

N. 19

L. J. S. ...

33
236

L'ARTE
DI
FABBRICARE

OSSIA

CORSO COMPLETO DI ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

PER GLI INGEGNERI, PER GLI ARCHITETTI, PER I PERITI IN COSTRUZIONE
E PER I PERITI MISURATORI

SOCIETA' DEGLI INGEGNERI
E DEGLI INDUSTRIALI
TORINO

26318

G E O M E T R I A

PRATICA

APPLICATA ALL'ARTE DEL COSTRUTTORE

LAVORO AD USO

degli Ingegneri, degli Architetti, dei Periti in costruzione
e di quanti si trovano applicati alla direzione ed alla sorveglianza di costruzioni
civili, stradali ed idrauliche

UTILE

agli studenti delle scuole d'applicazione per gli Ingegneri
e dei corsi tecnici per Periti in costruzione

PER

CURIONI GIOVANNI

Ingegnere, Architetto e Dottore aggregato al Collegio della Facoltà di scienze fisiche e matematiche della R. Università di Torino, Professore straordinario di costruzioni civili, stradali ed idrauliche nella R. Scuola d'applicazione per gli Ingegneri laureati, e Professore titolare di geometria pratica e costruzioni nel R. Istituto industriale e professionale di Torino, Membro ordinario residente della Società Reale d'agricoltura, industria e commercio, Membro effettivo residente della Società degli Ingegneri e degli Industriali di Torino, e Socio onorario dell'Associazione di Conferenze di Matematiche pure ed applicate di Napoli.



TORINO

Presso **AUGUSTO FEDERICO NEGRO**, Editore

Via Lagrange, 16, piano 1°

1868

GEOMETRIA

PRATICA

APPLICATA ALL'ARTE DEL COSTRUTTORE

LAVORI DI UFF.

DELLO STUDIO DI ARCHITETTURA DEL PAPA IN TORINO

di GIULIO GIOVANNI

con 11 tavole di disegni.

1868

Appartenente alla collezione dei libri della

Proprietà letteraria e artistica.

Fatto il deposito alla R. Prefettura di Torino, il 1° settembre 1868,
con riserva della traduzione.

CURIONI GIOVANNI

Giulio Giovanni, Architetto, ha pubblicato questa opera in Torino, nella tipografia di A. Oddenino e Comp., nel 1868. L'opera è divisa in due parti: la prima tratta della geometria pratica applicata all'arte del costruttore, e la seconda della geometria pratica applicata all'arte del disegnatore. L'opera è divisa in 11 tavole di disegni, e contiene molte figure e dimostrazioni. L'opera è molto utile per gli architetti e i disegnatori.

TORINO

Stampa di GIULIO GIOVANNI

VIA S. PIETRO, 16

Torino, 1868 — Stamp. dei Compositori-Tipografi A. Oddenino e Comp.
via del Teatro d'Angennes, 16.

Nell'eseguimento di costruzioni civili, stradali ed idrauliche continuamente avviene di tracciare allineamenti e linee curve con determinate condizioni, di trovare lunghezze, di misurare superficie e volumi per valutare l'entità di opere solamente progettate oppure di altre già eseguite. Queste operazioni di tracciamento e di misura costituiscono l'oggetto della Geometria pratica applicata all'arte del costruttore, la quale abbraccia un complesso di problemi geometrici le cui risoluzioni attentamente deve studiare chiunque voglia apprendere e professare l'arte di costruire.

Nella prima parte di questo volume verranno esposti i metodi per risolvere i problemi di tracciare allineamenti e di misurare distanze nelle più difficili circostanze della pratica; si tratterà del tracciamento e della misura di quelle linee curve che al costruttore avviene di dover considerare nell'esecuzione dei suoi progetti; e si daranno le norme per la trasformazione dei profili altimetrici a seconda delle opere che si vogliono eseguire sui terreni ai quali essi si riferiscono. Nella seconda parte s'insegnerà come il costruttore possa determinare le superficie, tanto piane quanto curve, che gli può avvenire di dover considerare nell'esercizio della sua carriera. Finalmente nella terza parte si esporrà con quali procedimenti si possono

trovare i volumi di quelle opere che, per comune consenso dei pratici, si valutano in unità cube.

I tracciamenti di strade e di canali, la misura delle superficie dei terreni da occuparsi per l'esecuzione di queste opere, le norme per trovare le superficie delle vólte, e finalmente le regole per la determinazione dei volumi dei movimenti di terra e dei massi murali, costituiranno gli argomenti più importanti da trattarsi nel presente volume; e, non tralasciando di esporre in modo elementare tutte quelle pratiche quistioni che sono suscettive di esserlo, si cercherà per quanto è possibile di redigere un lavoro utile, non solo agli ingegneri, ma a tutti coloro che devono applicarsi allo studio, dar progetti, far eseguire e sorvegliare l'esecuzione di costruzioni civili, stradali e idrauliche.

G. CURIONI

PARTE PRIMA

DELLE LINEE

CAPITOLO I.

Tracciamento di allineamenti e misura di distanze.

1. **Assunto del presente capitolo.** — Negli scritti i quali trattano delle operazioni topografiche, per far apprendere l'uso degli strumenti planimetrici, sempre si espongono parecchi problemi sul tracciamento di allineamenti e sulla misura di distanze accessibili non solo, ma anche in parte o del tutto inaccessibili; e quindi pare che non sia conveniente l'espore in questo volume quanto per comune consenso degli scrittori e per le esigenze stesse della scienza è ormai passato nel dominio della Topografia.

Se però si osserva che i problemi, i quali generalmente vengono trattati nei corsi di operazioni topografiche, sono solamente quelli che si presentano nelle ordinarie e più facili circostanze della pratica, torna agevole il comprendere: come in questo corso di Geometria pratica applicata all'arte del costruttore molto rimanga a dirsi sui tracciamenti di allineamenti e sulle misure di distanze attraverso terreni di difficile natura; e come non possa a meno che riescire della massima utilità pratica la risoluzione di alcuni problemi diretti a servire di guida nelle importanti operazioni relative al tracciamento di strade e di canali allo scoperto ed in galleria su terreni variamente accidentati.

2. **Voltate e deviazioni dei lati di una linea poligonale rilevata per camminamento.** — In una linea poligonale chiamansi *voltate*

gli angoli che i prolungamenti dei lati fanno col lato successivo. Dove il prolungamento giace sulla sinistra del lato successivo si ha una *voltata a destra*, dove giace sulla dritta si ha una *voltata a sinistra*. Così, considerando una linea poligonale $AA_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (fig. 1), e supponendola percorsa partendo da un punto qualunque del lato AA_1 e dirigendosi primitivamente da A verso A_1 , si hanno voltate a destra nei punti A_1, A_3, A_4, \dots , voltate a sinistra nei punti A_2, A_5, \dots .

Se si valutano gli angoli dei lati successivi di una linea poligonale prendendo come lato di destra quello appena percorso e come lato di sinistra quello da percorrersi, tali angoli, sottratti da 180° , danno le voltate che sono a dritta o a sinistra secondo che le accennate differenze risultano positive o negative: così, essendo α_1 l'angolo del lato A_1A col lato A_1A_2 , si ha in A_1 una voltata a destra, perchè, come lo indica la figura, risulta $\alpha_1 < 180^\circ$ e quindi positiva la differenza $180^\circ - \alpha_1$; mentre, essendo α_2 l'angolo del lato A_2A_1 col lato A_2A_3 , si ha in A_2 una voltata a sinistra, perchè riesce $\alpha_2 > 180^\circ$, e quindi negativa la differenza $180^\circ - \alpha_2$. In generale adunque chiamando α_i l'angolo di due lati qualunque a_i ed a_{i+1} di una linea spezzata valutato come sopra venne indicato, ($a_{i+1}a_i$) la voltata nel vertice dell'angolo medesimo, si ha la semplicissima equazione

$$(a_{i+1}a_i) = 180^\circ - \alpha_i \quad (1).$$

La somma algebrica delle voltate per arrivare da un lato ad un altro della linea poligonale si dice *deviazione* del secondo lato sul primo o per rapporto al primo, e, considerando come positive le voltate a destra e come negative quelle a sinistra, la deviazione è a destra o a sinistra secondochè l'accennata somma si trova positiva o negativa. In generale, chiamando $(a_p a_i)$ la deviazione d'un lato qualunque a_p su un altro lato qualunque che gli sta innanzi a_i , si ha

$$(a_p a_i) = (a_{i+1}a_i) + (a_{i+2}a_{i+1}) + (a_{i+3}a_{i+2}) + \dots + (a_{p-1}a_{p-2}) + (a_p a_{p-1}) \quad (2).$$

La deviazione di due lati non è altro che l'angolo formato da due parallele condotte per uno stesso punto ai due lati e pel verso dei prolungamenti: così la deviazione del lato A_1A_2 col lato A_5A_6 , che si ottiene prendendo la somma algebrica delle voltate che hanno luogo in A_2, A_3, A_4 ed A_5 , si può anche ottenere nell'angolo

$a_2'oa_6'$ (fig. 2) che nasce conducendo per un punto qualunque o due rette oa_2' e oa_6' rispettivamente parallele a A_1A_2' e A_5A_6' . Infatti immaginando per o le rette oa_2' , oa_3' , oa_4' , oa_5' e oa_6' parallele a A_1A_2' , A_2A_3' , A_3A_4' , A_4A_5' e A_5A_6' si ha

$$a_2'oa_6' = -a_2'o\alpha_3' + a_3'oa_4' + a_4'oa_5' - a_5'oa_6' = -A_2'A_2A_3' + A_3'A_3A_4' + A_4'A_4A_5' - A_5'A_5A_6',$$

ossia eguale alla somma algebrica delle voltate per arrivare dal lato A_1A_2 al lato A_5A_6 .

5. Coordinate dei vertici di un poligono rilevato per camminamento. — Sia $A_1A_2A_3 \dots A_{n-2}A_{n-1}A_n$ (fig. 3) una linea poligonale di $n-1$ lati determinata per camminamento, ossia mediante la misura dei suoi lati e dei suoi angoli, e fissata di posizione mediante l'angolo del lato A_1A_2 colla retta A_1X . Chiamando

$\frac{a_1}{A_1A_2}, \frac{a_2}{A_2A_3}, \frac{a_3}{A_3A_4}, \dots, \frac{a_{n-2}}{A_{n-2}A_{n-1}}, \frac{a_{n-1}}{A_{n-1}A_n}$ le lunghezze dei lati cogniti $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \overline{A_3A_4}, \dots, \overline{A_{n-2}A_{n-1}}$ ed $\overline{A_{n-1}A_n}$,

$(a_2a_1), (a_3a_2), \dots, (a_{n-2}a_{n-3})$ e $(a_{n-1}a_{n-2})$ le voltate nei vertici A_2, A_3, \dots, A_{n-2} e A_{n-1} facili a dedursi applicando la formola (1) del numero precedente,

(a_1x) la voltata o deviazione di A_1A_2 su A_1X' , ossia l'angolo di A_1A_2 con A_1X ,

riesce agevole il dedurre le deviazioni degli altri $n-2$ lati del poligono per rapporto ad A_1X' , e chiamandole ordinatamente $(a_2x), (a_3x), \dots, (a_{n-2}x), (a_{n-1}x)$ si ha per l'applicazione della formola (2) del numero precedente

$$(a_2x) = (a_1x) + (a_2a_1),$$

$$(a_3x) = (a_1x) + (a_2a_1) + (a_3a_2) = (a_2x) + (a_3a_2),$$

.....

$$(a_{n-2}x) = (a_1x) + (a_2a_1) + \dots + (a_{n-2}a_{n-3}) = (a_{n-3}x) + (a_{n-2}a_{n-3}),$$

$$(a_{n-1}x) = (a_1x) + (a_2a_1) + \dots + (a_{n-2}a_{n-3}) + (a_{n-1}a_{n-2})$$

$$= (a_{n-2}x) + (a_{n-1}a_{n-2}).$$

Ciò premesso, si possono trovare le coordinate di tutti i vertici

della linea poligonale per rapporto alla retta $A_1 X$ ed alla sua perpendicolare $A_1 Y$. Immaginando condotte pei vertici le rette $A_2 A_2'$, $A_3 A_3'$, $A_4 A_4'$, $A_{n-2} A'_{n-2}$, $A_{n-1} A'_{n-1}$, $A_n A_n'$ e le rette $A_2 A_3''$, $A_3 A_4''$, $A_{n-3} A''_{n-2}$, $A_{n-2} A''_{n-1}$, $A_{n-1} A''_n$, le prime perpendicolari e le seconde parallele all'asse XX' , e chiamando x_1 ed y_1 , x_2 ed y_2 , x_3 ed y_3 , x_4 ed y_4 , x_{n-2} ed y_{n-2} , x_{n-1} ed y_{n-1} , x_n ed y_n le coordinate dei vertici A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_{n-2} , A_{n-1} , ed A_n , si hanno le equazioni

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = 0,$$

$$x_2 = \overline{A_1 A_2'}$$

$$y_2 = \overline{A_2' A_2},$$

$$x_3 = \overline{A_1 A_3'} = \overline{A_1 A_2'} + \overline{A_2 A_3''}$$

$$y_3 = \overline{A_3' A_3} = \overline{A_2' A_2} - \overline{A_3'' A_3},$$

$$x_4 = \overline{A_1 A_4'} = \overline{A_1 A_3'} + \overline{A_3 A_4''}$$

$$y_4 = \overline{A_4' A_4} = \overline{A_3' A_3} + \overline{A_4'' A_4},$$

.

$$x_{n-2} = \overline{A_1 A'_{n-2}} = \overline{A_1 A'_{n-3}} + \overline{A_{n-3} A''_{n-2}}$$

$$y_{n-2} = \overline{A'_{n-2} A_{n-2}} = \overline{A'_{n-3} A_{n-3}} + \overline{A''_{n-2} A_{n-2}},$$

$$x_{n-1} = \overline{A_1 A'_{n-1}} = \overline{A_1 A'_{n-2}} + \overline{A_{n-2} A''_{n-1}}$$

$$y_{n-1} = \overline{A'_{n-1} A_{n-1}} = \overline{A'_{n-2} A_{n-2}} - \overline{A''_{n-1} A_{n-1}},$$

$$x_n = \overline{A_1 A_n'} = \overline{A_1 A'_{n-1}} + \overline{A_{n-1} A_n''}$$

$$y_n = \overline{A_n' A_n} = \overline{A'_{n-1} A_{n-1}} + \overline{A_n'' A_n},$$

le quali, per la considerazione dei triangoli rettangoli $A_1 A_2' A_3$, $A_2 A_3'' A_3$, $A_3 A_4'' A_4$, $A_{n-3} A''_{n-2} A_{n-2}$, $A_{n-2} A''_{n-1} A_{n-1}$, $A_{n-1} A''_n A_n$, diventano

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = 0$$

$$x_2 = a_1 \cos(a_1 x)$$

$$y_2 = a_1 \text{sen}(a_1 x)$$

$$x_3 = x_2 + a_2 \cos(a_2 x)$$

$$y_3 = y_2 + a_2 \text{sen}(a_2 x)$$

$$x_4 = x_3 + a_3 \cos(a_3 x)$$

$$y_4 = y_3 + a_3 \text{sen}(a_3 x)$$

.

$$x_{n-2} = x_{n-3} + a_{n-3} \cos(a_{n-3} x)$$

$$y_{n-2} = y_{n-3} + a_{n-3} \text{sen}(a_{n-3} x)$$

$$x_{n-1} = x_{n-2} + a_{n-2} \cos(a_{n-2} x)$$

$$y_{n-1} = y_{n-2} + a_{n-2} \text{sen}(a_{n-2} x)$$

$$x_n = x_{n-1} + a_{n-1} \cos(a_{n-1} x)$$

$$y_n = y_{n-1} + a_{n-1} \text{sen}(a_{n-1} x)$$

(1).

Queste formole permettono di stabilire una regola semplicissima per il calcolo delle coordinate dei vertici di una linea poligonale rilevata per camminamento, e questa regola si riduce a dire: che l'ascissa di un vertice qualunque è eguale all'ascissa del vertice precedente aumentata del prodotto della lunghezza del lato determinato da questi due vertici per il coseno della deviazione di questo stesso lato coll'asse delle ascisse; e che l'ordinata di un vertice qualunque vale l'ordinata del vertice precedente accresciuta del prodotto della lunghezza del lato determinato da questi due vertici per il seno della deviazione dello stesso lato pure coll'asse delle ascisse.

Soventi volte si prende per asse delle ascisse la direzione stessa del primo lato $A_1 A_2$ (fig. 4) della linea poligonale, e per origine di coordinate l'estremo A_1 di questo lato. In questo caso, conducendo da ciascun vertice del poligono due rette, una perpendicolare e

l'altra parallela all'asse A_1X delle ascisse, e ragionando sulla figura 4 precisamente come si è fatto sulla figura 3, si ottengono i seguenti valori delle coordinate x_1 ed y_1 , x_2 ed y_2 , x_3 ed y_3 , x_4 ed y_4 ,, x_{n-2} ed y_{n-2} , x_{n-1} ed y_{n-1} , x_n ed y_n dei vertici $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots, A_{n-2}, A_{n-1}$ ed A_n

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0 \\
 y_1 &= 0 \\
 x_2 &= a_1 \\
 y_2 &= 0 \\
 x_3 &= x_2 + a_2 \cos(a_2 a_1) \\
 y_3 &= a_2 \text{sen}(a_2 a_1) \\
 x_4 &= x_3 + a_3 \cos(a_3 a_1) \\
 y_4 &= y_3 + a_3 \text{sen}(a_3 a_1) \\
 &\dots \dots \dots \\
 x_{n-2} &= x_{n-3} + a_{n-3} \cos(a_{n-3} a_1) \\
 y_{n-2} &= y_{n-3} + a_{n-3} \text{sen}(a_{n-3} a_1) \\
 x_{n-1} &= x_{n-2} + a_{n-2} \cos(a_{n-2} a_1) \\
 y_{n-1} &= y_{n-2} + a_{n-2} \text{sen}(a_{n-2} a_1) \\
 x_n &= x_{n-1} + a_{n-1} \cos(a_{n-1} a_1) \\
 y_n &= y_{n-1} + a_{n-1} \text{sen}(a_{n-1} a_1)
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

e si può stabilire la regola che l'ascissa e l'ordinata di un vertice qualunque sono rispettivamente eguali all'ascissa e all'ordinata del vertice precedente, più il prodotto della lunghezza del lato determinato da questi due vertici per il coseno o per il seno, secondo che trattasi dell'ascissa o dell'ordinata, della deviazione dello stesso lato al primo lato della linea poligonale assunto come asse delle ascisse.

4. Coordinate dei vertici di una rete trigonometrica stabilita fra due punti dati. — Una rete trigonometrica fra due punti A_1 e A_n (fig. 5) trovasi compiutamente determinata allorquando, im-

maginando proiettati tutti i suoi vertici sulla superficie di livello passante per un suo estremo, per esempio per l'estremo A_1 , ed unite tali proiezioni mediante linee rette in modo da avere una serie continua di triangoli, oltre gli angoli di tali triangoli si conosce ancora la lunghezza di uno dei lati che prende il nome di *base*. In tutti i trattati di Topografia e nel volume che fa parte di questo lavoro sull'arte di fabbricare, intitolato *Operazioni topografiche*, lungamente si parla delle triangolazioni topografiche e quindi delle reti trigonometriche, del modo di convenientemente stabilirle, della misura della base e degli angoli, del calcolo dei lati; per cui senz'altro si supporrà che per la rete trigonometrica stabilita fra i due punti A_1 e A_n , della quale si vogliono le coordinate rispetto a due assi ortogonali, già si conoscano tutti gli angoli e tutti i lati.

Per risolvere il proposto quesito si può seguire il metodo che generalmente viene esposto nei trattati di Topografia e che trovasi spiegato nel citato volume sulle operazioni topografiche; oppure si può tenere un'altra via che si fonda su quanto venne detto nei precedenti numeri 2, 3 e 4, e che succintamente trovasi qui tracciata, nell'ipotesi che vogliasi assumere il vertice A_1 per origine di coordinate, la retta A_1X condotta in modo da fare col lato A_1A_2 un angolo dato per asse delle ascisse e la retta A_1Y perpendicolare ad A_1X per asse delle ordinate.

Si consideri la linea poligonale $A_1A_3A_5 \dots A_{n-4}A_{n-2}A_n$; suppongasi che questa linea venga percorsa da A_1 verso A_n ; si calcolino gli angoli aventi i loro vertici nei punti A_3, A_5, \dots, A_{n-4} ed A_{n-2} della linea poligonale accennata, valutando rispettivamente i lati A_3A_4, A_5A_3, \dots ed $A_{n-2}A_{n-4}$ come lati di destra; applicando la formola (1) del numero 2, si trovino le voltate dei diversi lati della stessa linea poligonale; e colla formola (2) dello stesso numero si deducano le deviazioni dei lati medesimi per rapporto ad A_2X' , di cui A_2X è il prolungamento; e finalmente, mediante la regola che deriva dalle formole (1) del numero precedente si calcolino le coordinate di tutti i vertici $A_3, A_5, \dots, A_{n-4}, A_{n-2}$ ed A_n . Quanto si è detto doversi fare per la linea poligonale $A_1A_3A_5 \dots A_{n-4}A_{n-2}A_n$, è pure applicabile alla linea poligonale $A_1A_2A_4 \dots A_{n-3}A_{n-1}A_n$; così si ottengono le coordinate dei vertici $A_2, A_4, \dots, A_{n-3}, A_{n-1}$, e per la seconda volta si hanno quelle del punto A_n . Essendo esatte le misure determinanti la rete trigonometrica rappresentata nella figura 5 ed essendo esatti tutti i calcoli instituiti, le coordinate del punto A_n determinate in due diversi modi devono essere eguali. Nel caso che esista fra esse un notevole divario, bisogna rifare i calcoli,

e trovando i risultati già ottenuti conviene ripigliare l'operazione della misura degli angoli e della base. Quando è piccola la differenza fra i due valori delle ascisse e delle ordinate del punto A_n ottenute considerandolo successivamente come estremo della linea poligonale $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1} A_{n-2} A_n$ e della linea poligonale $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-3} A_{n-4} A_n$, si prende per ascissa la media aritmetica dei valori delle due ascisse poco diverse, o per ordinata la media aritmetica dei valori delle due ordinate.

Invece di prendere per asse della ascisse una retta AX la quale faccia col lato $A_1 A_2$ della rete trigonometrica un dato angolo, si può a dirittura prendere quest'asse nella direzione dello stesso lato $A_1 A_2$.

5. Tracciare sul terreno l'allineamento determinato da due punti molto lontani, e tali che da uno di essi non si possa scoprire l'altro. — Questo problema ben di frequente si presenta all'ingegnere costruttore nelle operazioni pel tracciamento di strade e di canali che devono passare per punti obbligati, e quando su terreni accidentati e montuosi occorre di segnare la direzione ossia la traccia del piano verticale, in cui deve trovarsi l'asse di una galleria. La sua risoluzione non è difficile, ed ecco quali sono i procedimenti che a seconda delle circostanze locali si possono seguire nella pratica.

1° Essendo A e U (*fig. 6*) i due punti determinanti l'allineamento da tracciarsi, si stabilisca fra essi una linea poligonale $ABC \dots LMN \dots STU$ del minor numero possibile di lati, ma tale che questi lati cadano su un terreno facile e poco accidentato onde poterli facilmente misurare; e si misurino tutti i lati e tutti gli angoli di questa linea poligonale. Mediante la formola (1) del numero 2 si possono trovare le voltate che hanno luogo nei diversi vertici dell'accennata linea poligonale; colla formola (2) dello stesso numero si possono ottenere le deviazioni di tutti i lati della stessa linea poligonale per rapporto al primo lato AB nella cui direzione conviene assumere l'asse AX delle ascisse; e finalmente, o colle formole (2) del numero 3 o colla regola che da queste formole emana, si possono calcolare le coordinate di tutti i suoi vertici. Essendo X ed Y i trovati valori delle coordinate \overline{AU}_1 e $\overline{U}_1 U$,

φ l'angolo $U_1 A U$ che l'allineamento da tracciarsi AU fa coll'asse delle ascisse AX , ossia colla direzione del lato AB , si ha

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{Y}{X} \quad (1);$$

e, una volta calcolato l'angolo φ mediante questa semplicissima formola, si può dire che l'allineamento AU è determinato, giacchè si conosce l'angolo che esso fa colla direzione nota AB. Per effettivamente tracciare quest'allineamento sul terreno s'incominci dal venire in A, e mediante un buon goniometro si facciano collocare dei segnali nella direzione che coll'allineamento AB fa l'angolo trovato φ . Una volta collocati alcuni segnali, l'allineamento può essere prolungato ponendone successivamente dei nuovi nella direzione di almeno due di quelli che già si trovano a sito, e, continuando il lavoro fino al punto U, si dirà che esso venne ben eseguito quando questo punto si trova nella direzione dei segnali piantati e che sono visibili a poca distanza dal detto punto U sul prolungamento di AU.

Per controllare l'esattezza dell'operazione, ossia per essere sicuri che l'angolo φ , calcolato coll'ultima formola, è proprio quello che la direzione da tracciarsi AU fa col lato AB, si può stabilire una seconda linea poligonale AB' C' L' M' N' T' S' U fra i due punti dati A e U; calcolare le coordinate dei suoi vertici per rapporto agli assi coordinati AX ed AY; e trovare così una seconda volta le coordinate del punto U le quali, per l'esattezza del lavoro, non dovranno essere sensibilmente diverse da quelle ottenute considerando la linea poligonale ABC LMN STU. Trovandosi una differenza notevole fra le coordinate del punto U ottenute nei due diversi modi indicati, sarà indispensabile rifare i calcoli e, qualora questo non basti per ritrovare la causa d'errore, bisognerà riprendere l'operazione sul terreno. Se poi la discrepanza fra le indicate coordinate è assai piccola, si assumano come vera ascissa e come vera ordinata le medie aritmetiche fra i due valori delle ascisse ed i due valori delle ordinate trovate.

2° Si presentano talvolta delle circostanze nelle quali, dovendosi collocare un segnale in un determinato sito dell'allineamento da tracciarsi, riesce impossibile vedere da questo sito due dei segnali già collocati. Quando questo avviene può convenire di procedere come segue: da un punto qualunque di una delle linee poligonali che vanno dall'estremo A all'altro U dell'allineamento che si vuol tracciare, e generalmente da un vertice M, si conduca sul terreno un allineamento MZ il quale facilmente si possa percorrere; e si misuri l'angolo LMZ che quest'allineamento fa col lato ML della linea poligonale cui appartiene il punto M. S'immagini condotta la retta MX_1 parallela all'asse delle ascisse, si ritengano le denominazioni già stabilite per le coordinate del punto U, e si chiamino:

x' ed y' le due coordinate \overline{AM}_1 ed \overline{M}_1M del punto M;

α l'angolo LMZ;

a il lato \overline{ML} ;

z la distanza \overline{MO} ;

X' ed Y' le due coordinate \overline{AO}_1 ed \overline{O}_1O del punto d'incontro dell'allineamento MZ colla direzione AU.

Per determinare la voltata $(za) = ZMM'$ di MZ su LM si ha la formola

$$(za) = 180^\circ - \alpha \quad (2),$$

e la deviazione (zx) di MZ per rapporto all'asse delle ascisse vien data da

$$(zx) = (ax) + (za) \quad (3).$$

Trovata la deviazione (zx) , riesce agevole ottenere le coordinate del punto O in cui la retta MZ interseca la retta AU. Perciò considerando la linea poligonale che incomincia in A e che termina al punto O, per quanto si è detto al numero 3, si hanno le equazioni

$$X' = x' + z \cos(zx)$$

$$Y' = y' + z \operatorname{sen}(zx),$$

le quali, per essere il rapporto $\frac{X'}{Y'}$ eguale al rapporto $\frac{X}{Y}$ fra l'ascissa e l'ordinata del punto U a motivo della similitudine dei due triangoli AO_1O ed AU_1U , conducono all'equazione

$$\frac{x' + z \cos(zx)}{y' + z \operatorname{sen}(zx)} = \frac{X}{Y},$$

da cui si ricava

$$z = \frac{y' - x' \frac{Y}{X}}{\frac{Y}{X} \cos(zx) - \operatorname{sen}(zx)} \quad (4).$$

Il valore della lunghezza z , a cui conduce questa formola, si porti

orizzontalmente sul terreno nella direzione dell'allineamento MZ , il quale fa coll'allineamento ML l'angolo z , e nell'estremo di tale lunghezza si ha un punto dell'allineamento determinato dai due punti A ed U .

Come si è determinato il punto O si possono determinare quanti altri punti si vogliono dell'allineamento AU ; ed il problema può ancora essere risoluto quando si presentano tali accidentalità di terreno da non bastare un allineamento unico per andare da un vertice qualunque M di una linea poligonale stabilita fra i punti dati A ed U ad intersecare l'allineamento da essi determinato. In questo caso si può stabilire una linea poligonale secondaria, come $MnopZ'$ che, partendo dal vertice qualunque M di una linea poligonale già stabilita fra i punti dati A ed U , vada ad intersecare coll'ultimo suo lato l'allineamento da questi punti determinato; trovare le deviazioni di tutti i lati della linea poligonale secondaria sull'asse delle ascisse; e calcolare le coordinate dei suoi vertici per avere l'ascissa X' e l'ordinata Y' del punto O in cui essa incontra la linea AU in funzione della distanza $\overline{pO} = z$ la cui lunghezza verrà determinata coll'ultima formola, quando intendasi che le coordinate x' ed y' che in essa si trovano siano quelle di quel vertice p della linea poligonale secondaria dal quale parte la direzione pZ' intersecante la direzione AU .

5° Soventi volte si presentano delle circostanze nelle quali, nè torna comoda nè riesce possibile la misura di tutti i lati di una linea poligonale stabilita fra i due estremi dell'allineamento da tracciarsi. Quando questo avviene si può stabilire una rete di triangoli fra i due punti A ed U (*fig. 7*), misurare un lato di questa rete, prendere quelle misure d'angoli che sono sufficienti per determinarla e per controllarne l'esattezza, calcolare tutti i suoi lati e tutti gli angoli di cui non venne fatta la misura e trovare (num. 4) le coordinate dei vertici per rapporto ai due assi ortogonali OX ed OY , il primo dei quali si può assumere nella direzione del lato AB della rete triangolare e coll'origine nel punto A . Ritenendo le denominazioni già stabilite per indicare le due coordinate del punto U e l'angolo di AU con AX , si può stabilire l'equazione (1) e dedurre da essa l'angolo $XAU = \varphi$, il quale, venendo con un goniometro nel punto del terreno rappresentato sulla figura in A , assai facilmente può essere costruito e permettere così di collocare alcuni segnali nella direzione AU da cui, come già si è detto in questo numero, si potrà dedurre il completo tracciamento dell'allineamento AU quando risulti possibile di porre successivamente dei nuovi

segnali, nella direzione di almeno due di quelli che già si trovano a posto, in diversi siti del terreno che trovasi attraversato dall'allineamento determinato dai due punti A ed U.

Allorquando le circostanze locali sono tanto sfavorevoli al facile tracciamento dell'allineamento AU, che in qualche luogo riesca impossibile di collocare un segnale appoggiandosi su alcuni dei segnali già posti a sito, può l'operatore togliersi d'imbarazzo col metodo che già venne esposto in questo numero; tracciando cioè l'allineamento MZ, misurando l'angolo $\text{LMZ} = \alpha$ di quest'allineamento col lato ML, calcolando mediante la formola (2) la voltata (za) di MZ su LM e mediante la formola (3) la deviazione (zx) di MZ per rapporto all'asse delle ascisse, trovando la distanza $\overline{\text{MO}} = z$ coll'applicare la formola (4), e finalmente portando questa distanza sul terreno da M in O nella direzione MZ.

4^a Prevedendosi che possa riuscire operazione difficile la misura della distanza $\overline{\text{MO}}$, si può giungere a determinare il punto O coll'intersecazione di due allineamenti MZ ed FZ' da condursi per due vertici qualunque M ed F della rete triangolare. L'allineamento MZ si può assumere in modo da fare col lato ML dell'accennata rete un angolo dato $\text{LMZ} = \alpha$, ed è l'angolo $\text{EFZ}' = \beta$ che si deve determinare in modo da risultare nella direzione AU l'intersecazione O delle due direzioni MZ ed FZ'. Si chiamino perciò:

x'' ed y'' le due coordinate del vertice F;

z' la distanza $\overline{\text{FO}}$;

($z'x$) la deviazione di FZ' per rapporto all'asse delle ascisse, e si conservino le denominazioni già stabilite per indicare le coordinate dei punti U, O ed M, la distanza $\overline{\text{MO}}$, e la deviazione di MZ per rapporto all'asse delle ascisse. Abbassando dai punti U ed O le due perpendicolari $\overline{\text{UU}}_1$ ed $\overline{\text{OO}}_1$ sull'asse AX, risultano i due triangoli simili AU_1U e AO_1O dai quali immediatamente si ricava

$$\frac{X'}{Y'} = \frac{X}{Y},$$

d'onde

$$X' = \frac{X}{Y} Y' \quad (5).$$

Considerando la linea poligonale ABD LMO, le due coordinate $\overline{\text{AO}}_1 = X' = \frac{X}{Y} Y'$ ed $\overline{\text{O}}_1\text{O} = Y'$ del suo punto O sono date da

$$\frac{X}{Y} Y' = x' + z \cos(zx)$$

$$Y' = y' + z \operatorname{sen}(zx);$$

da queste due equazioni del primo grado fra le incognite z ed Y' agevolmente si deduce

$$Y' = \frac{Y y' - x' \operatorname{tang}(zx)}{\frac{X}{Y} - \operatorname{tang}(zx)} \quad (6);$$

e quindi per l'equazione (5) si ha

$$X' = \frac{y' - x' \operatorname{tang}(zx)}{\frac{X}{Y} - \operatorname{tang}(zx)} \quad (7).$$

Ora che si possono ritenere siccome quantità note le due coordinate X' ed Y' del punto O , si consideri la linea poligonale $AC \dots EF O$ e fra le coordinate del suo estremo O , il lato \overline{FO} e la deviazione di questo lato per rapporto all'asse delle ascisse, si hanno le due equazioni

$$X' = x'' + z' \cos(z'x)$$

$$Y' = y'' + z' \operatorname{sen}(z'x),$$

dalle quali si deducono queste altre

$$z' \cos(z'x) = X' - x''$$

$$z' \operatorname{sen}(z'x) = Y' - y''.$$

Dividendo la seconda di queste equazioni per la prima si ottiene la formola

$$\operatorname{tang}(z'x) = \frac{Y' - y''}{X' - x''} \quad (8),$$

mediante la quale si può trovare la deviazione di FZ' per rapporto all'asse delle ascisse. Essendo ora nota la deviazione $F'FX_2$ del lato

EF per rapporto all'asse delle ascisse, riesce agevole il dedurre l'angolo F'FZ' e quindi l'angolo domandato EFZ' = β .

Una volta stabilito di quanti gradi deve essere l'angolo LMZ = α e dedotto in conseguenza l'angolo EFZ' = β , si va sul terreno e si costruiscono questi due angoli, il primo colla direzione nota ML, ed il secondo colla direzione pure nota FE. Si otterranno così le due direzioni MZ ed FZ' nella cui intersezione si ha un punto O che appartiene all'allineamento AB. Il metodo che ha condotto a determinare il punto O può servire a determinare quanti altri punti si vogliono.

6. Determinare la distanza orizzontale fra due punti molto lontani e tali che da uno di essi non si possa scoprire l'altro.

— Questo problema, al pari di quello del numero precedente, è della massima importanza per un ingegnere costruttore, il quale debba dar opera allo studio e quindi all'esecuzione di strade e di canali sopra terreni di natura un po' difficile. Esso serve a trovare le distanze orizzontali di quei punti fra i quali trovasi un terreno su cui riesce impossibile l'eseguire delle misure dirette, e quindi benissimo si presta ad ottenere le lunghezze di trincee e di gallerie da aprirsi fra due punti dati in terreni e sotto colline o sotto montagne presentanti accidentalità le più svariate e le più sfavorevoli. La risoluzione di questo problema è della massima facilità, ed ecco con quali norme l'ingegnere deve procedere in ogni caso per arrivarvi in modo ordinato e sicuro.

1° Quando fra i due punti A ed U (*fig. 6*), determinanti le verticali passanti pei due punti estremi della distanza orizzontale che vuolsi trovare, è possibile stabilire una linea poligonale ABC LMN STU, misurare tutti i suoi lati e tutti i suoi angoli, si possono mandare ad effetto queste operazioni di stabilimento della linea poligonale e di misura dei lati e degli angoli, ed istituire quindi i calcoli che già vennero indicati nel precedente numero per giungere ad ottenere le due coordinate $\overline{AU}_1 = X$ ed $\overline{U}_1U = Y$ dell'estremo U della distanza da valutarsi per rapporto a due assi coordinati ortogonali AX ed AY, il primo dei quali si suppone assunto della direzione del primo lato AB della linea poligonale. Ottenuti i valori di X e di Y, immediatamente si deduce la distanza orizzontale D fra i due punti A ed U dalla considerazione del triangolo rettangolo AU₁U, e ponendo quindi

$$D = \sqrt{X^2 + Y^2}.$$

Per assicurarsi che il valore di D calcolato con questa formola è la vera distanza domandata, si può stabilire la seconda linea poligonale $AB'C'$ $L'M'N'$ $T'S'U$ e servirsi delle lunghezze dei suoi lati e delle ampiezze dei suoi angoli onde trovare due nuovi valori X' ed Y' delle coordinate del punto U per rapporto agli stessi assi AX ed AY . Si può dire: che l'operazione condusse a risultati i più soddisfacenti possibili se i due valori di X' e di Y' sono rispettivamente eguali a quelli di X e di Z ; che l'operazione venne anche ben fatta se i valori di X' e di Y' presentano lievi discrepanze coi valori di X e di Y ; finalmente che l'operazione in qualche sua parte è erronea e che per conseguenza deve essere rifatta quando i valori di X' e di Y' sono sensibilmente diversi dai valori di X e di Y . Verificandosi il caso in cui l'operazione si può ritenere come ben fatta, per essere i valori di X' e di Y' poco differenti dai valori di X e di Y , si calcola nuovamente la distanza orizzontale D' fra i due punti A e U mediante la formola

$$D' = \sqrt{X'^2 + Y'^2}$$

e si assume per vera distanza fra gli accennati punti la media aritmetica fra i due valori di D e di D' .

2° Presentandosi delle circostanze locali per cui non riesce operazione comoda la misura dei lati di una linea poligonale stabilita fra i due punti A ed U , è necessario aver ricorso ad una rete triangolare che partendo dal punto A vada a terminare al punto U (*fig. 7*). Una volta scelti tutti i vertici di questa rete triangolare e prese le misure della base e degli angoli necessari a determinarla ed a somministrare un sufficiente numero di mezzi di controllo, colle norme che vennero date al numero 4 si calcolano al tavolino le coordinate di tutti i suoi vertici, e quindi anche quelle del punto U per rapporto ai due assi ortogonali AX ed AY . Ritenendo le denominazioni già stabilite per indicare le lunghezze delle due coordinate del punto U , colla prima formola posta in questo numero si può dedurre la lunghezza D ossia la dimandata distanza fra i punti A ed U .

7. **Trovare l'angolo di due direzioni che vengono ad intersecarsi in un punto inaccessibile ed invisibile, e fissare la posizione di questo punto.** — Siano AB ed UV (*fig. 8*) i due allineamenti ossia le due direzioni di cui vuoi trovare l'angolo, nell'ipotesi che la loro intersezione Z abbia luogo in un punto inaccessibile ed invisibile.

1° Supponendo innanzi tutto che fra A ed U si possa stabilire una linea poligonale A C D STU facile a percorrersi misurando tutti i lati e tutti gli angoli, si misurino effettivamente questi elementi e non si dimentichi nè l'angolo CAB che il suo primo lato AC fa colla direzione AB, nè l'altro VUT della direzione UV col l'ultimo lato UT. Mediante questi dati è possibile di calcolare le voltate nei diversi vertici A, C, D, S, T ed U della linea poligonale BACD STUV applicando la formola (1) del numero 2 e le deviazioni dei diversi lati AC, CD, ST, TU ed UV per rapporto al lato BA colla formola (2) dello stesso numero. La deviazione di UV su BA non è altro che l'angolo VZX il quale, sottratto da 180°, dà l'angolo domandato VZB.

Per fissare la posizione dell'intersezione Z delle due direzioni BA e VU si può assumere siccome incognita la distanza \overline{AZ} , la quale assai facilmente può essere determinata col seguente processo. Prendendo per origine di coordinate ortogonali il punto A e l'asse delle ascisse positive nella direzione AX del prolungamento di AB, si calcolino le coordinate di tutti i vertici della linea poligonale A C D STU per avere anche quelle del punto U, e si chiamino:

X ed Y le coordinate \overline{AU}_1 ed \overline{U}_1V di questo punto,

θ l'angolo trovato VZB,

ξ la distanza domandata \overline{AZ} .

Dal triangolo UU_1Z , rettangolo in U_1 , si ha

$$\overline{U}_1Z = \frac{Y}{\text{tang } \theta},$$

e quindi risulta che il valore di ξ , siccome equivalente alla somma di \overline{AU}_1 con \overline{U}_1Z , vien dato da

$$\xi = X + \frac{Y}{\text{tang } \theta}.$$

Volendosi trovare anche la distanza $\overline{UZ} = v$, immediatamente si può essa dedurre dal triangolo rettangolo UU_1Z , e si ha

$$v = \frac{Y}{\text{sen } \theta}.$$

2° Quando riesce impossibile od anche solamente incomoda l'operazione di misurare tutti i lati della linea poligonale A C D

STU, si stabilisce una rete triangolare fra i punti A ed U nel modo espresso dalla figura 9; si ha l'avvertenza di misurare, oltre un lato della rete e tutti gli angoli necessari a determinarla ed a controllare l'esattezza del lavoro, l'angolo della direzione AB con uno dei lati AC ed AD concorrenti in A non che l'altro della direzione UV con uno dei due lati US ed UT concorrenti in U. Una volta calcolate le lunghezze dei lati della rete triangolare e ottenuti gli angoli che essi fanno tra di loro, si può considerare una qualunque delle linee poligonali costituite dai diversi lati della rete ed estendentisi da A in U, e così la risoluzione del problema trovasi ricondotta a quella che venne già data nell'ipotesi d'una linea poligonale direttamente stabilita fra gli accennati punti A ed U.

8. Tracciamento di una linea poligonale sul terreno. — Questo problema è uno di quelli che più di frequente si presentano all'ingegnere applicato alla costruzione di strade e di canali, e generalmente esso consiste nel determinare una serie di punti posti su allineamenti diversi di cui si conoscono le lunghezze orizzontali e facenti fra loro angoli dati. Le circostanze locali sono quelle che rendono più o meno difficile la risoluzione del problema, e basterà l'esaminare alcune di queste per ben far comprendere come in ogni caso si deve procedere.

Suppongasi di dover stabilire una linea poligonale fra i due punti A ed U (*fig. 10*), che questa linea poligonale debba trovarsi in cinque allineamenti diversi AB, BC, CD, DE, e EU, che il primo allineamento AB debba fare un angolo noto $BAM = \alpha_1$ con una direzione prestabilita AM, che le distanze orizzontali fra i vertici A e B, B e C, C e D, D ed E ed E ed U debbano rispettivamente essere a_1, a_2, a_3, a_4 ed a_5 , e finalmente che siano $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ed α_5 le ampiezze degli angoli aventi i loro vertici nei punti B, C, D ed E, e misurati prendendo rispettivamente le direzioni BA, CB, DC ed ED come lati di destra.

Venendo a far stazione nel punto A con un teodolite, e facendo colla direzione AM l'angolo dato α_1 , immediatamente si può tracciare sul terreno la direzione AB' del primo lato della linea poligonale, e nell'ipotesi che lungo questa direzione si possa facilmente misurare, si determina l'estremo B dell'accennato primo lato portando sulla direzione AB' ed a partire da A la distanza orizzontale $AB = a_1$. Fissata la posizione del punto B, basta far stazione in esso col teodolite per tracciare l'allineamento BC' inclinato a BA dell'angolo α_2 e sul quale deve trovarsi il punto C avente dal punto B la distanza orizzontale a_2 . Se lungo BC' si può comodamente

misurare, si determina il punto C col metodo seguito per trovare il vertice B; ma se esistono lungo BC' degli ostacoli che impediscono la misura diretta, questo metodo non riesce applicabile ed allora il problema può essere risoluto col seguente metodo.

Sulla direzione BC' prendasi un punto N tale che riesca possibile il misurare la distanza orizzontale $\overline{BN} = b$, e quindi si faccia la differenza $a_2 - b = c$ per avere la distanza orizzontale fra il punto N ed il punto C che vuoi si determinare. Pel punto N conducasi un allineamento qualunque NO, si misuri l'angolo $\text{ONC}' = \alpha$, su quest'allineamento si scelga un punto P, e si misuri la distanza orizzontale $\overline{NP} = d$. Nel triangolo NPC sono noti il lato $\overline{NC} = c$, il lato $\overline{NP} = d$ e l'angolo $\text{PNC} = \alpha$, per cui riesce facile il determinare i due angoli $\text{NPC} = \gamma$ e $\text{PCN} = \delta$. Dalle notissime proprietà che in un triangolo qualunque la somma di due angoli è supplemento del terzo, e che i seni degli angoli sono proporzionali ai lati opposti, si ricavano le seguenti due equazioni determinatrici di γ e di δ .

$$\frac{1}{2}(\gamma + \delta) = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha \quad (1),$$

$$\frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \delta} = \frac{c}{d} \quad (2).$$

Trasformando l'equazione (2) in

$$\frac{\text{sen } \gamma + \text{sen } \delta}{\text{sen } \gamma - \text{sen } \delta} = \frac{c + d}{c - d},$$

si ricava

$$\frac{\text{tang } \frac{1}{2}(\gamma + \delta)}{\text{tang } \frac{1}{2}(\gamma - \delta)} = \frac{c + d}{c - d},$$

o ancora

$$\frac{\cot \frac{1}{2}\alpha}{\text{tang } \frac{1}{2}(\gamma - \delta)} = \frac{c + d}{c - d},$$

d'onde

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(\gamma - \delta) = \frac{c-d}{c+d} \cot \frac{1}{2} \alpha \quad (3).$$

Ponendo nelle equazioni (1) e (3) i dati del problema invece delle lettere c , d ed α , si ottengono le ampiezze m° ed n° degli angoli $\frac{1}{2}(\gamma + \delta)$ ed $\frac{1}{2}(\gamma - \delta)$, per cui, avendosi le equazioni

$$\frac{1}{2}(\gamma + \delta) = m^\circ, \quad \frac{1}{2}(\gamma - \delta) = n^\circ,$$

basta ordinatamente combinarle per somma e per sottrazione onde ottenere

$$\gamma = m^\circ + n^\circ, \quad \delta = m^\circ - n^\circ.$$

Una volta determinato l'angolo $\text{NPC} = \gamma$, basta far stazione in P con un goniometro, costruire su PN l'indicato angolo e far tracciare la direzione PC'' . L'intersezione degli allineamenti BC' e PC'' somministra il punto domandato C.

Si presentano talvolta tali circostanze che rendono impossibile il tracciamento dell'allineamento BC' nel sito in cui deve trovarsi il punto C, ed in questo caso si può risolvere il problema determinando due allineamenti diversi dall'allineamento BC' e sui quali debba contemporaneamente trovarsi il punto C. Perciò si può condurre da N un allineamento NO_1 , misurare l'angolo $\text{CNO}_1 = \alpha_1$, scegliere sul detto allineamento un punto P_1 , trovare la distanza orizzontale $\overline{\text{NP}}_1 = d_1$ e quindi considerare il triangolo CNP_1 onde dedurre l'angolo $\text{NP}_1\text{C}_1'' = \gamma_1$ collo stesso metodo che venne tenuto nel calcolo dell'angolo $\text{NPC}'' = \gamma$. Costruendo coi vertici in P ed in P_1 i due angoli γ e γ_1 , il primo in NPC'' coll'allineamento PN ed il secondo $\text{NP}_1\text{C}_1''$ coll'allineamento P_1N si ottengono le due direzioni PC'' e $\text{P}_1\text{C}_1''$ che nella loro intersezione determinano il punto domandato C.

Qualche volta, invece di prendere il punto P_1 su un allineamento NO_1 diverso dall'allineamento NO , può tornar comodo il fissarlo in P_2 sul prolungamento di NO . In questo caso l'angolo che venne chiamato α_1 si riduce all'angolo CNP_2 che vale $180^\circ - \alpha$.

Nel determinare il punto C mediante l'intersezione di allineamenti

accuratamente bisogna procurare che quest'intersezione si faccia sotto un angolo che non si scosti molto dall'angolo retto, e per quanto si può convien cercare che quest'angolo sia nè minore di 60° nè maggiore di 120° . Di più, per essere sicuri dell'esattezza dell'operazione e per ottenere un lavoro ben controllato, convien tracciare almeno tre allineamenti che devono passare pel punto che vuolsi determinare, ed accertarsi che effettivamente concorrono in un sol punto.

