione (2) per rapporto ad Ω_2 si ottiene la superficie della totale sezione orizzontale da darsi alla staffa; che, lasciando incognita una sola delle dimensioni della sezione trasversale della catena ed esprimendo la superficie Ω_3, il momento d'inerzia I_3 e le distanze u_3' ed u_3'' in funzione delle dette dimensioni, le equazioni (3) servono a dare due distinti valori della dimensione incognita, il maggiore dei quali è quello da adottarsi; che, trovando il valore di Ω_4 coll'equazione (4) si ottiene la superficie della sezione trasversale che convien dare al monaco; e finalmente che, esprimendo la superficie Ω_5, il momento d'inerzia I_5' e la lunghezza u_5'' in funzione delle dimensioni della sezion retta del puntone, lasciandone una sola incognita, si ha dall'equazione (5) il mezzo di calcolare il valore di quest'ultima.

204. Incavallature di grande portata. — Un'incavallatura di grande portata, che ben di frequente venne e che tuttora viene impiegata nelle costruzioni, è quella così detta *alla Palladio*, di cui si ha la rappresentazione nella figura 171. Quest'incavallatura consta di due puntoni AC e BC, di una catena AB, di un monaco CF contro la cui sommità vengono ad appoggiarsi i due puntoni, di una controcatena ED, di due sottopuntoni DM ed EN e di due monaci laterali DH ed EI. In quest'incavallatura si fa generalmente in modo che l'asse della controcatena incontri gli assi dei puntoni nel loro punto di mezzo; e ben sovente avviene che gli assi dei sottopuntoni non sono paralleli a quelli dei puntoni. Passando al calcolo delle dimensioni dei diversi pezzi componenti il descritto sistema si attribuiscano alle lettere α e p i significati che loro già vennero dati al numero 202, e si chiamino:

a la distanza $\overline{\mathrm{LK}}$ fra gli assi dei due monaci laterali;

γ l'angolo acuto che misura l'inclinazione dell'asse di un sottopuntone coll'asse della catena;

P il peso della catena;

P′ e P″ i pesi rispettivi del monaco superiore e di ciascuno dei monaci inferiori;

P‴ il peso della controcatena;

$\mathrm{P^{IV}}$ il peso d'un sottopuntone.

La catena AB è un solido prismatico caricato d'un peso uniformemente distribuito, proveniente dal peso proprio e dal peso di un tavolato che sovr'essa ben sovente esiste, e sostenuto in quattro punti simmetricamente posti rispetto alla sua sezione trasversale di mezzo. Gli accennati quattro punti di sostegno sono tali che, trovandosi i punti D ed E in corrispondenza delle sezioni trasversali di mezzo dei puntoni, si ha

$$\overline{\mathrm{AK}}=\overline{\mathrm{BL}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{LK}}=a,$$

per cui, essendo m_2 i momenti inflettenti eguali per le due sezioni trasversali corrispondenti ai punti K ed L, $\mathrm{R_1}$ le reazioni eguali opposte dai due sostegni A e B ed $\mathrm{R_2}$ le reazioni pure eguali opposte dai due sostegni K ed L, applicando le formole trovate al numero 121 col fare in esse

$$a_1=\frac{1}{2}a, \qquad a_2=a$$

$$p_1 a_1=\frac{1}{4}\mathrm{P}, \qquad p_2 a_2=\frac{1}{2}\mathrm{P},$$

si ottiene

$$m_2=-\frac{9}{256}\mathrm{P}a,$$

$$R_1 = \frac{7}{128} P,$$

$$R_2 = \frac{57}{128} P.$$

Ciascuna delle staffe adunque, le quali sostengono la catena nei due punti K ed L, sopporta una tensione T espressa da

$$T = \frac{57}{128} P,$$

e quindi l'equazione di stabilità che ad ognuno di esse si conviene è (num. 18)

$$\frac{57}{128} P = n' R' \Omega_1 \qquad (1).$$

La tensione che soffre ciascuno dei due monaci laterali DH ed EI in una sua sezione orizzontale qualunque vale la tensione T della staffa aumentata del peso della parte di monaco compresa fra la sua base infima e la sezione orizzontale che si considera. Segue da ciò che, per ciascuno dei monaci laterali ha luogo la tensione massima alla sua estremità superiore; che, chiamando T′ questa tensione massima, vien essa data da

$$T' = T + P'' = \frac{57}{128} P + P'';$$

e finalmente che l'equazione di stabilità atta a determinare la sezione trasversale da assegnarsi ai detti monaci è (num. 18)

$$\frac{57}{128} P + P'' = n' R' \Omega_2 \qquad (2).$$

Essendo la controcatena DE un solido prismatico orizzontalmente collocato su tre appoggi equidistanti D, G ed E, per quanto si è detto nel precedente problema stabiliendo l'equazione di stabilità per la staffa destinata a sostenere la catena nel punto di mezzo, la staffa FG deve sostenere i 5/8 del peso della controcatena e quindi una tensione T″ data da

$$T'' = \frac{5}{8} P''',$$

cui corrisponde l'equazione di stabilità (num. 18)

$$\frac{5}{8} P''' = n' R' \Omega_3 \qquad (3).$$

Il monaco CF, trovandosi in condizioni analoghe a quelle in cui trovansi i due monaci laterali DH ed EI, soffre nella sua estremità superiore la tensione T‴ espressa da

$$T''' = \frac{5}{8} P''' + P',$$

per cui l'equazione di stabilità che al medesimo si conviene risulta (num. 18)

$$\frac{5}{8} P''' + P' = n' R' \Omega_4 \qquad (4).$$

Venendo ora a considerare l'equilibrio del sistema costituito dai sottopuntoni, dalla controcatena e dai monaci inferiori, e rammentando (num. 152, probl. II) che i puntoni esercitano nei punti d'appoggio D ed E una pressione normale a ciascuno di essi espressa da

$$\frac{5}{8} pa \cos\alpha,$$

se il monaco DH deve mantenersi verticale, è necessario che tutte le forze concorrenti alla sua estremità superiore si facciano equilibrio. Tali forze sono: la detta pressione normale in D al puntone e diretta da D verso x; la tensione T′ del monaco rivolta da D verso K; la reazione Q che la controcatena compressa fra le teste dei due monaci laterali esercita contro ciascuno di essi ed operante sul monaco DK nel senso del prolungamento di ED; la reazione Q′ che ciascuno dei sottopuntoni compresso fra la catena e l'estremità superiore del corrispondente monaco esercita contro questo nel senso del prolungamento dell'asse del sottopuntone e quindi da M verso D per il monaco DH; la pressione verticale $3/16\ P'''$ che la controcatena esercita sul monaco da D verso K; e finalmente vi sarebbe la pressione normale al sottopuntone DM che il peso P^{IV} di questo corpo produce da D verso x' e della quale non si tien conto siccome trascurabile a fronte delle altre forze. Affinchè queste forze si facciano equilibrio è necessario che siano nulle le somme delle loro componenti orizzontali e verticali, per cui immediatamente risultano le seguenti equazioni determinatrici di Q e di Q'

$$Q - Q'\cos\gamma - \frac{5}{8} pa \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha = 0,$$

$$Q' \operatorname{sen}\gamma - T' - \frac{5}{8} pa \cos^2\alpha - \frac{3}{16} P''' = 0.$$

Dalla seconda di queste equazioni immediatamente si ricava il valore di Q' il quale, ponendovi il valore già noto di T', si riduce a

$$Q' = \frac{1}{\operatorname{sen}\gamma}\left(\frac{57}{128}P + P'' + \frac{5}{8} pa \cos^2\alpha + \frac{3}{16}P'''\right),$$

e dalla prima, sostituendo in essa il trovato valore di Q' e convenientemente riducendo, si ottiene

$$Q = \frac{5}{8}\,\frac{\cos\alpha\cos(\gamma-\alpha)}{\operatorname{sen}\gamma}\,pa + \left(\frac{57}{128}P + P'' + \frac{3}{16}P'''\right)\cot\gamma.$$

Ciascuno dei sottopuntoni si dovrebbe considerare siccome un solido prismatico collocato su due appoggi non posti allo stesso livello, sollecitato dal proprio peso P^{IV}, premuto sulla sua base superiore e nel senso dell'asse dalla forza Q' e mantenuto fermo alla sua estremità inferiore. Più semplicemente però, e con approssimazione più che sufficiente nella pratica, si può trascurare l'azione del peso P^{IV} nel produrre flessione e considerare il sottopuntone siccome un corpo prismatico che non s'inflette e che nella sezione pericolosa sopporta una pressione eguale alla somma della forza Q' colla componente $P^{IV} \operatorname{sen}\gamma$ del suo peso, per cui la corrispondente equazione di stabilità riesce (num. 40)

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\gamma}\left(\frac{57}{128}\mathrm{P}+\mathrm{P}''+\frac{5}{8}pa\cos^2\alpha+\frac{3}{16}\mathrm{P}'''\right)$$
$$+\mathrm{P}^{\mathrm{IV}}\operatorname{sen}\gamma=n''\mathrm{R}''\Omega_5 \qquad (5).$$

Venendo ora alla controcatena DE, è essa un solido prismatico orizzontalmente portato da tre sostegni equidistanti, caricato dal peso $\frac{\mathrm{P}'''}{a}$ uniformemente distribuito sulla sua lunghezza e compresso dalla forza Q alle due estremità. Pei materiali che vengono impiegati nella costruzione delle incavallature e per le forme sotto cui questi materiali si impiegano, la rottura nella controcatena tende a manifestarsi per compressione, anzichè per estensione; la sezione pericolosa, come già si è visto per altri casi di solidi orizzontalmente sostenuti in tre punti e caricati di un peso uniformemente distribuito, è quella di mezzo; e la pressione massima Q_{2m} riferita all'unità di superficie, che in questa sezione ha luogo, ammette il valore

$$\mathrm{Q}_{2m}=\frac{1}{32}\frac{\mathrm{P}'''a u_6''}{\mathrm{I}_6'}+\frac{\mathrm{Q}}{\Omega_6},$$

dalla quale, mettendovi per Q il valore già trovato in funzione dei dati del problema, si ricava la seguente equazione di stabilità (num. 40):

$$n''\mathrm{R}''=\frac{1}{32}\frac{\mathrm{P}'''a u_6''}{\mathrm{I}_6'}+\frac{5}{8}\frac{\cos\alpha\cos(\gamma-\alpha)}{\operatorname{sen}\gamma}\frac{pa}{\Omega_6}$$
$$+\left(\frac{57}{128}\mathrm{P}+\mathrm{P}''+\frac{3}{16}\mathrm{P}'''\right)\frac{\cot\gamma}{\Omega_6} \qquad (6).$$

Chiamando Z e Z′ le reazioni verticali dirette dal basso all'alto, che hanno luogo là dove un puntone ed il corrispondente sottopuntone s'incastrano nella catena, si ha che la reazione Z′ deve essere eguale e contraria al peso P^{IV} accresciuto della componente verticale della pressione Q′, per cui

$$\mathrm{Z}'=\mathrm{P}^{\mathrm{IV}}+\mathrm{Q}'\operatorname{sen}\gamma;$$

che la reazione opposta da ciascun appoggio, eguale e contraria alla pressione $Z+Z'+\frac{7}{128}P$ che in esso ha luogo, deve eguagliare la metà del peso di tutta l'incavallatura col sovraccarico, cosicchè

$$Z+Z'+\frac{7}{128}P=pa+\frac{1}{2}\left(P+P'+2P''+P'''+2P^{\text{IV}}\right).$$

Da questa equazione, per il trovato valore di Z' e in seguito a sostituzione del valore di Q' in funzione dei dati del problema, si deduce

$$Z=\frac{1}{8}pa\left(3+5\,\text{sen}^2\alpha\right)+\frac{1}{2}\left(P'+\frac{5}{8}P'''\right).$$

La somma algebrica delle componenti normali al puntone AC, della forza Z e della tensione orizzontale T^{IV} sopportata dalla catena nello spazio compreso fra il piede di un puntone e quello del rispettivo sottopuntone, deve eguagliare la pressione normale

$$\frac{3}{16}pa\cos\alpha$$

esercitata dal puntone nel punto A, e quindi risulta l'equazione

$$Z\cos\alpha-T^{\text{IV}}\,\text{sen}\,\alpha=\frac{3}{16}pa\cos\alpha,$$

d'onde

$$T^{\text{IV}}=Z\cot\alpha-\frac{3}{16}pa\cot\alpha.$$

Ora, dicendo T^{V} la tensione della catena nell'intervallo compreso fra i sottopuntoni, essa non è altro se non la tensione T^{IV} accresciuta della componente orizzontale della forza Q', per cui si ha l'equazione

$$T^{\text{V}}=T^{\text{IV}}+Q'\cot\gamma$$

la quale, sostituendo a T^{IV} e a Q' i loro valori di funzione dei dati del problema, dà

$$T^{v}=\frac{1}{8}pa\left[\frac{3}{2}\cot\alpha+5\frac{\cos\alpha\cos(\gamma-\alpha)}{\operatorname{sen}\gamma}\right]+\frac{1}{2}\left(P'+\frac{5}{8}P'''\right)\cot\alpha$$

$$+\left(\frac{57}{128}P+P''+\frac{3}{16}P'''\right)\cot\gamma.$$

Trovato il valore di T^{v}, si possono porre le equazioni di stabilità per la catena. Le due sezioni corrispondenti ai punti di sospensione K ed L sono le sezioni pericolose; il valore del momento inflettente relativo ad una di queste sezioni è

$$\frac{9}{256}aP;$$

la tensione massima Q_{1m} e la pressione massima Q_{2m}, che in essa si verificano, ammettono i valori dati da

$$Q_{1m}=\frac{9}{256}\frac{u_7'aP}{I_7'}+\frac{T^{v}}{\Omega_7},$$

$$Q_{2m}=\frac{9}{256}\frac{u_7''aP}{I_7'}-\frac{T^{v}}{\Omega_7};$$

e finalmente le domandate equazioni di stabilità risultano (num. 151)

$$\left.\begin{aligned} n'R'&=\frac{9}{256}\frac{u_7'aP}{I_7'}+\frac{T^{v}}{\Omega_7}\\ n''R''&=\frac{9}{256}\frac{u_7'aP}{I_7'}-\frac{T^{v}}{\Omega_7}\end{aligned}\right\}\quad(7).$$

Resta ancora a trovarsi l'equazione di stabilità relativa ad un puntone. Perciò, considerando il puntone AC e chiamando Q'' la reazione orizzontale che il monaco superiore CF vi contrappone in C, si scriva la condizione esprimente l'equilibrio di rotazione del detto puntone attorno al punto A. Le forze che tendono a far venire il puntone AC verso la catena AB sono la metà della tensione T''' del monaco superiore CF con braccio di leva a, ed il peso pa applicato nel mezzo del puntone con braccio di leva $\frac{1}{2}a$; mentre la reazione Q″ con braccio di leva $a \tang \alpha$ e la reazione $\frac{5}{8} pa \cos \alpha$ che ha luogo in D con braccio di leva $\frac{1}{2}\frac{a}{\cos \alpha}$ sono le forze le quali tendono a girare il puntone pel verso contrario. Segue da ciò che l'accennata condizione d'equilibrio è

$$Q'' a \tang \alpha + \frac{5}{16} pa^2 - \frac{1}{2} T''' a - \frac{1}{2} pa^2 = 0,$$

dalla quale, sostituendo a T‴ il suo valore in funzione dei dati del problema, si ricava

$$Q'' = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{8} pa + P' + \frac{5}{8} P'''\right) \cot \alpha.$$

Il puntone AC si può ora considerare come un solido prismatico caricato d'un peso uniformemente distribuito nella sua proiezione orizzontale e sollecitato in C dalla forza orizzontale Q″ diretta da C verso x'', e dalla forza verticale T‴ operante da C verso G; in D dalla forza normale $\frac{5}{8} pa \cos \alpha$ diretta secondo il prolungamento di Dx; in A dalla forza orizzontale T^{IV} rivolta da A verso B e dalla forza verticale Z operante dal basso all'alto. Ritenendo, per quanto si è detto nel precedente numero, che la sezione pericolosa sia quella corrispondente all'appoggio D, il momento inflettente, che ad essa si riferisce, ammette il valore

$$\frac{1}{4} T''' a + \frac{1}{8} pa^2 - \frac{1}{2} Q'' a \tang \alpha,$$

e la forza comprimente per la stessa sezione viene espressa da

$$Q'' \cos \alpha + \frac{1}{2} T''' \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2} pa \operatorname{sen} \alpha.$$

La pressione massima Q_{1m}, riferita all'unità di superficie, vale adunque pel puntone AC

$$Q_{2m} = \frac{1}{2} a \left(\frac{1}{2} T''' + \frac{1}{4} pa - Q'' \operatorname{tang} \alpha \right) \frac{u_8''}{I_8'}$$

$$+ \frac{1}{\Omega_8} \left(Q'' \cos \alpha + \frac{1}{2} T''' \operatorname{sen} \alpha + \frac{1}{2} pa \operatorname{sen} \alpha \right),$$

alla quale, quando per Q'' e T''' si pongano i loro valori in funzione dei dati del problema, corrisponde la seguente equazione di stabilità (num. 151):

$$n'' R'' = \frac{pa^2 u_8''}{32 I_8'} + \frac{1}{2 \Omega_8 \operatorname{sen} \alpha} \left(\frac{3 + 5 \operatorname{sen}^2 \alpha}{8} pa + P' + \frac{5}{8} P''' \right) \quad (8).$$

Riassumendo quanto si è detto sul calcolo delle dimensioni dei diversi pezzi componenti l'incavallatura rappresentata nella fig. 171, si può dire: che dall'equazione (1) si può ricavare la superficie Ω_1 di tutta la sezione orizzontale da assegnarsi a ciascuna delle staffe sopportanti la catena; che la superficie della sezion retta di ciascuno dei monaci laterali si ottiene risolvendo l'equazione (2) rispetto ad Ω_2; che la superficie di tutta la sezione orizzontale della staffa, la quale sostiene la controcatena nel suo mezzo, è data dal valore di Ω_3 somministrato dall'equazione (3); che l'equazione (4) serve a calcolare la superficie Ω_4 da darsi alla sezione retta del monaco di mezzo; che, risolvendo rispetto ad Ω_5 l'equazione (5), si ha la superficie della sezione trasversale che conviene assegnare a ciascun sottopuntone; che l'equazione (6) si presta al calcolo di una delle dimensioni della sezion retta dalla controcatena; che le equazioni (7) servono a determinare due diversi valori della stessa dimensione della sezione trasversale della catena, il maggiore dei quali valori è poi quello da adottarsi: e finalmente che l'equazione (8) vale per trovare una delle dimensioni della sezion retta di ciascun puntone.

Soventi volte il sottopuntone per tutta la sua lunghezza vien applicato contro il puntone. In questo caso l'angolo γ diventa eguale all'angolo α, e quindi le equazioni che servono al calcolo delle dimensioni dei diversi pezzi componenti l'incavallatura sono le stesse equazioni (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) ed (8) quando in esse si faccia $\gamma = \alpha$.

205. **Incavallatura di Polonceau con ciascun puntone rinforzato da una sola colonnetta.** — Quest'ingegnosa incavallatura

consta di due puntoni, di due colonnette, di quattro tiranti e di una catena. AC e BC (*fig.* 172) sono i puntoni, talvolta in legno, talvolta in ferro e raramente in ghisa, sostenuti normalmente nei loro mezzi D ed E dalle colonnette o saette DF ed EG di ferro o di ghisa. Queste colonnette sono articolate alle loro estremità, da una parte coi puntoni e dall'altra coi tiranti in ferro AF e CF, BG e CG, i quali, mediante articolazioni, servono a collegarle colle estremità dei puntoni. Finalmente, un tirante orizzontale FG pure in ferro riunisce le due metà dell'armatura e loro impedisce di esercitare una spinta troppo considerevole contro gli appoggi.

Per determinare gli sforzi cui trovansi assoggettati e quindi le dimensioni dei diversi pezzi componenti quest'incavallatura si attribuiscano alle lettere a, p ed α i significati che già loro vennero dati nei problemi che vennero risoluti nei tre numeri precedenti, e si chiamino β gli angoli eguali FAC, FCA, GBC e GCB che i tiranti fanno coi puntoni cui trovansi annessi. Per semplicità si trascurano generalmente i pesi delle colonnette, dei tiranti e della catena, dei quali qualche volta in modo approssimativo si tien conto, supponendo che la loro somma costituisca un peso uniformemente distribuito sui puntoni, il quale allora si comprende nel peso p.

Se dai punti C ed F si abbassano due perpendicolari CH ed FK alla linea degli appoggi, per le denominazioni stabilite, si ha: dal triangolo rettangolo CHA

$$\overline{\mathrm{CH}} = a \operatorname{tang} \alpha$$

e

$$\overline{\mathrm{CA}} = \frac{a}{\cos \alpha},$$

per cui

$$\overline{\mathrm{AD}} = \frac{1}{2} \frac{a}{\cos \alpha};$$

dal triangolo rettangolo ADF

$$\overline{\mathrm{AF}} = \frac{1}{2} \frac{a}{\cos \alpha \cos \beta}$$

e

$$\overline{\mathrm{DF}} = \frac{1}{2} a \frac{\operatorname{tang} \beta}{\cos \alpha};$$

e dal triangolo rettangolo FKA

$$\overline{\mathrm{FK}}=\frac{1}{2}a\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Siccome tutto il peso del sistema è sopportato dai sostegni A e B, in ciascuno di questi si ha la reazione verticale Z diretta dal basso all'alto data da

$$\mathrm{Z}=pa.$$

Il sistema triangolare AFC trovasi sollecitato: nel punto C da una reazione orizzontale Q diretta da C verso x; nel punto F da una reazione pure orizzontale volta da F verso G eguale e direttamente contraria alla tensione T che sopporta la catena FG; nel punto A dalla reazione verticale $\mathrm{Z}=pa$ dell'appoggio; e finalmente da tutto il peso pa portato dal puntone AC, il qual peso si può supporre applicato nel mezzo del puntone stesso. Se per semplicità nello scrivere si pone

$$\overline{\mathrm{CH}}=a\operatorname{tang}\alpha=h,$$

$$\overline{\mathrm{FK}}=\frac{1}{2}a\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}=h-h',$$

e se si osserva che

$$a=\frac{h}{\operatorname{tang}\alpha},$$

fra le quantità α, β, h ed $h'=\overline{\mathrm{CI}}$, si ha la relazione

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{2h'-h}{h}\operatorname{tang}\alpha,$$

mediante la quale, conoscendosi h, α e β, si può trovare h'.

Ciò premesso, per l'equilibrio dell'accennato sistema triangolare attorno al punto A, si ha l'equazione

$$\mathrm{Q}h-\mathrm{T}(h-h')-\frac{1}{2}pa^2=0,$$

e, poichè per l'equilibrio di traslazione le due forze orizzontali Q e T devono essere eguali, risulta

$$Q = T = \frac{1}{2}\frac{pa^2}{h'}.$$

Conoscendosi ora la tensione orizzontale T della catena FG, si può stabilire l'equazione di stabilità atta a determinare la superficie Ω_1 della sua sezione trasversale. Quest'equazione è (num. 18)

$$\frac{1}{2}\frac{pa^2}{h'} = n' R' \Omega_1 \qquad (1).$$

Le due colonnette sono destinate ad impedire l'inflessione dei puntoni, cosicchè, considerando la DF, deve essa sopportare la pressione Q' che il puntone AC esercita in D, per cui si ha: l'equazione

$$Q' = \frac{5}{8} pa \cos\alpha$$

per determinare la pressione sopportata da ciascuna delle due colonnette; e l'equazione di stabilità (num. 40)

$$\frac{5}{8} pa \cos\alpha = n'' R'' \Omega_2 \qquad (2)$$

per determinare la superficie Ω_2 della minima loro sezione trasversale.

Se ora si chiama T' la tensione sopportata da ciascuno dei due tiranti AF e BG, considerando isolatamente il puntone AC siccome sollecitato dal proprio peso, dalla reazione verticale Z, dalla forza T' applicata in A e diretta da A verso F e dalla pressione Q' applicata in D e rivolta nel senso del prolungamento di FD, deve esso trovarsi in equilibrio attorno al punto C; e quindi, osservando che la lunghezza della perpendicolare $\overline{CL}$ abbassata dal vertice C sulla direzione del tirante AF è

$$a\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha},$$

risulta l'equazione

$$\frac{1}{2}pa^2 - Za + T'a\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}Q'\frac{a}{\cos\alpha} = 0,$$

dalla quale, sostituendovi per Z e per Q' i loro valori in funzione dei dati del problema, si ricava

$$T' = \frac{13}{16}pa\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Allo stesso risultato si poteva arrivare ponendo la condizione che in A le componenti normali al puntone della reazione Z rivolta dal basso all'alto e della tensione T' del tirante AO diretta da A verso F devono eguagliare la pressione $\frac{3}{16}pa\cos\alpha$ che su esso punto ha luogo. Al trovato valore di T' corrisponde l'equazione di stabilità (num. 18)

$$\frac{13}{16}pa\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = n'R'\Omega_3,$$

la quale si presta a determinare la superficie Ω_3 della sezione trasversale di ciascuno dei due tiranti AF e BG.

Per ottenere la tensione T'' sopportata da ciascuno dei due tiranti CF e CG, basta porre la condizione che le componenti secondo l'asse della colonnetta FD della forza T diretta da F verso G, della forza T' rivolta da F verso A e della forza T'' operante nella direzione FC, applicate nel punto F, devono far equilibrio alla forza Q' che agisce pure nello stesso punto. Così procedendo, si trova l'equazione

$$T\operatorname{sen}\alpha - T'\operatorname{sen}\beta - T''\operatorname{sen}\beta + Q' = 0,$$

dalla quale, in seguito a sostituzione dei trovati valori di T, T' e Q', si deduce

$$T'' = \frac{pa}{2\operatorname{sen}\beta}\left(\frac{a}{h'}\operatorname{sen}\alpha - \frac{3}{8}\cos\alpha\right),$$

cui corrisponde l'equazione di stabilità (num. 18)

$$\frac{pa}{2\operatorname{sen}\beta}\left(\frac{a}{h'}\operatorname{sen}\alpha-\frac{3}{8}\cos\alpha\right)=n'\mathrm{R}'\Omega_4$$

atta a determinare la superficie Ω_4 della sezione trasversale di ciascuno dei due tiranti FC e GC.

Per trovare l'equazione di stabilità relativa ad un puntone, basta osservare che, considerando per esempio il puntone AC, si può esso risguardare come un solido prismatico caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale e sollecitato: in C dalla forza orizzontale Q operante da C verso x e dalla forza obliqua T″ rivolta da C verso F; in D dalla forza normale $\frac{5}{8}pa\cos\alpha$ diretta secondo il prolungamento di FD; in A dalla forza inclinata T′ operante da A verso F e dalla forza verticale Z rivolta dal basso all'alto. Ammettendo quanto realmente succede per le incavallature le quali vengono impiegate nella pratica delle costruzioni relativamente alla sezione pericolosa dei puntoni, ossia che pel puntone considerato AC sia pericolosa la sezione corrispondente al punto D, per essere

$$\frac{1}{2}a\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha}$$

la lunghezza $\overline{\mathrm{DM}}$ della perpendicolare abbassata da D sulla direzione CF della forza T″, il momento inflettente che ad essa si riferisce ammette il valore

$$\frac{1}{2}\mathrm{T}''a\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha}+\frac{1}{8}pa^2-\frac{1}{2}\mathrm{Q}a\operatorname{tang}\alpha,$$

e la forza comprimente per la stessa sezione vale

$$\mathrm{Q}\cos\alpha+\mathrm{T}''\cos\beta+\frac{1}{2}pa\operatorname{sen}\alpha.$$

La pressione massima Q_{2m}, riferita all'unità di superficie, è adunque pel puntone AC (num. 151)

$$\mathrm{Q}_{2m}=\frac{1}{2}a\left(\mathrm{T}''\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha}+\frac{1}{4}pa-\mathrm{Q}\operatorname{tang}\alpha\right)\frac{u_5''}{\mathrm{I}_5'}$$
$$+\frac{\mathrm{Q}\cos\alpha+\mathrm{T}''\cos\beta}{\Omega_5}+\frac{1}{2}\frac{pa\operatorname{sen}\alpha}{\Omega_5},$$

alla quale, ponendovi per Q e per T″ i trovati valori in funzione dei dati del problema ed esprimendo h' in funzione di a, α e β, corrisponde l'equazione di stabilità

$$n''R'' = \frac{pa^2u_5''}{32I_5'} + \frac{pa}{2\Omega_5}\left(\operatorname{sen}\alpha + \frac{13\cos\alpha\cos\beta}{8\operatorname{sen}\beta}\right),$$

mediante la quale si può determinare una delle dimensioni della sezione trasversale del puntone.

Ben di frequente si fanno delle incavallature del genere di quella di cui si è imparato a calcolare le dimensioni, nelle quali i due tiranti AF e BG, nonchè la catena FG, si trovano sulla stessa orizzontale. In queste incavallature si ha $\beta = \alpha$ ed $h' = h$, e le equazioni di stabilità atte a determinare le dimensioni dei diversi loro pezzi si ottengono ponendo nelle stabilite equazioni (1), (2), (3), (4) e (5) gli indicati valori di β e di h'.

206. **Incavallature di Polonceau con ciascun puntone rinforzato da tre colonnette.** — Allorquando si devono fare delle incavallature di portata considerevole, il sistema di cui si è parlato nel precedente numero può diventare insufficiente, ed è necessario adottare un sistema più complicato, onde evitare l'impiego di puntoni con sezione trasversale troppo grande. A questo scopo, come lo indica la figura 173, invece di rinforzare ciascuno dei puntoni solo nel mezzo della sua lunghezza, gli si danno tre punti d'appoggio intermedii, per modo che esso si presenta siccome una trave a quattro travate eguali; e si fa un'incavallatura composta, come quella del numero precedente, dei due sistemi triangolari eguali AFC e BGC uniti tra loro al vertice C e collegati fra i vertici F e G mediante la catena GF, la quale è di più rinforzata dalle quattro colonnette NO e PR, VX ed SU e dai quattro tiranti DO e DR, EX ed EU. I diversi pezzi concorrenti nei punti F e G sono connessi ad articolazione, e lo stesso ha luogo per quelli che vanno a riunirsi nei punti O ed R, X ed U, A e C, B e C, D ed E.

Attribuendo alle lettere a, α, β, p ed h' i significati che loro vennero dati nel precedente numero, si incominci dal considerare il sistema triangolare ACF sollecitato dal proprio peso pa, dalla forza orizzontale T operante da F verso G ed eguale in intensità alla tensione sopportata dalla catena FG, dalla reazione orizzontale Q applicata all'estremo C e rivolta da C verso x, e dalla reazione verticale Z opposta dall'appoggio A dal basso all'alto. Questo sistema deve trovarsi in equilibrio sotto l'azione delle citate forze, e quindi, come nel numero precedente,

$$Z = pa$$

$$Q = T = \frac{1}{2}\frac{pa^2}{h'},$$

per cui si ha la seguente equazione di stabilità relativa alla catena FG sottoposta alla tensione T (num. 18)

$$\frac{1}{2}\frac{pa^2}{h'} = n' R' \Omega_1 \qquad (1),$$

dalla quale si può ricavare la superficie Ω_1 da assegnarsi alla sezione trasversale dell'indicata catena.

Le tre saette DF, NO e PR sono destinate ad impedire l'inflessione del puntone AC, e quindi lo pongono nelle condizioni di un solido collocato su cinque appoggi equidistanti A, N, D, P e C posti in linea retta, e caricato d'una forza totale $pa\cos\alpha$ uniformemente distribuita e normale alla sua lunghezza. A questo puntone adunque si possono applicare le formole che vennero date nei numeri 115, 116, 117 e 118 per calcolare i momenti inflettenti relativi alle sezioni d'appoggio, i momenti inflettenti per sezioni qualunque delle quattro parti in cui il puntone rimane diviso dalle sezioni corrispondenti ai punti N, D e P, gli sforzi di taglio e le reazioni degli appoggi; e si trova che queste ultime sono: pei punti A e C

$$\frac{11}{112} pa\cos\alpha;$$

pei punti N e P

$$\frac{2}{7} pa\cos\alpha;$$

pel punto D

$$\frac{13}{56} pa\cos\alpha.$$

Le due colonnette NO e PR soffrono una pressione Q' eguale e contraria alla reazione che esse esercitano contro il puntone nei punti N e P, e quindi

$$Q' = \frac{2}{7} p a \cos \alpha;$$

Cosicchè l'equazione di stabilità, con cui si può determinare la superficie Ω_2 della minima sezione trasversale di ciascuna delle quattro colonnette più corte, si riduce a (num. 40)

$$\frac{2}{7} p a \cos \alpha = n'' R'' \Omega_2 \qquad (2).$$

In A le componenti normali al puntone, della reazione Z rivolta dal basso all'alto e della tensione T′ del tirante AO diretta da A verso O, devono eguagliare la pressione che su esso punto ha luogo, per cui si ha l'equazione

$$Z \cos \alpha - T' \operatorname{sen} \beta = \frac{11}{112} p a \cos \alpha$$

dalla quale, ponendo per Z il suo valore, si ottiene

$$T' = \frac{101}{112} p a \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \beta}.$$

La tensione T′ sopportata dal tirante AO è pur quella sopportata dal tirante BX, e quindi, per trovare la superficie Ω_3 della sezione trasversale di ciascuno di questi tiranti, si ha l'equazione di stabilità (num. 18)

$$\frac{101}{112} p a \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = n' R' \Omega_3 \qquad (3).$$

In C le componenti normali al puntone, della spinta orizzontale Q diretta da C verso x ed esercitata dalla mezza incavallatura di sinistra contro la mezza incavallatura di destra e della tensione T″ del tirante CR diretta da C verso R, devono eguagliare la pressione che su esso punto ha luogo, d'onde l'equazione

$$Q \operatorname{sen} \alpha - T'' \operatorname{sen} \beta = \frac{11}{112} p a \cos \alpha,$$

la quale dà, ponendovi il valore già trovato di Q,

$$T''=\frac{1}{2}\frac{pa}{\operatorname{sen}\beta}\left(\frac{a}{h'}\operatorname{sen}\alpha-\frac{11}{56}\cos\alpha\right)$$

per espressione delle tensioni sopportate dai due tiranti CR e CU, e

$$\frac{1}{2}\frac{pa}{\operatorname{sen}\beta}\left(\frac{a}{h'}\operatorname{sen}\alpha-\frac{11}{56}\cos\alpha\right)=n'R'\Omega_4 \qquad (4)$$

per equazione di stabilità (num. 18) atta a determinare la superficie Ω_4 da assegnarsi alla sezione trasversale di ciascuno di questi tiranti.

Per ottenere le tensioni T''' e T^{IV} sopportate dai tiranti OF ed OD si stabiliscano le condizioni esprimenti che si fanno equilibrio tutte le forze concorrenti in O. Perciò si scompongano secondo due direzioni, l'una parallela e l'altra perpendicolare al puntone AC, tutte le forze applicate in O le quali sono, la tensione T' del tirante AO rivolta da O verso A, la tensione T''' del tirante OF diretta da O verso F, la tensione T^{IV} del tirante OD operante sul punto O da O verso D e la pressione Q' della colonnetta NO diretta nel senso del prolungamento dell'asse della colonnetta stessa. L'equazione esprimente che si fanno equilibrio le componenti parallele al puntone è

$$T'-T'''-T^{IV}=0;$$

quella che si riferisce all'equilibrio fra le componenti normali al puntone è

$$(T'-T'''+T^{IV})\operatorname{sen}\beta-Q'=0;$$

ed i valori di T^{IV} e di T''', quando si mettano per T' e Q' i valori già trovati, vengono dati da

$$T^{IV}=\frac{1}{7}pa\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta},$$

$$T'''=\frac{85}{112}pa\frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Ottenute le tensioni T''' e T^{IV} che sopportano i due tiranti OF ed

OD, riesce facile il porre le equazioni di stabilità atte a determinare le superficie Ω_5 ed Ω_6 delle loro sezioni trasversali, le quali equazioni (num. 18) sono rispettivamente

$$\frac{85}{112} pa \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\beta} = n' \mathrm{R}' \Omega_5 \qquad (5),$$

$$\frac{1}{7} pa \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\beta} = n' \mathrm{R}' \Omega_6 \qquad (6).$$

Le stesse equazioni di stabilità servono a determinare le superficie Ω_5 ed Ω_6 da darsi ai due tiranti XG ed XE i quali si trovano in identiche condizioni dei due tiranti OF ed OD.

Il metodo tenuto per determinare le tensioni dei tiranti OF ed OD, serve pure a trovare le tensioni T^{v} e T^{vi} sopportate dai due tiranti RF ed RD. Le equazioni esprimenti che si fanno equilibrio le componenti parallele e le componenti normali al puntone delle forze applicate in R sono rispettivamente

$$\mathrm{T}'' - \mathrm{T}^{\mathrm{v}} - \mathrm{T}^{\mathrm{vi}} = 0,$$

$$(\mathrm{T}'' - \mathrm{T}^{\mathrm{v}} + \mathrm{T}^{\mathrm{vi}})\,\text{sen}\,\beta - \mathrm{Q}' = 0,$$

dalle quali si ricava, quando per T'' e per Q' si mettano i loro valori in funzione dei dati del problema

$$\mathrm{T}^{\mathrm{vi}} = \mathrm{T}^{\mathrm{iv}} = \frac{1}{7} pa \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\beta},$$

$$\mathrm{T}^{\mathrm{v}} = \frac{pa}{2\,\text{sen}\,\beta}\left(\frac{a}{h'}\,\text{sen}\,\alpha - \frac{27}{56}\cos\alpha\right);$$

e si hanno le seguenti equazioni di stabilità (num. 18) atte alla determinazione delle superficie Ω_7 ed Ω_8 da assegnarsi ai due tiranti RF ed RD

$$\frac{pa}{2\,\text{sen}\,\beta}\left(\frac{a}{h'}\,\text{sen}\,\alpha - \frac{27}{56}\cos\alpha\right) = n' \mathrm{R}' \Omega_7 \qquad (7),$$

$$\frac{1}{7} pa \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\beta} = n' \mathrm{R}' \Omega_8 \qquad (8).$$

Le stesse equazioni di stabilità servono pure a determinare le superficie Ω_7 ed Ω_8 delle sezioni trasversali dei tiranti UG ed UE; ed è rimarchevole come i quattro tiranti OD ed RD, XE ed UE debbano presentare sezioni trasversali identiche.

Per ottenere la pressione Q'' con cui la colonnetta principale DF viene premuta nel senso del suo asse, bisogna scrivere che le componenti delle tensioni T e T^{VI}, operanti rispettivamente sul punto D da D verso O e da D verso R e la detta pressione Q'' diretta nel senso del prolungamento di DF fanno equilibrio alla pressione $\frac{13}{56}pa\cos\alpha$ esercitata dal puntone. Questa condizione d'equilibrio è

$$Q''-(T^{IV}+T^{VI})\operatorname{sen}\beta-\frac{13}{56}pa\cos\alpha=0$$

dalla quale, dopo d'avervi posto per T^{IV} e T^{VI} i loro valori, risulta l'equazione

$$Q''=\frac{29}{56}pa\cos\alpha,$$

che conduce alla seguente equazione di stabilità (num. 40) determinatrice della superficie Ω_9 da assegnarsi alla minima sezione trasversale di ciascuna delle due colonnette principali

$$\frac{29}{56}pa\cos\alpha=n''R''\Omega_9 \qquad (9).$$

Resta ancora a trovarsi l'equazione di stabilità conveniente a determinare una delle dimensioni della sezione trasversale di ciascun puntone. Perciò si osservi che, considerando per esempio il puntone AC, si può esso risguardare siccome un solido prismatico caricato di un peso uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale e sollecitato: in C dalla forza orizzontale Q operante da C verso x e dalla forza obliqua T'' rivolta da C verso R; in P dalla forza normale $\frac{2}{7}pa\cos\alpha$ diretta secondo il prolungamento di RP; in D della forza normale $\frac{13}{56}pa\cos\alpha$ operante nel senso del prolungamento di FD, nonchè dalle forze T^{IV} e T^{VI}, la prima diretta da D in O e la seconda da D in R; in N dalla forza normale $\frac{2}{7}pa\cos\alpha$ diretta secondo il prolungamento di ON; e finalmente in A dalla forza T′ operante da A verso O e dalla forza verticale Z rivolta dal basso all'alto. Il massimo momento inflettente è quello che è comune alle sezioni N e P, il quale, per essere la perpendicolare PY abbassata da P su CR espressa da

$$\frac{1}{4}a\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha},$$

vale

$$\frac{1}{4}T''a\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha}+\frac{1}{32}pa^2-\frac{1}{4}Qa\operatorname{tang}\alpha;$$

e, siccome la pressione longitudinale è evidentemente nella sezione P minore di quella che ha luogo nella sezione N dove ha il valore

$$Q\cos\alpha+T''\cos\beta+\frac{3}{4}pa\operatorname{sen}\alpha,$$

la pressione massima Q_{2m} riferita all'unità di superficie ammette il valore (num. 151)

$$Q_{2m}=\frac{1}{4}a\left(T''\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha}+\frac{1}{8}pa-Q\operatorname{tang}\alpha\right)\frac{u_{10}''}{I_{10}'}$$
$$+\frac{Q\cos\alpha+T''\cos\beta}{\Omega_{10}}+\frac{3pa\operatorname{sen}\alpha}{4\Omega_{10}},$$

alla quale, per i trovati valori di Q e di T″ e per le relazioni

$$h=a\operatorname{tang}\alpha,$$

$$\operatorname{tang}\beta=\frac{2h'-h}{h}\operatorname{tang}\alpha$$

fra le quantità a, h, h', α e β, corrisponde l'equazione di stabilità

$$n''R''=\frac{3}{448}\frac{pa^2u_{10}''}{I_{10}'}+\frac{pa}{4\Omega_{10}}\left(3\operatorname{sen}\alpha+\frac{101\cos\alpha\cot\beta}{28}\right)\quad(10),$$

che serve a calcolare una delle dimensioni della sezione trasversale di ciascun puntone implicitamente contenuta nella sua superficie Ω_{10}, nel suo momento d'inerzia I_{10} e nella lunghezza u_{10}''.

Quando, per essere la monta dell'incavallatura assai depressa, si crede conveniente di disporre le cose in modo che le tre linee AF, BG ed FG si trovino in una stessa orizzontale, si ottengono le dieci equazioni di stabilità atte a determinare le dimensioni dei diversi pezzi ponendo nelle equazioni (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9) e (10) $\beta = \alpha$ ed $h' = h$.

207. **Incavallatura coi puntoni rinforzati da saette inclinate e da tiranti verticali.** — Queste incavallature, di una delle quali si ha la rappresentazione nella figura 174, si fanno generalmente in ferro e si adoperano per superare grandi portate. La loro costruzione è semplicissima, ed ecco la disposizione che generalmente suolsi dare ai diversi pezzi che le compongono: si divide ciascuno dei puntoni in uno stesso numero di parti eguali $\overline{AA'}$, $\overline{A'A''}$, $\overline{A''A'''}$, ...; dal vertice C dell'incavallatura si conduce la verticale CD sulla quale vengono a terminare due rette AD e BD, o elevate o confondentisi coll'orizzontale passante pei punti A e B; dai punti di divisione A'', A''', A^{IV}, ..., meno dal primo A', si conducono le verticali $A''E''$, $A'''E'''$, $A^{IV}E^{IV}$, ...; e quindi si tirano le rette oblique $E''A'$, $E'''A''$, $E^{IV}A'''$, ... e DA^{IV}. Secondo le direzioni delle ultime accennate rette oblique vi sono le saette inclinate dell'incavallatura, secondo le direzioni delle verticali condotte da A'', A''', A^{IV}, ... trovansi i tiranti verticali, e secondo le due rette inclinate AD e BD vi sono dei tiranti formati di pezzi distinti dall'uno all'altro tratto in cui le dette rette restano divise dai tiranti verticali. Le unioni sono quasi tutte fatte con articolazioni; e le parti eguali in cui si dividono i puntoni, per disporre i diversi pezzi destinati a rinforzarli, hanno generalmente lunghezza compresa fra metri 2,50 e 4.