Una volta determinato il vertice C, siccome si conosce l'angolo α_2 dell'allineamento CD coll'allineamento CB, si può tracciare la direzione CD' dell'allineamento CD. Ammesso che il vertice D, il quale si dovrebbe fissare portando sulla direzione CD' ed a partire da C la lunghezza nota a_3 , cada su un terreno inaccessibile, e che d'altra parte non sia necessario per lo scopo del lavoro di fissare la posizione dell'accennato vertice, ma soltanto di tracciare una parte E''E dell'allineamento DE, ecco come si può procedere per continuare nella risoluzione del proposto problema. Su CD' scelgasi un punto qualunque Q, si misuri la distanza orizzontale $\overline{CQ} = b'$ che esso ha dal punto C, e quindi si stabilisca una linea poligonale QRSTZ' misurando tutti i suoi lati non che gli angoli aventi i loro vertici nei punti Q, R, S e T ed i loro lati di destra nelle direzioni QC, RQ, SR e TS. Si assuma per origine di coordinate il punto Q, per asse delle ascisse il prolungamento QX di CQ e per asse delle ordinate la direzione QY perpendicolare a CQ. Si trovino colle formole del numero 2 le voltate e quindi le deviazioni di tutti i lati QR, RS, ST e TZ dell'accennata linea poligonale per rapporto all'asse delle ascisse; e mediante le formole del numero 3 si calcolino le coordinate dei vertici R, S e T. Chiamando

x' ed y' le due coordinate del vertice T da cui parte la direzione TZ' che deve intersecare l'allineamento da tracciarsi DE' in modo da risultare $\overline{C'D} = a_3$ ed $\overline{EDC} = \alpha_4$,

z la distanza orizzontale \overline{TZ} del punto d'intersezione dell'allineamento TZ' coll'allineamento DE dal punto T,

z' la distanza orizzontale \overline{DZ} dello stesso punto d'intersezione dal punto D,

$(z \ x)$ la deviazione di TZ' per rapporto all'asse delle ascisse,

$(z' \ x)$ la deviazione nota di DE per rapporto all'asse delle ascisse ed espressa da $180^\circ - \alpha_4$

c' l'ascissa \overline{QD} del punto D data dalla differenza $a_3 - b'$,

X' ed Y' le due coordinate del punto Z,

se considerasi la linea poligonale Q RSTZ si ha

$$X' = x' + z \cos(zx)$$

$$Y' = y' + z \operatorname{sen}(zx),$$

ed analogamente dalla linea poligonale Q DZ risulta

$$X' = c' + z' \cos(z'x)$$

$$Y' = z' \operatorname{sen}(z'x).$$

Eguagliando ora fra di loro i valori di X' e di Y' , si ottengono le seguenti equazioni determinatrici di z e di z'

$$x' + z \cos(zx) = c' + z' \cos(z'x)$$

$$y' + z \operatorname{sen}(zx) = z' \operatorname{sen}(z'x),$$

dalle quali ottiensi

$$z = \frac{(c' - x') \operatorname{sen}(z'x) + y' \cos(z'x)}{\operatorname{sen}[(z'x) - (zx)]}$$

$$z' = \frac{(c' - x') \operatorname{sen}(zx) + y' \cos(zx)}{\operatorname{sen}[(z'x) - (zx)]}.$$

La trovata lunghezza z si porti orizzontalmente sulla direzione TZ' a partire dal punto T, e si ha così il punto Z appartenente all'allineamento ED, il quale potrà essere tracciato quando si conosca l'angolo EZT = φ che essa fa con ZT.

Per trovare questo angolo non esiste difficoltà alcuna quando si immagini condotta pel punto Z la retta ZX' parallela e pel verso dell'asse positivo QX delle ascisse, e quando si osservi: che l'angolo ($z'x$) è quello rappresentato sulla figura in EZX'; che l'angolo (zx) è quello rappresentato in Z'ZX'; che l'angolo EZZ' vale la differenza ($z'x$) - (zx); e quindi che l'angolo domandato EZT = φ vien dato da $180^\circ - (z'x) + (zx)$. Trovato l'angolo φ , altro non rimane a farsi che costruirlo mediante un goniometro col vertice in Z, e sull'allineamento ZT, preso come lato di destra, tracciare la direzione ZE' del suo lato di sinistra, fare la differenza $a_4 - z'$

per ottenere la distanza del vertice E dal punto Z, portare questa distanza sul terreno da Z verso E' e fissare così la vera posizione del vertice E.

Determinato il punto E, si può dire che l'operazione di tracciamento è ultimata, e si può concludere che essa venne ben eseguita se misurando la distanza $\overline{E\bar{U}}$ e l'angolo ZEU, trovansi la prima eguale alla lunghezza data a_3 ; il secondo eguale all'angolo pure dato α_3 .

9. Nozioni generali sul tracciamento di una galleria in direzione rettilinea. — Allorquando in un sito qualunque devesi aprire un passaggio sotterraneo con tutto il suo asse contenuto in uno stesso piano verticale, le prime operazioni da farsi consistono: nel fissare i punti estremi della galleria che vuolsi eseguire; nel tracciare sul terreno l'allineamento in cui questi punti si trovano; e nel determinare la distanza degli stessi punti. Queste operazioni preliminari, a seconda delle circostanze locali, si conducono a compimento, o risolvendo i semplici problemi che abitualmente vengono trattati nei corsi di Topografia sui tracciamenti di allineamenti e sulla misura di distanze, oppure operando come si è detto nei numeri 5 e 6 del presente capitolo; e, una volta che siano esse ultimate si procede all'incominciamento dello scavo. Questo lavoro, a seconda della lunghezza della galleria e delle esigenze speciali, si incomincia soltanto per le estremità, oppure per le estremità ed in punti intermedi, ai quali si arriva mediante pozzi praticati talvolta col loro asse nel piano verticale in cui trovasi l'asse della galleria, e talvolta lateralmente a questo piano.

1° Per il tracciamento di una galleria il cui scavo deve essere attaccato solamente alle estremità, si fanno collocare alcuni segnali al di là dei prolungamenti del suo asse nel piano verticale dell'asse stesso già determinato con segnali sul terreno. Scavando nella direzione dei segnali così collocati, possono i minatori aprire per ciascuna delle due estremità un pezzo dell'avanzamento, e quando questo già di qualche poco trovasi inoltrato non riesce operazione difficile il collocare nel cielo dello scavo e nell'allineamento degli stessi segnali dei picchetti, nei quali si fissano delle viti munite d'un anello onde potervi appendere dei fili a piombo. Quando già si trovano a posto alcuni di questi fili a piombo, a misura che lo scavo avanza servono essi a collocarne degli altri, e così si può ottenere che i due avanzamenti, praticati l'uno per un estremo e l'altro per l'altro estremo della galleria, si mantengano precisamente col loro asse nello stesso piano verticale e che vengano ad incontrarsi. Tutte

le volte che si viene a verificare se venne eseguito nella vera direzione, secondo la quale deve essere praticata la galleria, un tratto di scavo ultimamente fatto dai minatori, si appendono dei nuovi fili a piombo al cielo di questo nel piano verticale di quelli già a posto, e l'operazione si deve ritenere come bene condotta allorquando quelli cadono nel mezzo della sezione trasversale dello scavo in cui si trovano. Trovandosi la galleria d'avanzamento di tanto inoltrata da non potersi vedere i piombini per deficienza di luce, si ricorre allo spediente dei segnali a fuoco. Si fanno collocare dei lumi precisamente nelle verticali dei fili a piombo che già trovansi a posto; e nelle sezioni trasversali della galleria in cui vogliansi collocare dei piombini si mettono dei lumi in allineamento coi primi. I lumi così disposti precisano le verticali nelle quali si devono trovare i piombini da appendersi nel cielo della galleria.

2° Allorquando una galleria vuol essere eseguita attaccando lo scavo alle estremità ed in punti intermedi mediante pozzi coi loro assi posti nel piano verticale dell'asse della galleria, lo scavo per gli estremi si fa avanzare come già si è detto, e per quanto spetta agli scavi intermedi cui si vuol arrivare mediante pozzi si procede come segue. Trovandosi già sul terreno, e nell'allineamento determinato dai due estremi della galleria, alcuni segnali a dritta ed a sinistra del sito in cui vuolsi scavare un pozzo, si pone in stazione un teodolite in uno di questi punti; si collima col cannocchiale agli altri i quali, quando si trovino realmente in uno stesso allineamento e quando lo strumento sia ben messo in istato d'azione, devono presentarsi siccome coperti dal filo del reticolo che è perpendicolare a quello orizzontale; e finalmente, girando semplicemente il cannocchiale attorno al suo asse orizzontale, si collima con esso nel luogo scelto per scavare il pozzo. Dopo questo nell'allineamento determinato dai due punti estremi della galleria e ad una certa distanza dal bordo dello scavo da eseguirsi, si fanno costruire due pilastri in muratura, coperti da una pietra solidamente murata su essi e colle loro facce superiori poste in un medesimo piano, e situati in modo che l'uno cada da una parte e l'altro dall'altra parte del pozzo che vuolsi aprire. In due siti della faccia superiore di ciascuno dei detti pilastri verticalmente si colloca, nella direzione dei segnali posti sull'allineamento determinato dai due estremi della galleria, un'asta sottilissima terminata a punta nella estremità inferiore; colla matita si segnano i quattro siti in cui viene a cadere la punta dell'accennata asta; si distende uno spago fra questi quattro punti; e mediante il teodolite si osserva se

il filo del cannocchiale non perpendicolare a quello orizzontale copra bene questo spago. Non avendo luogo questa coincidenza, convien accertarsi se il teodolite è ben collocato in stazione e se è ben rettificato; porlo a sito e rettificarlo nel caso che non lo sia, e determinare quindi nuovamente le posizioni dei quattro punti che devono servire di guida nel porre nuovamente a posto lo spago, il quale, disteso in linea retta, esattamente li deve coprire e contemporaneamente mostrarsi in coincidenza col filo del reticolo. Quando questo si verifica, i punti marcati sulle facce superiori dei pilastrini si incidono sulla pietra mediante una punta da scarpellino, e servono essi come d'indici fiduciali per segnare la direzione del piano verticale in cui trovasi l'asse della galleria nel sito in cui vuoi praticare il pozzo.

Fatte queste operazioni, si incomincia dallo scavare il pozzo in modo che simmetricamente si estenda a diritta e sinistra della retta contenente i quattro punti segnati sulle superficie superiori dei due pilastrini. Conoscendosi di quanto il pozzo deve essere affondato sotto la faccia superiore di ciascun di essi, riesce agevole il conoscere quando raggiunge la voluta profondità, ossia quando il suo fondo ha raggiunto il livello al quale deve trovarsi l'avanzamento della galleria. Allora, per avere la direzione secondo la quale a diritta ed a sinistra si deve attaccare lo scavo per dirigersi ad eseguire gli avanzamenti cui si arriva dal pozzo già praticato, si distende fra i quattro indici fiduciali uno spago o meglio ancora un filo di platino, al quale si sospendono, alla maggior distanza possibile, due fili a piombo che, giungendo liberamente fin presso al fondo del pozzo, servono benissimo a dare la direzione secondo la quale devono essere incominciati gli attacchi. Soventi volte si fanno pescare i due piombini entro secchi d'acqua, nell'intento di ottenere che risultino immobili quando si eseguisce l'operazione di determinare alcuni punti negli avanzamenti. Quando i due attacchi a diritta ed a sinistra del pozzo sono di tanto avanzati da riuscire possibile la determinazione di alcuni punti dell'allineamento in cui trovasi l'asse della galleria mediante un teodolite, si mette in stazione questo strumento in uno degli avanzamenti alla maggior distanza possibile dall'asse del pozzo ed in modo che l'asse ottico del cannocchiale cada nella direzione dei due fili a piombo; si verifica se esso trovasi precisamente a sito appendendo un piombino nel cielo dello scavo e nel piano verticale determinato dall'asse del cannocchiale, e osservando se questo piombino trovasi nel piano verticale degli altri due che trovansi appesi allo spago oppure al filo di pla-

tino disteso attraverso la bocca del pozzo. Una volta collocato a posto il teodolite nel modo indicato, si fanno fissare mediante il suo cannocchiale nel cielo dell'avanzamento opposto alcuni picchetti; in ciascuno di questi picchetti si mette una vite munita d'un occhio ed a quest'occhio si ferma un piombino. Dopo questo si porta il teodolite sotto il più lontano dei piombini che così vennero fissati nel cielo dell'avanzamento opposto a quello in cui esso venne messo in stazione la prima volta; anche in questo sito si dispone in modo che, descrivendo un piano verticale l'asse ottico del cannocchiale, collimi esso ai fili a piombo che già trovansi a posto, si fanno fissare dei picchetti nel cielo dell'avanzamento in cui la prima volta venne collocato il teodolite ed a questi picchetti si fermano quegli anelli a cui si devono appendere i piombini.

Seguendo i procedimenti esposti, riesce possibile l'appendere quanti piombini si credono opportuni nel piano verticale dell'asse della galleria che vuolsi praticare, e guidare per loro mezzo il lavoro in modo che esso proceda nella voluta direzione. Nelle gallerie cui si accede per pozzi vi è quasi sempre assoluta deficienza di luce, ed il collocamento dei piombini si fa usando dei segnali a fuoco nelle operazioni di tracciamento. Dove esiste già un piombino il segnale a fuoco consiste in un lume posto coll'asse della sua fiamma sotto il piombino stesso; e dove invece si vuol appendere il filo a piombo, si pone prima un lume nella direzione di quelli già collocati nell'allineamento contenente l'asse della galleria, ed è verticalmente sopra questo lume che si pianta il picchetto cui si deve appendere il filo a piombo da porsi a sito. I teodoliti di cui conviene far uso nelle gallerie sono quelli nei quali è possibile illuminare i fili del micrometro.

3° Volendosi stabilire i pozzi che devono dar accesso ai punti d'attacco intermedi di una galleria in modo che i loro assi siano a qualche distanza dal piano verticale in cui trovasi l'asse della galleria stessa, appena il pozzo ha raggiunta la voluta profondità è necessario aprire una galleria trasversale, che talvolta si fa in direzione normale e talvolta in direzione obliqua all'asse della galleria costituente l'oggetto principale del lavoro. Siccome poi il tracciamento d'una galleria trasversale obliqua all'asse della galleria principale presenta maggior difficoltà di quella che s'incontra nel tracciamento di una galleria normale allo stesso asse, e siccome d'altronde questo tracciamento non è altro che un caso particolare di quello, basterà che qui si esponga il metodo da seguirsi per effettuare il primo.

Già trovandosi esattamente tracciato sul terreno l'allineamento in cui deve trovarsi l'asse della galleria principale, ed essendo fissato il punto per cui deve passare l'asse del pozzo, si conduca da questo punto l'allineamento determinante la direzione secondo la quale vuolsi aprire la galleria trasversale; si trovi l'intersezione di quest'allineamento con quello dell'asse della galleria; si faccia stazione in questo punto con un buon goniometro; e colla massima esattezza si misuri l'angolo dell'allineamento dell'asse della galleria trasversale coll'allineamento dell'asse della galleria principale. Dopo questo convien far costrurre un pilastrino in muratura nel sito in cui si misurò l'accennato angolo; segnare su una pietra ad esso murata colla punta da scarpellino il punto d'intersezione degli indicati allineamenti; e finalmente far costrurre due pilastrini murali da una parte e dall'altra del sito in cui vuolsi affondare il pozzo, posti coi loro assi nella direzione dell'allineamento in cui deve trovarsi l'asse della galleria trasversale. Su questi due pilastrini, precisamente come già si è detto pel caso in cui l'asse del pozzo doveva trovarsi nel piano verticale contenente l'asse della galleria, si segnino i quattro indici fiduciali; e quindi, esattamente e per diverse volte si misuri la distanza orizzontale dell'intersezione degli allineamenti, in cui devono trovarsi gli assi della galleria principale e trasversale, dagli indici fiduciali e dall'asse del pozzo. Dopo di ciò si può incominciare l'affondamento del pozzo, e, raggiunta la voluta profondità, si distenda uno spago al di sopra del pozzo e in modo che passi per i quattro indici fiduciali. A questo spago si appendano i due piombini i quali, discendendo fin presso il fondo del pozzo, devono servire per somministrare ai minatori la direzione in cui va aperta la galleria trasversale. Quando lo scavo di questa galleria già da qualche poco si trova inoltrato, può convenire di abbassare un teodolite, di verificare se essa procede nella voluta direzione e di determinare alcuni punti del suo asse mediante piombini appesi nel cielo dello scavo. Conoscendosi la distanza che l'asse del pozzo ha dagli indici fiduciali, riesce facile di trovare la distanza dell'asse stesso da ciascuno dei due piombini che vennero appesi allo spago, e quindi di segnare al fondo del pozzo un punto corrispondente al suo asse. Misurando da questo punto nella direzione dell'asse della galleria secondaria, si deve dire che essa ha raggiunta la necessaria lunghezza allorchando questa risulta eguale alla metà od a poco più della metà della larghezza della galleria principale aumentata dalla distanza misurata sul terreno fra l'asse del pozzo e l'intersezione degli allineamenti degli assi della galleria principale e

della galleria trasversale. Appena questa galleria ha raggiunta l'accennata lunghezza orizzontale, provvisoriamente e mediante un goniometro qualunque, si possono indicare ai minatori le direzioni degli attacchi; e quindi, quando già siano essi abbastanza inoltrati da riuscire possibile l'uso di un teodolite, traendo partito dei fili a piombo posti nel pozzo, e di quelli situati nella direzione dell'asse della galleria trasversale, e riportando la distanza misurata sul terreno fra l'asse del pozzo e il punto d'intersezione della direzione della galleria principale e della galleria trasversale, si può determinare il punto delle due gallerie corrispondente all'intersezione dei loro assi. In questo punto, che deve essere segnato in modo da potersi facilmente conservare come capo-saldo, si venga a far stazione con un teodolite; si collimi ai due fili a piombo che trovansi nel pozzo nonchè a quelli situati nella direzione dell'asse della galleria trasversale; si acquisti certezza se il teodolite è ben collocato in stazione; e dopo si faccia coincidere lo zero del nonio del circolo orizzontale collo zero della graduazione; si fissi il disco interno al disco esterno; si imprima allo strumento il movimento generale di rotazione attorno al suo asse verticale; si collimi col cannocchiale ai piombini che trovansi nel pozzo; e finalmente, imprimendo allo strumento il movimento parziale, si giri il cannocchiale finchè lo zero del nonio indichi l'angolo che venne letto sul terreno all'intersezione dell'allineamento dell'asse della galleria principale coll'allineamento dell'asse della galleria trasversale. Trovandosi l'asse ottico del cannocchiale in tal posizione e quindi girandolo 180° , riesce operazione facile il far appendere nel cielo degli scavi, che già si cercò di eseguire secondo l'asse della galleria principale, alcuni piombini situati nella direzione dell'asse ottico stesso, e questi piombini sono nel vero allineamento in cui deve trovarsi l'asse della galleria principale. Quando siansi collocati almeno due piombini nell'uno e nell'altro degli attacchi, si ha una verifica dell'esattezza del tracciamento, giacchè tutti questi piombini devono trovarsi in un medesimo piano.

Quanto si è detto in questo numero sulle operazioni di tracciamento destinate a servire di guida nello scavo delle gallerie si riferisce soltanto al tracciamento planimetrico, e per quanto spetta al tracciamento altimetrico si parlerà in seguito nel capitolo IV di questa parte.

CAPITOLO II.

Tracciamento di linee curve sul terreno e misura del loro sviluppo.

10. **Assunto del presente capitolo.** — Il tracciamento di linee curve sul terreno costituisce un'operazione della massima importanza per l'ingegnere costruttore. Questo principalmente si presenta nello stabilire l'andamento degli assi di strade e di canali dei quali vuolsi dar mano alla costruzione, giacchè la direzione rettilinea dall'uno all'altro estremo, tuttochè la migliore, non è però generalmente quella possibile per tali opere a motivo dei punti dati che esse devono riunire e delle difficoltà del terreno. La direzione poligonale, che si può ancora tollerare nelle vie ordinarie quando le aperture degli angoli sono assai grandi e prossime a 180° , assolutamente deve essere proscritta nelle vie ferrate, ed una regolare linea stradale deve risultare composta di una serie di rette e di curve fra loro tangenti. Queste curve, generalmente o circolari o paraboliche, prendono il nome di *risvolte*; ed è appunto del loro tracciamento e della misura del loro sviluppo che si terrà discorso nel presente capitolo.

11. **Calcolo degli elementi necessari alla costruzione di un arco circolare per punti.** — Molti sono i procedimenti che si possono impiegare nella determinazione dei dati che servono a costruire sul terreno un arco circolare per punti. Quelli comunemente usati in pratica si riducono a tre: al metodo delle saette; al metodo delle perpendicolari alla corda; ed al metodo delle perpendicolari alla tangente.

1° Il raggio $\overline{OA} = r$ (*fig. 11*) dell'arco a descriversi e la sua corda $\overline{AB} = c$, costituiscono i dati da impiegarsi primitivamente nel calcolo quando vuolsi tracciare un arco circolare col metodo delle saette. Immaginando unito il centro O col mezzo C della corda, dal triangolo ACO , rettangolo in C , si ricava

$$\overline{OC} = \sqrt{r^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - c^2},$$

e quindi, chiamando s la saetta \overline{CD} , si deduce per elemento che determina il punto D

$$s = r - \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - c^2}.$$

Ricorrendo ora, sia al triangolo rettangolo ACD , sia alla proprietà della corda AD di essere media proporzionale fra l'intero diametro \overline{DE} ed il segmento adiacente \overline{CD} , si può trovare l'anzidetta corda, la quale unitamente al raggio si presta al calcolo della saetta $\overline{C'D'}$.

Collo stesso procedimento, che conduce a trovare la corda \overline{AD} , si possono dedurre le due corde eguali $\overline{AD'}$ e $\overline{DD'}$, per quindi avere le due saette pure eguali $\overline{C''D''}$ e $\overline{C'''D'''}$, e per poscia procedere innanzi calcolando altre corde ed altre saette, i cui estremi costituiscono altrettanti punti dell'arco a tracciarsi, che, essendo simmetrico per rapporto alla retta \overline{DO} , ammetterà per la parte BD le stesse corde e le stesse saette calcolate per la parte AD .

2° Il raggio $\overline{OA} = r$ (fig. 12) e la corda $\overline{AB} = c$ sono pure gli elementi primitivi del calcolo quando vuolsi tracciare un arco circolare col metodo delle perpendicolari alla corda, e chiamando h la distanza \overline{OC} ed s la saetta \overline{CD} si ha immediatamente

$$h = \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - c^2},$$

$$s = r - \frac{1}{2} \sqrt{4r^2 - c^2}.$$

Questo valore di s determina il punto di mezzo D dell'arco. La determinazione di altri punti si riduce a saper trovare la lunghezza y di una perpendicolare \overline{FE} innalzata per un punto qualunque F preso sulla corda \overline{AB} e avente una distanza cognita $\overline{CF} = d$ dal mezzo C della corda. Immaginando perciò prolungata la perpendicolare EF fino ad incontrare in G la retta ZX condotta dal centro O parallelamente alla corda \overline{AB} , dal triangolo EGO rettangolo in O , in cui $\overline{OE} = r$ e $\overline{OG} = d$, si ricava

$$\overline{GE} = \sqrt{r^2 - d^2},$$

e quindi, per essere $\overline{GF} = \overline{OC} = h$

$$y = \sqrt{r^2 - d^2} - h.$$

Per avere quanti punti si vogliono dell'arco, basta dare a d diversi valori compresi fra 0 e $\frac{c}{2}$ e dedurre dall'ultima formola i corrispondenti valori di y , i quali si riferiranno non solo all'arco AD ma anche al suo simmetrico BD. In pratica si usa di calcolare le perpendicolari che corrispondono ai diversi punti della semi-corda AC divisa in parti eguali.

I conoscitori di Geometria analitica possono osservare che il metodo ora esposto consiste: nell'instituire l'equazione della circonferenza di circolo cui appartiene l'arco a descriversi, riferita a due assi OX e OY passanti pel centro O e diretti, il primo secondo una parallela, e l'altro secondo una perpendicolare alla corda \overline{AB} ; nell'attribuire all'ascissa diversi valori minori della semicorda; nel calcolare le ordinate corrispondenti, e nel diminuirle della quantità costante $\overline{OC} = h$ esprimente la distanza del centro alla corda.

5° Il metodo delle perpendicolari alla tangente consiste nel saper trovare la lunghezza d'un ordinata $\overline{DC} = y$ (fig. 15) innalzata perpendicolarmente alla tangente AX per un punto D preso ad una distanza cognita $\overline{AD} = d$ dal punto di contatto A. Perciò, essendo O il centro dell'arco AB ed \overline{OA} il raggio diretto al punto di contatto, s'immagini una retta OZ parallela ad AX, si prolunghi la perpendicolare DC fino ad incontrarla in E e si unisca O con C. Dal triangolo CEO rettangolo in E, in cui $\overline{OE} = d$ e $\overline{CO} = r$, si ha

$$\overline{EC} = \sqrt{r^2 - d^2};$$

e quindi, per essere $\overline{ED} = \overline{OA} = r$,

$$y = r - \sqrt{r^2 - d^2}.$$

Questa formola, applicata col dare a d diversi valori compresi fra 0 e la lunghezza della proiezione \overline{AF} dell'arco sulla tangente AX, può somministrare quanto si crede necessario all'effettivo traccia-

mento dell'arco per punti. Convien però notare che, nel caso di un arco AB (*fig. 14*) maggiore del quadrante la proiezione AF dell'arco diventa eguale al suo raggio e che per un valore qualunque di d , compreso fra detta proiezione e quella \overline{AK} della corda, corrispondono due valori y' ed y'' di y ambo deducibili dalla formola

$$y = r \mp \sqrt{r^2 - d^2} \quad (4).$$

cosicchè supponendo che il valore attribuito a d giunga da A in G si avrà:

$$\text{per determinare il punto H, } \overline{GH} = y' = r - \sqrt{r^2 - d^2};$$

$$\text{per determinare il punto I, } \overline{GI} = y'' = r + \sqrt{r^2 - d^2}.$$

Chi conosce la Geometria analitica può risolvere più speditamente il problema, istituendo l'equazione della circonferenza di circolo cui appartiene l'arco AB col prendere la tangente AX per asse delle ascisse e la direzione perpendicolare AY per asse delle ordinate; attribuendo all'ascissa diversi valori compresi fra 0 e la proiezione \overline{AF} dell'arco sulla tangente; e calcolando le ordinate, le quali corrispondono immediatamente alle lunghezze delle perpendicolari determinatrici dei punti domandati.

12. Risvolta circolare passante per un punto preso su una delle direzioni da raccordarsi. — Sia BAC (*fig. 15*) il gomito rettilineo che vuolsi trasformare in una risvolta circolare passante pel punto D preso sul lato AB .

L'angolo $BAC = \alpha$ e la distanza $\overline{AD} = a$ costituiscono i dati necessari alla soluzione del problema.

Per descrivere la risvolta sulla carta, avendosi già l'angolo $bac = \alpha$, si tira la bisettrice ax (*fig. 16*), si prende $\overline{ad} = \frac{1}{n} \overline{AD}$ (essendo $\frac{1}{n}$ la scala del disegno), s'innalza per d la perpendicolare ad ab , si fissa l'incontro o di questa perpendicolare colla ax e si descrive, col centro in o e col raggio \overline{od} , l'arco di circolo dge , che per l'esattezza dell'operazione deve toccare la ac in un punto e per cui si abbia $\overline{ae} = \overline{ad}$.

Per tracciare la curva sul terreno si considerino innanzi tutto i

due triangoli rettangoli ADO e ADL in cui $\overline{AD} = a$ e $\overline{DAO} = \frac{1}{2}\alpha$,
e si deducano:

$$\overline{DO} = a \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha, \quad \overline{DL} = a \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha.$$

Conoscendosi ora il raggio e la corda della risvolta, colle norme esposte nel numero antecedente si calcolino, o diverse saette, o diverse perpendicolari alla corda, o diverse perpendicolari alla tangente, i quali elementi, portati a sito sul terreno cogli strumenti che servono a misurare distanze e collo squadro agrimensorio, daranno altrettanti punti della curva domandata.

Un altro metodo che si può adoperare pel tracciamento delle risvolte di piccolo raggio e il cui uso dispensa da ogni calcolo è il seguente: prendasi sul lato AC (*fig. 17*) la lunghezza $\overline{AE} = \overline{AD}$ e si conduca l'allineamento DE. Tanto l'angolo ADE quanto il suo eguale AED (ciascuno dei quali vale $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$) si dividano nello stesso numero di parti eguali, per esempio in sei. Individuando tutte le dividenti con paline, e supponendole numerate incominciando dalla più vicina a DE per quelle che partono da D e dalla più lontana a DE per quelle che partono da E, si avranno nelle intersezioni G, H, F, I e K delle direzioni aventi lo stesso numero altrettanti punti dell'arco domandato. Infatti, risultando eguali tutti gli angoli in G, H, F, I e K si trovano essi iscritti in un medesimo segmento di circolo, sul cui arco di necessità devono essere i vertici di detti angoli.

15. Risvolta circolare passante per un punto preso fuori della direzione a raccordarsi. — Siano AB ed AC (*fig. 18*) le due direzioni rettilinee che vogliono raccordare con una risvolta circolare obbligata a passare pel punto D: l'angolo BAC sia α ; la lunghezza \overline{AE} sia p ; e la perpendicolare \overline{ED} ad AB sia q .

Avendosi già sulla carta l'angolo $bac = \alpha$ (*fig. 19*) ed il punto d rappresentativo di D, si può adottare questo procedimento per l'effettivo tracciamento dell'arco: segnata la bisettrice ax dell'angolo bac e calata su essa la perpendicolare dy si prenda $\overline{if} = \overline{id}$: sarà f un punto dell'arco domandato, \overline{fg} una secante e \overline{dg} la parte esterna. Descrivendo su \overline{gf} un semicircolo ed innalzando la perpendicolare \overline{dm} , si avrà in \overline{gm} una media proporzionale fra l'intera secante e la sua parte esterna, ossia si avrà la tangente che portata

da g in h determina su ab il punto di contatto h , ottenuto il quale si opera come nel numero antecedente per trovare il centro o e per descrivere l'arco $hdfk$.

Pel tracciamento dell'arco sul terreno bisogna conoscere le distanze dei due punti di contatto H e K dal vertice A e quindi la corda \overline{HK} ed il raggio \overline{OH} . Dal triangolo rettangolo EDG in cui l'angolo EDG vale $\frac{1}{2}\alpha$ si deducono:

$$\overline{EG} = q \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha, \quad \overline{GD} = \frac{q}{\cos \frac{1}{2}\alpha},$$

d'onde risulta

$$\overline{AG} = \overline{AE} + \overline{EG} = p + q \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha.$$

Considerando ora il triangolo rettangolo AGI si ricava immediatamente

$$\overline{GI} = \overline{AG} \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha = \left(p + q \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha \right) \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \overline{GF} = \overline{GL} - \overline{FL} = 2\overline{GI} - \overline{GD} = 2 \left(p + q \operatorname{tang} \frac{1}{2}\alpha \right) \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha \\ - \frac{q}{\cos \frac{1}{2}\alpha}, \end{aligned}$$

la quale, riducendo al medesimo denominatore e semplificando, diventa

$$\overline{GF} = \frac{p \operatorname{sen} \alpha - q \cos \alpha}{\cos \frac{1}{2}\alpha}.$$

Conoscendosi ora la secante intera \overline{GF} e la sua parte esterna \overline{GD} , si ha per espressione della tangente \overline{GH}

$$\overline{GH} = \sqrt{\overline{GF} \times \overline{GD}} = \frac{1}{\cos \frac{1}{2}\alpha} \sqrt{q(p \operatorname{sen} \alpha - q \cos \alpha)}.$$

Questo valore di \overline{GH} sommato con quello di \overline{AG} dà la distanza dei punti di contatto dal vertice A, e riduce la soluzione del problema a quella del numero antecedente.

14. Risvolta circolare di raggio dato. — Sia α l'angolo BAC (*fig. 15*) delle due direzioni da raccordarsi, e sia r il raggio dell'arco che vuolsi adottare.

Essendo ab e ac (*fig. 16*) due rette già disegnate in carta e rappresentanti i due allineamenti AB ed AC del terreno, ci conduca la bisettrice ax del loro angolo, per l'estremo a s'innalzi una retta ay perpendicolare ad ab , si porti su essa una lunghezza \overline{af} che nella scala del disegno rappresenti il raggio, e si conduca per f una parallela ad ab : evidentemente, nell'intersezione di quest'ultima con ax , si ha il centro o dell'arco; negli estremi d ed e delle perpendicolari calate da o sulle direzioni ab ed ac , i due punti di contatto; e nelle lunghezze eguali \overline{od} ed \overline{oe} due raggi.

Le distanze eguali \overline{AD} ad \overline{AE} (*fig. 15*) dei punti di contatto dal vertice A e la corda \overline{DE} si deducono dai triangoli rettangoli ADO e DLO dove $DO = r$, $DAO = LDO = \frac{1}{2}\alpha$, col porre:

$$\overline{AD} = \overline{AE} = r \cot \frac{1}{2}\alpha, \quad \overline{DE} = 2\overline{DL} = 2r \cos \frac{1}{2}\alpha.$$

Dopo di ciò si compie la soluzione del problema colle norme date nei numeri antecedenti.

15. Effettivo tracciamento delle risolte circolari col metodo delle perpendicolari alla tangente. — Questo metodo è quello che maggiormente viene impiegato nella pratica, e quindi non è fuori di proposito di parlarne a lungo ed in tutte le sue particolarità.

Alcuni costruttori, nell'applicare la formola (4) del numero 11 al calcolo delle ordinate ossia delle perpendicolari y alla tangente corrispondenti ad ascisse ossia a distanze date d del piede dell'indicata perpendicolare dal punto di contatto A (*fig. 14*), usano far variare i valori di d di quantità eguali. Deriva da ciò che i punti della curva così determinati non sono equidistanti, e che riesce cosa difficile il giudicare convenientemente della regolarità della curva stessa.

Per soddisfare alla condizione di tracciare la curva determinando alcuni punti della medesima i quali siano equidistanti, basta sapersi

calcolare le ascisse e le ordinate di parecchi punti i quali, successivamente considerati due a due, appartengano ad archi di egual lunghezza e quindi di eguale ampiezza. Perciò è necessario stabilire in generale le formole le quali danno le coordinate (fig. 15) $\overline{AD} = x$ e $\overline{DC} = y$ di un punto qualunque C del arco circolare AB in funzione del suo raggio $\overline{OA} = r$ e del suo angolo $\text{COA} = \varphi$. Essendo la retta DE perpendicolare ad AX ed essendo eguale a φ l'angolo ECO, si possono dedurre i valori di \overline{OE} e di \overline{EC} dal triangolo rettangolo CEO, ed ottenere

$$\overline{OE} = r \sin \varphi, \quad \overline{EC} = r \cos \varphi,$$

e quindi

$$x = r \sin \varphi, \quad y = r(1 - \cos \varphi) \quad (1).$$

dando ora a φ diversi valori variabili per differenze costanti, mediante queste formole si possono trovare i corrispondenti valori di x ed y ; e, portando questi valori sul terreno, si ottengono tanti punti dell'arco da tracciarsi egualmente distanti fra di loro.

Per condurre celeremente a termine l'operazione del tracciamento di un arco circolare sul terreno col metodo delle perpendicolari alle tangenti può tornare della massima utilità una tavola numerica in cui per un circolo di raggio dato siano marcati diversi angoli, i quali variino fra di loro per differenze eguali, non che le ascisse da portarsi sulla tangente e le ordinate da elevarsi perpendicolarmente alla stessa retta, corrispondenti ai detti angoli. La tavola che qui si riporta, la quale trovasi inscritta nell'opera di A. F. Brun intitolata *Traité pratique des opérations sur le terrain*, dà le ascisse e le ordinate, per rapporto alla tangente ed alla sua perpendicolare nel punto di contatto, corrispondenti ad un arco circolare di 4000 metri di raggio e per punti presi in modo da essere di 50' l'ampiezza dell'arco fra essi compreso.

AMPIEZZE degli archi prendendo per origine il punto di contatto	ASCISSE ossia lunghezze da misurarsi sulla tangente	ORDINATE ossia lunghezze delle perpendicolari alla tangente	AMPIEZZE degli archi prendendo per origine il punto di contatto	ASCISSE ossia lunghezze da misurarsi sulla tangente	ORDINATE ossia lunghezze delle perpendicolari alla tangente
0° 30'	^m 8,7165	^m 0,0380	15°	^m 224,9511	^m 25,6300
1	17,4524	0,1525	15 30'	233,4452	27,6503
1 30	26,1769	0,3428	14	241,9219	29,7046
2	34,8995	0,6090	14 30	250,3800	31,8526
2 30	43,6194	0,9518	15	258,8190	34,0744
3	52,3360	1,3708	15 30	267,2584	36,3696
3 30	61,0485	1,8655	16	275,6573	38,7386
4	69,7565	2,4360	16 30	284,0155	41,1803
4 30	78,4591	3,0850	17	292,3717	43,6954
5	87,1557	3,8050	17 30	300,7059	46,2850
5 30	95,8457	4,6038	18	309,0170	48,9436
6	104,5284	5,4783	18 30	317,3046	51,6764
6 30	113,2032	6,4281	19	325,5682	54,4814
7	121,8690	7,4538	19 30	333,8069	57,3586
7 30	130,5262	8,5555	20	342,0215	60,3074
8	139,1731	9,7318	20 30	350,2074	63,3278
8 30	147,8093	10,9840	21	358,3680	66,4196
9	156,4345	12,3118	21 30	366,5012	69,5826
9 30	165,0476	13,7146	22	374,6065	72,8152
10	173,6484	15,1924	22 30	382,6834	76,1206
10 30	182,2355	16,7453	23	390,7311	79,4952
11	190,8091	18,3750	23 30	398,7491	82,9400
11 30	199,3680	20,0754	24	406,7366	86,4546
12	207,9117	21,8526	24 30	414,6933	90,0388
12 30	216,4396	23,7040	25	422,6183	93,6924

Le formole (4) mostrano ad evidenza come le due coordinate x ed y siano proporzionali ai raggi, e questa proprietà mette in chiaro in qual modo si deve adoperare questa tavola. Supponendo che vogliasi tracciare un arco di raggio R , le coordinate x ed y corrispondenti alle ampiezze registrate nella tavola dovranno stare a quelle che si trovano nella tavola per le stesse ampiezze, come il raggio R sta al raggio 1000, per cui, essendo rispettivamente x' ed y' l'ascissa e l'ordinata contenute nella tavola è corrispondenti ad un dato angolo, i valori di x e di y per lo stesso angolo sono dati da

$$x = \frac{R}{1000} x', \quad y = \frac{R}{1000} y'.$$

Nell'effettivo tracciamento delle risolte non è generalmente necessario di calcolare i valori di x e di y per angoli variabili di mezzo in mezzo grado, e, a seconda del raggio della curva, è quasi sempre

sufficiente di calcolare i valori delle dette coordinate per angoli variabili fra loro per differenze maggiori. Così, per una curva di 1000 metri di raggio, il tracciamento riesce abbastanza particolarezzato col costruire i soli punti corrispondenti ad angoli variabili di due in due gradi; per una curva di 2000 metri di raggio si possono stabilire i suoi punti i quali corrispondono ad angoli variabili di un grado e mezzo in un grado e mezzo.

Allorquando lo sviluppo di una curva è considerevole, le ordinate riferentisi a punti molto distanti da quello pel quale venne condotta la tangente riescono troppo lunghe, per cui richiedono troppo tempo le operazioni di tracciamento sul terreno, trovansi soggette ad errori e talvolta riescono persino impossibili per alcuni ostacoli che avviene d'incontrare nella loro direzione. Per porsi al riparo da questi inconvenienti, basta costruire l'arco riferendo le posizioni dei suoi punti a diverse sue tangenti ed operando per diverse parti dell'intero arco da tracciarsi precisamente come già si è detto per archi che hanno uno sviluppo non tanto considerevole. Così, dovendosi tracciare un arco circolare ACB (fig. 20) di raggio dato $\overline{OA} = r$ e di ampiezza anche data $\overline{AOB} = \beta$, s'immagini diviso quest'arco in quattro parti eguali AE , EC , CF ed FB , e tirate le rette che congiungono i punti E , C ed F col centro O ; dal triangolo rettangolo GAO si deduca la lunghezza \overline{AG} data da

$$\overline{AG} = r \operatorname{tang} \frac{1}{4} \beta;$$

si osservi che $\overline{BH} = \overline{AG}$, che $\overline{GH} = 2 \cdot \overline{AG}$, e che questa retta nel suo punto di mezzo C è tangente all'arco ACB . Premesso questo, per tracciare l'arco sul terreno si portano nelle direzioni AD e BD delle tangenti estreme le due lunghezze eguali e calcolate \overline{AG} e \overline{BH} ; si traccia l'allineamento dato dai due punti G ed H ; e si divide per metà in C per avere in questo punto il punto di mezzo dell'arco da tracciarsi e contemporaneamente il punto in cui esso è toccato dalla retta GH . L'arco AE si traccia assumendo per assi coordinati le direzioni AD ed AO ; le direzioni CG e CO sono quelle che servono pel tracciamento dell'arco CE ; le direzioni CH e CO convengono per riferirvi le posizioni dei punti dell'arco CF ; e le direzioni BD e BO costituiscono i due assi coordinati pei diversi punti dell'arco BF . — Dividendo \overline{GA} , \overline{GC} , \overline{HC} ed \overline{HB} per metà nei punti I , K , L ed M , si possono condurre le rette \overline{IK} ed \overline{LM} ,

che nei loro punti di mezzo E ed F riescono tangenti all'arco: e continuando collo stesso metodo, riesce possibile ottenere una linea poligonale che, nelle due estremità e nei punti di mezzo di ciascuno dei lati collocati fra i due lati estremi, presenta altrettanti punti di contatto coll'arco che vuoi si tracciare. Questa linea poligonale in ogni caso può essere determinata in modo da non avere ampiezza maggiore di 20 a 25 gradi la metà dell'arco compreso fra due punti di contatto successivi, per cui la tavola che venne riportata riesce acconcia al tracciamento di una risvolta circolare in tutte le ordinarie circostanze della pratica.

Una linea poligonale come AIKLMB la quale nei punti estremi A e B e nei punti di mezzo E, C ed F dei lati \overline{IK} , \overline{KL} ed \overline{LM} risulti tangente ad uno stesso arco circolare ACB, di cui si conosce il raggio $\overline{OA} = r$ e l'ampiezza $\text{AOB} = \beta$, assai facilmente può essere tracciata sul terreno per camminamento, ossia costruendo successivamente l'angolo che i suoi lati devono fare tra di loro non che la lunghezza dei lati stessi. In generale, volendosi che siano n i punti di contatto della linea poligonale coll'arco circolare, i lati della linea poligonale risultano pure n , le parti eguali in cui l'arco totale rimane diviso dai punti di contatto sono $n-1$, e quindi l'ampiezza di ciascuna di queste parti vale $\frac{\beta}{n-1}$.

16. Effettivo tracciamento delle risvolte circolari col metodo delle seganti. — Per i progetti di massima, per i rapidi tracciamenti delle linee stradali e qualche volta anche per il posamento delle rotaie nelle vie ferrate e per la regolarizzazione delle trincee e dei rilevati, si impiega un metodo conosciuto generalmente col nome di *sistema inglese*, il quale si applica procedendo come immediatamente vien indicato. Essendo già fissato un estremo A della curva circolare che vuoi si tracciare e conoscendosi la direzione AT della sua tangente in questo punto, si calcola l'ordinata $\overline{EB} = x$ (fig. 24) corrispondente ad una data ascissa $\overline{AE} = d$, contata dal punto A sulla tangente AT assunta come asse delle ascisse. Perciò, immaginando condotta da B la retta \overline{BF} parallela ad AT e tirati i due raggi \overline{OA} ed \overline{OB} di lunghezza R, dal triangolo rettangolo BFO si ha

$$\overline{OF} = \sqrt{R^2 - d^2};$$

e quindi, essendo $\overline{AF} = \overline{EB} = x$, risulta

$$x = R - \sqrt{R^2 - d^2} \quad (1).$$

Trovato il valore di x si porti la lunghezza d sul terreno da A in E nella direzione AT , in E si elevi la perpendicolare \overline{EB} lunga quanto il calcolato valore di x , e quindi si tiri la secante AB prolungandola in BS al di là del punto B .

Fatto questo, nella direzione BS s'immagini portata la lunghezza \overline{BG} eguale a d e si calcoli la perpendicolare $\overline{GC} = y$ elevata pel punto G sull'accennata direzione. Per trovare i valori di y si osservi che, per essere la corda \overline{AB} media proporzionale fra il diametro $\overline{AK} = 2R$ e la sua proiezione $\overline{AF} = x$ sullo stesso diametro, si ha

$$\overline{AB} = \sqrt{2Rx},$$

per cui risulta

$$\overline{AG} = \sqrt{2Rx + d}.$$

Considerando ora le due secanti \overline{GA} e \overline{GI} partenti dal punto G , per un noto teorema di geometria si ha

$$\overline{AG} : \overline{IG} = \overline{HG} : \overline{BG},$$

da cui, per il trovato valore di \overline{AG} e per essere $\overline{IG} = 2R + \overline{HG}$ e $\overline{BG} = d$, si deduce l'equazione

$$\overline{HG}^2 + 2R \times \overline{HG} = d \left(\sqrt{2Rx + d} \right),$$

la quale dà

$$\overline{HG} = -R + \sqrt{R^2 + d \left(\sqrt{2Rx + d} \right)}.$$

Ottenuto così il valore di \overline{HG} , riesce facile il dedurre quello di $\overline{GO} = z$, ed evidentemente si ha

$$z = \sqrt{R^2 + d \left(\sqrt{2Rx + d} \right)} \quad (2).$$

Considerando ora il triangolo GBO nel quale sono noti i tre lati \overline{OB} , \overline{BG} e \overline{GO} rispettivamente eguali ad R, d e z , si calcoli il suo angolo BGO mediante la nota relazione fra i tre lati ed un angolo di un triangolo rettilineo qualunque. Questa relazione, applicata al caso in quistione, conduce a trovare

$$\cos \text{BGO} = \frac{d^2 + z^2 - R^2}{2dz};$$

per cui, chiamando φ l'angolo $\text{OGC} = 90^\circ - \text{BGO}$, risulta

$$\text{sen } \varphi = \frac{d^2 + z^2 - R^2}{2dz} \quad (3).$$

Nel triangolo GCO si conoscono ora i due lati $\overline{OG} = z$ ed $\overline{OC} = r$ non che il seno dell'angolo OGC, e quindi dicendo ψ l'angolo GCO, per la proporzionalità dei lati ai seni degli angoli opposti, si può dedurre

$$\text{sen } \psi = \frac{d^2 + z^2 - R^2}{2dR} \quad (4).$$

Conoscendosi ora i due angoli $\text{OGC} = \varphi$ e $\text{GCO} = \psi$, dall'ultimo citato triangolo in cui l'angolo GOC vale

$$180^\circ - (\varphi + \psi),$$

si può ricavare la lunghezza della perpendicolare $\overline{GC} = y$ data da

$$y = \frac{\text{sen}(\varphi + \psi)}{\text{sen } \varphi} R \quad (5).$$

Ponendo ora nell'equazione (2) il valore di x somministrato dall'equazione (1) si ottiene il valore di z ; conosciuto questo valore di z è possibile dedurre quelli dei due angoli φ e ψ mediante le equazioni (3) e (4), e finalmente si può passare mediante l'equazione (5) al calcolo della perpendicolare $\overline{GC} = y$. Trovato il valore di y , si misuri sul terreno nella direzione della secante AS a partire da B la distanza $\overline{BG} = d$, nel punto G si elevi la perpendicolare \overline{GC} di lunghezza y e nel punto C si ha un punto dell'arco circolare domandato.

Qualora la distanza d , come generalmente avviene nella pratica,

sia molto piccola in confronto del raggio R, il valore di x si può calcolare colla semplicissima formola

$$x = \frac{d^2}{2R} \quad (6),$$

la quale risulta dall'equazione (4) mettendo R^2 fattor comune sotto il radicale, portando quindi R fuori del radicale stesso e prendendo i due primi termini della serie che lo rappresenta. Questo valore di x , posto nell'equazione (2), facilmente conduce a trovare

$$z = R \sqrt{1 + 2 \frac{d^2}{R^2}},$$

da cui, sviluppando il radicale in serie e trascurando le potenze di $\frac{d}{R}$ superiori alla seconda, si ricava

$$z = R + \frac{d^2}{R}.$$

Ora, quando la lunghezza \overline{BG} è piccola in confronto del raggio dell'arco da tracciarsi, l'angolo BGO è assai vicino a 90° , il suo complemento OGC è un angolo piccolissimo e quindi la perpendicolare $\overline{GC} = y$ è sensibilmente eguale alla parte \overline{GH} della secante GOI . Segue da ciò che, per essere

$$\overline{GH} = z - R = \frac{d^2}{R},$$

con molta approssimazione si può assumere

$$y = \frac{d^2}{R},$$

ossia il valore di y eguale al doppio del valore di x .

Per continuare il tracciamento, si fa passare pei due punti B e C una nuova secante BCR, si prende su essa $\overline{CD} = d$, e per D si eleva la perpendicolare $\overline{DL} = \overline{GC} = y$. Fatto questo, si traccia ancora sul terreno l'allineamento determinato dai due punti C ed L si misura su esso $\overline{LM} = d$, si eleva la perpendicolare $\overline{MN} = y$, e così si continua finchè si arriva verso il mezzo della curva che vuolsi

tracciare. Fatto questo, si opera nello stesso modo partendo dall'altro punto di tangenza, e il tracciamento si può ritenere come ben eseguito allorquando i due archi di circolo passanti pei punti determinati come sopra si è detto vengono a raccordarsi verso il mezzo dell'arco da tracciarsi.

Convieni, nell'operazione di tracciare i due archi dal cui assieme deve risultare l'intera risvolta, determinare sul primo arco alcuni punti appartenenti al secondo e sul secondo alcuni punti appartenenti al primo. Allora riesce facile di riconoscere se i punti ottenuti colle due diverse operazioni appartengono alla medesima curva, e verificandosi qualche deviazione torna generalmente agevole verificare e rettificare, di 100 in 100 metri, le posizioni di alcuni punti col metodo delle tangenti oppure con quello delle seganti. Nei tracciamenti provvisori si può misurare lo scartamento ab (fig. 22) esistente fra le due curve dove dovrebbero unirsi per contatto; prendere il punto di mezzo c di \overline{ab} siccome appartenente al punto dell'arco che vuoi tracciare; dividere la metà di questo scartamento in tante parti eguali quanti sono i punti intermedi stati determinati sull'arco Ab fra il punto di contatto A ed il punto b e portare rispettivamente sui raggi una, due, tre..... di queste parti a partire dai punti 1, 2, 3, già fissati sull'arco Ab col metodo delle seganti. La rettificazione eseguita sull'arco Ab si ripeta per l'arco Ba dividendo la metà dello scartamento \overline{ab} in tante parti eguali quanti sono i punti intermedi stati determinati sull'arco Ba e portando rispettivamente sui prolungamenti dei raggi una, due, tre, di queste parti a partire dai punti 1, 2, 3, già stabiliti sull'arco Ba pure col metodo delle seganti.

Il tracciamento delle risvolte circolari col metodo delle seganti riesce generalmente assai spedito; ma, per la facilità con cui gli errori si propagano da un punto all'altro, è prudente consiglio di non impiegarlo nei tracciamenti definitivi, salvo in alcuni casi eccezionali come nelle traversate di boschi e di villaggi. Allorquando è imperiosa necessità di adottare il metodo delle seganti per un tracciamento definitivo, si deve trar partito di tutti i mezzi di verifica che, a seconda delle circostanze locali, è possibile adottare. Questi mezzi si riducono alla determinazione con altri metodi di alcuni punti che devono trovarsi sulla vera curva; e c'è ragion di credere che con essa si confonde la curva tracciata col metodo delle seganti, quando la nuova determinazione somministra dei punti posti sull'ultima accennata curva.

Il metodo delle seganti per il tracciamento delle risvolte può

condurre a buoni risultati allorquando si deve operare su una superficie piana, e quindi generalmente conviene per lo stabilimento definitivo di una strada allorquando già trovansi eseguiti i movimenti di terra. In tali circostanze si può disporre della distanza da prendersi sulle seganti in modo che tutte le operazioni abbiano luogo sulla superficie orizzontale o quasi orizzontale dello scavo o del rialzo, su cui la curva deve essere tracciata, e lavorare così su un terreno sul quale riesce facile il misurare con esattezza.

Siccome poi generalmente si può assumere la distanza d assai piccola in confronto del raggio R dell'arco che vuolsi tracciare, i calcoli da istituirsi pel completo tracciamento di una risvolta circolare col metodo delle seganti si riducono semplicemente a trovare il valore di x colla formola (6) ed a prenderne quindi il doppio per ottenere quello di y .

17. Tracciamento delle risvolte circolari in galleria. — Allorquando una galleria deve essere costrutta in curva e che non ha lunghezza così grande da essere necessario lo stabilimento di pozzi, per ciascun imbocco s'incomincia lo scavo procurando di seguire almeno approssimativamente l'andamento curvilineo che vuolsi ottenere mediante il tracciamento che già si sarà fatto presso gli imbocchi sulla superficie del terreno nel quale la galleria deve essere scavata. Aperta la galleria per una certa lunghezza, si prolunga la tangente al primo punto della curva di quanto lo permette la larghezza dello scavo e si elevano su questa tangente, di mano in mano che l'avanzamento progredisce, delle ordinate le cui estremità determinano altrettanti punti posti nella superficie cilindrica a generatrici verticali avente per direttrice l'asse curvilineo della galleria. Nel cielo dello scavo si piantano dei picchetti in corrispondenza dei punti così determinati, e si fermano in essi delle viti munite di anello in modo che, appendendovi dei piombini, si trovino gli assi dei loro fili nell'accennata superficie cilindrica.

Trovandosi la tangente AT (*fig. 25*) in procinto d'incontrare la parete dello scavo, si prende su questa linea un punto B , tale che si possa in esso far stazione con un goniometro; e, dopo d'aver misurata la distanza \overline{AB} , dal triangolo OAB rettangolo in A , di cui si conoscono i due cateti $\overline{OA} = R$ ed $\overline{AB} = d$, si deduce l'angolo $OBA = \varphi$ dato dalla semplicissima formola

$$\text{tang } \varphi = \frac{R}{d}.$$

Una volta determinato l'angolo φ , il suo doppio si costruisce in ABT' ; sulla nuova direzione BT' si elevano le ordinate che già servirono al tracciamento della curva AE aventi rispettivamente dal punto B distanze eguali a quelle che i piedi delle ordinate elevate su AB avevano pure da B , e si continua finchè misurando lungo BT' si trova una lunghezza $\overline{BC} = \overline{BA} = d$. Gli estremi delle ordinate elevate su BC non che il punto C si trovano sulla superficie cilindrica a generatrici verticali avente per direttrice l'asse della galleria; determinano essi la curva EC ; e, continuando lo scavo col portare sul prolungamento di BC le stesse ordinate già elevate su AB a distanze da C rispettivamente eguali a quelle adottate lungo AB a partire da A , si arriva alla determinazione dell'arco CF . Costruendo in D l'angolo BDT'' eguale al doppio dell'angolo φ , si ottiene la direzione DT'' , la quale tornerà in acconcio per tracciare l'arco FGH adottando il metodo già seguito per determinare l'arco ECF .

Soventi volte pel tracciamento di una galleria in curva, conoscendosi il raggio $\overline{OA} = R$ (*fig. 24*) della risvolta, non che la larghezza $\overline{CD} = 2l$ che deve avere lo scavo che vuolsi praticare, e ponendo che la semi-corda $\overline{AB} = x$ deve essere media proporzionale fra i due segmenti adiacenti del diametro espressi da $2R - \overline{BE} = 2R - l$ e da $\overline{BE} = l$, si calcola la lunghezza della retta \overline{AB} , ossia la metà della corda \overline{AF} , colla semplicissima formola

$$x = \sqrt{l(2R - l)}.$$

Fatto questo, osservando che nel triangolo rettangolo ABO sono noti il cateto $\overline{AB} = x$ e l'ipotenusa $\overline{OA} = R$, si trova l'angolo $\overline{T'AB} = \overline{AOB} = \psi$ che la corda AF fa colla tangente alla risvolta in A col porre

$$\text{sen } \psi = \frac{x}{R};$$

il supplemento di quest'angolo si costruisce col vertice in A e colla direzione AT , di cui AT' è il prolungamento, per ottenere la direzione AX della corda AB ; e su questa direzione si porta una lunghezza AF eguale al doppio della lunghezza x . I punti A ed F sono due punti determinanti l'asse della galleria, ed un terzo punto si ha nell'estremo E della perpendicolare innalzata alla corda AF nel suo punto di mezzo B con lunghezza eguale alla semi-larghezza l dello

scavo. Volendosi determinare altri punti della curva AEF, si possono calcolare col metodo esposto al numero 11 le lunghezze di alcune perpendicolari alla corda AF. Prendendo il complemento dell'angolo ψ , si ottiene l'angolo BAO; e costruendo il doppio di quest'angolo col vertice in F e colla retta FA, si trova la direzione FX' d'una nuova corda la quale, come AF servi al tracciamento dell'arco AEF, servirà di base per la determinazione di quanti punti si vogliono dell'arco successivo FHG.

Qualche volta nel tracciamento delle gallerie in curva si adotta il metodo delle seganti; se però non si vuol andar incontro a gravi inconvenienti è necessario operare colla massima precisione e colle cure più minute, ed il costruttore di tanto in tanto deve accertarsi dell'esattezza del lavoro determinando alcuni punti con uno dei due metodi che in questo numero vennero indicati.

Pei tracciamenti di quelle gallerie in curva alle quali si arriva mediante pozzi, s'incomincia dallo stabilire la curva sulla superficie del suolo con tutta la diligenza possibile, e quindi coi procedimenti esposti nel numero 9 si traccia nella galleria o la direzione di una tangente o la direzione di una corda già stabilita sul suolo. Fatto questo, il tracciamento della curva determinante l'asse della galleria d'avanzamento si effettua con uno dei due metodi già esposti pel caso in cui lo scavo si debba fare pei soli imbocchi. Quando si vogliono stabilire dei pozzi coi loro assi fuori della superficie cilindrica a generatrici verticali avente per direttrice l'asse curvilineo della galleria da costruirsi, si rende necessario l'aprimiento di gallerie trasversali, le quali si stabiliscono generalmente in modo che i loro assi si trovino in piani verticali diretti secondo raggi della curva che deve presentare l'asse della galleria principale.

18. Risvolte circolari successive. — Ora che si conoscono i metodi per trasformare un gomito rettilineo in un altro circolare, risulta facile di costruire una successione di risvolte raccordanti fra loro le diverse parti di una linea poligonale. Basta perciò raccordare le direzioni rettilinee due a due e tracciare per ciascun angolo l'arco tangente dietro le condizioni che vengono imposte dalle circostanze locali.

Nelle risvolte per strade, quando occorre la costruzione di due curve rovescie, si deve procurare d'interporre fra l'una e l'altra un tratto rettilineo, il quale nelle vie ferrate deve almeno avere la lunghezza massima di un convoglio. In quelle località poi in cui gli angoli non sono abbastanza aperti e nelle quali per mantenere una conveniente lunghezza al raggio si è obbligati di dare alla curva

uno sviluppo tale che l'estremità di una di esse venga a coincidere coll'origine della curva seguente, si deve cercare per quanto si può una curvatura uniforme nel complesso delle risvolte.

19. Risvolte paraboliche. — Un metodo, il quale in modo generale conduce al tracciamento di una risvolta parabolica allorquando sono dati i due punti di contatto sull'uno e sull'altro dei due allineamenti da raccordarsi, consiste: nell'assumersi due assi coordinati ortogonali fissati di posizione per rapporto alle rette rappresentanti le tracce orizzontali degli accennati allineamenti; nel porre l'equazione generale delle curve del secondo grado sotto la forma

$$y^2 + \frac{B}{A}xy + \frac{C}{A}x^2 + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}x + \frac{F}{A} = 0 \quad (I);$$

nello scrivere la condizione

$$B^2 - 4AC = 0 \quad (II)$$

esprime che la curva deve essere una parabola; nello stabilire le due condizioni derivanti da ciò che la curva deve passare per i due punti di raccordamento di cui si conoscono le coordinate; e finalmente nell'esprimere, mediante due altre equazioni, che le tangenti nei detti punti si confondono colle due direzioni rettilinee da raccordarsi. Così procedendo si hanno cinque equazioni fra i coefficienti $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, $\frac{E}{A}$ ed $\frac{F}{A}$, i quali si possono per tal modo determinare onde sostituirli nella citata equazione generale del secondo grado che rappresenta allora l'equazione della curva da tracciarsi, e la quale assai facilmente può essere costrutta per punti sul terreno quando si conoscano i valori delle ordinate y corrispondenti a dati valori delle ascisse x . Il metodo or ora accennato pel tracciamento di una risvolta parabolica non vien guari adoperato nella pratica, e generalmente si preferiscono i due che immediatamente seguono.

1° Essendo CA e CB (*fig. 25*) le due direzioni rettilinee da raccordarsi mediante una curva parabolica la quale parta dal punto D e finisca col punto E, si dividano \overline{CD} e \overline{CE} nello stesso numero di parti eguali; i punti di divisione su \overline{CD} si marchino da C verso D coi numeri d'ordine crescenti a partire dall'unità, ed i punti di divisione su \overline{CE} si manchino da C verso E con numeri d'ordine decrescenti a partire dal numero delle parti in cui trovansi divise

tanto \overline{CD} quanto \overline{CE} , e si uniscano mediante rette i punti aventi lo stesso numero. Nelle intersezioni della retta 11 colla retta 22, della retta 22 colla retta 33, della retta 33 colla retta 44, si hanno altrettanti punti della curva domandata.

Per dimostrare che veramente la curva determinata dagli accennati punti è una parabola raccordatrice delle due direzioni rettilinee AC e BC nei punti D ed E, assumasi la retta CX (fig. 26), la quale divide per mezzo la corda \overline{DE} , come asse delle ascisse, e si valutino le ordinate parallelamente alla corda stessa. Pongasi che MN ed M'N' siano due delle rette consecutive determinanti nella loro intersezione m un punto della curva costrutta come si è detto ragionando sulla figura 25, si assuma l'origine delle coordinate nel vertice C (fig. 26) e si chiamino:

p l'ascissa \overline{CF} del punto D,

q l'ordinata \overline{FD} dello stesso punto;

x ed *y* le coordinate correnti di un punto qualunque delle due rette MN ed M'N';

a la lunghezza di ciascuna delle parti in cui è divisa la \overline{CD} ,

b la lunghezza di ciascuna delle divisioni di \overline{CE} ;

n il numero delle divisioni contenute tanto di \overline{CD} quanto in \overline{CE} ;

n' il numero delle divisioni di \overline{CM} .

Osservisi ora che per le denominazioni stabilite, si ha

$$\overline{CM} = n'a, \quad \overline{CM'} = (n'+1)a,$$

$$\overline{CN} = (n-n'+1)b, \quad \overline{CN'} = (n-n')b;$$

che, per la similitudine dei due triangoli MGC ed M'G'C col triangolo DFC, risulta

$$\overline{CG} = \frac{n'}{n} p, \quad \overline{GM} = \frac{n'}{n} q;$$

$$\overline{CG'} = \frac{n'+1}{n} p, \quad \overline{G'M'} = \frac{n'+1}{n} q;$$

e che, per essere i due triangoli CHN e CH'N' simili al triangolo CFE il cui lato \overline{FE} vale \overline{FD} ossia *q*, si ha

$$\overline{CH} = \frac{n-n'+1}{n} p, \quad \overline{HN} = \frac{n-n'+1}{n} q,$$

$$\overline{CH'} = \frac{n-n'}{n} p, \quad \overline{H'N'} = \frac{n-n'}{n} q.$$

Conoscendosi le coordinate dei due punti M ed N per cui passa la retta MN, si può trovare la sua equazione la quale è

$$y - \frac{n'}{n} q = \frac{(n+1)q}{(2n'-n-1)p} \left(x - \frac{n'}{n} p \right);$$

ed analogamente essendo note le coordinate dei due punti M' ed N' pei quali passa la retta M'N', si può scrivere la sua equazione la quale risulta

$$y - \frac{n'+1}{n} q = \frac{(n+1)q}{(2n'-n+1)p} \left(x - \frac{n'+1}{n} p \right).$$

Supponendo ora che le coordinate x' ed y' simultaneamente soddisfino alle ultime due equazioni quando si pongano invece di x e di y , rappresenteranno esse le due coordinate del punto m , in cui s'incontrano le due rette MN ed M'N'. Segue da ciò che, cambiando x ed y in x' e y' nelle citate equazioni ed eliminando la quantità n' che serve ad individuare le or indicate rette, l'equazione risultante in x' ed y' rappresenterà tutti i punti analoghi ad m , ossia la linea che li contiene. Per comodamente eseguire quest'eliminazione si ordinino le ultime equazioni per rapporto ad n' . Facendo questo si trovano le equazioni

$$n'^2 - \frac{ny' + (n+1)q}{q} n' + \frac{np(n+1)y' + nq(n+1)x'}{2pq} = 0 \quad (1),$$

$$n'^2 + \frac{(1-n)q - ny'}{q} n' + \frac{np(n-1)y' + nq(n+1)x' - 2npq}{2pq} = 0,$$

e sottraendo la prima dalla seconda, risulta

$$n' = \frac{ny' + nq}{2q}.$$

Questo valore di n' si ponga nell'equazione (1) e si ottiene l'equazione

$$npy'^2 - 2q^2(n+1)x' + pq^2(n+2) = 0 \quad (2),$$

la quale conviene alla curva risultante dalla costruzione della figura 25, e che rappresenta una parabola di cui è un diametro la retta CX tirata dal vertice C al mezzo F della corda DE.

Evidentemente il più piccolo valore che si possa attribuire ad n , per eseguire la costruzione rappresentata nella citata figura 25, è 2, dal quale può crescere fino all' ∞ . Segue da ciò che fra le infinite parabole soddisfacenti al problema, quella che ha il parametro più grande corrisponde a $n=2$ e quella che ha il parametro più piccolo ad $n=\infty$. Ora differenziando l'equazione (2) si trova

$$\frac{dx'}{dy'} = \frac{np y'}{q^2(n+1)},$$

da cui si ricava per espressione della sottotangente in un punto qualunque della parabola

$$\frac{y' dx'}{dy'} = \frac{np y'^2}{q^2(n+1)},$$

e quindi per espressione della sottotangente nei punti D ed E, le cui ordinate sono $\overline{FD} = q$ ed $\overline{FE} = -q$,

$$\frac{np}{n+1}$$

Dividendo numeratore e denominatore di quest'espressione per n si ottiene

$$\frac{p}{1 + \frac{1}{n}},$$

dalla qual frazione risulta che la sottotangente pei due punti D ed E vale $\overline{CF} = p$ nel caso in cui $n = \infty$. Segue da ciò che solamente

nel caso di $n = \infty$ le due rette CA e CB sono tangenti nei punti D ed E alla curva di cui venne data la costruzione nella figura 25, e che quindi, non potendosi raggiungere l'accennato limite nel valore di n , tale costruzione non conduce mai a soddisfare ad una delle più importanti condizioni pel transito sulle strade, tuttochè si possa essa raggiungere con tutta l'approssimazione desiderabile accrescendo di quanto aggrada il numero delle divisioni in punti eguali tanto di \overline{CD} quanto di \overline{CE} .

2° La seconda costruzione della curva raccordatrice in D ed E (fig. 27) delle due direzioni rettilinee CA e CB consiste nel dividere per mezzo le due rette \overline{CD} e \overline{CE} in a ed in b ; nel tirare la retta ab ; nel dividerla per mezzo nel punto c , il quale costituisce un punto della curva domandata; nell'operare, sulle due rette \overline{aD} ed \overline{ac} unienti i tre punti D, a e c non che sulle altre due \overline{bE} e \overline{bc} unienti i tre punti E, b e c come si è fatto sulle due rette \overline{CD} e \overline{CE} unienti i tre punti D, C ed E per ottenere due punti della curva richiesta nei punti h ed i posti sul mezzo delle due rette \overline{de} e \overline{gf} determinate dai punti d ed e , g ed f situati sui mezzi di \overline{aD} ed \overline{ac} , \overline{bE} e \overline{bc} ; nell'operare sulle rette \overline{dD} e \overline{dh} , \overline{eh} ed \overline{ec} , \overline{fc} ed \overline{fi} , \overline{gi} e \overline{gE} , come si è fatto sulle rette CD e CE, e così continuare fino ad ottenere quanti punti si vogliono della curva da tracciarsi.

Per dimostrare che veramente è una parabola la curva DhciE risultante dal metodo di tracciamento ora indicato, si cerchi innanzi tutto di far vedere che la parabola passante pei due punti D ed E e tangente in questi punti alle direzioni CA e CB, che passa pel punto di mezzo c di \overline{ab} e che a questa retta è tangente nello stesso punto. Prendasi perciò per origine di coordinate il punto E, per asse delle ordinate la direzione CB e per asse delle ascisse la perpendicolare Ex a questa direzione; si chiamino

m ed n le due coordinate $\overline{ED'}$ e $\overline{D'D}$ del punto D,

α l'angolo ACy,

x ed y le coordinate di un punto qualunque della parabola raccordatrice delle due direzioni rettilinee CA e CB nei punti D ed E;

e finalmente si scriva l'equazione di questa parabola sotto la forma generale

$$y^2 + \frac{B}{A}xy + \frac{1}{4} \frac{B^2}{A^2}x^2 + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A}x + \frac{F}{A} = 0,$$

la quale risulta dall'equazione (I) dopo d'aver in essa sostituito il valore di $\frac{C}{A}$ che ricavasi dalla (II). In quest'ultima equazione entrano quattro coefficienti $\frac{B}{A}$, $\frac{D}{A}$, $\frac{E}{A}$ ed $\frac{F}{A}$, la cui determinazione assai facilmente può essere fatta ponendo le seguenti condizioni: 1° che la curva deve passare pel punto E le cui coordinate sono nulle; 2° che essa deve passare pel punto D d'ascissa m e d'ordinata n ; 3° che la tangente alla curva nel punto E deve fare un angolo di 90° coll'asse delle ascisse; 4° che la tangente nel punto D deve fare un angolo α coll'asse delle ordinate.

Una volta ottenuta l'equazione della parabola raccordatrice delle due direzioni rettilinee CA e CB non che l'espressione della tangente trigonometrica dell'angolo che la tangente in un suo punto qualunque fa coll'asse delle ascisse, si trovino i valori delle due coordinate $\overline{Ec'}$ e $\overline{c'e}$ del punto c posto sul mezzo della retta ab , e la tangente trigonometrica dell'angolo che la detta retta fa coll'asse delle ascisse. Le coordinate del punto c , sostituite nell'equazione della parabola, renderanno il suo primo membro eguale al secondo, e la tangente dell'inclinazione della retta ab coll'asse delle ascisse varrà la tangente dell'angolo che la tangente alla parabola nel punto c fa collo stesso asse, per cui si deve dire: che il punto c è un punto della parabola raccordatrice delle due direzioni rettilinee CA e CB; che questa parabola è tangente nel detto punto alla retta ab . Ora, per la costruzione rappresentata nella figura 27 trovandosi i due punti h ed i per rapporto ai punti Dec, Eec e per rapporto alle rette aD ed ac , bc e bE nelle stesse condizioni in cui trovavasi il punto c per rapporto ai punti D ed E ed alle rette CD e CE, ne deriva: che il punto h è sulla parabola raccordatrice delle due direzioni rettilinee aD ed ac ; che il punto i cade sulla parabola raccordatrice delle due direzioni bE e bc ; e quindi che ambedue questi punti si trovano sulla parabola raccordatrice delle due direzioni CA e CB. Questo modo di ragionare, esteso ad un punto determinato fra due punti qualunque già stabiliti col metodo seguito per fissare la posizione del punto c avendosi quella dei punti D ed E, conduce a conchiudere che la citata costruzione geometrica facilmente porta ad ottenere quanti punti si vogliono della parabola raccordatrice in D ed in E delle due direzioni rettilinee CA e CB, non che le tangenti alla parabola negli stessi punti.

20. **Sviluppo delle risolte circolari.** — Soventi volte deve il

costruttore trovare lo sviluppo di una risvolta semplicemente progettata od anche di una risvolta già tracciata sul terreno, ed i dati del problema sono generalmente l'angolo $BAC = \alpha$ (fig. 15) formato dalle due direzioni raccordate colla risvolta, non che il raggio r di questa curva.

Conoscendosi l'angolo $BAC = \alpha$, immediatamente si può dedurre l'angolo $DOE = \beta$, giacchè vale esso $180^\circ - \alpha$, ed allora, per la proporzionalità delle lunghezze degli archi dello stesso raggio alle loro ampiezze, si ottiene la lunghezza L dell'arco di raggio r e di ampiezza β mediante la semplicissima formola

$$L = \frac{\beta}{180^\circ} \pi r.$$

Generalmente però nella pratica, invece d'impiegare questa formola, con maggior celerità si può operare facendo uso di tavole come quelle contenute nella già citata opera di A. F. Brun, e le quali danno gli sviluppi di archi circolari aventi 1 metro di raggio e colle loro ampiezze variabili di grado in grado, di minuto primo in minuto primo e di minuto secondo in minuto secondo.

TAVOLA delle lunghezze di archi circolari di 1 metro di raggio calcolate per ampiezze variabili di grado in grado.

AMPIEZZE	LUNGHEZZE	AMPIEZZE	LUNGHEZZE	AMPIEZZE	LUNGHEZZE
1°	^m 0,017453	55°	^m 0,610865	69°	^m 1,204277
2	0,034906	56	0,628318	70	1,221750
3	0,052359	57	0,645771	71	1,239183
4	0,069813	58	0,663225	72	1,256637
5	0,087266	59	0,680678	73	1,274090
6	0,104719	40	0,698131	74	1,291543
7	0,122173	41	0,715584	75	1,308996
8	0,139626	42	0,733038	76	1,326450
9	0,157079	43	0,750491	77	1,343903
10	0,174532	44	0,767944	78	1,361356
11	0,191986	45	0,785398	79	1,378810
12	0,209439	46	0,802851	80	1,396263
13	0,226892	47	0,820304	81	1,413716
14	0,244346	48	0,837758	82	1,431169
15	0,261799	49	0,855211	83	1,448622
16	0,279252	50	0,872664	84	1,466076
17	0,296705	51	0,890117	85	1,483529
18	0,314159	52	0,907571	86	1,500983
19	0,331612	53	0,925024	87	1,518436
20	0,349065	54	0,942477	88	1,535889
21	0,366519	55	0,959931	89	1,553343
22	0,383972	56	0,977384	90	1,570796
23	0,401425	57	0,994837	91	1,588249
24	0,418879	58	1,012290	92	1,605702
25	0,436332	59	1,029744	93	1,623156
26	0,453785	60	1,047197	94	1,640609
27	0,471238	61	1,064650	95	1,658062
28	0,488692	62	1,082104	96	1,675516
29	0,506145	63	1,099557	97	1,692969
30	0,523598	64	1,117010	98	1,710422
31	0,541052	65	1,134464	99	1,727875
32	0,558505	66	1,151917	100	1,745329
33	0,575958	67	1,169370	180	3,141592
34	0,593411	68	1,186823	360	6,283185

TAVOLA delle lunghezze di archi circolari di 1 metro di raggio calcolate per ampiezze variabili di minuto in minuto.

AMPIEZZE	LUNGHEZZE	AMPIEZZE	LUNGHEZZE	AMPIEZZE	LUNGHEZZE
	m		m		m
1'	0,000290	21'	0,006108	41'	0,011926
2	0,000581	22	0,006399	42	0,012217
3	0,000872	23	0,006690	43	0,012508
4	0,001163	24	0,006981	44	0,012799
5	0,001454	25	0,007272	45	0,013089
6	0,001745	26	0,007563	46	0,013380
7	0,002036	27	0,007853	47	0,013671
8	0,002327	28	0,008144	48	0,013962
9	0,002617	29	0,008435	49	0,014253
10	0,002908	30	0,008726	50	0,014544
11	0,003199	31	0,009017	51	0,014835
12	0,003490	32	0,009308	52	0,015126
13	0,003781	33	0,009599	53	0,015417
14	0,004072	34	0,009890	54	0,015707
15	0,004363	35	0,010181	55	0,015998
16	0,004654	36	0,010471	56	0,016289
17	0,004945	37	0,010762	57	0,016580
18	0,005235	38	0,011053	58	0,016871
19	0,005526	39	0,011344	59	0,017162
20	0,005817	40	0,011635	60	0,017463

TAVOLA delle lunghezze di archi circolari di 1 metro di raggio calcolate per ampiezze variabili di secondo in secondo.

AMPIEZZE	LUNGHEZZE	AMPIEZZE	LUNGHEZZE	AMPIEZZE	LUNGHEZZE
	m		m		m
1"	0,000004	21"	0,000101	41"	0,000198
2	0,000009	22	0,000106	42	0,000203
3	0,000014	23	0,000111	43	0,000208
4	0,000019	24	0,000116	44	0,000213
5	0,000024	25	0,000121	45	0,000218
6	0,000029	26	0,000126	46	0,000223
7	0,000033	27	0,000130	47	0,000227
8	0,000038	28	0,000135	48	0,000232
9	0,000043	29	0,000140	49	0,000237
10	0,000048	30	0,000145	50	0,000242
11	0,000053	31	0,000150	51	0,000247
12	0,000058	32	0,000155	52	0,000252
13	0,000063	33	0,000159	53	0,000256
14	0,000067	34	0,000164	54	0,000261
15	0,000072	35	0,000169	55	0,000266
16	0,000077	36	0,000174	56	0,000271
17	0,000082	37	0,000179	57	0,000276
18	0,000087	38	0,000184	58	0,000281
19	0,000092	39	0,000189	59	0,000286
20	0,000096	40	0,000193	60	0,000290

Per far uso di queste tavole, si prendono in esse le lunghezze corrispondenti ai gradi, ai minuti primi ed ai minuti secondi contenuti nell'ampiezza totale dell'arco di cui vuolsi la lunghezza; queste lunghezze si sommano fra di loro, ed il risultato così ottenuto si moltiplica per il raggio della curva. Così, supponendo che trattisi di una risvolta avente 800 metri di raggio cui corrisponde l'angolo al centro di $71^{\circ} 56' 12''$, si può disporre il calcolo come segue:

Lunghezza corrispondente a 71°	1 ^m ,259183
" $56'$	0,010471
" $12''$	0,000058
		1 ^m ,249712

Questa somma porta a concludere che la lunghezza di un arco dell'ampiezza di $71^{\circ} 56' 12''$ ed avente un 1 metro di raggio è 1^m,249712, per cui la lunghezza dell'arco della stessa ampiezza, ma di 800 metri di raggio, dovrà essere

$$1,249712 \times 800 = 999^m,7696.$$

Le lunghezze di archi circolari di cui sia nota l'ampiezza ed il raggio si possono calcolare anche assai speditamente senza l'uso delle tavole, allorquando si conoscono soltanto le tre lunghezze degli archi di 1° , di $1'$ e di $10''$ ed aventi per raggio 1 metro. Queste tre lunghezze sono:

per l'arco di 1°	0 ^m ,017455
" $1'$	0,000290
" $10''$	0,000048

e volendosi la lunghezza della risvolta circolare avente 800 metri di raggio ed a cui corrisponde l'angolo di $71^{\circ} 56' 12''$, si farà il calcolo come segue:

Lunghezza corrispondente a 71°	0,017455 $\times 71 = 1^m,259165$
" $56'$	0,000290 $\times 56 = 0,010440$
" $12''$	0,000048 $\times 1,2 = 0,000058$
		1 ^m ,249661

Cosicchè la lunghezza domandata dell'arco dell'ampiezza di $71^{\circ} 56' 12''$ ed avente 800 metri di raggio sarà

$$1,249661 \times 800 = 999^m,7288.$$

Questa lunghezza differisce da quella somministrata dalle tavole di $0^m,0408$, perchè dopo le sei cifre decimali che vennero assunte nei valori di 1° , di $1'$ e di $10''$ vengono altre cifre; la differenza però è abbastanza piccola da potersi trascurare nelle operazioni pratiche della misura delle risvolte circolari per strade e per canali.

21. Sviluppo delle risvolte paraboliche. — La lunghezza di una risvolta parabolica non si può più ottenere con quella facilità con cui è possibile avere la lunghezza di una risvolta circolare. Essendo compiutamente determinata la parabola raccordatrice di due direzioni rettilinee in dati punti di esse, è possibile trovarne la sua equazione rispetto a due assi qualunque, e quindi, mediante apposite trasformazioni di coordinate, ottenere l'equazione della curva riferita al suo vertice ed al suo asse. Fatto questo, non si ha più che da risolvere un semplicissimo problema di rettificazione di curve col calcolo integrale. Questo metodo però, tuttochè non possa implicare gravi difficoltà, ha l'inconveniente di riuscire generalmente un po' lungo, per cui il pratico, ben conoscendo come basti sempre l'averne una lunghezza approssimata delle risvolte paraboliche, al metodo analitico ed esatto preferisce i metodi spediti e di approssimazione.

Quando la curva è tracciata sul terreno, si misura direttamente la sua lunghezza mediante regoli lunghi 1, 2 o tutto al più 3 metri, ponendoli nella direzione della curva stessa partendo da un suo estremo ed andando all'altro estremo.

Quando si ha solamente il disegno in una data scala, della curva di cui vuolsi la lunghezza, si può prendere nella scala del disegno una data apertura di compasso, apprezzabile sì, ma piuttosto piccola, rappresentante un dato numero m di metri; portare quest'apertura successivamente sulla curva in modo che, partendo da un estremo, i punti in cui successivamente si pongono le punte del compasso siano sulla curva stessa; contare quante volte n quest'apertura sta sulla curva per raggiungere un punto che disti dall'altro estremo meno dell'apertura rappresentante m metri; misurare la distanza m' fra questi due punti portando sulla scala l'apertura di compasso corrispondente ai medesimi; e dire che la lunghezza domandata è $nm + m'$.

Al metodo indicato per misurare la lunghezza di una risvolta parabolica di cui si ha il disegno si può anche sostituire quest'altro: prendere sulla curva diversi punti a, b, c, d, e, f, g, h ed i (fig. 28) talmente vicini che sensibilmente agli archi $ab, bc, cd, de, ef, fg, gh$ ed hi si possano sostituire le loro corde; tirare queste corde prolungandole come si vede sulla figura; e procedere quindi come segue. Prendasi

col compasso la corda \overline{ab} , si fissi una punta del compasso così aperto in e e l'altra punta sul prolungamento di \overline{bc} in c' ; si tenga ferma quest'ultima punta e si apra lo strumento finchè l'altra viene in b : l'apertura così ottenuta con molta approssimazione rappresenta l'arco abc . Dopo di ciò si fissi una punta del compasso, senza aprirlo nè chiuderlo, nel punto d in modo che l'altra punta cada sul prolungamento di \overline{cd} in d' , e tenendo ferma quest'ultima punta si faccia venir l'altra in c : la distanza fra le due punte dello strumento dà con molta approssimazione l'arco $abcd$. Continuando collo stesso metodo si può avere nel compasso una tale apertura che la distanza delle due punte rappresenti la lunghezza dell'arco $abcdefgh$; ed allora per avere la lunghezza dell'intera curva altro non rimane a farsi che fissare una punta nel punto i e l'altra sul prolungamento di \overline{hi} in i' senza variar la loro distanza, tener ferma la punta che trovasi in i e far venir l'altra in h : la distanza delle due punte evidentemente eguaglia per approssimazione la lunghezza che la curva $abcdefghi$ ha sul disegno, per cui portandola sulla scala si può dedurre lo sviluppo effettivo della risvolta quale verrà tracciata sul terreno.

Lambert ha dato una formola semplicissima per trovare approssimativamente la lunghezza di un arco di qualsiasi curva, e quindi anche di un arco parabolico, e quantunque asserisca egli di essere pervenuto alla sua formola dietro la considerazione ed il calcolo di più archi di diverse curve, vuolsi tuttavia ritenere come puramente empirica la regola che se ne deduce. Essendo AMB (fig. 29) l'arco di curva di cui vuolsi la lunghezza, non presentante cuspidi nè punti d'inflexione fra i suoi estremi, si tirino le due tangenti nei punti estremi A e B della curva non che la sua corda. Le dette due tangenti s'incontrano in un punto C ed indicando con t e t' le loro lunghezze \overline{AC} e \overline{BC} e con c la corda \overline{AB} , secondo Lambert può essere calcolata la lunghezza L dell'arco AMB , mediante la formoletta

$$L = \frac{t + t' + 2c}{3},$$

ossia prendendo il terzo della somma delle tangenti col doppio della corda. Nell'applicare questa regola però non bisogna procedere senza alcuna avvertenza: è necessario che l'angolo di contingenza BCD , ossia il supplemento dell'angolo BCA delle due tangenti, sia minore di 50° , e che la curva BMA non presenti nè cuspidi nè punti d'inflexione fra i due punti A e B : di più, avendosi una curva per cui

il detto angolo di contingenza è maggiore di 50° , bisognerà dividerla in diverse parti a ciascuna delle quali corrispondano angoli di contingenza minori di 50° , fare le loro lunghezze colla formola di Lambert e quindi sommarle.

CAPITOLO III.

Tracciamento e misura dello sviluppo delle curve direttrici.

22. Indicazione delle curve più usate in qualità di direttrici nella genesi dei vòlti. — Le *mezze circonferenze di circolo*, gli *archi circolari*, le *curve policentriche* risultanti da una serie di tali archi convenientemente raccordati, le *mezze periferie ellittiche* e gli *archi ellittici*, sono le curve che quasi esclusivamente si impiegano come direttrici nella genesi dei vòlti; ed è soltanto in alcuni casi che occorre di considerare l'*elica cilindrica* ed altre curve da tracciarsi a mano libera fra pochi punti obbligati.

Nel presente capitolo, oltre i metodi a seguirsi nell'effettivo tracciamento delle indicate curve direttrici, si esporranno i procedimenti analitici, sia per determinare i raggi e le ampiezze degli archi circolari che le compongono, sia per trovare le loro lunghezze non che le posizioni di quei punti la cui esatta conoscenza può essere di qualche importanza.

23. Mezza circonferenza di circolo. — La mezza circonferenza di circolo è la curva direttrice più facile a tracciarsi, bastando di far centro sul mezzo C (*fig. 50*) del suo diametro \overline{AB} e di descrivere l'arco ADB con apertura di compasso \overline{CA} .

Chiamando poi

$2c$ il diametro \overline{AB} ,

β l'angolo MCD che il raggio condotto ad un punto qualunque M della mezza circonferenza fa col raggio \overline{CD} ,

A l'ampiezza dell'intero arco ADB ed

L la sua lunghezza,

x ed y le due coordinate \overline{CP} e \overline{PM} del punto M rispetto ai due assi Cx e Cy ,

λ la lunghezza dell'arco DM ,

si ha: per essere l'arco ADB una mezza circonferenza,

$$A = 180^\circ,$$

$$L = \pi c;$$

per essere le lunghezze degli archi dello stesso raggio proporzionali alle loro ampiezze,

$$\lambda = \frac{\beta}{180^\circ} L;$$

e per essere rettangolo il triangolo MPC in cui l'angolo $CMP = \beta$,

$$x = c \operatorname{sen} \beta,$$

$$y = c \operatorname{cos} \beta.$$

24. Arco circolare. — L'arco di circolo è la curva direttrice che, per facilità di esecuzione, viene immediatamente dopo la mezza circonferenza; e, ponendo che sia $A'B'$ (fig. 51) la corda e CD la saetta di una tal curva, come insegna la geometria elementare, si procede al suo tracciamento tirando la corda $A'D$, innalzando una perpendicolare nel suo mezzo E , determinando l'incontro O di questa perpendicolare col prolungamento della saetta, centrando in O con apertura di compasso OA' e descrivendo l'arco che, cominciando in A' , viene a passare per D e a terminare in B' .

Assumendosi poi come dati,

$2c$ ossia la corda $A'B'$ dell'arco che si considera,

m ossia la sua monta CD e

β ossia l'angolo DOM che il raggio condotto ad un punto dato M dell'arco fa col raggio OD passante pel mezzo dell'arco medesimo,

si può determinare: non solo l'ampiezza e la lunghezza dell'arco $A'DB'$, la lunghezza dell'arco DM e le coordinate del punto M , per le quali quantità riterremo le denominazioni già stabilite nel precedente numero; ma ben anche

r ossia il raggio OD dell'arco considerato e

v ossia la distanza CO che il centro dell'arco medesimo ha dal mezzo C della corda $A'B'$.

Supponendo compiuta l'intera circonferenza, a cui appartiene l'arco $A'DB'$, e prolungato il raggio DO fino in F , per essere la semi-corda $A'C$ media proporzionale fra i due segmenti CD e CF del diametro, si ha

$$\overline{CF} = \frac{\overline{CA'}^2}{\overline{CD}} = \frac{c^2}{m},$$

e quindi

$$\overline{DF} = \overline{DC} + \overline{CF} = m + \frac{c^2}{m} = \frac{m^2 + c^2}{m},$$

e, per essere il raggio la metà del diametro,

$$r = \frac{m^2 + c^2}{2m}.$$

Considerando ora $\overline{C\bar{O}}$ come differenza fra il raggio e la saetta, risulta, a riduzioni fatte,

$$v = \frac{c^2 - m^2}{2m}.$$

L'ampiezza A dell'arco $A'DB'$, doppio dell'arco DB' , si ricava dal triangolo rettangolo $B'CO$ col porre

$$\text{sen } \frac{1}{2} A = \frac{c}{r} = \frac{2cm}{m^2 + c^2},$$

la lunghezza L dello stesso arco, per la proporzionalità delle lunghezze degli archi dello stesso raggio alle loro ampiezze, è espressa da

$$L = \frac{A}{180^\circ} \pi r,$$

e analogamente la lunghezza λ dell'arco DM di ampiezza β è data da

$$\lambda = \frac{\beta}{180^\circ} \pi r.$$

Osservando finalmente che $x = \overline{CP} = \overline{OQ}$, $y = \overline{PM} = \overline{QM} - \overline{CO}$, che il triangolo OQM è rettangolo in Q e che l'angolo OMQ vale β , si ha

$$x = r \text{ sen } \beta, \quad y = r \text{ cos } \beta - v.$$

Le lunghezze L e λ , quando si conosce il raggio e l'ampiezza dell'arco cui appartengono, si possono anche ottenere servendosi delle tavole che vennero riportate e di cui venne spiegato l'uso nel numero 20.

Vi sono anche delle tavole le quali danno le lunghezze degli

archi circolari quando si conosca soltanto la loro corda e la loro saetta senza che prima sia necessario calcolare il loro raggio e la loro ampiezza. In queste tavole una colonna contiene generalmente il rapporto $\frac{m}{c}$ della saetta alla semi-corda e l'altra la lunghezza L_1 dell'arco corrispondente, supponendo la semi-corda eguale all'unità; e quella che qui si riporta contiene i valori dello sviluppo L_1 corrispondenti a valori del rapporto $\frac{m}{c}$ variabili da centesimo in centesimo da 0,10 fino ad 1.

$\frac{m}{c}$	L_1								
0,10	2,013	0,28	2,103	0,46	2,271	0,64	2,508	0,82	2,802
0,11	2,016	0,29	2,110	0,47	2,283	0,65	2,523	0,83	2,819
0,12	2,019	0,30	2,118	0,48	2,294	0,66	2,538	0,84	2,837
0,15	2,022	0,31	2,126	0,49	2,306	0,67	2,553	0,85	2,855
0,14	2,026	0,32	2,134	0,50	2,318	0,68	2,569	0,86	2,873
0,15	2,030	0,33	2,142	0,51	2,331	0,69	2,584	0,87	2,892
0,16	2,034	0,34	2,151	0,52	2,343	0,70	2,600	0,88	2,910
0,17	2,038	0,35	2,160	0,53	2,356	0,71	2,616	0,89	2,929
0,18	2,043	0,36	2,169	0,54	2,369	0,72	2,632	0,90	2,948
0,19	2,048	0,37	2,178	0,55	2,382	0,73	2,648	0,91	2,966
0,20	2,053	0,38	2,187	0,56	2,395	0,74	2,665	0,92	2,985
0,21	2,058	0,39	2,197	0,57	2,408	0,75	2,681	0,93	3,004
0,22	2,064	0,40	2,207	0,58	2,422	0,76	2,698	0,94	3,024
0,25	2,070	0,41	2,217	0,59	2,436	0,77	2,715	0,95	3,043
0,24	2,076	0,42	2,227	0,60	2,450	0,78	2,732	0,96	3,063
0,25	2,082	0,43	2,238	0,61	2,464	0,79	2,749	0,97	3,082
0,26	2,089	0,44	2,249	0,62	2,478	0,80	2,766	0,98	3,102
0,27	2,096	0,45	2,260	0,63	2,493	0,81	2,784	0,99	3,122
								1,00	3,142

L'uso di questa tavola è della massima semplicità, e, volendosi, per esempio, lo sviluppo dell'arco circolare avente 12 metri di corda e metri 1,20 di saetta, si procede come segue. Si fa il rapporto $\frac{m}{c}$ il quale nel presente caso è $\frac{1,20}{6} = 0,20$; si cerca nelle colonne intitolate $\frac{m}{c}$ questo numero e nella colonna che trovasi alla sua destra intestata L_1 si legge il numero corrispondente che è 2,053; si moltiplica questo numero per la lunghezza 6^m della semi-corda e si ha la lunghezza dell'arco proposto, la quale lunghezza viene per conseguenza data da

$$L = 2,053 \times 6 = 12^m,318.$$

Quando il rapporto $\frac{m}{c}$ si compone di tre cifre in modo da esser-
 vene una nella colonna dei millesimi, come succede, per esempio,
 quando esso è rappresentato dal numero 0,203, con molta approssi-
 mazione si può prendere lo sviluppo 2,053 corrispondente al rap-
 porto 0,20 contenuto nella tavola e immediatamente inferiore al
 rapporto dato; ed aumentare questo sviluppo dei 0,5 della diffe-
 renza 0,005 che passa fra gli sviluppi 2,058 e 2,053 corrispon-
 denti ai rapporti successivi 0,20 e 0,21 esistenti nella tavola l'uno
 maggiore e l'altro minore dell'accennato rapporto dato. Segue da
 ciò che il valore di L_1 corrispondente ad $\frac{m}{c} = 0,203$ sarà

$$L_1 = 2,053 + 0,3 \times 0,005 = 2,054.$$

25. Condizioni a cui deve soddisfare una curva policentrica per essere ben tracciata. — In qualsiasi curva policentrica tutti gli archi circolari che la compongono devono avere le tangenti comuni nei loro punti di riunione e quindi i centri di due archi successivi devono trovarsi su una medesima linea retta.

Se si considerano particolarmente le *semi-ovali*, ossia quelle curve policentriche che devono essere simmetriche rispetto ad una retta perpendicolare nel punto di mezzo della distanza dei suoi estremi, colle tangenti in questi punti perpendicolari alla retta che li unisce e colla tangente nel punto di mezzo parallela alla stessa retta, si richiede: che i centri degli archi estremi siano sulla corda e che il centro dell'arco di mezzo sia sul prolungamento della saetta o sulla perpendicolare innalzata sulla metà della corda; che il numero dei centri sia impari; che la curva, mantenendosi concava verso la corda, cresca con legge di continuità da un estremo al mezzo e che da questo decresca simmetricamente fino all'altro estremo, e che quindi i raggi vadano crescendo dal primo a quello dell'arco di mezzo e che colla stessa legge vadano decrescendo da questo all'ultimo; che la somma delle ampiezze dei diversi archi faccia 180°.

26. Il problema di descrivere una semi-ovale quando sono date la sua corda e la sua monta è indeterminato. — Siano $2n+1$ gli archi circolari che devono comporre una semi-ovale di semi-corda \overline{CA} (fig. 52) e di monta \overline{CD} , e siano $O_1, O_2, O_3, \dots, O_n, O_{n+1}$ i centri degli $n+1$ archi di differenti raggi. Chiamando $2c$ la corda della semi-ovale e quindi c la semi-corda \overline{CA} ,
 m la monta \overline{CD} ,

$R_1, R_2, \dots, R_n, R_{n+1}$ i raggi $\overline{O_1 A}, \overline{O_2 b}, \dots, \overline{O_n e}, \overline{O_{n+1} f}$,
 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ le ampiezze degli archi Ab, bc, \dots, ef, ff' ,
 essendo ff' l'arco culminante;
 immaginando condotte le rette $\overline{O_2 P_2}, \overline{O_3 P_3}, \dots, \overline{O_{n-1} P_{n-1}}, \overline{O_n P_n}$,
 con direzioni perpendicolari e le rette $\overline{O_2 Q_3}, \dots, \overline{O_{n-1} Q_n}, \overline{O_n Q_{n+1}}$,
 con direzioni parallele alla corda, ed osservando che

$$\overline{O_1 A} + \overline{O_1 P_2} + \overline{O_2 Q_3} + \dots + \overline{O_{n-1} Q_n} + \overline{O_n Q_{n+1}} = \overline{AC},$$

$$\overline{O_2 P_2} + \overline{O_3 Q_3} + \dots + \overline{O_n Q_n} + \overline{O_{n+1} Q_{n+1}} = \overline{O_{n+1} D} - \overline{CD},$$

per le denominazioni stabilite e dalla considerazione dei triangoli
 rettangoli $O_1 P_2 O_2, O_2 Q_3 O_3, \dots, O_{n-1} Q_n O_n, O_n Q_{n+1} O_{n+1}$, in cui

$$\overline{O_1 O_2} = R_2 - R_1,$$

$$\overline{O_2 O_3} = R_3 - R_2,$$

.....

$$\overline{O_{n-1} O_n} = R_n - R_{n-1},$$

$$\overline{O_n O_{n+1}} = R_{n+1} - R_n,$$

$$O_2 O_1 P_2 = \alpha_1,$$

$$O_3 O_2 Q_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = \Lambda_2,$$

.....

$$O_n O_{n-1} Q_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} = \Lambda_{n-1},$$

$$O_{n+1} O_n Q_{n+1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} + \alpha_n = \Lambda_n,$$

si ricavano le due equazioni

$$R_1 + (R_2 - R_1) \cos \alpha_1 + (R_3 - R_2) \cos \Lambda_2 + \dots$$

$$\dots + (R_n - R_{n-1}) \cos \Lambda_{n-1} + (R_{n+1} - R_n) \cos \Lambda_n = c \quad (1),$$

$$(R_2 - R_1) \operatorname{sen} \alpha_1 + (R_3 - R_2) \operatorname{sen} \Lambda_2 + \dots + (R_n - R_{n-1}) \operatorname{sen} \Lambda_{n-1} + (R_{n+1} - R_n) \operatorname{sen} \Lambda_n = R_{n+1} - m \quad (2),$$

le quali, e l'altra

$$\Lambda_n + \frac{1}{2} \alpha_{n+1} = 90^\circ \quad (3)$$

esprimente che la somma delle ampiezze degli archi della mezza semi-ovale deve fare 90° , costituiscono tre relazioni fra $n+1$ raggi ed $n+1$ angoli diversi ossia fra $2n+2$ quantità delle quali se ne potranno determinare tre, rimanendo ancora indeterminate le altre $2n-1$.

Si può adunque conchiudere che il problema di descrivere una semi-ovale, quando si conosce la corda e la monta, è indeterminato, e che si devono ancora assumere arbitrariamente tante condizioni quanti sono i centri della semi-ovale meno due.

27. Metodi da seguirsi per rendere determinato il problema di descrivere una semi-ovale conoscendosi la corda e la monta. — I metodi dati da Huygens, Bossut, Bérard, Perronnet, Gauthey, K'maingant e Montluisant, non che da parecchi altri autori, per descrivere le semi-ovali aventi più di tre centri, si riducono a fissare, secondo leggi più o meno arbitrarie, la situazione e la grandezza dei raggi, ed a modificare questi elementi dietro il loro confronto con quelli di una curva simile, finchè si venga ad avere una curva passante per le estremità della corda e della monta.