Si consideri il caso d'un'incavallatura in cui ciascun puntone è rinforzato da quattro saette inclinate; si ritengano per le lettere a, p ed α i significati che già loro vennero dati nei precedenti problemi sulle incavallature, e si chiamino:

β gli angoli eguali DAC e DBC che gli assi di ciascuno dei due tiranti inclinati AD e BD fanno cogli assi dei rispettivi puntoni;

γ', γ'', γ''' e γ^{IV} gli angoli $E''A'C$, $E'''A''C$, $E^{IV}A'''C$ e $DA^{IV}C$ che gli assi delle successive saette fanno coll'asse del corrispondente puntone;

h la monta $\overline{\mathrm{CF}}$ dell'incavallatura;

h' l'altezza $\overline{\mathrm{CD}}$ del punto C, in cui s'incontrano gli assi dei due puntoni, sul punto D nel quale vengono a terminare gli assi dei due tiranti inclinati AD e BD.

Dal triangolo rettangolo CFA si ha

$$h = a \tang \alpha,$$

$$\overline{\mathrm{AC}} = \frac{a}{\cos\alpha};$$

dal triangolo rettangolo DFA si ottiene

$$\overline{\mathrm{DA}} = \frac{a}{\cos(\alpha - \beta)},$$

$$\overline{\mathrm{DF}} = a \tang(\alpha - \beta);$$

e, essendo $h' = h - \overline{\mathrm{DF}}$ ed $a = \frac{h}{\tang\alpha}$, si trova che le quantità α, β, h ed h' sono legate fra loro dall'equazione

$$\tang\beta = \frac{h' \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{h - h' \operatorname{sen}^2\alpha}.$$

Venendo ora al calcolo dell'angolo $\mathrm{E''A'C} = \gamma'$, dal triangolo obliquangolo $\mathrm{E''A'A''}$, in cui si conoscono i lati

$$\overline{\mathrm{E''A''}} = \frac{2}{5}\mathrm{CD} = \frac{2}{5}h',$$

$$\overline{\mathrm{A''A'}} = \frac{1}{5}\overline{\mathrm{AC}} = \frac{1}{5}\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{1}{5}\frac{h}{\operatorname{sen}\alpha},$$

nonchè l'angolo $\mathrm{A'A''E''} = 90° - \alpha$, si ricava

$$\tang\gamma' = \frac{2h' \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{h - 2h' \operatorname{sen}^2\alpha};$$

e, ragionando per i triangoli $\mathrm{E'''A''A'''}$, $\mathrm{E_{IV}A'''A^{IV}}$ e $\mathrm{DA^{IV}C}$ come si è fatto pel triangolo E″A′A″, si trovano le seguenti espressioni di $\tang\gamma''$, $\tang\gamma'''$ e $\tang\gamma^{\text{IV}}$

$$\tang\gamma''=\frac{3h'\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{h-3h'\operatorname{sen}^2\alpha},$$

$$\tang\gamma'''=\frac{4h'\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{h-4h'\operatorname{sen}^2\alpha},$$

$$\tang\gamma^{\text{IV}}=\frac{5h'\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{h-5h'\operatorname{sen}^2\alpha}.$$

Le saette inclinate E″A′, E‴A″, E^IV^A‴ e DA^IV^ sono destinate ad impedire l'inflessione del puntone AC, e quindi questo solido si può considerare siccome appoggiato a sei punti equidistanti, posti in linea retta, e caricato d'una forza totale $pa\cos\alpha$ uniformemente distribuita e normale alla sua lunghezza. A questo puntone adunque si possono applicare le formole che vennero stabilite nei numeri 115, 116, 117 e 118 per calcolare i momenti inflettenti relativi alle sezioni d'appoggio, i momenti inflettenti per sezioni qualunque delle cinque parti in cui il puntone rimane diviso dalle sezioni corrispondenti ai punti A′, A″, A‴ ed A^IV^, gli sforzi di taglio e le reazioni degli appoggi. Instituendo questi calcoli, si viene a trovare che le reazioni degli appoggi sono espresse: nei punti A e C da

$$\frac{3}{38}pa\cos\alpha;$$

nei punti A′ ed A^IV^ da

$$\frac{43}{190}pa\cos\alpha;$$

nei punti A″ ed A‴ da

$$\frac{37}{190}pa\cos\alpha.$$

La prima saetta E″A′ sopporta una pressione Q′ eguale alla componente della pressione che il puntone esercita in A′ secondo la saetta stessa, per modo che si ha l'equazione

$$Q' \operatorname{sen} \gamma' = \frac{43}{190} pa \cos \alpha,$$

d'onde

$$Q' = \frac{43}{190} \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \gamma'} pa \quad (1).$$

La reazione verticale Z, diretta dal basso all'alto, che ciascuno dei due appoggi esercita contro l'estremo del corrispondente puntone è la metà del peso portato dall'intiera incavallatura, e quindi

$$Z = pa.$$

Le componenti normali al puntone della reazione Z e della tensione T del primo tratto A E″ del tirante A D, applicate nel punto A, devono eguagliare la reazione $\frac{3}{38} pa \cos \alpha$ che ha luogo nello stesso punto, e quindi si ha l'equazione

$$Z \cos \alpha - T \operatorname{sen} \beta = \frac{3}{38} pa \cos \alpha,$$

dalla quale, ponendovi per Z il suo valore in funzione dei dati del problema, si ricava

$$T = \frac{35}{38} \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \beta} pa \quad (2).$$

Chiamando

T′, T″ e T‴ le tensioni sopportate dai tre tratti E″E‴, E‴E$^{\text{IV}}$ ed E$^{\text{IV}}$ D di tirante A D,

Q″, Q‴ e Q$^{\text{IV}}$ le pressioni a cui trovansi assoggettate le tre saette E‴A″, E$^{\text{IV}}$ A‴ e D A$^{\text{IV}}$,

S, S′, S″ ed S‴ le tensioni dei tiranti verticali E″A″, E‴A‴, E$^{\text{IV}}$ A$^{\text{IV}}$ e D C,

Q la reazione orizzontale che ha luogo contro l'estremo C del puntone A C, rivolta da C verso x,

si ha: che devonsi far equilibrio le componenti orizzontali e le componenti verticali delle forze applicate nei punti E″, E‴ ed E^{IV}, per cui risultano le equazioni

$$(T-T')\cos(\alpha-\beta)-Q'\cos(\gamma'-\alpha)=0 \qquad (3),$$

$$(T'-T'')\cos(\alpha-\beta)-Q''\cos(\gamma''-\alpha)=0 \qquad (4),$$

$$(T''-T''')\cos(\alpha-\beta)-Q'''\cos(\gamma'''-\alpha)=0 \qquad (5),$$

$$S-(T-T')\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta)-Q'\,\mathrm{sen}(\gamma'-\alpha)=0 \qquad (6),$$

$$S'-(T'-T'')\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta)-Q''\,\mathrm{sen}(\gamma''-\alpha)=0 \qquad (7),$$

$$S''-(T''-T''')\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta)-Q'''\,\mathrm{sen}(\gamma'''-\alpha)=0 \qquad (8);$$

che le componenti normali al puntone AC delle forze applicate nei punti A″, A‴ ed A^{IV} devono pur farsi equilibrio, cosicchè si possono scrivere le tre equazioni

$$Q''\,\mathrm{sen}\gamma''-S\cos\alpha-\frac{37}{190}pa\cos\alpha=0 \qquad (9),$$

$$Q'''\,\mathrm{sen}\gamma'''-S'\cos\alpha-\frac{37}{190}pa\cos\alpha=0 \qquad (10),$$

$$Q^{\mathrm{IV}}\,\mathrm{sen}\gamma^{\mathrm{IV}}-S''\cos\alpha-\frac{43}{190}pa\cos\alpha=0 \qquad (11);$$

che la tensione S‴ del tirante CD deve far equilibrio alle componenti verticali delle pressioni Q^{IV} sopportate dalle due saette concorrenti in D e delle tensioni T‴ dei due tratti di tirante ADB concorrenti pure in D, per cui si ha l'equazione

$$S'''-2\,Q^{\mathrm{IV}}\,\mathrm{sen}(\gamma^{\mathrm{IV}}-\alpha)-2T'''\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta)=0 \qquad (12);$$

che finalmente in C le componenti normali al puntone della reazione Q, della metà della tensione S‴ e della pressione $\frac{3}{38}pa\cos\alpha$ si devono far equilibrio, cosicchè risulta

$$Q\,\mathrm{sen}\,\alpha-\frac{1}{2}S'''\cos\alpha-\frac{3}{38}pa\cos\alpha=0 \qquad (13).$$

Ecco ora con qual ordine si può procedere nella pratica per ricavare dalle stabilite equazioni i valori numerici degli sforzi cui trovansi assoggettati i diversi pezzi dell'incavallatura. Dall'equazione (1) si ricavi il valore di Q' e quello di T dall'equazione (2); si calcoli il valore di T' coll'equazione (3) e quello di S coll'equazione (6); si deduca il valore di Q'' dall'equazione (9) e quello di T'' dall'equazione (4); si trovi il valore di S' coll'equazione (7) e quello di Q''' coll'equazione (10); al calcolo di T''' si faccia servire l'equazione (5) e l'equazione (8) al calcolo di S''; e finalmente le equazioni (11), (12) e (13) si adoperino per determinare rispettivamente i valori di Q^{IV}, S''' e Q.

Il massimo momento inflettente pel puntone AC è quello relativo alle sezioni corrispondenti ai punti A' ed A^{IV}, e vale

$$\frac{2}{475} p a^2;$$

e, siccome nella sezione corrispondente al punto A' la somma algebrica delle componenti longitudinali delle forze applicate al puntone da C in A' è maggiore della somma algebrica delle componenti longitudinali delle forze applicate da C in A^{IV}, la sezione pericolosa sarà quella corrispondente al punto A'. Per determinare la pressione massima Q_{2m} riferita all'unità di superficie in detta sezione bisogna, seguendo il metodo adottato nei precedenti problemi, fare la somma algebrica delle componenti longitudinali delle forze applicate al puntone fra C ed A'. Osservando però che questa somma deve essere eguale e direttamente contraria a quella delle componenti longitudinali delle forze applicate al puntone fra A ed A', torna assai più spedito l'ottenerla mediante la somma delle componenti secondo la direzione del puntone delle forze Z e T applicate in A e dirette, la prima dal basso all'alto e la seconda da A verso E'', diminuita della componente longitudinale del peso uniformemente distribuito fra A ed A'. Tenendo questo metodo si trova che la detta pressione massima Q_{2m} vien data da (num. 151)

$$Q_{2m} = \frac{2}{475} \frac{p a^2 u''}{I'} + \frac{1}{\Omega}\left(Z \operatorname{sen} \alpha + T \cos \beta - \frac{1}{5} p a \operatorname{sen} \alpha\right).$$

Si conoscono ora tutti gli sforzi cui trovansi assoggettati i diversi pezzi dell'incavallatura, e si possono determinare le loro sezioni trasversali in modo che siano abbastanza resistenti. Le equazioni di stabilità (num. 18)

$$T = n'R'\Omega_1, \qquad T' = n'R'\Omega_2,$$

$$T'' = n'R'\Omega_3, \qquad T''' = n'R'\Omega_4,$$

servono a determinare le superficie Ω_1, Ω_2, Ω_3 ed Ω_4 da assegnarsi a ciascuna delle quattro parti di cui è composto tanto il tirante AD quanto il tirante BD. Le equazioni di stabilità (num 18)

$$S = n'R'\Omega_5, \qquad S' = n'R'\Omega_6,$$

$$S'' = n'R'\Omega_7, \qquad S''' = n'R'\Omega_8,$$

sono quelle da cui si devono dedurre le superficie Ω_5, Ω_6, Ω_7 ed Ω_8 da darsi ai tiranti verticali. Le equazioni di stabilità (num. 40)

$$Q' = n''R''\Omega_9, \qquad Q'' = n''R''\Omega_{10},$$

$$Q''' = n''R''\Omega_{11}, \qquad Q^{\mathrm{IV}} = n''R''\Omega_{12},$$

si prestano al calcolo delle superficie Ω_9, Ω_{10}, Ω_{11} ed Ω_{12} che devono presentare le saette inclinate. Finalmente l'equazione di stabilità (num. 151)

$$n''R'' = \frac{2}{475}\frac{pa^2u''}{I'} + \frac{1}{\Omega}\left(Z\operatorname{sen}\alpha + T\cos\beta - \frac{1}{5}pa\operatorname{sen}\alpha\right)$$

è quella da cui si deve dedurre una delle dimensioni della sezione trasversale del puntone.

Ben sovente si fa in modo che i due tiranti AD e BD siano orizzontali, e, per ottenere le formole convenienti, basta cangiare β in α nelle formole che già vennero trovate nell'ipotesi dei due tiranti AD e BD inclinati.

208. **Travi armate**. — Quanto si è detto nei precedenti numeri sul modo di determinare gli sforzi a cui trovansi sottoposti i diversi pezzi componenti le incavallature e le dimensioni che ai medesimi convien assegnare, facilmente si applica per le stesse determinazioni nelle travi armate di uso più frequente, ed ecco l'esame di alcuni casi pratici della massima importanza per l'ingegnere costruttore:

I. *Trave in legno od in ferro armata con un tirante in ferro e con* *una saetta in ferro od in ghisa, orizzontalmente collocata su due appoggi e caricata d'un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza.*

Essendo

$2a$ la distanza orizzontale $\overline{AB}$ (*fig.* 176) fra i due appoggi sopportanti la trave,

p il peso che corrisponde ad ogni unità di lunghezza dell'accennata distanza,

α l'angolo DAC misurante l'inclinazione dell'asse del tirante all'orizzonte,

se considerasi la saetta DC siccome destinata ad impedire l'inflessione della trave AB nel suo mezzo, si ha in ciascuno degli estremi A e B la pressione

$$\frac{3}{16}p.2a = \frac{3}{8}pa,$$

ed in C la pressione

$$\frac{5}{8}p.2a = \frac{5}{4}pa.$$

Segue da ciò che la saetta CD sopporta una pressione Q data da

$$Q = \frac{5}{4}pa,$$

e che l'equazione di stabilità colla quale si deve determinare la minima superficie Ω_1 della sua sezione trasversale è (num. 40)

$$\frac{5}{4}pa = n''R''\Omega_1.$$

La reazione Z che ciascuno dei due appoggi esercita verticalmente contro il sistema dal basso all'alto è la metà del peso $2pa$, e quindi vien data da

$$Z = pa,$$

per cui in A, questa reazione, diminuita della componente normale alla trave AB della tensione T del tratto di tirante AD, deve eguagliare la pressione $\frac{3}{8}pa$ che su esso produce la detta trave. Questa condizione si esprime ponendo

$$Z - T \operatorname{sen} \alpha = \frac{3}{8} pa,$$

dalla quale, ponendo per Z il suo valore, si deduce

$$T = \frac{5}{8 \operatorname{sen} \alpha} pa,$$

cui corrisponde la seguente equazione di stabilità determinatrice delle superficie Ω_2 della sezion retta di ciascuno dei due tratti AD e BD del tirante (num. 18)

$$\frac{5}{8 \operatorname{sen} \alpha} pa = n' R' \Omega_2.$$

Per stabilire l'equazione di stabilità atta a determinare una delle dimensioni della sezione trasversale della trave AB, si deve essa considerare come un solido caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza, sollecitato nel mezzo C dalla reazione Q diretta dal basso all'alto ed in ciascun estremo dalla forza verticale Z diretta dal basso all'alto e dalla forza obliqua T operante sull'estremo A da A verso D e sull'estremo B da B verso D. La massima pressione Q_{2m} riferita all'unità di superficie (num. 151) ha luogo nella sezione di mezzo corrispondente all'estremo C della saetta; il valore del momento inflettente per questa sezione è espresso da

$$\frac{1}{2} pa^2 + a T \operatorname{sen} \alpha - a Z;$$

la forza comprimente per la stessa sezione è la sola componente

$$T \cos \alpha$$

della tensione T; e la pressione massima Q_{2m} ammette il valore

$$Q_{2m} = a \left(\frac{1}{2} pa + T \operatorname{sen} \alpha - Z \right) \frac{u_3''}{I_3'} + \frac{T \cos \alpha}{\Omega_3},$$

cui, per i trovati valori di T e Z, corrisponde l'equazione di stabilità

$$n''R''=\frac{1}{8}pa\left(\frac{au_3''}{I_3'}+\frac{5\cot\alpha}{\Omega_3}\right),$$

la quale si presta a determinare una delle dimensioni della sezione trasversale della trave AB implicitamente contenuta nella lunghezza u_3'', nel momento d'inerzia I_3' e nella sezione Ω_3.

II. *Trave in legno od in ferro armata con un tirante in ferro e con due saette in ferro od in ghisa, orizzontalmente collocata su due appoggi e caricata d'un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza.*

Si attribuiscano alle lettere a, p ed α i significati che alle medesime già vennero dati nel precedente problema, suppongasi che le sezioni C ed E (*fig.* 177) corrispondenti agli appoggi della trave AB sulle saette DC ed FE dividano la distanza fra gli appoggi estremi in tre parti eguali e che sia orizzontale il tratto di mezzo FD del tirante ADFB. Siccome le due saette DC ed FE sono destinate ad impedire l'inflessione della trave AB, si può questa considerare siccome un solido appoggiato a quattro punti equidistanti posti in linea retta e caricato del peso totale $2pa$ uniformemente distribuito sulla sua lunghezza. A questa trave adunque sono applicabili le formole che vennero stabilite nei numeri 115, 116, 117 e 118 per calcolare, i momenti inflettenti per sezioni qualunque delle tre parti in cui trovasi essa divisa dalle sezioni corrispondenti ai punti A, C, E e B, gli sforzi di taglio e le reazioni degli appoggi eguali e contrarie alle pressioni che essi ricevono dalla trave AB coi suoi sovraccarichi. Instituendo questi calcoli si viene a trovare che le pressioni sui punti A e B sono espresse da

$$\frac{4}{15}pa,$$

e che le pressioni sui punti C ed E ammettono il valore

$$\frac{11}{15}pa,$$

Ciascuna delle due saette DC ed FE sopporta una pressione Q data da

$$Q = \frac{11}{15} pa,$$

ed è (num. 40)

$$\frac{11}{15} pa = n'' R'' \Omega_1$$

l'equazione di stabilità che serve a determinare la minima superficie Ω_1 da darsi alla sezione trasversale di ciascuna delle due saette.

La reazione Z che ciascuno dei due appoggi esercita verticalmente contro la trave armata dal basso all'alto è la metà del peso totale $2pa$, e quindi vien data da

$$Z = pa.$$

Segue da ciò che in A, questa reazione diminuita della componente normale alla trave della tensione T del tratto di tirante AD, deve eguagliare la pressione $\frac{4}{15} pa$ che in esso produce la detta trave. Questa condizione si esprime ponendo

$$Z - T \operatorname{sen} \alpha = \frac{4}{15} pa,$$

dalla quale, pel trovato valore di Z, si ricava

$$T = \frac{11}{15 \operatorname{sen} \alpha} pa,$$

cui corrisponde l'equazione di stabilità (num. 18)

$$\frac{11}{15 \operatorname{sen} \alpha} pa = n' R' \Omega_2$$

atta a determinare la superficie Ω_2 da assegnarsi alla sezione trasversale di ciascuno dei due tratti inclinati AD e BF del tirante ADFB.

La tensione T' sopportata dal tratto orizzontale DF del tirante si determina ponendo che nel punto A la componente orizzontale della tensione T diretta da D verso A deve eguagliare la tensione T'. Si ha adunque l'equazione

$$T' = T\cos\alpha,$$

la quale, per il trovato valore di T, dà

$$T' = \frac{11}{15} pa\cot\alpha,$$

e quindi l'equazione di stabilità (num. 18)

$$\frac{11}{15} pa\cot\alpha = n'R'\Omega_3,$$

mediante la quale si può determinare la superficie Ω_3 da darsi alla sezione trasversale del tratto di tirante DF.

L'equazione di stabilità atta a determinare una delle dimensioni della sezione trasversale della trave AB si ottiene considerandola come un solido caricato d'un peso uniformemente distribuito sulla sua lunghezza, sollecitato in ciascuno dei due punti C ed E dalla forza verticale Q diretta dal basso all'alto ed in ciascun estremo dalla forza verticale Z pure diretta dal basso all'alto e dalla forza obliqua T operante sull'estremo A da A verso D e sull'estremo B da B verso F. La massima pressione Q_{2m} riferita all'unità di superficie (num. 151) ha luogo in una delle sezioni corrispondenti ai punti C ed E; il momento inflettente per ciascuna di queste sezioni vale

$$\frac{2}{9} pa^2 + \frac{2}{3} aT\,\mathrm{sen}\,\alpha - \frac{2}{3} aZ,$$

la forza comprimente per la stessa sezione è

$$T\cos\alpha,$$

e il valore di Q_{2m} risulta

$$Q_{2m} = \frac{2}{3} a\left(\frac{1}{3} pa + T\,\mathrm{sen}\,\alpha - Z\right)\frac{u_4''}{I_4'} + \frac{T\cos\alpha}{\Omega_4},$$

cui, per il trovato valore di T e di Z, corrisponde l'equazione di stabilità

$$n''R''=\frac{1}{15}pa\left(2\frac{au_4''}{3I_4'}+\frac{11\cot\alpha}{\Omega_4}\right),$$

mediante la quale si può trovare una delle dimensioni della sezione trasversale della trave AB implicitamente contenute nella lunghezza u_4, nel momento d'inerzia I_4' e nella superficie Ω_4.

CAPITOLO XIV.

Spinta delle terre (v) e delle masse liquide contro le pareti piane di ritegni che le sostengono.

209. Assunto del presente capitolo. — La determinazione della spinta delle terre contro le pareti piane di ritegni destinati ad impedirne gli scoscendimenti costituisce un importante problema pratico, che ben sovente deve risolvere l'ingegnere costruttore. Questo problema fu oggetto di serii studi del Coulomb (*Mémoires des savants étrangers*, 1773), del Prony (*Recherches sur la poussée des terres, etc.*, 1802), del Français (*Mémorial de l'officier du génie*, 1820), del Navier, (*Résumé des leçons sur l'application de la mécanique et l'établissement des constructions*, 1839), e di molti altri autori, i quali tutti si limitarono ad esaminarlo in alcuni casi particolari.

Poncelet, in un suo interessante lavoro sulla stabilità dei rivestimenti (*Mémorial du génie*, 1840), ha fatto conoscere alcune formole ed alcune costruzioni grafiche d'un'eleganza e d'una sempli-

(v) Il metodo seguito in questo capitolo per il calcolo della spinta delle terre, trattando alcuni casi particolari, venne da me esposto agli allievi della Regia Scuola d'applicazione per gli ingegneri in Torino nell'anno scolastico 1866-67. Cercai in seguito di renderlo adatto al calcolo della spinta delle terre nel caso più generale che si può presentare all'ingegnere costruttore, e sottoposi i risultati delle mie ricerche all'autorevole giudizio della Reale Accademia delle Scienze di Torino, la quale, con sua approvazione in seduta del 26 maggio 1867, ne decretava l'inserzione nelle sue *Memorie*, serie II, tom. XXV.

cità assai rimarchevole, per determinare la spinta esercitata contro una parete piana da un terrapieno terminato superiormente da facce piane colle loro intersezioni parallele alla parete spinta, senza sovraccarichi o con sovraccarichi uniformemente distribuiti per rapporto ad un piano orizzontale. Belanger (*Cours lithographié professé à l'école des ponts et chaussées*, session 1848-49), considerando il caso di un terrapieno senza sovraccarichi ed a profilo trasversale qualunque, ma costante per una lunghezza indefinita, apportò qualche modificazione ai metodi proposti da Poncelet. Hermann Scheffler, in un suo lavoro pubblicato a Brunswick nel 1857, seppe trattare con qualche novità e con una vera utilità pratica i tre casi particolari di terrapieni senza sovraccarichi, appoggiati ad una parete piana verticale, e terminati superiormente da un piano orizzontale, da un piano inclinato e da due piani successivi, inclinato il primo ed orizzontale il secondo. L'ingegnere Saint-Guilhem, in una commendevole sua Memoria sulla spinta delle terre (*Annales des ponts et chaussées*, 1858), basandosi sui principii di Poncelet, arrivò a determinare la spinta prodotta da un terrapieno sottoposto all'azione di pressioni verticali variabili secondo una data legge, e la cui superficie superiore ammette un profilo poligonale o curvilineo qualunque.

Gli studi di tutti gli autori che precedettero il Saint-Guilhem sono insufficienti per le attuali esigenze delle costruzioni, e parmi che il lavoro di quest'ultimo non abbia da ricevere numerose applicazioni, giacchè gli ingegneri pratici potrebbero far oggetto di critica: il non servirsi dei dati di cui generalmente si può disporre, quali sono le distanze orizzontali e le ordinate per rapporto ad uno stesso piano di paragone dei vertici del profilo della superficie superiore del terrapieno; il condurre ad equazioni le quali, sotto un aspetto di semplicità, nascondono complicazione e lunghezza di calcolo a motivo dei dati preparatorii che si rendono necessari prima di dar opera alla loro risoluzione; l'esigere che si risolvano parecchie equazioni complete del terzo grado per giungere con approssimazioni successive alla risoluzione del problema; e finalmente il determinare il punto d'applicazione della spinta col metodo approssimato delle quadrature. Nelle moderne costruzioni si fa sentire il bisogno di un metodo che, senza avere la massima generalità, abbracci tutti i casi in cui può avvenire di dover realmente determinare la spinta delle terre, e che, per quanto è possibile, non abbia gli inconvenienti che l'uomo tecnico potrebbe riscontrare in quello del Saint-Guilhem; ed è nell'intento di soddisfare a questa necessità che mi accingo a tentare la risoluzione del problema, che è il più generale di tutti quelli che si possono presentare all'ingegnere costruttore, ed il quale ammette il seguente enunciato: *determinare la direzione, l'intensità ed il punto d'applicazione della spinta prodotta da un terrapieno sostenuto da una resistente parete piana, avente per una lunghezza indefinita un profilo poligonale qualunque ma costante, e caricato su tutte o su alcune facce soltanto della sua superficie superiore di pesi uniformemente distribuiti sulle proiezioni orizzontali di liste rettangolari, tutte disposte parallelamente agli spigoli, secondo cui le dette facce vengono ad incontrarsi.*

Nel dare la risoluzione dell'enunciato problema io non ho la benchè minima pretensione di farmi autore di una nuova teoria sulla spinta delle terre. Quanti hanno studiata la quistione di determinare la spinta prodotta da un terrapieno contro la parete piana di un ritegno destinato ad impedirne gli scoscendimenti, per tutto quello che a me consta, non fecero altro che proporre nuovi metodi onde estendere a casi più generali di quelli considerati dal Coulomb la teoria che questo scrittore diede pel primo; e l'ingegnere Saint-Guilhem è quegli che meglio d'ogni altro raggiunse lo scopo. Un nuovo metodo, a parer mio più semplice di quello del Saint-Guilhem, e quindi meritevole di essere tenuto in considerazione sotto il riguardo delle utili applicazioni di cui rende suscettiva la teoria del Coulomb nella pratica delle costruzioni, è quanto mi propongo di esporre, seguendo l'ordine che immediatamente passo ad indicare.

Determino innanzi tutto la spinta prodotta da un masso prismatico di terra, avente per profilo della sua superficie superiore una linea poligonale qualunque, con sovraccarichi distribuiti nel modo già espresso enunciando il problema che intendo risolvere, e separato dal sottostante terrapieno da una faccia piana. Per far questa determinazione esclusivamente mi servo dei dati che sempre si conoscono quando è quistione di stabilire dei muri a sostegno di terrapieni, i quali dati sono le distanze orizzontali e le ordinate, per rapporto al piano orizzontale passante pel piede del ritegno, dei vertici del profilo della superficie superiore del terrapieno, nonchè le distanze orizzontali determinanti le liste sovraccaricate. Questa scelta dei dati del problema mi porta a non adottare il metodo elegante, ma assai artificioso, del Poncelet e seguìto dal Saint-Guilhem, nel trovare l'espressione dell'accennata spinta, la quale ottengo passando per formole relativamente semplici, e mantenendo in evidenza la tangente trigonometrica dell'angolo, che la faccia inferiore del prisma di terra considerato fa coll'orizzonte.

Differenziando la trovata espressione della spinta, giungo ad avere l'equazione determinatrice della tangente trigonometrica dell'angolo, che la faccia inferiore del prisma di massima spinta fa coll'orizzonte, e quindi, con un metodo più diretto di quello del Saint-Guilhem, arrivo a spiegare come in ogni caso si deve procedere per la determinazione del prisma di massima spinta.

Esaminando il caso particolare di un masso di terra terminato superiormente da un piano inclinato, uniformemente sovraccaricato sulla proiezione orizzontale di questo piano, e staccantesi da un terrapieno sotto forma di prisma triangolare, trovo l'espressione della spinta che esso produce contro il ritegno, determino il suo punto d'applicazione, e, tenendo di mira il risultato a cui voglio arrivare, nelle formole che ne risultano, mantengo in evidenza l'altezza verticale della parete contro la quale agisce il prisma di terra considerato. Quest'artifizio mi permette di dedurre la risoluzione del problema più generale costituente l'oggetto di questo lavoro dalla considerazione di un complesso di casi particolari, come quello esaminato; ed è così che, con un metodo il quale, per quanto a me risulta, da altri non venne ancora seguito, arrivo a trovare la spinta ed il suo punto d'applicazione senza impegnarmi nella risoluzione di numerose equazioni complete del terzo grado, e senza adoperare il metodo delle quadrature, ma sibbene un processo affatto numerico e comodo nella pratica, in quanto che richiede solamente l'impiego di formole semplici e di facile conteggio.

Nell'intento di far risultare la pratica utilità del metodo da me proposto, ne faccio l'applicazione ad alcuni casi particolari, e, fra i molteplici problemi che si possono presentare nella pratica, ne scelgo cinque che sono i più frequenti nell'arte del costruttore. Il primo dei problemi da me risolti, con metodi diversi da quello che io tenni, venne già trattato da altri autori, ma, per quanto mi consta, non si può dire lo stesso degli altri quattro.

Finalmente noto una difficoltà che si può presentare nella determinazione del prisma di massima spinta, e propongo il modo col quale assai facilmente può essere superata in ogni caso.

210. **Ipotesi che generalmente si ammettono nel calcolo della spinta delle terre, e resistenze che si oppongono allo scoscendimento di un masso di terra appoggiato ad un rite-**

gno. — Un terrapieno esercita spinta contro la parete di un ritegno costrutto per impedirne gli scoscendimenti, quando si distacca dal terrapieno stesso un masso di terra il quale, appoggiandosi contro la detta parete, ed agendo a guisa di cuneo, tende a scorrere in basso ed a rimuovere il ritegno. Tutti gli autori che hanno studiato l'importante argomento della determinazione della spinta delle terre sono stati d'accordo nell'ammettere che sia piana la faccia secondo cui il masso spingente ha tendenza a separarsi dal terrapieno; che anzi, Hagen (*Manuel des constructions hydrauliques*, 2^e^ partie) e Persy (*Cours de stabilité des constructions*, lithographie de l'école d'application à Metz) hanno voluto dimostrare esser la detta ipotesi una realtà nel caso di un terrapieno terminato superiormente da un piano orizzontale. Le dimostrazioni date dagli or citati autori lasciano però luogo a serie obbiezioni; pare più verisimile e maggiormente conforme a quanto si manifesta nell'osservazione di terrapieni scoscesi l'ammettere che la superficie di separazione del masso spingente dal sottostante terrapieno sia una superficie cilindrica; che questa superficie cilindrica abbia generatrici orizzontali; e che la sua direttrice sia una linea la quale incomincia in alto con una breve retta verticale o poco distante dalla verticale, ed a cui si raccorda una curva convessa verso l'interno del terrapieno colla sua tangente nel punto più basso inclinata all'orizzonte di un angolo ben poco diverso da quello che corrisponde al natural declivio delle terre. Segue da ciò che, fondando la determinazione della spinta delle terre all'ipotesi che sia piana la faccia inferiore del masso spingente, risultano delle formole la cui applicazione non può condurre che a risultati d'approssimazione. Questi risultati però, sia per essere poco lontani dal vero, sia per condurre alla determinazione di una spinta sempre un po' maggiore di quella che realmente ha luogo, si possono ammettere senza tema d'inconvenienti per rapporto alla stabilità dei ritegni, la quale sarà sempre in eccesso anzichè in difetto, qualora si regolino le loro dimensioni in modo che essi possano resistere alla spinta teoricamente dedotta partendo dall'accennata ipotesi.

Le resistenze che si oppongono allo scoscendimento di un masso di terra appoggiato da una parte al terrapieno da cui tende a staccarsi, e dall'altra parte alla parete di un ritegno, sono: quella dovuta all'attrito di terra con terra che si sviluppa nella faccia inferiore del detto masso; quella pure dovuta all'attrito che ha luogo nella faccia, secondo la quale il medesimo masso si appoggia al ritegno; quella dovuta alla coesione che ha luogo fra le molecole terrose nella faccia, secondo cui il masso spingente tende a separarsi dal terrapieno; e finalmente quella che proviene dall'adesione che le molecole terrose poste a contatto del ritegno hanno colla parete del ritegno stesso. È poi opinione generalmente accettata dagli ingegneri pratici, che le resistenze dovute all'attrito non si sviluppino contemporaneamente a quelle dovute alla coesione ed all'adesione; che entrino in giuoco le prime allorquando le seconde sono distrutte; e che nell'instituire dei calcoli relativi all'equilibrio delle terre si debba solamente tener conto delle resistenze dovute all'attrito, anzichè di quelle dovute alla coesione ed all'adesione, giacchè col tempo e per molte cause sono queste soggette a venir meno.

211. **Espressione generale della spinta**. — Per risolvere il problema di cui venne dato l'enunciato nel numero 209 si incominci dal cercare l'espressione generale della spinta esercitata contro la parete piana $A_n A_1$ (*fig.* 175) di un ritegno da un prisma di terra avente per sezion retta un poligono qualunque $A_1 A_2 A_3 A_4$........, $A_{n-2} A_{n-1} A_n$, lungo orizzontalmente l'unità, e facente parte di un terrapieno con profilo costante $A_1 A_2 A_3 A_4$........ $A_{n-2} A_{n-1} A_p$ e con sovraccarichi distribuiti come si è detto nel citato numero 209 sulle liste rettangolari rappresentate in $A_1' A_1''$, $A_2' A_2''$, $A_3' A_3''$ ...., $A'_{n-2} A''_{n-2}$. Prendasi per origine di coordinate il punto O intersezione della verticale passante per A_1 coll'orizzontale condotta per A_n, e si assumano le direzioni Ox ed Oy delle accennate rette per assi coordinati positivi onde riferirvi le posizioni dei vertici del profilo della superficie superiore del terrapieno, dei vertici della sezione retta del prisma spingente e dei sovraccarichi. Si chiamino;

X_2, X_3, X_4 ...., X_{n-2}, X_p le lunghezze delle ascisse dei vertici del profilo della superficie superiore del terrapieno rappresentati nei punti A_2, A_3, A_4 .... A_{n-2}, A_p, essendo nulla l'ascissa X_1 del primo vertice A_1,

Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 ...., Y_{n-2}, Y_p le lunghezze delle ordinate degli stessi vertici,

X_{n-1} l'ascissa del punto A_{n-1} in cui la retta $A_n A_{n-1}$, rappresentante la faccia inferiore del prisma spingente, incontra il profilo della superficie superiore del terrapieno,

Y_{n-1} l'ordinata del medesimo punto,

X_n l'ascissa del punto A_n, la cui ordinata è zero,

X'_1, X'_2, X'_3 ...., X'_{n-2} le distanze orizzontali dei punti A'_1, A'_2, A'_3 ...., A'_{n-2}, rappresentanti le rette orizzontali secondo cui sono limitate dalla parte del punto A_1 le diverse zone sovraccaricate, dal piano verticale proiettato nell'asse Oy,

X''_1, X''_2, X''_3 ...., X''_{n-2} le distanze orizzontali che i punti A''_1, A''_2, A''_3 ...., A''_{n-2}, rappresentanti le rette orizzontali che limitano dall'altra parte le diverse zone sovraccaricate, hanno dal piano verticale proiettato in Oy,

X' l'ascissa del punto A', rappresentante la retta orizzontale che dalla parte di A_1 limita una zona sovraccaricata, la quale si suppone tagliata dal prisma spingente;

ψ l'angolo che la faccia inferiore $A_n A_{n-1}$ del prisma spingente fa coll'orizzonte;

s la superficie della sezione retta dell'or indicato prisma;

Π il peso dell'unità di volume di terrapieno;

φ l'angolo d'attrito delle terre del terrapieno sopra se stesse, ossia quell'angolo il quale ha per tangente trigonometrica il valore del coefficiente d'attrito f fra le accennate terre;

φ' l'angolo d'attrito delle terre del terrapieno sopra la parete del ritegno, ossia quell'angolo la cui tangente trigonometrica è il coefficiente d'attrito f' delle indicate terre contro la detta parete;

β l'angolo $A_1 A_n x$ che la parete del ritegno fa coll'orizzonte e che ammette per tangente il quoziente $-\dfrac{Y_1}{X_n}$;

p_1, p_2, p_3, ..., p_{n-2} i pesi dei sovraccarichi per ogni unità di superficie delle proiezioni orizzontali delle liste rettangolari sulle quali essi si trovano uniformemente distribuiti,

p il peso del sovraccarico per ogni unità di superficie della proiezione orizzontale della zona sovraccaricata $A' A''$ che supponesi tagliata dalla faccia inferiore $A_n A_{n-1}$ del prisma spingente,

P il peso del prisma spingente, avente s per superficie della sua sezion retta e per lunghezza l'unità, aumentato dei sovraccarichi di cui il detto prisma trovasi gravato sulle sue facce superiori,

R la spinta che questo prisma produce contro la parete $A_1 A_n$ per un tratto di essa lungo l'unità,

Q la componente orizzontale della spinta R,

V la componente verticale della stessa spinta.

Considerando il prisma di terra $A_1 A_2 A_3 A_4$ .... $A_{n-2} A_{n-1} A_n$ al momento in cui è in procinto di scorrere lungo il piano $A_n A_{n-1}$, esso esercita: sul terrapieno un'infinità di pressioni elementari riducibili ad una pressione unica N normale all'accennato piano

$A_n A_{n-1}$ con sviluppo di una forza contenuta nello stesso piano, rappresentante la resistenza dovutà all'attrito delle terre fra di loro, proporzionale ad N ed espressa da fN; contro il ritegno pure un'infinità di pressioni elementari producenti una pressione N' normale alla parete piana $A_1 A_n$ con svolgimento di una resistenza d'attrito agente nel piano di detta parete, proporzionale alla pressione N' e data da $f'N'$. La risultante S delle due forze N ed fN fa colla normale GN al piano $A_n A_{n-1}$ un angolo NGS, la cui tangente è f, e quindi di valore φ. La risultante R delle due forze N' ed $f'N'$ fa colla normale HN' alla parete $A_1 A_n$ un angolo N'HR, la cui tangente è f', e quindi di valore φ'. I punti d'applicazione G ed H delle accennate risultanti si trovano in quelle posizioni per le quali è possibile lo stato d'equilibrio prossimo al moto del prisma di terra $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots\ldots\ldots A_{n-2} A_{n-1} A_n$. Ora, essendo le due pressioni R ed S causate dal peso P, sono esse le componenti che risultano scomponendolo nelle due direzioni IHR ed IGS incontrantisi in uno stesso punto I della verticale passante pel centro di gravità del prisma di terra considerato e dei suoi sovraccarichi; e, immaginando costrutto il parallelogramma I (R) P (S) avente per sua diagonale una retta verticale rappresentante in direzione ed intensità il peso P, ecco come si può procedere nel determinare la spinta R, la quale trovasi rappresentata in intensità e direzione dal lato $\overline{\text{I (R)}}$ del detto parallelogramma.

La superficie del poligono $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots\ldots\ldots A_{n-2} A_{n-1} A_n$, essendo la somma delle aree dei trapezi $O A_1 A_2 D_2$, $D_2 A_2 A_3 D_3$, $D_3 A_3 A_4 D_4$, ..., $D_{n-2} A_{n-2} A_{n-1} D_{n-1}$ diminuita di quelle dei due triangoli $A_n A_{n-1} D_{n-1}$ ed $A_n A_1 O$, vien data da

$$s = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} X_2(Y_1 + Y_2) + (X_3 - X_2)(Y_2 + Y_3) + (X_4 - X_3)(Y_3 + Y_4) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + (X_{n-2} - X_{n-3})(Y_{n-3} + Y_{n-2}) \\ + (X_{n-1} - X_{n-2})(Y_{n-2} + Y_{n-1}) - (X_{n-1} - X_n) Y_{n-1} - X_n Y_1 \end{array} \right],$$

la qual espressione, ponendo

$$\left[\begin{array}{l} X_2(Y_1 + Y_2) + (X_3 - X_2)(Y_2 + Y_3) + (X_4 - X_3)(Y_3 + Y_4) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots + (X_{n-2} - X_{n-3})(Y_{n-3} + Y_{n-2}) - X_{n-2} Y_{n-2} \\ - X_n Y_1 \end{array} \right] = A \quad (1)$$

e mettendo Y_{n-1} fattor comune, si riduce a

$$s=\frac{1}{2}\left[A+Y_{n-2}X_{n-1}-(X_{n-2}-X_n)Y_{n-1}\right].$$

Il peso del prisma di terra rappresentato nel poligono $A_1 A_2 A_3 A_4 \ldots\ldots A_{n-2} A_{n-1} A_n$, avente l'unità per lunghezza ed s per superficie della sua sezione retta, è

$$\frac{1}{2}\Pi\left[A+Y_{n-2}X_{n-1}-(X_{n-2}-X_n)Y_{n-1}\right] \qquad \text{(I)}.$$

Tutti i sovraccarichi esistenti sulla superficie superiore del terrapieno costituiscono un peso espresso da

$$\left\{\begin{array}{l} p_1(X_1''-X_1')+p_2(X_2''-X_2')+p_3(X_3''-X_3')+\ldots.. \\ +p_{n-2}(X''_{n-2}-X'_{n-2})+p(X_{n-1}-X') \end{array}\right\},$$

il quale, ponendo

$$\left\{\begin{array}{l} p_1(X_1''-X_1')+p_2(X_2''-X_2')+p_3(X_3''-X_3')+\ldots.. \\ +p_{n-2}(X''_{n-2}-X'_{n-2}) \end{array}\right\}=B \quad (2)$$

si riduce a

$$B+p(X_{n-1}-X') \qquad \text{(II)}.$$

Il peso P, somma di quello del prisma spingente dato dall'espressione (I) e di quello dei sovraccarichi che su esso si trovano, dato dall'espressione (II), ha per valore

$$P=\frac{1}{2}\Pi\left[\begin{array}{l} A+\frac{2}{\Pi}\Big(B-pX'\Big)+\Big(Y_{n-2}+\frac{2p}{\Pi}\Big)X_{n-1} \\ -(X_{n-2}-X_n)Y_{n-1} \end{array}\right] \qquad \text{(III)}.$$

Chiamando ora x ed y le coordinate correnti delle rette $A_n A_{n-1}$ e $A_{n-2} A_p$, esse hanno rispettivamente per equazioni

$$y=(x-X_n)\tang\psi,$$

$$y = Y_{n-2} + C(x - X_{n-2}),$$

essendo C la tangente trigonometrica dell'angolo $A_p A_{n-1} A'_p$ data dall'equazione

$$C = \frac{Y_p - Y_{n-2}}{X_p - X_{n-2}} \qquad (3);$$

e quindi le coordinate X_{n-1} ed Y_{n-1} del loro punto d'intersezione A_{n-1} sono

$$X_{n-1} = \frac{X_n \operatorname{tang}\psi + Y_{n-2} - C X_{n-2}}{\operatorname{tang}\psi - C} \qquad (IV),$$

$$Y_{n-1} = \frac{Y_{n-2} - C(X_{n-2} - X_n)}{\operatorname{tang}\psi - C} \operatorname{tang}\psi \qquad (V).$$

Ponendo questi valori di X_{n-1} e di Y_{n-1} nell'equazione (III), e facendo

$$A + \frac{2B}{\Pi} + \frac{2p}{\Pi}\left(X_n - X'\right) - Y_{n-2}\left(X_{n-2} - 2X_n\right)$$
$$+ C\left(X_{n-2} - X_n\right)^2 = D \qquad (4),$$

$$-C\left[A + \frac{2B}{\Pi} + \frac{2p}{\Pi}\left(X_{n-2} - X'\right) + X_{n-2} Y_{n-2}\right]$$
$$+ Y_{n-2}\left(Y_{n-2} + \frac{2p}{\Pi}\right) = E \qquad (5),$$

si ottiene il seguente valore di P in funzione dell'angolo ψ e delle coordinate dei vertici $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots\ldots A_{n-2}, A_p$ ed A_n,

$$P = \frac{1}{2}\Pi \frac{D \operatorname{tang}\psi + E}{\operatorname{tang}\psi - C} \qquad (VI).$$

Per ottenere la spinta R prodotta dal peso P contro la parete

$A_1 A_n$ si osservi, che dal triangolo $I(R)P$, i cui lati $\overline{IP}$ ed $\overline{I(R)}$ rappresentano rispettivamente le forze P ed R, si ha

$$R = P \frac{\operatorname{sen} IP(R)}{\operatorname{sen} I(R)P};$$

che, immaginando abbassate da I le due perpendicolari Id ed Ie su $A_n A_{n-1}$ ed $A_n A_1$ e prolungata la IP fino ad incontrare in f l'orizzontale Ox, agevolmente si deduce

$$IP(R) = PIS = PId - SId = A_{n-1}A_n x - SGN = \psi - \varphi,$$

$$\begin{aligned} I(R)P &= 180^\circ - IP(R) - RIP = 180^\circ - IP(R) - (eIf - eIR) \\ &= \varphi + \varphi' + \beta - \psi; \end{aligned}$$

e che per conseguenza risulta il seguente valore di R

$$R = P \frac{\operatorname{sen}(\psi - \varphi)}{\operatorname{sen}(\varphi + \varphi' + \beta - \psi)} \qquad \text{(VII)}.$$

Se ora in quest'equazione si sostituiscono il valore di P dato dall'equazione (VI) e gli svolgimenti dei seni delle differenze degli archi ψ e φ, $\varphi + \varphi' + \beta$ e ψ, se numeratore e denominatore della frazione che è moltiplicata per P si dividono per $\cos \psi$, e se ai detti due termini di questa frazione si pongono rispettivamente fattori comuni $\cos \varphi$ e $\cos(\varphi + \varphi' + \beta)$, il valore di R diventa

$$\left\{ \begin{aligned} R = \frac{1}{2}\Pi \frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi + \varphi' + \beta)} \times \\ \times \frac{D \operatorname{tang}^2 \psi + (E - D \operatorname{tang}\varphi) \operatorname{tang}\psi - E \operatorname{tang}\varphi}{-\operatorname{tang}^2\psi + \left[C + \operatorname{tang}(\varphi + \varphi' + \beta)\right] \operatorname{tang}\psi - C \operatorname{tang}(\varphi + \varphi' + \beta)} \end{aligned} \right\} \qquad \text{(VIII)}.$$

Per trovare le componenti orizzontale Q e verticale V della spinta R bisogna prima procurarsi l'angolo RIg, che la detta spinta fa coll'orizzonte. Perciò si osserva che dalla figura risulta

$$RIg = gIf - RIf = 90^\circ - (eIf - eIR) = \beta + \varphi' - 90^\circ,$$

e che per conseguenza, essendo $Q=R\cos RIg$ e $V=R\,\mathrm{sen}\,RIg$, risultano le seguenti equazioni determinatrici di Q e di V

$$\left.\begin{aligned} Q&=R\,\mathrm{sen}(\beta+\varphi') \\ V&=-R\cos(\beta+\varphi') \end{aligned}\right\}\text{(IX)}.$$

. **212. Determinazione del prisma di massima spinta.** — Il valore della spinta R dato dall'equazione (VII) è nullo per $\psi=\varphi$, e lo stesso succede per $\psi=\beta$, giacchè il prisma spingente, riducendosi ad avere una base nulla, ha pure un peso nullo, e produce quindi una spinta nulla. Segue da ciò che, facendo variare la posizione del piano $A_n A_{n-1}$ separante il prisma spingente rappresentato in $A_1\,A_2\,A_3\,A_4\,\ldots\ldots\,A_{n-2}\,A_{n-1}\,A_n$ in modo che l'angolo corrispondente $A_{n-1}A_n x$ prenda tutti i valori compresi fra φ e β, si deve trovare un certo valore dell'angolo ψ, per cui il relativo prisma spingente produce la spinta più grande di tutte quelle che corrispondono a quanti altri prismi possono essere separati dal terrapieno mediante piani inclinati passanti per l'orizzontale rappresentata in A_n. Questo valore particolare di ψ, che verrà indicato con Ψ, è appunto quello che importa di conoscere per la pratica determinazione della spinta prodotta da un terrapieno contro la parete piana di un ritegno destinato ad impedire gli scoscendimenti.

Facendo il coefficiente differenziale $\dfrac{dR}{d\tan\psi}$ mediante l'equazione (VIII), eguagliando a zero quel fattore che è funzione di tang ψ, e che fa diventar nullo il detto coefficiente differenziale, operando tutte le riduzioni, e cangiando ψ nel suo valore Ψ corrispondente al prisma di massima spinta, si ottiene la seguente equazione determinatrice di Ψ

$$\left\{\begin{aligned} &\Big[E+D[C+\mathrm{tang}(\varphi+\varphi'+\beta)-\mathrm{tang}\,\varphi]\Big]\mathrm{tang}^2\Psi \\ &-2\Big[CD\,\mathrm{tang}(\varphi+\varphi'+\beta)+E\,\mathrm{tang}\,\varphi\Big]\mathrm{tang}\,\Psi \\ &+(CD+E)\,\mathrm{tang}(\varphi+\varphi'+\beta)\,\mathrm{tang}\,\varphi \\ &-CE\Big[\mathrm{tang}(\varphi+\varphi'+\beta)-\mathrm{tang}\,\varphi\Big] \end{aligned}\right\}=0 \quad (1).$$

Quest'equazione conduce a trovare due valori di tang Ψ, e bisogna ritenere siccome determinante il prisma di massima spinta quello cui corrisponde l'angolo Ψ compreso fra φ e β.

Supponendo ora che $A_n A_{n-1}$ rappresenti appunto la faccia inferiore del prisma di massima spinta, e chiamando X_m ed Y_m le coordinate del punto A_{n-1}, il quale verrebbe così a rappresentare l'intersezione di detta faccia colla superficie superiore del terrapieno, si ottengono le dette coordinate ponendo nelle equazioni (IV) e (V) il valore di tang Ψ dedotto dall'equazione (1) in luogo di tang ψ, e cangiando rispettivamente X_{n-1} ed Y_{n-1} in X_m ed Y_m; cosicchè risulta

$$\left.\begin{aligned} X_m &= \frac{X_n \operatorname{tang}\Psi + Y_{n-2} - C X_{n-2}}{\operatorname{tang}\Psi - C} \\ Y_m &= \frac{Y_{n-2} - C(X_{n-2} - X_n)}{\operatorname{tang}\Psi - C}\operatorname{tang}\Psi \end{aligned}\right\} (2).$$

Per determinare in ogni caso, ed a seconda della forma della superficie superiore del terrapieno e dei sovraccarichi su essa esistenti, la vera posizione della faccia inferiore del prisma di massima spinta, colle equazioni (1), (2), (3), (4) e (5) del numero precedente, si calcolino i sistemi dei valori delle costanti A, B, C, D ed E supponendo successivamente che la detta faccia inferiore tagli la superficie superiore del terrapieno nei tratti che trovansi rappresentati in $A_1A'_1$, $A'_1A''_1$, A''_1A_2, $A_2A'_2$, $A'_2A''_2$, A''_2A_3, $A_3A'_3$, $A'_3A''_3$, A''_3A_4 .... Di mano in mano che si conoscono i valori di queste costanti si sostituiscano nell'equazione (1) per calcolare i corrispondenti valori di tang Ψ, e per ottenere il valore di X_m dalla prima delle equazioni (2). I successivi valori di X_m si paragonino colle ascisse dei punti A'_1, A''_1, A_2, A'_2, A''_2, A_3, A'_3, A''_3, A_4 ....; ed il prisma di massima spinta trovasi determinato quando il valore di X_m, calcolato nell'ipotesi che l'incontro della faccia inferiore di questo prisma colla superficie superiore del terrapieno cada su un determinato tratto di quest'ultima, è eguale, oppure compreso fra i valori delle ascisse dei due punti rappresentanti le orizzontali che limitano un tal tratto.

La faccia inferiore del prisma di massima spinta fa generalmente coll'orizzonte un angolo il quale d'alquanto si scosta dai due suoi limiti φ e β. Da quest'osservazione deriva che, nell'intento di abbreviare il lavoro necessario alla determinazione dell'accennato prisma, conviene incominciare i tentativi supponendo che l'indicata sua faccia incontri la superficie superiore del terrapieno in tali siti da risultare l'angolo che essa fa coll'orizzonte nè troppo vicino al suo limite inferiore $A_{n-1}A_n x$, nè troppo prossimo al suo limite superiore $A_1 A_n x$.

213. **Spinta e suo punto d'applicazione nel caso in cui il prisma spingente è terminato da un piano inclinato con sovraccarico uniformemente distribuito nella sua proiezione orizzontale.** — Per giungere ora a trovare le formole mediante le quali, una volta determinato il prisma di massima spinta, torni agevole in ogni caso particolare il ricercare l'intensità, le componenti orizzontale e verticale, ed il punto d'applicazione della spinta che un terrapieno esercita contro la parete piana di un ritegno, si esamini il caso in cui il prisma spingente è superiormente terminato da una superficie piana inclinata all'orizzonte, e portante un sovraccarico uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale.

Sia $A_1 A_n$ (*fig.* 178) la retta rappresentante la parete spinta, $A_1 A$ quella che determina la superficie superiore del terrapieno, ed $A_3 A_2$ la faccia inferiore del prisma spingente. Si consideri una porzione di questo prisma orizzontalmente lunga l'unità, e si ritengano le denominazioni che già vennero stabilite al numero 211 per quanto concerne al peso dell'unità di volume di terrapieno, al peso del sovraccarico riferito all'unità di superficie della proiezione orizzontale della faccia superiore del terrapieno, agli angoli d'attrito, agli angoli esprimenti le inclinazioni della parete spinta e della faccia superiore del prisma spingente coll'orizzonte, alla tangente trigonometrica dell'angolo che il piano, secondo cui termina superiormente il terrapieno, e che viene incontrato dalla faccia inferiore del prisma spingente, fa coll'orizzonte. Si chiamino:

y l'altezza verticale $\overline{A_1 O}$ del tratto di parete spinta sulla quale si suppone agire il prisma spingente $A_1 A_2 A_3$,

y' l'altezza verticale $\overline{A_1 O'}$ di un altro tratto di parete spinta su cui si suppone agire una parte $A_1 A'_3 A'_2$ del prisma spingente separata da questo mediante un piano $A'_3 A'_2$ parallelo ad $A_3 A_2$,

ξ la distanza $\overline{\Omega O}$ fra il piano orizzontale passante pel punto A_1 e quello passante pel punto A_n,

R la spinta che ha luogo contro la parete $A_1 A_3$,

R′ quella che si verifica contro $A_1 A'_3$, Q la componente orizzontale della prima spinta,

Q′ la stessa componente per la seconda,

Y la distanza del punto d'applicazione della spinta R dal piano orizzontale passante per A_1,

Y′ la distanza dello stesso punto d'applicazione dal piano orizzontale passante per A_3, e

Z la sua distanza dal piano orizzontale passante per A_n.

Nel caso particolare in questione, essendo un triangolo la sezion retta del prisma spingente, si ha

$$X_{n-2}=X_1=0, \qquad Y_{n-2}=\overline{OA_1}=Y_1=y,$$

$$X_{n-1}=\overline{OD_2}=X_2, \qquad Y_{n-1}=\overline{D_2A_2}=Y_2,$$

$$X_n=\overline{OA_3}=X_3=-y\cot\beta,$$

e quindi il valore di A, come risulta dall'equazione (1) del numero 211, è

$$A=-X_3Y_1=y^2\cot\beta.$$

Trovandosi il sovraccarico su tutta la superficie superiore del terrapieno, esiste la sola lista sovraccaricata che è incontrata dalla faccia inferiore del prisma spingente, e che incomincia dall'orizzontale rappresentata in A_1, per cui

$$B=0, \qquad X'=0.$$

I valori di D e di E, a cui conduce l'applicazione delle equazioni (4) e (5) del numero 211, sono

$$D=-\cot\beta\left[(1-C\cot\beta)y^2+\frac{2p}{\Pi}y\right],$$

$$E=(1-C\cot\beta)y^2+\frac{2p}{\Pi}y;$$

e quindi il valore di R (equazione VIII del numero 211), effettuando i prodotti, ordinando il numeratore della frazione che è funzione di tang ψ secondo le potenze di y, e mettendo in evidenza il fattore comune

$$(\tang\psi - \tang\varphi)\,(1 - \cot\beta\,\tang\psi),$$

si riduce a

$$R = \frac{1}{2}\Pi\,\frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi'+\beta)}\times$$

$$\times\frac{(\tang\psi - \tang\varphi)\,(1 - \cot\beta\,\tang\psi)\left[(1 - C\cot\beta)y^2 + \dfrac{2p}{\Pi}y\right]}{-\tang^2\psi + [C + \tang(\varphi+\varphi'+\beta)]\tang\psi - C\tang(\varphi+\varphi'+\beta)}.$$

Se ora si pone

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi'+\beta)}\times \\ \times\dfrac{(\tang\psi - \tang\varphi)\,(1 - \cot\beta\,\tang\psi)}{-\tang\psi^2 + [C + \tang(\varphi+\varphi'+\beta)]\tang\psi - C\tang(\varphi+\varphi'+\beta)}\end{array}\right\} = F \qquad (1),$$

la trovata espressione di R diventa

$$R = \frac{1}{2}\Pi F\left[(1 - C\cot\beta)y^2 + \frac{2p}{\Pi}y\right] \qquad (2),$$

e la sua componente orizzontale Q vien data (equazioni IX del numero 111) da

$$Q = \frac{1}{2}\Pi F\left[(1 - C\cot\beta)y^2 + \frac{2p}{\Pi}y\right]\operatorname{sen}(\beta+\varphi').$$

Se invece di considerare il total prisma spingente $A_1 A_2 A_3$ si considera solo la parte $A_1 A'_2 A'_3$, non cangiando i valori di Π, p, φ, φ', β, ψ e C e quindi neppure quello di F, ma sibbene diventando y' il valore di y, si ha

$$Q' = \frac{1}{2}\Pi F\left[(1 - C\cot\beta)y'^2 + \frac{2p}{\Pi}y'\right]\operatorname{sen}(\beta+\varphi').$$

La spinta orizzontale elementare su una lista $A'_3A''_3$ alta verticalmente $\overline{O'O''}=dy$ è

$$dQ'=\frac{1}{2}\Pi F\left[2(1-C\cot\beta)y'+\frac{2p}{\Pi}\right]\operatorname{sen}(\beta+\varphi')\,dy',$$

ed il momento di questa spinta elementare rispetto al piano orizzontale passante per A_1 vien espresso da

$$y'dQ'=\frac{1}{2}\Pi F\left[2(1-C\cot\beta)y'^2+\frac{2p}{\Pi}y'\right]\operatorname{sen}(\beta+\varphi')\,dy'.$$

Siccome poi la somma dei momenti delle spinte elementari che hanno luogo lungo la parete A_1A_3 rispetto all' accennato piano orizzontale deve fare il momento della spinta orizzontale totale Q rispetto allo stesso piano, si ha la seguente equazione determinatrice di Y

$$\left[(1-C\cot\beta)\,y^2+\frac{2p}{\Pi}y\right]Y=\int_0^y\left[2(1-C\cot\beta)y'^2+\frac{2p}{\Pi}y'\right]dy',$$

la quale, in seguito ad integrazione, conduce ad ottenere

$$Y=\frac{y}{3}\cdot\frac{2\Pi(1-C\cot\beta)y+3p}{\Pi(1-C\cot\beta)y+2p}.$$

L'altezza Y′ del punto d'applicazione della spinta R al di sopra del piano orizzontale passante per A_3 è la differenza $y-Y$, e quindi vien data da

$$Y'=\frac{y}{3}\cdot\frac{\Pi(1-C\cot\beta)y+3p}{\Pi(1-C\cot\beta)y+2p} \qquad (3),$$

e la distanza Z del suo punto d'applicazione dal piano orizzontale passante per A_n ammette il valore

$$Z=\xi+\frac{y}{3}\cdot\frac{\Pi(1-C\cot\beta)\,y+3p}{\Pi(1-C\cot\beta)\,y+2p} \qquad (4).$$

214. Intersezione della parete piana contro la quale ha luogo la spinta con un piano parallelo alla faccia inferiore del prisma di massima spinta, e con una delle facce costituenti la superficie superiore del terrapieno. — Se da tutte le rette orizzontali poste sulla superficie superiore del terrapieno, e rappresentate nei punti (*fig.* 175) A_1', A_1'', A_2, A_2', A_2'', A_3, A_3', A_3'', A_4 ...., A_{n-2}, A'_{n-2}, A''_{n-2} ed A', si immaginano condotti tanti piani paralleli alla faccia inferiore del prisma di massima spinta, e quindi facenti coll'orizzonte l'angolo Ψ, la total parete $A_1\,A_n$ viene tagliata da questi piani secondo altrettante rette orizzontali rappresentate nei punti B_1', B_1'', B_2, B_2', B_2'', B_3, B_3', B_3'', B_4 ...., B_{n-2}, B'_{n-2}, B''_{n-2} e B', ed ecco come si fissa la posizione di una di queste orizzontali.

Sia A_i (*fig.* 179) il punto che rappresenta la retta orizzontale della superficie superiore del terrapieno per cui si conduce il piano parallelo alla faccia inferiore $A_n\,A_{n-1}$ del prisma di massima spinta, la retta $A_i\,B_i$ determini il detto piano, e, ritenute le denominazioni già stabilite ai numeri 211 e 212 per quanto spetta all'ordinata $\overline{OA_1}$ ed agli angoli $A_1\,A_n\,x$ e $A_{n-1}\,A_n\,x$, si chiamino:

X_i ed Y_i le due coordinate $\overline{OD_i}$ e $\overline{D_i A_i}$ del punto A_i rispetto agli assi ortogonali $O\,x$ ed $O\,y$, il primo orizzontale e passante per A_n, il secondo verticale e passante per A_1,

ξ_i l'ordinata $\overline{O b_i}$ del punto B_i;

essendo x ed y le coordinate correnti delle due rette $A_n\,A_1$ ed $A_i\,B_i$, esse hanno rispettivamente per equazione

$$\left.\begin{aligned} y - Y_1 &= x \operatorname{tang} \beta \\ y - Y_i &= (x - X_i) \operatorname{tang} \Psi \end{aligned}\right\} \quad \text{(I)},$$

e quindi l'ordinata ξ_i del loro punto d'intersezione B_i vien data dall'equazione

$$\xi_i = \frac{Y_i - (X_i + Y_1 \cot \beta) \operatorname{tang} \Psi}{1 - \cot \beta \operatorname{tang} \Psi} \quad (1).$$

Prolungando ora le rette $A_2\,A_3$, $A_3\,A_4$ ...., $A_{n-2}\,A_{n-1}$ (*fig.* 175) rappresentanti le facce superiori del prisma di massima spinta fino ad incontrare la retta $A_n\,A_1$ la quale rappresenta il piano in cui trovasi la parete spinta, risultano nei punti C_2, C_3 ...., C_{n-2} le intersezioni di questa con quelle, ed ecco come si può procedere per fissare una di tali intersezioni. Si consideri in generale la faccia superiore del prisma di massima spinta rappresentata colla retta $A_i A_{i+1}$ (*fig.* 179) incontrante la parete spinta secondo l'orizzontale proiettata nel punto C_i, si ritengano le denominazioni che già vennero stabilite in questo numero, e si chiamino

X_{i+1} ed Y_{i+1} le coordinate del punto A_{i+1} e

ν_i l'ordinata $\overline{O c_i}$ del punto C_i;

essendo x ed y le coordinate correnti delle rette $A_n A_1$ ed $A_i A_{i+1}$, siccome l'equazione della prima retta è l'equazione (I), mentre quella della seconda è

$$y - Y_i = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{X_{i+1} - X_i}(x - X_i),$$

l'ordinata ν_i del loro punto d'intersezione vien data dall'equazione

$$\nu_i = \frac{Y_i - \dfrac{Y_{i+1} - Y_i}{X_{i+1} - X_i}(X_i + Y_1 \cot \beta)}{1 - \dfrac{Y_{i+1} - Y_i}{X_{i+1} - X_i}\cot \beta} \qquad (2).$$

215. **Spinta massima, sue componenti orizzontale e verticale e suo punto d'applicazione nel caso più generale che si può presentare all'ingegnere costruttore.** — Una volta calcolate tutte le ordinate dei punti B_1', B_1'', B_2, B_2', B_2'', B_3, B_3', B_3'', B_4 ...., B_{n-2}, B'_{n-2}, B''_{n-2} (*fig.* 175) mediante l'equazione (1) del numero precedente, e quelle dei punti C_2, C_3, C_4 ...., C_{n-2} coll'applicazione dell'equazione (2) dello stesso numero, torna facile il trovare con semplici differenze le altezze verticali $\overline{A_1 b_1'}$, $\overline{A_1 b_1''}$, $\overline{A_1 b_2}$, $\overline{c_2 b_2'}$, $\overline{c_2 b_2''}$, $\overline{c_2 b_3}$, $\overline{c_3 b_3}$, $\overline{c_3 b_3'}$, $\overline{c_3 b_3''}$, $\overline{c_3 b_4}$, $\overline{c_4 b_4}$ ...., $\overline{c_{n-2} b_{n-2}}$, $\overline{c_{n-2} b'_{n-2}}$, $\overline{c_{n-2} b''_{n-2}}$, $\overline{c_{n-2} O}$. Le tre altezze $\overline{A_1 b_1'}$, $\overline{A_1 b_1''}$ e $\overline{A_1 b_2}$, convenientemente applicando le equazioni (1) e (2) del numero 213, si impieghino per determinare la spinta r_1' prodotta dal prisma di terra $A_1 B_1' A_1'$ senza sovraccarico, le spinte R_1' ed R_1'' prodotte dai prismi $A_1 B_1' A_1'$ ed $A_1 B_1'' A_1''$ supposti uniformemente sovraccaricati come lo è il tratto $A_1' A_1''$ della superficie superiore del terrapieno, e le spinte r_1'' e ρ_1 prodotte dai prismi $A_1 B_1'' A_1''$ ed $A_1 B_2 A_2$ senza sovraccarichi. Le quattro altezze $\overline{c_2 b_2}$, $\overline{c_2 b_2'}$, $\overline{c_2 b_2''}$ e $\overline{c_2 b_3}$ si facciano servire per trovare le spinte r_2 ed r_2' prodotte dai prismi $C_2 B_2 A_2$ e $C_2 B_2' A_2'$ senza sovraccarichi, le spinte R_2' ed R_2'' prodotte dai prismi $C_2 B_2' A_2'$ e $C_2 B_2'' A_2''$ supposti uniformemente

sovraccaricati come il tratto $A_2'A_2''$ della superficie superiore del terrapieno, e le spinte r_2'' e ρ_2 prodotte dai prismi $C_2\,B_2''\,A_2''$ e $C_2\,B_3\,A_3$ senza sovraccarichi. Analogamente si determinino tutte le spinte r_3 ed r_3', R_3' ed R_3'', r_3'' e ρ_3 ...., r_{n-2} ed r'_{n-2}, R'_{n-2} ed R''_{n-2}, r''_{n-2} e ρ_{n-2} rispondenti rispettivamente ai prismi $C_3B_3A_3$ e $C_3\,B_3'A_3'$ senza sovraccarico, ai prismi $C_3B_3'\,A_3'$ e $C_3B_3''\,A_3''$ con sovraccarico uniforme come sul tratto $A_3'A_3''$, ai prismi $C_3B_3''A_3''$ e $C_3B_4A_4$ senza sovraccarico, ..., ai prismi $C_{n-2}\,B_{n-2}\,A_{n-2}$ e $C_{n-2}B'_{n-2}A'_{n-2}$ pure senza sovraccarico, ai prismi $C_{n-2}B'_{n-2}A'_{n-2}$ e $C_{n-2}B''_{n-2}A''_{n-2}$ con sovraccarico uniformemente distribuito, e finalmente ai prismi $C_{n-2}\,B''_{n-2}\,A''_{n-2}$ e $C_{n-2}\,A_n\,A_{n-1}$ senza sovraccarico. Trovate tutte queste spinte parziali si facciano le differenze

$$
\begin{array}{lll}
 & R_1''-R_1', & \rho_1-r_1'', \\
r_2'-r_2, & R_2''-R_2', & \rho_2-r_2'', \\
r_3'-r_3, & R_3''-R_3', & \rho_3-r_3'', \\
\dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\
r'_{n-2}-r_{n-2}, & R''_{n-2}-R'_{n-2}, & \rho_{n-2}-r''_{n-2},
\end{array}
$$

ed evidentemente, nel caso più generale in cui la lista sovraccaricata si debba considerare siccome posta fra le orizzontali A_{n-2} ed A_{n-1}, si ottiene la spinta totale, che è la spinta massima R_m quando nel fare le spinte parziali siasi messo per ψ il suo valore Ψ corrispondente al prisma di massima spinta, aggiungendo ad r_1' la somma di tutte le trovate differenze, e ponendo quindi simbolicamente

$$R_m = r_1' + \sum_{i=2}^{i=n-2} (r_i'-r_i) + \sum_{i=1}^{i=n-2} (R_i''-R_i') + \sum_{i=1}^{i=n-2} (\rho_i - r_i'') \qquad (1).$$

Si è visto al numero 211 che in generale si ottengono le componenti orizzontale e verticale della spinta prodotta da un dato prisma di terra contro la parete piana di un ritegno, moltiplicando rispettivamente per sen $(\beta+\varphi')$ e per — cos $(\beta+\varphi')$ il valore di detta spinta. Segue da ciò che, una volta trovato il valore di R_m, si calcolano le sue componenti orizzontale Q_m e verticale V_m mediante le semplicissime equazioni

$$Q_m = R_m \operatorname{sen}(\beta + \varphi') \qquad (2),$$

$$V_m = -R_m \cos(\beta + \varphi') \qquad (3).$$

Resta ora a trovarsi il punto d'applicazione della spinta R_m, e questa ricerca in modo facile può essere effettuata ammettendo l'ipotesi, favorevole alla stabilità, che le terre in procinto di scoscendere tendano a separarsi secondo piani paralleli alla faccia inferiore del prisma di massima spinta. Applicando l'equazione (3) del numero 213 si calcolino le distanze dei punti d'applicazione delle spinte parziali r_1' ed R_1', R_1'' ed r_1'', ρ_1 ed r_2, r_2' ed R_2', R_2'' ed r_2'', ρ_2 ed r_3, r_3' ed R_3', R_3'' ed r_3'', ρ_3 .... r_{n-2}, r'_{n-2} ed R'_{n-2}, R''_{n-2} ed r''_{n-2}, ρ_{n-2} dai piani orizzontali rispettivamente passanti pei punti B_1', B_1'', B_2, B_2', B_2'', B_3, B_3', B_3'', B_4 ...., B_{n-2}, B'_{n-2}, B''_{n-2}, A_n. Alle trovate distanze si aggiungano le ordinate degli stessi punti, ossia le loro distanze dal piano orizzontale passante per A_n, onde ottenere le distanze dei punti d'applicazione delle spinte parziali dal piano orizzontale or ora definito. Si indichino con z_1' e Z_1', Z_1'' e z_1'', ζ_1 e z_2, z_2' e Z_2', Z_2'' e z_2'', ζ_2 e z_3, z_3' e Z_3', Z_3'' e z_3'', ζ_3 ...., z_{n-2}, z'_{n-2} e Z'_{n-2}, Z''_{n-2} e z''_{n-2}, ζ_{n-2} queste ultime distanze, con Z_m quella del punto d'applicazione della spinta R_m pure del piano orizzontale condotto per A_n. Ponendo che il momento $Q_m Z_m$ della spinta totale rispetto all'indicato piano deve essere eguale alla somma algebrica dei momenti di tutte le spinte parziali rispetto allo stesso piano, si ottiene un'equazione la quale, sopprimendo il fattore $\operatorname{sen}(\beta + \varphi')$ che è comune a tutti i termini, giacchè invece delle spinte totale e parziali bisogna porre in essa le loro componenti orizzontali, simbolicamente può essere scritta

$$R_m Z_m = \left\{ \begin{array}{c} r_1' z_1' + \sum\limits_{i=2}^{i=n-2} (r_i' z_i' - r_i z_i) + \sum\limits_{i=1}^{i=n-2} (R_i'' Z_i'' - R_i' Z_i') \\ + \sum\limits_{i=1}^{i=n-2} (\rho_i \zeta_i - r_i'' z_i''), \end{array} \right\},$$

e da cui ricavasi

$$Z_m = \frac{1}{R_m}\left\{\begin{array}{l} r_1'z_1' + \sum\limits_{i=2}^{i=n-2} (r_i'z_i' - r_i z_i) + \sum\limits_{i=1}^{i=n-2} (R_i''Z_i'' - R_i'Z_i') \\ \qquad + \sum\limits_{i=1}^{i=n-2} (\rho_i \zeta_i - r_i''z_i'') \end{array}\right\} \quad (4).$$

Le cinque spinte parziali r_1', R_1', R_1'', r_1'' e ρ_1, prodotte dai prismi aventi le loro facce superiori sulla prima faccia della superficie superiore del terrapieno rappresentata in $A_1 A_2$, si riducono: alle tre R_1'', r_1'' e ρ_1 quando il sovraccarico, incominciando dall'orizzontale A_1, si estende fino all'orizzontale A_1''; alle tre r_1', R_1' ed R_1'', quando il sovraccarico occupa una lista limitata dalle orizzontali A_1' ed A_2; alla sola spinta R_2'' quando il sovraccarico esiste su tutta la faccia $A_1 A_2$; ed alla sola spinta r_1' quando la detta faccia non porta sovraccarico. Le sei spinte parziali r_i, r_i', R_i', R_i'', r_i'' e ρ_i riferentisi a prismi aventi le loro facce superiori su un piano qualunque $C_i A_i A_{i+1}$ (*fig.* 179), si riducono: alle quattro R_i', R_i'', r_i'' e ρ_i quando la lista sovraccaricata incomincia coll'orizzontale A_i per terminare coll'orizzontale A_i''; alle quattro r_i, r_i', R_i' ed R_i'' quando il sovraccarico trovasi su una lista rappresentata in $A_i'A_{i+1}$, che si estende dalla orizzontale A_i' all'orizzontale A_{i+1}; alle due R_i' ed R_i'' quando il sovraccarico si trova su tutta la faccia $A_i A_{i+1}$; ed alle due r_i ed r_i' quando non esiste sovraccarico alcuno. Finalmente, per quanto concerne ai prismi le cui facce superiori si trovano sul piano $C_{n-2} A_{n-2} A_{n-1}$ (*fig.* 175), esistono: le sei spinte r_{n-2}, r'_{n-2}, R'_{n-2}, R''_{n-2}, r''_{n-2} e ρ_{n-2} quando la lista sovraccaricata cade fra l'orizzontale A_{n-2} e l'orizzontale A_{n-1} rappresentante l'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie superiore del terrapieno; le quattro R'_{n-2}, R''_{n-2}, r''_{n-2} e ρ_{n-2} quando la lista sovraccaricata incomincia all'orizzontale A_{n-2} e termina in A''_{n-2} prima dell'orizzontale A_{n-1}; le quattro r_{n-2}, r'_{n-2}, R'_{n-2} ed R''_{n-2} quando l'orizzontale A_{n-1} cade sulla lista sovraccaricata $A'_{n-2} A''_{n-2}$; alle due R'_{n-2} ed R''_{n-2} quando il sovraccarico esiste su tutto il tratto $A_{n-2} A_{n-1}$; ed alle due r_{n-1} ed r'_{n-1} quando non esiste sovraccarico alcuno sul detto tratto $A_{n-2} A_{n-1}$.

216. **Risoluzione di alcuni problemi pratici**. — L'applicazione dell'esposta teoria è della massima facilità, ed ecco la risoluzione

di alcuni problemi, i quali sono di uso continuo nella pratica dell'ingegnere costruttore.

I. *Trovare l'intensità, le componenti orizzontale e verticale ed il punto d'applicazione della spinta esercitata contro la parete piana e verticale di un ritegno da un terrapieno lungo orizzontalmente l'unità e terminato superiormente da una faccia piana con sovraccarico uniformemente distribuito sulla sua proiezione orizzontale.*

Essendo verticale la parete spinta, essendo un triangolo la sezione retta del prisma spingente, e venendo la faccia inferiore di questo prisma a tagliare la superficie sovraccaricata, si ha (*fig.* 180)

$$X_{n-2}=X_1=0, \qquad Y_{n-2}=\overline{A_3 A_1}=Y_1,$$

$$X_{n-2}=\overline{A_3 D_2}=X_2 \qquad Y_{n-1}=\overline{D_2 A_2}=Y_2,$$

$$\beta=90^\circ, \qquad X_n=X_3=0,$$

$$A=-X_3 Y_1=0,$$

$$B=0, \qquad X'=0,$$

$$D=0, \qquad E=Y_1\left(Y_1+\frac{2p}{\Pi}\right);$$

ed i trovati valori di β, D ed E, posti nell'equazione (1) del numero 212, conducono alla seguente equazione determinatrice della tangente trigonometrica dell'angolo $A_2 A_3 x=\Psi$ che la faccia inferiore del prisma di massima spinta fa coll'orizzonte

$$\tang^2\Psi-2\tang\varphi\tang\Psi-\frac{\tang\varphi-C}{\tang(\varphi+\varphi')}+C\tang\varphi=0,$$

d'onde

$$\tang\Psi=\tang\varphi+\frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{\tang\varphi-C}{\tang\varphi+\tang\varphi'}} \qquad (1).$$

Conoscendosi ora il valore di $\tang\Psi$, si trovi il valore di F mediante l'equazione (1) del numero 213 cangiando in essa ψ in Ψ, e facendo $\beta=90^\circ$, e si ottiene

$$F=\frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi')}\cdot\frac{\operatorname{tang}\Psi-\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')\operatorname{tang}^2\Psi+[1-C\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')]\operatorname{tang}\Psi-C}.$$

Questo valore di F, posto nella (2) dell'ultimo citato numero coll'osservare che nel caso proposto l'altezza y della parete spinta è $\overline{A_1A_3}=Y_1$ e che la spinta prodotta dal prisma di terra rappresentato in $A_1A_2A_3$ è la spinta massima R_m, conduce a trovare

$$R_m=\frac{1}{2}\frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi')}\cdot\frac{Y_1(\Pi Y_1+2p)(\operatorname{tang}\Psi-\operatorname{tang}\varphi)}{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')\operatorname{tang}^2\Psi+[1-C\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')]\operatorname{tang}\Psi-C} \quad (2).$$

Le due componenti orizzontale e verticale Q_m e V_m della spinta R_m si ottengono mediante le equazioni (2) e (3) del numero precedente e, per essere $\beta=90°$, si ha

$$Q_m=R_m\cos\varphi', \quad (3),$$

$$V_m=R_m\operatorname{sen}\varphi'. \quad (4).$$

Resta finalmente a trovarsi il punto d'applicazione della spinta massima R_m sulla parete spinta A_3A_1. La distanza Z_m di questo punto dal piano orizzontale passante pel punto A_3 si ottiene applicando l'equazione (4) del numero 213, ponendo in essa $\xi=0$, $y=Y_1$, $\beta=90°$, e cangiando Z in Z_m, per cui risulta

$$Z_m=\frac{Y_1}{3}\cdot\frac{\Pi Y_1+3p}{\Pi Y_1+2p} \quad (5).$$

Riepilogando la risoluzione del proposto problema I, agevolmente si riconosce come essa riducasi ad assumere come dati l'altezza Y_1 della parete spinta, la tangente trigonometrica C dell'angolo che la superficie superiore del terrapieno fa coll'orizzonte, il peso Π dell'unità di volume di terrapieno, il peso p distribuito sull'unità di proiezione orizzontale di detta superficie, gli angoli d'attrito φ e φ'; ed a calcolare successivamente tang Ψ, R_m, Q_m, V_m e Z_m mediante le trovate equazioni (1), (2), (3), (4) e (5).

Osservazione 1ª — Nel caso particolare in cui l'angolo AA_1x', avente C per sua tangente trigonometrica, è eguale all'angolo d'attrito φ delle terre del terrapieno sopra se stesse, l'angolo Ψ che determina il prisma di massima spinta vien dato da

$$\tang \Psi = \tang \varphi,$$

il qual risultato porta a conchiudere che la faccia inferiore del prisma di massima spinta si confonde col piano del natural declivio delle terre condotto dall'orizzontale rappresentata nel punto A_3, che la faccia inferiore del prisma di massima spinta è parallela alla sua faccia superiore, e che quindi questo prisma va considerato siccome un masso di terra il quale si estende ad un'altezza indefinita.

In quanto poi al valore di R_m, che per $C = \tang \varphi$ si presenta sotto il simbolo $\frac{0}{0}$, in seguito a soppressione del fattore $\tang \Psi - \tang \varphi$ comune al numeratore ed al denominatore, diventa

$$R_m = \frac{1}{2} Y_1 (\Pi Y_1 + 2p) \frac{\cos \varphi}{\cos(\varphi + \varphi')} \cdot \frac{1}{\tang(\varphi + \varphi') \tang \Psi + 1}.$$

Osservazione 2ª — Quando non esiste sovraccarico sulla superficie superiore del terrapieno, le equazioni che servono a determinare Ψ, R_m, Q_m, V_m e Z_m sono quelle segnate coi numeri (1), (2), (3), (4) e (5) modificate col farvi $p = 0$. L'equazione (1), essendo indipendente da p, non cangia; l'equazione (2) diventa

$$R_m = \frac{1}{2} \Pi Y_1^2 \frac{\cos \varphi}{\cos(\varphi + \varphi')} \cdot \frac{\tang \Psi - \tang \varphi}{\tang(\varphi + \varphi') \tang^2 \Psi + [1 - C \tang(\varphi + \varphi')] \tang \Psi - C};$$

per rapporto alle equazioni (3) e (4) bisogna intendere che il valore di R_m che esse contengono sia quello or ora trovato; e finalmente l'equazione (5) si riduce a

$$Z_m = \frac{Y_1}{3} \quad (6).$$

Osservazione 3ª — Se la superficie superiore del terrapieno diventa un piano orizzontale con sovraccarico uniformemente distribuito su esso, nelle equazioni (1), (2), (3), (4) e (5) che convengono pel caso in cui la detta superficie è un piano inclinato, bisogna porre $C=0$. Le equazioni (1) e (2) determinanti rispettivamente il prisma di massima spinta e la spinta massima diventano

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tang}\Psi&=\operatorname{tang}\varphi+\frac{1}{\cos\varphi}\sqrt{\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}\varphi+\operatorname{tang}\varphi'}}\\ R_m&=\frac{1}{2}Y_1(\Pi Y_1+2p)\frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi')}\times\\ &\times\frac{\operatorname{tang}\Psi-\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')\operatorname{tang}^2\Psi+\operatorname{tang}\Psi}\end{aligned}\right\}\quad(7),$$

le equazioni (3) e (4) non cangiano quando intendasi che il valore di R_m che entra in esse sia quello somministrato dall'equazione ultima trovata, ed il valore di Z_m non subisce cangiamento alcuno.

Osservazione 4ª — Se finalmente la superficie superiore del terrapieno è un piano orizzontale senza sovraccarico, il valore di $\operatorname{tang}\Psi$ rimane quello dato dalla prima delle equazioni (7); quello di R_m si riduce a

$$R_m=\frac{1}{2}\Pi Y_1^2\frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi')}\cdot\frac{\operatorname{tang}\Psi-\operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')\operatorname{tang}^2\Psi+\operatorname{tang}\Psi},$$

i valori di Q_m e di V_m risultano dalle equazioni (3) e (4) ponendo in esse il valore di R_m calcolato coll'ultima equazione, ed il valore di Z_m rimane quello dato dall'equazione (6).

II. *Trovare l'intensità, le componenti orizzontale e verticale ed il punto d'applicazione della spinta prodotta contro la parete piana e verticale di un ritegno da un terrapieno lungo orizzontalmente l'unità e terminato superiormente da due facce piane non sovraccaricate.*

Per risolvere questo problema bisogna prima decidere se la faccia inferiore del prisma di massima spinta taglia la prima faccia della superficie superiore del terrapieno rappresentata nella retta A_1A_2 (*fig.* 181), oppure se taglia la faccia successiva A_2A. Perciò, mediante l'equazione (1), in cui C rappresenterà la tangente trigonometrica dell'angolo A_2A_1x', si calcoli il valore di $\operatorname{tang}\Psi$, e quindi coll'equazione (2) del numero 212 si trovi il valore di X_m. Se questo valore è minore dell'ascissa nota X_2 del punto A_2 la faccia inferiore del prisma di massima spinta taglia la faccia A_1A_2, ed il problema si riduce a quello del numero precedente. Lo stesso ha luogo quando il valore di X_m risulta eguale a quello di X_2, mentre se quello risulta maggiore di questo, l'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie superiore del terrapieno cade sulla faccia $A_2 A$, ed è il caso in cui si ha da risolvere un problema diverso da quello del numero precedente.