L'ingegnere francese Michal seppe ideare un metodo diretto per risolvere il problema di descrivere una semi-ovale ad un numero qualunque di centri, conoscendosi la corda e la monta, ed un tal metodo consiste nel fissare le ampiezze degli archi tutti e le lunghezze di $n-1$ degli $n+1$ raggi differenti necessari alla descrizione della curva in quistione. Per dare una teoria generale delle semi-ovali credo conveniente: 1° di esporre in modo generale il metodo di Michal e di istituire le formole che conducono alla determinazione di tutti gli elementi che può avvenire di dover considerare in tali curve; 2° di esaminare il caso delle semi-ovali cogli archi della medesima ampiezza e coi raggi tali che la curva tenda a confondersi colla mezza ellisse avente per semi-assi la corda data e la monta data; 3° di esporre il metodo seguito da Lerouge, asse-

quando alle semi-ovali archi della medesima ampiezza e raggi crescenti in progressione aritmetica.

28. Metodo generale per la descrizione di una semi-ovale a qualsivoglia numero di centri. — Per quanto si disse nel numero 26, è indeterminato il problema di descrivere una semi-ovale conoscendosi la corda e la monta, ed è indispensabile di darsi, tra raggi ed archi diversi, tanti elementi quanti devono essere i centri della curva meno due. Generalmente soddisfacendo all'equazione (5) del già citato numero 26, si prendono arbitrariamente le ampiezze di tutti gli archi diversi e, badando alle condizioni espresse nel numero 25, si assumono le lunghezze di tutti i raggi, salvo quelle dei due raggi dell'arco culminante e dell'arco che lo precede. Allora, indicando con $2n + 1$ il numero dei centri della semi-ovale a descriversi, si hanno le ampiezze degli $n + 1$ archi diversi, non che le lunghezze di $n - 1$ degli $n + 1$ raggi corrispondenti e, chiamando

c ed m la semi-corda e la monta,

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ le ampiezze del 1° , del 2° , del n° , del $(n + 1)^\circ$ arco,

$R_1, R_2, \dots, R_{n-2}, R_{n-1}$ le lunghezze dei raggi del 1° , del 2° , del $(n - 2)^\circ$ del $(n - 1)^\circ$ arco,

si può tenere il seguente processo per descrivere graficamente la curva: sulla corda della semi-ovale si costruisca una mezza circonferenza di circolo e, considerando il solo quadrante ACK (*fig. 52*) si facciano in esso gli angoli $ACE = \alpha_1, ECF = \alpha_2, \dots, HCI = \alpha_n$ e

$ICK = \frac{1}{2} \alpha_{n+1}$; si prenda $\overline{AO_1} = R_1$, si conduca O_1m parallela a

CE , si centri in O_1 con raggio $\overline{O_1A}$ e si ottiene il primo arco Ab avente la tangente in A perpendicolare alla direzione CA della corda per essere su quest'ultima il centro O_1 . Si porti $\overline{bO_2} = R_2$ e si conduca O_2n parallela a CF , facendo centro in O_2 un raggio $\overline{O_2b}$ si ottiene il secondo arco bc ben raccordato al primo nel punto b per essere questo ed i centri dei due archi sulla medesima retta O_2m ; continuando collo stesso metodo si arriva a trovare il centro O_{n-1} , la retta $O_{n-1}p$ parallela a CH ed il punto e su cui termina l'arco di raggio R_{n-1} . Fatto questo, si conduca per e la retta eq parallela alla corda \overline{HI} e per l'estremo D della monta si tiri la retta Dr parallela alla corda \overline{KI} . Nell'intersezione di queste due rette si ottiene il punto f e, tirando per esso la retta fO_n parallela al raggio \overline{CI} , si determinano il punto O_n sul prolun-

gamento di $\overline{C O_{n-1}}$, ed il punto O_{n+1} sul prolungamento $C O_{n-1}$ della monta; e, risultando i due triangoli $e O_n f$, $f O_{n+1} D$ rispettivamente simili a' triangoli HCI e ICK e come questi ultimi isosceli, l'arco di centro O_n e di raggio $\overline{O_n e}$ deve passare per f e l'arco di centro O_{n+1} e di raggio $\overline{O_{n+1} f}$ deve passare per D e terminare in f' sulla retta $O_{n+1} f'$ condotta da O_{n+1} parallelamente al raggio \overline{CL} determinato col prendere $\overline{KL} = \overline{KI}$. Gli ultimi due archi ef ed $f'f''$ sono ben raccordati nel punto comune f , perchè questo ed i due centri O_n ed O_{n+1} si trovano sopra una medesima linea retta; la tangente nel punto D è parallela alla direzione AC della corda siccome perpendicolare alla monta sul cui prolungamento trovasi il centro O_{n+1} .

29. Calcolo delle coordinate dei centri di una semi-ovale e calcolo dei raggi dell'arco culminante e dell'arco che lo precede.

— L'esposto metodo per tracciare le semi-ovali, conoscendosi la corda e la monta, non può condurre a risultati di precisione finchè non si determinano numericamente gli ultimi due raggi che, nell'indicata costruzione, risultano determinati dall'intersezione di rette tagliantisi sotto angoli molto discosti da 90° . Considerando sempre una semi-ovale a $2n+1$ centri, prendendo per asse delle ascisse la direzione Cx della corda e per asse delle ordinate la direzione Cy del prolungamento della monta e ritenendo le denominazioni già stabilite ai numeri 26 e 28 per quanto concerne alla corda, alla monta, alle ampiezze ed ai raggi degli archi, si chiamino rispettivamente X_1 e Y_1 , X_2 e Y_2 , X_3 e Y_3 X_{n-1} e Y_{n-1} , X_n e Y_n , X_{n+1} e Y_{n+1} le coordinate dei centri O_1 , O_2 , O_3 , O_{n-1} , O_n , O_{n+1} . Dalla figura 32 si ha: pel centro O_1

$$X_1 = \overline{C O_1} = \overline{C A} - \overline{O_1 A} = c - R_1$$

$$Y_1 = 0;$$

pel centro O_2

$$X_2 = \overline{C P_2} = \overline{C O_1} - \overline{P_2 O_1} = X_1 - (R_2 - R_1) \cos \alpha_1,$$

$$Y_2 = \overline{P_2 O_2} = (R_2 - R_1) \sin \alpha_1;$$

pel centro O_3

$$X_3 = \overline{C P_3} = \overline{C P_2} - \overline{O_3 O_2} = X_2 - (R_3 - R_2) \cos \Lambda_2$$

$$Y_3 = \overline{P_3 O_3} = \overline{P_2 O_2} + \overline{Q_3 O_3} = Y_2 + (R_3 - R_2) \text{sen } \Lambda_2;$$

e così si progredirà fino al centro O_{n-1} , pel quale evidentemente si avrà

$$X_{n-1} = X_{n-2} - (R_{n-1} - R_{n-2}) \cos \Lambda_{n-2}$$

$$Y_{n-1} = X_{n-2} + (R_{n-1} - R_{n-2}) \text{sen } \Lambda_{n-2}.$$

Ora, essendo $\overline{CP_{n-1}} = X_{n-1}$ la somma delle proiezioni delle due lunghezze $\overline{O_{n-1} O_n} = R_n - R_{n-1}$ e $\overline{O_n O_{n+1}} = R_{n+1} - R_n$ sulla direzione CA della corda, e $\overline{Q_n O_n} + \overline{Q_{n+1} O_{n+1}} = \overline{O_{n+1} D} - \overline{CD} - \overline{P_{n-1} O_{n-1}} = R_{n+1} - m - Y_{n-1}$ costituendo la somma delle proiezioni delle stesse rette sul prolungamento della monta, si avranno le seguenti equazioni determinatrici di R_n ed R_{n+1} , le quali tengono il luogo delle (1) e (2) del numero 26,

$$(R_n - R_{n-1}) \cos \Lambda_{n-1} + (R_{n+1} - R_n) \cos \Lambda_n = X_{n-1}$$

$$(R_n - R_{n-1}) \text{sen } \Lambda_{n-1} + (R_{n+1} - R_n) \text{sen } \Lambda_n = R_{n+1} - m - Y_{n-1}.$$

Effettuando i prodotti, trasportando tutti i termini cognitivi nel 2° membro e ponendo per semplicità

$$X_{n-1} + R_{n-1} \cos \Lambda_{n-1} = X'$$

$$R_{n-1} \text{sen } \Lambda_{n-1} - m - Y_{n-1} = Y',$$

le ultime due equazioni diventano

$$R_n (\cos \Lambda_{n-1} - \cos \Lambda_n) + R_{n+1} \cos \Lambda_n = X'$$

$$R_n (\text{sen } \Lambda_{n-1} - \text{sen } \Lambda_n) + R_{n+1} (\text{sen } \Lambda_n - 1) = Y',$$

dalle quali, ricavando i valori di R_n e di R_{n+1} , effettuando i prodotti al denominatore di tali valori ed osservando che $\text{sen } \Lambda_n \cos \Lambda_{n-1} - \cos \Lambda_n \text{sen } \Lambda_{n-1} = \text{sen} (\Lambda_n - \Lambda_{n-1}) = \text{sen } \alpha_n$, risultano

$$R_n = \frac{X'(\text{sen } \Lambda_n - 1) - Y' \cos \Lambda_n}{\text{sen } \alpha_n - \cos \Lambda_{n-1} + \cos \Lambda_n}$$

$$R_{n+1} = \frac{X'(\text{sen } \Lambda_n - \text{sen } \Lambda_{n-1}) - Y'(\cos \Lambda_n - \cos \Lambda_{n-1})}{\text{sen } \alpha_n - \cos \Lambda_{n-1} + \cos \Lambda_n}$$

Conosciuti così i raggi R_n ed R_{n+1} riesce facilissimo il trovare le coordinate dei due centri O_n ed O_{n+1} , ed evidentemente risulterà: pel centro O_n

$$X_n = \overline{CP}_n = \overline{CP}_{n-1} - \overline{Q_n O_{n-1}} = X_{n-1} - (R_n - R_{n-1}) \cos \Lambda_{n-1}$$

$$Y_n = \overline{P_n O_n} = \overline{P_n Q_n} + \overline{Q_n O_n} = Y_{n-1} + (R_n - R_{n-1}) \text{sen } \Lambda_{n-1};$$

pel centro O_{n+1}

$$X_{n+1} = 0$$

$$Y_{n+1} = \overline{CO}_{n+1} = \overline{O_{n+1} D} - \overline{CD} = R_{n+1} - m.$$

Costruendo coi valori delle rispettive coordinate i centri $O_1, O_2, O_3, \dots, O_{n-1}, O_n, O_{n+1}$ della mezza semi-ovale e congiungendo O_2 con O_1, O_3 con O_2, \dots, O_n con O_{n-1} , e O_{n+1} con O_n si determinano tutti gli angoli $mO_1A, nO_2m, \dots, sO_np, DO_{n+1}s$ che devono chiudersi cogli archi della curva. Centrando poi successivamente negli indicati centri coi raggi cognitivi $R_1, R_2, \dots, R_n, R_{n+1}$, si arriva facilmente, non solo a descrivere la curva, ma anche ad accertarsi dell'esattezza del suo tracciamento, imperocchè l'arco di centro O_1 e di raggio R_1 deve incominciare in A , l'arco di centro O_{n+1} e di raggio R_{n+1} deve passare per D , e gli archi intermedi devono risultare tali da confondersi il primo punto di ciascuno di essi coll'ultimo punto di quello che gli sta innanzi. Siccome le semi-ovali sono simmetriche rispetto alla loro monta, gli stessi valori, che servono a costruire i centri di mezza curva, servono pure a costruire i centri dell'altra metà.

50. Lunghezza degli archi diversi componenti una semi-ovale e lunghezza della curva intiera. — Si ritengano le denominazioni già stabilite, per rapporto alle ampiezze ed ai raggi dei diversi archi, e si chiamino:

α l'ampiezza di un arco qualunque componente la semi-ovale;

R il suo raggio;

λ la sua lunghezza;

L quella dell'intera curva.

La lunghezza dell'arco qualunque di raggio R e di ampiezza α sarà espressa

$$\lambda = \frac{\alpha}{180^\circ} \pi R,$$

e quella dell'intera semi-ovale, composta di due volte i primi n archi precedenti l'arco culminante e di una sol volta quest'ultimo, sarà data da

$$L = \frac{\pi}{90^\circ} \left(R_1 \alpha_1 + R_2 \alpha_2 + \dots + R_n \alpha_n + \frac{1}{2} R_{n+1} \alpha_{n+1} \right).$$

Le lunghezze dei diversi archi componenti una semi-ovale e pei quali sono noti l'ampiezza ed il raggio si possono anche ottenere usando delle tavole e colle norme che vennero date nel numero 20.

31. Coordinate di un punto qualunque di una semi-ovale e principalmente dei punti di raccordamento degli archi. — Tali coordinate si possono calcolare rispetto alle direzioni Cx della corda e Cy_t della monta e, ritenute le denominazioni già stabilite pei diversi raggi, per le ampiezze dei diversi archi e per le coordinate dei centri $O_1, O_2, O_3, \dots, O_{n-1}, O_n$ rispetto agli assi Cx e Cy , si dicano:

x_1 ed y_1, x_2 ed y_2, \dots, x_{n-1} ed y_{n-1}, x_n e y_n le coordinate dei punti b, c, \dots, e, f in cui si raccordano gli archi;

φ l'angolo che il raggio, condotto da un punto M dell'arco di raggio R al rispettivo centro, fa col raggio dell'estremo di quest'arco che più si approssima alla monta;

k il posto che esso arco occupa a partire dall'estremo A della corda,

x ed y le coordinate volute dell'indicato punto M,

X_k ed Y_k le coordinate del centro di quest'arco rispetto agli assi Cx e Cy .

Le ascisse e le ordinate degli indicati punti per rapporto ad assi paralleli a Cx e Cy , condotti pei centri $O_1, O_2, \dots, O_{n-1}, O_n$ sono rispettivamente:

pel punto <i>b</i>	$R_1 \cos \alpha_1$	$R_1 \sin \alpha_1$;
pel punto <i>c</i>	$R_2 \cos \Lambda_2$	$R_2 \sin \Lambda_2$;
.....
pel punto <i>M</i>	$R \cos (\Lambda_k - \varphi)$	$R \sin (\Lambda_k - \varphi)$;
.....
pel punto <i>e</i>	$R_{n-1} \cos \Lambda_{n-1}$	$R_{n-1} \sin \Lambda_{n-1}$;
pel punto <i>f</i>	$R_n \cos \Lambda_n$	$R_n \sin \Lambda_n$.

Le coordinate degli stessi punti rispetto agli assi *Cx* e *Cy* sono :

pel punto <i>b</i>	$x_1 = R_1 \cos \alpha_1 + X_1$	$y_1 = R_1 \sin \alpha_1$;
pel punto <i>c</i>	$x_2 = R_2 \cos \Lambda_2 + X_2$	$y_2 = R_2 \sin \Lambda_2 - Y_2$;
.....
pel punto <i>M</i>	$x = R \cos (\Lambda_k - \varphi) + X_k$	$y = R \sin (\Lambda_k - \varphi) - Y_k$;
.....
pel punto <i>e</i>	$x_{n-1} = R_{n-1} \cos \Lambda_{n-1} + X_{n-1}$	$y_{n-1} = R_{n-1} \sin \Lambda_{n-1} - Y_{n-1}$;
pel punto <i>f</i>	$x_n = R_n \cos \Lambda_n + X_n$	$y_n = R_n \sin \Lambda_n - Y_n$;

I valori di queste coordinate risultano principalmente utili pel tracciamento delle semi-ovali in grandezza naturale, e per verificare se durante l'esecuzione delle volte non si manifestano alterazioni nelle principali forme loro assegnate.

52. Semi-ovale cogli archi della medesima ampiezza, tendente a confondersi colla mezza ellisse avente i semi-assi eguali alla semi-corda ed alla monta della semi-ovale a descriversi. — L'ingegnere francese Michal, assegnando eguale ampiezza a tutti gli archi componenti una semi-ovale a qualsivoglia numero di centri, propose di immaginare l'ellisse di semi-assi eguali alla semi-corda ed alla monta della curva a descriversi e di determinare i primi *n-1* raggi col prenderli rispettivamente eguali a quei raggi di curvatura dell'indicata ellisse che dividono in due parti eguali gli archi corrispondenti della semi-ovale; e, per giungere allo scopo, diede una formola mercè cui si possono determinare le lunghezze dei raggi di

curvatura di un' ellisse in funzione dell'angolo che essi fanno col grand'asse e degli altri elementi dell'ellisse medesima. Per arrivare a questa formola si chiamino .

c la semi-corda \overline{AC} (fig. 53) della semi-ovale a tracciarsi, e
 m la sua monta \overline{CD} ;

φ l'angolo MNB che la normale MO , in un punto M dell'ellisse di semi-assi \overline{AC} e \overline{CD} , fa coll'asse Cx ;

R il raggio di curvatura dell'ellisse corrispondente all'angolo φ ,
 x ed y le coordinate \overline{CP} e \overline{PM} dell'indicato punto M per rapporto ai due assi Cx e Cy ;

y' ed y'' le prime due derivate dell'equazione dell'ellisse.

Essendo

$$c^2 y^2 + m^2 x^2 = c^2 m^2 \quad (1)$$

l'equazione dell'ellisse di semi-assi c ed m , l'espressione della sua prima derivata sarà

$$y' = -\frac{m^2 x}{c^2 y} \quad (2),$$

e quella della seconda derivata

$$y'' = \frac{m^2 x}{c^2 y^2} y' - \frac{m^2}{c^2 y} \quad (3);$$

essendo poi φ l'angolo che la direzione del raggio di curvatura nel punto M fa coll'asse delle x , si ha

$$y' = -\frac{1}{\operatorname{tang} \varphi} \quad (4).$$

Ricavando ora i valori di x ed y dalle (1) e (2), ponendo in essi il valore di y' dato dalla (4) e mettendoli dopo nella (3), si trova che il valore di y'' in funzione di c , m e $\operatorname{tang} \varphi$ è dato da

$$y'' = \frac{1}{c^2 m^2 \operatorname{tang}^3 \varphi} (c^2 + m^2 \operatorname{tang}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}},$$

e rammentando che la formola la quale conduce a trovare i raggi di curvatura è

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''},$$

si ottiene, nel caso particolare in questione e a riduzioni fatte,

$$R = c^2 m^2 \left(\frac{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi}{c^2 + m^2 \operatorname{tang}^2 \varphi} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (5)$$

che è la formola la quale permette di calcolare, in un'ellisse di semi-assi dati, il raggio di curvatura che fa un angolo qualunque dato col grand'asse.

Volendosi ora risolvere il problema generale di descrivere una semi-ovale a $2n+1$ centri, s'incomincia a trovare l'ampiezza α di ciascuno dei suoi archi col porre

$$\alpha = \frac{180^\circ}{2n+1}$$

e poscia nella formola (5) si fa ordinatamente

$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha, \quad \varphi = \frac{3}{2}\alpha, \quad \varphi = \frac{5}{2}\alpha, \dots\dots \varphi = \frac{2n-3}{2}\alpha;$$

si conoscono così le ampiezze degli archi componenti la semi-ovale non che i primi $n-1$ raggi differenti $R_1, R_2, \dots\dots R_{n-1}$, e si può quindi procedere alla descrizione della curva come venne indicato al numero 28.

Colle formole stabilite ai numeri 29 e 51, ponendovi rispettivamente $\alpha, 2\alpha, \dots\dots k\alpha, \dots\dots (n-2)\alpha, (n-1)\alpha, n\alpha$ in luogo di $\alpha_1, \Lambda_2, \dots\dots \Lambda_k, \dots\dots \Lambda_{n-2}, \Lambda_{n-1}, \Lambda_n$, si possono calcolare le coordinate dei diversi centri, le lunghezze dei raggi dell'arco culminante e dell'arco che lo precede, le coordinate di un punto qualunque e dei punti di raccordamento per una semi-ovale descritta col metodo di Michal; ponendo poi α in luogo di $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ nella seconda formola del numero 50 vi trova che la lunghezza L dell'intera semi-ovale è espressa da

$$L = \frac{\pi\alpha}{90^\circ} \left(R_1 + R_2 + \dots\dots + R_n + \frac{1}{2} R_{n+1} \right).$$

55. **Tavola di Michal per la descrizione delle semi-ovali a cinque, a sette e a nove centri.** — Michal, nell'intento di somministrare degli elementi pratici mercè cui risulti possibile trovare le lunghezze dei raggi necessari a descrivere una semi-ovale di corda e di monta data, servendosi della formola (5) del numero 52, ha calcolato tre tavole applicabili al tracciamento delle semi-ovali a cinque, a sette e a nove centri. In tali tavole si suppone che si debbano adottare curve a cinque centri quando il rapporto della monta all'apertura varia da 0,56 a 0,50, curve a sette centri quando l'accennato rapporto varia da 0,55 a 0,25, e curve a nove centri quando varia da 0,25 a 0,20.

Semi-ovali a 5 centri.

RAPPORTO della monta alla corda	RAPPORTO del 1° raggio alla semi-corda
0,56	0,556
0,55	0,550
0,54	0,504
0,53	0,477
0,52	0,450
0,51	0,425
0,50	0,396

Semi-ovali a 7 centri.

RAPPORTO della monta alla corda	RAPPORTO del 1° raggio alla semi-corda	RAPPORTO del 2° raggio alla semi-corda
0,55	0,455	0,650
0,52	0,451	0,604
0,51	0,406	0,578
0,50	0,583	0,551
0,29	0,559	0,525
0,28	0,536	0,498
0,27	0,512	0,472
0,26	0,289	0,445
0,25	0,265	0,419

Semi-ovali a 9 centri.

RAPPORTO della monta alla corda	RAPPORTO del 1° raggio alla semi-corda	RAPPORTO del 2° raggio alla semi-corda	RAPPORTO del 3° raggio alla semi-corda
0,25	0,259	0,541	0,597
0,24	0,240	0,518	0,556
0,23	0,222	0,296	0,555
0,22	0,203	0,276	0,504
0,21	0,185	0,251	0,474
0,20	0,166	0,228	0,443

L'uso di queste tavole è semplicissimo; a farlo apprendere valga un esempio particolare in cui mi propongo di descrivere una semi-ovale avente per corda $\overline{AB} = 20^m$ e per monta $\overline{CD} = 6^m,40$ (*fig.* 54).

Dividendo la monta per la corda si trova $\frac{6,40}{20} = 0,32$ e la semi-ovale a descriversi sarà a sette centri; i due numeri 0,451 e 0,604 corrispondenti al trovato rapporto, moltiplicati per la semi-corda 10^m danno rispettivamente nei prodotti $0,451 \times 10 = 4^m,51$ e $0,604 \times 10 = 6^m,04$ il primo ed il secondo raggio. Conoscendosi ora i raggi di cui si può disporre, descrivendo sulla corda \overline{AB} la semi-circonferenza AKB , dividendola in 7 parti eguali e tirando i raggi corrispondenti ai punti di divisione e applicando il metodo esposto al numero 23 si arriva ad ottenere la semi-ovale rappresentata nella figura 54.

54. Descrizione della semi-ovale a tre centri coi suoi tre archi della stessa ampiezza. — La regola che venne data al numero 23 per la descrizione di una semi-ovale a qualsiasi numero di centri conduce al seguente metodo per descrivere la semi-ovale a tre centri coi suoi tre archi della medesima ampiezza. Descritta la mezza circonferenza AEB (*fig.* 55) sulla corda \overline{AB} presa come diametro, si osservi che ciascuno dei tre archi della semi-ovale deve avere l'ampiezza di $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$; si porti la semi-corda \overline{AC} come corda nella detta semi-circonferenza da A in F , ed unendo F con C risulta il triangolo equilatero FAC , l'angolo FCA di 60° ed il suo complemento ECF di 50° . Fatto questo, si conduca per l'estremo D della monta la retta DG parallela alla corda EF , si determini il suo

incontro G coll'altra corda FA e per G si conduca la retta $\overline{GO_1O_2}$ parallela a CF. Il primo centro della curva che vuoi descrivere è in O_1 , trovasi in O_2 quello dell'arco culminante, e si determina il centro O_3 del terzo arco prendendo $\overline{CO_3} = \overline{CO_1}$. L'arco di centro O_1 e di raggio $\overline{O_1A}$ passa sicuramente per G perchè il triangolo $\overline{AO_1G}$, essendo equilatero, ha i due lati $\overline{O_1A}$ ed $\overline{O_1G}$ eguali fra di loro. L'arco di centro O_2 e di raggio $\overline{O_2G}$ indubitatamente viene a passare per D perchè, essendo il triangolo $\overline{GO_2D}$ simile al triangolo \overline{FCE} , come quest'ultimo è isoscele e quindi $\overline{O_2D} = \overline{O_2G}$. Finalmente, pella simmetria della figura rispetto alla retta O_2E , risulta che, tirando la retta O_2O_3z e continuando l'arco di centro O_2 e di raggio $\overline{O_2G}$, si deve avere il punto H distante da O_3 di $\overline{O_3H} = \overline{O_1A} = \overline{O_3B}$, cosicchè l'arco di centro O_3 e di raggio $\overline{O_3H}$ passa infallantemente per B.

35. Lunghezze dei due raggi diversi di una semi-ovale a tre centri coi suoi tre archi della stessa ampiezza. — Chiamando R_1 il raggio minore $\overline{O_1A}$ ed R_2 il raggio maggiore $\overline{O_2G}$, si ricorra alle equazioni (1) e (2) del numero 26. Osservando che

$$\Lambda_n = \alpha_1 = \angle ACF = 60^\circ,$$

$$\operatorname{sen} \Lambda_n = \frac{1}{2} \sqrt{3},$$

$$\operatorname{cos} \Lambda_n = \frac{1}{2},$$

e chiamando c la semi-corda \overline{CA} ed m la monta \overline{CD} , le citate equazioni diventano

$$R_1 + \frac{1}{2}(R_2 - R_1) = c,$$

$$\frac{1}{2}(R_2 - R_1) \sqrt{3} = R_2 - m,$$

dalle quali immediatamente si deducono i seguenti valori di R_1 e di R_2

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= c - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (c - m) \\ R_2 &= c + \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (c - m) \end{aligned} \right\} (1).$$

Osservando che $3 = \frac{363}{121}$, che $\sqrt{121} = 11$ e che $\sqrt{363}$ è di poco superiore a 19 giacchè $19^2 = 361$, con molta approssimazione si può assumere $\sqrt{3} = \frac{19}{11}$ ed allora i valori di R_1 e di R_2 diventano

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{15m - 4c}{11} \\ R_2 &= \frac{26c - 15m}{11} \end{aligned} \right\} (2).$$

Queste ultime due formole permettono di calcolare i due raggi diversi di una semi-ovale a tre centri coi suoi tre archi della medesima ampiezza, e, tuttochè siano esse soltanto formole d'approssimazione, pure molto vengono esse usate dai pratici.

Risulta dalla prima delle equazioni (1) ossia dalla formola che dà il valore R_1 , come non sempre sia possibile la costruzione della semi-ovale a tre centri cogli archi della stessa ampiezza, e come tale operazione si potrà soltanto fare finchè

$$c > \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (c - m),$$

ossia finchè

$$\frac{m}{c} > 1 - \frac{2}{1 + \sqrt{3}},$$

cosicchè

$$1 - \frac{2}{1 + \sqrt{3}} = 0,267949,$$

costituisce il limite inferiore del rapporto che deve esistere fra i semi-assi, affinchè sia possibile la costruzione del numero precedente.

56. Sviluppo di una semi-ovale a tre centri coi suoi tre archi della medesima ampiezza. — Questo sviluppo non è altro che il valore di L , il quale ricavasi dall'ultima equazione del numero 52 quando in essa si faccia $\alpha = 60^\circ$, e quando nella medesima si pongano per R_1 ed R_{n+1} i valori di R_1 e di R_2 dati dalle equazioni (1) del numero precedente. Così facendo si trova

$$L = \frac{4}{3} \pi \left[3c - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} (c - m) \right] \quad (1).$$

Questa formola, assumendo $\frac{22}{7}$ per valore di π e $\frac{19}{11}$ per valore di $\sqrt{3}$, si riduce a quest'altra,

$$L = \frac{12c + 10m}{7},$$

che, per la sua semplicità, più della prima vien adottata dai pratici nel calcolo dello sviluppo di una semi-ovale a tre centri coi suoi tre archi della stessa ampiezza.

Tuttochè semplicissime le formole mediante le quali si può trovare lo sviluppo della semi-ovale a tre centri coi suoi tre archi della medesima ampiezza, pure, per maggior comodo dei pratici, credo conveniente il dare una tavola di valori particolari L_1 di L , calcolata colla formola (1) ridotta alla forma

$$L = \frac{4}{3} \pi c \left[3 - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \left(1 - \frac{m}{c} \right) \right]$$

per la semi-corda $c = 1$ e per valori del rapporto $\frac{m}{c}$ variabili di centesimo in centesimo da 0,27 a 1.

$\frac{m}{c}$	L_1								
0,27	2,097	0,42	2,312	0,57	2,526	0,72	2,741	0,87	2,956
0,28	2,112	0,43	2,326	0,58	2,541	0,73	2,755	0,88	2,970
0,29	2,126	0,44	2,341	0,59	2,555	0,74	2,770	0,89	2,984
0,30	2,140	0,45	2,355	0,60	2,569	0,75	2,784	0,90	2,999
0,31	2,155	0,46	2,369	0,61	2,584	0,76	2,798	0,91	3,013
0,32	2,169	0,47	2,383	0,62	2,598	0,77	2,813	0,92	3,027
0,33	2,183	0,48	2,398	0,63	2,612	0,78	2,827	0,93	3,041
0,34	2,197	0,49	2,412	0,64	2,627	0,79	2,841	0,94	3,056
0,35	2,212	0,50	2,426	0,65	2,641	0,80	2,855	0,95	3,070
0,36	2,226	0,51	2,441	0,66	2,655	0,81	2,870	0,96	3,084
0,37	2,240	0,52	2,455	0,67	2,670	0,82	2,884	0,97	3,099
0,38	2,255	0,53	2,469	0,68	2,684	0,83	2,898	0,98	3,113
0,39	2,269	0,54	2,484	0,69	2,698	0,84	2,913	0,99	3,127
0,40	2,283	0,55	2,498	0,70	2,712	0,85	2,927	1,00	3,142
0,41	2,298	0,56	2,512	0,71	2,727	0,86	2,941		

L'uso di questa tavola è precisamente quale venne indicato al numero 24 per la tavola che nello stesso numero venne data onde trovare gli sviluppi degli archi circolari dei quali si conoscono le corde e le saette.

57. **Semi-ovali cogli archi della stessa ampiezza e coi raggi crescenti in progressione aritmetica.** — Alle denominazioni già stabilite, per quanto concerne il numero dei centri, la corda, la monta, l'ampiezza di ciascun arco e la lunghezza di ciascun raggio, aggiungasi la denominazione δ per la ragione della progressione aritmetica che deve passare fra i raggi ossia per la differenza fra i due raggi successivi. Fra il raggio $R_{n+\delta}$ dell'arco culminante, il raggio R_1 del primo arco, il numero n degli archi che precedono l'arco culminante e la differenza δ , si ha l'equazione

$$R_{n+\delta} = R_1 + n\delta \quad (1).$$

Ricorrendo alle equazioni (1) e (2) del numero 26; ponendo $R_2 - R_1 = R_3 - R_2 = \dots = R_n - R_{n-1} = R_{n+\delta} - R_n = \delta$, $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 2\alpha$, $\alpha_n = n\alpha$; mettendovi per $R_{n+\delta}$ il valore dato dalla (1) e ponendo δ factor comune si trova

$$R_1 + \delta(\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha) = c$$

$$R_1 + \delta(n - \sin \alpha - \sin 2\alpha - \dots - \sin n\alpha) = m,$$

le quali, facendo

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha = H,$$

$$n - \sin \alpha - \sin 2\alpha - \dots - \sin n\alpha = H',$$

diventano

$$\left. \begin{aligned} R_1 + \delta H &= c \\ R_1 + \delta H' &= m \end{aligned} \right\} (2).$$

Da queste equazioni, combinandole per sottrazione, si ricava

$$\delta = \frac{c - m}{H - H'},$$

e, ponendo questo valore nella prima delle (2), si trova

$$R_1 = \frac{Hm - H'c}{H - H'}.$$

In quanto agli altri raggi, sono essi evidentemente espressi da

$$R_2 = R_1 + \delta, \quad R_3 = R_1 + 2\delta, \quad \dots, \quad R_{n+1} = R_1 + n\delta.$$

Conoscendosi ora le ampiezze degli archi tutti componenti la semi-ovale non che i loro raggi, risulta della massima semplicità il descrivere graficamente la curva.

Essendo cognite le ampiezze di tutti gli archi della semi-ovale e le lunghezze di tutti i raggi, risulta facile il calcolare le coordinate dei centri, quelle dei punti di raccordamento e di punti qualunque colle formole stabilite ai numeri 29 e 34; e con quelle del numero 50 si possono trovare le lunghezze di ciascun arco, non che lo sviluppo dell'intera curva.

58. Tavole di Lerouge pel tracciamento delle semi-ovali a tre, a cinque, a sette e a nove centri. — In tali tavole, calcolate nell'ipotesi degli archi della medesima ampiezza e dei raggi crescenti in progressione aritmetica, si suppone la corda presa per unità, e si trovano inscritti il valore del primo raggio e la differenza fra i due raggi successivi per rapporti fra la monta e l'apertura, variabili da 0,580 a 0,500, da 0,350 a 0,500, da 0,530

a 0,500, e da 0,520 a 0,500, secondo che trattasi di semi-ovali a tre, a cinque, a sette e a nove centri.

Semi-ovali a tre centri.

SAETTA	1° Raggio	DIFFERENZA dei raggi successivi
0,380	0,356	0,527
0,390	0,350	0,501
0,400	0,363	0,273
0,410	0,377	0,246
0,420	0,391	0,219
0,450	0,404	0,191
0,440	0,418	0,164
0,450	0,432	0,157
0,460	0,445	0,109
0,470	0,459	0,082
0,480	0,473	0,055
0,490	0,486	0,027
0,500	0,500	0,000

Semi-ovali a cinque centri.

SAETTA	1° Raggio	DIFFERENZA dei raggi successivi
0,550	0,245	0,228
0,560	0,262	0,215
0,570	0,279	0,198
0,580	0,296	0,183
0,590	0,313	0,167
0,400	0,350	0,152
0,410	0,347	0,137
0,420	0,364	0,122
0,430	0,381	0,107
0,440	0,398	0,091
0,450	0,416	0,077
0,460	0,432	0,061
0,470	0,449	0,046
0,480	0,466	0,030
0,490	0,483	0,015
0,500	0,500	0,000

Semi-ovali a sette centri.

SAETTA	1° Raggio	DIFFERENZA dei raggi successivi
0,350	0,183	0,181
0,340	0,202	0,171
0,350	0,221	0,160
0,360	0,239	0,149
0,370	0,258	0,139
0,380	0,276	0,128
0,390	0,295	0,117
0,400	0,314	0,107
0,410	0,332	0,096
0,420	0,351	0,085
0,430	0,370	0,075
0,440	0,388	0,064
0,450	0,407	0,053
0,460	0,425	0,043
0,470	0,444	0,032
0,480	0,463	0,021
0,490	0,481	0,011
0,500	0,500	0,000

Semi-ovali a nove centri.

SAETTA	1° Raggio	DIFFERENZA dei raggi successivi
0,320	0,148	0,148
0,330	0,167	0,140
0,340	0,187	0,132
0,350	0,206	0,123
0,360	0,226	0,115
0,370	0,245	0,107
0,380	0,265	0,099
0,390	0,285	0,091
0,400	0,304	0,082
0,410	0,324	0,074
0,420	0,343	0,066
0,430	0,363	0,058
0,440	0,383	0,049
0,450	0,402	0,041
0,460	0,422	0,033
0,470	0,441	0,025
0,480	0,461	0,016
0,490	0,480	0,008
0,500	0,500	0,000

Osservando che aggiungendo la differenza dei raggi successivi al primo, si ha il secondo raggio, che aggiungendola al secondo si ha il terzo raggio, e così di seguito, risulta facilissimo l'uso della citata tavola. La figura 56 rappresenta una semi-ovale a nove centri di corda 20^m , di monta $7^m,20$, avente per rapporto fra la monta e la corda $\frac{7,20}{20} = 0,360$, descritta col primo raggio $= 0,226 \times 20 = 4^m,520$, colla differenza fra due raggi successivi $= 0,115 \times 20 = 2^m,300$ ed avente quindi il secondo raggio $= 4,520 + 2,300 = 6^m,820$, il terzo raggio $= 6,820 + 2,300 = 9^m,120$, il quarto raggio $= 9,120 + 2,300 = 11^m,420$.

39. Tavole di Michal per la descrizione di semi-ovali cogli archi presso a poco della medesima lunghezza per le curve a cinque, a sette e a nove centri. — I calcoli da instituirsi per giungere a trovare le formole convenienti alla determinazione dei raggi delle semi-ovali cogli archi della medesima lunghezza, a motivo delle quantità trascendenti che vengono ad entrare nelle formole, risultano, se non impossibili, almeno di una complicazione somma, per cui Michal, proponendosi di rendere presso a poco eguali le lunghezze degli archi componenti una semi-ovale, si limitò a trovare per tentativi le ampiezze degli archi diversi componenti le semi-ovali a cinque, a sette e a nove centri e le lunghezze dei raggi disponibili. Queste tavole si estendono a rapporti fra la monta e la corda variabili da 0,36 a 0,30 per le semi-ovali a cinque centri, da 0,33 a 0,25 per le semi-ovali a sette centri e da 0,25 a 0,20 per le semi-ovali a nove centri.

Semi-ovali a cinque centri.

RAPPORTO della monta alla corda	AMPIEZZA del 1° arco	AMPIEZZA del 2° arco	AMPIEZZA della metà dell'arco culminante	RAPPORTO del 1° raggio alla semi-corda
0,36	49° 0	32° 0	9°	0,600
0,35	50 20	30 40	9	0,578
0,34	51 40	29 20	9	0,557
0,33	53 0	28 0	9	0,535
0,32	54 20	26 40	9	0,513
0,31	55 40	25 20	9	0,492
0,30	57 0	24 0	9	0,470

Semi-ovalì a sette centri.

RAPPORTO della monta alla corda	AMPIEZZA del 1° arco	AMPIEZZA del 2° arco	AMPIEZZA del 3° arco	AMPIEZZA della metà dell'arco culminante	RAPPORTO del 1° raggio alla semi-corda	RAPPORTO del 2° raggio alla semi-corda
0,33	45° 0	25° 0	18° 0	6°	0,500	0,900
0,32	45 37	22 52	17 50	6	0,480	0,887
0,31	44 15	22 45	17 0	6	0,460	0,875
0,30	44 58	22 37	16 50	6	0,440	0,862
0,29	45 50	22 50	16 0	6	0,420	0,850
0,28	46 7	22 22	15 50	6	0,400	0,837
0,27	46 45	22 15	15 0	6	0,380	0,825
0,26	47 25	22 7	14 50	6	0,360	0,812
0,25	48 0	22 0	14 0	6	0,340	0,800

Semi-ovalì a nove centri.

RAPPORTO della monta alla corda	AMPIEZZA del 1° arco	AMPIEZZA del 2° arco	AMPIEZZA del 3° arco	AMPIEZZA del 4° arco	AMPIEZZA della metà dell'arco culminante	RAPPORTO del 1° raggio alla semi-corda	RAPPORTO del 2° raggio alla semi-corda	RAPPORTO del 3° raggio alla semi-corda
0,25	48° 0	20° 0	10° 0	9 0	5°	0,520	0,800	1,450
0,24	49 12	19 24	9 48	8 56	5	0,504	0,800	1,490
0,23	50 24	18 48	9 56	8 12	5	0,288	0,800	1,530
0,22	51 36	18 12	9 24	7 48	5	0,272	0,800	1,570
0,21	52 48	17 56	9 12	7 24	5	0,256	0,800	1,610
0,20	54 0	17 0	9 0	7 0	5	0,240	0,800	1,650

In ogni caso particolare in cui sia data corda e monta, si fa il rapporto di questa a quella, si cerca questo rapporto nella prima colonna e si trovano corrispondentemente ad esso gli angoli degli archi diversi, non che i raggi disponibili dedotti nell'ipotesi della semi-corda eguale all'unità e che, moltiplicati per la semi-corda data, somministrano i raggi corrispondenti al caso che si considera. Si hanno così tutti gli elementi necessari per costruire la semi-ovale col procedimento generale esposto al numero 28. La curva rappresentata nella figura 37 è una semi-ovale a 5 centri cogli

archi presso a poco della stessa lunghezza, avente per corda 20^m, per monta 6^m,30, per ampiezza del primo arco 51° 40' per ampiezza del secondo arco 29° 20', per ampiezza della metà dell'arco culminante 9°, e per primo raggio $0,557 \times 10^m = 5^m,57$.

40. **Metodi generalmente seguiti nella pratica delle costruzioni pel tracciamento delle ellissi.** — Allorquando avviene al costruttore di dover tracciare un'ellisse, conosce egli i due semi-assi, ed ecco quali sono i metodi che generalmente convien seguire nell'effettivo tracciamento della curva.

Quando la curva deve essere descritta sopra un disegno si possono determinare prima i fuochi, i quali sono due punti posti sull'asse maggiore distanti da un estremo dell'asse minore di una quantità eguale al semi-asse maggiore; servirsi della proprietà di cui gode l'ellisse, che congiungendo ciascuno dei suoi punti ai due fuochi, la somma delle due distanze eguaglia l'asse maggiore; fissare alcuni punti sulla retta che unisce il centro dell'ellisse con un fuoco; e far successivamente centro nei fuochi stessi con aperture di compasso eguali alle distanze dei detti punti dagli estremi dell'asse maggiore per ottenere tante volte quattro punti della curva quanti sono quelli presi sull'asse maggiore. — Invece di questo metodo torna generalmente più comodo di prendersi una listerella di carta avente un suo filo ben rettilineo. Su questo filo si portano i semi-assi maggiore e minore dell'ellisse per modo che siano l'uno sovrapposto all'altro ed abbiano inoltre un'estremità comune. Se in seguito si dispone la listerella in guisa che l'estremità della retta portata sul filo ben rettilineo non comune ai due semi-assi si trovi sull'asse minore dell'ellisse da costruirsi e l'altro estremo della differenza dei semi-assi medesimi sia sull'asse maggiore, il terzo punto segnato sul detto filo sarà un punto dell'ellisse. L'esattezza di questo semplicissimo metodo per descrivere l'ellisse si dimostra osservando che, essendo a e b i due semi-assi \overline{CB} e \overline{CD} (*fig. 53*) di una di queste curve, x ed y le due coordinate \overline{Cp} e \overline{pm} di un suo punto qualunque m rispetto alle direzioni dei suoi assi, si ha fra le quantità a , b , x ed y la relazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

la quale si trova verificata quando, presi i punti n e q in modo da essere $\overline{mn} = b$ ed $\overline{mq} = a$, si faccia in essa

$$x = \overline{Cp} = \overline{qr} = a \cos mnp,$$

$$y = \overline{mp} = b \operatorname{sen} mnp.$$

Allorquando una ellisse od una semi-ellisse deve essere descritta in grandezza naturale su una superficie piana, per esempio sul suolo ben piano e per quanto si può orizzontale, su cui vuolsi comporre una centina od incavallatura per una vólta a direttrice ellittica, si usa generalmente: segnarsi le direzioni dei due assi della curva; prendere su queste direzioni l'asse maggiore ed il semi-asse minore; calcolarsi mediante l'equazione dell'ellisse riferita al centro ed agli assi, ossia mediante l'equazione già riportata in questo numero, le ordinate corrispondenti a diverse ascisse e fissarsi così parecchi punti mediante queste ordinate. — Invece di seguire questo metodo si può anche determinare la distanza d di ciascuno dei due fuochi dal centro dell'ellisse, la qual distanza, essendo a e b i due semi-assi della curva, vale

$$d = \sqrt{a^2 - b^2};$$

servirsi di questa distanza per fissare la posizione dei due fuochi; e quindi descrivere l'ellisse per moto continuo prendendo una funicella lunga come l'asse maggiore, fissandola per le sue estremità nei fuochi, e tracciando la linea descritta da una punta che si fa scorrere sul suolo mantenendola contro la funicella in guisa che rimanga questa sempre distesa secondo una linea spezzata di due lati. Così procedendo si descrive la vera ellisse domandata, giacché si ottiene una curva per cui la somma delle distanze dei suoi punti dai fuochi è costantemente eguale all'asse maggiore. — Nella pratica delle costruzioni e nelle operazioni di qualche importanza, quasi sempre si descrivono le ellissi col metodo delle coordinate, e si riserva il secondo metodo per verificare l'esattezza del lavoro e per tracciare le parti di curva intercette fra i diversi punti costrutti colle loro coordinate.

41. Sviluppo di una semi-ellisse. — Sia AMB (*fig. 38*) un quarto di ellisse, ed ANC sia un quarto di circonferenza di circolo avente per suo raggio il semi-asse $\overline{OA} = a$ del quarto di ellisse. Si consideri un punto qualunque M della curva ellittica; si dicano

rispettivamente x ed y le due coordinate \overline{OP} e \overline{PM} di questo punto rispetto ai due assi coordinati Ox ed Oy assunti nella direzione dei semi-assi dell'ellisse; si prolunghi l'ordinata \overline{PM} fino ad incontrare in N il quarto di circonferenza del circolo; e si chiami φ l'angolo che la retta ON uniente il punto N coll'origine O fa col'asse Oy delle ordinate. Dal triangolo rettangolo OPN , in cui l'angolo ONP è φ , immediatamente si ricava

$$x = a \operatorname{sen} \varphi,$$

$$\overline{PN} = a \cos \varphi;$$

e, per la proporzionalità dell'ordinata \overline{PM} dell'ellisse e dell'ordinata \overline{PN} della circonferenza di circolo corrispondenti alla stessa ascissa \overline{OP} ai semi-assi \overline{OB} ed \overline{OA} dell'ellisse, avendosi

$$\overline{PM} = \frac{a}{b} y,$$

risulta

$$y = b \cos \varphi.$$

Ora, si sa dal calcolo differenziale che, essendo ds il differenziale dell'arco di una curva, si ha

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2};$$

per cui, essendo nel caso di un arco ellittico

$$dx = a \cos \varphi d\varphi, \quad dy = -b \operatorname{sen} \varphi d\varphi,$$

l'espressione di ds diventa

$$ds = d\varphi \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

Quest'espressione, ponendo $1 - \operatorname{sen}^2 \varphi$ invece di $\cos^2 \varphi$, mettendo il fattore a fuori del radicale e facendo

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = e,$$

si riduce a

$$ds = a d\varphi \sqrt{1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} = a(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi.$$

Qualora si voglia lo sviluppo d'un arco $BM = s$ dell'ellisse bisogna integrare l'ultima espressione di ds fra i limiti 0 e φ ; è necessario integrarla fra i limiti 0 e $\frac{\pi}{2}$ quando si cerca lo sviluppo S del quarto di ellisse BMA ; e finalmente si prenderà il doppio di S per lo sviluppo L della mezza ellisse.

L'espressione $(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi$ è tale da non potersi integrare che per approssimazione sviluppandola in serie secondo la formola del binomio di Newton. Questo lavoro già venne fatto dal dotto e laborioso Legendre, e ci lasciò esso delle preziose tavole mediante le quali, per diversi valori di c e per molteplici valori di φ , si ha l'integrale corrispondente. Legendre, osservando che il numero c è una frazione, lo ha rappresentato col seno di un angolo θ , e così ha fatto dipendere da due angoli φ e θ l'integrale dell'espressione $(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi$. Chiama *ampiezza* l'angolo φ , *modulo* l'angolo θ e le sue tavole contengono i valori del citato integrale corrispondenti a tutti quelli di φ e θ variabili di grado in grado da zero a roventa.

Quello che più importa nella pratica delle costruzioni è di avere un mezzo facile per trovare gli sviluppi delle mezze ellissi; ed è per soddisfare a quest'esigenza che qui appresso si riporta un'utile tavola tratta dagli *Elementi di calcolo differenziale e di calcolo integrale* del professore Francesco Paolo Tucci, la quale serve ad ottenere

$\int (1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi = E$, preso da $\varphi = 0^\circ$ a $\varphi = 90^\circ$, pei quadranti dei perimetri ellittici di semi-asse maggiore 1 e di eccentricità $c = \operatorname{sen} \theta$ per valori di θ compresi fra 0° e 90° .

θ	E	θ	E	θ	E
0°	1,57079 63	30°	1,46746 22	60°	1,21105 60
1	1,57067 67	31	1,46077 35	61	1,20153 81
2	1,57031 79	32	1,45390 77	62	1,19204 56
3	1,56972 01	33	1,44686 92	63	1,18258 90
4	1,56888 57	34	1,43966 21	64	1,17317 95
5	1,56780 90	35	1,43229 09	65	1,16382 79
6	1,56649 67	36	1,42476 03	66	1,15454 66
7	1,56494 75	37	1,41707 49	67	1,14534 78
8	1,56316 22	38	1,40923 97	68	1,13624 45
9	1,56114 17	39	1,40125 97	69	1,12724 96
10	1,55888 71	40	1,39314 02	70	1,11837 77
11	1,55639 97	41	1,38488 65	71	1,10964 54
12	1,55368 08	42	1,37650 45	72	1,10106 21
13	1,55073 19	43	1,36729 94	73	1,09265 05
14	1,54755 45	44	1,35937 69	74	1,08442 52
15	1,54415 04	45	1,35064 38	75	1,07640 51
16	1,54052 15	46	1,34180 60	76	1,06860 95
17	1,53666 97	47	1,33286 99	77	1,06105 95
18	1,53259 72	48	1,32384 21	78	1,05377 69
19	1,52830 62	49	1,31472 95	79	1,04678 64
20	1,52379 92	50	1,30553 90	80	1,04011 45
21	1,51907 85	51	1,29627 80	81	1,03378 94
22	1,51414 69	52	1,28695 37	82	1,02784 56
23	1,50900 71	53	1,27757 39	83	1,02231 25
24	1,50366 21	54	1,26814 65	84	1,01723 69
25	1,49811 49	55	1,25867 96	85	1,01266 55
26	1,49236 87	56	1,24918 16	86	1,00864 79
27	1,48642 68	57	1,23966 11	87	1,00525 85
28	1,48029 26	58	1,23012 72	88	1,00258 40
29	1,47396 98	59	1,22058 89	89	1,00075 15
30	1,46746 22	60	1,21105 60	90	1,00000 00

Venendo ora all'uso della riferita tavola, suppongasi di dover trovare lo sviluppo di una semi-ellisse avente 10 metri per semi-asse maggiore a e 4 metri per semi-asse minore b . Per risolvere il problema si incominci dal fare il valore del moduli θ ponendo

$$\text{sen } \theta = c = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{100 - 16}}{10} = \frac{\sqrt{84}}{10}$$

cui corrisponde, tenendo conto solamente dei minuti primi,

$$\theta = 66^\circ 25'$$

Trovato così il modulo θ , si cerca nella tavola e nelle colonne

intestate θ il numero 66° , e si trova che il valore E' di E ad esso corrispondente è

$$E' = 1,1545466.$$

Per tener poi conto dei $25'$ contenuti nel valore di θ si osserva che la variazione fra il valore dell' E corrispondente a 67° ed il valore dell' E corrispondente a 66° è

$$1,1453478 - 1,1545466 = -0,0091988$$

e che quindi la variazione θ da farsi sul valore di E' per avere il valore dell' E corrispondente a 66° e $25'$ è approssimativamente data da

$$\Delta = -\frac{25'}{60'} 0,0091988 = -0,0038328.$$

Segue da ciò: che per valore di E corrispondente a $\theta = 66^\circ 25'$ si può assumere

$$E = E' + \Delta = 1,1545466 - 0,0038328 = 1,1507138;$$

che la lunghezza S del quadrante ellittico di semi-assi $a = 10^m$ $eb = 4^m$ vien data da

$$S = 10 \cdot E = 11^m,507138;$$

e finalmente che la lunghezza L della mezza ellisse è

$$L = 2 \cdot S = 23^m,014276.$$

Assai più comode della tavola, di cui già si è indicata l'origine e l'uso per la rettificazione della mezza ellisse, sono quelle in cui in una colonna trovansi diversi valori del rapporto $\frac{b}{a}$ fra il semi-asse minore ed il semi-asse maggiore, e nell'altra lo sviluppo E della corrispondente semi-periferia ellittica per il caso di $a = 1$. Una tavola ad imitazione di quella dello Sganzin, e che può servire allo scopo di questo lavoro, è quella che immediatamente vien riportata in cui i valori del rapporto $\frac{b}{a}$ variano di centesimo in centesimo da 0,20 a 1.

$\frac{b}{a}$	E								
0,20	2,102	0,36	2,258	0,52	2,448	0,68	2,665	0,84	2,895
0,21	2,111	0,37	2,269	0,53	2,461	0,69	2,677	0,85	2,910
0,22	2,120	0,38	2,280	0,54	2,474	0,70	2,691	0,86	2,925
0,23	2,129	0,39	2,291	0,55	2,487	0,71	2,705	0,87	2,940
0,24	2,138	0,40	2,502	0,56	2,500	0,72	2,719	0,88	2,956
0,25	2,147	0,41	2,514	0,57	2,515	0,75	2,754	0,89	2,971
0,26	2,156	0,42	2,525	0,58	2,527	0,74	2,748	0,90	2,986
0,27	2,166	0,43	2,557	0,59	2,540	0,75	2,765	0,91	3,002
0,28	2,175	0,44	2,549	0,60	2,555	0,76	2,778	0,92	3,017
0,29	2,185	0,45	2,561	0,61	2,567	0,77	2,792	0,93	3,052
0,50	2,195	0,46	2,575	0,62	2,580	0,78	2,807	0,94	3,048
0,51	2,205	0,47	2,586	0,63	2,595	0,79	2,821	0,95	3,065
0,52	2,215	0,48	2,598	0,64	2,607	0,80	2,856	0,96	3,079
0,53	2,226	0,49	2,410	0,65	2,621	0,81	2,851	0,97	3,094
0,54	2,256	0,50	2,425	0,66	2,655	0,82	2,865	0,98	3,110
0,55	2,247	0,51	2,455	0,67	2,649	0,85	2,880	0,99	3,126
								1,00	3,142

Questa tavola si impiega per trovare le semi-periferie ellittiche precisamente come venne indicato al numero 24 parlando dell'uso della tavola che serve a calcolare gli sviluppi degli archi circolari dei quali si conoscono le corde e le saette. Nel caso di $a=10^m$ e $b=4^m$ si ha :

$$\frac{b}{a}=0,40$$

$$E=2,302$$

$$L=2,302 \times 10 = 23^m,02.$$

42. Formole atte al calcolo dello sviluppo delle mezze ellissi.

— Come si è visto nel precedente numero, il differenziale di un arco qualunque d'ellisse si esprime con

$$ds = a(1 - c^2 \text{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi$$

e la lunghezza S del quadrante ellittico vien data da

$$S = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - c^2 \text{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi.$$

Svolgendo $(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$ colla formola del binomio, si trova

$$S = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} c^4 \operatorname{sen}^4 \varphi - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} c^6 \operatorname{sen}^6 \varphi - \dots \right),$$

la quale, integrata coll'osservare che in generale

$$\int \operatorname{sen}^m \varphi \, d\varphi = -\frac{\operatorname{sen}^{m-1} \varphi \cos \varphi}{m} + \frac{m-1}{m} \int \operatorname{sen}^{m-2} \varphi \, d\varphi$$

e che

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^m \varphi \, d\varphi = \frac{(m-1)(m-3)(m-5)\dots\dots 1}{m(m-2)(m-4)\dots\dots 2} \frac{1}{2} \pi,$$

e raddoppiata, conduce alla seguente serie determinatrice dello sviluppo L della semi-ellisse

$$L = a \pi \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} c \right)^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} c^2 \right)^2 - \frac{1}{5} \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} c^3 \right)^2 - \dots \right] \quad (1).$$

La serie esprime il valore di L nelle ordinarie circostanze della pratica è convergentissima perchè c risulta generalmente una frazione piuttosto piccola, per cui si può anche limitare ai primi due termini l'espressione della semi-periferia ellittica. Così facendo

e ponendo per c il suo valore $\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, si trova

$$L = \frac{\pi}{4} \frac{3a^2 + b^2}{a} \quad (2),$$

la quale, come asserisce anche Brunacci, conduce a risultati sufficientemente approssimati nelle ordinarie circostanze della pratica.

Un'altra formoletta, che da molti pratici vien adoperata per trovare la lunghezza L della semi-periferia ellittica, è

$$L = \pi \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \quad (3),$$

il cui secondo membro, diviso per 2, espresso in funzione di a e di c mediante la relazione

$$c = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

e svolto colla formola del binomio, dà una serie che nei due primi termini s'accorda col secondo membro dell'equazione (1).

Le equazioni (1), (2) e (3) sono quelle che nella pratica delle costruzioni possono condurre a trovare la lunghezza della semi-periferia ellittica: la prima dà un valore tanto più esatto quanto più grande è il numero dei termini di cui si tien conto, e le altre non conducono che a risultamenti approssimati, i quali tanto più si accostano ai veri quanto più il valore del semi-asse minore b è poco diverso dal valore del semi-asse maggiore a . Quando b ed a differiscono molto l'uno dall'altro, è necessario far uso della formola (1) prendendo un conveniente numero dei termini, oppure servirsi delle tavole che vennero riportate nel precedente numero.

45. Tracciamento dell'elica. — Chiamasi *elica* una curva, come ABCD (*fig. 39*), tracciata su una superficie cilindrica, la quale gode della proprietà di avere le sue ordinate \overline{EF} , $\overline{E'F'}$,, dirette secondo le generatrici, proporzionali alle ascisse curvilinee AE , AE' ,, contate su una sezion retta AEF \overline{G} della superficie cilindrica a partire dal punto A dell'elica la cui ordinata è zero. Allorquando la sezion retta della superficie cilindrica è una curva chiusa, l'elica può tagliare in due o più punti una stessa generatrice della detta superficie, e la distanza costante che esiste fra due punti successivi di una stessa elica posti su una medesima generatrice prende il nome di *passo*. Chiamasi poi *spira* la parte d'elica compresa fra due punti successivi posti su una medesima generatrice.

Il tracciamento di un'elica su una data superficie cilindrica riesce operazione della massima facilità. Se si conosce la proiezione AB (*fig. 40*) dell'elica su una sezion retta della superficie cilindrica, non che le distanze d e D dei due estremi A' e B' dell'elica

dal piano di questa sezione retta, si divide la proiezione curvilinea AB dell'elica in un dato numero n di parti eguali nei punti C, D, E,, nello stesso numero di parti eguali si divide la differenza delle accennate due distanze, e si ottengono altrettanti punti della curva prendendo

$$\overline{AA'} = d, \quad \overline{CC'} = d + \frac{D-d}{n},$$

$$\overline{DD'} = d + 2 \frac{D-d}{n}, \quad \overline{EE'} = d + 3 \frac{D-d}{n},$$

.....

$$\overline{BB'} = D.$$

Quando la sezione retta della superficie cilindrica su cui vuoi tracciare l'elica è una curva chiusa vale lo stesso metodo, coll'avvertenza che la curva da considerarsi come proiezione dell'elica sull'accennata sezione retta deve essere tante volte l'intera sua periferia quanti sono i giri intieri che l'elica deve fare, più quella parte della medesima periferia la quale corrisponde ad una porzione di giro.

L'elica gode della proprietà di misurare su una superficie cilindrica la minima distanza fra due punti della superficie medesima, e siccome d'altronde un filo disteso tra due punti di una superficie cilindrica si dispone secondo l'arco d'elica passante fra quei due punti, quando si faccia astrazione dagli effetti che possono produrre le scabrosità della superficie, ne deriva che approssimativamente si può tracciare un arco d'elica fra due punti, distendendo un filo sulla superficie cilindrica e fra i punti stessi, e segnando la curva secondo cui esso si dispone. Quando l'elica deve tracciarsi fra due punti posti su una superficie cilindrica la cui direttrice è una curva chiusa, bisogna che il filo faccia fra i punti dati tanti giri intieri sulla superficie cilindrica quante sono le spire che l'elica deve presentare. Soventi volte invece del filo si fa uso di una verga elastica.

44. Sviluppo di un arco d'elica. — Sviluppando in piano la superficie cilindrica su cui trovasi tracciata un'elica, questa curva si dispone secondo una linea retta. Questa retta, come è facile il comprendere, è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per un cateto la lunghezza d della parte di generatrice compresa fra

le sezioni rette passanti pei due estremi dell'elica e per altro cateto la proiezione s dell'elica su una sezione retta. La lunghezza dell'elica non è diversa dalla lunghezza della sua trasformata, per cui lo sviluppo L di un arco qualunque di elica vien dato dalla semplicissima formola

$$L = \sqrt{\rho^2 + s^2}.$$

Quando l'elica consta di diverse spire, il valore di s è tante volte la periferia della sezione retta del cilindro su cui l'elica è tracciata quante sono le spire, più la proiezione su detta sezione di quella parte di elica che supera il numero intero di spire.

CAPITOLO IV.

Trasformazione dei profili.

45. **Pendenza di una retta in funzione delle ordinate di due dei suoi punti e della loro distanza orizzontale.** — L'inclinazione di una retta all'orizzonte, espressa col rapporto che passa fra la differenza di livello di due dei suoi punti e la loro distanza orizzontale, è un elemento di continuo uso nei problemi di livellazione. Questo rapporto, chiamato comunemente *pendenza*, può riferirsi tanto ad una retta in discesa come ad una retta in salita, per cui, a scanso d'equivoco, si stabilirà di valutarlo come positivo nel primo caso e come negativo nel secondo.

Sia AB (*fig. 41 e 42*) la retta di cui vuolsi valutare la pendenza, d la sua lunghezza orizzontale, a l'ordinata dell'estremo A , e b quella dell'estremo B . Chiamando p la pendenza richiesta, si avrà:

$$p = \frac{b-a}{d}, \quad \text{oppure} \quad p = \frac{a-b}{d}$$

secondo che la orizzontale di paragone $A'B'$ è al disopra o al disotto dei punti A e B . Infatti, per l'orizzontale di paragone al di sopra (*fig. 41*), il numeratore $b-a$, e quindi p , è positivo per il caso di una discesa cui corrisponde $b > a$ e negativo pel caso di

una salita per cui si ha $b < a$; nel caso poi dell'orizzontale di paragone al disotto (fig. 42), il numeratore $a - b$, e quindi anche p , è positivo per una discesa perchè $a > b$ e negativo per una salita perchè $a < b$.

46. Ordinata di un punto qualunque di una retta data colla sua pendenza e coll'ordinata di un suo punto. — Sia AB la retta data (fig. 41 e 42), a l'ordinata del suo estremo A , p la sua pendenza, e sia proposto di calcolare l'ordinata di un suo punto B distante orizzontalmente da A delle quantità d .

Dalla definizione stessa della pendenza risulta che la differenza di livello di due punti vale la pendenza della retta che li unisce moltiplicata per la loro distanza orizzontale, per cui immaginando condotta la orizzontale Ab si ha:

$$\overline{Bb} = pd,$$

è quindi, chiamando z l'ordinata $\overline{B'B}$,

$$z = a \pm pd,$$

valendo il segno $+$ per il caso dell'orizzontale di paragone $A'B'$ posta al disopra (fig. 41), e il segno $-$ per il caso dell'orizzontale di paragone posta al disotto (fig. 42).

47. Intersezione di due rette date colle ordinate dei loro estremi. — Siano AB ed A_1B_1 le due rette date (fig. 43 e 44), siano a e b le ordinate dei due estremi della retta AB , a_1 e b_1 quelle dei due estremi della retta A_1B_1 , e sia d la loro comune lunghezza orizzontale $A'B'$. Chiamando rispettivamente r ed r' le differenze $a - a_1$ e $b - b_1$ fra le ordinate degli estremi della retta AB e quelle degli estremi della retta A_1B_1 , si fisserà compiutamente il punto d'intersezione M trovando la distanza orizzontale $\overline{A'M} = x$ che esso ha da A e l'ordinata $\overline{MM'} = z$. Considerando perciò i due triangoli simili MAA_1 , MBB_1 (fig. 43) e immaginando condotta per M la orizzontale PQ , si deduce

$$\overline{MP} = \frac{\overline{MQ} \times \overline{AA_1}}{\overline{BB_1}},$$

la quale, osservando che $\overline{MP} = \overline{A'M'} = x$, $\overline{MQ} = \overline{A'M} - \overline{A'B'} = x - d$, $\overline{AA_1} = r$ e $\overline{BB_1} = r'$, si trasforma in

$$x = \frac{(x-d)r}{r'}$$

d'onde si ricava

$$x = \frac{dr}{r-r'} \quad (1).$$

Nel caso della figura 43 le differenze r ed r' sono ambedue positive, mentre nel caso della figura 44 una è positiva e l'altra negativa.

Chiamando poi p la pendenza della retta AB, si ha per ordinata del punto M

$$z = a + px.$$

48. Intersezione di due rette di pendenza cognita e partenti da due punti dati sulla stessa verticale. — Siano A e B (*fig. 45*) due punti di una medesima verticale distanti fra loro della quantità $\overline{AB} = r$, siano p e p' le pendenze di due rette AX e BY, e sia proposto di fissare la loro intersezione M mediante la distanza orizzontale $\overline{MC} = x$. Per le definizioni e pei problemi premessi si ha

$$\overline{AC} = px, \quad \overline{BC} = p'x.$$

Sottraendo queste equazioni ed osservando che $\overline{AC} - \overline{BC} = r$ si trova questo risultato:

$$r = x(p - p'),$$

d'onde

$$x = \frac{r}{p - p'}.$$

Questa formola si accomoda anche al caso in cui le due rette AX e BY (*fig. 46*) siano inclinate in contrario senso, perchè allora la pendenza di BY va considerata come negativa.

49. Intersezione di due rette di pendenza data e partenti da due punti di cui si conoscono la distanza e le ordinate. — Siano A e B (*fig. 47 e 48*) due punti distanti orizzontalmente della quantità $\overline{A'B'} = d$ ed aventi per ordinate $\overline{A'A} = a$, $\overline{B'B} = b$; siano AX

e BY due rette aventi rispettivamente le pendenze p, p' ; e siano $\overline{A'M'} = x, \overline{M'M} = y$ le due lunghezze determinatrici del punto M.

Immaginando condotta per M la orizzontale CD si ha

$$\overline{AC} = px, \quad \overline{BD} = p'(d-x);$$

d'onde

$$\overline{A'C} = a \pm px, \quad \overline{B'D} = b \mp p'(d-x),$$

valendo i segni superiori pel caso dell'orizzontale di paragone al di sopra (*fig. 47*) ed i segni inferiori pel caso dell'orizzontale di paragone al di sotto (*fig. 48*). Osservando ora che $\overline{A'C} = \overline{B'D}$, si può stabilire l'equazione

$$a \pm px = b \mp p'(d-x),$$

dalla quale si ricava

$$x = \frac{\pm(b-a) - p'd}{p-p'}.$$

L'ordinata $\overline{M'M} = z$, appartenendo al punto M della retta AX, si ottiene come si è detto al numero 46 e quindi vien data da

$$z = a \pm px,$$

dove il segno + vale per il caso dell'orizzontale di paragone al disopra (*fig. 47*), ed il segno — per il caso dell'orizzontale di paragone al disotto (*fig. 48*).

La risoluzione di questo problema si può anche facilmente ridurre a quella del numero 47 immaginando prolungate le rette AX e BY fino in F ed E e trovando prima, come si insegnò al numero 46, le ordinate $\overline{A'E}$ e $\overline{B'F}$.

50. Tracciamento di due rette passanti per due punti dati ed aventi pendenza e contropendenza eguali. — Siano A e B (*fig. 49*) i due punti dati, determinati mediante la loro distanza orizzontale $\overline{A'B'}$ e mediante le loro ordinate $\overline{A'A}$ e $\overline{B'B}$. Sia CD un'orizzontale data mediante l'ordinata $\overline{A'C}$ del suo estremo C e vogliasi trovare su essa il punto M tale, che unito con A e con B dia due rette MA ed MB egualmente inclinate all'orizzonte, una da M in A e l'altra da M in B.

Per risolvere il problema prendasi sulla $\overline{BB'}$ la $\overline{DB_1} = \overline{DB}$, ed il punto da trovarsi M sarà l'intersezione della AB_1 colla orizzontale CD . Infatti i due triangoli BDM e B_1DM , siccome metà del medesimo triangolo isoscele BMB_1 , sono eguali, e quindi l'angolo BMD è eguale all'angolo B_1MD ; ma, essendo quest'ultimo e l'angolo AMC anche eguali siccome opposti al vertice, ne consegue essere l'angolo BMD eguale all'angolo AMC , e quindi essere le due rette MB ed MA egualmente inclinate all'orizzontale CD .

Se numericamente vuoi trovare la distanza orizzontale del punto M al punto A ossia la \overline{AM} , non si può incontrare difficoltà alcuna, giacchè la quistione è ridotta a determinarne l'incontro di due rette CD ed AB_1 per le quali si conoscono le ordinate dei punti estremi e quindi a risolvere il problema del numero 47.

Se invece di determinare il punto M su una data orizzontale, devesi questo determinare su un profilo qualunque $cdef$ (fig. 50), l'operazione può essere condotta per tentativi, tirando successivamente tante orizzontali $C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, \dots$, e cercando per ciascuna di esse, e come già si è detto, i punti M_1, M_2, M_3, \dots , i quali uniti ai punti dati A e B danno due rette con pendenza e contropendenza eguali. Dalla riunione di tutti questi punti nasce una linea curva le cui intersezioni col profilo dato somministrano altrettanti punti, ciascuno dei quali determina due rette con pendenza e contropendenza eguali quando si unisca coi punti A e B .

51. Tracciamento della linea di progetto su un profilo longitudinale. — Varie sono le condizioni dietro cui, su un profilo longitudinale rilevato e costruito nello scopo di studiare un dato lavoro il quale richiede una trasformazione della superficie del terreno, si può condurre la linea di progetto generalmente composta di varie *livелlette*, ossia di tratti alcuni in pendenza, alcuni in contropendenza ed alcuni orizzontali. Per fissare le idee suppongasi che un breve tronco di strada da progettarsi vogliasi costituito da due livелlette: la prima, passando di metri 0,40 al di sopra del punto I (fig. 51), debba raggiungere la verticale del punto IV colla pendenza del 0,02 per metro; e la seconda partendo dal termine della prima debba salire colla pendenza del 0,0075 per metro fino alla verticale del punto VII .

Fissata la posizione del punto I rispetto a quel piano orizzontale che vuoi assumere come piano di paragone, e supposto, per

esempio, che debba essere di 108 metri l'ordinata del detto punto al disopra dell'accennato piano, si calcoli l'ordinata

$$\overline{A'a} = 108 + 0,40 = 108^m,40$$

del primo punto *a* della linea di progetto. Dopo, come si è insegnato al numero 46, si trovino le ordinate dell'ultimo punto *d* e dell'ultimo punto *g* della prima e della seconda livelletta, date rispettivamente, con errore minore di mezzo centesimo, dà

$$\overline{D'd} = 108,40 - 0,02(46,08 + 30,26 + 28,35) = 106^m,31,$$

$$\overline{G'g} = 106,31 + 0,0075(28,32 + 31,80 + 35,20) = 107^m,01.$$

Conoscendosi ora le ordinate dei tre vertici *a*, *d* e *g*, riesce agevole il segnare le posizioni di questi tre punti sul profilo e quindi il tracciare la linea di progetto *adg* che, secondo l'uso generale, suolsi segnare in rosso.

52. Determinazione delle ordinate e delle quote rosse nei profili longitudinali. — I calcoli delle ordinate dei diversi punti, in cui le verticali del profilo naturale incontrano la linea di progetto, devono immediatamente tener dietro al suo tracciamento. Serve alla loro determinazione quanto si è detto nel numero 46, ed il calcolo va istituito come appare dalle formole che seguono, le quali si riferiscono alla linea di progetto tracciata sul profilo della figura 51. Per la livelletta avente pendenza del 0,02 per metro e compresa fra le verticali dei punti I e IV si ha, con errore minore di mezzo centesimo nei risultati finali,

$$\overline{A'a} = 108^m,40$$

$$\overline{B'b} = 108,40 - 0,02 \times 46,08 = 107,48$$

$$\overline{C'c} = 108,40 - 0,02(46,08 + 30,26) = 106^m,87.$$

Per la livelletta in contropendenza del 0,0075 per metro e compresa fra le verticali dei punti IV e VII, risulta

$$\overline{D'd} = 106,31$$

$$\overline{E'e} = 106,31 + 0,0075 \times 28,32 = 106,52$$

$$\overline{F'f} = 106,31 + 0,0075(28,32 + 31,80) = 106^m,76.$$

Tutte queste ordinate, non che quella del estremo *g*, si segnano sulle verticali dei punti cui corrispondono in color rosso, ed è per questo motivo che vengono da taluni nominate *ordinate rosse*.

Una semplice sottrazione fra le ordinate rosse e le ordinate corrispondenti dei punti del profilo naturale del terreno, ossia fra i due numeri marcati su ciascuna verticale, ne dà un terzo da inscrivere al suo estremo superiore esprimente la distanza fra i due punti di essa appartenenti, uno al profilo naturale e l'altro alla linea di progetto. Questo terzo numero prende il nome di *quota rossa*, perchè suolsi pur marcare in color rosso. Le quote rosse relative all'esempio in quistione sono:

$$\overline{aI} = 0^m,40$$

$$\overline{bII} = 107,48 - 106,98 = 0^m,50$$

$$\overline{cIII} = 106,87 - 108,60 = -1^m,73$$

$$\overline{dIV} = 106,31 - 105,53 = 0^m,78$$

$$\overline{eV} = 106,52 - 108,13 = -1^m,61$$

$$\overline{fVI} = 106,76 - 107,18 = -0^m,42$$

$$\overline{gVII} = 107,01 - 106,51 = 0^m,50.$$

Le ordinate dei punti del profilo naturale, dette anche *ordinate nere* giacchè si scrivono in nero sul disegno, indicano, secondochè sono esse minori o maggiori di quelle dei punti corrispondenti della linea del progetto, se devonsi eseguire rialzi o scavi nei punti a cui esse si riferiscono; e le quote rosse, positive dove si devono eseguire rialzi e negative dove si devono fare scavi, nel mentre fanno conoscere le altezze di quelli e le profondità di questi, somministrano una prima indicazione dei movimenti di terra necessari per l'esecuzione del lavoro progettato, ed il più delle volte inducono a stimare conveniente ovvero a rigettare siccome non utile il sistema delle pendenze adottate.

Nell'inscrivere le quote rosse sui disegni di profili longitudinali non si usa mettere in evidenza il loro segno, giacchè gli stessi disegni già abbastanza indicano dove si devono eseguire scavi e

dove si devono eseguire rialzi per passare dalla superficie naturale del terreno alla superficie dell'opera progettata.

53. **Determinazione dei punti di passaggio nei profili longitudinali.** — I punti *h*, *i*, *k* ed *l* (fig. 54), in cui la linea di progetto interseca il profilo naturale, diconsi *punti di passaggio*, e la loro posizione suolsi determinare trovando le distanze orizzontali che essi hanno dai punti vicini. Queste distanze si ottengono risolvendo il problema già svolto nel numero 47 pel caso della figura 44, ed i calcoli devono essere instituiti applicando la formola (4) del citato numero come appare dalla tabella che segue:

$$\overline{B'H} = \frac{30,26 \times 0,50}{0,50 + 1,73} = 6^m,78$$

$$\overline{C'H} = \frac{30,26 \times 1,73}{1,73 + 0,50} = 23^m,48,$$

$$\overline{C'I} = \frac{28,35 \times 1,73}{1,73 + 0,78} = 19^m,56$$

$$\overline{D'I} = \frac{28,35 \times 0,78}{0,78 + 1,73} = 8^m,79,$$

$$\overline{D'K'} = \frac{28,32 \times 0,78}{0,78 + 1,61} = 9^m,24$$

$$\overline{E'K'} = \frac{28,32 \times 1,61}{1,61 + 0,78} = 19^m,08,$$

$$\overline{F'L} = \frac{35,20 \times 0,42}{0,42 + 0,50} = 16^m,07$$

$$\overline{G'L} = \frac{35,20 \times 0,50}{0,50 + 0,42} = 19^m,13.$$

Questi calcoli servono a determinare ciascun punto di passaggio in due distinti modi, ossia mediante le distanze orizzontali che ciascuno di essi ha dai due punti del profilo naturale fra i quali esso cade, e si possono quindi ritenere siccome esatti quando la somma delle distanze relative ad uno stesso punto di passaggio è

eguale alla distanza che esiste fra i due punti del profilo naturale fra i quali esso si trova.

I punti di passaggio separano nel profilo longitudinale le superficie che rappresentano dove va eseguito un rialzo da quelle che indicano dove va fatto uno scavo: alle prime, per comune consenso dei pratici, suolsi dare una tinta chiara di carmino, ed alle seconde una tinta pure chiara di gomma gutta.

54. **Condizioni diverse dietro le quali si può determinare la linea di progetto su un profilo longitudinale.** — Nel caso particolare trattato al numero 51 la linea di progetto si è segnata colla condizione che le due livellette partano ciascuna da un punto determinato ed abbiano una data pendenza. Questa però non è la sola condizione che un operatore può imporsi, e frequentemente occorre di tracciare una livelletta in modo che unisca due punti dati, oppure in modo che partendo da un punto dato, determini la somma delle superficie in rialzo eguale alla somma delle superficie in iscavo, od ancora in modo che, essendo soddisfatta quest'ultima condizione, abbia essa una pendenza prestabilita.

Se la livelletta deve avere i suoi estremi in due punti a e d (fig. 52) determinati dalle loro ordinate $\overline{A'a} = m$ e $\overline{D'd} = n$ e dalla loro distanza orizzontale $\overline{A'D'} = d$, si troverà la sua pendenza p per metro ponendo (num. 45)

$$p = \frac{m - n}{d},$$

e si passerà in seguito con tutta facilità al calcolo delle ordinate rosse, delle quote rosse ed alla determinazione dei punti di passaggio.

Se la livelletta, partendo dal punto dato a , deve determinare la somma delle superficie di rialzo eguale alla somma delle superficie di scavo, si procederà prima al calcolo della superficie dei trapezii $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'D'D$; la loro somma si dividerà per la lunghezza $\frac{A'D'}{2} = \frac{d}{2}$; dal quoziente si sottrarrà l'ordinata $\overline{A'a} = m$ e si avrà la quota $\overline{D'd} = n$ dell'ultimo punto della livelletta. Infatti, la somma delle superficie esprimenti un rialzo sarà eguale a quella delle superficie rappresentanti uno scavo quando il trapezio $aA'D'd$ eguagli la somma dei già indicati trapezii; dividendo questa somma per metà $\overline{A'D'}$ si trova la somma delle due basi

parallele del trapezio $aA'D'd$, e, sottraendovi la base cognita $\overline{A'a}$, si trova l'altra incognita $\overline{D'd}$.

Se la livelletta deve avere una data pendenza e dare la somma delle superficie in rialzo eguale alla somma della superficie in ribasso, si dividerà la somma delle superficie dei trapezii $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'D'D$ per $\overline{A'D'}=d$, e nel quoziente si avrà la media aritmetica m' delle due basi del trapezio $aA'D'd$ risultante in seguito al tracciamento della linea di progetto. Si porterà a posto questa media aritmetica delle due basi, prendendo il punto di mezzo M' di $\overline{A'D'}$, e determinando la verticale $\overline{M'M}=m'$. Mediante l'ordinata cognita m' del punto M , la distanza $\overline{MD'}=\frac{d}{2}$ e la pendenza p della linea di progetto si calcoli l'ordinata $\overline{D'd}=n$ (num. 45) dell'ultimo punto d della livelletta; e, oltre di poter tracciare la linea di progetto, riescirà agevole il calcolo delle ordinate rosse non che la determinazione dei punti di passaggio.

55. Tracciamento della linea di progetto sui profili trasversali. — I profili trasversali, su cui continuamente si devono intraprendere degli studi nell'esecuzione dei progetti di strade, di canali e di altre opere le quali esigono un cangiamento nella forma primitiva del terreno, trovansi sempre collegati ad un profilo longitudinale; ciascuno di essi ha comune con questo un punto; e generalmente si effettua il loro disegno collocando a sito i diversi vertici mediante le distanze orizzontali che essi hanno dal punto che appartiene anche al profilo longitudinale e mediante le loro ordinate per rapporto al piano orizzontale passante per l'accennato punto, le quali ordinate vanno considerate come positive quando si riferiscono a punti posti al di sopra del piano di paragone, e come negative nel caso contrario. Per segnare poi su questi profili la linea di progetto corrispondente ad una data opera, convien osservare che essi devono presentare nel punto comune col profilo longitudinale le stesse quote rosse già calcolate considerando il profilo longitudinale. Ciò premesso, suppongasi di dover segnare, sui diversi profili trasversali fatti in corrispondenza dei punti I, II, III, IV, del profilo longitudinale rappresentato nella figura 51, la linea di progetto per una strada della total larghezza di 9 metri, colle scarpe dei rialzi inclinati a 3 di base per 2 di altezza, coi fossi profondi e larghi al fondo metri 0,50 e colle scarpe degli scavi a 45°.

Incominciando dal segnare la linea di progetto sul profilo tras-

versale I (*fig. 53*), si porterà in una conveniente scala e da I in *a* la quota rossa $0^m,40$ corrispondente al punto I del profilo longitudinale; si condurrà da *a* una retta rappresentante l'orizzontale contenuta nel piano del profilo; e si prenderanno su essa a destra ed a sinistra le lunghezze \overline{ah} ed \overline{ai} eguali alla metà della larghezza della strada, cioè di $4^m,50$. Fatto questo, agevolmente si scorge come la strada è in rialzo, e per segnare le due scarpe basta dividere la \overline{ah} in tre parti eguali, portarne due da *a* in *k* e prolungare le rette kh e ki fino ad incontrare in *l* ed *m* il profilo del terreno.

Lo stesso procedimento che venne indicato per segnare la linea di progetto sul primo profilo trasversale serve anche pel secondo (*fig. 54*), nè guari diversamente si deve procedere per segnare la linea di progetto sul terzo. Pel punto *c* (*fig. 55*), preso al di sotto del punto III d'una quantità eguale alla quota rossa $1^m,75$, già ottenuta considerando il profilo longitudinale, si conduca l'orizzontale \overline{hi} , prendendola tanto a diritta quanto a sinistra del detto punto di metà larghezza della strada. Essendo la strada in ribasso, si prenda $\overline{ck} = \overline{ch}$ per avere, nei prolungamenti delle \overline{kh} e \overline{ki} sino agli incontri *m* ed *n* coll'orizzontale condotta per *s* al disotto di *c* di metri $0,50$, i limiti delle scarpe dei fossi inclinati a 45° . Facendo risultare le orizzontali \overline{mo} ed \overline{np} lunghe come la larghezza del fosso, cioè di metri $0,50$, prendendo $\overline{st} = \overline{so} = \overline{sp}$ e prolungando le to e tp fino ad incontrare il profilo del terreno, si determinino i fondi e le contro-scarpe dei fossi.

Quanto si è detto per segnare la linea di progetto sui profili trasversali I e III si applica facilmente a tutti gli altri, nè si può presentare difficoltà alcuna nell'eseguire questa semplicissima operazione. Considerando i quattro profili o sezioni trasversali I, II, III e IV, di cui vennero rispettivamente date le rappresentazioni nelle figure 53, 54, 55 e 56, riesce facile il comprendere: come nella prima e seconda sezione trasversale l'esecuzione del progetto richieda un rialzo; come nella terza sezione occorra uno scavo; e come sia necessario in parte uno rialzo ed in parte uno scavo nella quarta sezione.

Anche sui profili trasversali, precisamente come si usa sui profili longitudinali, si disegnano in rosso le linee di progetto. Alle superficie rappresentanti rialzi si dà una leggiera tinta di carmino, ed una leggiera tinta di gomma gutta a quelle rappresentanti scavi.

Allorquando si devono disegnare le linee di progetto per una stessa opera sopra un gran numero di profili trasversali, può convenire il farsi mediante pezzi di carta ben resistente delle sagome delle diverse linee di progetto e servirsi poi di queste sagome pel materiale tracciamento delle accennate linee.

56. **Determinazione delle ordinate nere nei profili trasversali** — Disegnate le linee di progetto sui varii profili trasversali, si può passare al calcolo delle *ordinate nere*, ossia al calcolo delle ordinate di quei punti dei profili trasversali del terreno che si trovano sulle verticali dei vertici delle linee di progetto. Questi calcoli si fanno trovando prima con semplici addizioni e sottrazioni le distanze delle diverse verticali condotte per tutti i vertici spettanti tanto alla linea di progetto quanto al profilo naturale; e, considerando la sezione trasversale rappresentata nella figura 56, queste distanze risultano:

metri 2,75	fra le verticali	IVd e hh',
" 4,75	" "	hh' e ii',
" 0,50	" "	ii' e kk',
" 0,50	" "	kk' e ll',
" 4,50	" "	IVd e mm'.

Trovate queste distanze, se si vogliono le ordinate nere $\overline{ii'}$, $\overline{kk'}$ ed $\overline{ll'}$ corrispondenti ai punti i , k ed l posti sulla retta ho avente rispettivamente 1^m,45 e 1^m,70 per ordinate dei suoi due estremi h ed o e lunga orizzontalmente 6^m,25, si procederà come nella risoluzione del problema costituente l'oggetto del numero 46 e si avrà

$$\overline{ii'} = 1,45 + \frac{1,70 - 1,45}{6,25} 1,75 = 1^m,52,$$

$$\overline{kk'} = 1,45 + \frac{1,70 - 1,45}{6,25} (1,75 + 0,50) = 1^m,54,$$

$$\overline{ll'} = 1,45 + \frac{1,70 - 1,45}{6,25} (1,75 + 0,50 + 0,50) = 1^m,56.$$

Analogamente si trova l'ordinata nera $\overline{m'm}$ e si ha

$$\overline{m'm} = \frac{-0,20}{9} 4,50 = -0^m,10.$$

57. **Determinazione delle ordinate rosse e delle quote rosse nei profili trasversali.** — Anche nei profili trasversali, non altrimenti che nei profili longitudinali, chiamansi *ordinate rosse* le distanze che i punti della linea di progetto hanno dal comune piano di paragone. La loro determinazione va fatta per tutti i vertici e per quei punti che si trovano sulla verticale di qualche punto d'ineguaglianza del terreno; l'ordinata rossa $\overline{IVd} = 0^m,78$ di quel punto del profilo trasversale che è comune anche al profilo longitudinale è quella da cui bisogna prendere le mosse; e per dare un'idea del modo di operare possono bastare i calcoli qui sotto istituiti:

$$\overline{IVd} = 0^m,78,$$

$$\overline{k'k''} = \overline{IVd} = 0^m,78,$$

$$\overline{i'i''} = \overline{IVd} = 0^m,78,$$

$$\overline{m'm''} = \overline{IVd} = 0^m,78.$$

L'ordinata rossa $k'k''$ si ottiene applicando quanto si è detto per la risoluzione del problema del numero 46, e, osservando che vale l'unità la pendenza di una retta facente coll'orizzonte un angolo di 45° , si ha

$$\overline{k'k''} = 0,78 - 1 \times 0,50 = 0^m,28,$$

$$\overline{V'V''} = \overline{k'k''} = 0^m,28.$$

Facendo le differenze fra le ordinate rosse e le ordinate nere corrispondenti a punti del profilo del terreno e della linea di progetto posti sulla stessa verticale, da considerarsi come positive quando si trovano al disopra del piano di paragone rappresentato nella retta XY e come negative quando sono al di sotto dello stesso piano, si ottengono le *quote rosse*, le quali nel caso particolare considerato sono

$$\overline{IVd} = 0^m,78,$$

$$\overline{hh''} = 0,78 - 1,45 = -0^m,67,$$

$$\overline{ii''} = 0,78 - 1,52 = -0^m,74,$$

$$\overline{kk''} = 0,28 - 1,54 = -1^m,26,$$

$$\overline{ll''} = 0,28 - 1,56 = -1^m,28,$$

$$\overline{mm''} = 0,78 + 0,10 = 0^m,88.$$

Le quote rosse positive indicano che nei punti cui esse si riferiscono bisogna eseguire dei rialzi, e danno un'idea dell'entità di tali opere; le quote rosse negative invece indicano la stessa cosa per gli scavi. Queste quote si scrivono sempre in rosso sui profili trasversali, ma non si fa distinzione di segno, giacchè lo stesso disegno chiaramente manifesta dove esistono dei rialzi e dove si devono effettuare degli scavi.

58. **Determinazione dei punti di passaggio e delle lunghezze orizzontali delle scarpe nei profili trasversali.** — Il processo che si tiene per determinare le posizioni dei punti di passaggio sui profili longitudinali vale anche pei profili trasversali, e, prendendo a considerare il punto di passaggio *n* (fig. 56), le distanze orizzontali che esso ha dai punti IV ed *h* sono

$$\overline{nd} = \frac{2,75 \times 0,78}{0,78 + 0,67} = 1^m,46$$

$$\overline{nh''} = \frac{2,75 \times 0,67}{0,67 + 0,78} = 1^m,29.$$

Le lunghezze orizzontali \overline{pq} ed \overline{rs} delle due scarpe si calcolano colle regole che vennero stabilite al numero 48 e, osservando

che vale l'unità la pendenza d'una retta inclinata a 45° e $\frac{2}{3}$ quella d'una retta inclinata a 5 di base per 2 d'altezza, si ha

$$\overline{pq} = \frac{1,28}{1 - \frac{1,70 - 1,45}{6,25}} = 1^m,33,$$

$$\overline{rs} = \frac{0,88}{\frac{2}{3} - \frac{0,20}{9}} = 1^m,36.$$

59. Disegno dei profili. — Nell'esecuzione del disegno dei profili altimetrici indispensabili per dare i progetti di strade e di canali si adottano certe disposizioni che è bene conoscere, e delle quali immediatamente in quello che segue si dà un breve cenno.

Trattandosi di un profilo longitudinale, si calcolano generalmente le ordinate dei diversi punti livellati per rapporto al livello del mare; e generalmente si prendono le ordinate in una scala assai maggiore di quella che si adotta per le distanze orizzontali. Risultando le ordinate tanto lunghe da non poter stare sul foglio, tutte si diminuiscono di una stessa quantità, e sono le ordinate così diminuite che s'impiegano nel disegno del profilo. Si tirano sul disegno sei rette parallele rappresentanti sei orizzontali: sulla prima, ossia sulla più bassa, si marcano tanti punti distanti fra loro 1 chilometro e sotto di essi si mettono i numeri 0, 1, 2, 3,; sulla seconda si portano le distanze orizzontali fra i punti che vennero livellati sul profilo longitudinale, al di sotto dei successivi punti separanti queste distanze si pongono i numeri d'ordine 1, 2, 3,, e fra gli stessi punti si scrivono le loro distanze orizzontali; appena al di sopra di questa orizzontale e sulle verticali elevate pei diversi punti su essa determinati si scrivono le ordinate nere; sulla terza orizzontale si marcano le distanze dei punti di passaggio dai punti del profilo del terreno fra cui cadono, ed appena sopra questa orizzontale si scrivono le ordinate rosse; sopra le ordinate rosse si tira la quarta orizzontale al di sopra della quale si registrano le quote rosse; nella quinta orizzontale si pongono le pendenze delle diverse livellette marcando per ciascuna la discesa o la salita per metro non che la

lunghezza; finalmente sulla sesta si inscrivono le lunghezze delle parti di linea del progetto che sono in linea retta e quelle che sono in linea curva, distinguendole colle parole *rettifili* e *curve*, indicando se voltano la loro concavità a destra oppure a sinistra mediante le iniziali D od S, ed aggiungendo i raggi di queste ultime se sono circolari. La prima e la seconda orizzontale, le ordinate, il profilo del terreno, i numeri d'ordine indicanti i chilometri, i numeri d'ordine dei punti livellati, e le distanze orizzontali di questi punti si disegnano e si scrivono in nero: e si fanno in carmino la terza, la quarta, la quinta e la sesta orizzontale, le linee di progetto, le ordinate rosse e le quote rosse, le distanze determinanti i punti di passaggio, le indicazioni relative alle pendenze ed alle lunghezze delle livellette, non che quelle che si riferiscono ai rettifili ed alle curve.

I profili trasversali si disegnano generalmente nella stessa scala tanto per le distanze orizzontali quanto per le ordinate, e s'inscrivono al di sopra ed in nero le distanze orizzontali e le ordinate dei varii vertici appartenenti al profilo naturale del terreno; al di sotto ed in carmino le distanze orizzontali fra le verticali condotte pei vertici del detto profilo, per quelli della linea di progetto e pei punti di passaggio, non che le quote rosse. Il profilo naturale del terreno si disegna in nero; in carmino la linea di progetto; e presso il punto del profilo trasversale che trovasi anche sul profilo longitudinale si scrive in nero lo stesso numero d'ordine che in quest'ultimo profilo gli corrisponde.

60. Determinazione del punto d'incontro di un profilo trasversale colla superficie cilindrica avente per direttrice una data risvolta ed avente le sue generatrici verticali. — In una livellazione longitudinale e trasversale, i profili trasversali si rilevano generalmente con tali direzioni da essere alcuni di essi perpendicolari agli allineamenti in cui trovasi il profilo longitudinale, alcuni altri diretti secondo le bisettrici degli angoli di questi stessi allineamenti. Da questa disposizione di cose risulta che, sostituendo la risvolta DGE (*fig. 57*) a due direzioni rettilinee CA e CB, sulle quali venne primitivamente rilevato il profilo longitudinale, pel profilo longitudinale definitivo ADGEB non si hanno le ordinate dei punti in cui vien esso incontrato dai profili trasversali stabiliti su DC e su CE. Considerando uno di questi profili, per esempio quello proiettato nella retta XY, e supponendo che già se ne abbia il disegno ottenuto mediante le distanze orizzontali dei suoi vertici e mediante le loro ordinate riferite al piano

di paragone $X'Y'$ (*fig. 58*) passante pel punto C, ecco come si determina il punto G (*fig. 57*) in cui la direzione XY di questo profilo interseca la superficie cilindrica a generatrici verticali ed avente per direttrice la risvolta DGE. Avendosi la distanza orizzontale fra il punto G ed il punto C, riesce facile il decidere se il punto G deve trovarsi (*fig. 58*) fra C ed H, fra H ed I, oppure fra I e K. Posto che il punto G debba cadere fra questi ultimi due punti, si trovi la distanza orizzontale che il punto G ha dal punto I facendo la differenza fra la distanza orizzontale nota che il punto G ha da C e la distanza orizzontale pure nota che il punto I ha dello stesso punto C. Ora, trovandosi il punto G sulla retta IK della quale si conoscono le ordinate dei due estremi I e K non che la loro distanza orizzontale $\overline{IK'}$, riesce facile (num. 45) trovare la pendenza della stessa retta e quindi dedurre (num. 46) l'ordinata $\overline{G'G}$. Quest'ordinata, da considerarsi come positiva quando il punto G trovasi sopra il piano $X'Y'$ e come negativa quando lo stesso punto trovasi sotto il detto piano, algebricamente si aggiunga all'altezza od ordinata del punto C al di sopra del piano di paragone, cui trovansi riferiti i punti del primitivo profilo longitudinale, e si ottiene così, per rapporto allo stesso piano, l'ordinata del punto del profilo longitudinale definitivo rappresentato in G.

61. Determinazione di più punti posti su una retta di data pendenza. — La risoluzione di questo problema continuamente si presenta nelle opere che richiedono un cangiamento nella forma della superficie primitiva del terreno, e quindi nell'esecuzione di scavi e di rialzi, nella costruzione di strade e di canali.

Volendosi, per esempio, segnare sul terreno e pel punto A (*fig. 59*) una retta in salita del 7 per 1000, ossia colla contropendenza dei $\frac{7}{1000}$, basta assumersi una data distanza orizzontale che, per fissare le idee, si suppone di 40 metri; trovare la differenza di livello x fra il punto A ed il punto B distante da A di 40 metri e posto sulla retta che deve avere la pendenza dei $\frac{7}{1000}$, la qual distanza vien data da

$$x = \frac{7}{1000} 40 = 0^m,28;$$

misurare a partire da A nella stabilita direzione la distanza orizzontale di 40 metri; e finalmente scavare od innalzare il terreno all'estremità di questa distanza fino ad ottenere un punto più elevato del punto A di metri 0,28. Per ottenere il punto B più elevato del punto A dell'indicata altezza si fa uso del livello e della mira e si procede colle norme insegnate dalla topografia.

Allorquando con un livello e con una mira siasi determinati due punti di una retta di data pendenza, assai facilmente si può essa prolungare, usando di tre o di più biffe di eguale altezza e composte semplicemente di una base, di un fusto ad essa perpendicolare e di uno scopo. Così, essendo A e B due punti determinanti una retta di data inclinazione, si collocano verticalmente in essi le due biffe AA' e BB'. Siccome queste hanno eguale altezza, la visuale condotta per le loro estremità sarà parallela ad AB e quindi avrà la stessa pendenza di AB. In seguito di ciò si determina un altro punto C ponendo in esso una terza biffa CC', scavando od innalzando il terreno su cui deve appoggiare il suo piede, finchè la visuale condotta per la sua estremità e per A' passi anche per B'. In un modo analogo si determinerà un quarto punto D, e quanti altri punti si vogliono, appoggiandosi almeno a due delle biffe già convenientemente disposte.

Il metodo indicato per determinare sul terreno diversi punti tutti posti su una retta di data pendenza si applica, non solo quando si deve eseguire quest'operazione allo scoperto, ma anche quando si deve lavorare in galleria. In quest'ultimo caso però si deve far uso di lumi e di segnali a fuoco, e tutte le biffe devono essere fornite di piccole lanterne aventi fiamme eguali e coi loro centri ad eguale altezza sui piedi delle biffe.

Un mezzo assai comodo per determinare nelle gallerie dei punti aventi fra loro date differenze d'altezza, si ha nel livello ad acqua composto di un tubo flessibile, generalmente di *caoutchouc*, che può persino avere la lunghezza di 50 metri, e mediante il quale comunicano fra loro due vasi cilindrici di vetro aventi anche altezza di metri 1,50 a 2. Questi vasi sono muniti di piedi egualmente alti e sono graduati nello stesso modo a partire dalla loro base inferiore. Se nello strumento trovasi una certa quantità d'acqua che riempia il tubo flessibile ed in parte i vasi, egli è evidente che il livello dell'acqua nei due vasi permetterà di fare due letture e che la differenza di queste letture indicherà di quanto il piede di un vaso è più basso dell'altro. Segue da ciò che, sup-

ponendo le graduazioni fatte in centimetri e millimetri, sarà facile determinare un punto B distante da A di una data quantità, per esempio di 40 metri, e più alto di questo di metri 0,28. Basterà perciò porre un piede del livello in A, portare l'altro piede alla distanza di 40 metri da A dove si vuol determinare il punto B, e scavare o elevare il suolo finchè la differenza delle due indicazioni date dal livello dell'acqua nei due vasi sia di metri 0,28. Con questo metodo si possono determinare, secondo l'asse delle gallerie, quanti punti si vogliono posti su una retta di data pendenza, e regolare così il tracciamento altimetrico di queste frequenti ed importanti costruzioni. Sul vaso posto in A si dovrà leggere la quota maggiore o la quota minore, secondochè il punto B deve essere più alto o più basso del punto A.

PARTE SECONDA

DELLE SUPERFICIE

CAPITOLO I.

Misura delle superficie piane.

62. **Norme generali.** — Per trovare la superficie di una figura piana qualunque, si devono seguire le seguenti norme generali: 1° eseguire le misure di lunghezze e di angoli per determinare completamente la figura di cui vuolsi l'area; 2° scomporre questa in figure geometriche, di ciascuna delle quali sappiasi trovare la superficie; 3° dedurre dai *lunghi* e dagli angoli misurati i fattori che mancano per il calcolo di queste figure parziali e che non vennero direttamente misurati; 4° effettuare il calcolo delle aree delle diverse figure ed eseguire la loro somma algebrica.