Essendo verticale la parete spinta, essendo un quadrilatero la sezion retta del prisma spingente, e non trovandosi sovraccarichi sulla superficie superiore del terrapieno, si ha

$$X_{n-2}=\overline{A_4 D_2}=X_2, \qquad Y_{n-2}=\overline{D_2 A_2}=Y_2,$$

$$X_{n-1}=\overline{A_4 D_3}=X_3, \qquad Y_{n-1}=\overline{D_3 A_3}=Y_3,$$

$$\beta=90^\circ, \qquad X_n=X_4=0,$$

$$A=X_2(Y_1+Y_2)-X_2 Y_2-X_4 Y_1=X_2 Y_1,$$

$$B=0, \qquad X'=0,$$

$$D=X_2(Y_1-Y_2+CX_2), \qquad E=-CX_2(Y_1+Y_2)+Y_2^2 \quad (8);$$

e l'equazione determinatrice della tangente trigonometrica dell'angolo $A_3 A_4 x=\Psi$ che la faccia inferiore del prisma di massima spinta fa coll'orizzonte risulta

$$\left.\begin{array}{l} \Big[E+D[C-\cot(\varphi+\varphi')-\operatorname{tang}\varphi]\Big]\operatorname{tang}^2\Psi \\ \quad -2[E\operatorname{tang}\varphi-CD\cot(\varphi+\varphi')]\operatorname{tang}\Psi \\ \quad -(CD+E)\operatorname{tang}\varphi\cot(\varphi+\varphi') \\ \quad +CE[\operatorname{tang}\varphi+\cot(\varphi+\varphi')]=0 \end{array}\right\} \quad (9).$$

Immaginando ora condotta per la orizzontale rappresentata nel punto A_2 un piano parallelo alla faccia inferiore del prisma di massima spinta, ed immaginando prolungata la faccia $A_2 A_3$ del detto prisma, il piano della parete spinta viene tagliato secondo le due orizzontali rappresentate nei punti B_2 e C_2 e le altezze di queste orizzontali al di sopra del piano orizzontale passante per A_4, applicando le equazioni (1) e (2) del numero 214, si trovano

$$\overline{A_4 B_2} = \xi_2 = Y_2 - X_2 \operatorname{tang} \Psi \qquad (10),$$

$$\overline{A_4 C_2} = \nu_2 = Y_2 - C X_2 \qquad (11).$$

I prismi $A_1 B_2 A_2$, $C_2 B_2 A_2$ e $C_2 A_4 A_3$ sono quelli da considerarsi per trovare la spinta massima esercitata dal prisma $A_1 A_4 A_3 A_2$ contro la parete $A_4 A_1$. Le altezze delle pareti contro le quali i detti prismi agiscono sono

$$\overline{B_2 A_1} = Y_1 - \xi_2, \qquad \overline{B_2 C_2} = \nu_2 - \xi_2, \qquad \overline{A_4 C_2} = \nu_2;$$

le tangenti trigonometriche degli angoli, che le facce superiori $A_1 A_2$, $C_2 A_2$ e $C_2 A_3$ degli stessi prismi fanno coll'orizzonte, valgono

$$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2}, \qquad C, \qquad C;$$

i coefficienti F relativi agli stessi prismi ammettono i valori f_1', f_2 ed f_2' risultanti dall'applicazione dell'equazione (1) del numero 213 e dati da

$$\left.\begin{aligned} f_1' &= \frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi')} \cdot \frac{\operatorname{tang}\Psi - \operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')\operatorname{tang}^2\Psi - \dfrac{Y_2-Y_1}{X_2} + \left[1 - \dfrac{Y_2-Y_1}{X_2}\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')\right]\operatorname{tang}\Psi} \\ f_2 &= \frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi')} \cdot \frac{\operatorname{tang}\Psi - \operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')\operatorname{tang}^2\Psi + \left[1 - C\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')\right]\operatorname{tang}\Psi - C} \end{aligned}\right\} (12),$$

$$f_2' = f_2;$$

e finalmente le spinte parziali r_1', r_2 ed r_2' esercitate dai prismi medesimi contro le pareti $B_2 A_1$, $B_2 C_2$ ed $A_4 C_2$, come risulta dall'equazione (2) dell'ultimo citato numero, ammettono i valori

$$r_1' = \frac{1}{2} \cdot \Pi f_1' (Y_1 - \xi_2)^2,$$

$$r_2 = \frac{1}{2} \cdot \Pi f_2 (\nu_2 - \xi_2)^2,$$

$$r_2{}' = \frac{1}{2} \cdot \Pi f_2 \nu_2^2.$$

La spinta totale R_m prodotta dal total prisma di massima spinta $A_1 A_4 A_3 A_2$ vale $r_1{}' + r_2{}' - r_2$, e quindi la detta spinta e le sue componenti orizzontale e verticale si trovano mediante le equazioni

$$R_m = \frac{1}{2} \Pi \left[f_1{}'(Y_1 - \xi_2)^2 + f_2 \xi_2 (2\nu_2 - \xi_2) \right] \qquad (13),$$

$$Q_m = R_m \cos \varphi' \qquad (14),$$

$$V_m = R_m \operatorname{sen} \varphi' \qquad (15).$$

Le distanze $z_1{}'$, z_2 e $z_2{}'$ dei punti d'applicazione delle spinte parziali $r_1{}'$, r_2 ed $r_2{}'$ dal piano orizzontale passante per A_4 si ottengono convenientemente applicando l'equazione (4) del numero 213, ed i loro valori sono

$$z_1{}' = \xi_2 + \frac{1}{3}\left(Y_1 - \xi_2\right) = \frac{1}{3}\left(2\xi_2 + Y_1\right),$$

$$z_2 = \xi_2 + \frac{1}{3}\left(\nu_2 - \xi_2\right) = \frac{1}{3}\left(2\xi_2 + \nu_2\right),$$

$$z_2{}' = \frac{1}{3} \nu_2.$$

Finalmente la distanza Z_m del punto d'applicazione della spinta massima R_m dal piano orizzontale passante per A_4, la quale come risulta dall'equazione (4) del numero 215 si riduce a

$$Z_m = \frac{r_1{}' z_1{}' + r_2{}' z_2{}' - r_2 z_2}{R_m},$$

vien data dall'equazione

$$Z_m = \frac{1}{6}\Pi . \frac{f_1'[Y_1^3 - \xi_2^2(3Y_1 - 2\xi_2)] + f_2\xi_2^2(3\nu_2 - 2\xi_2)}{R_m} \qquad (16).$$

Le quantità che si devono assumere come cognite nella risoluzione di questo problema II sono: le coordinate Y_1, X_2 e Y_2; la tangente trigonometrica C dell'angolo che la faccia A_2A della superficie superiore del terrapieno fa coll'orizzonte; gli angoli d'attrito φ e φ'; il peso Π dell'unità di volume di terrapieno. Per arrivare poi alla completa determinazione delle quattro incognite R_m, Q_m, V_m e Z_m è necessario di applicare le equazioni (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15) e (16).

Osservazione — Supponendo che la parte di superficie superiore del terrapieno rappresentata nella retta A_2A sia orizzontale, e che sia Ψ l'inclinazione della faccia A_1A_2 all'orizzonte, si ha

$$C = 0, \qquad X_2 = (Y_2 - Y_1)\cot\Psi,$$

$$D = -(Y_2 - Y_1)^2\cot\Psi, \qquad E = Y_2^2,$$

$$\xi_2 = Y_1, \qquad \nu_2 = Y_2,$$

$$f_2 = \frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi')} \cdot \frac{\operatorname{tang}\Psi - \operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')\operatorname{tang}^2\Psi + \operatorname{tang}\Psi}.$$

La spinta R_m vien data da

$$R_m = \frac{1}{2}\Pi(2Y_2 - Y_1)Y_1\frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi')} \cdot \frac{\operatorname{tang}\Psi - \operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')\operatorname{tang}^2\Psi + \operatorname{tang}\Psi}$$

e la distanza del suo punto d'applicazione dal piano orizzontale passante per A_4, ammette il valore

$$Z_m = \frac{Y_1}{3} \cdot \frac{3Y_2 - 2Y_1}{2Y_2 - Y_1}.$$

III. *Trovare l'intensità, le componenti orizzontale e verticale, ed il punto d'applicazione della spinta prodotta contro la parete piana e verticale di un ritegno da un terrapieno lungo orizzontalmente l'unità, e terminato superiormente da una faccia piana orizzontale con* *sovraccarico uniformemente distribuito, a partire da una data orizzontale contenuta in detta faccia, e parallela al piano della parete spinta.*

Due diversi casi si possono presentare nella risoluzione del proposto problema per rapporto alla posizione dell'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie superiore del terrapieno, giacchè quest'intersezione può cadere o sul tratto $A_1 A_1'$ che precede la lista sovraccaricata (*fig.* 182), oppure dove esiste il sovraccarico. Per decidere quale dei due casi realmente succede si incominci dall'ammettere che si verifichi il primo; colla prima delle equazioni (7), si calcoli il valore di tang Ψ; mediante l'equazione (2) del numero 212, si deduca il valore di X_m, e quindi si paragoni colla distanza $\overline{A_1 A_1'} = X_1'$. Se X_m è minore o tutto al più eguale ad X_1', il problema da risolversi costituisce uno dei casi particolari discussi al problema I, ossia quello di un terrapieno terminato superiormente da un piano orizzontale senza sovraccarico; se X_m è maggiore di X_1', è segno che l'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie superiore del terrapieno cade sulla superficie sovraccaricata $A_1'A$, ed ecco allora come si risolve il problema.

Per essere verticale la parete spinta, per essere un triangolo la sezione retta del prisma di massima spinta, e per cadere sopra il tratto sovraccaricato la linea d'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie orizzontale del terrapieno, si ha

$$X_{n-2} = X_1 = 0, \qquad Y_{n-2} = \overline{A_3 A_1} = Y_1,$$

$$X_{n-1} = \overline{A_3 D_2} = X_2, \qquad Y_{n-1} = \overline{D_2 A_2} = Y_2 = Y_1,$$

$$\beta = 90^\circ, \qquad X_n = X_3 = 0.$$

$$A = -X_3 Y_1 = 0.$$

$$B = 0, \qquad C = 0, \qquad X' = \overline{A_3 D_1'} = X_1',$$

$$D = -\frac{2p}{\Pi} X_1', \qquad E = Y_1\left(Y_1 + \frac{2p}{\Pi}\right) \qquad (17);$$

e l'equazione determinatrice della tangente trigonometrica dell'angolo $A_2A_3x=\Psi$, che la faccia inferiore del prisma di massima spinta fa coll'orizzonte, risulta

$$\left.\begin{array}{l}\Big[E-D\left[\cot(\varphi+\varphi')+\tang\varphi\right]\Big]\tang^2\Psi\\ -2E\tang\varphi\tang\Psi-E\tang\varphi\cot(\varphi+\varphi')=0\end{array}\right\}\quad(18).$$

Immaginando ora condotto un piano parallelo alla faccia inferiore del prisma di massima spinta per la orizzontale rappresentata nel punto A_1', il detto piano taglia la parete A_1A_3 secondo un'orizzontale rappresentata nel punto B_1', e l'altezza di questa orizzontale al di sopra del piano orizzontale passante pel punto A_3 si ottiene applicando l'equazione (1) del numero 214 e quindi ponendo

$$\overline{A_3B_1'}=\xi_1'=Y_1-X_1'\tang\Psi \quad (19).$$

Il prisma $A_1B_1'A_1'$ senza sovraccarico, lo stesso prisma con sovraccarico uniformemente distribuito sulla sua faccia superiore come lo è sulla superficie $A_1'A$ ed il prisma $A_1A_3A_2$ con sovraccarico su tutta la sua faccia superiore, sono quelli da considerarsi per ottenere la spinta massima esercitata dal prisma $A_1A_3A_2$ uniformemente sovraccaricato sul tratto $A_1'A_2$ della sua faccia A_1A_2. Le altezze delle pareti contro le quali i detti prismi agiscono sono rispettivamente

$$\overline{A_1B_1'}=Y_1-\xi_1', \qquad \overline{A_1B_1'}=Y_1-\xi_1', \qquad \overline{A_1A_3}=Y_1;$$

le tangenti trigonometriche degli angoli che le facce superiori degli stessi prismi fanno coll'orizzonte sono nulli; ed i coefficienti F che ai medesimi si riferiscono sono tutti eguali ed espressi da

$$F=\frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi')}\cdot\frac{\tang\Psi-\tang\varphi}{\tang(\varphi+\varphi')\tang^2\Psi+\tang\Psi} \quad (20).$$

Le spinte parziali r_1', R_1' ed R_1'' che hanno luogo, le due prime contro la parete A_1B_1', e la terza contro la parete intiera A_1A_3, ammettono i valori

$$\left.\begin{aligned} r_1' &= \frac{1}{2}\Pi F (Y_1 - \xi_1')^2 \\ R_1' &= \frac{1}{2}\Pi F (Y_1 - \xi_1')\left(Y_1 - \xi_1' + \frac{2p}{\Pi}\right) \\ R_1'' &= \frac{1}{2}\Pi F Y_1 \left(Y_1 + \frac{2p}{\Pi}\right) \end{aligned}\right\} \quad (21);$$

e si calcolano la spinta massima R_m, e le sue componenti orizzontale Q_m e verticale V_m mediante le equazioni

$$R_m = r_1' + R_1'' - R_1' \quad (22),$$

$$Q_m = R_m \cos\varphi' \quad (23),$$

$$V_m = R_m \operatorname{sen}\varphi' \quad (24).$$

Le distanze z_1', Z_1' e Z_1'' dei punti d'applicazione delle spinte parziali r_1', R_1' ed R_1'' dal piano orizzontale passante pel punto A_3 sono

$$\left.\begin{aligned} z_1' &= \xi_1' + \frac{1}{3}(Y_1 - \xi_1') \\ Z_1' &= \xi_1' + \frac{Y_1 - \xi_1'}{3} \cdot \frac{\Pi (Y_1 - \xi_1') + 3p}{\Pi (Y_1 - \xi_1') + 2p} \\ Z_1'' &= \frac{1}{3} Y_1 \cdot \frac{\Pi Y_1 + 3p}{\Pi Y_1 + 2p} \end{aligned}\right\} \quad (25),$$

e quindi la distanza Z_m del punto d'applicazione della spinta massima R_m dal definito piano risulta

$$Z_m = \frac{r_1' z_1' + R_1'' Z_1'' - R_1' Z_1'}{R_m} \quad (26).$$

Riassumendo la soluzione di questo problema III, essa si riduce: a prendere siccome dati le coordinate Y_1 ed X_1', il peso p corrispondente all'unità di superficie sovraccaricata, il peso Π dell'unità di volume di terrapieno, gli angoli d'attrito φ e φ'; e quindi a risolvere le equazioni (17), (18), (19), (20), (21), (22), (23), (24), (25) e (26).

IV. *Trovare l'intensità, le componenti orizzontale e verticale ed il punto d'applicazione della spinta prodotta contro la parete piana e verticale di un ritegno da un terrapieno lungo orizzontalmente l'unità, e terminato superiormente da una faccia piana orizzontale con sovraccarico uniformemente distribuito su una sua lista rettangolare limitata da due rette parallele al piano della parete spinta.*

L'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie superiore del terrapieno può cadere o sul tratto di questa superficie che precede la lista sovraccaricata, o su questa lista stessa, o sul tratto che la segue. Per decidere quale di questi tre casi realmente succede, si incomincia dall'ammettere che si verifichi il primo, ossia che l'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie superiore del terrapieno cada sul tratto $A_1 A_1'$ (*fig.* 183) che precede la lista sovraccaricata, si calcola il valore di tang Ψ colla prima delle equazioni (7), si deduce quindi la lunghezza X_m mediante la prima delle equazioni (2) del numero 212, e si paragona questa colla distanza $\overline{A_1 A_1'} = X_1'$. Se X_m risulta minore o tutto al più eguale ad X_1', il problema da risolversi non è altro che uno dei casi particolari che vennero discussi al problema I, e se X_m risulta maggiore di X_1', è giuocoforza il conchiudere che non può avvenire il primo caso. Allora si ammette che possa aver luogo il secondo, ossia che la faccia inferiore del prisma di massima spinta possa tagliare la superficie superiore del terrapieno lungo la lista sovraccaricata rappresentata in $A_1' A_1''$; ponendo nell'equazione (18) i corrispondenti valori di D e di E si calcola quello di tang Ψ per passare alla ricerca della lunghezza X_m mediante la prima delle equazioni (2) del numero 212. Risultando X_m inferiore od eguale ad X_1'' si verifica il secondo caso, ed il problema da risolversi non è altro che il problema III; essendo invece X_m maggiore di X_1'', è segno che si verifica il terzo caso, ossia che l'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie superiore del terrapieno viene a cadere sul tratto $A_1''A$ che segue la lista sovraccaricata, ed allora si ha da risolvere un nuovo problema di cui ecco brevemente la risoluzione.

Essendo verticale la parete spinta, essendo un triangolo la sezione retta del prisma di massima spinta, e per trovarsi un'intiera lista sovraccaricata sulla faccia superiore orizzontale del detto prisma, si ha

$$X_{n-2}=X_1=0\,,\qquad Y_{n-2}=\overline{A_3A_1}=Y_1\,,$$

$$X_{n-1}=\overline{A_3D_2}=X_2\,,\qquad Y_{n-1}=\overline{D_2A_2}=Y_2=Y_1\,,$$

$$\beta=90^\circ\qquad X_n=X_3=0\,,$$

$$A=-X_3Y_1=0\,,$$

$$B=p_1(X_1''-X_1'),\quad C=0\,,\quad p=0\,,$$

$$D=\frac{2p_1(X_1''-X_1')}{\Pi}\,,\qquad E=Y_1^2\,;$$

e risulta quindi la seguente equazione determinatrice della tangente trigonometrica dell'angolo A_2A_3x che la faccia inferiore del prisma di massima spinta fa coll'orizzonte

$$\left.\begin{array}{l}\left[Y_1^2-\dfrac{2p_1(X_1''-X_1')}{\Pi}.\left[\cot(\varphi+\varphi')+\mathrm{tang}\,\varphi\right]\right]\mathrm{tang}^2\Psi\\ -2Y_1^2\,\mathrm{tang}\,\varphi\,\mathrm{tang}\,\Psi-Y_1^2\,\mathrm{tang}\,\varphi\cot(\varphi+\varphi')=0\end{array}\right\}\quad(27).$$

Se ora si immaginano condotte pei punti A_1' ed A_1'' le rette $A_1'B_1'$ ed $A_1''B_1''$ parallele alla retta A_3A_2 rappresentante la faccia inferiore del prisma di massima spinta, le altezze $\overline{A_3B_1'}$ ed $\overline{A_3B_1''}$ si ottengono applicando l'equazione (1) del numero 214, e risultano

$$\left.\begin{array}{l}\overline{A_3B_1'}=\xi_1'=Y_1-X_1'\,\mathrm{tang}\,\Psi\\ \overline{A_3B_1''}=\xi_1''=Y_1-X_1''\,\mathrm{tang}\,\Psi\end{array}\right\}\quad(28).$$

I prismi da considerarsi per giungere ad ottenere la spinta massima R_m che il prisma $A_1A_3A_2$ col suo sovraccarico produce contro la totale parete spinta A_1A_3, sono: quello rappresentato in $A_1B_1'A_1'$ senza sovraccarico, quello pure rappresentato in $A_1B_1'A_1'$ con sovraccarico uniformemente distribuito sulla sua faccia superiore come lo è sulla lista $A_1'A_1''$, quello rappresentato in $A_1B_1''A_1''$ con sovraccarico su tutta la sua faccia superiore, lo stesso prisma senza sovraccarico, e finalmente il prisma $A_1A_3A_2$ senza sovraccarico. Le altezze delle pareti contro le quali agiscono i cinque accennati prismi sono

$$\overline{B_1'A_1} = Y_1 - \xi_1', \qquad \overline{B_1''A_1} = Y_1 - \xi_1'', \qquad \overline{A_3A_1} = Y_1;$$

le tangenti trigonometriche degli angoli che le facce superiori degli stessi prismi fanno coll'orizzonte sono nulle; ed i coefficienti F che ai medesimi si riferiscono ammettono tutti lo stesso valore dato da

$$F = \frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi')} \cdot \frac{\tang\Psi - \tang\varphi}{\tang(\varphi+\varphi')\tang^2\Psi + \tang\Psi} \qquad (29).$$

Le spinte parziali r_1', R_1', R_1'', r_1'' e ρ_1, che hanno luogo le due prime contro la parete $B_1'A_1$, la terza e la quarta contro la parete $B_1''A_1$, e la quinta contro la total parete A_3A_1, ammettono i valori dati dalle equazioni

$$\left.\begin{aligned}
r_1' &= \frac{1}{2}\Pi F (Y_1 - \xi_1')^2 \\
R_1' &= \Pi F (Y_1 - \xi_1')\left(Y_1 - \xi_1' + \frac{2p_1}{\Pi}\right) \\
R_1'' &= \frac{1}{2}\Pi F (Y_1 - \xi_1'')\left(Y_1 - \xi_1'' + \frac{2p_1}{\Pi}\right) \\
r_1'' &= \frac{1}{2}\Pi F (Y_1 - \xi_1'')^2 \\
\rho_1 &= \frac{1}{2}\Pi F Y_1^2
\end{aligned}\right\} \qquad (30);$$

ed i valori della spinta massima R_m e delle sue componenti orizzontale e verticale Q_m e V_m sono

$$R_m = r_1' + R_1'' - R_1' + \rho_1 - r_1'' \qquad (31);$$

$$Q_m = R_m \cos\varphi' \qquad (32);$$

$$V_m = R_m \operatorname{sen}\varphi' \qquad (33).$$

I punti d'applicazione delle spinte parziali r_1', R_1' R_1'', r_1'' e ρ_1

distano dal piano orizzontale passante pel punto A_3 delle quantità z_1', Z_1', Z_1'', z_1'' e ζ_1, i cui valori sono

$$\left.\begin{aligned}
z_1' &= \xi_1' + \frac{1}{3}(Y_1 - \xi_1') \\
Z_1' &= \xi_1' + \frac{Y_1 - \xi_1'}{3} \cdot \frac{\Pi(Y_1 - \xi_1') + 3p_1}{\Pi(Y_1 - \xi_1') + 2p_1} \\
Z_1'' &= \xi_1'' + \frac{Y_1 - \xi_1''}{3} \cdot \frac{\Pi(Y_1 - \xi_1'') + 3p_1}{\Pi(Y_1 - \xi_1'') + 2p_1} \\
z_1'' &= \xi_1'' + \frac{Y_1 - \xi_1''}{3} \\
\zeta_1 &= \frac{1}{3} Y_1
\end{aligned}\right\} \quad (34);$$

e quindi la distanza Z_m del punto d'applicazione della spinta R_m dal detto piano orizzontale si calcola coll'equazione

$$Z_m = \frac{r_1' z_1' + R_1'' Z_1'' - R_1' Z_1' + \rho_1 \zeta_1 - r_1'' z_1''}{R_m} \quad (35).$$

I dati che il costruttore deve assumere per la risoluzione del problema IV sono le coordinate Y_1, X_1' ed X_1'', il peso p_1 che gravita sull'unità di superficie della lista sovraccaricata, il peso Π dell'unità di volume di terrapieno e gli angoli d'attrito φ e φ'. Con questi dati si possono risolvere le equazioni (27), (28), (29), (30), (31), (32), (33), (34) e (35), e trovare così le incognite R_m, Q_m, V_m e Z_m.

V. *Trovare l'intensità, le componenti orizzontale e verticale, ed il punto d'applicazione della spinta prodotta contro la parete piana e verticale di un ritegno da un terrapieno lungo orizzontalmente l'unità, e terminato superiormente da un piano orizzontale seguìto da un piano inclinato, essendovi un sovraccarico uniformemente distribuito su una lista del piano orizzontale limitata da due rette parallele al piano della parete spinta* (*fig.* 184).

A seconda della posizione e dell'estensione della lista sovraccaricata, non che della larghezza della faccia orizzontale appartenente alla superficie superiore del terrapieno può avvenire che l'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie superiore del terrapieno cada sul tratto $A_1 A_1'$ che precede la lista sovraccaricata, o sul tratto $A_1' A_1''$ su cui esiste il sovraccarico, o sul tratto $A_1'' A_2$ che segue la lista sovraccaricata, o finalmente sulla faccia inclinata A_2 A; e quindi quattro distinti casi si possono presentare nella risoluzione del proposto problema. I primi tre degli accennati casi costituiscono tre problemi che già vennero risoluti, e l'ultimo soltanto costituisce un problema nuovo. Per decidere in ogni circostanza quale dei quattro casi possibili realmente ha luogo, si incomincia dall'ammettere che la faccia inferiore del prisma di massima spinta venga a tagliare la superficie superiore del terrapieno nel tratto $A_1 A_1'$, colla prima delle equazioni (7) si trova il valore di tang Ψ, colla prima delle equazioni (2) del numero 212 si deduce X_m, e si verifica se X_m è inferiore, eguale o superiore ad X_1'. Essendo X_m inferiore od eguale ad X_1', si verifica il primo caso, e si ha da risolvere uno dei problemi particolari che vennero discussi nel dare la risoluzione del problema I; essendo invece X_m maggiore di X_1', si ammette che l'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie superiore del terrapieno cada sulla lista sovraccaricata $A_1' A_1''$, coll'equazione (18) si trova il valore di tang Ψ, e si ricava quindi quello di X_m dalla prima delle equazioni (2) del numero 212, onde confrontarlo colla lunghezza nota X_1''. Se il valore di X_m, calcolato nella seconda ipotesi sulla posizione dell'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie superiore del terrapieno, è minore o tutto al più eguale ad X_1'', si verifica il secondo dei quattro casi enunciati, e si ha da risolvere il problema III; ma se X_m è maggiore di X_1'', bisogna assumere l'ipotesi della possibilità del terzo caso, calcolare tang Ψ coll'equazione (27), servirsi di questo valore di tang Ψ onde dedurre X_m dall'equazione (7), e verificare se il valore di X_m è minore, eguale, oppure maggiore di X_2. Essendo X_m minore od eguale ad X_2, si ha da risolvere il problema IV, essendo invece X_m maggiore di X_2, la faccia inferiore del prisma di massima spinta taglia la superficie superiore del terrapieno lungo il piano inclinato A_2A, ed ecco allora come si conduce a termine la soluzione del problema.

Per essere verticale la parete spinta, per essere un quadrilatero la sezion retta del prisma di massima spinta, e per trovarsi una sol lista sovraccaricata sulla prima faccia della superficie superiore del terrapieno, si ha

$$X_{n-2} = \overline{A_4 D_2} = X_2, \qquad Y_{n-2} = \overline{D_2 A_2} = Y_2 = Y_1,$$

$$X_{n-1} = \overline{A_4 D_3} = X_3, \qquad Y_{n-1} = \overline{D_3 A_3} = Y_3,$$

$$\beta = 90^\circ, \qquad X_n = X_4 = 0,$$

$$A = X_2 (Y_1 + Y_2) - X_2 Y_2 - X_4 Y_1 = X_2 Y_1,$$

$$B = p_1 (X_1'' - X_1'), \qquad p = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} D &= \frac{2 p_1 (X_1'' - X_1')}{\Pi} + C X_2^2 \\ E &= -C\left[2 X_2 Y_1 + \frac{2 p_1 (X_1'' - X_1')}{\Pi}\right] + Y_1^2 \end{aligned}\right\} \quad (36);$$

e quindi, essendo noti i valori di φ, φ', C, D ed E, risulta la seguente equazione determinatrice di tang Ψ

$$\left.\begin{aligned} &\Big[E + D\,[C - \cot(\varphi + \varphi') - \operatorname{tang}\varphi\,]\Big] \operatorname{tang}^2\Psi \\ &\quad - 2\,[E \operatorname{tang}\varphi - C D \cot(\varphi + \varphi')\,] \operatorname{tang}\Psi \\ &\quad - (C D + E) \operatorname{tang}\varphi \cot(\varphi + \varphi') \\ &\quad + C E\,[\operatorname{tang}\varphi + \cot(\varphi + \varphi')\,] = 0 \end{aligned}\right\} \quad (37).$$

Immaginando ora condotti per le orizzontali rappresentate nei punti A_1', A_1'' ed A_2 altrettanti piani paralleli alla faccia inferiore del prisma di massima spinta, ed immaginando prolungata la faccia $A_2 A_3$ del detto prisma, il piano della parete spinta rimane tagliato secondo le quattro orizzontali rappresentate nei punti B_1', B_1'', B_2 e C_2 e le altezze di queste orizzontali al disopra del piano orizzontale passante pel punto A_4, come risulta dall'equazione (1) del numero 214, vengono date da

$$\left.\begin{aligned}
\overline{A_4 B_1'} &= \xi_1 = Y_1 - X_1 \operatorname{tang} \Psi \\
\overline{A_4 B_1''} &= \xi_1'' = Y_1 - X_1'' \operatorname{tang} \Psi \\
\overline{A_4 B_2} &= \xi_2 = Y_1 - X_2 \operatorname{tang} \Psi \\
\overline{A_2 C_2} &= \nu_2 = Y_1 - C X_2
\end{aligned}\right\} \quad (38).$$

Per ottenere la totale spinta che ha luogo contro la parete $A_4 A_1$ bisogna tener conto delle spinte parziali prodotte da sette prismi diversi, i quali sono: il prisma $A_1 B_1' A_1'$ senza sovraccarico sulla sua faccia superiore; il prisma medesimo supposto uniformemente caricato sulla sua faccia superiore come lo è il tratto $A_1' A_1''$; il prisma $A_1 B_1'' A_1''$ pure uniformemente caricato su tutta la sua faccia superiore; lo stesso prisma senza sovraccarico; ed i tre prismi $A_1 B_2 A_2$, $C_2 B_2 A_2$ e $C_2 A_4 A_3$ pure senza sovraccarichi. Le altezze delle pareti, contro le quali agiscono gli accennati sette prismi, sono

$$\overline{B_1' A_1} = Y_1 - \xi_1', \qquad \overline{B_1'' A_1} = Y_1 - \xi_1'', \qquad \overline{B_2 A_1} = Y_1 - \xi_2,$$

$$\overline{B_2 C_2} = \nu_2 - \xi_2, \qquad A_4 C_2 = \nu_2;$$

le tangenti trigonometriche degli angoli che le facce superiori dei detti prismi fanno coll'orizzonte, nulle pei primi cinque le cui facce superiori sono nel piano orizzontale $A_1 A_2 x'$, diventano C per gli altri due le cui facce superiori trovansi nel piano inclinato $C_2 A_2 A$; ed i coefficienti F ammettono i valori f_1', F_1', F_1'', f_1'', φ_1, f_2 ed f_2' dati da

$$\left.\begin{aligned}
f_1' = F_1' = F_1'' = f_1'' = \varphi_1 &= \frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi')} \times \\
&\times \frac{\operatorname{tang}\Psi - \operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')\operatorname{tang}^2\Psi + \operatorname{tang}\Psi} \\
f_2 = f_2' &= \frac{\cos\varphi}{\cos(\varphi+\varphi')} \times \\
\times \frac{\operatorname{tang}\Psi - \operatorname{tang}\varphi}{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')\operatorname{tang}^2\Psi + [1 - C\operatorname{tang}(\varphi+\varphi')]\operatorname{tang}\Psi - C}
\end{aligned}\right\} \quad (39).$$

Le spinte parziali r_1', R_1', R_1'', r_1'', ρ_1, r_2 ed r_2' che hanno luogo, la prima e la seconda contro la parete $B_1'A_1$, la terza e la quarta contro la parete $B_1''A_1$, la quinta contro la parete B_2A_1, la sesta contro la parete B_2C_2 e la settima contro la parete A_4C_2, ammettono i valori

$$\left.\begin{aligned}
r_1' &= \frac{1}{2}\Pi f_1'(Y_1-\xi_1')^2 \\
R_1' &= \frac{1}{2}\Pi f_1'(Y_1-\xi_1')\left(Y_1-\xi_1'+\frac{2p_1}{\Pi}\right) \\
R_1'' &= \frac{1}{2}\Pi f_1'(Y_1-\xi_1'')\left(Y_1-\xi_1''+\frac{2p_1}{\Pi}\right) \\
r_1'' &= \frac{1}{2}\Pi f_1'(Y_1-\xi_1'')^2 \\
\rho_1 &= \frac{1}{2}\Pi f_1'(Y_1-\xi_2)^2 \\
r_2 &= \frac{1}{2}\Pi f_2(\nu_2-\xi_2)^2 \\
r_2' &= \frac{1}{2}\Pi f_2 \nu_2^2
\end{aligned}\right\} \quad (40);$$

e quindi i valori della spinta massima R_m e delle sue componenti Q_m e V_m si ottengono col porre

$$R_m = r_1' + r_2' - r_2 + R_2'' - R_2' + \rho_1 - r_1'' \quad (41),$$

$$Q_m = R_m \cos\varphi' \quad (42),$$

$$V_m = R_m \operatorname{sen}\varphi' \quad (43);$$

Le distanze dei punti d'applicazione delle spinte parziali dal piano orizzontale passante pel punto A_4 sono

$$\left.\begin{aligned}
z_1' &= \xi_1' + \frac{Y_1 - \xi_1'}{3} \\
Z_1' &= \xi_1' + \frac{Y_1 - \xi_1'}{3} \cdot \frac{\Pi(Y_1 - \xi_1') + 3p}{\Pi(Y_1 - \xi_1') + 2p} \\
Z_1'' &= \xi_1'' + \frac{Y_1 - \xi_1''}{3} \cdot \frac{\Pi(Y_1 - \xi_1'') + 3p}{\Pi(Y_1 - \xi_1'') + 2p} \\
z_1'' &= \xi_1'' + \frac{Y_1 - \xi_1''}{3} \\
\zeta_1 &= \xi_2 + \frac{Y_1 - \xi_2}{3} \\
z_2 &= \xi_2 + \frac{\nu_2 - \xi_2}{3} \\
z_2' &= \frac{\nu_2}{3}
\end{aligned}\right\} \quad (44);$$

e finalmente la distanza Z_m dal punto d'applicazione della spinta massima R_m dal piano orizzontale passante per A_4 vien data da

$$Z_m = \frac{r_1' z_1' + r_2' z_2' - r_2 z_2 + R_1'' Z_1'' - R_1' Z_1' + \rho_1 \zeta_1 - r_1'' z_1''}{R_m} \quad (45).$$

Le coordinate Y_1, X_1', X_1'' ed X_2, la tangente trigonometrica C dell'angolo che la faccia inclinata A_2A del terrapieno fa coll'orizzonte, il valore del peso p_1 che gravita sull'unità di superficie della lista sovraccaricata, non che quelli del peso Π dell'unità di volume di terrapieno e degli angoli d'attrito φ e φ' sono le quantità che vanno assunte come dati nella risoluzione del problema V. Le incognite R_m, Q_m, V_m e Z_m si deducono mediante le equazioni (36), (37), (38), (39), (40), (41), (42), (43), (44) e (45), le quali conducono alla completa risoluzione del problema con calcoli semplici, giacchè ciascuna di esse va considerata indipendentemente dalle altre.

217. Spinta massima e sue componenti orizzontale e verticale nel caso di un terrapieno di lunghezza qualunque. — Una volta trovato il valore della spinta massima R_m, non che quelli delle sue componenti Q_m e V_m, considerando una porzione di terrapieno, lunga orizzontalmente l'unità, torna agevole l'ottenere i corrispondenti valori R_m', Q_m' e V_m' della spinta massima e delle sue componenti quando il terrapieno ha lunghezza L, quando per tutta questa lunghezza si conserva costante il profilo trasversale della superficie superiore del terrapieno, quando non cangia la densità delle terre e quando non varia la legge di distribuzione dei sovraccarichi. I pesi che producono la spinta in questo caso sono L volte quelli corrispondenti al terrapieno lungo l'unità, e trovansi essi uniformemente distribuiti su ogni unità di lunghezza di terrapieno e di parete spinta, per cui si ha

$$R_m' = LR_m,$$

$$Q_m' = LQ_m,$$

$$V_m' = LV_m.$$

Se il terrapieno non soddisfa alla condizione di avere per tutta la sua lunghezza un profilo costante, se le liste sovraccaricate non sono tutte disposte parallelamente alle linee secondo le quali vengono a tagliarsi le facce della superficie superiore del terrapieno, se la parete spinta non ha altezza costante, e se varia la densità delle terre, si possono ancora applicare le esposte teorie, scomponendo il terrapieno mediante piani verticali perpendicolari alla parete spinta in parti per cui sensibilmente siano verificate le condizioni tutte espresse nell'enunciato del problema, formante l'oggetto del presente capitolo (num. 209), trovare le spinte, le loro componenti orizzontale e verticale per tutte queste parti, e regolare così la resistenza dei ritegni in modo conveniente all'azione che le spinte stesse esercitano su di essi.

218. **Dati pratici necessari al calcolo della spinta delle terre.** — Il peso Π dell'unità di volume di terrapieno, non che l'angolo d'attrito φ delle terre fra di loro, sono elementi variabili dall'una all'altra qualità di terra, e mediamente per i casi più frequenti della pratica si possono ritenere i dati che trovansi al numero 78.

Per quanto spetta all'angolo d'attrito φ' delle terre colla parete del ritegno, poche ed incerte esperienze finora vennero eseguite nello scopo di procedere alla sua determinazione, per cui non si possono riportare dei dati sicuri. Osservando però che nella pratica dell'ingegnere costruttore sono quasi sempre muri di sostegno quei ritegni che si costruiscono nell'intento di impedire gli scoscendimenti di terrapieni, e che tali muri si fanno generalmente in modo che, dalla parte per cui si appoggiano contro le terre, presentino delle scabrosità e delle prominenze considerevoli, lasciando delle pietre sporgenti, affinchè le terre costipate contro l'opera murale penetrino nei diversi vani, ed aderiscano alle loro pareti, agevolmente si comprende come, avvenendo scorrimento in basso del prisma di massima spinta, debba esso separarsi dalla parete del muro restando pieni di terra i detti vani, ossia per iscorrimento del prisma stesso non contro una superficie murale, ma sibbene contro una superficie coperta da molecole di terra. Segue da ciò che, nel valutare la spinta delle terre contro sostegni murali costrutti in modo che dalla parte del terrapieno presentino scabrosità e prominenze considerevoli, si può supporre che il prisma di massima spinta tenda a scorrere fra due massi laterali della terra stessa di cui esso è costituito; e questa considerazione, nel mentre è conforme alla realtà dei fatti, contribuisce a semplificare le formole ed i calcoli relativi alla determinazione della spinta delle terre contro le pareti murali assumendo $\varphi' = \varphi$. Il signor Hermann Scheffler nel suo *Trattato sulla stabilità delle costruzioni*, per risolvere i tre problemi particolari aventi per iscopo di determinare la spinta prodotta da terrapieni senza sovraccarichi, quando sono superiormente terminati o da un sol piano orizzontale, o da un sol piano inclinato, o ancora da due piani inclinato il primo ed orizzontale il secondo, ha assunto $\varphi' = \varphi$, e le formole a cui è arrivato sono quelle stesse a cui si arriva col metodo da me proposto quando si prenda pure $\varphi' = \varphi$.

Per valori dei sovraccarichi si devono prendere i valori massimi che essi possono acquistare, e, quando la superficie sovraccaricata è quella di una strada che corre superiormente ad un terrapieno, mediamente si possono essi assumere: di 490 a 700 chilogrammi per ogni metro quadrato della superficie superiore di una strada ordinaria, e di 1500 a 1900 chilogrammi per ogni metro quadrato della lista entro la quale sono disposte le traversine per una via ferrata.

219. **Esempio numerico.** — Per fissare le idee sui risultati a cui si può arrivare applicando l'esposta teoria sulla spinta delle terre, suppongasi di dover trovare l'intensità, le componenti orizzontale e verticale ed il punto d'applicazione della spinta prodotta contro la parete piana e verticale $A_3 A_1$ (*fig.* 183) di un ritegno murale, da un terrapieno lungo orizzontalmente l'unità e terminato

superiormente da una faccia piana orizzontale $A_1 A$, sulla quale corre una via ferrata ad un sol binario. Siano terre ordinarie quelle costituenti il terrapieno e la lista rettangolare, sulla quale si trovano disposte le traversine, abbia larghezza di metri 2,70 col suo asse parallelo e collocato a distanza di metri 4,15 dal piano della parete spinta avente altezza di 12 metri.

Nel caso particolare proposto sono date le coordinate

$$Y_1 = 12^m, \qquad X_1' = 4{,}15 - \frac{2{,}70}{2} = 2^m{,}80,$$

$$X_1'' = 4{,}15 + \frac{2{,}70}{2} = 5^m{,}50,$$

e si possono assumere

$$p_1 = 1700^{Cg}, \qquad \Pi = 1500^{Cg}, \qquad \varphi = \varphi' = 45^\circ.$$

Ammettendo che l'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie superiore del terrapieno cada sul tratto $A_1 A_1'$, ed applicando la prima delle equazioni (7) del numero 216 e la prima delle equazioni (2) del numero 212 si deducono i seguenti valori particolari $\tang \Psi'$ ed X_m' di $\tang \Psi$ e di X_m,

$$\tang \Psi' = 2, \qquad X_m' = 6^m.$$

Essendo X_m' maggiore di $X_1' = \overline{A_1 A_1'} = 2^m, 80$, bisogna supporre che la detta intersezione venga a cadere sul tratto $A_1' A_1''$, e mediante le equazioni (17) e (18) del numero 216 e la prima delle equazioni (2) del numero 212 si trovano i seguenti valori particolari $\tang \Psi''$ ed X_m'' di $\tang \Psi$ e di X_m,

$$\tang \Psi'' = \frac{6420}{3329}, \qquad X_m'' = 6^m{,}222.$$

Siccome X_m'' è maggiore di $X_1'' = \overline{A_1 A_1''} = 5^m, 50$, l'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie superiore del terrapieno va considerata come esistente nel tratto $A_1'' A$ di questa superficie, e mediante l'equazione (27) del numero 216 e la prima delle equazioni (2) del numero 212 si ottengono questi valori particolari $\tang \Psi'''$ ed X_m''' di $\tang \Psi$ e di X_m,

$$\tang \Psi''' = \frac{800}{383}, \qquad X_m''' = 5^m,745.$$

Essendo tang Ψ''' quel valore di tang Ψ che determina la faccia inferiore del prisma di massima spinta, e trovandosi per intiero sulla faccia superiore del detto prisma la lista sovraccaricata, mediante le equazioni (28) si possono trovare i valori di ξ_1' e di ξ_1'', coll'equazione (29) si può calcolare F, e dalle formole (30) si possono dedurre i valori di r_1', R_1', R_1'', r_1'' e ρ_1. Trovate queste spinte parziali riesce agevole l'ottenere dalle equazioni (31), (32) e (33) i valori di R_m, Q_m e V_m, i quali risultano

$$R_m = 20749^{Cg}, \qquad Q_m = 14672^{Cg}, \qquad V_m = 14672^{Cg}.$$

Le formole (34) servono a determinare le distanze z_1', Z_1', Z_1'', z_1'' e ζ_1 dei punti d'applicazione delle spinte parziali dal piano orizzontale passante per A_3, e quindi colla formola (35) si può passare al calcolo della distanza del punto d'applicazione della spinta totale R_m dal detto piano, la qual distanza si trova espressa da

$$Z_m = 3^m,95.$$

220. Osservazione sopra un caso singolare che si può presentare nell'applicazione dell'esposta teoria sulla spinta delle terre. — Essendo X_m'' ed X_m''' due valori successivi di X_m, il primo calcolato nell'ipotesi che l'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie superiore del terrapieno cada sul tratto $A_i'A_i''$ (*fig.* 179), ed il secondo nell'ipotesi che quest'intersezione si trovi sul tratto successivo $A_i''A_{i+1}$, può darsi che risultino X_m'' maggiore ed X_m''' minore di $\overline{OD_i''} = X_i''$. La possibilità di questa circostanza chiaramente si manifesta esaminando i valori di X_m'' e di X_m''' ottenuti nel precedente numero, giacchè, indipendentemente dalla posizione della lista sovraccaricata $A_1'A_1''$ (*fig.* 183), può darsi che X_m''', minore di X_m'', sia anche minore di X_1''. Così, supponendo, per esempio, che la lista $A_1'A_1''$, sulla quale sono disposte le traversine, abbia ancora la larghezza di metri 2,70, e che il suo asse disti da A_1 di metri 4,65, i tre valori di X_m', X_m'' ed X_m''' risultano rispettivamente di metri 6, di metri 6,262 e di metri 5,745, ed essendo $X_1'' = 4,65 + \frac{2,70}{2} = 6^m$, si verifica appunto il caso in cui il valore di X_m''' è minore di X_1''.