Le figure risultanti dall'accennata scomposizione devono essere triangoli, quadrilateri (preferibilmente rettangoli, parallelogrammi, trapezii), e figure terminate da linee rette e da archi circolari. Dovendosi ammettere delle figure mistilinee si procurerà che esse siano segmenti limitati da una curva e dalla sua corda, oppure triangoli e quadrilateri aventi un sol lato in linea curva, e, se è possibile, i lati rettilinei perpendicolari fra di loro.

Le superficie dei triangoli, dei rettangoli, dei parallelogrammi, dei trapezii, dei quadrilateri ed in genere di tutti i poligoni, non che quelle delle figure nel cui contorno entrano solo curve circolari od anche curve circolari e linee rette, si ottengono facilmente applicando le regole a cui conduce lo studio della geometria elementare.

Nei numeri che immediatamente seguono trovansi esposte formole e metodi per trovare le aree di figure piane nei diversi casi che si possono presentare all'ingegnere costruttore. Non vien data dimostrazione alcuna per le formole derivanti dalle più ovvie regole di geometria; e trovansi invece dimostrati i metodi di valutazione di quelle aree piane che, pei dati da cui sono determinate e per la loro figura, non vengono abitualmente considerate nei casi di geometria elementare.

65. **Area di un triangolo.** — Molte sono le formole mediante le quali si può ottenere l'area A di un triangolo rettilineo, ma quelle delle quali convien far uso nella pratica si riducono soltanto a quattro.

1° Per un triangolo di cui è nota la base b e l'altezza h , come insegna la geometria elementare, si ottiene la superficie colla formola

$$A = \frac{1}{2} b h.$$

2° Per un triangolo, di cui si conoscono i tre lati a , b e c , si deduce prima il semi-perimetro p ponendo

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c),$$

e quindi si calcola l'area colla formola

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (1).$$

La verità di questa formola risulta da ciò che in un triangolo qualunque ABC (*fig. 60*), in cui sono noti i tre lati \overline{BC} , \overline{AC} ed \overline{AB} rispettivamente eguali ad a , b e c , chiamando y l'altezza \overline{AD} , si ha

$$A = \frac{1}{2} a y \quad (2),$$

$$y^2 + \overline{BD}^2 = c^2 \quad (3),$$

$$y^2 + (a - \overline{BD})^2 = b^2 \quad (4).$$

Sottraendo l'equazione (4) dall'equazione (3) e ricavando il valore di \overline{BD} dall'equazione che si ottiene, trovasi

$$\overline{BD} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a},$$

e quindi, ponendo questo valore di \overline{BD} nella (3), si ha

$$y = \frac{1}{2a} \sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2}.$$

Questo valore di y , sostituito nell'equazione (2) conduce a trovare

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2},$$

la quale, per essere

$$\begin{aligned} 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 &= (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2) \\ &= [(a+c)^2 - b^2][b^2 - (a-c)^2] \\ &= (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c), \end{aligned}$$

si riduce alla formola (1) quando si ponga

$$a+b+c = 2p$$

$$a+c-b = 2p-2b$$

$$b+a-c = 2p-2c$$

$$b-a+c = 2p-2a.$$

5° Per un triangolo determinato mediante i suoi due lati c e b e l'angolo compreso C , si trova la superficie osservando che l'altezza \overline{AD} vale $\overline{AC} \sin C = b \sin C$, e che quindi

$$A = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

4° Per un triangolo dato mediante un lato a ed i due angoli adiacenti B e C , si ha

$$A = \frac{1}{2} a \times \overline{AC} \operatorname{sen} C,$$

la quale, per essere l'angolo BAC eguale a $180^\circ - (B + C)$ e quindi

$$\overline{AC} = a \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = a \frac{\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen}(B + C)},$$

diventa

$$A = \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen}(B + C)}.$$

64. Area di un quadrilatero. — I quadrilateri dei quali avviene di dover trovare la superficie sono i rettangoli, i parallelogrammi ed i trapezii, qualche volta anche i quadrilateri a cui è circoscrittibile un circolo ed i quadrilateri qualunque. Molte sono le formole dalle quali si può desumere la superficie A di un quadrilatero, giacchè in molti modi può esso venir determinato. Quelle però che avviene di dover considerare nella pratica si riducono ad un numero assai limitato, e principalmente alle cinque che immediatamente passo ad esporre.

1° Per un rettangolo, ed in genere per un parallelogramma di base b e di altezza h , si ha

$$A = b h.$$

2° Per un parallelogramma i cui lati contigui $\overline{CD} = a$ e $\overline{CB} = b$ (*fig. 64*) comprendono l'angolo C , essendo l'altezza $\overline{DE} = a \operatorname{sen} C$, si ha

$$A = a b \operatorname{sen} C.$$

3° Per un trapezio, le cui basi parallele sono a e b e la cui altezza vale h , risulta

$$A = \frac{1}{2} (a + b) h.$$

4° Per un trapezio di cui si conoscono i quattro lati a, b, c

e d , essendo a la base maggiore e b la base minore, si trova prima il semi-perimetro p ponendo

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c+d),$$

e quindi si passa a dedurre la superficie A usando della formola

$$A = \frac{a+b}{a-b} \sqrt{(p-a)(p-b)(p-b-c)(p-b-d)} \quad (1).$$

La deduzione di questa formola esprime l'area di un trapezio in funzione dei suoi quattro lati, si fa coll'osservare che, immaginando condotta la retta BF (*fig. 62*) parallela ad AD , resta scomposto il trapezio nel parallelogramma $ABFD$ e nel triangolo BFC aventi la stessa altezza \overline{BE} , la somma della cui superficie dà appunto la superficie A , la quale, per essere $\overline{DF} = b$ ed $\overline{FC} = a - b$, vien espressa da

$$A = \frac{1}{2}(a+b)\overline{BE}.$$

Ora, essendo $\overline{DC} = a$, $\overline{AB} = b$, $\overline{AD} = c$ e $\overline{BC} = d$, dal triangolo BFC i cui tre lati \overline{FC} , \overline{BF} e \overline{BC} sono rispettivamente $a - b$, c e d , col processo tenuto nel precedente numero per ottenere l'altezza $\overline{AD} = y$ del triangolo ABC (*fig. 60*), si trova

$$\overline{BE} = \frac{1}{2(a-b)} \sqrt{4 \cdot \overline{FC}^2 \cdot c^2 - (\overline{FC}^2 + c^2 - d^2)^2},$$

e quindi l'espressione di A diventa

$$A = \frac{1}{4} \frac{a+b}{a-b} \sqrt{4 \cdot \overline{FC}^2 \cdot c^2 - (\overline{FC}^2 + c^2 - d^2)^2} \quad (2),$$

Ma

$$\begin{aligned} & 4 \cdot \overline{FC}^2 \cdot c^2 - (\overline{FC}^2 + c^2 - d^2)^2 \\ &= (\overline{FC} + c + d)(\overline{FC} + c - d)(d + \overline{FC} - c)(d - \overline{FC} + c), \end{aligned}$$

e, ponendo

$$a + b + c + d = 2p,$$

si ha

$$\overline{FC} + c + d = 2p - 2b$$

$$\overline{FC} + c - d = 2p - 2b - 2d$$

$$d + \overline{FC} - c = 2p - 2b - 2c$$

$$d - \overline{FC} + c = 2p - 2a.$$

Risulta adunque

$$\begin{aligned} & 4 \cdot \overline{FC}^2 \cdot c^2 - (\overline{FC}^2 + c^2 - d^2)^2 \\ &= 16(p-a)(p-b)(p-b-c)(p-b-d), \end{aligned}$$

e la formola (2) si riduce alla già stabilita formola (1).

5° Per un quadrilatero inscritto in un circolo e di cui sono noti i quattro lati a, b, c e d , una volta calcolato il semi-perimetro p col porre

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c + d),$$

si deduce la superficie mediante la formola

$$A = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad (3).$$

Per dimostrare l'esattezza di questa formola basta osservare: che il quadrilatero $ABCD$ (*fig. 65*) è eguale alla somma dei due triangoli ABC ed ADC ; che, rappresentando le lettere a, b, c e d i quattro lati \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} , essendo φ l'angolo ABC , e quindi $180^\circ - \varphi$ l'angolo ADC , si possono rispettivamente esprimere con

$$\frac{1}{2}ab \operatorname{sen} \varphi \quad \text{e con} \quad \frac{1}{2}cd \operatorname{sen} \varphi$$

le aree dei due triangoli ABC ed ADC , e che l'area A del total quadrilatero proposto vien data da

$$A = \frac{1}{2} (ab + cd) \operatorname{sen} \varphi \quad (4).$$

Ora, per un noto teorema di trigonometria rettilinea e considerando i due triangoli ABC ed ADC, si possono stabilire le due equazioni

$$\overline{AC}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi$$

$$\overline{AC}^2 = c^2 + d^2 + 2cd \cos \varphi,$$

dalle quali, sottraendo la prima dalla seconda e ricavando il valore di φ dall'equazione che risulta, immediatamente si deduce

$$\cos \varphi = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

Trovato così il valore di $\cos \varphi$, si può dedurre quello di $\operatorname{sen} \varphi$ mediante la nota relazione $\operatorname{sen} \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$ e quindi ottenere

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{2(ab + cd)} \sqrt{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2},$$

per cui il valore di A dato dall'equazione (4) diventa

$$A = \frac{1}{4} \sqrt{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}.$$

Osservando ora che

$$\begin{aligned} 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 &= [2(ab + cd) \\ &+ (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)] [2(ab + cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)] \\ &= [(a + b)^2 - (c - d)^2] [(c + d)^2 - (a - b)^2] \\ &= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(c + d + a - b)(c + d - a + b), \end{aligned}$$

e ponendo

$$a + b + c + d = 2p$$

$$a+b+c-d=2p-2d$$

$$a+b-c+d=2p-2c$$

$$c+d+a-b=2p-2b$$

$$c+d-a+b=2p-2a,$$

l'ultimo trovato valore di A si riduce identico a quello dato dalla formola (5).

65. **Area di un poligono regolare.** — La geometria elementare insegna che l'area A di un poligono regolare qualunque si ottiene moltiplicando il suo perimetro per la metà del suo apotema, cosicchè, essendo n il numero dei suoi lati, l la lunghezza di un lato \overline{AB} (fig. 64) ed a la lunghezza dell'apotema \overline{CD} , dipendente dai due dati n ed l , si ha

$$A = \frac{1}{2} n l a.$$

Osservando ora che, immaginando unito il centro del poligono cogli estremi A e B del lato \overline{AB} , si ha che l'angolo ACD vale $\frac{180^\circ}{n}$ e che

$$a = \frac{1}{2} l \cot \frac{180^\circ}{n},$$

lo stabilito valore di A vien dato dalla formola

$$A = \frac{1}{4} n l^2 \cot \frac{180^\circ}{n},$$

la quale dà la superficie di un poligono regolare qualunque in funzione della lunghezza dei suoi lati e del loro numero.

66. **Area di un poligono qualunque quando si conoscono le coordinate dei suoi vertici rispetto a due assi ortogonali.** — Sia $A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-2} A_{n-1} A_n$ un poligono qualunque (fig. 65) pel quale si conoscono le coordinate di tutti i vertici, e vogliasi trovare la sua superficie.

Egli è evidente che la domandata area A sarà eguale alla somma dei trapezii che attraversano il poligono diminuita dalla somma dei trapezii che non l'attraversano e che hanno le loro basi paral-

lele ad uno stesso asse di coordinate. Segue da ciò che, essendo

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}$ ed x_n le ascisse $\overline{OP}_1, \overline{OP}_2, \overline{OP}_3, \dots, \overline{OP}_{n-2}, \overline{OP}_{n-1}$ ed \overline{OP}_n ,

$y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-2}, y_{n-1}$ ed y_n le ordinate $\overline{P}_1A_1, \overline{P}_2A_2, \overline{P}_3A_3, \dots, \overline{P}_{n-2}A_{n-2}, \overline{P}_{n-1}A_{n-1}$ e \overline{P}_nA_n ,

si ha

$$A = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} (x_2 - x_1)(y_2 + y_1) + (x_3 - x_2)(y_3 + y_2) + \dots \\ + (x_{n-1} - x_{n-2})(y_{n-1} + y_{n-2}) + (x_n - x_{n-1})(y_n + y_{n-1}) \\ + (x_1 - x_n)(y_1 + y_n) \end{array} \right].$$

La stessa superficie si può ottenere considerando i trapezii aventi le loro basi parallele perpendicolari all'asse delle y , e la formola che risulta facilmente si ottiene dalla precedente col semplice cambiamento delle x nelle y e reciprocamente.

Calcolando l'area A bisogna tener conto del segno che hanno le diverse coordinate secondo le posizioni dei vertici a cui si riferiscono per rapporto agli assi coordinati; per ottenere un sicuro mezzo di verificaione dell'esattezza del lavoro basta calcolare l'area in due modi, considerando cioè i trapezii colle loro basi parallele perpendicolari all'asse delle ordinate e quindi quelli colle loro basi perpendicolari all'asse delle ascisse.

67. Area di un poligono qualunque rilevato per irradimento.

— Sia $A_1A_2A_3 \dots A_{n-2}A_{n-1}A_n$ (*fig. 66*) un poligono qualunque di n lati determinato per irradimento, ossia in modo da essere note le coordinate polari dei suoi vertici per rapporto all'asse OX ed al polo O , e vogliasi trovare la sua superficie.

Dette perciò

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$ ed a_n le lunghezze dei raggi $\overline{OA}_1, \overline{OA}_2, \overline{OA}_3, \dots, \overline{OA}_{n-2}, \overline{OA}_{n-1}$ ed \overline{OA}_n ;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}$ ed α_n gli angoli degli indicati raggi con OX , contati da 0° a 360° e da sinistra a dritta per un osservatore posto in O e volto verso X ,

riesce facile il comprendere come l'area domandata A valga la somma algebrica delle aree di tutti i triangoli che, avendo il loro vertice nel punto O , hanno per base ciascuno dei lati del poligono, e come per conseguenza debbasi avere

$$A = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{l} a_1 a_2 \text{sen}(\alpha_2 - \alpha_1) + a_2 a_3 \text{sen}(\alpha_3 - \alpha_2) + \dots\dots\dots \\ + a_{n-2} a_{n-1} \text{sen}(\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}) + a_{n-1} a_n \text{sen}(\alpha_n - \alpha_{n-1}) \\ + a_n a_1 \text{sen}(\alpha_1 - \alpha_n) \end{array} \right].$$

I segni dei diversi termini di questa formola dipendono dai seni che essi contengono, e giammai può nascere incertezza quando, partendo dal vertice A_1 si segua il perimetro senza interruzione, passando ordinatamente pei vertici $A_2, A_3, \dots\dots A_{n-2}, A_{n-1}, A_n$ ed A_1 .

Se il punto O è un vertice del poligono, per esempio il vertice A_1 (*fig. 67*), la trovata formola, invece di n termini, ne contiene solo $n-2$, perchè essendo $a_1=0$, scompaiono il primo e l'ultimo termine.

Soventi volte, invece di misurare gli angoli che i diversi raggi condotti dal polo O (*fig. 66*) fanno con una direzione OX , si misurano gli angoli che tutti i raggi fanno con uno di essi, per esempio con OA_1 , ed anche per questo caso vale la trovata formola quando in essa pongasi $\alpha_1=0$.

68. Area di un poligono qualunque rilevato per camminamento. — Abbiassi un poligono qualunque $A_1 A_2 A_3 A_4 \dots\dots A_{n-5} A_{n-2} A_{n-1} A_n$ (*fig. 68*) di n lati rilevato per camminamento, e quindi determinato per ciò che si conoscono $n-1$ dei suoi lati ed $n-2$ dei suoi angoli. Per trovare la sua superficie s'immaginino tirate dal vertice A_n tante rette agli altri vertici, per scomporre il poligono in $n-2$ triangoli. Le altezze $\overline{A_n P_1}, \overline{A_n P_2}, \overline{A_n P_3} \dots\dots \overline{A_n P_{n-5}}, \overline{A_n P_{n-2}}$, di questi triangoli si possono considerare come altrettante ordinate del vertice A_n per rapporto al primo lato di linee poligonali incomincianti ordinatamente coi lati $\overline{A_1 A_2} = a_1, \overline{A_2 A_3} = a_2, \overline{A_3 A_4} = a_3, \dots\dots \overline{A_{n-5} A_{n-2}} = a_{n-5}, \overline{A_{n-2} A_{n-1}} = a_{n-2}$, e, in seguito a quanto si trovò al numero 5 sui valori delle ordinate di diversi vertici di un poligono rilevato per camminamento, immediatamente si deduce

$$\overline{A_n P_1} = a_2 \text{sen}(a_2 a_1) + a_3 \text{sen}(a_3 a_1) + \dots\dots\dots \\ + a_{n-3} \text{sen}(a_{n-3} a_1) + a_{n-2} \text{sen}(a_{n-2} a_1) + a_{n-1} \text{sen}(a_{n-1} a_1)$$

$$\overline{A_n P_2} = a_3 \text{sen}(a_3 a_2) + \dots\dots\dots \\ + a_{n-3} \text{sen}(a_{n-3} a_2) + a_{n-2} \text{sen}(a_{n-2} a_2) + a_{n-1} \text{sen}(a_{n-1} a_2)$$

.....

$$\overline{A_n P_{n-3}} = a_{n-2} \text{sen}(a_{n-2} a_{n-3}) + a_{n-1} \text{sen}(a_{n-1} a_{n-3})$$

$$\overline{A_n P_{n-2}} = a_{n-1} \text{sen}(a_{n-1} a_{n-2}).$$

Osservando ora che l'area di ciascun triangolo vale la metà del prodotto della base per la sua altezza si ha, chiamando A l'area domandata,

$$A = \frac{1}{2} a_1 \left[\begin{array}{l} a_2 \text{sen}(a_2 a_1) + a_3 \text{sen}(a_3 a_1) + \dots \\ + a_{n-3} \text{sen}(a_{n-3} a_1) + a_{n-2} \text{sen}(a_{n-2} a_1) \\ + a_{n-1} \text{sen}(a_{n-1} a_1) \end{array} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} a_2 \left[\begin{array}{l} a_3 \text{sen}(a_3 a_2) + \dots \\ + a_{n-3} \text{sen}(a_{n-3} a_2) + a_{n-2} \text{sen}(a_{n-2} a_2) \\ + a_{n-1} \text{sen}(a_{n-1} a_2) \end{array} \right]$$

.....

$$+ \frac{1}{2} a_{n-3} \left[a_{n-2} \text{sen}(a_{n-2} a_{n-3}) + a_{n-1} \text{sen}(a_{n-1} a_{n-3}) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} a_{n-2} a_{n-1} \text{sen}(a_{n-1} a_{n-2}),$$

la quale si riduce a

$$A = \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} a_1 a_2 \text{sen}(a_2 a_1) + a_1 a_3 \text{sen}(a_3 a_1) + \dots \\ + a_1 a_{n-2} \text{sen}(a_{n-2} a_1) + a_1 a_{n-1} \text{sen}(a_{n-1} a_1) \\ + a_2 a_3 \text{sen}(a_3 a_2) + \dots \\ + a_2 a_{n-2} \text{sen}(a_{n-2} a_2) + a_2 a_{n-1} \text{sen}(a_{n-1} a_2) \\ \dots \\ + a_{n-3} a_{n-2} \text{sen}(a_{n-2} a_{n-3}) + a_{n-3} a_{n-1} \text{sen}(a_{n-1} a_{n-3}) \\ + a_{n-2} a_{n-1} \text{sen}(a_{n-1} a_{n-2}) \end{array} \right\}.$$

La qual formola dice che l'area di un poligono, di cui si cono-

scono tutti i lati meno uno e tutti gli angoli meno i due adiacenti al lato incognito, è data dalla metà della somma dei prodotti che si ottengono moltiplicando i lati due a due pei seni delle rispettive deviazioni; cosicchè, essendo $n-1$ i lati misurati, si comporrà l'ultima formola di $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ termini.

69. Area di un poligono rilevato per intersezione. — Sia $A_1 A_2 A_3 A_4 \dots A_{n-2} A_{n-1} A_n$ (fig. 69) un poligono il quale venne rilevato per intersezione, misurando cioè il lato $A_1 A_2$ e gli angoli $A_3 A_1 A_2$, $A_4 A_1 A_2$, $A_5 A_1 A_2$, $A_{n-2} A_1 A_2$, $A_{n-1} A_1 A_2$ ed $A_n A_1 A_2$, $A_n A_2 A_1$, $A_{n-1} A_2 A_1$, $A_{n-2} A_2 A_1$, $A_5 A_2 A_1$, $A_4 A_2 A_1$ ed $A_3 A_2 A_1$. Volendosi trovare la superficie di questo poligono in funzione del lato e degli angoli misurati, si chiamino

b la lunghezza della base $A_1 A_2$,

$\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \dots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}$ ed α_n gli angoli che le rette $A_1 A_3, A_1 A_4, A_1 A_5, \dots, A_1 A_{n-2}, A_1 A_{n-1}$ ed $A_1 A_n$ fanno colla direzione $A_1 A_2$,

$\alpha'_3, \alpha'_4, \alpha'_5, \dots, \alpha'_{n-2}, \alpha'_{n-1}$ ed α'_n gli angoli che le rette $A_2 A_3, A_2 A_4, A_2 A_5, \dots, A_2 A_{n-2}, A_2 A_{n-1}$ ed $A_2 A_n$ fanno colla direzione $A_2 A_1$,

Considerando i triangoli $A_1 A_2 A_3, A_1 A_2 A_4, A_1 A_2 A_5, \dots, A_1 A_2 A_{n-2}, A_1 A_2 A_{n-1}$ ed $A_1 A_2 A_n$, in ciascuno dei quali si conoscono il lato comune $A_1 A_2$ ed i due angoli adiacenti, immediatamente si ottiene

$$\overline{A_1 A_3} = b \frac{\text{sen } \alpha'_3}{\text{sen}(\alpha_3 + \alpha'_3)}$$

$$\overline{A_1 A_4} = b \frac{\text{sen } \alpha'_4}{\text{sen}(\alpha_4 + \alpha'_4)}$$

$$\overline{A_1 A_5} = b \frac{\text{sen } \alpha'_5}{\text{sen}(\alpha_5 + \alpha'_5)}$$

.....

$$\overline{A_1 A_{n-2}} = b \frac{\text{sen } \alpha'_{n-2}}{\text{sen}(\alpha_{n-2} + \alpha'_{n-2})}$$

$$\overline{A_1 A_{n-1}} = b \frac{\text{sen } \alpha'_{n-1}}{\text{sen}(\alpha_{n-1} + \alpha'_{n-1})}$$

$$\overline{A_1 A_n} = b \frac{\text{sen } \alpha'_n}{\text{sen}(\alpha_n + \alpha'_n)}$$

Ora, essendo l'area A del poligono proposto la somma delle aree dei triangoli $A_3 A_1 A_2$, $A_4 A_1 A_3$, $A_5 A_1 A_4$,, $A_{n-1} A_1 A_n A_{n-2}$ ed $A_n A_1 A_{n-1}$, per ciascuno dei quali si possono dir noti due lati e l'angolo compreso, essendo rispettivamente

$$\alpha_3, \quad \alpha_4 - \alpha_3 = \Delta_4, \quad \alpha_5 - \alpha_4 = \Delta_5,$$

.....

$$\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} = \Delta_{n-1}, \quad \alpha_n - \alpha_{n-1} = \Delta_n$$

gli angoli di questi triangoli aventi il vertice in A_1 , e ponendo

$$\alpha_3 + \alpha_3' = \Sigma_3, \quad \alpha_4 + \alpha_4' = \Sigma_4, \quad \alpha_5 + \alpha_5' = \Sigma_5$$

.....

$$\alpha_{n-2} + \alpha_{n-2}' = \Sigma_{n-2}, \quad \alpha_{n-1} + \alpha_{n-1}' = \Sigma_{n-1}, \quad \alpha_n + \alpha_n' = \Sigma_n,$$

si ha la formola

$$A = \frac{1}{2} b^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{sen } \alpha_3'}{\text{sen } \Sigma_3} \text{sen } \alpha_3 + \frac{\text{sen } \alpha_3' \text{sen } \alpha_4'}{\text{sen } \Sigma_3 \text{sen } \Sigma_4} \text{sen } \Delta_4 \\ + \frac{\text{sen } \alpha_4' \text{sen } \alpha_5'}{\text{sen } \Sigma_4 \text{sen } \Sigma_5} \text{sen } \Delta_5 + \dots \\ + \frac{\text{sen } \alpha_{n-2}' \text{sen } \alpha_{n-1}'}{\text{sen } \Sigma_{n-2} \text{sen } \Sigma_{n-1}} \text{sen } \Delta_{n-1} \\ + \frac{\text{sen } \alpha_{n-1}' \text{sen } \alpha_n'}{\text{sen } \Sigma_{n-1} \text{sen } \Sigma_n} \text{sen } \Delta_n \end{array} \right\},$$

la quale serve al calcolo della superficie di un poligono rilevato per intersezione nel modo espresso dalla figura 69.

70. **Area del circolo e delle sue parti.** — Le figure circolari sono di quelle che più di frequente avviene di dover considerare nella pratica delle costruzioni, ed ecco una succinta esposizione delle formole che servono al calcolo dell'area A di tali figure:

1° Per un circolo di raggio r si ha

$$A = \pi r^2,$$

essendo π il rapporto delle circonferenze al diametro. Il valore di

questo rapporto, che si può assumere di $\frac{22}{7}$ nei problemi in cui non si richiede una grande esattezza, stando al limite delle prime dieci cifre decimali vien espresso da 3,1415926535.

2° Per un settore circolare di raggio r e chiuso da un arco di lunghezza l , si ha

$$A = \frac{1}{2} r l.$$

5° Per un settore circolare in cui sono noti il raggio r e l'ampiezza n° dell'arco chiudente il settore, per essere le aree dei settori dello stesso raggio proporzionali alle loro ampiezze e per essere il circolo un settore cui corrisponde l'ampiezza di 360° , risulta la formola

$$A = \frac{n^\circ}{360^\circ} \pi r^2.$$

4° Per un settore circolare determinato mediante la sua corda $\overline{AB} = 2c$ e la sua monta $\overline{DC} = m$ (fig. 70), si calcolano il raggio $\overline{OA} = r$ e l'angolo $\angle AOB = n^\circ$, e quindi si applica l'ultima formola. Osservando che la semi-corda \overline{AD} è media proporzionale fra i due segmenti adiacenti del diametro a cui è perpendicolare, l'equazione determinatrice di r risulta (num. 24)

$$r = \frac{c^2 + m^2}{2m};$$

e, per essere l'angolo $\angle AOD = \frac{1}{2} n^\circ$, dal triangolo rettangolo ADO si deduce

$$\text{sen } \frac{1}{2} n^\circ = \frac{c}{r}$$

per equazione determinatrice dell'angolo n° .

5° L'area di un segmento circolare ACB ad una sol base si ottiene sottraendo dall'area del settore $OACB$ chiuso dall'arco del segmento, quella del triangolo isoscele AOB che ha per vertice il centro del circolo cui il segmento appartiene e per base la sua corda.

6° L'area di un segmento circolare a due basi e, più gene-

ralmente, l'area della parte di circolo EFGH compresa fra due corde \overline{EF} e \overline{GH} ed i due archi circolari EH ed FG, si ottiene facendo le superficie di due segmenti circolari ad una sol base e sottraendo quella del segmento minore da quella del segmento maggiore.

7° L'area di una corona circolare di raggio maggiore R e di raggio minore r, siccome differenza fra le aree dei due circoli aventi gli indicati raggi, si ottiene colla formola

$$A = \pi (R^2 - r^2).$$

Questa formola può anche essere scritta

$$A = 2\pi \frac{R+r}{2} (R-r),$$

per cui l'area di una corona circolare si ottiene moltiplicando la circonferenza $2\pi \frac{R+r}{2}$, avente per raggio il raggio medio $\frac{R+r}{2}$, per la larghezza $R-r$ della corona.

8° L'area di una porzione di corona circolare, separata dalla corona intiera mediante due rette concorrenti al centro è la differenza fra le aree di due settori di raggi R ed r ed aventi la stessa ampiezza n° . Siccome poi le porzioni di una stessa corona circolare sono proporzionali alle ampiezze che loro corrispondono, e siccome l'ampiezza d'un intiera corona è 360° , si ha

$$A = \frac{n^\circ}{360^\circ} \pi (R^2 - r^2).$$

Questa formola, scritta sotto la forma

$$A = \frac{n^\circ}{180^\circ} \pi \frac{R+r}{2} (R-r),$$

mostra che la superficie di una porzione di corona circolare è data dalla lunghezza dall'arco $\frac{n^\circ}{180^\circ} \pi \frac{R+r}{2}$, avente per raggio il raggio medio $\frac{R+r}{2}$, moltiplicata per la larghezza $R-r$ della porzione di corona.

71. **Area delle semi-ovali.** — L'area di un quarto di ovale ACD (fig. 32) si ottiene facendo le aree dei settori circolari AO_1b , bO_2c , , $eO_n f$ ed $fO_{n+1}D$, sommando queste aree e sottraendo dalla somma l'area del poligono $CO_1O_2O_3$, $O_{n-1}O_nO_{n+1}$. Il doppio del numero che così si ottiene rappresenta l'area compresa fra le semi-ovali e la sua corda. Le aree degli indicati settori assai facilmente si ottengono giacchè, come si è visto nel capitolo III della prima parte, si conoscono i loro raggi e le loro ampiezze; in quanto poi all'area che si deve sottrarre dalla somma degli accennati settori riesce assai agevole l'ottenerla, giacchè vale essa la somma delle aree delle figure $O_1P_1O_2$, $O_2P_2P_3O_3$, , $O_{n-1}P_{n-1}P_nO_n$ ed $O_nP_nCO_{n+1}$, la prima delle quali è un triangolo rettangolo e le altre trapezii pei quali si conoscono basi ed altezze.

Dovendosi trovare l'area di una zona compresa fra due mezz ovali aventi le loro corde su una medesima direzione, si toglie dall'area della semi-ovale maggiore l'area della semi-ovale minore.

72. **Area di un segmento parabolico.** — Avviene qualche volta nella pratica di dover ottenere l'area d'un segmento parabolico, come APM (fig. 71), terminato da un diametro Ax e dall'ordinata \overline{PM} parallela alla tangente AV , ed ecco come elementarmente si può ottenere quest'area.

S'immagini inscritta la linea poligonale $MM'M''$ A nell'arco di parabola, condotte pei vertici M , M' , M'' , le tangenti \overline{MT} , $\overline{M'T'}$, $\overline{M''T''}$, alla parabola, non che le ordinate \overline{MP} , $\overline{M'P'}$, $\overline{M''P''}$, Le indicate tangenti determinano colle loro intersezioni successive i triangoli TRT' , $T'R'T''$, che convien paragonare coi trapezii corrispondenti $PMM'P'$, $P'M'M''P''$, Ora, se dal punto R e dal punto I posto sul mezzo della corda $\overline{MM'}$, si abbassano \overline{RQ} ed \overline{IK} perpendicolarmente ad Ax , se da I si conduce \overline{IL} parallela ad \overline{MP} , e se da P si tira \overline{PO} perpendicolare ad \overline{MP} , si ha

$$TRT' = \frac{1}{2} \overline{TT'} \times \overline{RQ}$$

$$PMM'P' = \overline{IL} \times \overline{PO} = \overline{PP'} \times \overline{IK}.$$

Ma per essere \overline{MT} ed $\overline{M'T'}$ tangenti alla parabola nei punti M ed M' , e per essere nella parabola la sotto tangente il doppio dell'ascissa, si ha $\overline{AT} = \overline{AP}$ ed $\overline{AT'} = \overline{AP'}$; per cui $\overline{TT'} = \overline{PP'}$. Condu-

endo per il punto I la retta IG parallela ad Ax si ha nella retta IG un diametro della parabola, e le tangenti alla curva in M ed M' devono tagliare questo diametro nello stesso punto; il punto R si trova adunque sul diametro IG, ed RQ è eguale ad IK. Risulta da tutto questo: che la superficie del trapezio PMM'P' è doppia di quella del triangolo TRT'; che la stessa relazione ha luogo fra la superficie di ciascuno dei trapezii analoghi a PMM'P' e quella del triangolo corrispondente; che la somma dei trapezii è doppia della somma dei triangoli, qualunque sia il numero dei lati della linea poligonale inscritta nell'arco parabolico AM; che il segmento parabolico APM, il quale è il limite della prima somma, e il doppio del triangolo mistilineo AMT, che è il limite della seconda somma; che il segmento è i due terzi del triangolo rettilineo TMP ossia del parallelogramma APMV equivalente al detto triangolo siccome avente altezza eguale e base metà di quella del triangolo, e finalmente che il segmento parabolico APM è i due terzi del parallelogramma fatto sull'ascissa AP e sull'ordinata PM.

Risulta dal sin qui detto che, chiamando

a e *b* l'ascissa AP e l'ordinata PM di un segmento o triangolo parabolico, avente per lati l'arco di parabola AM, l'ascissa dell'estremo M contata a partire da A sul diametro Ax e l'ordinata dello stesso estremo M parallela alla tangente della parabola in A,

α l'angolo MPx che misura l'inclinazione dell'ordinata della parabola al diametro,

A l'area del segmento parabolico, si ha

$$A = \frac{2}{3} ab \operatorname{sen} \alpha.$$

75. Area dell'ellisse e dei segmenti ellittici. — Anche l'ellisse è una figura piana della quale soventi volte si deve nella pratica valutare l'area, ed ecco le nozioni fondamentali che elementarmente conducono sia alla valutazione della superficie dell'intera ellisse, sia alla valutazione di quelle sue parti che più di frequente avviene al costruttore di dover considerare.

1° Se sull'asse maggiore BC (fig. 72) di un ellisse si descrive un circolo, e se chiamansi

a il semi-asse maggiore AB,

b il semi-asse minore AD,

y ed *Y* le due ordinate PN e PM elevate nello stesso punto P

fino alla periferia dell'ellisse e fino alla periferia del circolo, si sa esistervi fra le quattro indicate lunghezze la semplicissima relazione

$$\frac{y}{Y} = \frac{b}{a}.$$

Premesso questo, se nella circonferenza si inscrive un poligono qualunque $CMM'M''$, se da ciascuno dei suoi vertici si abbassano delle perpendicolari sull'asse \overline{BC} e se si congiungono con rette i punti in cui queste perpendicolari tagliano l'ellisse, si viene a formare un poligono $CNN'N''$, inscritto nell'ellisse. Ora, un trapezio qualunque $MPP'M'$ preso nel circolo ha per superficie l'espressione

$$\frac{1}{2}(\overline{PM} + \overline{P'M'})\overline{PP'},$$

e la superficie del trapezio corrispondente $NPP'N'$ preso nell'ellisse vien data da

$$\frac{1}{2}(\overline{PN} + \overline{P'N'})\overline{PP'}.$$

La superficie del secondo trapezio sta adunque alla superficie del primo trapezio nel rapporto

$$\frac{\overline{PN} + \overline{P'N'}}{\overline{PM} + \overline{P'M'}}.$$

Ma, per la nota relazione

$$\frac{\overline{PN}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{P'N'}}{\overline{P'M'}} = \frac{b}{a},$$

si ha

$$\frac{\overline{PN} + \overline{P'N'}}{\overline{PM} + \overline{P'M'}} = \frac{b}{a},$$

e quindi essendo le aree di due trapezii corrispondenti nel rapporto costante di $\frac{b}{a}$, nello stesso rapporto staranno pure le aree dei po-

ligoni, e questo qualunque sia il numero dei loro lati. Questo rapporto adunque sarà pur quello dei loro limiti, cosicchè chiamando

A l'area dell'ellisse ed

A' quello del circolo,

si avrà

$$\frac{A}{A'} = \frac{b}{a}.$$

Ma l'area A' del circolo vale πa^2 , e quindi quella dell'ellisse vien data da

$$A = \pi a b.$$

2° L'area di una corona ellittica si ottiene togliendo dall'area dell'ellisse maggiore quella dell'ellisse minore.

3° Se, invece dei due semi-assi principali a e b dell'ellisse, sono noti due semi-diametri coniugati a' e b' non che l'angolo α che essi fanno fra di loro, siccome si sa che

$$ab = a'b' \sin \alpha,$$

ne deriva che l'area dell'ellisse in funzione di due suoi semi-diametri coniugati vien espressa da

$$A = \pi a'b' \sin \alpha.$$

4° Quando si vuol trovare la superficie, non di un'intiera ellisse, ma sibbene soltanto d'un segmento ellittico $PP'N'N$ compreso fra due ordinate perpendicolari all'asse \overline{BC} , facendo un ragionamento analogo a quello che venne fatto per l'ellisse intiera e chiamando

A_1 l'area del segmento ellittico $PP'N'N$,

A_1' l'area del segmento circolare corrispondente $PP'M'M$, si trova

$$A_1 = \frac{b}{a} A_1';$$

e così la quadratura d'un segmento ellittico si trova ridotta a quella d'un segmento circolare, facilmente effettuabile colle regole di geometria elementare.

5° Se invece trattasi di avere l'area d'un segmento ellittico, compreso fra un diametro qualunque \overline{BC} (*fig. 75*) e due ordinate

\overline{PN} e $\overline{P'N'}$ parallele al suo coniugato, s'immagina descritto un circolo su \overline{BC} come diametro; s'inscrive nell'arco d'ellisse NN' una linea poligonale NRR' ; dopo, avendo condotte le ordinate \overline{RS} , $\overline{R'S'}$, parallele ad NP , si elevano su BC le perpendicolari \overline{PM} , \overline{SH} , $\overline{S'H'}$, che determinano sulla circonferenza i punti M , H , H' ,; si congiungono questi punti fra di loro e si paragonano i trapezii obliqui, come $PSRN$, ai trapezii rettangolari corrispondenti. Abbassando dal punto S la perpendicolare \overline{SI} su PN , dal triangolo rettangolo SIP si ha

$$\overline{SI} = \overline{SP} \text{sen } IPS.$$

Segue da ciò che l'area del trapezio obliquo $PSRN$ vien data da

$$\frac{1}{2} (\overline{PN} + \overline{SR}) \overline{SP} \text{sen } IPS,$$

mentre quella del trapezio rettangolare corrispondente $PSHM$ vale

$$\frac{1}{2} (\overline{PM} + \overline{SH}) \overline{SP}.$$

Ora, essendo

$$y^2 = \frac{b'^2}{a'^2} (a'^2 - x^2),$$

l'equazione dell'ellisse rapportata a due diametri coniugati, uno dei quali è \overline{BC} , e le cui metà sono a' e b' , ed essendo

$$y^2 = a'^2 - x^2$$

l'equazione del circolo rapportata al diametro \overline{BC} e ad un altro diametro a questo perpendicolare, evidentemente si ha l'eguaglianza di rapporti

$$\frac{\overline{PN}}{\overline{PM}} = \frac{\overline{SR}}{\overline{SH}} = \frac{b'}{a'}$$

dalla quale immediatamente si deduce

$$\frac{\overline{PN} + \overline{SR}}{\overline{PM} + \overline{SH}} = \frac{b'}{a'}.$$

Segue da ciò che chiamando α l'angolo $NPB = IPS$, eguale a quello che il diametro \overline{BC} fa col suo coniugato, si ha

$$\frac{b'}{a'} \operatorname{sen} \alpha$$

per rapporto della superficie del trapezio obliquo $PSRN$ a quello del trapezio rettangolare corrispondente $PSHM$; e siccome i trapezii corrispondenti sono tra loro nel rapporto costante or ora trovato, qualunque sia il loro numero, un segmento ellittico qualunque $NPP'N'$ deve stare nello stesso rapporto al segmento circolare corrispondente $MPP'M'$.

Chiamando adunque

A_2 l'area di un segmento ellittico compreso fra un diametro e due ordinate parallele al diametro coniugato del primo, ed

A_2' l'area del segmento circolare corrispondente compreso fra il detto diametro e due ordinate ad esso perpendicolari, si ha

$$A_2 = \frac{b'}{a'} A_2' \operatorname{sen} \alpha.$$

In tal modo si fa dipendere l'area A_2 d'un segmento ellittico dall'area A_2' d'un segmento circolare da ottenersi coi semplici processi a cui conduce lo studio della geometria elementare.

74. Calcolo dell'area compresa fra una curva, una retta e due perpendicolari a questa retta; fra una curva, una retta passante per un suo estremo ed una perpendicolare a questa retta; fra una curva e la sua corda. — Sia ABC una curva (*fig. 74*), \overline{DE} una retta, \overline{DA} ed \overline{EC} due perpendicolari abbassate dai due estremi di quella su questa, e sia proposto di ottenere la superficie contenuta fra queste quattro linee.

Perciò dividasi la base \overline{DE} in parti eguali nei punti q' , q'' , q''' ,; per questi punti di divisione s'innalzino le perpendicolari $\overline{q'm'}$, $\overline{q''m''}$, $\overline{q'''m'''}$, , l'area totale resterà così scomposta in tanti trapezii la cui somma, quando gli archi Am' , $m'm''$, $m''m'''$, si confondano sensibilmente colle loro corde, darà approssimativamente l'area cercata: cosicchè indicando questa con A , con h il valore di ciascuna parte in cui venne divisa la \overline{DE} , con p , p' , p'' , p''' , le lunghezze delle diverse perpendicolari, si avrà

$$A = h \frac{p+p'}{2} + h \frac{p'+p''}{2} + h \frac{p''+p'''}{2} + \dots$$

Mettendo h fattore comune, osservando che la prima perpendicolare p entra solo nel primo termine, e l'ultima $p^{(n)}$ solo nell'ultimo, si avrà

$$A = h \left(\frac{p+p^{(n)}}{2} + p' + p'' + p''' + \dots + p^{(n-1)} \right).$$

Questa formola, detta formola di Bézout, serve anche a trovare l'area compresa fra una curva ABC , una retta \overline{DC} ed una perpendicolare \overline{AD} (fig. 75) facendo $p^{(n)}=0$; e serve pure ad ottenere la superficie compresa fra una curva ABC e la sua corda \overline{AC} (fig. 76) quando si faccia $p=0$ e $p^{(n)}=0$.

Adoperando la formola qui trovata, l'area che si ottiene è minore della vera quando la curva è in tutta la sua estensione concava verso la base, e maggiore quando è convessa; imperocchè, nel primo caso si levano e nel secondo si aggiungono all'area ottenuta i piccoli segmenti, compresi fra ciascun archetto della curva e la corda di questo archetto

75. Formola di Simpson. — L'errore che si commette impiegando la precedente formola si può rendere più piccolo, considerando una copia di detti archetti, per esempio $Am' + m'm''$ (fig. 77), dividendo l'intervallo $\overline{Dq''}=2h$ in tre parti eguali nei punti F e G , ed innalzando per questi le due perpendicolari \overline{FH} e \overline{GI} , onde avere i tre trapezii $ADFH$, $HFGI$, $IGq''m''$, che, considerati come rettilinei, danno per somma delle loro aree

$$\frac{h}{3}(p + \overline{HF}) + \frac{h}{3}(\overline{HF} + \overline{GI}) + \frac{h}{3}(\overline{GI} + p'') = \frac{h}{3}(p + 2\overline{HF} + 2\overline{GI} + p'').$$

Ponendo in questo risultato $p' = \frac{\overline{HF} + \overline{GI}}{2}$, ossia $2\overline{HF} + 2\overline{GI} = 4p'$, onde compensare in qualche modo l'errore commesso considerando i precedenti trapezii come rettilinei, si ottiene

$$\frac{h}{3}(p + 4p' + p''),$$

la quale espressione, unita alle analoghe $\frac{h}{3}(p'' + 4p''' + p^{(iv)})$, $\frac{h}{3}(p^{(v)} + 4p^{(vi)} + p^{(vii)})$,, ottenute considerando le aree proiettate sugli intervalli $2h$ della base, condurrà alla formola

$$A = \frac{h}{3}(p + 4p' + 2p'' + 4p''' + \dots + p^{(n)}) \quad (1).$$

Egli è evidente che, per applicare questa formola, il numero delle parti eguali in cui si deve dividere la base \overline{DE} (fig. 74) deve essere pari. Facendo in questa formola $p=0$, si ha la superficie del terreno rappresentato nella figura 75; e facendo $p=0$, $p^{(n)}=0$, si ha quella del terreno rappresentato nella figura 76.

Al medesimo risultato si giunge considerando ciascuna coppia di archetti, qual è $Am' + m'm''$ (fig. 74), come un arco di parabola ordinaria di equazione

$$y = A + Bx + Cx^2,$$

dove A, B e C sono tre parametri da determinarsi colla condizione che essa debba passare pei tre punti A, m' e m'' . Perciò pongasi l'origine delle coordinate in D, prendasi la DE per asse delle ascisse, e la DA per asse delle ordinate, e si avrà che le coordinate dei punti A, m' , m'' , sono rispettivamente $(0, p)$, (h, p') , $(2h, p'')$, e si potranno stabilire le seguenti equazioni

$$p = A, \quad p' = A + Bh + Ch^2, \quad p'' = A + 2Bh + 4Ch^2,$$

dalle quali, ricavando A, B e C, si ha

$$A = p, \quad B = \frac{-3p + 4p' - p''}{2h}, \quad C = \frac{p - 2p' + p''}{2h^2}.$$

L'area $ADq''m''$ è data da

$$\int_0^{2h} y dx = \int_0^{2h} (A + Bx + Cx^2) dx = 2Ah + 2Bh^2 + \frac{8}{3}Ch^3;$$

e, sostituendo ad A, B, C i loro valori, si trova

$$\int_0^{2h} y dx = 2hp + h(-3p + 4p' - p'') + \frac{4}{3}h(p - 2p' + p'')$$

$$= \frac{h}{3}(p + 4p' + p''):$$

espressione identica a quella già ottenuta con altro metodo, e che aggiunta alle sue analoghe riproduce la formola (1).

Conchiudendo sul merito di questa formola, è da osservarsi che essa può dare un valore più esatto dell'area compresa fra un arco di curva, una retta e due perpendicolari, soltanto nel caso in cui la concavità della curva trovasi volta verso la base. Nel caso che ciò non avvenga, come nella fig. 78, bisogna condurre la retta \overline{AC} , calcolare la superficie del trapezio $ACED$, quella compresa fra la corda \overline{AC} e la curva ABC , e diffalcare dalla prima la seconda.

76. **Aree delle zone comprese fra due linee parallele.** — Non è raro il caso di dover trovare l'area di una zona compresa fra due linee poligonali parallele fra loro, e terminata ai suoi capi da due rette aventi direzioni qualunque, perchè ad ogni istante s'incontrano appunto terreni intersecati da fossi e da strade la cui larghezza è effettivamente, o almeno si può ritenere come costante. In questo caso basta osservare che, congiungendo (fig. 79) i vertici corrispondenti A e A' , B e B' , C e C' , due a due, l'area a calcolarsi trovasi scomposta in tanti trapezii di basi a e b , a' e b' ,, di altezza costante h , e la cui somma, costituente l'area dimandata, sarà

$$A = h \frac{a+b}{2} + h \frac{a'+b'}{2} + h \frac{a''+b''}{2} + \dots \quad (1),$$

d'onde, chiamando $a^{(n)}$ e $b^{(n)}$ le basi dell'ultimo trapezio,

$$A = h \frac{(a + a' + a'' + \dots + a^{(n)}) + (b + b' + b'' + \dots + b^{(n)})}{2} \quad (2),$$

risultato che dimostra essere l'area voluta eguale alla larghezza costante della zona moltiplicata per la semi-somma delle lunghezze delle due linee poligonali.

Se ora immaginiamo divise per mezzo tutte le rette $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$,

$\overline{CC'}$, nei punti A'' , B'' , C'' , e se si indicano con m , m' , le medie $\overline{A''B''}$, $\overline{B''C''}$, delle basi dei trapezii, si avrà

$$\frac{a+b}{2} = m, \quad \frac{a'+b'}{2} = m', \quad \dots \quad \frac{a^{(u)}+b^{(u)}}{2} = m^{(u)},$$

il che trasforma la formola (1) in quest'altra

$$A = h(m + m' + m'' + \dots + m^{(u)}) \quad (3).$$

Questo risultato dimostra come l'area della zona sia anche eguale alla larghezza costante della zona moltiplicata per la linea poligonale media fra le due date.

Le due regole già esposte pel caso di due linee poligonali fra loro parallele sono anche applicabili al caso di due curve quando la superficie della zona fra esse compresa si può considerare come generata dal movimento di una retta che percorre col suo mezzo la curva media $A''B''C''$, conservandosi ad essa normale e senza passare due volte per un medesimo sito. Le medesime regole si applicano anche al calcolo dell'area di una zona qualunque compresa fra due curve parallele (*fig. 80*), ed i risultati che si ottengono sono abbastanza esatti per la pratica.

In un altro modo generalmente più lungo, ma talvolta comodo, si possono avere simili superficie, conducendo cioè una linea di base MP , cercando, con una delle regole date nei due precedenti numeri, l'area del trapezio curvilineo $MABCP$, e togliendovi l'area dell'altro trapezio curvilineo $M'A'B'C'P'$, non che quella dei due trapezi rettilinei $MAA'M$, $PCC'P'$.

77. Valutazione delle aree dei terreni. — Quando per rilevare il terreno di cui vuolsi l'area si usano i soli strumenti che servono a misurare distanze, oppure a questi si accoppia l'uso di uno squadro agrimensorio o di un goniometro, è sempre possibile, coi metodi esposti nei numeri 63, 64, 65, 66, 67, 68 e 69, calcolare l'area voluta coi dati presi sul terreno o con altri che da questi si deducono, ed i risultati che si ottengono sono della massima esattezza quando le misure siansi fatte colla dovuta cura; lo stesso grado di precisione non si può raggiungere costruendo il piano del terreno e desumendone la superficie collo scomporlo in figure geometriche calcolabili, come triangoli, rettangoli, trapezi. Questo metodo però, che è il solo da impiegarsi nelle operazioni eseguite

colla tavoletta, si usa anche per i terreni rilevati cogli altri strumenti siccome non imbarazzante in calcoli, facili se si vuole, ma lunghi e fastidiosi.

Allorquando si ha un piano e che vuolsi desumere l'area di uno o più appezzamenti in esso rappresentati, si può condurre verso il suo mezzo una retta di base nel senso della maggior lunghezza, abbassare su questa delle perpendicolari dai varii vertici e misurare colla corrispondente scala tutte le perpendicolari non che le distanze fra le medesime, seguendo così un processo in tutto analogo a quello che si tiene sul terreno nel rilevare collo squadra agrimensorio, e che sempre conduce a scomporre la figura in triangoli, trapezii ed in parti comprese fra linee rette e linee curve. Il metodo d'inscrivervi un gran triangolo, o un gran rettangolo, o un gran trapezio, e di prendere i loro lati per linee di base, impiegasi in tale operazione con buon successo, perchè con una sola figura s'incomincia ad avere quasi la totalità della superficie a valutarsi.

Più spedito del suesposto metodo è quello della *triangolazione*, che consiste nello scomporre la figura a misurarsi in triangoli aventi una certa regolarità, ottenuti prolungando alcuni lati onde far sì che il loro numero sia il più piccolo possibile, e nel trovare ciascuna base ed altezza, utilizzando, se si può, qualche misura desunta dal quaderno dei rilievi locali. Talvolta, oltre questi triangoli, rimangono delle parti comprese fra un perimetro molto frastagliato o curvilineo: queste parti si calcolano o colla scomposizione in trapezii e triangoli rettangoli o colla regola data al numero 74.

I numeri necessarii al calcolo dell'area si notano talvolta per maggior chiarezza su un abbozzo o sul piano geometrico stesso: le singole parti o *caselle* ottenute con la scomposizione devono essere distinte con numeri progressivi o con lettere, ed il tutto va trascritto in un casellario disposto in modo che si possano collocare in apposite finche: 1° l'indicazione degli appezzamenti; 2° il numero d'ordine d'ogni casella; 3° la denominazione della sua figura; 4° le dimensioni lineari o i due fattori atti a dare l'area doppia di ognuna di esse; 5° le aree doppie delle caselle addietive e sottrattive; 6° le aree dei singoli appezzamenti.

La figura 34, rappresentante due appezzamenti A e B, dà l'idea di una scomposizione per triangolazione: un casellario che può convenire è quello che trovasi qui appresso riportato.

INDICAZIONE degli appezzamenti	N° d'Ordine delle Caselle	DENOMINAZIONE delle Caselle	FATTORI		PRODOTTI		AREE doppie	AREE doman- date
			Basi	Altezze	Positivi	Negativi		
A	1	Triangolo	^m 44,50	^m 21,00	^{mq} 934,50			
	2	id.	13,20	8,50	109,56			
	3	id.	13,20	4,25	56,10			
	4	id.	70,72	37,50	2637,86			
	5	id.	25,10	3,10	77,81			
	6	id.	25,10	10,15	254,76			
	7	id.	45,80	24,70	1151,26			
	8	Figura mistilinea	34,80	9,00	•	^{mq} 515,20		
	9	id.	8,60	8,75	75,25			
	10	Triangolo	45,80	5,20	258,16			
				5515,26	515,20	^{mq} 5202,06	^{mq} 2601,05	
B	1	Triangolo	55,00	27,00	1485,00			
	2	id.	55,00	22,00	1210,00			
	3	Figura mistilinea	6,40	11,50	75,60			
	4	Triangolo	35,10	25,20	814,52			
	5	id.	25,25	5,00	•	^{mq} 116,25		
	6	id.	11,85	5,15	37,35			
	7	id.	25,80	9,00	252,20			
				3852,45	116,25	3736,20	1868,10	

Le aree si ottengono doppie per non essere costretti a prendere sempre la metà di uno dei fattori che servono a conseguirle; e se talvolta si presenta qualche rettangolo, conviene registrare nella colonna dei fattori la sua base e la doppia altezza, la quale va pure raddoppiata nelle figure mistilinee.

L'operazione di prendere col compasso sulla scala del disegno le misure di base e di altezza di ciascuna casella, e di riportarle nelle apposite colonne del casellario, dicesi *impostazione*.

78. **Relazione esistente fra una scala di proporzione, una superficie naturale e la corrispondente superficie sul piano.** — La figura di una data porzione di terreno disegnata in iscala, è sempre simile alla figura naturale del terreno medesimo, e quindi il rapporto delle aree di queste due figure deve essere eguale al quadrato del rapporto delle dimensioni lineari o ancora al quadrato della frazione scala. Segue da ciò che, chiamando *s* la superficie

di una figura rappresentata in un piano, S la superficie naturale corrispondente, $\frac{m}{n}$ la scala del piano, si avrà

$$\frac{s}{S} = \left(\frac{m}{n}\right)^2,$$

dalla quale, ricavando successivamente s ed S, si hanno

$$s = S \left(\frac{m}{n}\right)^2, \quad S = s : \left(\frac{m}{n}\right)^2,$$

formole che danno luogo alle regole seguenti:

1° Data una superficie naturale, si trova la sua rappresentativa in iscala moltiplicandola per il quadrato della frazione scala o, men generalmente, dividendola per il quadrato del denominatore, quando il numeratore è eguale all'unità;

2° Data l'area di un piano eseguito in una determinata scala, si trova la superficie naturale corrispondente dividendola per il quadrato della frazione scala, o moltiplicandola semplicemente per il quadrato del denominatore, quando il numeratore è eguale all'unità.

Trovata l'area di una figura rappresentata in un piano, usando di semplici righe e squadrette per operare la scomposizione in figure geometriche elementari e prendendo le misure col doppio decimetro, si giugne, coll'applicazione della seconda regola, a desumere la superficie naturale del terreno rappresentato senza costruzione di scale.

79. **Planimetri.** — Vi sono degli ingegnosi ed utili apparati meccanici, i quali servono a valutare le aree di figure piane disegnate sulla carta. Tali strumenti prendono il nome di *planimetri*, e nei numeri che immediatamente seguono vien data la descrizione, la teoria e l'uso del *planimetro ortogonale* e del *planimetro polare*, che sono i due riconosciuti veramente utili e comodi nella pratica.

80. **Descrizione del planimetro ortogonale.** — Una base munita di tre guide g, g', g'' ; un carretto C a tre ruote scorrevoli sulle accennate guide (*fig. 32*); un disco circolare D, parallelo al piano della base e girevole intorno ad un perno ad esso perpendicolare con cui fa corpo un tamburo T; una lunga riga RR' disposta perpendicolarmente alle guide che con due bracci serve a tener teso un filo finissimo d'argento f , che s'avvolge all'accennato

tamburo; un secondo disco circolare o rotella D' , col suo piano perpendicolare a quello del disco D e su cui appoggia per puro contatto; un circolo graduato G su cui scorre un indicatore quando la rotella D' gira intorno al suo asse a ; e finalmente un calcoio c che trovasi ad un estremo della riga, costituiscono l'essenziale del planimetro ortogonale. Il carretto può scorrere longitudinalmente in direzione delle guide, e la riga, sempre mantenuta in senso perpendicolare alle guide medesime colle piccole ruote r , r' ed r'' , può muoversi innanzi e indietro pel verso della sua lunghezza, per modo da essere sempre possibile far percorrere al calcoio il perimetro di una figura chiusa collocata nel piano inferiore della base. Lo scorrimento della riga nel senso della sua lunghezza produce un moto giretorio nel tamburo e annesso disco D , il qual moto, per semplice contatto di sviluppo, si trasmette alla rotella D' e quindi all'indice girante sul lembo graduato. Ben di frequente all'estremo del perno a trovasi un rocchetto con cui ingrana una ruota d , dentata alla periferia coi denti generalmente costrutti in modo da passare due mezzi denti ed un intervallo per ogni giro d'indicatore; una tal ruota serve a valutare il numero intiero dei giri dati dall'indicatore senza essere costretti a contarli durante il tempo, per cui lo strumento trovasi in azione.

34. **Teoria del planimetro ortogonale.** — Per ben comprendere la teoria del descritto planimetro, s'immagini un rettangolo $ABCD$ (fig. 83 e 84) aventi i due lati \overline{AB} e \overline{CD} paralleli al filo metallico, e per conseguenza gli altri due lati \overline{BC} ed \overline{AD} paralleli alle guide. I lati AB ed AD del rettangolo si indichino rispettivamente colle lettere a e b ; la distanza \overline{EO} del punto di contatto della rotella dal centro del disco sia d ; sia r il raggio \overline{OF} del tamburo su cui avvolgesi il filo metallico, ed r' il raggio \overline{EG} della rotella.

Quando il calcoio passa da A in B , il tamburo ed il disco che con esso fa corpo gireranno intorno al loro comun asse, e siccome la rotella gira in pari tempo intorno al proprio asse, si vedrà scorrere l'indicatore sul circolo graduato. Chiamando x l'arco percorso da tutti i punti del tamburo e dell'annesso disco che sono a distanza l dal loro asse di rotazione, y l'arco percorso dagli analoghi punti della rotella intorno all'asse proprio; l'arco percorso dai punti del tamburo in coincidenza col filo metallico sarà espresso da rx ed avrà la lunghezza a , per modo che si potrà porre per prima equazione

$$a = rx.$$

I punti del disco, che distano dal centro O della quantità d , avranno percorsi archi di lunghezza dx ; i punti della periferia della rotella avranno descritti archi di lunghezza $r'y$; e siccome questi due ultimi archi devono essere eguali, si avrà per seconda equazione

$$r'y = dx.$$

Eliminando x dalle due stabilite equazioni, si conchiude

$$y = \frac{ad}{rr'},$$

e chiamando N' il numero dei giri percorsi dalla rotella, il qual numero si ottiene dividendo l'arco y di raggio 1 per la circonferenza 2π dello stesso raggio, si avrà

$$N' = \frac{ad}{2\pi rr'}$$

Facendo ora scorrere la punta da B in C , la distanza $\overline{OE} = d$ si cangia nell'altra $\overline{O'E} = d \pm b$ (valendo il segno $+$ pel caso della figura 35, ed il segno $-$ per quello della figura 34), e la rotella non gira. Portando dopo la punta da C in D , la rotella, girando in senso contrario al primo, fa il numero di giri

$$N'' = \frac{a(d \pm b)}{2\pi rr'},$$

per modo che l'indice, tornato indietro del numero di giri N'' , segnerà

$$N'' - N' = \frac{a(d \pm b)}{2\pi rr'} - \frac{ad}{2\pi rr'}.$$

Facendo finalmente ritornare il calatoio da D in A , la distanza $\overline{O'E} = d \pm b$ torna a diventare $\overline{OE} = d$ senza che abbia luogo rotazione alcuna nello strumento.

Intanto ricavando il prodotto ab dall'ultima equazione, si trova

$$ab = 2\pi rr'(\pm N'' \mp N')$$

dove i segni superiori si riferiscono al caso della figura 35, e gli

inferiori a quello della figura 84: cosicchè l'area del rettangolo ABCD è proporzionale al numero dei giri dati dalla rotella, quando col calcoatoio si percorra l'intero perimetro del rettangolo medesimo.

Si immagini ora che, invece di un sol rettangolo, se ne abbiano due ABCD, EFGH congiunti l'uno coll'altro come lo indica la figura 85, e che al calcoatoio del planimetro si facciano percorrere gli interi perimetri dei due rettangoli; allora l'indicatore segnerà sul lembo graduato un numero proporzionale alla somma delle due aree. Osservando però che in questo movimento la linea EF vien percorsa due volte in senso contrario, ciò che segna l'indice quando la punta viene da F in E è distrutto da ciò che segna l'indice quando essa viene da E in F: cosicchè, anche percorrendo il solo perimetro che abbraccia l'assieme dei due rettangoli, deve risultare nel numero dei giri della rotella una quantità proporzionale all'area dei due rettangoli. Lo stesso avrà luogo quando si abbiano più di due rettangoli assieme collegati come i precedenti. Ciò posto, siccome una figura qualunque si può sempre supporre scomposta in liste rettangolari di larghezza infinitamente piccola e di lunghezze parallele al filo metallico, ne segue che, facendo percorrere dal calcoatoio del planimetro il solo perimetro di una figura qualunque, si avrà nel numero di giri dati dall'indicatore un numero proporzionale all'area compresa nel perimetro percorso.

Dal sin qui detto si può conchiudere che, chiamando A l'area di una figura qualunque, N il numero dei giri dati dall'indicatore nel mentre il calcoatoio ne percorre il perimetro intiero, e ritenendo le notazioni già sopra stabilite, si avrà

$$A = 2\pi r r' N \quad (1),$$

e, facendo per semplicità $2\pi r r' = m$,

$$A = m N \quad (2).$$

82. Uso del planimetro ortogonale. — L'uso del planimetro ortogonale riesce della massima comodità pratica, allorquando il disco graduato è talmente costruito da rappresentare in ogni sua divisione una determinata unità superficiale. Perciò convien fissare preventivamente la superficie che vuolsi corrispondente ad un intiero giro, bisogna conoscere il raggio r del tamburo e, partendo dalla formola (1) del numero precedente, dove A ed r sono noti e dove $N=1$, dedurre il raggio r' della rotella. Così, se determinasi il raggio

della rotella in modo d'aver rappresentata nell'intero giro la superficie di 2000 millimetri quadrati e se tutto il lembo graduato vien diviso in duecento parti eguali, una di tali parti dà 10 millimetri quadrati, dieci parti rappresentano 100 millimetri quadrati ed ogni mezzo giro 1000 millimetri quadrati. Ora, se la piccola ruota dentata è costrutta in modo da passare una sua divisione per ogni mezzo giro d'indicatore, si avrà che ogni sua divisione corrisponde a 1000 millimetri quadrati, cosicchè le migliaia di millimetro quadrato si avranno dalla ruota dentata, le centinaia nelle grandi divisioni del lembo graduato e le decine nelle piccole sue divisioni.

Per costruire un planimetro ortogonale in modo che ogni divisione del suo disco graduato rappresenti una data unità superficiale è adunque necessario misurare il raggio r del tamburo, e costruire la rotella in modo che abbia il raggio r' dedotto dall'equazione (1) del numero precedente. Ora, atteso la picciolezza di questi raggi e quindi atteso la difficoltà che necessariamente incontrasi nel valutarli, si può benissimo ottenere che ogni divisione del disco graduato rappresenti con una certa approssimazione una prestabilita unità di superficie, ma non è da aspettarsi che la rappresenti esattamente. Segue da ciò doversi impiegare nella valutazione delle aree col planimetro ortogonale la formola (2) del numero precedente, determinando sperimentalmente il suo coefficiente m . Prima però d'impiegare la detta formola nella determinazione del coefficiente m conviene eliminare da essa il numero N esprimendolo in funzione del numero ν delle piccole divisioni del lembo graduato corrispondente al numero N di giri. Si osservi perciò: che, ritenendo fatte come già si è detto le divisioni del disco graduato, ogni giro intero dell'indicatore corrisponde a 200 delle piccole divisioni; che per conseguenza

$$N = \frac{\nu}{200};$$

e che finalmente l'equazione che si presta alla determinazione di m , diventa

$$A = m \frac{\nu}{200}.$$

Per questa determinazione si faccia percorrere al calcatoio il contorno di una figura di area nota; si tenga conto del numero

delle piccole divisioni del lembo graduato percorse dall'indicatore; e si faccia il quoziente dell'area della figura, il cui intero perimetro venne percorso dal calcoio, per l'indicato numero di divisioni. Questo quoziente rappresenta il coefficiente numerico $\frac{m}{200}$.

Per fissare le idee suppongasi che al calcoio si faccia percorrere il perimetro di una figura quadrata avente 1 decimetro di lato e quindi della superficie di 10000 millimetri quadrati; che al principio dell'operazione, ossia appena il calcoio si è portato in un punto del perimetro della figura, si leggano 4 divisioni sulla ruota dentata e 23 divisioni sul disco graduato, e che alla fine dell'operazione, ossia dopo che il calcoio ha percorso l'intero perimetro della figura, leggasi il numero 14 sulla ruota dentata od il numero 19 sul disco. Le piccole divisioni segnate dallo strumento al principio dell'operazione erano 425, e 1419 quelle indicate alla fine. Segue da ciò che, nel percorrere il calcoio l'intero perimetro della figura, sotto l'estremità dell'indicatore saranno passate $1419 - 425 = 996$ piccole divisioni del disco graduato, e che quindi, facendo $A = 10000$ e $v = 996$, l'ultima equazione diventerà

$$10000 = \frac{996}{200} m,$$

dalla quale si ricava

$$m = \frac{500000}{249},$$

ossia ancora

$$m = 2008,$$

quando si tenga solamente conto della sua parte intera.

Per determinare il coefficiente m conveniente ad un dato planimetro, si ripete l'operazione ora descritta su diverse figure piane di contorno e di superficie diversa. Tutte queste operazioni condurranno a valori poco diversi del coefficiente m , ed è la media aritmetica di questi che costituisce il vero valore da adottarsi.

Ammettendo che il valore di m conveniente ad un dato planimetro ortogonale che vuolsi impiegare nella valutazione delle aree sia quello or ora trovato, ossia 2008, l'ultima formola esprime la superficie A diventa

$$A = 10,04 \cdot v,$$

la quale serve a trovare l'area di una data figura piana operando come segue. Disposto il planimetro ed il foglio su cui la detta figura trovasi disposta in modo che un punto del calcoio si trovi in un punto del perimetro della figura stessa, si faccia sullo strumento la prima lettura, e suppongasi che sia essa di 2 divisioni sulla ruota dentata e di 74 divisioni sul lembo graduato; dopo si faccia percorrere dal calcoio l'intero perimetro della figura, e si passi alla seconda lettura, e suppongasi che sia essa di 11 divisioni sulla ruota dentata e di 7 divisioni sul lembo graduato; si ottenga la differenza fra la seconda e la prima lettura, espresse prendendo per unità le piccole divisioni del disco graduato, ossia si ottenga la differenza fra i due numeri 1107 e 274; questa differenza, che è 833, rappresenta il numero ν , e risulta quindi

$$A = 10,04 \times 833 = 8363^{\text{mm}^2}, 32,$$

ossia l'area della figura il cui perimetro venne percorso dal calcoio è di millimetri quadrati 8363,32.

Invece di far percorrere dal calcoio una sol volta il perimetro della figura di cui vuolsi l'area, si può seguitare per far sì che il detto perimetro per intero venga percorso due, tre, od anche un maggior numero di volte. Allora, chiamando n il numero che esprime quante volte il perimetro venne percorso dal calcoio, L' la prima lettura ossia la lettura iniziale ed L'' la lettura finale, si ha evidentemente

$$\nu = \frac{L'' - L'}{n},$$

e facendo così una serie di corse intiere per dedurre il valore di ν , probabilissimamente si ottiene un'area che si accosta alla vera, più di quello che si ottiene deducendo il valore di ν da una sola corsa.

Quando vuolsi ancora maggior esattezza nella valutazione dell'area di una figura, si possono fare due o più serie di corse trasportandò in ogni serie il planimetro. In questo caso essendo $\partial_1, \partial_2, \partial_3, \dots$ le differenze delle lettere iniziale e finale per le serie 1^a, 2^a, 3^a, ed n_1, n_2, n_3, \dots il numero delle corse fatte in ciascuna serie, si ottiene il valore medio di ν col porre

$$\nu = \frac{\partial_1 + \partial_2 + \partial_3 + \dots}{n_1 + n_2 + n_3 + \dots}$$

Allorquando la figura di cui vuolsi trovare l'area è molto estesa, per modo che risulti impossibile di far percorrere l'intero suo perimetro dal calcatoio stando il planimetro in una sola posizione, si scompone essa in tante figure minori, per ciascuna delle quali si trova l'area come si è detto, e la somma delle aree di tutte queste figure componenti la figura totale dà l'area domandata.

Non occorre dire come il planimetro ortogonale dà l'area effettiva della figura disegnata sulla carta il cui perimetro per intero vien percorso dal calcatoio, e come per conseguenza, volendosi l'area del terreno rappresentato in un tipo, bisogna procurarsi prima l'area che la figura rappresentante il terreno ha sul tipo, e dividerla quindi per il quadrato della frazione scala che venne impiegata nella costruzione del tipo.

Affinchè un planimetro ortogonale possa servire per lo scopo cui è destinato si richiede:

1° Che il filo il quale avvolge al tamburo sia ben disteso;

2° Che i movimenti del carretto e della riga riescano facili, qualunque sia il perimetro che si fa descrivere dal calcatoio;

3° Che, svolgendosi il filo sul tamburo, questo giri;

4° Che il disco facente corpo col perno del tamburo sia perfettamente piano e ben levigato;

5° Che la rotella sia in un piano perpendicolare a quello del disco e che il suo contorno sia senza difetti;

6° Che l'asse della rotella il quale porta l'indice, non incontri il benchè minimo intoppo nel suo movimento rotatorio.

Quando poi si fanno delle lunghe operazioni col planimetro ortogonale bisogna di tanto in tanto accertarsi se esso funziona bene, e si ottiene questo facendo percorrere dal calcatoio il perimetro d'una figura d'area nota e confrontando quest'area coll'indicazione data dal planimetro.

83. **Descrizione del planimetro polare.** — Il planimetro polare consta d'un'asta *A* (*fig.* 86) lunga circa 21 centimetri, a sezione quadrata, portante all'una delle sue estremità una punta o *calcatoio* *C* ed all'altra un cursore *MN* che su essa può scorrere a dolce fregamento. Su questo cursore è collocata una rotella *R* la quale è terminata verso una sua base da un bordo o *risalto* *b*, e verso l'altra base è divisa in parti eguali mediante divisioni praticate nel senso di generatrici della sua superficie convessa. Un nonio fisso *n* serve a valutare le frazioni delle divisioni della rotella il cui asse, parallelo alla lunghezza dell'asta *A*, porta una vite la quale formando vite perpetua con un piccolo rocchetto *r*, fa girare questo in modo da

passare un suo dente per ogni giro della rotella. L'asse di questo rocchetto poi, il quale è perpendicolare a quello della rotella, è munito di un disco D diviso in parti eguali; ad ogni rivoluzione intiera della rotella passa una di queste divisioni innanzi ad un indice fisso i . Alla parte anteriore del cursore è unita a cerniera una seconda asta B lunga circa 15 centimetri, avente come la prima sezione quadrata e terminata da un punteruolo P, chiamato *polo*, il quale serve a fissare lo strumento al tavolo, su cui trovasi disteso il foglio contenente la figura di cui vuolsi trovare l'area.

Collocando il planimetro polare sopra un piano si vede come quello tocchi questo soltanto in tre punti, che sono: il punto più basso del bordo della rotella, la punta del calcatoio e la punta dell'ago. Se poi, trovandosi fisso il polo P, si fa percorrere dal calcatoio il contorno di una figura descritta sul detto piano, la rotella ora striscia ed ora gira intorno al proprio asse per sviluppo di contatto, e contemporaneamente fa rotare il disco D.

34. Teoria del planimetro polare. — Sia P il punto fisso o polo del regolo B (*fig. 37*), S lo snodo del regolo A col regolo B, C il calcatoio ed R la posizione della rotella quando il calcatoio è in un punto del perimetro di una figura chiusa qualunque MNO. Facendo percorrere al calcatoio un archetto infinitesimo CC' , il regolo SC prende la posizione $S'C'$, e conducendo per S' una retta $S'C_1$ parallela a SC, riesce agevole di comprendere come l'accennato regolo abbia descritta un'area infinitesima $SCC'S'$ composta di un parallelogramma SCC_1S' e d'un settore $C_1S'C'$ e come abbia girato la rotella passando da R in R'.

Ciò premesso, chiamisi a la lunghezza \overline{SC} del regolo A, x l'altezza \overline{EF} del parallelogramma, r il raggio della rotella, φ l'arco di raggio 1 chiudente l'angolo $C_1S'C'$, ed n il numero dei giri della rotella corrispondenti all'altezza x : si avrà che l'area del piccolo parallelogramma SCC_1S' è espressa da ax , che quella del piccolo settore $C_1S'C'$, il cui arco è $a\varphi$, è espressa da $\frac{1}{2}a^2\varphi$, e che quindi l'area elementare $SCC'S'$, descritta dal regolo A, nel mentre il calcatoio passa dalla posizione C alla C' , è

$$ax + \frac{1}{2}a^2\varphi;$$

e osservando ora che $x = 2\pi rn$, quest'espressione dell'area elementare si può trasformare in

$$2\pi arn + \frac{1}{2}a^2\varphi.$$

Immaginando ora le due posizioni limiti $S''C''$ ed $S'''C'''$ del regolo A, chiamando rispettivamente Ω' ed Ω'' le due aree $S''C''NM C'''S'''$ e $S'''C'''OC'''S''$, accentando le quantità n e φ alle medesime corrispondenti, abbracciando le loro somme col simbolo Σ , e ponendo Ω l'area domandata eguale ad $\Omega' - \Omega''$, si avranno

$$\Omega' = 2\pi ar\Sigma n' + \frac{1}{2}a^2\Sigma\varphi';$$

$$\Omega'' = 2\pi ar\Sigma n'' + \frac{1}{2}a^2\Sigma\varphi'';$$

$$\Omega = 2\pi ar(\Sigma n' - \Sigma n'') + \frac{1}{2}a^2(\Sigma\varphi' - \Sigma\varphi'').$$

Osservando ora che tutti i settori riferentisi alla parte di perimetro $C''NM C'''$ sono tali, che un lato di ciascuno di essi è parallelo al lato vicino del settore che lo precede; si avrà che la somma degli angoli di tutti questi settori fa un angolo solo, di lati paralleli alle due posizioni estreme $S''C''$ ed $S'''C'''$ del regolo A, e che lo stesso ha luogo per gli angoli dei settori riferentisi alla parte di perimetro $C'''OC''$: cosicchè sarà $\Sigma\varphi' - \Sigma\varphi'' = 0$, e quindi

$$\Omega = 2\pi ar(\Sigma n' - \Sigma n'') \quad (1).$$

Esprimendo $\Sigma n'$ il numero dei giri della rotella corrispondenti allo scorrimento del calcatoio sulla parte di perimetro $C''NM C'''$, e $\Sigma n''$ il numero dei giri descritti in senso contrario e corrispondenti allo scorrimento del calcatoio sulla curva $C'''OC''$; $\Sigma n' - \Sigma n''$ rappresenterà il numero totale di giri descritti dalla rotella nel mentre il calcatoio percorre l'intero perimetro, per modo che, chiamando N questo numero finale di giri, si può trasformare l'equazione (1) in quest'altra

$$\Omega = 2\pi arN \quad (2),$$

o più semplicemente, eguagliando $2\pi ar$ ad un coefficiente costante m ,

$$\Omega = mN \quad (3).$$

Se il regolo A ritorna nella sua posizione primitiva dopo di aver descritto un intero giro, e in modo che tutta la circonferenza avente il centro nel polo P e di raggio eguale al regolo B rimanga tutta interna al perimetro della superficie piana a trovarsi, come appare dalla figura 38, allora la superficie di questa componesi dei successivi parallelogrammi P', P'', P''', dei settori S', S'', S''', (che, per avere lo stesso raggio ed una disposizione tale da riuscire un raggio dell'uno parallelo ad un raggio dell'antecedente, formano un intero circolo di raggio $\overline{SC} = a$) e d'un circolo di raggio $\overline{PS} = b$: cosicchè, ritenendo le denominazioni già stabilite, si avrà

$$\Omega = 2\pi arN + \pi a^2 + \pi b^2 \quad (4);$$

dove si deve intendere che N rappresenti il numero dei giri della rotella corrispondenti ai diversi parallelogrammi P', P'', P''', Se si indica con N' il numero dei giri di rotella provenienti dallo scorrimento di quest'ultima sugli archi di raggio $\overline{SR} = d$ chiudenti i diversi settori, e che si fanno per tutta una circonferenza di raggio d, si ha $2\pi rN' = 2\pi d$, e quindi $2\pi arN' = 2\pi ad$, e l'equazione (4) col togliere dal suo secondo membro $2\pi arN'$ e coll'aggiungervi $2\pi ad$, si trasforma in

$$\Omega = 2\pi ar(N - N') + \pi(a^2 + b^2 + 2ad),$$

la quale, facendo $2\pi ar = m$ e $N - N' = N_1$, diventa

$$\Omega = mN_1 + \pi(a^2 + b^2 + 2ad),$$

ossia che, nel caso in quistione, la superficie data dai giri $N - N' = N_1$ della rotella va aumentata dalla costante $\pi(a^2 + b^2 + 2ad)$.

Quando il regolo A (fig. 39) torna nella sua prima posizione dopo d'aver descritto un intero giro, e che la superficie a trovarsi è interna alla circonferenza avente il suo centro nel polo P e di raggio eguale alla lunghezza \overline{PS} del regolo B, con un ragionamento analogo a quello tenuto per l'ultimo esposto caso, si vedrà facilmente che dalla costante $\pi(a^2 + b^2 + 2ad)$ va sottratta la superficie indicata dai giri della rotella.

35. Uso del planimetro polare. — Affinchè l'uso del planimetro polare riesca facile e comodo conviene che ogni giro della rotella R (fig. 36), ossia ogni divisione del disco D, corrisponda ad una determinata unità superficiale, la quale suol essere per gli ordinarii planimetri di 1 decimetro quadrato pari a 100 centimetri quadrati.

Segue da ciò che, essendo generalmente 100 le divisioni della rotella R, ogni sua divisione corrisponde allora ad 1 centimetro quadrato, e che si hanno: le centinaia di centimetro quadrato nelle divisioni del disco, le decine di centimetro quadrato nelle grandi divisioni della rotella abbraccianti dieci delle piccole divisioni, ed i centimetri quadrati nelle dette piccole divisioni. Se poi, come generalmente avviene, il nonio abbraccia nove divisioni della rotella ed è diviso in dieci parti eguali, si possono ancora valutare con esso i decimi di centimetro quadrato.

Ciò premesso, due sono i modi con cui si può ottenere che ogni giro della rotella corrisponda ad una data superficie, per esempio a quella di 100 centimetri quadrati. Il primo di questi modi consiste, quando il planimetro vogliasi adoperare in guisa da restare il suo polo fuori della figura di cui vuolsi la superficie, nel fare $\Omega=100^{\text{cm}^2}$ ed $N=1$ nella formola (2) del numero precedente, dalla quale ricavasi allora

$$r = \frac{100}{2\pi a};$$

cosicchè conoscendosi a , si può allora convenientemente determinare r . Ma per un dato strumento il raggio r della rotella è invariabile, per cui invece di determinare r in guisa che ogni giro della rotella stessa corrisponda a 100 centimetri quadrati, conviene ricorrere al secondo modo che conduce a poter soddisfare a questa condizione, ed il quale consiste nel determinare convenientemente la distanza fra il perno dello snodo con cui sono uniti i due regoli A e B e la punta del calcoio. Se per fissare le idee si suppone che il raggio r della rotella sia di 1 centimetro, ponendo nella citata equazione (2) del numero precedente $\Omega=100$, $r=1$, $N=1$ e $\pi=3,14159$ e ricavando il valore di a , trovasi

$$a=15^{\text{cm}},915;$$

e quindi, portando il cursore in tale posizione dell'asta A che la distanza fra l'asse dello snodo e quello del calcoio sia di centimetri 15,915, lo strumento è disposto in modo da rappresentare: 100 centimetri quadrati ogni divisione del disco; 10 centimetri quadrati ogni gran divisione della rotella, e 1 centimetro quadrato ogni sua piccola divisione.

Senza misurare la distanza del calcoio dal perno dello snodo,

la qual misura difficilmente può essere effettuata colla necessaria esattezza, in altro modo si eseguisce generalmente nella pratica l'operazione diretta a disporre il planimetro in guisa da poter direttamente leggere su esso l'area in centimetri quadrati. Annesse al planimetro trovansi generalmente due lamine metalliche lunghe, una un po' più di 10 e l'altra un po' più di 20 centimetri. La lamina di minor lunghezza è quella che serve all'indicato scopo. Perciò porta una linea incisa nel senso della sua lunghezza, e su questa linea trovasi praticato un forellino ed un piccolissimo incavo conico, distanti l'uno dall'altro di metri 0,1. Questa lamina si fissa ad un tavolo orizzontale, su cui venne disteso un foglio di carta da disegno, mediante uno spillo che ne attraversi il foro; si colloca poscia lo strumento sullo stesso tavolo fissandone il suo polo, e si fa entrare la punta del calcatoio nell'incavo praticato sulla medesima lamina. Fatto questo si legge prendendo per unità le piccole divisioni della rotella, cosicchè rappresenteranno rispettivamente decine e centinaia di unità le grandi divisioni della rotella e le divisioni del disco e decimi di unità le divisioni del nonio, qual è l'indicazione data dallo strumento nell'indicata sua posizione; e quindi si passa a far descrivere una o più volte al calcatoio la circonferenza che ha per raggio la distanza fra i detti foro ed incavo. Siccome il circolo di raggio un decimetro ha per superficie centimetri quadrati 514,16, o con sufficiente approssimazione per la questione di cui trattasi centimetri quadrati 514,2, è necessario, se il planimetro è talmente disposto da condurre a trovare direttamente le aree in centimetri quadrati, che la differenza fra la lettura dopo che il calcatoio ha fatto una corsa e la lettura primitiva sia 514,2, che sia invece $2 \times 514,2 = 628,4$ dopo che il calcatoio ha fatto due corse, $5 \times 514,2 = 942,6$ dopo che il calcatoio ha fatto tre corse; e così via via discorrendo. Non verificandosi questo, si rettifica lo strumento facendo scorrere il cursore ed avvicinando quindi od allontanando il perno dello snodo al calcatoio, finchè le differenze fra le diverse letture e la lettura iniziale siano quelle or ora indicate.

La seconda delle lamine di cui si è fatto cenno, ossia quella lunga un po' più di 20 centimetri, porta anch'essa incisa una linea nel senso della sua lunghezza, e su questa linea esiste pure un forellino ed un piccolo incavo conico distanti l'uno dall'altro precisamente di 20 centimetri. Questa lamina serve alla determinazione della costante $\pi(a^2 + b^2 + 2ad)$. Perciò s'introduce il polo dello strumento nel foro della lamina ed il calcatoio nell'incavo.

Dopo si fissa il polo al tavolo e si fa descrivere al calcatoio una circonferenza intiera. Terminata la corsa, ed essendosi fatte le letture iniziale e finale, si ha nella loro differenza il numero N , che si può esprimere prendendo per unità le piccole divisioni della rotella. D'altronde, siccome è un circolo di raggio 20 centimetri la figura il cui perimetro venne percorso dal calcatoio, si conosce Ω ; e quindi l'ultima formola del numero precedente serve a determinare la costante $\pi(a^2 + b^2 + 2ad)$. Questa determinazione si deve eseguire facendo più corse e, trovandosi valori di poco diversi gli uni dagli altri, si assume la loro media aritmetica siccome rappresentante l'accennato numero costante.

Non tutti i planimetri polari permettono di avvicinare o di allontanare di qualche poco l'asse dello snodo al calcatoio, e quindi non in tutti si può rendere eguale all'unità il coefficiente m . In questo caso si fa percorrere dal calcatoio il perimetro di una figura d'area nota, per esempio di 100 centimetri quadrati fissando il polo fuori della figura stessa; si fa col planimetro la lettura iniziale che, prendendo per unità una piccola divisione della rotella, si suppone di 256,4; e, quando il calcatoio abbia percorso l'accennato perimetro, si passa alla lettura finale che si suppone data dal numero 538,5. La differenza fra queste due letture è 101,9, per cui, ponendo nella formola (5) del precedente numero $\Omega = 100$ e $N = 101,9$, si deduce

$$m = \frac{100}{101,9} = 0,981$$

quando tengasi solamente conto dei millesimi.

Per determinare il coefficiente m , conveniente ad un dato planimetro, convien ripetere l'operazione ora descritta su più figure piane di contorno e di superficie diversa. Tutte queste operazioni condurranno a trovare dei valori poco diversi del coefficiente m , e sarà la loro media aritmetica il valore da adottarsi. — Quando poi si fa percorrere il perimetro di una figura dal calcatoio, convien generalmente fare più di una corsa e dedurre il valore di N corrispondente colla semplicissima formola

$$N = \frac{L'' - L'}{n},$$

essendo L' la lettura iniziale, L'' la lettura finale ed n il numero delle corse fatte dal calcatoio sull'intero perimetro della figura.

Sia quando si è disposto un planimetro polare in modo da rappresentare centimetri quadrati le piccole divisioni della rotella o, ciò che torna lo stesso, quando il coefficiente m si è ridotto eguale all'unità, sia quando questo coefficiente è qualunque, riesce facilissimo il trovare l'area di una figura qualunque. Nel primo caso la detta area, espressa in centimetri quadrati, è rappresentata dalla differenza fra la lettura finale corrispondente ad una sola corsa e la lettura iniziale, quando il polo sia fuori della figura e quando prendansi per unità le piccole divisioni del tamburo; nel secondo caso la stessa area si ottiene moltiplicando il valore di m per l'accennata differenza delle letture.

L'esperienza ha dimostrato che generalmente, ponendo il polo fuori delle figure di cui vuolsi trovare l'area, si ottengono risultati migliori di quelli che si hanno ponendo il polo dentro. Segue da ciò che, trattandosi di trovare le aree di figure molto estese, conviene scomporle in altre minori e tali da potersi percorrere col calcoio l'intero perimetro senza collocare il polo nel loro interno. — Il metodo di fissare il polo entro il perimetro che deve essere percorso dal calcoio si può riserbare per le verificazioni, onde trovare in un sol tratto la somma delle aree di diverse figure già ottenute ad una ad una.

La più piccola quantità che direttamente si può leggere su un planimetro polare è un decimo di una divisione della rotella, e quindi nella valutazione delle aree tutto al più si può tener conto di quelle divisioni che corrispondono a decimi di centimetro quadrato, ossia a 10 millimetri quadrati. Segue da ciò che, volendosi impiegare il planimetro polare per aree di 10 centimetri quadrati, si ha la probabilità di commettere un errore di circa l'uno per cento; ed un errore relativo assai maggiore per aree minori. Per rendere quest'errore meno sensibile è necessario trovare le aree facendo due serie di corse trasportando il polo dall'una all'altra serie. Il numero delle corse da farsi per ogni serie, ossia per ognuna delle due posizioni del planimetro, deve essere più o men grande, secondo la minore o maggior ampiezza della figura. Questo numero deve essere di due, di tre e di quattro corse per ogni serie quando l'area cercata è compresa fra 5 e 10 centimetri quadrati, fra 5 e 5 centimetri quadrati, e fra 1,5 e 5 centimetri quadrati. Per aree minori di centimetri quadrati 1,5 conviene fare cinque corse per ogni serie; e per aree maggiori di 10 centimetri quadrati non è necessario trasportare il polo, ma basta fare due serie di due corse partendo ogni volta da due punti opposti del perimetro.

Il planimetro polare, come il planimetro ortogonale, dà le aree effettive delle figure disegnate sulla carta il cui perimetro per intero viene percorso dal calcoito. Segue da ciò che l'area vera di un terreno rappresentato in un tipo eseguito in una data scala, si ottiene desumendo l'area dalla figura rappresentata sul tipo mediante il planimetro, e dividendola quindi per il quadrato della frazione scala.

Il planimetro polare, per servire allo scopo cui è destinato, deve soddisfare ad alcune condizioni, cioè:

1° Il bordo della rotella deve essere circolare o perfettamente liscio;

2° La rotella deve girare senza il benchè minimo intoppo sul suo perno;

3° Il movimento dell'asta minore attorno allo snodo deve aver luogo senza sforzo;

4° Il calcoito non deve oscillare, essere ben diritto e verticale quando il planimetro trovasi su un tavolo orizzontale;

5° La spilla che serve di polo deve essere ben ferma, diritta e verticale e non sporgere troppo fuori dal foro in cui viene collocata.

Quando si fanno delle lunghe operazioni col planimetro polare bisogna di tanto in tanto accertarsi della sua esattezza, e si ottiene questo facendo percorrere dal calcoito il perimetro di una figura d'area cognita e confrontando il numero esprimente quest'area coll'indicazione data dal planimetro. A ciò si presta assai bene la minore delle due lamine di cui si è già parlato in questo numero, poichè serve essa a far perfettamente descrivere al calcoito la circonferenza di un circolo di area cognita.

86. **Approssimazione data dai planimetri.** — I vantaggi che presentano i planimetri sui mezzi comunemente adottati nella valutazione delle aree sono due: il notevole risparmio di tempo e l'esattezza a cui essi conducono. Il primo vantaggio da tutti è riconosciuto; il secondo vien messo in dubbio da molti operatori, i quali, per l'unica ragione di credere buono soltanto ciò che è nelle loro abitudini, reputano i planimetri come soli mezzi di verificaione e quindi inutili, potendo servire per lo stesso scopo la carta trasparente quadrettata.

Coloro che così la pensano s'ingannano a gran partito: chi, dopo un po' d'esercizio adopera con criterio un buon planimetro ortogonale, vede superata ogni sua aspettazione: l'approssimazione di $1/200$,

generalmente richiesta nel valutare le aree dei terreni si ottiene senza difficoltà alcuna, e da molti autori tedeschi si vuole che un pratico operatore possa, con un planimetro ben costruito, avere l'approssimazione di oltre $1/1000$.

Anche dell'esattezza dei risultati che si ottengono con un planimetro polare si hanno ormai le prove sperimentali più soddisfacenti. Amsler, l'inventore di tale strumento, pretende che si possa pure raggiungere l'approssimazione di $1/1000$; quantunque, a motivo delle irregolarità che incontra la rotella nel suo scorrimento sulla carta, sembra che non si possa ottenere tanta approssimazione. Che che ne sia però, il planimetro polare dà buoni risultati sufficientemente esatti per la pratica, e, a motivo della sua semplicità, vuol essere tenuto in gran conto.

CAPITOLO II.

Misura delle superficie curve e principalmente delle superficie delle vólte.

87. **Assunto del presente capitolo.** — Le superficie curve, che al costruttore avviene di dover misurare nella pratica delle costruzioni, si riducono: alle superficie cilindriche, coniche, sferiche, anulari ed ellissoidali; ad alcune superficie rigate a piano direttore; e finalmente ad altre superficie generate da linee curve di forma costante o variabile secondo una data legge, e moventisi in un modo ben definito.

La geometria elementare insegna a calcolare alcune delle superficie accennate; per altre è necessario applicare quanto insegna il calcolo integrale sulla quadratura delle superficie curve; e finalmente per alcune, riuscendo troppo difficili e talvolta impossibili le integrazioni, bisogna limitarsi a valutarle con metodi di approssimazione.

In questo numero si daranno le norme per ottenere le varie superficie curve che al costruttore può avvenire di dover considerare nella pratica. Senza dimostrazioni si riferiranno le formole derivanti da regole, ben note a tutti coloro cui questo corso è dedicato, le quali servono a dedurre quelle superficie che si considerano nella geometria elementare; si dimostrerà come, conve-

nientemente applicando quanto s'apprende dalla geometria elementare, si possono dedurre alcune superficie di uso continuo nella pratica; si svolgeranno i calcoli che conducono alla valutazione di alcune superficie curve applicando il processo delle integrazioni; e non si tralascerà di accennare a quei metodi che servono in alcuni casi alla determinazione approssimata delle superficie la cui quadratura è difficile od impossibile ad effettuarsi cogli ordinarii procedimenti di calcolo.

33. Superficie cilindriche rette ed oblique. — Insegna la geometria elementare: che la superficie convessa di un cilindro retto a basi circolari si ottiene moltiplicando la circonferenza della base per la lunghezza della generatrice; e che la superficie convessa di un cilindro obliquo, pure a basi circolari, vien data dalla lunghezza dell'ellisse costituente la sezione retta per la lunghezza della generatrice.

Se invece di una superficie cilindrica a direttrice circolare si considera una superficie cilindrica avente per direttrice una curva qualunque contenuta in un piano perpendicolare alle generatrici, tutte di egual lunghezza, questa superficie sviluppata in piano si riduce ad un rettangolo avente per lati lo sviluppo della direttrice e la generatrice, per cui si ottiene essa moltiplicando la lunghezza della direttrice per quella della generatrice. Quando poi si considera una superficie cilindrica obliqua qualunque $ABCD$ (*fig. 90*), ma avente tutte le generatrici di egual lunghezza e la quale, quando si immagini tracciata su essa una sezione retta EF non che una serie di generatrici vicinissime \overline{AD} , $\overline{A_1D_1}$, $\overline{A_2D_2}$, $\overline{A_3D_3}$,, si riduce nello sviluppo ad una serie di parallelogrammi aventi tutti per base una generatrice e per altezza gli sviluppi degli archetti EE_1 , E_1E_2 , E_2E_3 , si ha che la superficie S vien data da

$$S = \overline{AD} (\overline{EE_1} + \overline{E_1E_2} + \overline{E_2E_3} + \dots).$$

Ora, il fattore entro parentesi non è altro che lo sviluppo dell'intera sezione retta, per cui una superficie cilindrica obliqua qualunque colle generatrici di egual lunghezza si ottiene moltiplicando la lunghezza della sezione retta per quella della generatrice.

Riepilogando quanto si è detto sulla valutazione di una superficie cilindrica avente tutte le sue generatrici di egual lunghezza, si può stabilire che essa si ottiene moltiplicando la lun-

ghezza della sezione retta per la lunghezza della generatrice, per modo che, dicendo

L la prima lunghezza,

a la seconda ed

S la superficie domandata,

si ha la semplicissima formola

$$S = La.$$

La geometria elementare insegna a trovare la superficie convessa di un tronco di cilindro retto avente per base un circolo, e, siccome un simile tronco è la metà di un cilindro retto avente la stessa base e l'asse doppio, si ha

$$S = 2\pi r b,$$

essendo

r il raggio della base del tronco

b la lunghezza del suo asse ed

S la sua superficie convessa.

Per una porzione qualunque di superficie cilindrica $ABCD$ (*fig. 91*), compresa fra le due generatrici \overline{AD} e \overline{BC} e le due curve AB e DC , si trova la superficie: segnando su essa la sezione retta EF ; prendendo su questa curva diversi punti vicinissimi $E, E_1, E_2, E_3, E_4, \dots, E_{u-1}$ ed F ; conducendo per essi altrettante generatrici e prolungandole fino ad incontrare le due curve AB e DC ; misurando gli sviluppi degli archetti $EE_1, E_1E_2, E_2E_3, E_3E_4, \dots, E_{u-1}F$, non che le lunghezze delle generatrici $\overline{AD}, \overline{A_1D_1}, \overline{A_2D_2}, \overline{A_3D_3}, \dots, \overline{A_{u-1}D_{u-1}}$, $\overline{A_4D_4}, \dots, \overline{A_{u-1}D_{u-1}}$ e \overline{BC} comprese fra le dette curve; e finalmente osservando che (quando siansi presi i punti $E, E_1, E_2, E_3, E_4, \dots, E_{u-1}$ ed F abbastanza vicini), nello sviluppo su un piano della proposta porzione di superficie cilindrica, tutte le figure $AA_1D_1D, A_1A_2D_2D_1, A_2A_3D_3D_2, A_3A_4D_4D_3, \dots, A_{u-1}BCD_{u-1}$ si trasformano in tanti trapezii le cui basi sono le dette porzioni di generatrici misurate e le cui altezze sono i detti archetti pure misurati. Segue da ciò che, chiamando

$a, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{u-1}$ ed a_u le lunghezze delle generatrici $\overline{AD}, \overline{A_1D_1}, \overline{A_2D_2}, \overline{A_3D_3}, \overline{A_4D_4}, \dots, \overline{A_{u-1}D_{u-1}}$ e \overline{BC} ,

$l_1, l_2, l_3, l_4, \dots, l_u$ la lunghezza degli sviluppi degli archetti $EE_1, E_1E_2, E_2E_3, E_3E_4, \dots, E_{u-1}F$,

S la superficie domandata,

si ha

$$S = (a + a_1) \frac{l_1}{2} + (a_1 + a_2) \frac{l_2}{2} + (a_2 + a_3) \frac{l_3}{2} + (a_3 + a_4) \frac{l_4}{2} + \dots + (a_{n-1} + a_n) \frac{l_n}{2} \quad (1).$$

Questa formola, quando si prendano eguali in lunghezza gli archetti in cui venne divisa la sezione retta EF, quando chiamisi l la loro lunghezza comune, e quando si osservi che questa lunghezza si può mettere fattore comune, che la prima e l'ultima generatrice entrano solo una volta nell'espressione di S e che le altre entrano tutte due volte, si riduce a

$$S = l \left(\frac{a + a_n}{2} + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} \right) \quad (2).$$

39. Superficie del fuso cilindrico. — Se immaginasi un triangolo qualunque CAB (*fig. 92*), se pel suo vertice C si eleva una perpendicolare CX, se prendesi su essa un punto qualunque V, se si conduce l'altezza \overline{CD} del detto triangolo, se nel piano determinato dalle due rette CV e CD supponesi tracciato un arco DV, se immaginasi descritta la superficie cilindrica che ha per direttrice quest'arco e le sue generatrici parallele ad AB, e se di questa superficie considerasi la sola parte compresa fra i due piani ACV e BCV, ossia la sola parte che copre il triangolo CAB, si ha in essa ciò che chiamasi col nome di *fuso cilindrico*. Dicesi *lato del fuso* la retta \overline{AB} che esso ha di comune col triangolo che copre, *vertice del fuso* il punto V in cui concorrono le due curve AV e BV, *saetta* o *monta* la retta \overline{CV} la quale unisce il vertice del fuso col vertice C del triangolo CAB, e finalmente *semi-corda* la perpendicolare \overline{CD} condotta dal piede C della saetta sul lato. La direttrice DV può essere un quarto di circonferenza di circolo, un arco di circolo, una mezza ellisse, una mezza ovale od anche un'altra curva diversa, ed il fuso si dice *a tutta monta*, *a monta depressa*, o *a monta rialzata* secondoche la sua saetta \overline{CV} è eguale, minore o maggiore della semi-corda \overline{CD} .

Le norme, per arrivare alla determinazione della superficie di un fuso cilindrico in tutti i casi che si possono presentare nella pratica, trovansi esposte in quello che immediatamente segue.