Quando si verifica una tale circostanza, due sono gli espedienti che presso a poco conducono agli stessi risultati, e con cui l'ingegnere costruttore può facilmente togliersi d'imbarazzo. Il primo espediente consiste nell'ammettere che l'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie superiore del terrapieno si trovi sul piano determinato dalle due rette orizzontali rappresentate nei punti A_i'' ed A_{i+1} (*fig.* 179) sul prolungamento dello stesso piano a sinistra dell'orizzontale A_i'', e quindi nel dire che le spinte parziali, esercitate contro la parete $C_i A_n$ dai prismi di terra che hanno le loro facce superiori sul piano $C_i A$, sono: le due r_i ed r_i', prodotte dai prismi $C_i \beta_i A_i$ e $C_i \beta_i' A_i'$ senza sovraccarichi; le due R_i' ed R_i'' prodotte dai prismi $C_i \beta_i' A_i'$ e $C_i \beta_i'' A_i''$ uniformemente sovraccaricati sulle loro facce superiori $C_i A_i'$ e $C_i A_i''$, come lo è il tratto $A_i' A_i''$; e le due r_i'' e ρ_i prodotte dai prismi $C_i \beta_i'' A_i''$ e $C_i A_n A$ senza sovraccarichi. Il secondo espediente, che deriva dall'osservare come, fra tutti i prismi spingenti determinati da piani passanti per l'orizzontale A_n ed incontranti la lista sovraccaricata $A_i' A_i''$, dà la più gran spinta quello la cui faccia inferiore trovasi nel piano delle due orizzontali A_n ed A_i'', consiste nel ritenere l'angolo Ψ risultante dall'ammettere che l'intersezione della faccia inferiore del prisma di massima spinta colla superficie superiore del terrapieno si confonda coll'orizzontale A_i''. Allora si devono assumere come spinte parziali, esercitate contro la parete $C_i A_n$ dai prismi di terra che hanno le loro facce superiori sul piano $C_i A$ e le loro facce inferiori parallele al piano $A_n A_i''$, le due r_i ed r_i' prodotte dai prismi $G_i \gamma_i A_i$ e $C_i \gamma_i' A_i'$ senza sovraccarichi, e le due R_i' ed R_i'' prodotte dai prismi $C_i \gamma_i' A_i'$ e $C_i A_n A_i''$ uniformemente sovraccaricati sulle loro facce superiori $C_i A_i$ e $C_i A_i''$, come lo è il tratto $A_i' A_i''$.

Il primo degli indicati espedienti torna generalmente preferibile quando la lista sovraccaricata trovasi per la massima parte sulla superficie superiore del prisma di massima spinta e quando il sovraccarico è di tal natura da non potersi risguardare siccome facilmente divisibile nel senso del piano verticale $A\alpha$.

221. **Determinazione della spinta di una massa liquida contro la parete piana di un sostegno, delle sue componenti orizzontale e verticale e del suo punto d'applicazione.** — Questa determinazione in modo assai spedito può essere fatta da chi conosce l'esposta teoria sulla spinta delle terre, quando si consideri una massa liquida siccome una massa di terra di natura tanto mobile

da essere nulli gli angoli d'attrito φ e φ' e terminata superiormente da un piano orizzontale. Il caso più generale della spinta di una massa liquida contro la parete piana di un ritegno è quello in cui la detta parete fa coll'orizzonte un angolo $A_2 A_3 x = \beta$ (*fig.* 185); è questo caso paragonabile al problema che venne trattato nel numero 215 quando suppongasi che sia zero la tangente trigonometrica C dell'angolo che la faccia superiore della massa spingente fa coll'orizzonte, e che sia pure zero il valore del sovraccarico p; e quindi, considerando una porzione di parete spinta orizzontalmente lungo l'unità, convengono allo scopo le formole trovate nel citato numero quando in esse si faccia $\varphi = \varphi' = C = 0$, ed y eguale all'altezza $\overline{OA_1} = Y_1$ della parete spinta.

Incominciando dal calcolo della quantità ausiliaria F necessaria a trovare la spinta R per gli accennati valori di φ, φ', C, p ed y si ha dall'equazione (1) del citato numero

$$F = \frac{1}{\cos\beta} \frac{\tang\psi(1 - \cot\beta\tang\psi)}{-\tang^2\psi + \tang\beta\tang\psi},$$

la quale, ponendo al denominatore $\frac{1}{\cot\beta}$ invece di tang β, osservando che al numeratore ed al denominatore esiste il fattore tang ψ $(1 - \cot\beta\tang\psi)$ e che $\frac{\cot\beta}{\cos\beta} = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}$, si riduce semplicemente a

$$F = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Questo valore di F, posto nell'equazione (2) dello stesso numero coi noti valori di C, p ed y, dà il seguente valore della spinta R che ha luogo normalmente alla parete $A_1 A_3$

$$R = \frac{1}{2\operatorname{sen}\beta} \Pi Y_1^2,$$

nella quale Π rappresenta il peso dell'unità di volume della massa liquida.

Le due componenti orizzontale Q e verticale V della spinta R risultano ponendo nelle equazioni (IX) del numero 211 il trovato valore di R e $\varphi' = 0$, per cui

$$Q = \frac{1}{2} \Pi Y_1^2,$$

$$V = -\frac{1}{2} \Pi Y_1^2 \cot \beta.$$

Finalmente dall'equazione (3) del numero 213, quando in essa si pongano i noti valori di C, p ed y, si ricava per distanza Y' del punto d'applicazione della spinta R dal piano orizzontale passante pel punto A_3

$$Y' = \frac{Y_1}{3}.$$

Quando la parete spinta $A_1 A_3$ è verticale, l'angolo β vale 90°, il valore di R diventa eguale a quello di Q, si annulla la componente verticale V della spinta, e la distanza Y' si conserva ancora eguale ad $\frac{Y_1}{3}$.

CAPITOLO XV.

Resistenza viva dei solidi prismatici, e resistenza viva dei tubi.

222. **Assunto del presente capitolo**. — Il generale Poncelet fu il primo che stabilì le basi per il calcolo delle resistenze vive (num. 6) dei solidi elastici, insegnando come si possa trovare il lavoro resistente che un solido prismatico ed omogenëo oppone quando trovasi sottoposto all'azione di uno sforzo diretto secondo il suo asse; e quasi tutti gli autori, che scrissero sulla resistenza dei materiali dopo che Poncelet insegnò a valutare l'accennato lavoro resistente, o trascurarono affatto l'argomento delle resistenze vive, o si limitarono a considerare qualche semplicissimo caso sulle resistenze vive all'estensione, alla compressione ed alla flessione.

Il generale Luigi Federico Menabrea, in un'interessante sua memoria presentata nell'anno 1862 alla Reale Accademia delle Scienze di Torino, felicemente seppe applicare il metodo proposto da Poncelet per la determinazione dell'effetto prodotto dagli urti o *colpi d'ariete* che si verificano nei tubi delle condotte d'acqua quando istantaneamente si arresta il liquido che in esse scorre; e, ponendo che la forza viva di cui è animata la massa liquida della quale si arresta il corso produca dilatazione della parete dei tubi nel senso della circonferenza, compressione della materia componente i tubi in senso normale alla superficie interna e compressione dell'acqua, giunse a dare le formole mediante le quali si possono calcolare gli spessori dei tubi per condotte d'acqua, affinchè siano essi in istato da poter resistere ai colpi d'ariete e le altezze delle colonne d'acqua la cui pressione idrostatica produrrebbe gli stessi effetti degli accennati colpi.

Il generale Giovanni Cavalli con una commendevole ed elaborata sua memoria, letta nell'anno 1863 alla Reale Accademia delle Scienze di Torino, fece progredire lo studio delle resistenze vive considerando principalmente i tre casi dell'estensione, della compressione e della flessione, e tenendo conto delle velocità d'impulsione che possono sopportare i solidi rettilinei ed elastici.

In questo capitolo io mi propongo di calcolare le resistenze vive dei solidi elastici non snervati coll'applicazione del principio di D'Alembert e del principio delle forze vive. Supponendo istantanea la percossa prodotta da una massa che con una data velocità viene ad urtare un corpo elastico, di cui vuolsi valutare la resistenza viva, col principio di D'Alembert deduco la velocità comune alla massa percuziente ed al punto in cui questa tocca il corpo percosso appena avvenuto l'urto, ossia appena i punti di scambievole pressione fra quella e questo hanno velocità eguali. Ammetto che, dopo l'accennato periodo della percossa, il corpo urtante, che suppongo destituito di elasticità, si conservi a contatto del corpo elastico nel mentre si deforma, e che quello e questo costituiscano un sistema unico fino all'istante in cui si verifica la massima deformazione. Mi procuro il lavoro resistente svolto dall'azione molecolare del solido percosso nel periodo della sua deformazione, ossia dal principio dell'urto fino all'istante in cui ha luogo l'accennata deformazione massima; mediante la velocità iniziale, ottenuta applicando il principio di D'Alembert, calcolo le perdite di forza viva che hanno luogo nel sistema a motivo dell'urto; e finalmente, per l'intervallo di tempo in cui il solido elastico si deforma, stabilisco l'equazione delle forze vive, la quale, essendo nulle le forze vive del sistema al principio del tempo in cui comincia a svolgersi lavoro motore ed alla fine del tempo in cui tutto questo lavoro trovasi consumato, e chiamando

L_m il lavoro motore speso dall'istante in cui la massa percuziente batte sul corpo elastico fino all'istante in cui ha luogo la massima deformazione, ossia la metà della differenza delle forze vive del sistema nel primo e nel secondo degli accennati istanti,

L_r il lavoro resistente svolto dall'azione molecolare del solido percosso fra gli istanti medesimi,

$\Sigma m u_0^2$ e $\Sigma m u_1^2$ le somme delle forze vive dei corpi su cui succedono urti al principio ed alla fine della percossa,

in termini generali può essere scritta

$$L_m = L_r + \frac{1}{2}\left(\Sigma m u_0^2 - \Sigma m u_1^2\right).$$

Con quest'equazione trovo la deformazione massima subita dal corpo elastico sotto l'azione della percossa, ed in seguito da questa deformazione massima deduco l'azione molecolare che nel corpo venne provocata dall'urto. Così procedendo, vengo a risolvere i problemi sulle resistenze vive dei solidi elastici con un metodo il quale gode delle massima generalità, e di cui, nei numeri che immediatamente seguono, fo l'applicazione al calcolo delle resistenze vive dei solidi prismatici ed omogenei, non solo nei casi dell'estensione e della compressione, ma anche in quelli relativi allo scorrimento trasversale, alla torsione ed alla flessione. Finalmente pongo termine a quest'ultimo capitolo esponendo il metodo proposto dal generale Menabrea per valutare l'effetto dei colpi d'ariete nelle condotte con tubi, e per determinare gli spessori che ad essi convien dare affinchè si trovino in buone condizioni di stabilità sotto l'azione degli accennati colpi.

223. **Resistenza viva all'estensione.** — Sia AB (*fig.* 186) un solido prismatico ed omogeneo, mantenuto fermo all'estremo A, munito in B di un ritegno M contro il quale, con una certa velocità, viene ad urtare un corpo di peso noto in modo da produrre sul solido AB una percossa nel senso del suo asse, e si chiamino

L la lunghezza primitiva del prisma sul quale ha luogo l'urto, ed

Ω la superficie della sua sezion retta,

E' il coefficiente d'elasticità longitudinale relativo all'estensione per la materia di cui il detto solido è costituito,

P il peso della massa percuziente, ed

u la velocità di questa massa all'istante in cui sta per percuotere il ritegno,

l' l'allungamento che il prisma subisce sotto l'azione della percossa,

g la gravità eguale a $9^m,8088$.

La forza viva da cui è animata la massa percuziente all'istante in cui sta per avvenire la percossa, si esprime con

$$\frac{P}{g}u^2;$$

ed il lavoro motore L_m vale la metà di questa forza viva, e quindi vien dato da

$$L_m = \frac{1}{2}\frac{P}{g}u^2 \qquad (1).$$

L'azione o resistenza molecolare, opposta dal corpo che si considera quando il suo allungamento è x, vale (num. 12)

$$\frac{E'\Omega x}{L};$$

il lavoro elementare di questa resistenza mentre il solido si allunga ancora della quantità dx vien espresso da

$$\frac{E'\Omega}{L}x\,dx;$$

ed il lavoro resistente totale L_r, svolto dalla resistenza molecolare nel mentre si verifica il totale allungamento l', ammette il valore

$$L_r = \frac{E'\Omega}{L}\int_0^{l'} x\,dx = \frac{1}{2}\frac{E'\Omega}{L}l'^2 \qquad (2).$$

A motivo del cangiamento brusco di velocità che ha luogo nella massa percuziente e degli spostamenti repentini a cui trovansi astrette le molecole del prisma AB all'istante in cui quella batte sul ritegno M, vi ha nel sistema una perdita di forza viva, la cui metà è rappresentata nell'equazione generale del precedente numero dal termine $\frac{1}{2}\left(\Sigma m u_0^2 - \Sigma m u_1^2\right)$, della quale, per quanto a me consta, non tennero conto gli autori che finora trattarono delle resistenze vive dei solidi elastici, e che non si deve trascurare se vuolsi arrivare a risultamenti plausibili ed in armonia ai fatti che si verificano nella percossa. Perciò dicansi:

Π il peso dell'unità di volume del prisma percosso AB, e

Q il suo peso totale;

q il peso del ritegno, il quale può talvolta essere una parte considerevole del solido su cui ha luogo l'urto;

U la velocità comune al corpo percuziente ed alle molecole corrispondenti alla sezione in cui il prisma AB si unisce al ritegno M, appena avvenuta la percossa, ossia appena questo e quello hanno la stessa velocità;

e si applichi il principio di D'Alembert scrivendo che vi deve essere equilibrio fra le quantità di moto impresse e le quantità di moto attuali rivolte in senso contrario.

Le quantità di moto impresse si riducono unicamente alla quantità di moto

$$\frac{P}{g}u,$$

di cui è animata la massa percuziente all'istante in cui sta per avvenire la percossa. Le quantità di moto attuali sono: la quantità di moto

$$\frac{P}{g}U,$$

di cui ancora trovasi animata la massa percuziente appena finito l'istante della percossa; la quantità di moto

$$\frac{q}{g}U$$

che vien trasmessa al ritegno; e la somma delle quantità di moto che vengono comunicate a tutte le molecole del prisma AB. Ora, lo strato delle molecole corrispondenti alla sezione fissa A non può subire spostamento e quindi non può concepire velocità alcuna, e tutti gli altri strati prendono velocità diverse, ma sempre minori di quella dello strato di molecole situato all'estremo B. Quest'ultimo strato, appena avvenuta la percossa, ha la velocità U; e, ammettendo che le velocità dei diversi strati di molecole variino proporzionalmente alle loro distanze dalla sezione d'incastro A, si ha che la velocità delle molecole in uno strato qualunque a distanza y dall'accennata sezione d'incastro è

$$\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{L}}y;$$

cosicchè, essendo $\mathrm{d}y$ l'altezza differenziale del medesimo strato, la sua quantità di moto attuale risulta

$$\frac{\Pi\,\Omega\,\mathrm{U}}{g\;\mathrm{L}}y\,\mathrm{d}y,$$

e quindi

$$\frac{\Pi\,\Omega}{g}\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{L}}\int_0^{\mathrm{L}} y\,\mathrm{d}y = \frac{\Pi\,\Omega\,\mathrm{L}}{2g}\mathrm{U} = \frac{\mathrm{Q}}{2g}\,\mathrm{U}$$

la quantità di moto attuale dell'intiero solido AB. Eguagliando ora, per il citato principio di D'Alembert, le quantità di moto impresse alle quantità di moto attuali, risulta l'equazione

$$\frac{\mathrm{P}}{g}u = \frac{\mathrm{P}}{g}\mathrm{U} + \frac{q}{g}\mathrm{U} + \frac{\mathrm{Q}}{2g}\,\mathrm{U},$$

dalla quale si ricava

$$\mathrm{U} = \frac{2\mathrm{P}u}{2(\mathrm{P}+q)+\mathrm{Q}} \qquad (3).$$

Trovata la velocità U, riesce facile il dedurre la perdita di forza viva $\Sigma m u_0^2 - \Sigma m u_1^2$ che pel fatto dell'urto si deve verificare nel sistema. La somma $\Sigma m u_0^2$ vale

$$\frac{\mathrm{P}}{g}u^2,$$

e la somma $\Sigma m u_1^2$ consta: della forza viva

$$\frac{P}{g}U^2$$

che ancora rimane alla massa percuziente dopo l'urto; della forza viva acquistata dal ritegno M, espressa da

$$\frac{q}{g}U^2;$$

e della forza viva acquistata dalle molecole costituenti il prisma AB. Come già si è detto, essendo

$$\frac{U}{L}y$$

la velocità di uno strato di molecole qualunque del prisma AB posto a distanza y dall'estremo fisso A, la forza viva che ha questo strato, appena avvenuto l'urto, ammette l'espressione

$$\frac{\Pi\,\Omega}{g}\frac{U^2}{L^2}y^2 dy,$$

e vale

$$\frac{\Pi\,\Omega}{g}\frac{U^2}{L^2}\int_0^L y^2 dy = \frac{\Pi\,\Omega}{3g}LU^2 = \frac{Q}{3g}U^2$$

la forza viva acquistata da tutto il solido AB nell'istante della percossa. La metà della perdita di forza viva $\frac{1}{2}\left(\Sigma m u_0^2 - \Sigma m u_1^2\right)$, che ha luogo nel sistema a motivo dell'urto, vien adunque data dalla formola

$$\frac{1}{2}\left(\Sigma m u_0^2 - \Sigma m u_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}u^2 - \frac{P}{g}U^2 - \frac{q}{g}U^2 - \frac{Q}{3g}U^2\right) \quad (4).$$

Sostituendo i valori di L_m, di L_r e di $\frac{1}{2}\left(\Sigma m u_0^2 - \Sigma m u_1^2\right)$ dati dalle equazioni (1), (2) e (4) nell'equazione delle forze vive del precedente numero, si ottiene

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}u^2=\frac{1}{2}\frac{E'\Omega}{L}l'^2+\frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}u^2-\frac{P}{g}U^2-\frac{q}{g}U^2-\frac{Q}{3g}U^2\right),$$

e da quest'equazione si ricava

$$l'=U\sqrt{\frac{L[3(P+q)+Q]}{3gE'\Omega}} \qquad (5).$$

Trovato l'allungamento l' subìto dal solido prismatico AB, riesce facile il dedurre la resistenza molecolare Q_1' in esso sviluppata dalla percossa, giacchè, essendo questa resistenza quella che corrisponde all'allungamento l', per quanto risulta dalla formola (1) del numero 12, vien essa data dalla formola

$$Q_1'=\frac{E'\Omega l'}{L} \qquad (6).$$

Ponendo il valore di U dato dall'equazione (3) nell'equazione (5) e quindi il valore di l' che ricavasi da quest'ultima nell'equazione (6), si ottiene il valore di Q_1', il quale, aggiunto alla tensione che nel solido prismatico vien provocata da forze staticamente operanti su di esso, costituisce il valore di T′ da porsi nell'equazione di stabilità del numero 18 quando debbasi questa applicare per la determinazione della superficie Ω da assegnarsi al solido considerato, affinchè anche sotto l'azione della percossa si trovi in buone condizioni di stabilità.

224. **Resistenza viva alla compressione.** — Sia AB (*fig.* 187) un solido prismatico ed omogeneo coll'estremo A fisso e coll'estremo B libero; suppongasi che contro l'estremo B di questo corpo e nel senso del suo asse venga a percuotere in M e con una certa velocità un corpo dato; e si ammetta che, nell'intento di ripartire uniformemente l'azione della percossa vengagli questa trasmessa mediante una specie di disco che si considera come assolutamente destituito d'elasticità. In questo caso l'effetto dell'urto si risolve in una compressione del solido AB, il quale si suppone abbastanza corto da non poter avvenire in esso flessione.

Attribuendo alle lettere L, Ω, P, Q, U e g i significati che loro vennero dati nel precedente numero, e chiamando

q il peso del disco,

E'' il coefficiente d'elasticità longitudinale relativo alla compressione per la materia di cui è costituito il solido che si considera,

l'' l'accorciamento che questo corpo subisce sotto l'azione della percossa,

e ragionando precisamente come nel precedente numero, si arriva a trovare che la velocità U, la quale appena avvenuto l'urto è comune al corpo percuziente, al disco sul quale direttamente ha luogo l'urto ed allo strato di molecole del prisma elastico in contatto con questo disco, vale

$$U = \frac{2Pu}{2(P+q)+Q} \quad (1),$$

che l'accorciamento l'' vien dato da

$$l'' = U\sqrt{\frac{L[3(P+q)+Q]}{3gE''\Omega}} \quad (2),$$

e che l'azione molecolare Q_2' messa in giuoco nel prisma A B dalla percossa, vien espressa da (num. 29)

$$Q_2' = \frac{E''\Omega l''}{L} \quad (3).$$

Sostituendo nell'equazione (2) il valore di U dato dall'equazione (1) e quindi il valore di l'' che così si deduce nell'equazione (3), si ottiene il valore di Q_2' che, aggiunto alla pressione esercitata nel solido prismatico da qualche forza staticamente operante sopra di esso, costituisce il valore di T'' da porsi nell'equazione di stabilità del numero 40, quando debbasi questa applicare alla ricerca della superficie Ω da assegnarsi al solido considerato, affinchè si trovi in buone condizioni di stabilità anche sotto l'azione della percossa.

225. **Resistenza viva allo scorrimento trasversale**. — Ragionamenti analoghi a quelli del numero 223, i quali tanto facilmente hanno condotto alla determinazione dell'allungamento subìto da un solido prismatico omogeneo ed elastico in cui da una percossa

vien provocata la resistenza viva all'estensione, sono, a mio avviso, da instituirsi per giungere a trovare lo scorrimento assoluto di un solido prismatico mantenuto fermo nella sezione EF (*fig.* 188) e sul quale vien prodotta una percossa di data intensità nella sezione MG, parallelamente ed in luogo vicinissimo alla sezione EF.

Ritenendo le denominazioni già stabilite nel citato numero 225 per quanto si riferisce alla superficie della sezion retta del corpo percosso, alla gravità, al peso della massa percuziente ed alla velocità di cui questa è animata quando l'urto sta per avvenire, e chiamando

D la distanza $\overline{EM}$ fra la sezion retta fissa e la sezione determinata dal piano in cui la percossa ha luogo,

E^{IV} il coefficiente d'elasticità trasversale per la materia di cui è costituito il solido nel quale vien cimentata la resistenza per scorrimento trasversale,

d lo scorrimento trasversale assoluto $\overline{MM'}$ (num. 70) che esprime di quanto la sezione MG si sposta parallelamente dalla sezione EF, si ha: che il lavoro motore L_m vien espresso da

$$L_m = \frac{1}{2}\frac{P}{g}u^2;$$

che il lavoro resistente L_r ammette il valore

$$L_r = \frac{1}{2}\frac{E^{IV}\Omega}{D}d^2;$$

che, quando si ammetta che le velocità iniziali dei diversi strati di molecole paralleli alla sezione EF variino proporzionalmente alle loro distanze dalla sezione stessa la quale rimane immobile, la velocità U, comune alla massa percuziente, al prisma MGDC ed alle molecole corrispondenti alla sezione MG, si ottiene colla formola

$$U = \frac{2Pu}{2(P+q)+Q} \qquad (1),$$

essendo Q il peso della parte EFGM del solido proposto nella quale vien provocata la resistenza allo scorrimento trasversale e q il peso dell'altra parte MGDC, e che la metà della forza viva $\frac{1}{2}(\Sigma m u_0^2 - \Sigma m u_1^2)$ perduta per l'urto trovasi espressa da

$$\frac{1}{2}\left(\Sigma m u_0^2 - \Sigma m u_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}u^2 - \frac{P}{g}U^2 - \frac{q}{g}U^2 - \frac{Q}{3g}U^2\right).$$

Ponendo nell'equazione delle forze vive riportata al numero 222 i trovati valori di L_m, di L_r e di $\frac{1}{2}(\Sigma m u_0^2 - \Sigma m u_1^2)$, si ottiene l'equazione

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}u^2 = \frac{1}{2}\frac{E^{IV}\Omega}{D}d^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}u^2 - \frac{P}{g}U^2 - \frac{q}{g}U^2 - \frac{Q}{3g}U^2\right),$$

dalla quale si ricava

$$d = U\sqrt{\frac{D[3(P+q)+Q]}{3gE^{IV}\Omega}} \qquad (2)$$

per valore dello scorrimento trasversale assoluto $\overline{MM'}$ subìto dalla sezione MG relativamente alla sezione EF.

L'azione molecolare Q_1' provocata dalla percossa nel prisma dato ABDC fra le due sezioni EF ed MG, per quanto risulta dalla formola (1) del numero 71, vien data dalla formola

$$Q_1' = \frac{E^{IV}\Omega d}{D} \qquad (3).$$

Ponendo nell'equazione (2) il valore di U dato dall'equazione (1) o nell'equazione (3) il valore di d che così risulta, si arriva ad ottenere quel valore Q_1' il quale, aggiunto al valore della resistenza allo scorrimento trasversale già messa in giuoco nel solido da forze staticamente operanti sopra di esso, conduce al valore di T^{IV} da sostituirsi nell'equazione di stabilità del numero 79, allorquando debba questa servire a trovare la superficie Ω che conviene al solido considerato, affinchè anche sotto l'azione della percossa si trovi in buone condizioni di stabilità.

226. **Resistenza viva alla torsione.** — Sia ABCD (*fig.* 189) un solido prismatico la cui sezion retta AB in un modo qualunque vien mantenuta ferma, e nel quale ha luogo una percossa di data intensità nel piano della sezion retta EF, normalmente alla retta OM in questo piano contenuta e ad una certa distanza dal centro

di superficie O della sezione medesima. Questa percossa ha per effetto di produrre torsione nella parte ABFE del solido prismatico al quale vien trasmessa mediante un materiale braccio di leva, che si suppone assolutamente destituito d'elasticità; tutti gli strati di molecole comprese fra le sezioni AB ed EF, appena avvenuto l'urto, prendono velocità angolari diverse rispetto all'asse GO del prisma; è nulla la velocità angolare dello strato corrispondente alla sezione AB; e la più grande delle velocità angolari di tutti questi strati ha luogo in quello che corrisponde alla sezione EF.

Ciò premesso, attribuendo alle lettere Ω, P, u e g i significati che alle medesime vennero dati nel numero 223, e chiamando

L la distanza $\overline{\mathrm{GO}}$ fra la sezione fissa AB e la sezione EF nella quale ha luogo la percossa,

E''' il coefficiente di torsione per la materia costituente il corpo che si considera,

θ l'arco di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo di torsione E O E' che nel prisma si verifica pel fatto della percossa,

si ha: che, quando l'angolo di torsione ha un valore ψ minore di θ, la resistenza molecolare opposta da una fibra qualunque ae, posta a distanza $\overline{\mathrm{O}e}=v$ dall'asse GI del prisma e colla sua sezion retta di superficie ω, vale (num. 50)

$$\mathrm{E}'''\frac{\omega v \psi}{\mathrm{L}};$$

che il lavoro elementare di questa resistenza mentre l'arco ψ subisce un aumento differenziale $d\psi$ vien espresso da

$$\mathrm{E}'''\frac{\omega v^2}{\mathrm{L}}\psi\, d\psi;$$

che il lavoro resistente svolto dalla fibra ae nel verificarsi l'angolo di torsione misurato dall'arco θ, vien dato da

$$\mathrm{E}'''\frac{\omega v^2}{\mathrm{L}}\int_0^\theta \psi\, d\psi = \frac{1}{2}\mathrm{E}'''\frac{\omega v^2}{\mathrm{L}}\theta^2;$$

e finalmente che il lavoro resistente totale L_r, svolto dalla resistenza molecolare mentre il solido ABFE subisce il contorcimento misurato dall'arco θ, ammette il valore

$$L_r = \frac{1}{2} E''' \frac{\theta^2}{L} \Sigma \omega v^2,$$

che, indicando con J il momento d'inerzia polare $\Sigma \omega v^2$ della sezion retta del prisma considerato, più semplicemente può essere espresso con

$$L_r = \frac{1}{2} E''' \frac{\theta^2 J}{L} \qquad (1).$$

Siano ora:

R la distanza $\overline{OM}$ fra il punto di percussione e l'asse GI del prisma sul quale la percossa ha luogo;

Π il peso dell'unità di volume del prisma ABFE;

m un elemento di massa del prisma EFCD;

r la sua distanza dall'asse GI;

m' un elemento di massa del braccio di leva che riceve l'urto;

r' la sua distanza dallo stesso asse;

Φ la velocità angolare comune a tutte le molecole poste nello strato corrispondente alla sezione EF, agli elementi di massa del prisma EFCD ed agli elementi di massa del braccio di leva.

Il momento rispetto all'asse GI della quantità di moto impressa al sistema nell'istante in cui sta per avvenire la percossa è

$$\frac{P}{g} R u \qquad (2),$$

ed il momento della quantità di moto attuale, che il sistema ha, appena avvenuta la percossa, consta: del momento

$$\frac{P}{g} R^2 \Phi \qquad (3)$$

della quantità di moto che resta alla massa percuziente; del momento

$$\Phi \Sigma m r^2 \qquad (4)$$

della quantità di moto acquistata dalla parte EFCD del prisma percosso; del momento

$$\Phi \Sigma m' r'^2 \qquad (5)$$

della quantità di moto acquistata dal braccio di leva OM; e finalmente dal momento della quantità di moto concepita dalla parte ABFE del prisma percosso. Per valutare quest'ultima quantità di moto si ammetta che le velocità angolari dei diversi strati di molecole compresi fra le sezioni AB ed EF variino proporzionalmente alle loro distanze dalla prima sezione. Segue da quest'ipotesi che, essendo nulla la velocità angolare per lo strato di molecole corrispondente alla sezione AB e Φ quella per lo strato di molecole che corrisponde alla sezione EF, la velocità angolare per uno strato qualunque a distanza y dalla sezione AB deve essere espressa da

$$\frac{\Phi}{L} y;$$

che la velocità assoluta di una molecola qualunque, posta nello stesso strato ed a distanza v dell'asse GC del prisma, vale

$$\frac{v\Phi}{L} y;$$

che la quantità di moto di questa molecola, la quale può essere considerata come un prisma elementare avente un elemento di superficie ω per area della sua base ed un'altezza $\mathrm{d}y$, trovasi espressa da

$$\frac{\Pi\omega}{g}\frac{v\Phi}{L} y\,\mathrm{d}y;$$

che la quantità di moto di tutta la fibra ae compresa fra le due sezioni AB ed EF e distante appunto di $Oe = v$ dall'asse GI del prisma, vien data da

$$\frac{\Pi\omega}{g}\frac{v\Phi}{L}\int_0^L y\,\mathrm{d}y = \frac{\Pi\omega L}{2g} v\Phi;$$

che il momento di questa quantità di moto rispetto all'asse GI risulta

$$\frac{\Pi\omega L}{2g} v^2\Phi;$$

e finalmente che la somma dei momenti delle quantità di moto di tutte le fibre componenti il prisma ABFE ammette il valore

$$\frac{\Pi L}{2g}\Phi\Sigma\omega v^2 \qquad (6).$$

Ora per il principio di D'Alembert, vi deve essere equilibrio fra i momenti delle quantità di moto impresse ed i momenti delle quantità di moto attuali rivolte in senso contrario, ossia l'espressione (2) del momento della quantità di moto impressa al sistema deve eguagliare la somma delle espressioni (3), (4), (5) e (6) dei momenti della quantità di moto attuali. Segue da ciò che, non dimenticando come $\Sigma\omega v^2$ rappresenti il momento d'inerzia polare J della sezion retta del prisma percosso e chiamando rispettivamente S ed S′ le somme $\Sigma m r^2$ e $\Sigma m' r'^2$ esprimenti i momenti d'inerzia rispetto all'asse GI del prisma EFCD e del braccio di leva OM il quale direttamente riceve l'urto, si può stabilire l'equazione

$$\frac{P}{g}Ru=\frac{P}{g}R^2\Phi+S\Phi+S'\Phi+\frac{\Pi LJ}{2g}\Phi,$$

dalla quale si deduce

$$\Phi=\frac{2PRu}{2PR^2+2g(S+S')+\Pi LJ} \qquad (7).$$

Ottenuta la velocità angolare Φ, torna cosa sommamente agevole il dedurre la perdita di forza viva $\Sigma m u_0^2-\Sigma m u_1^2$ che, pel fatto dell'urto, deve aver luogo nel sistema.
La somma $\Sigma m u_0^2$ vale

$$\frac{P}{g}u^2 \qquad (8),$$

e la somma $\Sigma m u_1^2$ consta: della forza viva

$$\frac{P}{g}R^2\Phi^2 \qquad (9),$$

che ancora rimane alla massa percuziente dopo l'urto; della forza viva

$$S\Phi^2 \tag{10}$$

acquistata dal solido EFCD; della forza viva

$$S'\Phi^2 \tag{11}$$

acquistata dal braccio di leva OM; e finalmente della forza viva acquistata dalle molecole costituenti il prisma ABFE. Essendo, come già si è detto,

$$\frac{v\Phi}{L}y$$

la velocità d'una molecola qualunque posta sulla fibra *ae* a distanza v dall'asse GI ed a distanza y dalla sezione AB, la forza viva che anima questa molecola appena avvenuto l'urto è

$$\frac{\Pi\omega}{g}\frac{v^2\Phi^2}{L^2}y^2 dy;$$

la forza viva di tutta la fibra *ae* vale

$$\frac{\Pi\omega}{g}\frac{v^2\Phi^2}{L^2}\int_0^L y^2 dy = \frac{\Pi\omega}{3g}v^2\Phi^2 L;$$

e finalmente la forza viva, che pel fatto dell'urto viene ad acquistare ABFE, trovasi espressa da

$$\frac{\Pi L}{3g}\Phi^2\Sigma\omega v^2,$$

ossia ancora, per essere $\Sigma\omega v^2 = J$, da

$$\frac{\Pi L J}{3g}\Phi^2 \tag{12}.$$

Togliendo dall'espressione (8) la somma delle espressioni (9), (10), (11) e (12) risulta la perdita di forza viva che nel sistema si verifica a motivo dell'urto, e la metà di questa perdita di forza viva risulta dall'equazione

$$\frac{1}{2}\left(\Sigma m u_0^2 - \Sigma m u_1^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}u^2 - \frac{P}{g}R^2\Phi^2 - S\Phi^2 - S'\Phi^2 - \frac{\Pi L J}{3g}\Phi^2\right).$$

Sostituendo nell'equazione delle forze vive del numero 222 il valore di L_r dato dall'equazione (1) non che questo valore di $\frac{1}{2}(\Sigma m u_0^2 - \Sigma m u_1^2)$, ed osservando che

$$L_m = \frac{1}{2}\frac{P}{g}u^2,$$

si ottiene l'equazione

$$\frac{1}{2}\frac{P}{g}u^2 = \frac{1}{2}\frac{E'''J}{L}\theta^2$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{P}{g}u^2 - \frac{P}{g}R^2\Phi^2 - S\Phi^2 - S'\Phi^2 - \frac{\Pi L J}{3g}\Phi^2\right),$$

dalla quale si ricava

$$\theta = \Phi\sqrt{\frac{L[3PR^2 + 3g(S+S') + \Pi L J]}{3gE'''J}}.$$

Ottenuto l'arco θ di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo di torsione E O E′ riesce facile, mediante l'ultima equazione del numero 51, di trovare quel valore particolare M′ di M che rappresenta la somma dei momenti, rispetto all'asse GI, delle azioni molecolari sviluppate da tutte le fibre della parte di solido ABFE pel fatto della percossa. Questo momento, aggiunto a quello dell'azione molecolare che nel solido percosso può trovarsi provocata da qualche forza torcente staticamente operante sopra di esso, costituisce il valore di M da porsi nell'equazione di stabilità del numero 60, allorquando debbasi quest'equazione applicare per ottenere che si trovino in buone condizioni di stabilità quei solidi prismatici ed omogenei nei quali deve essere cimentata la resistenza viva alla torsione.

227. **Resistenza viva alla flessione.** — Abbiasi un solido prismatico HIKL, e suppongasi che contr'esso, in un piano passante pel suo asse OZ intersecante ciascuna sezion retta secondo un asse principale dell'ellisse centrale d'inerzia e perpendicolarmente all'asse medesimo, venga prodotta una percossa di data intensità. Se il corpo è tanto resistente da non lasciarsi rompere nè snervare, sotto l'azione dell'urto s'inflette e, come per un prisma inflesso da una forza normale al suo asse e staticamente operante su di esso, si può ammettere: che alcune sue fibre si allunghino, e che alcune altre si accorcino; che siavi uno strato neutro ossia uno strato di fibre le quali nè si allungano nè si accorciano; che questo strato passi per l'asse del solido inflesso (num. 89); che la sua intersezione con una sezione trasversale qualunque sia perpendicolare al piano di sollecitazione, ossia al piano passante per l'asse del corpo e per la direzione dell'urto; e che, cessata l'azione della percossa, tutto rientri nello stato primitivo.

Considerando nel prisma HIKL due sezioni trasversali AB e CD e supponendo che la prima di queste sezioni sia fissa, si può ammettere che l'altra pel fatto della flessione venga a rotare attorno all'asse neutro rappresentato nel punto F, e che, appena cessata ogni azione dell'urto ossia quando sta per riprendere la sua posizione primitiva, trovisi essa in C_1D_1, non più parallela, ma sibbene inclinata d'un angolo piccolissimo ANC_1 con AB. Chiamando

l la distanza EF fra le due sezioni considerate AB e CD,

ω la superficie elementare della sezione d'un elemento qualunque ab di fibra,

v la distanza $\overline{Fb}$ di quest' elemento di fibra dall'asse neutro rappresentato in F,

θ l'arco di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo CFC_1 ed esprimente di quanto la sezione CD, passando in C_1D_1, ha girato intorno all'asse neutro rappresentato in F,

E il coefficiente di elasticità longitudinale per la materia di cui il prisma è formato, il qual coefficiente si assume dello stesso valore tanto per le fibre sottoposte a tensione quanto per quelle sottoposte a compressione,

si ha: che la resistenza opposta dall'elemento qualunque di fibra ab, quando la sezione CD ha rotato intorno al suo asse neutro d'un angolo misurato dall'arco ψ vale (num. 12 e 29)

$$E\omega \frac{v\psi}{l};$$

che il lavoro elementare di questa resistenza, mentre l'arco ψ subisce un aumento differenziale $d\psi$, vien espresso da

$$E\omega \frac{v^2}{l} \psi d\psi;$$

che il lavoro resistente svolto dalla fibra ab, nel rotare della sezione CD attorno al suo asse neutro dell'angolo misurato dall'arco θ, ammette il valore

$$E\omega \frac{v^2}{l} \int_0^\theta \psi d\psi = \frac{1}{2} E\omega \frac{v^2\theta^2}{l};$$

e finalmente che il lavoro resistente totale, svolto dall'azione molecolare fra le due sezioni AB e CD, può essere rappresentato dall'espressione

$$\frac{1}{2} E \frac{\theta^2}{l} \Sigma\omega v^2,$$

la quale, indicando con I il momento d'inerzia $\Sigma\omega v^2$ della sezion retta del prisma considerato rispetto all'asse neutro in essa contenuto, si riduce a

$$\frac{1}{2} E \frac{I\theta^2}{l} \qquad (1).$$

Siano ora:

P il peso del corpo che in M viene a percuotere il prisma proposto;

K la distanza del punto di percussione M dalla sezion retta CD;

u la velocità della massa percuziente all'istante in cui sta per avvenire la percossa;

Π il peso dell'unità di volume del prisma del quale vuolsi studiare la resistenza viva;

g la gravità;

m un elemento di massa del prisma CDKL posto a diritta della sezione CD ed

r la distanza di quest'elemento dall'asse neutro rappresentato nel punto F;

Φ la velocità angolare comune a tutte le molecole poste nello strato corrispondente alla sezione CD ed agli elementi di massa di quella parte del prisma considerato che trovasi a diritta dell'or indicata sezione.

Il momento, rispetto all'asse neutro rappresentato nel punto F, della quantità di moto impressa al sistema nell'istante in cui sta per avvenire la percossa è

$$\frac{P}{g} K u \qquad (2),$$

ed il momento, rispetto allo stesso asse neutro, della quantità di moto attuale, che ha il sistema appena avvenuta la percossa, consta di tre parti. La prima parte è il momento

$$\frac{P}{g} K^2 \Phi \qquad (3)$$

della quantità di moto che resta alla massa percuziente, la seconda parte è il momento

$$\Phi \Sigma m r^2 \qquad (4)$$

della quantità di moto acquistata dal solido percosso posto a diritta della sezione CD; e finalmente la quarta parte è la somma dei momenti delle quantità di moto variabili concepite da tutte le masse elementari costituenti il prisma ABCD. Per valutare questa quantità di moto si consideri l'elemento qualunque di fibra ab posto a distanza $\overline{Fb} = v$ dall'asse neutro rappresentato in F, e si ammetta che all'istante della percossa essendo $v\Phi$ la velocità assoluta della molecola posta in b è zero quella della molecola corrispondente al punto a, tutte le altre molecole intermedie prendano velocità diverse e proporzionali alle loro distanze dalla sezione AB. Segue da quest'ipotesi che la velocità assoluta per una molecola qualunque posta a distanza y dalla sezione AB è

$$\frac{v\Phi}{l} y,$$

che la quantità di moto di questa molecola, la quale può essere considerata come un prisma elementare di base ω e di altezza dy, vale

$$\frac{\Pi\omega v\Phi}{g}\frac{}{l}y\,\mathrm{d}y,$$

che la quantità di moto per tutto l'elemento di fibra ab trovasi quindi espressa da

$$\frac{\Pi\omega v\Phi}{g}\frac{}{l}\int_0^l y\,\mathrm{d}y = \frac{\Pi\omega l}{2g}v\Phi,$$

che il momento di questa quantità di moto rispetto all'asse neutro rappresentato nel punto F ammette il valore

$$\frac{\Pi\omega l}{2g}v^2\Phi,$$

e finalmente che la somma dei momenti delle quantità di moto di tutti gli elementi di fibra componenti il prisma ABDC vien data dall'espressione

$$\frac{\Pi l}{2g}\Phi\Sigma\omega v^2 \qquad (5).$$

Ora, per il principio di D'Alembert, vi deve essere equilibrio fra i momenti delle quantità di moto impresse ed i momenti delle quantità di moto attuali rivolte in senso contrario, ossia l'espressione (2) del momento della quantità di moto impressa al sistema deve eguagliare la somma delle espressioni (3), (4) e (5) dei momenti delle quantità di moto attuali. Segue da ciò che, chiamando S la somma $\Sigma m r^2$ esprimente il momento d'inerzia, rispetto all'asse neutro rappresentato nel punto F, della parte di prisma percosso posta a diritta della sezione CD e non dimenticando che $\Sigma\omega v^2 = \mathrm{I}$, si ha l'equazione

$$\frac{P}{g}Ku = \frac{P}{g}K^2\Phi + S\Phi + \frac{\Pi l \mathrm{I}}{2g}\Phi$$

dalla quale immediatamente si ricava

$$\Phi = \frac{2PKu}{2PK^2 + 2gS + \Pi l I} \quad (6).$$

Trovata la velocità angolare Φ, riesce facile il dedurre la perdita di forza viva $\Sigma m u_0^2 - \Sigma m u_1^2$ che, pel fatto dell'urto, si deve verificare nel sistema. La somma $\Sigma m u_0^2$ consta del solo termine

$$\frac{P}{g} u^2 \quad (7),$$

e la somma $\Sigma m u_1^2$ vale: la forza viva

$$\frac{P}{g} K^2 \Phi^2 \quad (8),$$

che ancora rimane alla massa percuziente dopo l'urto; la forza viva

$$S\,\Phi^2 \quad (9)$$

acquistata dal prisma CDKL; e la forza viva acquistata dalle molecole costituenti il prisma ABDC. Essendo, come già si è detto,

$$\frac{v\Phi}{l} y$$

la velocità di una molecola qualunque posta a distanza y dalla sezione AB sull'elemento di fibra ab collocato a distanza $\overline{Fb} = v$ dall'asse neutro, la forza viva che anima questa molecola appena avvenuto l'urto è

$$\frac{\Pi\omega}{g} \frac{v^2 \Phi^2}{l^2} y^2 \mathrm{d}y;$$

la forza viva di tutto l'elemento di fibra ab vale

$$\frac{\Pi\omega}{g} \frac{v^2 \Phi^2}{l^2} \int_0^l y^2 \mathrm{d}y = \frac{\Pi\omega}{3g} v^2 \Phi^2 l;$$

e finalmente la forza viva, che pel fatto dell'urto viene ad acquistare il prisma ABDC, vien espressa da

$$\frac{\Pi l}{3g}\Phi^2\Sigma\omega v^2,$$

ossia, per essere $\Sigma\omega v^2 = \mathrm{I}$, da

$$\frac{\Pi l \mathrm{I}}{3g}\Phi^2 \qquad (10).$$

Sottraendo dall'espressione (7) le espressioni (8), (9) e (10) si ottiene la perdita di forza viva $\Sigma m u_0^2 - \Sigma m u_1^2$ avvenuta nel sistema a motivo dell'urto, e la metà di questa perdita di forza viva vien data da

$$\frac{1}{2}\left(\Sigma m u_0^2 - \Sigma m u_1^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{P}}{g}u^2 - \frac{\mathrm{P}}{g}\mathrm{K}^2\Phi^2 - \mathrm{S}\Phi^2 - \frac{\Pi l \mathrm{I}}{3g}\Phi^2\right).$$

Applicando ora il principio delle forze vive col dire che il lavoro motore L_m, ossia la metà della forza viva $\frac{\mathrm{P}}{g}u^2$ della massa percuziente all'istante in cui sta per avvenire la percossa, deve eguagliare il lavoro resistente L_r, svolto dall'azione molecolare e dato dall'espressione (1), aumentato della metà della forza viva perduta per l'urto or ora trovata, si ottiene l'equazione

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{P}}{g}u^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{EI}}{l}\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{P}}{g}u^2 - \frac{\mathrm{P}}{g}\mathrm{K}^2\Phi^2 - \mathrm{S}\Phi^2 - \frac{\Pi \mathrm{I} l}{3g}\Phi^2\right),$$

dalla quale si ricava

$$\theta = \Phi\sqrt{\frac{l(3\mathrm{PK}^2 + 3g\mathrm{S} + \Pi l \mathrm{I})}{3g\mathrm{EI}}} \qquad (11).$$

Trovato l'arco θ chiudente l'angolo CFC_1 di cui ha ruotato la sezione CD relativamente alla sezione AB pel fatto della percossa, se chiamansi

v' la distanza $\overline{\mathrm{FC}}$ della fibra maggiormente allungata AC dall'asse neutro e

v'' la distanza $\overline{FD}$ della fibra maggiormente accorciata BD pure all'asse neutro,

l'allungamento e l'accorciamento di queste fibre, la superficie della cui sezione può essere rappresentata con ω, sono rispettivamente rappresentati da

$$v'\theta \qquad \text{e} \qquad v''\theta;$$

la tensione della prima e la pressione della seconda (num. 12 e 29) sono espresse da

$$E\omega\frac{v'\theta}{l} \qquad \text{e} \qquad E\omega\frac{v''\theta}{l};$$

e per conseguenza la fibra maggiormente allungata e quella maggiormente accorciata sopportano rispettivamente la tensione Q_1' e la pressione Q_2', riferite all'unità di superficie, date da

$$\left.\begin{aligned} Q_1' &= E\frac{v'\theta}{l} \\ Q_2' &= E\frac{v''\theta}{l} \end{aligned}\right\} \quad (12).$$

Ponendo nell'equazione (11) il valore di Φ dato dall'equazione (6) e mettendo il valore di θ che così risulta nelle equazioni (12), riesce possibile, con metodi analoghi a quelli lungamente esposti nel capitolo VI, il determinare: la sezione pericolosa; la tensione e la pressione massima riferite all'unità di superficie in questa sezione; e quindi lo stabilire le equazioni di stabilità per un solido prismatico ed omogeneo sottoposto ad una percossa diretta normalmente al suo asse in un piano passante per uno degli assi principali dell'ellisse centrale d'inerzia di ciascuna sua sezione. Quando nel corpo considerato vien provocata la resistenza alla flessione non solamente dalla percossa, ma anche da forze staticamente operanti sopra di esso, è necessario tener conto delle azioni di queste forze, tanto nel determinare la sezione pericolosa, quanto nello stabilire le equazioni di stabilità.

228. **Resistenza viva dei tubi.** — Il generale Menabrea, nella sua teoria sulla resistenza viva dei tubi, non fa distinzione fra il periodo in cui avviene l'urto e quello in cui si verificano deforma-

zioni del sistema, ed ammette che, quando bruscamente si arresta il corso dell'acqua che scorre entro un tubo, la forza viva di cui è animata la massa liquida si trasformi in tre distinti effetti, ossia:

1° Nella dilatazione della parete del tubo nel senso della circonferenza;

2° Nella compressione della materia costituente il tubo, nel senso normale alla superficie interna;

3° Nella compressione dell'acqua.

Chiamando poi

r il raggio interno del tubo, supposto di sezione circolare,

e il suo spessore,

$r+\frac{1}{2}e$ il raggio medio,

l la lunghezza della parte di tubo che si considera,

E il coefficiente d'elasticità per la materia di cui il tubo è formato, e che si assume d'eguale valore tanto per l'estensione quanto per la compressione,

E_1 il coefficiente di compressibilità del liquido,

q il peso d'un metro cubo di liquido, pari a 1000 chilogrammi per l'acqua,

g la gravità,

v la velocità dell'acqua,

h l'altezza dovuta a questa velocità,

π il rapporto della circonferenza al diametro,

δ l'aumento che subisce il raggio r sotto il colpo d'ariete,

λ l'allungamento proporzionale della circonferenza media del tubo corrispondente al limite d'elasticità ed all'accrescimento δ del raggio r,

λ' l'accorciamento proporzionale dello spessore del tubo nel senso normale alla superficie interna,

λ'' l'accorciamento proporzionale del cilindro liquido lungo l,

T_1 il lavoro consumato per allungare la circonferenza del tubo,

T_2 il lavoro consumato per comprimere il tubo in senso normale alla sua superficie interna,

T_3 il lavoro consumato per comprimere l'acqua,

p la pressione interna atta a produrre l'allungamento proporzionale λ, riferita all'unità di superficie, ed

H l'altezza della colonna d'acqua corrispondente a questa pressione,

ecco come arriva alle equazioni mediante le quali è possibile determinare gli spessori da assegnarsi ai tubi delle condotte d'acqua, nonchè le altezze delle colonne d'acqua capaci di produrre nei tubi gli stessi effetti prodotti dai colpi d'ariete.

Il peso della massa liquida contenuta nel tubo lungo l è $\pi r^2 l q$, e quindi la forza viva di cui questa massa è animata vale

$$\frac{\pi r^2 l q}{g} v^2 = 2\pi r^2 l q h \qquad (1).$$

L'allungamento che subisce la circonferenza media $2\pi\left(r+\frac{1}{2}e\right)$ del tubo è

$$2\pi\left(r+\frac{1}{2}e+\delta\right)-2\pi\left(r+\frac{1}{2}e\right)=2\pi\delta,$$

e quindi l'allungamento proporzionale λ vien dato da

$$\lambda=\frac{2\pi\delta}{2\pi\left(r+\frac{1}{2}e\right)}=\frac{\delta}{r+\frac{1}{2}e} \qquad (2).$$

Nell'istante in cui la detta circonferenza media ha subito un allungamento x minore di $2\pi\delta$, ossia nell'istante in cui si verifica l'allungamento proporzionale

$$\frac{x}{2\pi\left(r+\frac{1}{2}e\right)},$$

l'azione molecolare messa in giuoco nel senso della circonferenza del tubo vien espressa da

$$E e l \frac{x}{2\pi\left(r+\frac{1}{2}e\right)}$$

(essendo el la mezza superficie della sezione fatta secondo l'asse del tubo nella sua parete); il lavoro resistente elementare, che quest'azione sviluppa passando l'allungamento della circonferenza del tubo dalla lunghezza x alla larghezza $x+dx$, ammette il valore

$$\mathrm{E}\,e\,l\,\frac{x\,\mathrm{d}x}{2\pi\left(r+\frac{1}{2}e\right)};$$

ed il lavoro totale T_1 dell'azione molecolare, mentre la circonferenza media del tubo subisce l'allungamento $2\pi\delta$, risulta dall'equazione

$$T_1 = \frac{\mathrm{E}\,e\,l}{2\pi(r+\frac{1}{2}e)}\int_0^{2\pi\delta} x\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{E}\,e\,l}{4\pi(r+\frac{1}{2}e)}(2\pi\delta)^2,$$

o più semplicemente, quando per δ si ponga il valore che ricavasi dalla (2), dà

$$T_1 = \mathrm{E}\,\pi\,l\,e\,(r+\frac{1}{2}e)\,\lambda^2 \qquad (3).$$

Per trovare il lavoro T_2 consumato per comprimere il tubo in senso normale alla sua superficie interna, si chiami ξ la lunghezza di cui vien diminuito lo spessore del tubo, e non si dimentichi che p è la pressione esercitata contro l'unità della sua superficie interna. Considerando il tubo come un anello circolare il quale, per ogni unità della sua lunghezza misurata sulla circonferenza media, è sollecitato dalla forza normale pl, siccome la tensione che esso sopporta tangenzialmente alla detta circonferenza media è $\mathrm{E}\,e\,l\,\lambda$, si ha (num. 24 e 25)

$$\mathrm{E}\,e\,l\,\lambda = p\,l\,r,$$

dalla quale si ricava

$$p = \frac{\mathrm{E}\,e\,\lambda}{r} \qquad (4).$$

Osservando ora che l'accorciamento ξ corrisponde alla pressione p, la quale si esercita su un prisma avente per base l'unità ed e per altezza, si ha ancora

$$p = \mathrm{E}\frac{\xi}{e},$$

per cui, eguagliando i due valori trovati di p e ricavando ξ dall'equazione che risulta, si ottiene

$$\xi = \frac{e^2}{r}\lambda \qquad (5).$$

Ciò premesso, nell'istante in cui la parete del tubo ha subita una diminuzione di spessore y minore di ξ, l'azione molecolare sviluppata dalla materia costituente il tubo si può esprimere con

$$E\,2\pi r l \frac{y}{e};$$

il lavoro resistente elementare, svolto da quest'azione nel mentre diventa $y+\mathrm{d}y$ la diminuzione di spessore della parete del tubo, risulta allora

$$2E\pi r l \frac{y\,\mathrm{d}y}{e};$$

ed il lavoro resistente totale T_2 svolto dall'azione molecolare, mentre la parete del tubo subisce in senso normale alla sua superficie interna la diminuzione di spessore ξ, ammette il valore

$$T_2 = 2E\pi r l \frac{1}{e}\int_0^{\xi} y\,\mathrm{d}y = E\pi r l \frac{\xi^2}{e},$$

che, a motivo del valore di ξ dato dall'equazione (5), si riduce a

$$T_2 = E\pi l \lambda^2 \frac{e^3}{r} \qquad (6).$$

Venendo ora a cercare il lavoro T_3 che vien consumato nel comprimere la massa d'acqua, si incominci dall'osservare: che può essere trascurato l'ingrandimento ξ subito dal raggio interno del tubo a motivo della diminuzione di spessore che si manifesta nella sua parete, giacchè si vede dalla formola (5) che questa quantità è sempre piccola per essere sempre tale il rapporto $\frac{e}{r}$; e che quindi, potendosi considerare siccome ridotta a $\pi(r+\delta)^2$ la sezione circolare del tubo dopo avvenuta la sua dilatazione, il cilindro liquido prima lungo l avrà presa un'altra lunghezza l'. Per determinare l' basta porre la condizione che il volume del cilindro liquido di sezione πr^2 e di altezza l deve essere eguale al volume del cilindro liquido di sezione $\pi(r+\delta)^2$ e di altezza l', questa condizione è

$$\pi(r+\delta)^2 l' = \pi r^2 l,$$

ed immediatamente da essa si ricava

$$l' = \frac{r^2}{(r+\delta)^2} l \qquad (7).$$

Ora, trovandosi l'acqua al momento dell'urto sotto la stessa pressione p riferita all'unità di superficie che si verifica normalmente alla superficie interna del tubo, la lunghezza l' subisce una piccola diminuzione μ, e fra p, l', μ ed E_1 si può stabilire la relazione (num. 29)

$$p = E_1 \frac{\mu}{l'}.$$

Eguagliando questo valore di p a quello dato dalla formola (4) si ha

$$E_1 \frac{\mu}{l'} = \frac{E e \lambda}{r},$$

d'onde si ricava

$$\mu = \frac{E}{E_1} \frac{l' e \lambda}{r} \qquad (8).$$

Trovato il valore di μ, si consideri il cilindro liquido, avente per base la superficie $\pi(r+\delta)^2$ e per altezza l', allorquando si è accorciato della quantità z minore di μ. L'azione molecolare opposta dalla massa liquida si può ritenere come espressa da

$$E_1 \pi (r+\delta)^2 \frac{z}{l'};$$

il lavoro resistente elementare, svolto da quest'azione nel mentre diventa $z+dz$ l'accorciamento del cilindro liquido lungo l', vale

$$E_1\pi(r+\delta)^2\frac{z\,dz}{l'};$$

ed il lavoro resistente totale T_3 consumato nel comprimere l'acqua, ossia nel diminuire di μ la lunghezza l', vien dato da

$$T_3=E_1\pi(r+\delta)^2\frac{1}{l'}\int_0^\mu z\,dz=\frac{1}{2}E_1\pi(r+\delta)^2\frac{\mu^2}{l'^2}l',$$

ossia, avuto riguardo al valore di $l'(r+\delta)^2$ ed al valore di $\frac{\mu^2}{l'^2}$ somministrati dalle formole (7) ed (8), da

$$T_3=\frac{1}{2}\frac{E^2}{E_1}\pi e^2 l\lambda^2 \qquad (9).$$

Eguagliando ora la metà della forza viva, spenta nel momento del colpo d'ariete e data dall'espressione (1), alla somma dei tre lavori T_1, T_2 e T_3 somministrati dalle formole (5), (6) e (9), si ottiene l'equazione

$$\pi r^2 lqh=E\pi le\lambda^2\left[\left(r+\frac{1}{2}e\right)+\frac{e^2}{r}+\frac{1}{2}\frac{E}{E_1}e\right],$$

che facilmente si riduce

$$qh=E\lambda^2\frac{e}{r}\left[1+\frac{1}{2}\frac{e}{r}\left(1+\frac{E}{E_1}\right)+\frac{e^2}{r^2}\right] \qquad (10).$$

Per ricavare il valore di e da quest'equazione, basta osservare che il rapporto $\frac{e^2}{r^2}$, posto entro le parentesi, è sempre una frazione assai piccola, che per conseguenza si può essa trascurare, e dedurre il valore di $\frac{e}{r}$ dall'equazione di secondo grado

$$qh=E\lambda^2\frac{e}{r}\left[1+\frac{1}{2}\frac{e}{r}\left(1+\frac{E}{E_1}\right)\right],$$

la quale conduce ad ottenere

$$e=\frac{r}{1+\frac{E}{E_1}}\left\{-1+\sqrt{1+\frac{2qh}{E\lambda^2}\left(1+\frac{E}{E_1}\right)}\right\} \qquad (11).$$

Venendo ora alla determinazione dell'altezza H di una colonna d'acqua capace di produrre per semplice pressione idrostatica lo stesso effetto del colpo d'ariete, si esprime con q H la pressione di questa colonna sul metro quadrato di superficie interna del tubo, e, dovendo essa eguagliare il valore di p dato dall'equazione (4), si può stabilire l'equazione

$$qH=\frac{Ee\lambda}{r} \qquad (12),$$

dalla quale si deduce

$$E\lambda^2\frac{e}{r}=qH\lambda.$$

Questo valore di $E\lambda^2\frac{e}{r}$ si ponga nell'equazione (10), e si ottiene l'equazione

$$h=H\lambda\left\{1+\frac{1}{2}\frac{e}{r}\left(1+\frac{E}{E_1}\right)+\frac{e^2}{r^2}\right\},$$

da cui si ricava

$$H=\frac{h}{\lambda}\frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{e}{r}\left(1+\frac{E}{E_1}\right)+\frac{e^2}{r^2}}.$$

Trascurando, come già si è fatto nella deduzione del valore di e, la frazione assai piccola $\frac{e^2}{r^2}$, ed osservando che per la (11)

$$\frac{e}{r}\left(1+\frac{E}{E_1}\right)=-1+\sqrt{1+\frac{2qh}{E\lambda^2}\left(1+\frac{E}{E_1}\right)},$$

si può assumere la seguente formola determinatrice di H

$$\mathrm{H}=\frac{h}{\lambda}\,\frac{2}{1+\sqrt{1+\frac{2qh}{\mathrm{E}\lambda^2}\left(1+\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{E}_1}\right)}} \qquad (13).$$

Per calcolare mediante le formole (11) e (13) lo spessore e e l'altezza H è necessario conoscere E, λ ed E_1. I valori di E e di λ sono dati sperimentali di cui vennero riportati i valori al numero 13, ed importa indicare come si possa ottenere il valore di E_1. Perciò basta osservare che una colonna d'acqua, alla temperatura ordinaria, mediamente si accorcia di 0,000048 della sua lunghezza primitiva sotto la pressione di un'atmosfera, ossia di 10330 chilogrammi per ogni metro quadrato, e che perciò applicando l'equazione (2) del numero 29 col fare in essa

$$\mathrm{T}''=10330^{\mathrm{Cg}}, \qquad \mathrm{E}''=\mathrm{E}_1, \qquad \Omega=1, \qquad \lambda_2=0{,}000048,$$

si può stabilire l'equazione

$$10330=\mathrm{E}_1\times 0{,}000048,$$

dalla quale, tenendo conto solamente delle cifre significative dei milioni, si ricava

$$\mathrm{E}_1=215000000^{\mathrm{Cg}}.$$

Supponendo che la forza viva la quale anima la massa liquida nell'istante del colpo d'ariete venga tutta consumata per dilatare il tubo nel senso della sua circonferenza, l'equazione esprimente che la metà di questa forza viva deve eguagliare il lavoro resistente svolto dalla materia di cui il tubo è costruito si riduce a

$$\pi r^2 lqh=\mathrm{E}\pi le\lambda^2\left(r+\frac{1}{2}e\right).$$

Semplificando ed ordinando per rapporto ad $\frac{e}{r}$, si ottiene l'equazione del secondo grado

$$\left(\frac{e}{r}\right)^2+2\frac{e}{r}-\frac{2qh}{\mathrm{E}\lambda^2}=0,$$

dalla quale si ricava

$$\frac{e}{r}=-1+\sqrt{1+\frac{2qh}{\mathrm{E}\lambda^2}},$$

o più semplicemente

$$\frac{e}{r}=\frac{qh}{\mathrm{E}\lambda^2} \qquad (14).$$

quando si sviluppi il radicale in serie e quando tengasi soltanto conto dei primi due termini dello svolgimento. Osservando poi che dall'equazione (12) si ha

$$\frac{e}{r}=\frac{q\mathrm{H}}{\mathrm{E}\lambda},$$

risulta

$$\frac{q\mathrm{H}}{\mathrm{E}\lambda}=\frac{qh}{\mathrm{E}\lambda^2},$$

dalla quale si ricava

$$\mathrm{H}=\frac{h}{\lambda} \qquad (15)$$

per espressione della colonna d'acqua capace di produrre lo stesso effetto del colpo d'ariete quando si supponga che questo unicamente si risolva nel produrre un ingrandimento del tubo per allungamento della circonferenza media della sua sezion retta. I risultati a cui conducono le formole (14) e (15) sono poco diversi da quelli che si ottengono applicando le formole (11) e (13) quando la velocità del liquido di cui si arresta il corso è inferiore ad 1 metro, e quindi al disotto di questo limite di velocità, senza inconvenienti, si possono adoperare le semplicissime formole (14) e (15) nelle quali si trascura la compressione del tubo nel senso della sua grossezza e la compressibilità del liquido.

Se in un tubo, prima del colpo d'ariete, ha luogo una pressione costante p_1, si verifica nel senso della circonferenza della sezion retta del tubo un allungamento proporzionale costante λ_1, collegato alla pressione p_1 mediante la relazione

$$p_1 = \frac{\mathrm{E}\, e\, \lambda_1}{r}$$

analoga alla (4). Da quest'equazione si ricava

$$\lambda_1 = \frac{p_1 r}{\mathrm{E} e},$$

e, tanto nell'applicare le formole (11) e (13) quanto nell'applicare le altre più semplici (14) e (15), si deve porre per l'allungamento λ non già l'allungamento proporzionale totale che può sopportare il tubo sotto il colpo d'ariete, ma solamente la differenza

$$\lambda - \lambda_1 = \lambda - \frac{p_1 r}{\mathrm{E} e}.$$

Onde determinare lo spessore di una condotta in modo che si trovi essa in buone condizioni di stabilità, bisogna assumere per allungamento proporzionale λ una data frazione di quello che corrisponde allo snervamento. Questa frazione può variare da 1/2 ad 1/5 pei tubi metallici, e da 1/2 ad 1/7 pei tubi in legno.

ERRATA-CORRIGE

Pagina	26	*linea*	32	*invece di*	4 chilogrammi	*leggasi*	6 chilogrammi
»	61	»	17	»	soventi	»	sovente
»	82	»	21	»	$d''=-\sqrt{\frac{1,846}{2500}R_2''+\text{ecc.}}$	»	$d''=\sqrt{\frac{1,846}{2500}R_2''+\text{ecc.}}$
»	134	»	28	»	per cui nell'estensione	»	per cui, nell'estensione
»	*ivi*	»	30	»	data è	»	data, è
»	147	»	1	»	ad	»	ed
»	*ivi*	»	17	»	perpendicolare all'asse	»	passante per l'asse
»	149	»	32	»	dell'ellisse centrale	»	dell'ellisse d'inerzia
»	154	»	11	»	costruzioni per	»	costruzioni, per
»	159	»	15	»	pei piani	»	pei punti
»	162	»	1	»	Q' e Q''	»	Q_1 e Q_2
»	165	»	17	»	il significato	»	i significati
»	187	»	9	»	la somma di	»	la somma algebrica di
»	197	»	17	»	l'area di una curva	»	l'area piana
»	234	»	26	»	data	»	dato
»	237	»	22	»	algebrica di	»	algebrica dei momenti di
»	276	»	25	»	$A'z$	»	$A'z'$
»	277	»	4	»	$\varepsilon(u-T'z)$	»	$\varepsilon(u'-T'z')$
»	291	»	7	»	Z_1''	»	Z_2''
»	327	»	9	»	$\overline{MN}=a$	»	$\overline{MN}=b$
»	*ivi*	»	12	»	a	»	b
»	*ivi*	»	13	»	a	»	b
»	328	»	25	»	EF	»	EE
»	329	»	26	»	EF	»	EE
»	352	»	4	»	equazione	»	equazioni
»	362	»	7	»	ed	»	e
»	371	»	22	»	valore	»	quoziente
»	396	»	9	»	$\int\cos\varphi\,d\varphi=\text{sen}\,\varphi$	»	$\int\cos\varphi\,d\varphi=\text{sen}\,\varphi$, $\int\text{sen}\,\varphi\,d\varphi=-\cos\varphi$
»	398	»	1	»	$B_z=\cos\psi(\varphi\cos\ \ \text{sen}\,\varphi)+\text{ecc.}$	»	$B_z=\cos\psi(\varphi\cos\varphi-\text{sen}\,\varphi)+\text{ecc.}$
»	407	»	25	»	giacchè pei materiali che vengono generalmente impiegati nelle costruzioni,	»	giacchè pei legnami e pei ferri, che sono i materiali generalmente impiegati nelle costruzioni per la formazione di archi,
»	441	»	24	»	del	»	nel
»	468	»	40	»	opposto	»	opposta
»	479	»	17	»	$\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$; che la lunghezza dello stesso pezzo è proporzionale alla sua proiezione orizzontale e quindi al rapporto $\frac{1}{\cos\alpha}$, e che il suo volume	»	$\frac{1}{\text{sen}\,\alpha}$; d'altronde la lunghezza dello stesso pezzo vale la sua proiezione orizzontale divisa per $\cos\alpha$, e quindi il suo volume
»	539	»	8	»	$\times\frac{(\text{tang}\,\psi-\text{tang}\,\varphi)(1-\text{ecc.}}{-\text{tang}\,\psi^2+\lfloor C+\text{ecc.}}$	»	$\times\frac{(\text{tang}\,\psi-\text{tang}\,\varphi)(1-\text{ecc}}{-\text{tang}^2\psi+\lfloor C+\text{ecc.}}$

INDICE ANALITICO

Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni.

CAPITOLO I.

Nozioni generali.

1. Costituzione molecolare dei corpi . . . . *Pag.* 7
2. Azioni molecolari, azioni attrattive ed azioni repulsive . . . . » *ivi*
3. Resistenza dei corpi . . . . » 8
4. Elasticità, deformazioni elastiche e deformazioni permanenti. . . » *ivi*
5. Snervamento e rottura . . . . » 9
6. Principali maniere con cui viene cimentata la resistenza dei corpi nelle costruzioni . . . . » *ivi*
7. Influenza della durata delle forze estrinseche sullo snervamento e sulla rottura dei corpi . . . . » 11
8. Limiti delle forze estrinseche a cui si possono assoggettare i corpi nelle costruzioni . . . . » *ivi*
9. Coefficiente di stabilità . . . . » *ivi*
10. Generazione geometrica dei corpi solidi di cui verrà studiata la resistenza; fibra ed elementi di fibra nei solidi prismatici e negli archi a sezione costante . . . . » 12

CAPITOLO II.

Resistenza all'estensione nei solidi ad asse rettilineo, essendo le forze estrinseche dirette secondo i loro assi.

11. Fondamentali risultati d'esperienza sulla resistenza all'estensione dei solidi prismatici, omogenei ed elastici . . . . » 14
12. Azione molecolare che si sviluppa nella sezion retta di un solido prismatico, omogeneo ed elastico sotto l'azione d'una forza tendente diretta secondo il suo asse; allungamento proporzionale e coefficiente di elasticità longitudinale . . . . » *ivi*
13. Determinazione della resistenza allo snervamento per trazione, e dell'allungamento proporzionale corrispondente pei corpi prismatici, omogenei ed elastici . . . . » 16

14. Condizione ed equazione di stabilità, dedotte dalla resistenza allo snervamento, per un solido prismatico, omogeneo ed elastico sottoposto all'azione di una forza tendente diretta secondo il suo asse. *Pag.* 22
15. Dato fondamentale d'esperienza sulla resistenza alla rottura per trazione dei solidi prismatici ed omogenei . . . . » 23
16. Resistenza dei solidi prismatici ed omogenei alla rottura per trazione . » 24
17. Determinazione della resistenza alla rottura per trazione nei corpi prismatici ed omogenei . . . . » *ivi*
18. Condizione ed equazione di stabilità, dedotte dalla resistenza alla rottura, per un solido prismatico ed omogeneo sottoposto all'azione di una forza tendente diretta secondo il suo asse . . . . » 33
19. Uso delle equazioni di stabilità relative all'estensione . . . . » 34
20. Applicazione delle equazioni di stabilità relative all'estensione al caso dei corpi non prismatici, ma ad asse rettilineo; sezione pericolosa. » *ivi*
21. Applicazione delle equazioni di stabilità relative all'estensione al caso dei corpi ad asse rettilineo verticalmente disposto, tenendo anche conto dei loro pesi . . . . » 35
22. Applicazione della teoria sulla resistenza all'estensione alla risoluzione di alcuni semplici problemi . . . . » 36
23. Applicazione della teoria sulla resistenza all'estensione al calcolo della grossezza da assegnarsi alle pareti dei cilindri e delle sfere che tendono a rompersi per effetto di una pressione uniforme. . . . . » 39
24. Applicazione della teoria sulla resistenza all'estensione per determinare la sezione trasversale da assegnarsi ai tiranti ed alle cerchiature che, oltre di sopportare una data tensione costante, devono reggere all'aumento di tensione prodotto da un abbassamento di temperatura . . . . » 48
25. Determinazione elementare della più piccola tensione che deve sopportare una cerchiatura per servire allo scopo cui è destinata . . » 53
26. Solidi omogenei di egual resistenza all'estensione con asse rettilineo e verticalmente disposto . . . . » *ivi*
27. Procedimento elementare per determinare in modo approssimato un solido omogeneo di egual resistenza all'estensione con asse rettilineo verticalmente disposto . . . . » 58

CAPITOLO III.

Resistenza alla compressione dei solidi ad asse rettilineo, essendo le forze estrinseche dirette secondo i loro assi.

28. Fondamentali risultati d'esperienza sulla resistenza alla compressione dei solidi prismatici omogenei . . . . » 60
29. Azione molecolare che si sviluppa nella sezion retta di un solido prismatico, omogeneo ed elastico sotto l'azione di una forza comprimente diretta secondo il suo asse; accorciamento proporzionale e coefficiente di elasticità longitudinale relativo alla compressione. . . . . » 61
30. Determinazione della resistenza allo snervamento per pressione e dell'accorciamento proporzionale corrispondente . . . . » 62

31. Condizione ed equazione di stabilità, dedotte dalla resistenza allo snervamento, per un solido prismatico omogeneo, elastico e che non può inflettersi sotto l'azione di una forza premente diretta secondo il suo asse . . . . *Pag.* 64
32. Dato fondamentale d'esperienza sulla resistenza dei solidi prismatici ed omogenei alla rottura per pressione . . . . » 65
33. Resistenza dei solidi prismatici ed omogenei alla rottura per pressione . » *ivi*
34. Determinazione della resistenza alla rottura per pressione nei corpi prismatici ed omogenei . . . . » *ivi*
35. Resistenza alla rottura per pressione nei corpi prismatici ed omogenei allorquando, a motivo della loro altezza, sono soggetti ad inflettersi . . . . » 71
36. Formole empiriche di Hodgkinson per trovare la resistenza alla rottura per pressione nei sostegni prismatici in legno ed in ghisa . . » 73
37. Formole empiriche di Love per trovare la resistenza alla rottura per pressione nei sostegni cilindrici in ferro ed in ghisa . . . . . . » 75
38. Influenza del numero dei pezzi sulla resistenza dei prismi in pietra alla rottura per pressione . . . . » *ivi*
39. Resistenza dei corpi cilindrici, impiegati come rulli, alla rottura per pressione . . . . » 76
40. Condizione ed equazione di stabilità, dedotte dalla resistenza alla rottura, per un solido prismatico ed omogeneo sottoposto all'azione di una forza premente diretta secondo il suo asse . . . . » *ivi*
41. Uso delle equazioni di stabilità relative alla compressione. . . . . » 77
42. Applicazione delle equazioni di stabilità relative alla compressione al caso dei corpi non prismatici, ma ad asse rettilineo . . . . » *ivi*
43. Applicazione delle equazioni di stabilità relative alla compressione al caso dei corpi ad asse rettilineo verticalmente disposto, tenendo anche conto dei loro pesi . . . . » 78
44. Applicazione della teoria sulla resistenza alla compressione nella risoluzione di alcuni semplici problemi . . . . » 79
45. Determinazione delle dimensioni della sezion retta delle colonne vuote. » 81
46. Determinazione della grossezza da assegnarsi alle pareti dei cilindri che tendono a rompersi per schiacciamento a motivo di una pressione uniforme che su essi si esercita . . . . » 83
47. Solidi omogenei di egual resistenza alla compressione con asse rettilineo verticalmente disposto . . . . » 84
48. Indicazione del procedimento elementare che si può seguire per determinare in modo approssimato un solido omogeneo di egual resistenza alla compressione con asse rettilineo verticalmente disposto . . . » 86

CAPITOLO IV.

Resistenza alla torsione nei solidi prismatici ed omogenei.

49. Ipotesi fondamentali sulla resistenza alla torsione nei solidi prismatici, omogenei ed elastici . . . . » 87
50. Equazione d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari in

un corpo prismatico ed omogeneo, nel quale vien cimentata la resistenza alla torsione, coefficiente di torsione e momento di torsibilità. *Pag.* 88
51. Angolo di torsione . . . . » 91
52. Momenti d'inerzia polari della sezione circolare piena e della sezione circolare vuota . . . . » 92
53. Procedimento elementare per dedurre il momento d'inerzia polare della sezione circolare piena . . . . » 93
54. Momenti d'inerzia polari delle sezioni poligonali regolari piene e delle sezioni poligonali regolari vuote . . . . » 95
55. Procedimento elementare per ottenere il momento d'inerzia polare del triangolo isoscele rispetto alla retta passante pel suo vertice e perpendicolare al suo piano, onde avere quindi il momento d'inerzia polare della sezione poligonale regolare rispetto all'asse passante pel suo centro . . . . » 97
56. Metodo generale per trovare il momento d'inerzia polare di una sezione qualunque, e sua applicazione al caso delle sezioni rettangolari e quadrate, piene e vuote . . . . » 100
57. Procedimento elementare per trovare il momento d'inerzia polare della sezione rettangolare rispetto all'asse perpendicolare al suo piano e passante pel suo centro . . . . » 103
58. Determinazione del coefficiente di torsione . . . . » 105
59. Angolo di torsione per ogni unità di lunghezza, e suo limite pratico » 107
60. Equazione di stabilità dedotta dal limite pratico dell'angolo di torsione » 108
61. Ipotesi fondamentali sulla resistenza dei solidi prismatici ed omogenei alla rottura per torsione . . . . » 109
62. Momento di resistenza alla rottura per torsione . . . . » *ivi*
63. Determinazione della resistenza alla rottura per torsione . . . . » 111
64. Condizione ed equazione di stabilità dedotte dalla resistenza alla rottura per torsione . . . . » *ivi*
65. Uso delle equazioni di stabilità relative alla torsione . . . . » 112
66. Modo di applicare le equazioni di stabilità nel caso in cui le forze che producono la torsione sono molte e contenute in diversi piani normali all'asse del solido . . . . » 113
67. Confronto fra gli angoli di torsione che subiscono i prismi con sezione piena ed i prismi con sezione vuota . . . . » 114
68. Applicazione della teoria sulla resistenza alla torsione nella risoluzione di alcuni semplici problemi numerici . . . . » 116

CAPITOLO V.

Resistenza allo scorrimento nei corpi solidi.

69. Resistenza allo scorrimento trasversale e resistenza allo scorrimento longitudinale nei corpi solidi fibrosi . . . . » 119
70. Scorrimento trasversale assoluto e scorrimento trasversale relativo; ipotesi fondamentale sulla resistenza allo scorrimento trasversale nei solidi omogenei ed elastici . . . . » *ivi*
71. Azione molecolare che fra due sezioni si sviluppa in un solido prismatico, omogeneo ed elastico sotto l'azione di una forza la quale provoca

in esso la resistenza allo scorrimento trasversale; coefficiente d'elasticità trasversale . . . . *Pag.* 120
72. Difficoltà di procedere ad una determinazione diretta del coefficiente d'elasticità trasversale e valori che al medesimo si possono assegnare nelle varie circostanze della pratica . . . . » 121
73. Condizione ed equazione di stabilità, dedotte dalla resistenza allo scorrimento, per un solido prismatico, omogeneo ed elastico sottoposto all'azione di una forza provocante la resistenza allo scorrimento trasversale . . . . » 122
74. Dato fondamentale d'esperienza sulla resistenza alla rottura per scorrimento nei solidi prismatici ed omogenei . . . . » 123
75. Resistenza dei solidi prismatici ed omogenei alla rottura per scorrimento » *ivi*
76. Determinazione della resistenza alla rottura per scorrimento nei corpi prismatici ed omogenei . . . . » 124
77. Resistenza allo scorrimento nei massi in muratura . . . . » 127
78. Resistenza allo scorrimento nei massi in terra . . . . » 130
79. Condizione ed equazione di stabilità dedotte dalla resistenza alla rottura per scorrimento, quando questa resistenza è dovuta alla forza di coesione . . . . » 133
80. Uso delle equazioni di stabilità relative alla resistenza allo scorrimento, e determinazione della sezione pericolosa . . . . » 134
81. Condizione ed equazione di stabilità dedotte dalla resistenza allo scorrimento, quando questa resistenza è dovuta all'attrito; determinazione della sezione pericolosa . . . . » 135
82. Applicazione della teoria sulla resistenza allo scorrimento alla risoluzione di alcuni semplici problemi numerici . . . . » *ivi*
83. Applicazione della teoria sulla resistenza allo scorrimento alla determinazione delle scarpe da assegnarsi ai massi di terra tagliati lateralmente . . . . » 138
84. Procedimento elementare per ottenere il più piccolo valore ammissibile dell'angolo che la scarpa di un terrapieno deve fare colla verticale » 142
85. Equilibrio di un muro sottoposto all'azione di una spinta orizzontale » 143

CAPITOLO VI.

Resistenza dei solidi rettilinei alla flessione.

ARTICOLO I. — Flessione prodotta nei solidi rettilinei da forze contenute in uno stesso piano passante pei loro assi ed a questi perpendicolari.

86. Fondamentali risultati d'esperienza sulla resistenza alla flessione nei solidi prismatici, omogenei ed elastici . . . . » 146
87. Strato ed assi delle fibre invariabili . . . . » 147
88. Equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari che si sviluppano in una sezion retta qualunque di un corpo prismatico ed omogeneo nel quale viene cimentata la resistenza alla flessione » *ivi*
89. Determinazione dell'asse neutro e del piano di flessione . . . . . » 155
90. Equazione della curva secondo cui si dispone l'asse di un prisma omogeneo ed elastico nel quale vien cimentata la resistenza alla flessione;

momento inflettente, momento resistente alla flessione e momento di flessibilità . . . . *Pag.* 158
91. Resistenze riferite all'unità di superficie, che in una sezione trasversale qualunque e pel fatto della sola flessione devono opporre le fibre maggiormente allungate e quelle maggiormente compresse . . . » 160
92. Condizioni ed equazioni di stabilità dedotte dalle resistenze allo snervamento per trazione, per pressione e per scorrimento trasversale » 162
93. Condizioni ed equazioni di stabilità dedotte dalla resistenza alla rottura per trazione, per pressione e per scorrimento trasversale . . » 164
94. Necessità della determinazione dei momenti d'inerzia e degli assi principali d'inerzia delle figure piane . . . . » 165
95. Momenti d'inerzia delle sezioni triangolari piene e delle sezioni triangolari vuote rispetto ad assi diversamente condotti nei loro piani . » *ivi*
96. Procedimento elementare per trovare il momento d'inerzia della sezione triangolare rispetto ad un suo lato . . . . » 174
97. Momenti d'inerzia delle sezioni rettangolari e di quelle composte di parti rettangolari . . . . » 176
98. Momenti d'inerzia delle sezioni trapezie e delle sezioni parallelogrammiche » 191
99. Momenti d'inerzia delle sezioni poligonali qualunque . . . . » 193
100. Momenti d'inerzia delle sezioni circolari e delle sezioni ellittiche . » 194
101. Momenti d'inerzia delle sezioni a contorno curvilineo qualunque . . » 196
102. Determinazione degli assi principali d'inerzia delle figure piane . . » 199
103. Esperienze dirette a studiare i fenomeni che si manifestano nella flessione dei solidi rettilinei . . . . » 201
104. Esperienze dirette a ricercare secondo qual legge variano le saette che prendono i solidi parallelepipedi orizzontalmente collocati su due appoggi, sotto l'azione di un peso applicato nel loro mezzo e sotto l'azione di un peso uniformemente distribuito sulla loro lunghezza » 208
105. Risultati a cui possono condurre le esperienze sulla flessione . . . » 212
106. Formole convenienti al caso della flessione prodotta in un solido rettilineo da forze perpendicolari al suo asse e contenute nel piano passante per uno degli assi principali centrali d'inerzia di tutte le sezioni trasversali . . . . » 213
107. Problemi sulla determinazione delle curve elastiche secondo cui si dispongono gli assi di solidi prismatici orizzontalmente disposti su non più di due appoggi, caricati di pesi e con sezioni trasversali simmetriche rispetto alle verticali passanti pei loro centri di superficie » 215
108. Problemi sulla determinazione delle sezioni pericolose, dei momenti inflettenti e degli sforzi di taglio massimi per solidi prismatici orizzontalmente disposti su non più di due appoggi e caricati di pesi . » 229
109 Calcolo di una delle dimensioni della sezione trasversale di un solido prismatico omogeneo sottoposto a flessione . . . . » 246
110. Disposizione e forme più convenienti da assegnarsi alle sezioni trasversali dei solidi da impiegarsi per resistere alla flessione . . . » 250
111. Applicazione della teoria sulla resistenza alla flessione alla risoluzione di alcuni semplici problemi . . . . » 253
112. Solidi omogenei ad asse rettilineo e di egual resistenza alla flessione » 262
113. Nozioni generali sul problema avente per oggetto di studiare la flessione e la stabilità dei solidi rettilinei collocati su più di due appoggi e caricati perpendicolarmente ai loro assi . . . . » 273

114. Equazione dei momenti inflettenti su tre appoggi successivi . . *Pag.* 275
115. Determinazione dei momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti agli appoggi . . . . » 278
116. Determinazione dei momenti inflettenti per una sezione qualunque di ciascuna delle *n* travate in cui resta diviso un solido rettilineo orizzontalmente collocato su più di due appoggi . . . . » 280
117. Determinazione degli sforzi di taglio in una sezione qualunque di ciascuna delle travate di un solido rettilineo orizzontalmente collocato su più di due appoggi . . . . » 281
118. Determinazione delle reazioni degli appoggi . . . . » 283
119. Rappresentazione grafica dei momenti inflettenti relativi alle diverse sezioni di un solido rettilineo orizzontalmente collocato su più di due appoggi . . . . » 284
120. Rappresentazione grafica degli sforzi di taglio relativi alle diverse sezioni di un solido orizzontalmente collocato su più di due appoggi » 287
121. Calcolo per lo stabilimento di una trave orizzontalmente sostenuta in quattro punti . . . . » 288
122. Risultati dei calcoli instituiti per lo stabilimento di una trave orizzontalmente collocata su quattro appoggi in un caso particolare . » 293
123. Determinazione di una delle dimensioni di una sezione trasversale qualunque di un solido rettilineo collocato su più di due appoggi . » 299
124. Equazioni delle curve elastiche secondo cui si dispongono gli assi delle diverse travate di una trave orizzontalmente collocata su più di due appoggi . . . . » *ivi*

ARTICOLO II. — **Flessione prodotta nei solidi rettilinei da forze parallele ai loro assi.**

125. Come può avvenire flessione in un solido prismatico sotto l'azione di una forza parallela al suo asse . . . . » 300
126. Equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari che si sviluppano in una sezion retta qualunque di un corpo prismatico ed omogeneo sotto l'azione di una forza parallela al suo asse; centro di tensione . . . . » 301
127. Determinazione dell'asse neutro . . . . » 303
128. Tensione in qualsiasi punto di qualunque sezion retta; tensione media » 307
129. Allungamento subito da un elemento di fibra qualunque; allungamento subito dall'elemento di fibra media; deviazione della sezion retta del prisma . . . . » 309
130. Resistenze riferite all'unità di superficie opposte dalle fibre maggiormente allungate e da quelle maggiormente compresse . . . . » 310
131. Condizioni ed equazioni di stabilità . . . . » 311
132. Linee di egual tensione: posizioni diverse dell'asse neutro quando il centro di tensione varia; superficie centrale di una sezione . . » 312
133. Problemi sulla determinazione della superficie centrale . . . . . » 315
134. Solidi prismatici compressi da forze parallele ai loro assi . . . . » 318
135. Ripartizione di un carico totale sulla base di un prisma non avente aderenza col suo appoggio . . . . » 322
136. Determinazione della linea che, nella base di un solido prismatico non

avente aderenza col suo appoggio e sollecitato da una forza premente parallela al suo asse, separa la parte premuta da quella non premuta; modo di trovare la pressione riferita all'unità di superficie in un punto qualunque della parte compressa; come si deduce la pressione massima riferita all'unità di superficie e come si stabilisce l'equazione di stabilità . . . . *Pag.* 323

137. Problemi sulla determinazione della linea retta che, nella base di un solido prismatico non avente aderenza col suo appoggio e sollecitato da una forza premente parallela al suo asse, separa la parte premuta dalla parte non premuta, sulla ricerca della pressione massima e della conveniente equazione di stabilità . . . . » 325

138. Applicazione della teoria esposta nel presente capitolo al caso dei corpi prismatici ed omogenei disposti coi loro assi verticali tenendo anche conto dei loro pesi, al caso di corpi non prismatici ma ad asse rettilineo, e restrinzioni a cui la medesima teoria va soggetta in alcuni casi particolari . . . . » 333

139. Flessione di un solido prismatico nel quale le dimensioni della sezione trasversale sono piccole in confronto dell'altezza . . . . » 334

140. Problemi sulla flessione dei solidi prismatici caricati di punta . . » 335

141. Accrescimento di resistenza dovuta alla presenza di ritegni nei solidi caricati di punta; limite degli sforzi comprimenti capaci di produrre flessione . . . . » 346

142. Determinazione del numero dei ritegni da porsi lungo un prisma caricato di punta affinchè, sotto l'azione di una data forza premente, siano trascurabili gli effetti della flessione . . . . » 348

143. Condizioni ed equazioni di stabilità pei solidi rettilinei caricati di punta; sezione pericolosa . . . . » *ivi*

ARTICOLO III. — **Flessione prodotta nei solidi rettilinei da forze riducibili ad una risultante unica incontrante i loro assi.**

144. Fenomeni che avvengono in un solido rettilineo sotto l'azione di una forza comunque diretta ed incontrante il suo asse . . . . » 349

145. Equazioni di equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari che si sviluppano in una sezion retta qualunque di un corpo prismatico ed omogeneo . . . . » *ivi*

146. Determinazione dell'asse neutro . . . . » 352

147. Equazione della curva secondo cui si dispone l'asse di un solido prismatico ed omogeneo . . . . » 353

148. Resistenze riferite all'unità di superficie opposte dalle fibre maggiormente allungate e da quelle maggiormente compresse . . . . . » *ivi*

149. Condizioni ed equazioni di stabilità . . . . » 355

150. Formole convenienti al caso della flessione prodotta in un corpo prismatico ed omogeneo da forze contenute nel piano passante per uno degli assi principali centrali d'inerzia di tutte le sezioni trasversali, col punto d'applicazione della loro risultante sull'asse del solido . » *ivi*

151. Equazione di stabilità, e determinazione di una delle dimensioni della sezione trasversale di un solido prismatico ed omogeneo sollecitato da forze disposte come si è detto nel numero precedente . . . » 357

152. Problemi sulla determinazione delle sezioni pericolose, delle tensioni e delle pressioni massime riferite all'unità di superficie e degli sforzi di taglio massimi per solidi prismatici inclinati, simmetrici rispetto al piano verticale passante pei loro assi e carichi di pesi contenuti in questo piano . . . . *Pag.* 359
153. Solidi omogenei ad asse rettilineo e di egual resistenza . . . . . » 369

CAPITOLO VII.

Resistenza all'innalzamento.

154. Condizione ed equazione di stabilità di un corpo il quale trovasi sotto l'azione di una forza che tende a sollevarlo . . . . . . » 370
155. Uso dell'equazione di stabilità relativa alla resistenza all'innalzamento e determinazione del solido di più facile innalzamento . . . . » 371
156. Verificazione della stabilità di un condotto in muratura entro il quale ha luogo una pressione idrostatica che tende a sollevare il vôlto che lo copre . . . . » *ivi*
157. Procedimento elementare per ottenere la pressione verticale che ha luogo sopra una parte qualunque della superficie d'intrados del vôlto del condotto considerato nel precedente numero . . . . . . » 374
158. Resistenza all'innalzamento tenendo conto della coesione dei materiali » 375

CAPITOLO VIII.

Resistenza al rovesciamento.

159. Condizione ed equazione di stabilità per un corpo il quale trovasi sotto l'azione di forze che tendono a rovesciarlo . . . . » 377
160. Uso delle equazioni di stabilità relative alla resistenza al rovesciamento e determinazione del solido di più facile rovesciamento . . . . . » 378
161. Verificazione della stabilità di un muro il quale può essere rovesciato da una forza che obliquamente agisce contro una sua faccia . . » *ivi*
162. Pressione massima riferita all'unità di superficie sullo spigolo attorno al quale tende a farsi il rovesciamento di un solido prismatico, e modo di verificare se su questo spigolo non esista pericolo di schiacciamento dei materiali . . . . » 380

CAPITOLO IX.

Resistenza dei solidi inizialmente curvi.

163. Assunto del presente capitolo . . . . » 382
164. Fenomeni che si manifestano in un solido inizialmente curvo sotto l'azione di forze estrinseche contenute nel piano dell'asse del solido » *ivi*
165. Equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari che si sviluppano in una sezione trasversale qualunque di un solido inizialmente curvo . . . . » 383

166. Determinazione dell'asse neutro . . . . *Pag.* 386
167. Variazioni di coordinate subìte dall'asse di un solido inizialmente curvo nel deformarsi sotto l'azione di date forze estrinseche . . . . . . » 387
168. Resistenze riferite all'unità di superficie, che in una stessa sezione normale oppongono le fibre maggiormente allungate e quelle maggiormente compresse . . . . » 389
169. Equazioni di stabilità; determinazione di una delle dimensioni della sezione trasversale di un solido omogeneo inizialmente curvo; sezioni pericolose . . . . » 391
170. Problemi sulle deformazioni di archi a sezione trasversale costante coi loro assi disposti in piani verticali e caricati di pesi . . . . . . » 393
171. Problemi sulla stabilità di archi a sezione trasversale costante, coi loro assi disposti in piani verticali e caricati di pesi . . . . » 407
172. Ricerca delle espressioni generali del momento inflettente μ e della forza tangenziale T in due casi che ben sovente si presentano nella pratica delle costruzioni . . . . » 415

CAPITOLO X.

Archi equilibrati.

173. Archi equilibrati ed assunto del presente capitolo . . . . » 421
174. Equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari in un arco equilibrato . . . . » 422
175. Problemi sugli archi equilibrati . . . . » 424
176. Osservazioni sugli archi circolari a monta molto depressa ed a sezione normale costante . . . . » 433
177. Accorciamento subìto dall'asse di un arco collocato su due appoggi posti allo stesso livello e simmetrico rispetto al piano verticale perpendicolare alla orizzontale che unisce i centri delle due sezioni d'imposta » 435

CAPITOLO XI.

Verificazione della stabilità dei vôlti in muratura.

178. Assunto del presente capitolo . . . . » 437
179. Esperienze ed osservazioni sul modo con cui avviene la rottura nelle vôlte a botte . . . . » 438
180. Spinta orizzontale . . . . » 439
181. Punto d'applicazione della spinta orizzontale, e punto d'applicazione della pressione sopra il giunto nel quale trovasi lo spigolo di rotazione » *ivi*
182. Formole che servono a verificare la stabilità di una vôlta a botte . » 440
183. Procedimento pratico per verificare la stabilità di una vôlta a botte . » 443
184. Verificazione della stabilità dei piedritti di una vôlta a botte . . . » 446
185. Verificazione della stabilità di una vôlta a botte e dei suoi piedritti sotto il rapporto della resistenza allo schiacciamento. . . . . . . » 448
186. Procedimento grafico per verificare la stabilità di una vôlta a botte » 451
187. Cenno sul modo di verificare la stabilità di una vôlta a botte in cui la rottura tende avvenire per aprimento alla chiave verso l'estrados . » 453

CAPITOLO XII.

Scorrimento longitudinale nei corpi sottoposti a flessione.

188. Come può avvenire scorrimento longitudinale nei corpi sottoposti a flessione . . . . *Pag.* 454
189. Forza che tende a produrre lo scorrimento longitudinale in una sezione qualunque di un solido rettilineo parallela allo strato delle fibre invariabili . . . . » 456
190. Sezione di un solido per la quale è massimo il valore della forza che tende a produrre lo scorrimento longitudinale . . . . » 460
191. Condizione ed equazione di stabilità dedotte dalla resistenza alla rottura per scorrimento longitudinale . . . . » *ivi*
192. Uso dell'equazione di stabilità relativa allo scorrimento longitudinale e determinazione della sezione pericolosa . . . . » 461
193. Conseguenze che risultano dalla teoria sulla resistenza allo scorrimento longitudinale nei corpi sottoposti a flessione . . . . » 462

CAPITOLO XIII.

Equilibrio di alcuni sistemi composti e di alcuni sistemi articolati.

194. Assunto del presente capitolo . . . . » 463
195. Sforzi a cui sono assoggettati i chiodi che vengono impiegati nella formazione delle travi metalliche composte . . . . » *ivi*
196. Determinazione della resistenza delle chiodature . . . . » 464
197. Numero dei chiodi da impiegarsi nelle chiodature, quando vuolsi tener conto dell'attrito che esse fanno nascere sulla superficie di contatto delle lamiere che tengono unite . . . . » 466
198. Numero dei chiodi da impiegarsi nelle chiodature quando vuolsi tener conto della resistenza di taglio, ossia della resistenza allo scorrimento trasversale opposta dai chiodi medesimi . . . . » 468
199. Norme generali per il calcolo delle dimensioni delle travi metalliche a parete continua . . . . » 474
200. Norme generali per il calcolo delle dimensioni delle travi a parete reticolata . . . . » 475
201. Ipotesi generalmente ammesse nel calcolo delle dimensioni delle incavallature . . . . » 479
202. Incavallature di piccola portata . . . . » 480
203. Incavallature di portata media . . . . » 483
204. Incavallature di grande portata . . . . » 490
205. Incavallatura di Polonceau con ciascun puntone rinforzato da una sola colonnetta . . . . » 499
206. Incavallatura di Polonceau con ciascun puntone rinforzato da tre colonnette . . . . » 505

207. Incavallatura coi puntoni rinforzati da saette inclinate e da tiranti verticali . . . . Pag. 512
208. Travi armate . . . . » 518

CAPITOLO XIV.

Spinta delle terre e delle masse liquide contro le pareti piane di ritegni che le sostengono.

209. Assunto del presente capitolo . . . . » 524
210. Ipotesi che generalmente si ammettono nel calcolo della spinta delle terre, e resistenze che si oppongono allo scoscendimento di un masso di terra appoggiato ad un ritegno . . . . » 527
211. Espressione generale della spinta . . . . » 529
212. Determinazione del prisma di massima spinta . . . . » 535
213. Spinta e suo punto d'applicazione nel caso in cui il prisma spingente è terminato da un piano inclinato con sovraccarico uniformemente distribuito nella sua proiezione orizzontale . . . . » 537
214. Intersezione della parete piana contro la quale ha luogo la spinta con un piano parallelo alla faccia inferiore del prisma di massima spinta, e con una delle facce costituenti la superficie superiore del terrapieno. » 541
215. Spinta massima, sue componenti orizzontale e verticale e suo punto d'applicazione nel caso più generale che si può presentare all'ingegnere costruttore. . . . . » 542
216. Risoluzione di alcuni problemi pratici. . . . . » 545
217. Spinta massima e sue componenti orizzontale e verticale nel caso di un terrapieno di lunghezza qualunque . . . . » 565
218. Dati pratici necessari al calcolo della spinta delle terre . . . . . . » 566
219. Esempio numerico . . . . » 567
220. Osservazioni sopra un caso singolare che si può presentare nell'applicazione dell'esposta teoria sulla spinta delle terre . . . . » 569
221. Determinazione della spinta di una massa liquida contro la parete piana di un sostegno, delle sue componenti orizzontale e verticale e del suo punto d'applicazione . . . . » 570

CAPITOLO XV.

Resistenza viva dei solidi prismatici e resistenza viva dei tubi.

222. Assunto del presente capitolo . . . . » 572
223. Resistenza viva all'estensione . . . . » 574
224. Resistenza viva alla compressione. . . . . » 579
225. Resistenza viva allo scorrimento trasversale. . . . . » 580
226. Resistenza viva alla torsione. . . . . » 582
227. Resistenza viva alla flessione. . . . . » 589
228. Resistenza viva dei tubi . . . . » 595

INDICE ALFABETICO

Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni.

A

Accorciamento proporzionale, pag. 61 n. 29.
Accorciamento subìto da un elemento di fibra qualunque di un prisma inflesso sotto l'azione di una forza parallela al suo asse, pag. 318 n. 134.
Accorciamento subito dall'asse di un arco, pag. 435 n. 177.
Allungamento proporzionale, pag. 15 n. 12.
Allungamento subito da un elemento di fibra qualunque in un prisma inflesso sotto l'azione di una forza parallela al suo asse, pag. 309 n. 129.
Angolo di torsione, pag. 91 n. 51.
Angolo di torsione per ogni unità di lunghezza, pag. 107 n. 59.
Angoli di torsione nei prismi con sezione piena e nei prismi con sezione vuota, pag. 114 n. 67.
Archi equilibrati, da pag. 421 a 437 e da n. 173 a 177.
Asse neutro o asse delle fibre invariabili, pag. 147 n. 87, pag. 155 n. 89, pag. 300 n. 125, pag. 303 n. 127, pag. 312 n. 132, pag. 318 n. 134, pag. 352 n. 146, pag. 355 n. 150, pag. 386 n. 166.
Assi principali d'inerzia delle figure piane, pag. 199 n. 102.
Azioni attrattive, pag. 7 n. 2.
Azioni molecolari, pag. 7 n. 2.
Azioni repulsive, pag. 7 n. 2.

C

Calcolo di una delle dimensioni della sezione trasversale di un solido prismatico sottoposto a flessione, pag. 246 n. 109, pag. 299 n. 123, pag. 357 n. 151.
Calcolo di una delle dimensioni della sezione trasversale di un solido inizialmente curvo affinchè esso si trovi in buone condizioni di stabilità sotto l'azione di date forze estrinseche, pag. 391 n. 169.
Calcoli e risultati dei calcoli instituiti per lo stabilimento di una trave orizzontalmente disposta ed uniformemente caricata di pesi, pag. 288 n. 121, pag. 293 n. 122.
Cerchiature che devono resistere ad una data tensione non che ad un aumento di tensione causato da un abbassamento di temperatura, pag. 48 n. 24, pag. 53 n. 25.
Chiodature e loro resistenza, pag. 464 n. 196.
Chiodi che vengono impiegati nella formazione delle travi metalliche e sforzi a cui sono assoggettati, pag. 463 n. 195.
Cilindri che tendono a rompersi per effetto di una pressione interna, pag. 39 n. 23.
Cilindri che tendono a rompersi per effetto di una pressione esterna, pag. 83 n. 46.
Coefficiente di stabilità, pag. 11 n. 9.
Coefficiente o modulo d'elasticità longitudinale relativo all'estensione, pag. 14 n. 12, pag. 16 n. 13.
Coefficiente o modulo d'elasticità longitudinale relativo alla compressione, pag. 61 n. 29, pag. 62 n. 30.
Coefficiente di torsione, pag. 88 n. 50, pag. 105 n. 58.
Coefficiente o modulo d'elasticità trasversale, pag. 120 n. 71, pag. 121 n. 72.
Coefficiente di rottura per tensione, ossia resistenza alla rottura per tensione riferita all'unità di superficie, pag. 24 n. 16 e 17.

Coefficiente di rottura per pressione, ossia resistenza alla rottura per pressione riferita all'unità di superficie, pag. 65 n. 33 e 34.
Coefficiente di rottura per torsione, ossia resistenza alla rottura per torsione riferita all'unità di superficie, pag. 109 n. 62, pag. 111 n. 63.
Coefficiente di rottura per scorrimento, ossia resistenza alla rottura per scorrimento riferita all'unità di superficie, pag. 123 n. 75, pag. 124 n. 76.
Condizione di stabilità pei corpi sottoposti a torsione, pag. 111 n. 64.
Condizione di stabilità per un corpo il quale deve resistere ad una forza che tende a sollevarlo, pag 370 n. 154.
Condizione di stabilità per un corpo il quale deve resistere ad una forza che tende a rovesciarlo, pag. 377 n. 159.
Condizioni di stabilità pei corpi sottoposti a tensione, pag. 22 n. 14, pag. 33 n. 18.
Condizioni di stabilità pei corpi sottoposti a pressione, pag. 64 n. 31, pag. 76 n. 40.
Condizioni di stabilità pei corpi in cui vien prevocata la resistenza allo scorrimento, pag. 122 n. 73, pag. 133 n. 79, pag. 135 n. 81, pag. 460 n. 191.
Condizioni di stabilità pei solidi rettilinei in cui vien provocata la resistenza alla flessione, pag. 162 n. 92, pag. 164 n. 93, pag. 311 n. 131, pag. 355 n. 149.
Corpi solidi di cui convien studiare la resistenza e loro generazione geometrica, pag. 12 n. 10.
Costituzione molecolare dei corpi, pag. 7 n. 1.
Curva elastica, secondo la quale si dispone l'asse di un solido rettilineo, nel quale vien provocata la resistenza alla flessione, pag. 158 n. 90, pag. 299 n. 124, pag. 353 n. 147, pag. 355 n. 150.

D

Deformazioni elastiche, pag. 8 n. 4.
Deformazioni permanenti, pag. 8 n. 4.
Deviazione della sezion retta d'un prisma inflesso sotto l'azione di una forza parallela al suo asse, pag. 309 n. 129, pag. 318 n. 134.
Disposizioni più convenienti da assegnarsi alle sezioni trasversali dei solidi da impiegarsi per resistere alla flessione, pag. 250 n. 110.
Durata dell'azione delle forze estrinseche e sua influenza sulla resistenza dei corpi, pag. 11 n. 7.

E

Elasticità, pag. 8 n. 4.
Elemento di fibra o fibra elementare, pag. 12 n. 10.
Equazione d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari in un corpo prismatico sottoposto a tensione, pag. 14 n. 12.
Equazione d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari in un corpo prismatico sottoposto a pressione, pag. 61 n. 29.
Equazione d'equilibrio fra le forse estrinseche e le forze molecolari in un corpo sottoposto a torsione, pag. 88 n. 50.
Equazione d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari in un corpo sottoposto a scorrimento trasversale, pag. 120 n. 71.
Equazione dei momenti inflettenti per le sezioni corrispondenti a tre appoggi successivi di una trave orizzontalmente disposta ed uniformemente caricata di pesi, pag. 175 n. 114.
Equazione di stabilità per un corpo il quale deve resistere ad una forza che tende a sollevarlo, pag. 370 n. 154, pag. 371 n. 155.
Equazione di stabilità per un corpo il quale deve resistere ad una forza che tende a rovesciarlo, pag. 377 n. 159, pag. 378 n. 160.
Equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari nei corpi rettilinei sottoposti a flessione, pag. 147 n. 88, pag. 301 n. 126, pag. 318 n. 134, pag. 349 n. 145, pag. 355 n. 150.
Equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari nei solidi inizialmente curvi, aventi per asse una curva piana, sollecitati da forze contenute nel piano di questa curva ed in cui ciascuna sezione è tagliata dal piano stesso secondo un asse principale dell'ellisse centrale d'inerzia, pag. 383 n. 165.
Equazioni d'equilibrio fra le forze estrinseche e le forze molecolari in un arco equilibrato, pag. 422 n. 174.
Equazioni di stabilità pei corpi sottoposti a tensione, pag. 22 n. 14, pag. 33 n. 18, pag. 34 n. 19 e 20, pag. 35 n. 21.

Equazioni di stabilità pei corpi sottoposti a pressione, pag. 64 n. 31, pag. 76 n. 40, pag. 77 n. 41 e 42, pag. 76 n. 43.

Equazioni di stabilità pei corpi sottoposti a torsione, pag. 108 n. 60, pag. 111 n. 64, pag 112 n. 65, pag. 113 n. 66.

Equazioni di stabilità pei corpi in cui vien provocata la resistenza allo scorrimento, pag. 122 n. 73, pag. 133 n. 79, pag. 134 n. 80, pag. 135 n. 81, pag. 460 n. 191, pag. 461 n. 192.

Equazioni di stabilità pei solidi rettilinei in cui vien provocata la resistenza alla flessione, pag. 162 n. 92, pag. 164 n. 93, pag. 311 n. 131, pag. 318 n. 134, pag. 355 n. 149, pag. 357 n. 151.

Equazioni di stabilità pei solidi rettilinei inizialmente curvi, pag. 391 n. 169.

Esperienze e dati sperimentali sulla resistenza all'estensione, pag. 14 n. 11, pag. 16 n. 13, pag. 23 n. 15, pag. 24 n. 17.

Esperienze e dati sperimentali sulla resistenza alla compressione, pag. 60 n. 28, pag. 62 n. 30, pag. 65 n. 32 e 34.

Esperienze e dati sperimentali sulla resistenza alla torsione, pag. 87 n. 49, pag. 105 n. 58, pag. 109 n. 61, pag. 111 n. 63.

Esperienze e dati sperimentali sulla resistenza allo scorrimento, pag. 119 n. 70, pag. 121 n. 72, pag. 123 n. 74, pag. 124 n. 76, pag. 127 n. 77, pag. 130 n. 78.

Esperienze e dati sperimentali sulla resistenza alla flessione, pag. 146 n. 86, da pag. 201 a 213 e da n. 103 a 105.

Esperienze ed osservazioni sul modo con cui avviene la rottura nelle vôlte a botte, pag. 438 n. 179.

Espressione generale della spinta delle terre, pag. 529 n. 211.

F

Fibra e fibra elementare, pag. 12 n. 10.

Flessione prodotta nei solidi rettilinei da forze perpendicolari ai loro assi, da pag. 146 a 300 e da n. 86 a 124.

Flessione prodotta nei solidi rettilinei da forze parallele ai loro assi, da pag. 300 a 349 e da n. 125 a 143.

Flessione di un solido rettilineo caricato di punta, nel quale le dimensioni della sezione trasversale sono piccole in confronto dell altezza, da pag. 334 a 349 e da n. 139 a 143.

Flessione prodotta in un solido rettilineo da forze riducibili ad una risultante unica obliqua al suo asse, da pag. 349 a 370 e da n. 144 a 153.

Forme più convenienti da assegnarsi alle sezioni trasversali dei solidi da impiegarsi per resistere alla flessione, pag. 250 n. 110.

Forza che tende a produrre, in un corpo sottoposto a flessione, lo scorrimento longitudinale in una sezione parallela allo strato delle fibre invariabili, pag. 456 n. 189.

Forze estrinseche limiti a cui convien assoggettare i corpi nelle costruzioni, pag. 11 n. 8.

I

Incavallatura di piccola portata, pag. 480 n. 202.

Incavallatura di portata media, pag. 483 n. 203.

Incavallatura di grande portata, pag. 490 n. 204.

Incavallatura di Polonceau, pag. 499 n. 205, pag. 505 n. 206.

Incavallatura coi puntoni rinforzati da saette inclinate e da tiranti verticali, pag. 512 n. 207.

Incavallature e calcolo delle dimensioni di diversi pezzi che le compongono, da pag. 479 a 524 e da n. 201 a 208.

L

Linea che, per un prisma non avente aderenza coll'appoggio, separa nella sua base la parte premuta dalla parte non premuta, pag. 323 n. 136, pag. 325 n. 137.

Linee di egual tensione nei solidi rettilinei inflessi da forze parallele ai loro assi, pag. 312 n. 132.

Linee di egual pressione nei solidi rettilinei inflessi di forze parallele ai loro assi, pag. 318 n. 134.

M

Momenti d'inerzia di sezioni piane rispetto ad assi in esse contenute, da pag. 165 a 199 e da n. 95 a 102.

Momenti d'inerzia polari di sezioni piane, da pag. 92 a 105 e da n. 52 a 57.

Momenti inflettenti nelle sezioni corrispondenti agli appoggi per una trave orizzontalmente disposta ed uniformemente caricata di pesi, pag. 278 n. 115.

Momenti inflettenti nelle diverse sezioni delle travate di una trave orizzontalmente disposta ed uniformemente caricata di pesi, pag. 280 n. 116.
Momento d'inerzia polare, pag. 88 n. 50.
Momento di torsibilità, pag. 88 n. 50.
Momento di resistenza alla rottura per torsione, pag. 109 n. 62.
Momento inflettente, pag. 158 n. 90.
Momento resistente alla flessione, pag. 158 n. 90.
Momento di flessibilità, pag. 158 n. 90.

N

Nozioni generali sulla resistenza dei corpi, da pag. 7 a 13 e da n. 1 a 10.
Numero dei chiodi da impiegarsi nelle chiodature, pag. 466 n. 197, pag. 468 n. 198.

P

Piano di flessione, pag. 155 n. 89.
Piano di sollecitazione, pag. 147 n. 87.
Pressione in qualsiasi punto della sezion retta di un prisma inflesso sotto l'azione di una forza parallela al suo asse, pag. 318 n. 134.
Pressione massima riferita all'unità di superficie sullo spigolo attorno al quale tende a farsi il rovesciamento di un solido prismatico, pag. 380 n. 162.
Prisma di massima spinta delle terre, pag. 535 n. 212.
Problemi sulla resistenza all'estensione, da pag. 36 a 53 e da n. 22 a 24.
Problemi sulla resistenza alla compressione, pag. 79 n. 44, pag. 81 n. 45.
Problemi sulla resistenza alla torsione, pag. 116 n. 68.
Problemi sulla resistenza allo scorrimento, da pag. 135 a 145 e da n. 82 a 85.
Problemi sulla determinazione delle curve elastiche secondo cui si dispongono gli assi di solidi rettilinei nei quali vien provocata la resistenza alla flessione, pag. 215 n. 107.
Problemi sulla determinazione dei momenti inflettenti e degli sforzi di taglio di maggior valore assoluto, e quindi delle sezioni pericolose pei solidi rettilinei in cui vien provocata la resistenza alla flessione, pag. 229 n. 108, pag. 359 n. 152.
Problemi sulla resistenza dei solidi rettilinei alla flessione, pag. 253 n. 111.
Problemi sulla deformazione di archi circolari caricati di pesi, pag. 393 n. 170.
Problemi sulla stabilità di archi circolari caricati di pesi, pag. 407 n. 171.
Problemi sugli archi equilibrati, pag. 424 n. 175.
Problemi sulla spinta delle terre, pag. 545 n. 216.
Procedimenti pratici per verificare la stabilità di una vôlta a botte, pag. 443 n. 183, pag. 446 n. 184, pag. 448 n. 185, pag. 451 n. 186.
Punto d'applicazione della spinta delle terre, pag. 537 n. 213, pag. 542 n. 215.

R

Rapporti fra gli archi circolari a monta molto depressa e gli archi equilibrati, pag. 433 n. 176.
Rappresentazione grafica dei momenti inflettenti nelle diverse sezioni di una trave orizzontalmente disposta ed uniformemente caricata di pesi, pag. 284 n. 119.
Rappresentazione grafica degli sforzi di taglio nelle diverse sezioni di una trave orizzontalmente disposta ed uniformemente caricata di pesi, pag. 287 n. 120.
Reazioni degli appoggi su una trave orizzontalmente disposta ed uniformemente caricata di pesi, pag. 283 n. 118.
Resistenza dei corpi, pag. 8 n. 3.
Resistenza all'estensione, da pag. 14 a 60 e da n. 11 a 27.
Resistenza allo snervamento per tensione riferita all'unità di superficie, pag. 16 n. 13.
Resistenza alla rottura per tensione, pag. 24 n. 16.
Resistenza alla compressione, da pag. 60 a 87 e da n. 28 a 48.
Resistenza allo snervamento per pressione riferita all'unità di superficie, pag. 62 n. 30.
Resistenza alla rottura per pressione, pag. 65 n. 33.
Resistenza alla rottura per pressione nei corpi prismatici soggetti ad inflettersi, pag. 71 n. 35.
Resistenza alla rottura per pressione nei sostegni prismatici in legno ed in ghisa, pag. 73 n. 36.
Resistenza alla rottura per pressione nei sostegni cilindrici in ferro ed in ghisa, pag. 75 n. 37.
Resistenza alla rottura per pressione nei prismi di pietra formati di più pezzi sovrapposti, pag. 75 n. 38.
Resistenza alla rottura per pressione nei corpi cilindrici impiegati come rulli, pag. 76 n. 39.

Resistenza alla rottura per scorrimento, pag. 123 n. 75.
Resistenza alla torsione, da pag. 87 a 118 e da n. 49 a 68.
Resistenza all'innalzamento, da pag. 370 a 377 e da n. 154 a 158.
Resistenza allo scorrimento nei corpi solidi, da pag. 119 a 145 e da n. 69 a 85, da pag. 454 a 462 e da n. 188 a 193.
Resistenza allo scorrimento trasversale nei corpi fibrosi, pag. 119 n. 69.
Resistenza allo scorrimento longitudinale nei corpi fibrosi, pag. 119 n. 69.
Resistenza allo scorrimento nei massi in muratura, pag. 127 n. 77.
Resistenza allo scorrimento nei massi in terra, pag. 130 n. 78.
Resistenza dei solidi rettilinei alla flessione, da pag. 146 a 370 e da n. 86 a 153.
Resistenza dei solidi rettilinei orizzontalmente collocati su più appoggi e caricati di pesi uniformemente distribuiti sulla loro lunghezza, da pag. 273 a 300 e da n. 113 a 124.
Resistenza al rovesciamento, da pag. 377 a 381 e da n. 159 a 162.
Resistenza dei solidi inizialmente curvi, da pag. 382 a 421 e da n. 163 a 172.
Resistenza viva, da pag. 572 a 605 e da n. 222 a 228.
Resistenza viva all'estensione, pag. 574, n. 223.
Resistenza viva alla compressione, pag. 579 n. 224.
Resistenza viva allo scorrimento trasversale, pag. 580 n. 225.
Resistenza viva alla torsione, pag. 582 n. 226.
Resistenza viva alla flessione, pag. 589 n. 227.
Resistenza viva dei tubi, pag. 595 n. 228.
Resistenze che vengono provocate nei corpi impiegati nelle costruzioni, pag. 9 n. 6.
Resistenze riferite all'unità di superficie opposte, in una sezione qualunque di un solido rettilineo inflesso, dalle fibre maggiormente allungate e dalle fibre maggiormente accorciate, pag. 160 n. 91, pag. 310 n. 130, pag. 318 n. 134, pag. 153 n. 148, pag. 155 n. 150.
Resistenze riferite all'unità di superficie che in una sezione normale qualunque di un solido inizialmente curvo oppongono le fibre maggiormente allungate e quelle maggiormente compresse, pag. 389 n. 168.
Ripartizione del carico totale sulla base di un prisma non avente aderenza col suo appoggio, pag. 322 n. 135.
Ritegni e loro influenza nell'accrescere la resistenza dei solidi caricati di punta, pag. 346 n. 141, pag. 348 n. 142.
Rottura, pag. 9 n. 5.

S

Scorrimento trasversale assoluto, pag. 119 n. 70.
Scorrimento trasversale relativo, pag. 119 n. 70.
Scorrimento longitudinale nei corpi sottoposti a flessione, da pag. 454 a 462 e da n. 188 a 193.
Sezione pericolosa nei solidi in cui vien provocata la resistenza all'estensione, pag. 34 n. 20, pag. 35 n. 21.
Sezione pericolosa nei solidi in cui vien provocata la resistenza alla compressione, pag. 77 n. 42, pag. 78 n. 43.
Sezione pericolosa nei solidi in cui vien provocata la resistenza allo scorrimento, pag. 134 n. 80, pag. 135 n. 81.
Sezioni pericolose nei solidi rettilinei in cui vien provocata la resistenza alla flessione, pag. 229 n. 108, pag. 246 n. 109, pag. 460 n. 190, pag. 357 n. 151, pag. 359 n. 152.
Sezioni pericolose nei corpi in cui vien provocata la resistenza all'innalzamento, pag. 371 n. 155.
Sezioni pericolose nei corpi in cui vien provocata la resistenza al rovesciamento, pag. 378 n. 160.
Sezioni pericolose nei solidi inizialmente curvi, pag. 391 n. 169.
Sfere che tendono a rompersi per effetto di una pressione interna, pag. 39 n. 23.
Sforzi di taglio nelle diverse sezioni delle travate di una trave orizzontalmente disposta ed uniformemente caricata di pesi, pag. 281 n. 117.
Sistemi composti, sistemi articolati e loro equilibrio, da pag. 463 a 524 e da n. 194 a 208.
Snervamento, pag. 9 n. 5.
Solidi di egual resistenza all'estensione, pag. 53 n. 26, pag. 58 n. 27.
Solidi di egual resistenza alla compressione, pag. 84 n. 47, pag. 86 n. 48.
Solidi di egual resistenza alla flessione, pag. 262 n. 112, pag. 369 n. 153.
Spinta delle terre, da pag. 524 a 570 e da n. 209 a 220.
Spinta massima delle terre, pag. 542 n. 215.

Spinta di una massa liquida contro la parete piana di un sostegno, pag. 570 n. 221.
Stabilità di un condotto in muratura entro il quale si esercita una pressione idrostatica che tende a sollevare il vôlto che lo copre, pag. 371 n. 156, pag. 374 n. 157.
Stabilità di un muro sul quale agisce una forza che tende a rovesciarlo, pag. 378 n. 161.
Strato delle fibre invariabili, pag. 147 n. 87.
Superficie centrale di una sezione nei solidi rettilinei inflessi da forze parallele ai loro assi, pag. 312 n. 132, pag. 315 n. 133.

T

Tensione in qualsiasi punto della sezion retta di un prisma inflesso sotto l'azione di una forza parallela al suo asse, pag. 307 n. 128.
Tiranti che devono resistere ad una data tensione, non che ad un aumento di tensione causato da un abbassamento di temperatura, pag. 48 n. 24, pag. 53 n. 25.
Tralicci e superficie da assegnarsi ai diversi pezzi che li compongono, pag. 475 n. 200.
Travi armate, pag. 518 n. 208.
Travi a parete reticolata e calcolo delle loro dimensioni, pag. 475 n. 200.
Travi metalliche a parete continua e calcolo delle loro dimensioni, pag. 474 n. 199.

V

Variazioni di coordinate subite dall'asse di un solido inizialmente curvo nel deformarsi sotto l'azione di date forze estrinseche, pag. 387 n. 167.
Verificazione della stabilità dei vôlti in muratura, da pag. 437 a 454 e da n. 178 a 187.

RESISTENZA

DEI

MATERIALI

E STABILITÀ DELLE COSTRUZIONI

LAVORO AD USO

degl'Ingegneri, degli Architetti, dei Periti in costruzione
e di quanti si trovano applicati alla direzione ed alla sorveglianza di costruzioni
civili, stradali ed idrauliche

UTILE

agli studenti delle scuole d'applicazione per gl'Ingegneri
e dei corsi tecnici pei Periti in costruzione

PER

CURIONI GIOVANNI

Ingegnere, Architetto e Dottore aggregato al Collegio della Facoltà di scienze fisiche e matematiche della R. Università di Torino, Professore straordinario di costruzioni civili, stradali ed idrauliche nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri laureati, e Professore titolare di geometria pratica e costruzioni nel R. Istituto industriale e professionale di Torino, Membro ordinario residente della Società Reale d'agricoltura, industria e commercio, e Membro effettivo residente della Società degl'Ingegneri e degl'Industriali di Torino.

TORINO
Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO, Editore
Via Lagrange, 16, piano 1°

1867

Torino, 1867 — Stamperia di Compositori-Tipografi,
via del Teatro d'Angennes, 16.

INDICE DELLE FIGURE

Tavola I.

Figure 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 dirette a far vedere le principali maniere con cui vien cimentata la resistenza dei corpi nelle costruzioni.

» 8, 9, 10 e 11 per far conoscere la generazione geometrica dei corpi di cui convien studiare la resistenza.

» 12, 13 e 14 relative allo studio della resistenza dei solidi rettilinei all'estensione.

» 15, 16, 17, 18, 19 e 20 riferentisi alla risoluzione di alcuni problemi sulla resistenza all'estensione.

Tavola II.

Figure 21 e 22 nelle quali sono rappresentati due solidi di egual resistenza all'estensione.

Figura 23 la quale dà la rappresentazione di un solido di egual resistenza alla compressione.

Figure 24, 25 e 26 riferentisi allo studio della resistenza alla torsione.

» 27, 28, 29, 30, 31, 32 e 33 per la deduzione dei momenti d'inerzia polari di alcune sezioni piane.

Tavola III.

Figura 34 dalla quale si deduce l'espressione del momento d'inerzia polare per la sezione rettangolare vuota.

Figure 35 e 36 relative allo studio sulla resistenza alla torsione.

Figura 37 riferentesi allo studio sulla resistenza allo scorrimento trasversale.

» 38 relativa allo studio della resistenza allo scorrimento dei massi di terra.

Figure 39, 40, 41, 42 e 43 relative ad alcuni problemi sulla resistenza allo scorrimento.

Figura 44 per lo studio della flessione dei solidi rettilinei sollecitati da forze dirette perpendicolarmente ai loro assi.

Figure 45 e 46 per far conoscere le proprietà dei momenti d'inerzia di sezioni piane rispetto ad assi in esse contenuti, per trovare gli assi principali d'inerzia e per determinare l'ellisse d'inerzia.

Tavola IV.

Figure 47, 48 e 49 riferentisi allo studio della flessione dei solidi rettilinei sollecitati da forze perpendicolari ai loro assi.

» 50, 51, 52, 53, 54, 55 e 56 per dedurre i momenti d'inerzia delle sezioni triangolari rispetto ad assi in esse contenuti.

Tavola V.

Figure 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75 76, 77 e 78 per il calcolo dei momenti d'inerzia di sezioni piane rispetto ad assi in esse contenuti.

Tavola VI.

Figure 79, 80 e 81 relative alla determinazione dei momenti d'inerzia di sezioni piane qualunque rispetto ad assi in esse contenuti.

Figura 82 per la determinazione degli assi principali d'inerzia delle figure piane.

» 83 dimostrante come generalmente avviene la rottura per flessione nei prismi di ghisa.

Figure 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95 e 96 sulle quali vengono instituiti i ragionamenti per risolvere diversi problemi sulla resistenza alla flessione.
» 97 e 98 nelle quali sono rappresentati due solidi di egual resistenza alla flessione.

Tavola VII.

Figura 99 rappresentante un solido di egual resistenza alla flessione.
Figure 100, 101, 102, 103 e 104 riferentisi allo studio delle travi orizzontalmente collocate su più appoggi e caricate di pesi uniformemente distribuiti sulla loro lunghezza.
» 105, 106, 107, 108 e 109 sulle quali vengono instituiti i ragionamenti per lo studio della flessione dei corpi prismatici sotto l'azione di forze parallele ai loro assi.

Tavola VIII.

Figure 110, 111, 112 e 113 relative allo studio della flessione dei solidi prismatici sollecitati da forze parallele ai loro assi.
» 114, 115, 116, 117 e 118 per la determinazione delle pressioni che hanno luogo sulle basi di prismi non aventi aderenza coi loro appoggi e sottoposti all'azione di forze parallele ai loro assi.
» 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127 e 128 per studiare la flessione dei solidi rettilinei caricati di punta.

Tavola IX.

Figure 129, 130, 131 e 132 per lo studio della flessione dei solidi rettilinei sollecitati da forze dirette obliquamente ai loro assi.
» 133 e 134 per lo studio della resistenza all'innalzamento.
» 135 e 136 per lo studio della resistenza al rovesciamento.
» 137 e 138 relative allo studio della resistenza dei solidi inizialmente curvi.

Tavola X.

Figure 139, 140, 141, 142 e 143 riferentisi allo studio della resistenza dei solidi inizialmente curvi.
» 144, 145, 146 e 147 relative alla determinazione ed alla resistenza degli archi equilibrati.
» 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155 e 156 per la verificazione della stabilità dei grandi archi in muratura.

Tavola XI.

Figure 157 e 158 sulle quali si instituiscono i ragionamenti per valutare la resistenza allo scorrimento longitudinale che si verifica nei corpi sottoposti a flessione.
» 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166 e 167 relative alla resistenza delle chiodature.
Figura 168 per il calcolo di una trave a parete reticolata.
Figure 169, 170, 171, 172, 173 e 174 per il calcolo delle dimensioni dei varii pezzi delle incavallature.
Figura 175 per il calcolo della spinta delle terre.

Tavola XII.

Figure 176 e 177 sulle quali si ragiona per instituire i calcoli diretti a determinare le dimensioni dei vari pezzi componenti due travi armate.
» 178, 179, 180, 181, 182, 183 e 184 relative al calcolo della spinta delle terre.
Figura 185 per il calcolo della spinta di una massa liquida contro una parete piana.
Figure 186, 187, 188, 189 e 190 relative allo studio delle resistenze vive che si possono provocare nei solidi rettilinei.

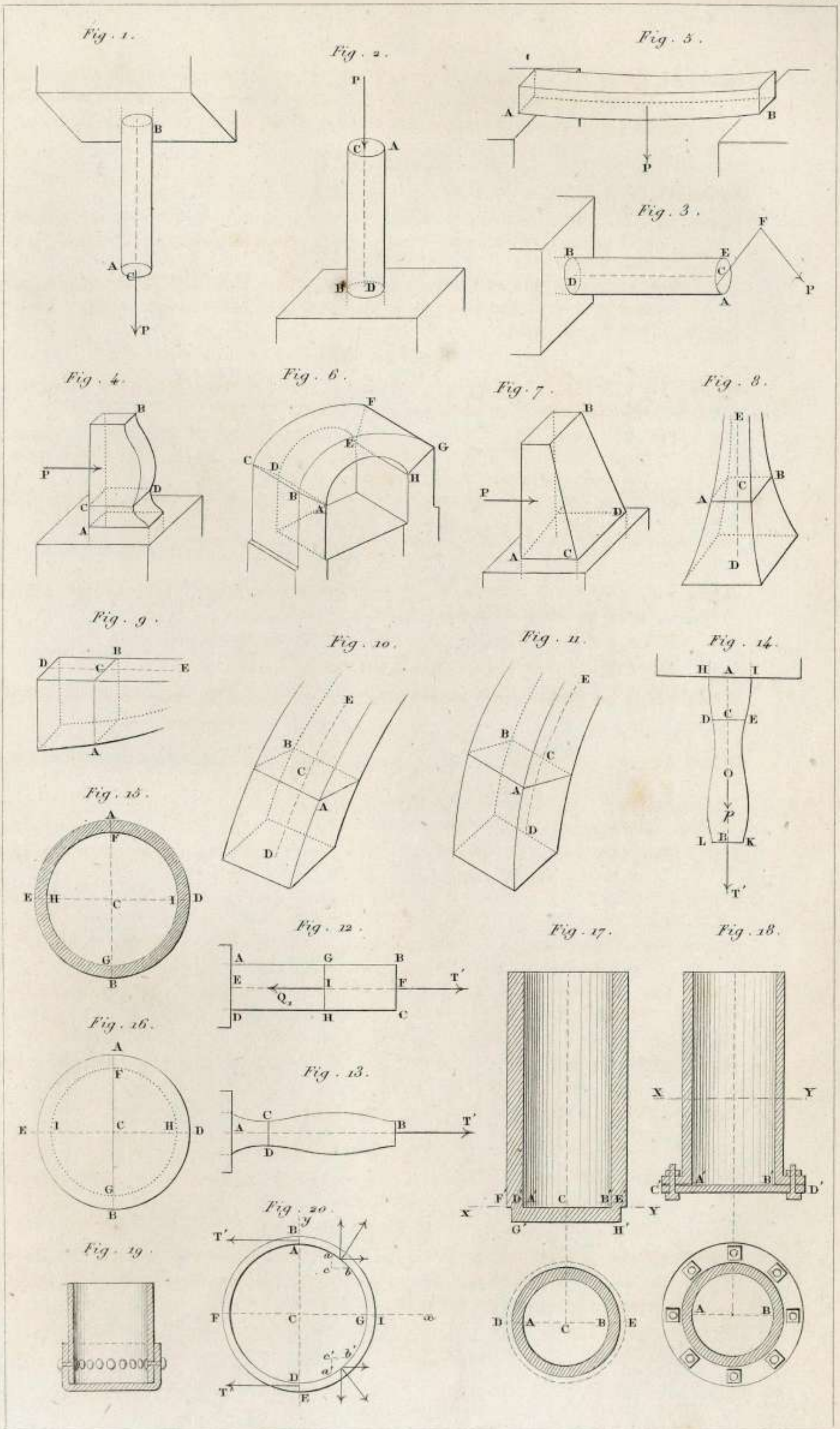


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 5.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 12.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 16.
Fig. 13.
Fig. 19.
Fig. 20.

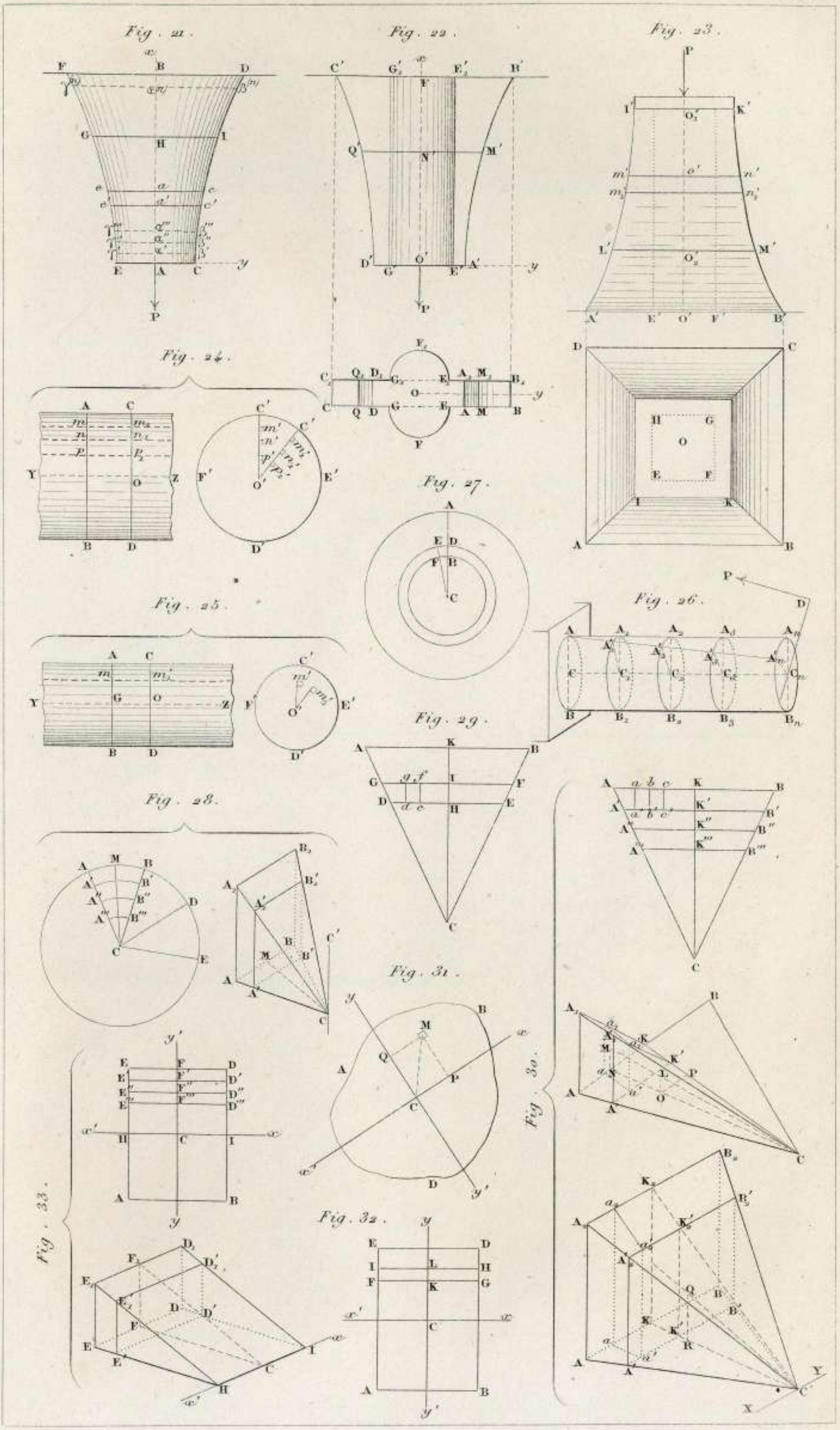


Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.

Fig. 34.

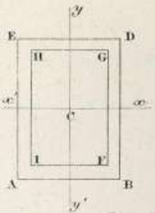


Fig. 35.

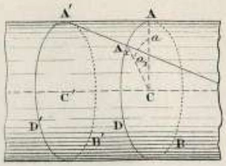


Fig. 36.

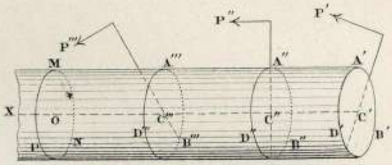


Fig. 37.

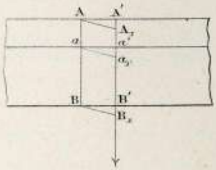


Fig. 38.

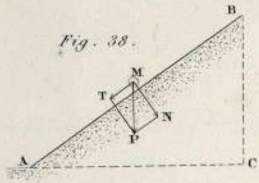


Fig. 39.

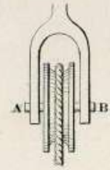


Fig. 40.

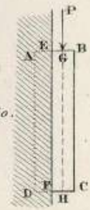


Fig. 41.

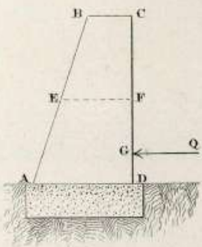


Fig. 42.

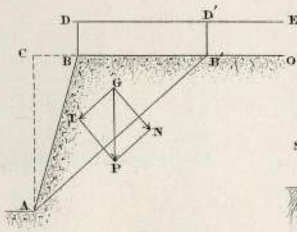


Fig. 43.

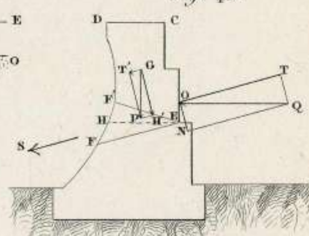


Fig. 44.

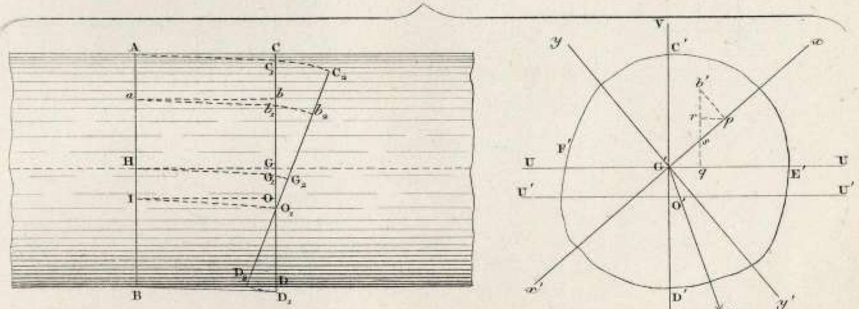


Fig. 45.

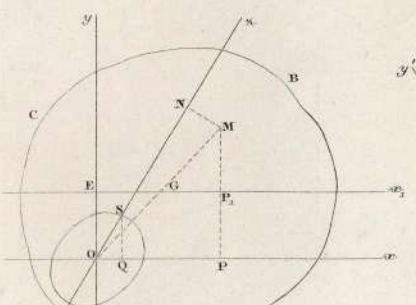


Fig. 46.

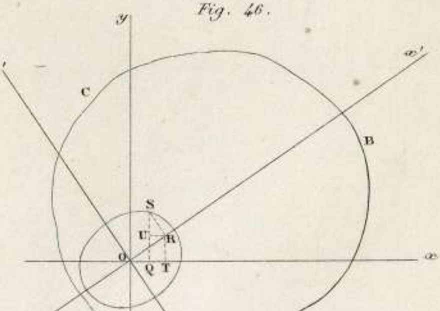


Fig. 47.

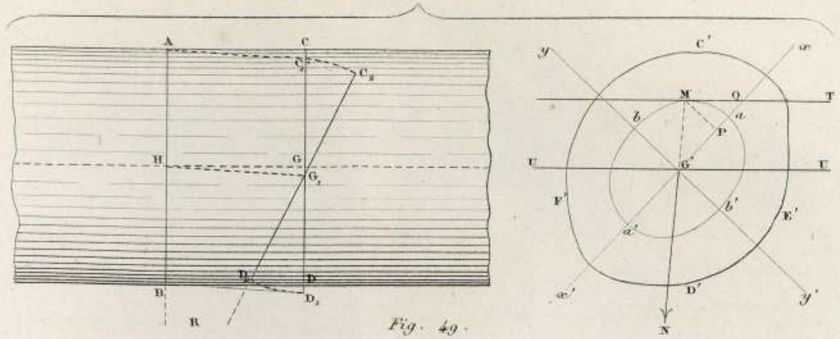


Fig. 49.

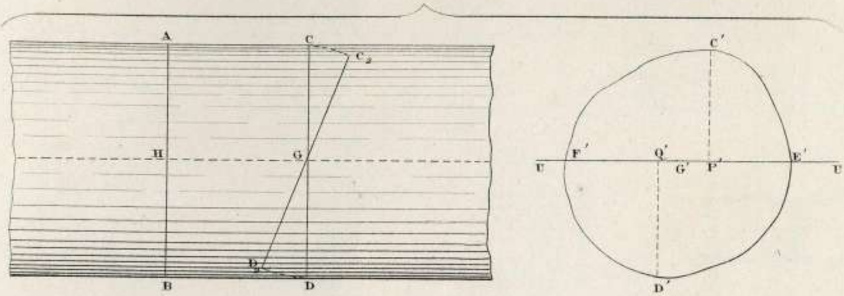


Fig. 48.

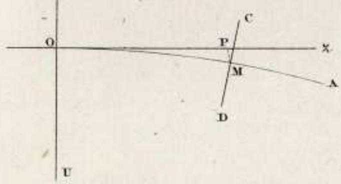


Fig. 50.

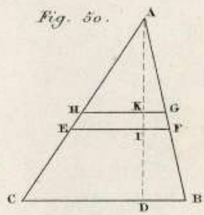


Fig. 51.

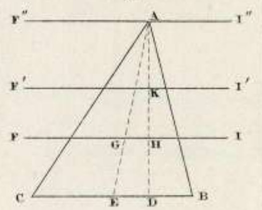


Fig. 52.

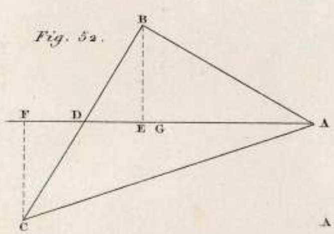


Fig. 53.

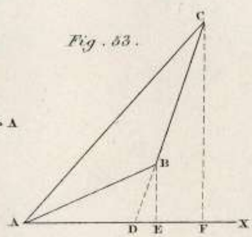


Fig. 54.

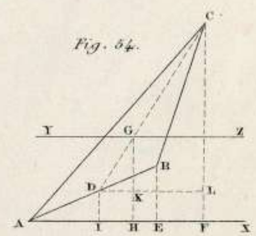


Fig. 55.

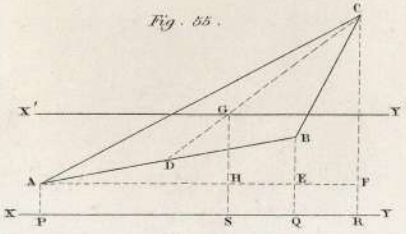
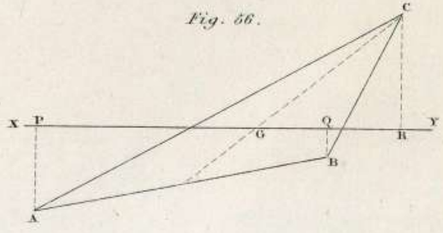


Fig. 56.



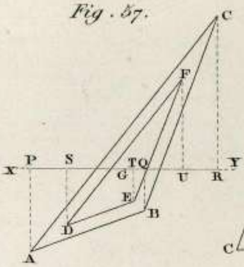


Fig. 57.

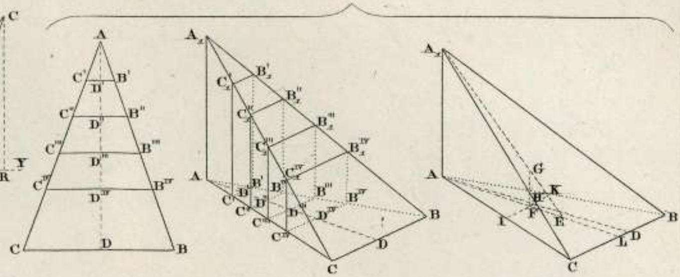


Fig. 58.

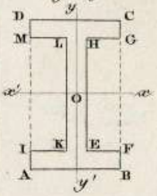


Fig. 59.

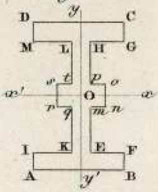


Fig. 60.

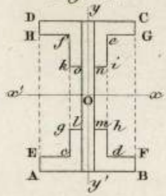


Fig. 61.

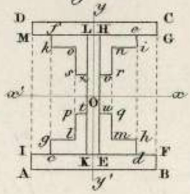


Fig. 62.

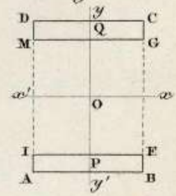


Fig. 63.

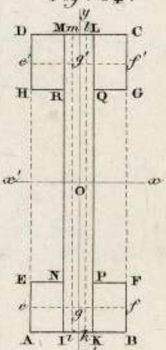


Fig. 64.

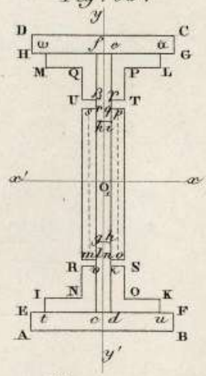


Fig. 65.

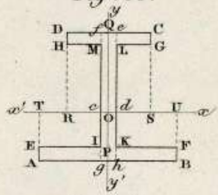


Fig. 66.

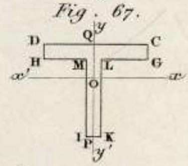


Fig. 67.

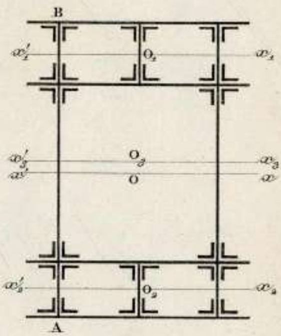


Fig. 68.

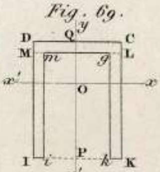


Fig. 69.

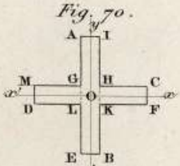


Fig. 70.

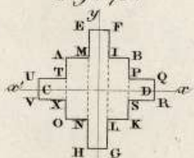


Fig. 71.

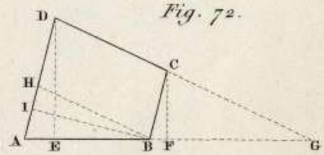


Fig. 72.

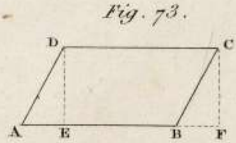


Fig. 73.

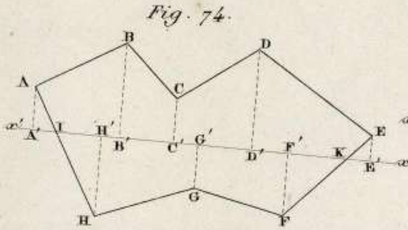


Fig. 74.

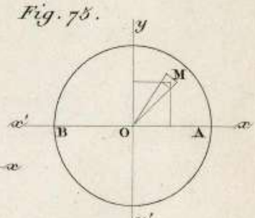


Fig. 75.

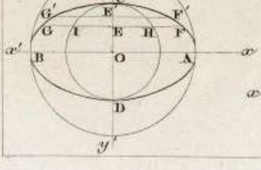


Fig. 76.

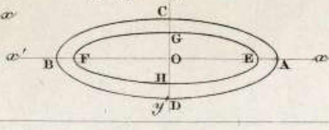


Fig. 77.

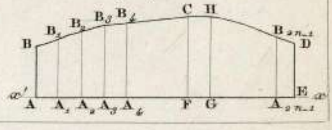


Fig. 78

Fig. 79.

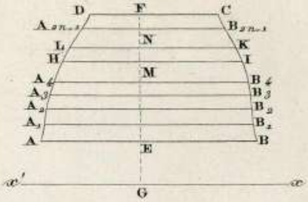


Fig. 80.

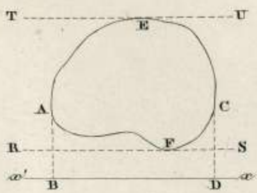


Fig. 81.

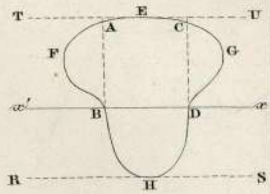


Fig. 82.

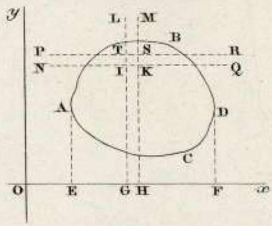


Fig. 83.

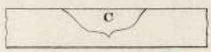


Fig. 84.

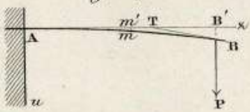


Fig. 86.

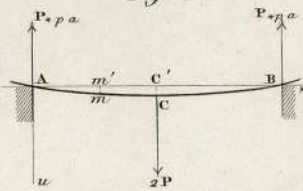


Fig. 85.

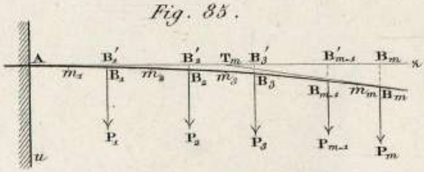


Fig. 87.

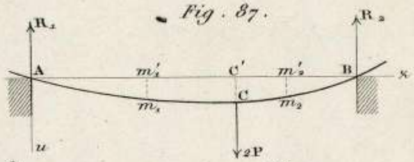


Fig. 88.

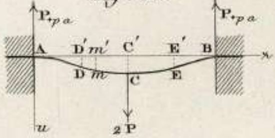


Fig. 89.

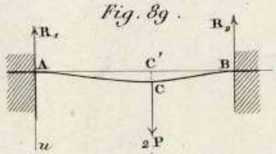


Fig. 90.

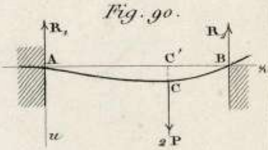


Fig. 91.

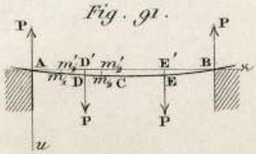


Fig. 92.

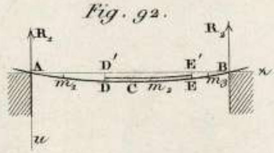


Fig. 93.

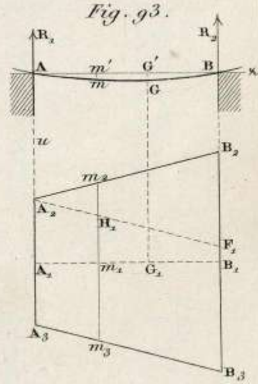


Fig. 94.

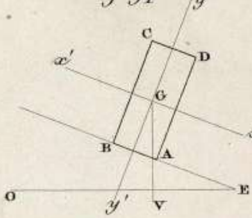


Fig. 95.

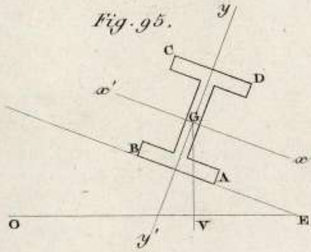


Fig. 96.

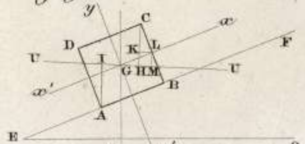


Fig. 97

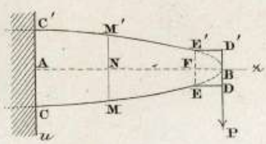


Fig. 98.

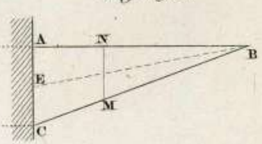


Fig. 110.

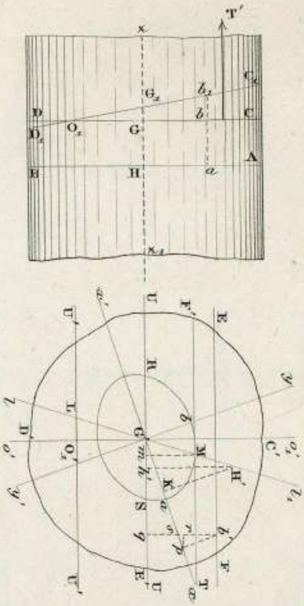


Fig. 111.

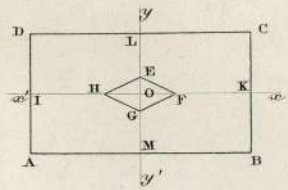


Fig. 112.

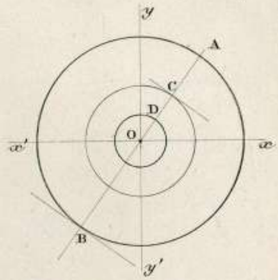


Fig. 113.

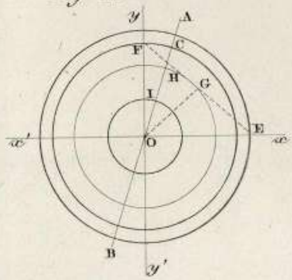


Fig. 116.

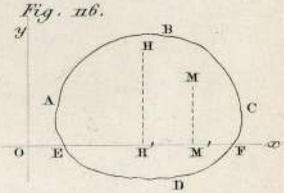


Fig. 114.

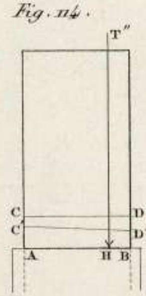


Fig. 115.

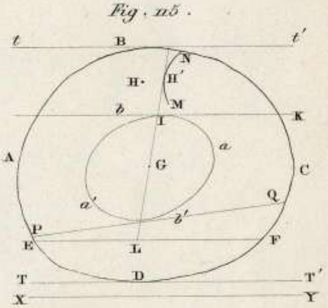


Fig. 117.

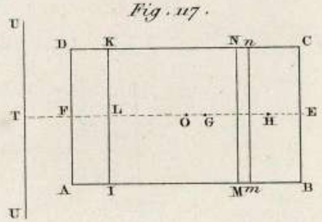


Fig. 118.

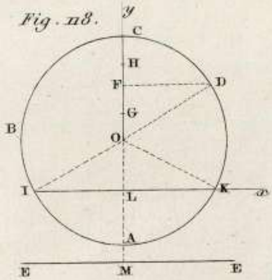


Fig. 119.

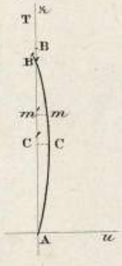


Fig. 120.

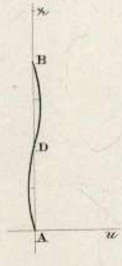


Fig. 121.

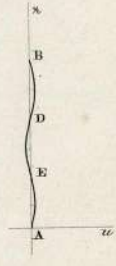


Fig. 122.

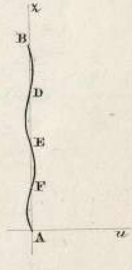


Fig. 123

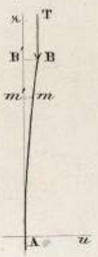


Fig. 124.

Fig. 125.

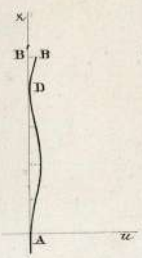


Fig. 126.

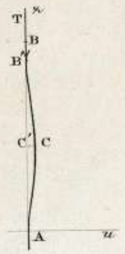


Fig. 127.

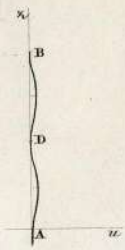


Fig. 128.

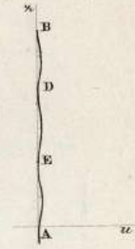


Fig. 99.

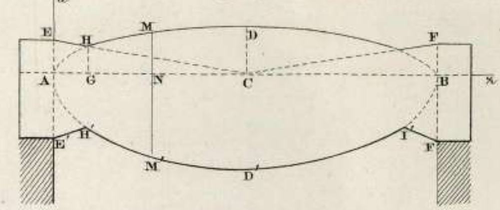


Fig. 102.

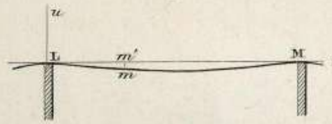


Fig. 103.

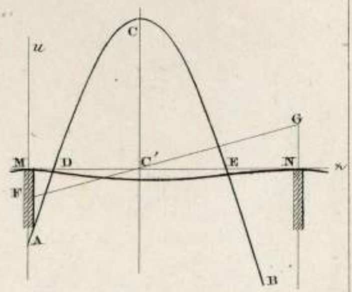


Fig. 100.

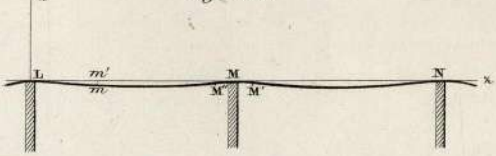


Fig. 101.

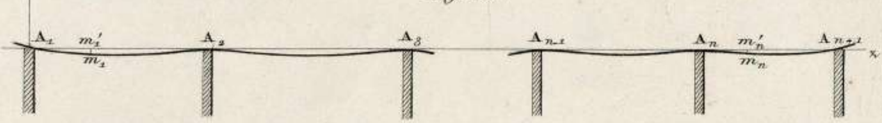


Fig. 105. Fig 104. Fig. 106.

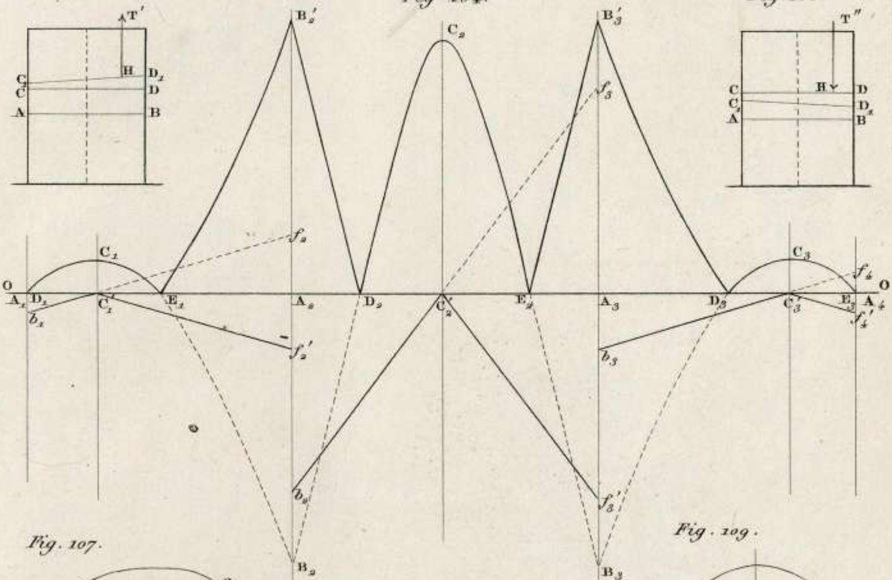


Fig. 107.

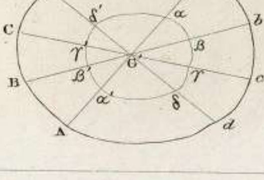


Fig. 108.

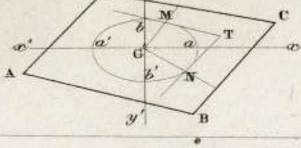


Fig. 109.

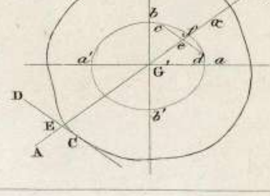


Fig. 129.

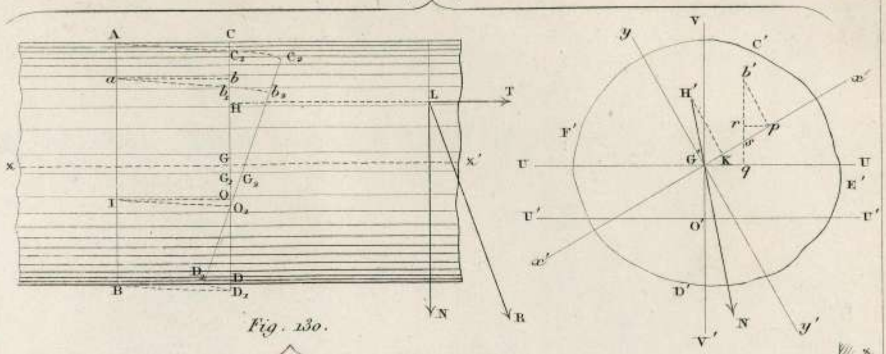


Fig. 130.

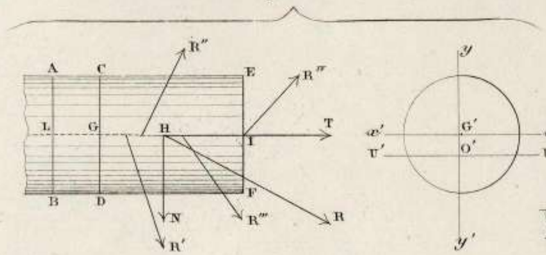


Fig. 131.

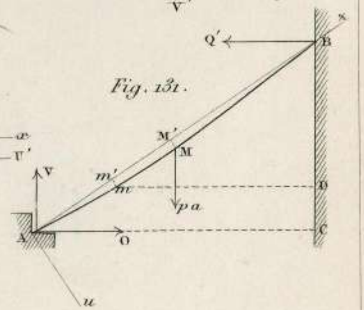


Fig. 132.

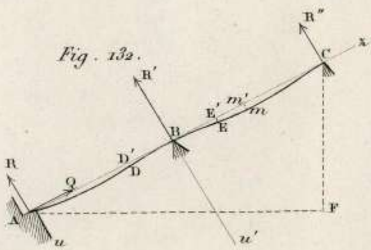


Fig. 133.

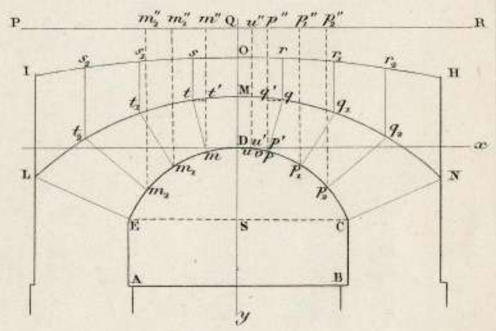


Fig. 134.

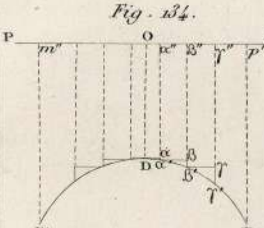


Fig. 135.

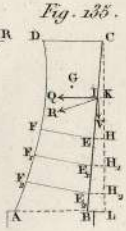


Fig. 137.

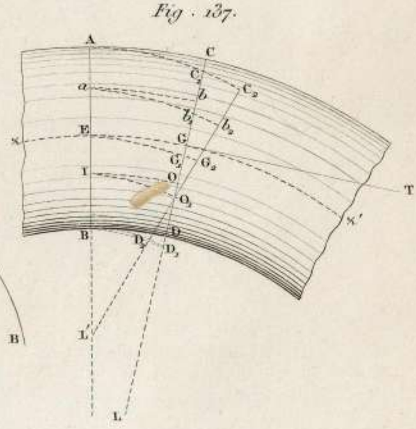


Fig. 136.

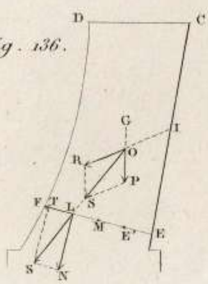


Fig. 138.

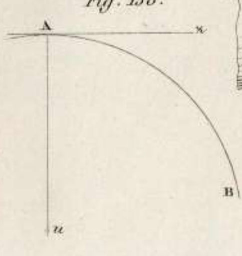


Fig. 139.

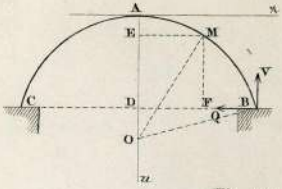


Fig. 141.

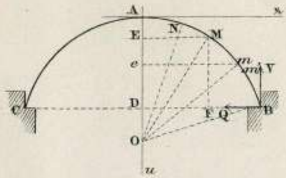


Fig. 144.

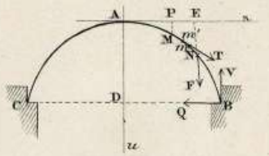


Fig. 140.

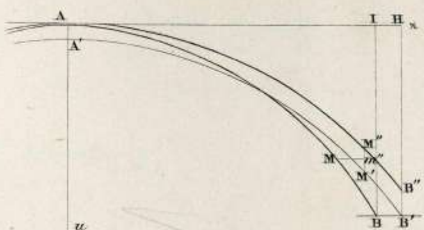


Fig. 142.

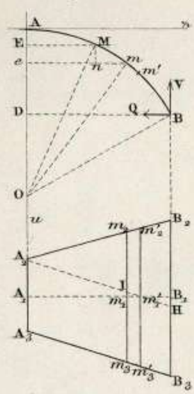


Fig. 143.

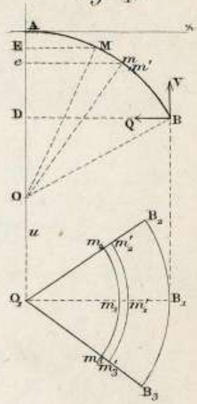


Fig. 145.

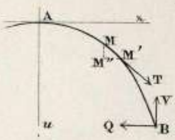


Fig. 146.

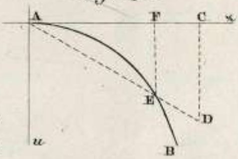


Fig. 147.

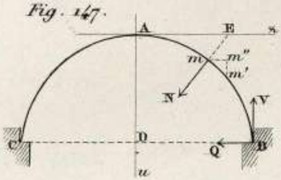


Fig. 148.

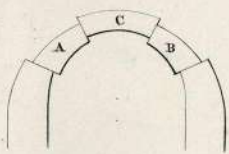


Fig. 149.

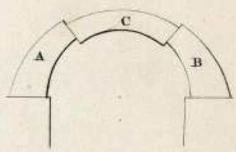


Fig. 150.

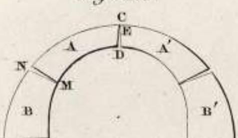


Fig. 151.

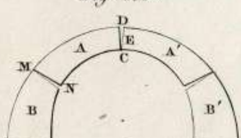


Fig. 152.

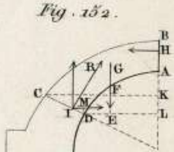


Fig. 153.

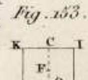


Fig. 154.

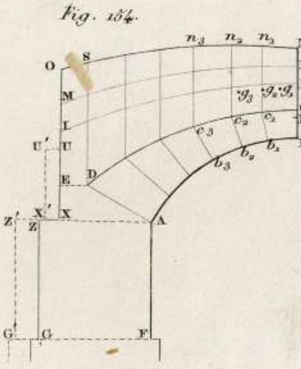
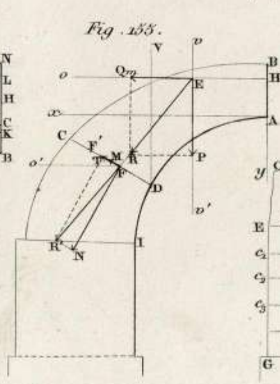


Fig. 155.



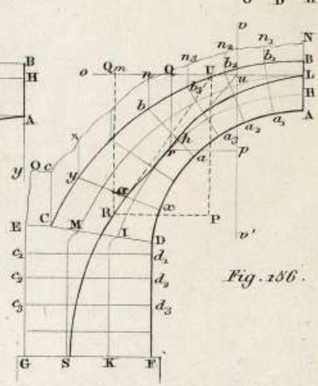


Fig. 156.

Fig. 157.

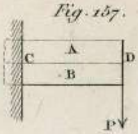


Fig. 158.

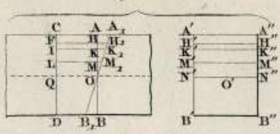


Fig. 159.

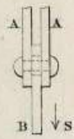


Fig. 160.

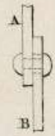


Fig. 161.

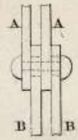


Fig. 162

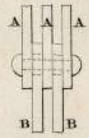


Fig. 163.

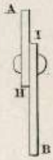


Fig. 164.

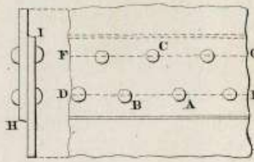


Fig. 168.

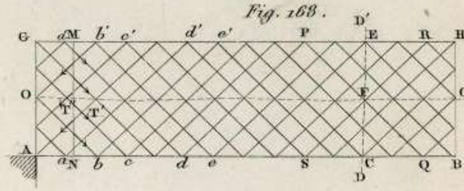


Fig. 169.

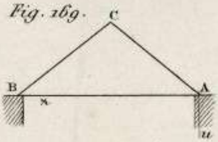


Fig. 170.

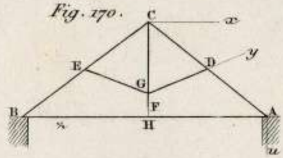


Fig. 171.

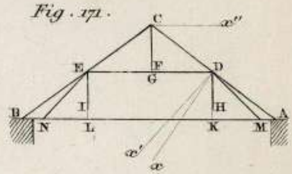


Fig. 172.

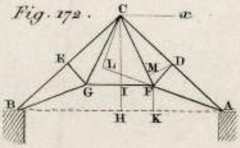


Fig. 173.

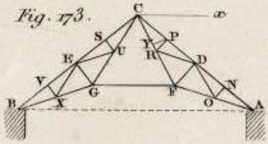


Fig. 174.

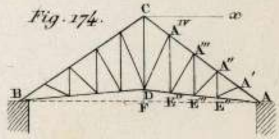


Fig. 175.

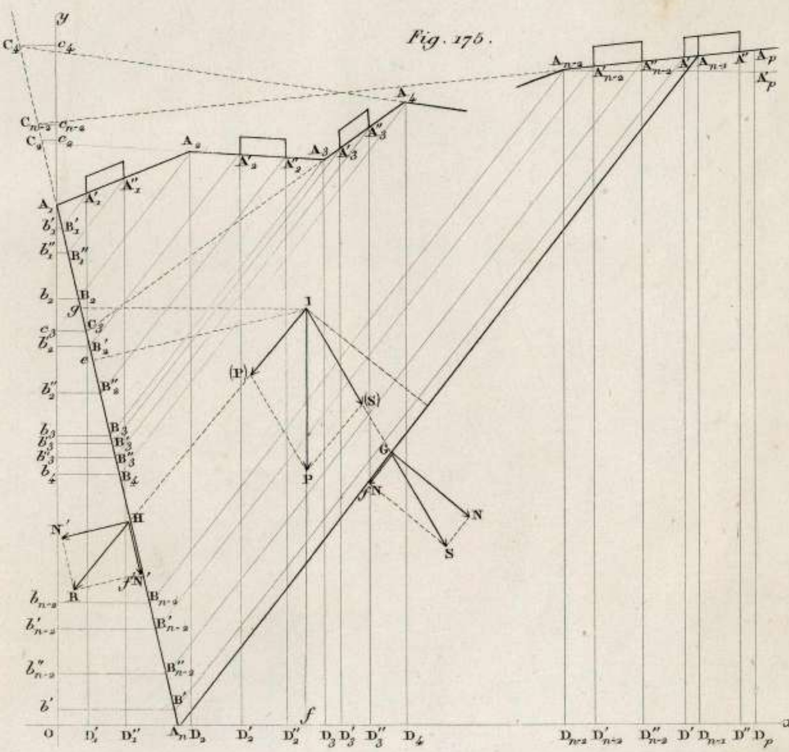


Fig. 165.

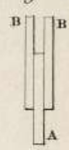


Fig. 166.

Fig. 167

Fig. 176.

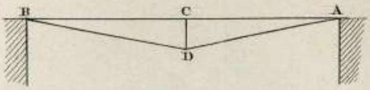


Fig. 177.

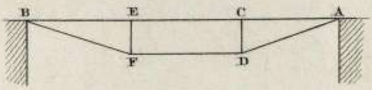


Fig. 178.

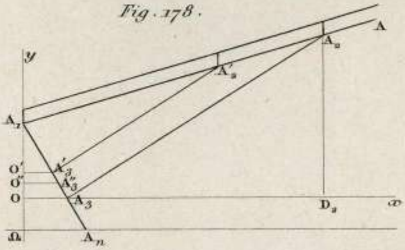


Fig. 185.

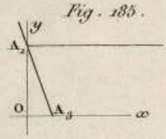


Fig. 179.

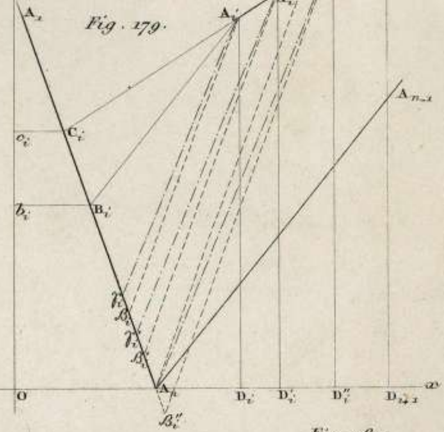


Fig. 180.

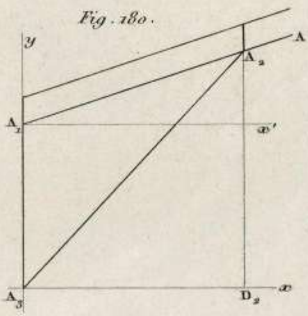


Fig. 181.

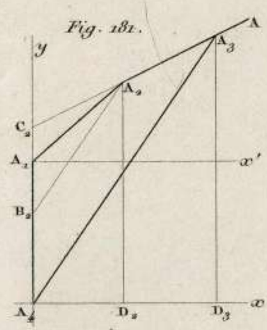


Fig. 182.

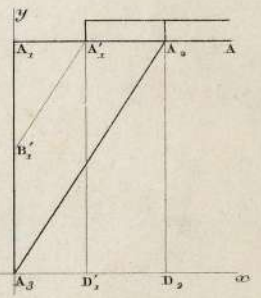


Fig. 183.

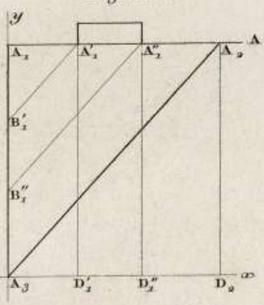


Fig. 184.

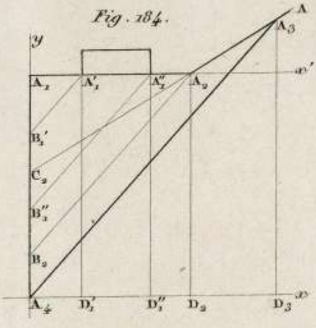


Fig. 186.

Fig. 187.

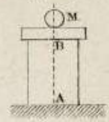


Fig. 188.

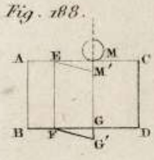


Fig. 189.

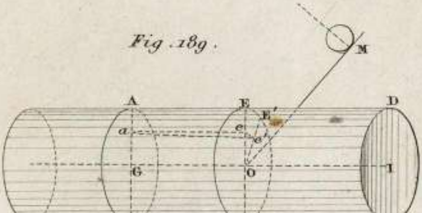


Fig. 190.