1° Quando la direttrice DV è un quarto di circonferenza di circolo, s'immaginino condotti due piani EFG ed HIK infinitamente vicini fra di loro e paralleli al piano del triangolo ABC. Il fuso VAB vien tagliato da questi piani secondo due rette parallele EF ed HI infinitamente vicine fra di loro, la superficie della parte di fuso compresa fra queste rette può essere considerata siccome quella di un trapezio di basi parallele EF ed HI e di altezza eguale alla lunghezza dell'arco OM confondentesi colla sua corda, giacchè i due punti M ed O sono per ipotesi infinitamente vicini. Segue da ciò che la superficie della parte di fuso EFH vien espressa da

$$\frac{\overline{EF} + \overline{HI}}{2} \times \overline{OM} \quad (1).$$

Ora, se immaginasi abbassata dal punto M la perpendicolare MN a GO e condotta dal punto L, preso sul mezzo di MO, le due rette LP ed LC, la prima perpendicolare a CX e l'altra concorrente nel punto C, risultano i due triangoli MNO ed LPC simili fra di loro, e dai quali per conseguenza si deduce l'eguaglianza di rapporti

$$\frac{\overline{LP}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{LC}}{\overline{OM}}.$$

Quest'eguaglianza dà

$$\overline{OM} = \frac{\overline{LC}}{\overline{LP}} \overline{MN}.$$

Osservando ora che, proiettando in QR' sul piano del triangolo CAB la generatrice QR passante per L, risultano i due triangoli CAB e CQ'R' nei quali si ha DC=LC e SC=LP, si ricava

$$\frac{\overline{LC}}{\overline{LP}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{QR'}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{QR}} = \frac{\overline{AB}}{\frac{\overline{EF} + \overline{HI}}{2}},$$

e quindi

$$\overline{OM} = \frac{\overline{AB} \times \overline{MN}}{\frac{\overline{EF} + \overline{HI}}{2}}$$

Questo valore di \overline{OM} si ponga nell'espressione (I) ed essa diventa

$$\overline{AB} \times \overline{MN}.$$

Se ora osservasi che \overline{MN} non è altro che la distanza fra i due piani infinitamente vicini EFG ed HIK , facilmente si comprende: come, immaginando un'infinità di questi piani condotti fra il vertice V ed il triangolo CAB , tutte la superficie comprese fra due qualunque di questi piani successivi verranno date dal lato \overline{AB} moltiplicato per la loro distanza; e come per conseguenza nella somma delle piccolissime parti di fuso comprese fra i detti piani infinitamente vicini, la qual somma costituisce la superficie del fuso totale, vi deve essere \overline{AB} factor comune, moltiplicato per la somma delle distanze a cui vennero condotti i piani, ossia per la lunghezza \overline{CV} . Ségue da ciò che chiamando

a il lato \overline{AB} ,

m l'altezza o monta \overline{CV} del fuso ed

S la superficie domandata,

si ha la semplicissima formola

$$S = am \tag{1},$$

la quale indica che la superficie di un fuso cilindrico avente per direttrice un quarto di circonferenza di circolo si ottiene moltiplicando il suo lato per la sua monta, o altrimenti prendendo il doppio del triangolo da esso coperto.

2° Per trovare la superficie di un fuso cilindrico la cui direttrice è un arco di circolo, si tiene un ragionamento in tutto analogo a quello già tenuto nel caso in cui la direttrice è un quarto di circonferenza di circolo. Essendo VAB (*fig. 95*) il fuso di cui vuolsi la superficie, s'immagini esso completato per avere il fuso $VA'B'$ la cui direttrice VD' è il quadrante della circonferenza cui appartiene l'arco VB . La superficie infinitamente piccola compresa fra le due generatrici vicinissime \overline{EF} ed \overline{HI} vien espressa da

$$\frac{\overline{EF} + \overline{HI}}{2} \times \overline{OM};$$

dai due triangoli simili MNO ed LPC' si ricava

$$\frac{\overline{LP}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{LC'}}{\overline{OM}},$$

e quindi

$$\overline{OM} = \frac{\overline{LC'}}{\overline{LP}} \overline{MN};$$

proiettando \overline{QR} sul piano C'A'B' in $\overline{Q'R'}$ ed osservando che

$$\overline{Q'R'} = \overline{QR} = \frac{\overline{EF} + \overline{HI}}{2},$$

si deduce

$$\frac{\overline{LC'}}{\overline{LP}} = \frac{\overline{A'B'}}{\frac{\overline{EF} + \overline{HI}}{2}};$$

ponendo questo valore di $\frac{\overline{LC'}}{\overline{LP}}$ nell' espressione di \overline{OM} , si ottiene

$$\overline{OM} = \frac{\overline{A'B'} \times \overline{MN}}{\frac{\overline{EF} + \overline{HI}}{2}};$$

l'espressione dell'area infinitamente piccola EF²HI si riduce a

$$\overline{A'B'} \times \overline{MN};$$

e quindi la superficie S del fuso VAB vien data da

$$S = \overline{A'B'} \times \overline{CV}.$$

Se ora chiamansi

a il lato \overline{AB} del fuso,

c la sua semi-corda \overline{DC} ed
 m la sua monta \overline{CV} ,
 si ha (num. 24)

$$\overline{C'D'} = \frac{c^2 + m^2}{2m},$$

perchè $\overline{C'D'}$ è raggio di un arco circolare di semi-corda c e di
 monta m . Proiettando poi \overline{AB} sul piano del triangolo $C'A'B'$ in $\overline{A_1B_1}$,
 dai due triangoli simili $C'A'B'$ e $C'A_1B_1$, in cui

$$\overline{A_1B_1} = a \qquad \overline{C'D_1} = c,$$

si deduce

$$\overline{A'B'} = \frac{a(c^2 + m^2)}{2cm},$$

per cui il valore di S risulta

$$S = \frac{a(c^2 + m^2)}{2c} \qquad (2).$$

3° Per ottenere la superficie di un fuso cilindrico VAB (*fig. 94*)
 avente per direttrice una mezza ellisse ed a monta depressa, ossia
 colla monta minore della semi-corda, assumasi per origine di
 coordinate il punto O , l'asse delle ascisse nella direzione della
 semi-corda e l'asse delle ordinate nella direzione della monta.
 S'immagini descritto il quadrante CD ; si fissi la posizione di un
 punto qualunque M dell'ellisse mediante l'angolo $\text{NOC} = \varphi$ che il
 raggio \overline{ON} , condotto al punto in cui il detto quadrante è incon-
 trato dall'ordinata del punto M , fa col semi-asse minore delle
 ellisse, ossia coll'asse delle y ; si chiamino x ed y le due coor-
 dinate \overline{OP} e \overline{PM} del punto M ; e si ritengano le denominazioni
 già stabilite per quanto si riferisce al lato \overline{AB} , alla semi-corda \overline{OD}
 ed alla monta \overline{OV} del fuso. Siccome per un metodo ben noto di
 costruire l'ellisse il punto M è l'intersezione delle due rette NP
 e QR , condotte rispettivamente dai due punti N e Q in cui i
 quadranti CD e VS di raggi $\overline{OD} = c$ ed $\overline{OV} = m$ sono incontrati
 dalla retta ON , la prima perpendicolare e l'altra parallela all'asse
 delle ascisse, evidentemente si ha

$$x = c \operatorname{sen} \varphi$$

$$y = m \cos \varphi.$$

Immaginando ora condotte le due generatrici infinitamente vicine \overline{mn} ed $\overline{m'n'}$ del fuso, ed osservando che \overline{mn} è eguale alla sua proiezione pq , dalla considerazione dei due triangoli simili opq ed OAB risulta

$$\overline{mn} = \overline{pq} = \frac{a}{c} x = a \operatorname{sen} \varphi;$$

e quindi, dicendo ds l'arco infinitesimo MM' e dS l'area elementare $mn n' m'$, si ha

$$dS = a \operatorname{sen} \varphi ds.$$

Ma dalle trovate espressioni di x e di y ricavasi

$$dx = c \cos \varphi d\varphi$$

$$dy = -m \operatorname{sen} \varphi d\varphi;$$

e quindi

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = d\varphi \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

Questo valore di ds pongasi nell'espressione di dS , invece di $\operatorname{sen}^2 \varphi$ si metta $1 - \cos^2 \varphi$, e si porti fuori del radicale la semicorda c . Allora il valore di dS diventa

$$dS = ac \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{\frac{c^2 - m^2}{c^2} \cos^2 \varphi + \frac{m^2}{c^2}},$$

e, ponendo

$$\frac{c^2 - m^2}{c^2} = e^2 \quad (3)$$

d'onde

$$\frac{m^2}{c^2} = 1 - e^2,$$

si riduce esso a

$$dS = ace \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{\frac{1-e^2}{e^2} + \cos^2 \varphi} \quad (\text{II}).$$

Trovato il differenziale dell'area del fuso in funzione della variabile φ , basta integrare fra i limiti $\varphi=0$ e $\varphi=\frac{\pi}{2}$ per avere l'area S del fuso intero, per cui

$$S = ace \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{\frac{1-e^2}{e^2} + \cos^2 \varphi}.$$

Per far quest'integrale si osservi che

$$\operatorname{sen} \varphi d\varphi = -d \cos \varphi,$$

e che per conseguenza

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{\frac{1-e^2}{e^2} + \cos^2 \varphi} &= - \int d \cos \varphi \sqrt{\frac{1-e^2}{e^2} + \cos^2 \varphi} \\ &= -\frac{1}{2} \left[\cos \varphi \sqrt{\frac{1-e^2}{e^2} + \cos^2 \varphi} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-e^2}{e^2} \operatorname{arccos} \left(\cos \varphi + \sqrt{\frac{1-e^2}{e^2} + \cos^2 \varphi} \right) \right]. \end{aligned}$$

Prendendo quest'integrale fra i limiti 0 e $\frac{\pi}{2}$ e facendo le riduzioni che per le prime si presentano, trovasi

$$\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{\frac{1-e^2}{e^2} + \cos^2 \varphi} \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1-e^2}{e^2} \operatorname{arccos} \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \frac{1-e^2}{e^2} \operatorname{arccos} \left(1 + \frac{1}{e} \right) \right]; \end{aligned}$$

continuando nelle riduzioni si giunge ad ottenere

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \sqrt{\frac{1-e^2}{e^2} + \cos^2 \varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e} + \frac{1-e^2}{2e^2} l \frac{1+e}{1-e} \right);$$

e quindi la formola determinatrice della superficie S diventa

$$S = \frac{1}{2} a c \left(1 + \frac{1-e^2}{2e} l \frac{1+e}{1-e} \right); \quad (4).$$

Il logaritmo indicato in questa formola colla caratteristica *l* è un logaritmo neperiano, ossia un logaritmo nella base 2,71828182 In sua vece conviene mettere il logaritmo nella base 10, che indico colla caratteristica *log*, facendo

$$l \frac{1+e}{1-e} = \frac{\log \frac{1+e}{1-e}}{K},$$

dove

$$K = \log. 2,71828182 \dots = 0,43429448 \dots;$$

e la formola determinatrice di S diventa

$$S = \frac{1}{2} a c \left(1 + \frac{1-e^2}{2eK} \log \frac{1+e}{1-e} \right) \quad (5).$$

Il secondo membro dell'equazione (4) si può svolgere in serie. Rammentando perciò che

$$l(1+e) = e - \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} - \frac{e^4}{4} + \frac{e^5}{5} - \frac{e^6}{6} + \frac{e^7}{7} - \dots$$

$$l(1-e) = -e - \frac{e^2}{2} - \frac{e^3}{3} - \frac{e^4}{4} - \frac{e^5}{5} - \frac{e^6}{6} - \frac{e^7}{7} - \dots,$$

risulta

$$\begin{aligned} 1 \frac{1+e}{1-e} &= 1(1+e) - 1(1-e) \\ &= 2 \left(e + \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5} + \frac{e^7}{7} + \dots \right), \end{aligned}$$

e quindi il valore di S diventa

$$S = ac \left(1 - \frac{1}{4.3} e^2 - \frac{1}{3.5} e^4 - \frac{1}{5.7} e^6 - \dots \right) \quad (6).$$

La quantità e^2 , come risulta dalla formola (5), è una frazione nel caso del fuso con direttrice ellittica a monta depressa; i diversi termini del secondo membro dell'ultima equazione vanno sempre impicciolendosi; ed il valore di S a cui essa conduce è tanto più approssimato quanto più grande è il numero dei termini di cui si tien conto.

Supponendo che il fuso sia a tutta monta, nel qual caso $m=c$, il valore di e^2 diventa nullo ed il valore di S dato dall'ultima equazione si riduce a quello somministrato dalla formola (1) ottenuto con semplici considerazioni elementari.

Tenendo conto soltanto dei due primi termini del secondo membro della (6) e ponendo per e^2 il suo valore dato dalla (5), risulta la formola

$$S = a \frac{2c^2 + m^2}{3c},$$

la quale evidentemente conduce sempre ad una superficie maggiore della vera, e che dà risultati i quali tanto più si scostano dal vero quanto più la monta del fuso è piccola. Se poi, pel caso limite della pratica in cui $m = \frac{1}{5}c$, si calcola la superficie S colla formola (5) e coll'ultima formola, si trova che questa conduce ad un risultato maggiore di quello somministrato dalla formola (5) di circa $\frac{1}{4}$ dell'area del triangolo coperto dal fuso; cosicchè l'ultima semplicissima formola, atteso la troppo grossolana approssimazione a cui conduce in alcuni casi, non merita di essere assunta come formola sufficientemente esatta anche nelle ordinarie circostanze della pratica.

Se invece si tien conto dei primi tre termini del secondo membro della (6) e se per e^2 si mette il suo valore dato dalla (5), si trova

$$S = a \frac{9c^4 + 7c^2m^2 - m^4}{15c^3} \quad (7).$$

la quale dà pur sempre risultati un po' maggiori del vero, e che tanto più si accostano alla verità quanto più il rapporto fra la monta e la semi-corda si approssima all'unità. Calcolando poi la superficie S con questa formola d'approssimazione e colla formola (5) nel caso limite della pratica il cui $m = \frac{1}{5}c$, si viene a conchiudere: non convenire assolutamente l'applicazione della formola (7) quando $m < \frac{1}{5}c$, e potersi appena essa considerare come formola pratica d'approssimazione grossolana quando m raggiunge $\frac{1}{5}c$; giacchè in questo caso da una superficie che è ancora maggiore della vera di quasi $\frac{1}{7}$ della superficie del triangolo coperto dall'unghia. A misura però che il rapporto fra la monta e la semi-corda diventa maggiore di $\frac{1}{5}$ cresce l'approssimazione data dalla formola (7), per cui, senza tema di gravi inconvenienti, si può essa adottare nelle ordinarie circostanze della pratica qual formola conveniente a trovare la superficie del fuso cilindrico ellittico a monta depressa.

4° Un procedimento in tutto analogo a quello or ora esposto per trovare la superficie del fuso cilindrico con direttrice ellittica a monta depressa serve ancora a trovare la superficie del fuso cilindrico con direttrice ellittica a monta rialzata. Ritenendo le denominazioni già stabilite per quanto si riferisce al lato, alla semi-corda ed alla monta del fuso, assumendo gli assi coordinati come pel fuso a monta depressa, ed osservando che un punto qualunque M (fig. 95) dell'ellisse vien determinato descrivendo i due quadranti CD e VS di raggi $\overline{OD} = c$ ed $\overline{OV} = m$, tirando il raggio \overline{OQ} e prendendo l'intersezione delle due rette Pz e QR condotte rispettivamente dai punti N e Q , la prima perpendicolare e l'altra parallela all'asse delle ascisse Ox , si ha: che le due

coordinate $\overline{OP} = x$ e $\overline{PM} = y$ del punto M sono date, in funzione dell'angolo $\overline{QOV} = \varphi$, dalle equazioni

$$x = c \operatorname{sen} \varphi$$

$$y = m \operatorname{cos} \varphi;$$

che i differenziali delle due coordinate x ed y sono rispettivamente

$$dx = c \operatorname{cos} \varphi d\varphi$$

$$dy = -m \operatorname{sen} \varphi d\varphi;$$

che il differenziale dell'arco $\overline{MM'} = ds$ vien dato da

$$ds = d\varphi \sqrt{c^2 \operatorname{cos}^2 \varphi + m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi};$$

che la generatrice del fuso passante pel punto M ammette il valore

$$\overline{mn} = \frac{a}{c} x = a \operatorname{sen} \varphi;$$

e finalmente che l'area elementare $mn n' m' = dS$, quando esprimasi il seno di φ in funzione del suo coseno, risulta

$$dS = ac \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{\frac{m^2}{c^2} - \frac{m^2 - c^2}{c^2} \operatorname{cos}^2 \varphi}.$$

Ponendo ora

$$\frac{m^2 - c^2}{c^2} = \varepsilon^2 \tag{8},$$

d'onde

$$\frac{m^2}{c^2} = 1 + \varepsilon^2,$$

la trovata espressione di dS diventa

$$dS = ac \varepsilon \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \operatorname{cos}^2 \varphi} \tag{III},$$

la quale, integrata fra i limiti $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$, conduce a trovare il domandato valore della superficie S del fuso. Per fare quest'integrazione, nella trovata espressione di dS si ponga $-d \cos \varphi$ invece di $\text{sen } \varphi d\varphi$, ed allora si ottiene

$$\int \text{sen } \varphi d\varphi \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \cos^2 \varphi} = - \int d \cos \varphi \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \cos^2 \varphi}$$

$$= - \frac{1}{2} \left[\cos \varphi \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \cos^2 \varphi} + \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \text{arc} \left(\text{sen} = \frac{\varepsilon \cos \varphi}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \right) \right].$$

Prendendo quest'integrale fra i limiti 0 e $\frac{\pi}{2}$, si trova

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } \varphi d\varphi \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \cos^2 \varphi}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}} - 1 + \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \text{arc} \left(\text{sen} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \text{arc} \left(\text{sen} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \right) \right].$$

Osservando ora che l'arco il quale ha per seno $\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$ ammette ε per tangente, risulta

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } \varphi d\varphi \sqrt{\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \cos^2 \varphi}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2} \text{arc} \left(\text{tang} = \varepsilon \right) \right];$$

per cui il valore di S, il quale vale quest'integrale moltiplicato pel prodotto $ac\varepsilon$, vien dato dalla formola

$$S = \frac{1}{2} ac \left[1 + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = \varepsilon) \right] \quad (9).$$

Se ora si svolge in serie $\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = \varepsilon)$ si ha

$$\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = \varepsilon) = \varepsilon - \frac{1}{3} \varepsilon^3 + \frac{1}{5} \varepsilon^5 - \frac{1}{7} \varepsilon^7 + \dots,$$

e quindi il valore di S diventa

$$S = ac \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3} \varepsilon^2 - \frac{1}{3 \cdot 5} \varepsilon^4 + \frac{1}{5 \cdot 7} \varepsilon^6 - \dots \right) \quad (10).$$

Quando ε^2 è una frazione, ossia quando

$$\frac{m^2 - c^2}{c^2} < 1,$$

ossia ancora quando

$$m < c \sqrt{2},$$

si può calcolare il valore di S mediante l'equazione (10), la quale risulta di più facile conteggio che non la formola (9) allorquando prendansi solamente pochi termini del fattore svolto in serie che moltiplica il prodotto ac .

Nel caso del fuso a tutta monta si ha $c = m$ e quindi $\varepsilon^2 = 0$ per cui il valore di S risulta eguale al prodotto am già trovato partendo da semplici considerazioni elementari.

Considerando il caso in cui $m < c \sqrt{2}$ e tenendo soltanto conto del termine che contiene la seconda potenza di ε , quando per questa quantità si ponga il suo valore dato dalla (8), si ottiene la formola

$$S = a \frac{2c^2 + m^2}{3c} \quad (11),$$

la quale, essendo negativo il primo termine trascurato nella serie che trovasi nel secondo membro dell'equazione (10), deve condurre a risultati un po' maggiori del vero. Se poi si paragonano fra di loro i valori di S che si ottengono, applicando le formole (9) e (11) per diversi valori di m più piccoli di $c\sqrt{2}$, si trova che essi s'accordano quando $m=c$ e che negli altri casi presentano discrepanze notevoli e crescenti a misura che m cresce; cosicchè la formola (11), sia per essere applicabile ai soli pochi casi in cui $m < c\sqrt{2}$, sia per la poca approssimazione a cui conduce, non può assolutamente essere considerata come formola utile da adottarsi nella pratica.

Per stabilire una formola d'approssimazione atta a calcolare la superficie del fuso cilindrico ellittico a monta rialzata in tutti i casi della pratica, si parta dalla già trovata formola

$$dS = ac \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{\frac{m^2}{c^2} - \frac{m^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \varphi},$$

la quale esprime il differenziale dell'area di detto fuso e si porti fuori del radicale il fattore $\frac{m^2}{c^2}$. Così facendo si ottiene l'equazione

$$dS = am \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{1 - \frac{m^2 - c^2}{m^2} \cos^2 \varphi},$$

che, ponendo

$$\frac{m^2 - c^2}{m^2} = \eta^2, \quad (12),$$

si riduce a

$$dS = am \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{1 - \eta^2 \cos^2 \varphi} \quad (IV).$$

Svolgendo in serie $\sqrt{1 - \eta^2 \cos^2 \varphi} = (1 - \eta^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$ colla formola del binomio per poter facilmente eseguire le integrazioni, ed osservando che

$$\text{sen } \varphi \, d\varphi = -d \cos \varphi,$$

si trova

$$dS = -a m d \cos \varphi \left[1 - \frac{1}{2} \eta^2 \cos^2 \varphi - \frac{1.1}{2.4} \eta^4 \cos^4 \varphi \right. \\ \left. - \frac{1.1.3}{2.4.6} \eta^6 \cos^6 \varphi - \dots \right],$$

la quale, integrata fra i limiti $\varphi = 0$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$, conduce a trovare che la superficie S del fuso vien data da

$$S = a m \left[1 - \frac{1.1}{2.3} \eta^2 - \frac{1.1.1}{2.4.5} \eta^4 \right. \\ \left. - \frac{1.1.3}{2.4.6} \frac{1}{7} \eta^6 - \dots \right] \quad (13).$$

Come chiaramente si vede dalla formola (12), il valore di η è una frazione, e quindi il fattore svolto in serie nell'ultima formola ha tutti i suoi termini decrescenti. Segue da ciò che la formola (13) torna utilissima nella pratica per trovare la superficie di fusi ellittici a monta rialzata, e che i risultati a cui essa conduce sono tanto più prossimi al vero quanto più grande è il numero dei termini di cui si tien conto nel fattore svolto in serie.

Tenendo conto soltanto dei due primi termini dell'accennata serie e ponendo per η^2 il suo valore dato dalla (12), risulta la semplicissima formola pratica

$$S = a \frac{5m^2 + c^2}{6m} \quad (14).$$

la quale, essendo negativi tutti i termini trascurati nella serie che trovasi nel secondo membro dell'equazione (13), conduce necessariamente a risultati un po' maggiori del vero. Confrontando poi i risultati dati da questa formola con quelli che somministra la formola (9) trovasi che per m poco diverso da c si ha quasi la coincidenza esatta nei detti risultati, che essi differiscono pochissimo per quei rapporti fra la monta e la corda i quali vengono adottati nella pratica, e che quindi la semplicissima formola (14) si può conside-

rare come atta a trovare la superficie del fuso cilindrico ellittico a monta rialzata in tutte le ordinarie circostanze.

5° Dovendosi trovare la superficie di un fuso cilindrico a direttrice qualunque, si può applicare il metodo generale ed approssimato che venne indicato al numero 88 per valutare una porzione di superficie cilindrica. Si dividerà la direttrice VD (*fig. 92*) in parti diseguali od eguali, ma abbastanza piccole che, immaginando condotte le generatrici corrispondenti ai diversi punti di divisione, si possano considerare come altrettanti trapezii le figure che rimangono comprese fra le indicate generatrici quando si faccia lo sviluppo del fuso; si misureranno gli sviluppi delle parti di direttrice comprese fra queste generatrici, non che le lunghezze delle generatrici medesime; e si otterrà quindi la superficie del fuso applicando la formola (1) oppure la formola (2) del citato numero, secondochè la direttrice VD venne divisa in parte diseguali od eguali.

90. **Superficie dei fusi cilindrici incompleti.** — Non sempre i fusi cilindrici, che avviene di dover considerare nella pratica delle costruzioni, hanno la tangente nel punto più alto della loro curva direttrice parallela al piano dei triangoli che essi coprono; e sovente avviene di dover considerare dei fusi cilindrici vAB aventi per direttrice un arco circolare Dv (*fig. 92*), colla tangente perpendicolare al piano del triangolo coperto oAB nell'estremo D e colla tangente obliqua al detto piano all'estremo v . Questi fusi si possono chiamare *fusi cilindrici incompleti*, e per trovare la loro superficie vale la regola generale data sul finire del precedente numero pel fuso cilindrico a direttrice qualunque.

Pel fuso cilindrico, come vAB (*fig. 92*), avente per direttrice l'arco circolare Dv si può stabilire una semplice formola atta al calcolo della sua superficie. Si chiamino perciò:

- a il lato \overline{AB} del fuso;
- c la sua semi-corda \overline{Do} ;
- r il raggio \overline{CD} dell'arco Dv ;

α l'arco di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo vCX che il raggio Cv , condotto al vertice v del fuso, fa colla direzione CX tirata pel centro C dell'arco circolare Dv perpendicolarmente al piano del triangolo oAB ;

S la superficie del fuso vAB .

Dal triangolo voC , rettangolo in o in cui $\overline{Co} = r - c$, immediatamente si ricava

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{r-c}{r}, \quad (1).$$

Se ora sulla superficie del fuso si segnano due generatrici infinitamente vicine rs e tu e se chiamasi φ l'arco di raggio eguale all'unità corrispondente all'angolo αCX che il raggio, il quale va al punto d'incontro della generatrice rs coll'arco Dv , fa colla retta CX , si ha: che l'arco elementare compreso fra dette generatrici infinitamente vicine è

$$r d\varphi;$$

che la proiezione $\overline{C\zeta}$ del raggio \overline{Cs} sul piano del triangolo oAB vale

$$r \operatorname{sen} \varphi;$$

che la distanza $\overline{o\zeta}$ risulta

$$c - r(1 - \operatorname{sen} \varphi);$$

che la generatrice \overline{rs} , eguale alla sua proiezione $\overline{\rho\sigma}$ sul piano del triangolo oAB , ammette per espressione

$$a \frac{c - r(1 - \operatorname{sen} \varphi)}{c};$$

che l'area elementare dS compresa fra le due generatrici infinitamente vicine rs e tu si ottiene coll'equazione

$$dS = \frac{ar}{c} [(c-r) + r \operatorname{sen} \varphi] d\varphi;$$

e finalmente che la domandata superficie S , la quale si ottiene integrando fra i limiti $\varphi = \alpha$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$, viene espressa da

$$S = \frac{ar}{c} \left[r \cos \alpha - (r-c) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \quad (2).$$

La formola (1) serve al calcolo di α , e si passa dopo a trovare la superficie S mediante la formola (2).

91. **Superficie dell'unghia cilindrica.** — Sia ABG (fig. 96) un triangolo qualunque, GV sia una perpendicolare al piano di questo triangolo elevata pel suo vertice G ed ADB sia una curva direttrice che tutta si proietta in \overline{AB} sul piano del triangolo ABC . Immaginando descritta la superficie cilindrica avente per direttrice la curva ADB e per generatrice una retta parallela alla mediana \overline{CG} del triangolo ABG e supponendo questa superficie cilindrica limitata dalle due curve AV e BV risultanti dall'intersezione dell'or accennata superficie cilindrica coi piani elevati pei lati \overline{AG} e \overline{BG} perpendicolarmente a quello del detto triangolo, si ottiene la porzione di superficie cilindrica $VADB$ la quale costituisce un'unghia cilindrica. La direttrice ADB è generalmente una mezza circonferenza di circolo; qualche volta è un arco circolare, oppure una mezza ellisse, od anche una semi-ovale. Le rette \overline{AB} e $\overline{CD} = \overline{GV}$, le quali costituiscono rispettivamente la corda e la monta o saetta dell'unghia; la mediana $\overline{GC} = \overline{VD}$ del triangolo coperto dall'unghia prende il nome di *lunghezza*; ed il punto V si dice *vertice* dell'unghia. Quando la retta GC è perpendicolare alla retta AB , l'unghia è *retta* ed il triangolo GAB è isoscele sulla base \overline{AB} ; si ha invece un'unghia *obliqua* quando questa condizione non è soddisfatta. Una unghia *retta* si dice *a tutta monta*, *a monta depressa* o *a monta rialzata* secondochè la sua saetta \overline{CD} è eguale, minore o maggiore della metà della corda \overline{AB} . Per decidere invece del sesto o della monta di un'unghia obliqua bisogna considerare la sezion retta $AD'B'$, del cilindro cui essa appartiene, e dire che essa è *a tutta monta*, *a monta depressa* o *a monta rialzata* secondo che la saetta $\overline{C'D'} = \overline{CD}$ è eguale, minore o maggiore della metà della corda $\overline{A'B'}$ dell'indicata sezion retta.

Se pel vertice V dell'unghia immaginasi un piano parallelo a quello in cui trovasi la direttrice ADB , e se si suppone prolungata la superficie cilindrica cui l'unghia appartiene fino a questo piano, nasce la curva EVF identica all'accennata curva direttrice; e la superficie dell'unghia si può considerare siccome la differenza fra la superficie del cilindro $ADBEVF$, coprente il rettangolo od il parallelogramma $ABFE$ secondochè l'unghia è retta od obliqua, e la somma delle superficie dei due fusi cilindrici VAE e VBF insistenti ai triangoli GAE e GBF . Ora, immaginando prolungata la retta \overline{BG} fino ad incontrare in H il prolungamento di \overline{AE} , risulta la lunghezza $\overline{AH} = 2\overline{AE} = 2\overline{CG}$ ed il triangolo $HEG = BFG$,

e quindi la somma degli accennati due fusi si riduce al fuso unico VAH coprente il triangolo GAH. Segue da ciò che la superficie di un'unghia cilindrica è la differenza fra la superficie cilindrica avente la stessa direttrice e la stessa lunghezza dell'unghia e quella del fuso di lato doppio della lunghezza, di saetta e di semi-corda eguali a quelle della sezione retta dell'unghia. Quando l'unghia è retta, la sua sezione retta è la stessa curva direttrice.

1° Per l'unghia cilindrica retta avente per direttrice una mezza circonferenza di circolo, chiamando

$2c$ la sua corda \overline{AB} ,

a la sua lunghezza \overline{GC} ed

S la sua superficie

si ha: che la superficie cilindrica retta avente la stessa direttrice e la stessa lunghezza dell'unghia è

$$\pi ac;$$

che la superficie del fuso cilindrico di lato doppio della lunghezza, di saetta e di semi-corda eguali a quelle della sezione retta dell'unghia vale

$$2ac;$$

e che la superficie dell'unghia risulta quindi dalla semplicissima formola

$$S = ac(\pi - 2) \quad (1),$$

la quale si riduce ad

$$S = \frac{8}{7} ac \quad (2)$$

quando assumasi per π il valore $\frac{22}{7}$ dato da Archimede.

Il prodotto ac rappresenta evidentemente la superficie del triangolo CAB coperto dall'unghia, per cui si può dire che la superficie di un'unghia cilindrica retta a tutta monta vale gli $\frac{8}{7}$ dell'area del triangolo che essa copre.

2° Un'unghia cilindrica retta è a monta depressa, quando ha per direttrice una mezza ellisse col semi-asse \overline{CA} , costituente la

semi-corda dell'unghia, maggiore del semi-asse $\overline{CD} = \overline{GV}$ rappresentante la monta. Ritenendo poi le denominazioni già stabilite nel caso precedente per quanto si riferisce alla corda, alla lunghezza ed alla superficie, e chiamando

m la monta $\overline{CD} = \overline{GV}$,

L lo sviluppo della semi-ellisse ADB costituente la sezione retta dell'unghia

si ha: che la superficie cilindrica retta avente la stessa direttrice e la stessa lunghezza dell'unghia è

$$La \quad (3);$$

che la superficie del fuso cilindrico di lato doppio della lunghezza, di monta e di semi-corda eguali a quelle della sezione retta dell'unghia è, per la formola (5) del numero 39,

$$ac \left(1 + \frac{1-e^2}{2eK} \ln \frac{1+e}{1-e} \right) \quad (4);$$

e finalmente che la superficie S dell'unghia risulta dalla formola

$$S = a \left[L - c \left(1 + \frac{1-e^2}{2eK} \ln \frac{1+e}{1-e} \right) \right] \quad (5),$$

nella quale si deve mettere per L lo sviluppo della semi-ellisse di semi-assi c ed m da calcolarsi colle norme che vennero date ai numeri 41 e 42, per e il suo valore somministrato dall'equazione (5) del numero 39 e per K il numero 0,45429448

Applicando la formola (4) del numero 42 a trovare lo sviluppo L della mezza ellisse ADB di semi-assi c ed m col fare

$$\frac{\sqrt{c^2 - m^2}}{c} = e \quad (6),$$

e sostituendo all'espressione (4) il suo svolgimento in serie, come risulta dall'applicazione della formola (6) del numero 39, si trova

$$S = ac \left\{ \begin{aligned} & \left((\pi - 2) - \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 \pi - \frac{2}{3} \right] e^2 - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 \pi - \frac{2}{5} \right] e^4 \right) \\ & - \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \right)^2 \pi - \frac{2}{7} \right] e^6 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (7),$$

la qual formola conduce ad un valore tanto più approssimato delle superficie S quanto più grande è il numero dei termini di cui si tien conto nel suo secondo membro, ordinato secondo le potenze ascendenti d'ordine pari della frazione e .

Nelle ordinarie circostanze della pratica basta tener conto dei due primi termini del fattore svolto in serie nell'ultima equazione, ed allora, ponendo per e il suo valore data dalle (6), si trova

$$S = a \frac{3\pi(3c^2 + m^2) - 8(2c^2 + m^2)}{12c} \quad (8),$$

la quale, assumendo $\frac{22}{7}$ pel valore di π , si riduce alla formola

$$S = a \frac{43c^2 + 5m^2}{42c}, \quad (9),$$

che per la sua semplicità si può applicare in quasi tutte le circostanze della pratica, giacchè dà valori di S superiori ma assai vicini al vero pei casi in cui m poco differisce da c ; e nel caso limite di $m = \frac{1}{5}c$ dà una superficie maggiore della vera di circa $\frac{1}{14}$ dell'area del triangolo coperto dall'unghia.

5° Quando si ha un'unghia cilindrica retta avente per direttrice una mezza ellisse col semi-asse \overline{CA} costituente la semi-corda c dell'unghia minore dell'altro semi-asse $\overline{CD} = \overline{GV}$ rappresentante la monta m , ritenendo tutte le denominazioni stabilite nel caso precedente per l'unghia cilindrica ellittica a monta depressa, si ha: che la superficie cilindrica retta avente la stessa direttrice e la stessa lunghezza dell'unghia vale

$$La;$$

che la superficie del fuso cilindrico di lato doppio della lunghezza,

di monta e di semi-corda eguali a quelle della sezione retta dell'unghia vien espressa, per la formola (9) del numero 39, da

$$ac \left[1 + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \arccos(\varepsilon) \right];$$

e finalmente che la superficie S dell'unghia si può dedurre dalla formola

$$S = a \left\{ L - c \left[1 + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \arccos(\varepsilon) \right] \right\} \quad (10).$$

nella quale devesi porre, per L lo sviluppo della semi-ellisse di semi-asse maggiore m e di semi-asse minore c da ottenersi colle norme che vennero date nei già citati numeri 41 e 42, e per ε il suo valore dato dalla formola (3) del numero 39.

Applicando la formola (1) del numero 42 per trovare lo sviluppo L della semi-ellisse di semi-asse maggiore m e di semi-asse minore c col porre

$$\frac{\sqrt{m^2 - c^2}}{m} = \eta, \quad (11),$$

e adottando il secondo membro dell'equazione (13) del numero 39 per esprimere la superficie del fuso cilindrico di lato $2a$ doppio della lunghezza, di monta m e di semi-corda c eguali a quelle della sezione retta dell'unghia, si trova che la superficie S di quest'ultima può essere calcolata colla formola

$$S = am \left\{ \begin{aligned} & (\pi - 2) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{2}{3} \right) \eta^2 - \frac{1.1}{2.4} \left(\frac{1.3}{2.4} \pi - \frac{2}{5} \right) \eta^4 \\ & - \frac{1.1.3}{2.4.6} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \pi - \frac{2}{7} \right) \eta^6 - \dots \end{aligned} \right\} \quad (12).$$

Questa formola conduce ad un valore tanto più approssimato della superficie S del fuso cilindrico ellittico a monta rialzata, quanto più grande è il numero dei termini di cui si tien conto nel suo secondo membro ordinato secondo le potenze ascendenti d'ordine pari della frazione η .

Tenendo conto solo dei due primi termini del fattore svolto in serie nell'ultima formola e ponendo per π il suo valore dato dalla (11), si deduce

$$S = a \frac{3\pi(c^2 + 3m^2) - 4(c^2 + 5m^2)}{12m},$$

la quale, prendendo $\frac{22}{7}$ per valore di π , dà luogo alla formola

$$S = a \frac{19c^2 + 29m^2}{42m} \quad (13).$$

Se poi, per diversi valori del rapporto $\frac{c}{m}$, si calcolano i valori corrispondenti di S coll'ultima formola e colla formola (10), si trova che essi, salvo il caso in cui m è vicinissimo a c , notevolmente differiscono, per cui l'ultima semplicissima formola non può essere adottata come formola pratica per calcolare le superficie delle unghie cilindriche ellittiche a monta rialzata.

Se invece si tien conto dei primi tre termini del fattore svolto in serie nell'equazione (12) e se per π si assume $\frac{22}{7}$, si arriva alla formola

$$S = a \frac{1993m^4 + 2174m^2c^2 - 327c^4}{3360m^3} \quad (14)$$

che dà risultati maggiori del vero, ma più esatti di quelli somministrati dalla formola (13) e tanto più prossimi al vero quanto più il valore di m si accosta a quello di c , e che utilmente può essere impiegata nelle ordinarie circostanze della pratica, giacchè nel caso di $m = 4c$, che si può considerare come il caso limite delle unghie a monta rialzata che avviene di dover considerare nella pratica, dà una superficie maggiore della vera di circa $\frac{1}{10}$ dell'area del triangolo coperto dall'unghia.

4° Venendo ora all'unghia cilindrica obliqua, si osservi che, chiamando

$2c$ la corda \overline{AB} della sua direttrice ADB ,

m la monta $\overline{GV} = \overline{CB}$,

a la lunghezza \overline{CG} dell'unghia ossia la mediana del triangolo che essa copre,

α l'angolo d'obliquità $B'AB$, ossia l'angolo che il piano $AD'B'$ contenente la sezione retta della superficie cilindrica cui l'unghia appartiene fa col piano ADB in cui si trova la curva direttrice, si ha essere ancora m la montata $\overline{CD'}$ e $2c \cos \alpha$ la corda $\overline{AB'}$ della sezione retta. Segue da ciò che l'applicazione della regola generale data in questo numero per trovare la superficie di un'unghia cilindrica porta a concludere: che nel caso di $m = c \cos \alpha$ si trova la superficie S dell'unghia obliqua cangiando c in $c \cos \alpha$ nella formola (1) o nella formola (2); che, quando $m < c \cos \alpha$, il cangiamento di c in $c \cos \alpha$ deve essere fatto in una delle formole (5), (7), (8) o (9); e finalmente che, risultando $m > c \cos \alpha$, bisogna operare il detto cangiamento in una delle formole (10), (12) e (14).

5° La superficie di un'unghia cilindrica retta od obliqua a direttrice qualunque, con un metodo generale ed approssimato, si può ottenere operando come si è detto al numero 88 per valutare una porzione qualunque di superficie cilindrica. Si divida perciò la sezione retta in parti diseguali od eguali, ma in tal numero e tanto piccole che, immaginando condotte le generatrici corrispondenti ai diversi punti di divisione, si possano considerare come altrettanti trapezii le figure che rimangono comprese fra le dette generatrici quando si faccia lo sviluppo dell'unghia; si misurino gli sviluppi delle parti di direttrice comprese fra le direzioni di queste generatrici, non che le generatrici stesse per quanto si trovano sulla superficie dell'unghia; e finalmente, secondochè la sezione retta si è divisa in parti diseguali od eguali, si applichi la formola (1) e la formola (2) del citato numero 88 per avere la superficie domandata, la quale deve risultare tanto più prossima alla vera quanto maggiore è il numero delle parti in cui venne divisa la sezione retta.

92. **Superficie coniche rette ed oblique.** — La geometria elementare insegna a trovare la superficie convessa di un cono retto, non che quella di un tronco di cono retto a basi parallele.

La prima, siccome facendo lo sviluppo della superficie conica, si dispone essa secondo un settore circolare chiuso da un arco lungo come la circonferenza della base del cono e di raggio eguale alla lunghezza del lato del cono stesso, si ottiene colla formola

$$S = \pi r l,$$

essendo S la superficie domandata, π il noto rapporto della circonferenza al diametro, r il raggio della base del cono ed l il suo lato.

La seconda, per essere lo sviluppo della superficie convessa di un tronco di cono retto a basi parallele una porzione di corona circolare avente per arco di raggio medio la semi-somma delle due circonferenze delle basi e per larghezza il lato del tronco di cono, chiamando

r il raggio della base maggiore del tronco,

r' quello della base minore

l il lato,

vien data da

$$S = \pi(r + r')l.$$

La superficie di un tronco di cono retto a basi non parallele è anche un elemento il quale facilmente ed elementarmente si può ottenere. Basta perciò osservare: che immaginando il tronco di cono $ABDE$ (*fig. 97*) faciente parte del cono retto VAB , la sua base $EIDK$ è un ellisse; e che quest'ellisse si proietta nell'ellisse $FNGO$ sul piano della base $ALBM$. Ciò premesso, se si conducono due generatrici infinitamente vicine Vm e Vm_1 , determinano esse sulla superficie convessa del tronco di cono la strettissima lista mm_1n_1n , la cui area si può dir rappresentata dal prodotto

$$\overline{mn} \times \overline{mm_1}.$$

Ora, chiamando α l'inclinazione delle generatrici del cono retto cui il tronco appartiene col piano della base, si ha

$$\overline{mn} = \frac{\overline{m'n'}}{\cos \alpha};$$

e quindi l'espressione dell'area dell'accennata strettissima lista si riduce a

$$\frac{\overline{mm_1} \times \overline{m'n'}}{\cos \alpha}.$$

Ma il prodotto $\overline{mm_1} \times \overline{m'n'}$ esprime l'area $mm_1n_1'n'$ ~~proiezione~~ di mm_1n_1n sul piano della base $ALBM$, cosicchè l'area di una strettissima lista di superficie di tronco di cono retto a basi non

L'assieme di tutti questi triangoli dà la figura piana $V'A'A_1A_2A_3A_4 \dots A_{n-1}A''$, e, essendo essa lo sviluppo della data superficie conica, la sua area rappresenta la domandata superficie S , e questo con tanta maggior approssimazione quanto più grande è il numero delle parti in cui venne divisa la curva AMN . Per trovare l'area dell'indicata figura piana, ossia dello sviluppo, valgono le norme che vennero date nel precedente capitolo, se pur non si preferisce di operare come segue.

Dai punti $A_1', A_2', A_3', A_4', \dots$ ed A'' si abbassino delle perpendicolari sulle direzioni delle direttrici $\overline{V'A'}$, $\overline{V'A_1'}$, $\overline{V'A_2'}$, $\overline{V'A_3'}$, \dots , e $\overline{V'A''}$, e si misurino le loro lunghezze. Evidentemente per tutti i triangoli componenti lo sviluppo della data superficie conica si conoscono basi ed altezze, per modo che, chiamando

r, r_1, r_2, r_3, \dots ed r_{n-1} le lunghezze delle generatrici $\overline{V'A'} = \overline{V'A''}$, $\overline{V'A_1'}$, $\overline{V'A_2'}$, $\overline{V'A_3'}$, \dots e $\overline{V'A''}$,

p, p_1, p_2, p_3, \dots e p_{n-1} le perpendicolari $\overline{A_1'P}$, $\overline{A_2'P_1}$, $\overline{A_3'P_2}$, $\overline{A_4'P_3}$, \dots ed $\overline{A''P_{n-1}}$ alle dette generatrici, si ha

$$S = \frac{1}{2} (pr + p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_3 + \dots + p_{n-1}r_{n-1}).$$

Le altezze p, p_1, p_2, p_3, \dots e p_{n-1} si possono anche direttamente ed in modo sufficientemente esatto misurare sulla superficie conica invece di misurarle sullo sviluppo, e di più è possibile fare in modo che esse risultino di egual lunghezza. In questo caso avendosi $p = p_1 = p_2 = p_3 = \dots = p_{n-1}$, risulta

$$S = \frac{1}{2} p (r + r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_{n-1}).$$

Quando abbiasi da trovare, non la superficie convessa di un cono, ma sibbene la superficie convessa di un tronco di cono, o più generalmente di una porzione di cono qualunque $AMNQRS$ compresa fra le due curve AMN e QRS , si ottengano colle norme che or ora vennero date le due superficie $VAMN$ e $VQRS$, e si faccia quindi la loro differenza. La trasformata della curva QRS sullo sviluppo si descrive assai facilmente misurando le rette \overline{VQ} , $\overline{VQ_1}$, $\overline{VQ_2}$, $\overline{VQ_3}$, $\overline{VQ_4}$, \dots , $\overline{VQ_{n-1}}$, portandole rispettivamente in $\overline{V'Q'} = \overline{V'Q''}$, $\overline{V'Q_1'}$, $\overline{V'Q_2'}$, $\overline{V'Q_3'}$, $\overline{V'Q_4'}$, \dots e $\overline{V'Q'_{n-1}}$, e tracciando

la linea determinata dagli estremi di queste lunghezze. La figura piana $A'M'N'A''Q''S'R'Q'$ rappresenta lo sviluppo della parte di superficie conica compresa fra le due curve AMN e QRS , e quindi l'area di questa figura piana deve valere l'area domandata, e questo con approssimazione tanto maggiore quanto più grande è il numero delle generatrici che vennero considerate nel far lo sviluppo.

95. **Superficie delle unghie coniche.** — Considerando il caso dell'unghia $FDAE$ (*fig.* 99) appartenente ad un cono retto VAB e da esso separata mediante il piano segante DFE , la sua superficie si può immaginare decomposta in tante strettissime liste, come $mn n_1 m_1$; tutte queste liste si possono riguardare come piane ed inclinate alla base del cono dell'angolo α che le generatrici fanno colla base stessa, e quindi, trovata l'area della proiezione $ADF'E$ dell'unghia sulla base del cono, si ottiene la domandata superficie dell'unghia dividendola per il coseno dell'angolo α .

Quando il piano segante DFE (*fig.* 100) è talmente disposto da tagliare le direzioni dei due lati VA e VB sotto il vertice V del cono, la figura DFE è una porzione di ellisse per cui la proiezione dell'unghia si riduce al segmento circolare DAE diminuito del segmento ellittico $EF'D$. Se il piano segante è parallelo al lato BV del cono, la sezione DFE è un segmento di parabola, e riesce facile il vedere come la superficie sulla quale si proietta l'unghia, sia il segmento circolare DAE diminuito del segmento parabolico $DF'E$. Se finalmente il piano segante taglia una direttrice, come VA , sotto il vertice V e l'altra diametralmente opposta VB sul suo prolungamento sopra il detto vertice (*fig.* 99), la sezione DFE è un segmento d'iperbole, e la proiezione della superficie dell'unghia si riduce al segmento circolare DAE aumentato o diminuito del segmento iperbolico $DF'E$, secondo che il detto piano taglia la direzione CV dell'asse del cono al di sopra o al di sotto del vertice V .

Per ottenere la superficie di un'unghia conica qualunque conviene praticamente procedere come segue. Fare lo sviluppo del cono cui l'unghia appartiene, segnare sullo sviluppo le trasformate delle linee che contornano l'unghia e trovare l'area della figura piana compresa fra queste trasformate.

94. **Superficie sferiche.** — La geometria elementare insegna a trovare le superficie S della sfera, della calotta, della zona, del fuso e del triangolo sferico.

1° Essendo r il raggio di una sfera e π il noto rapporto

della circonferenza al diametro, si ha che la sua superficie S è data da

$$S = 4\pi r^2.$$

2° Per una calotta appartenente ad una sfera di raggio r ed avente la saetta m , si ottiene la superficie moltiplicando la circonferenza massima della sfera cui la calotta appartiene per la saetta m , e quindi

$$S = 2\pi r m.$$

Se invece del raggio r della sfera cui la calotta appartiene si conosce la sua corda $2c$, si osserva che la corda dell'arco generatore della calotta, la quale costituisce l'ipotenusa di un triangolo rettangolo avente per cateti la semi-corda e la monta, è media proporzionale fra il diametro intero della sfera e la monta, per cui, avendosi

$$2rm = c^2 + m^2,$$

la formola che dà la superficie di una calotta sferica, quando si conosce la sua corda $2c$ e la sua monta m , diventa

$$S = \pi(c^2 + m^2).$$

3° Per una zona sferica di altezza a ed appartenente ad una sfera di raggio r , si ha

$$S = 2\pi r a.$$

4° Pel fuso sferico limitato da due mezze circonferenze massime, i cui piani fanno fra loro un angolo di n° e che appartiene ad una sfera di raggio r , la superficie S vien data da

$$S = \frac{n^\circ}{90^\circ} \pi r^2;$$

e vien essa espressa da

$$S = 2lr$$

quando è data, non l'ampiezza dell'angolo formato dai due piani limitanti il fuso, ma sibbene la lunghezza l dell'arco di circon-

ferenza massima della sfera cui il fuso appartiene e misurante il detto angolo.

5° Pel triangolo sferico, ossia per la porzione di superficie sferica compresa fra tre archi di circolo massimo, la superficie vale tanti ottavi dell'intera superficie sferica, cui il triangolo appartiene, quanto sono gli angoli retti contenuti nell'eccesso sferico ossia nella differenza fra la somma dei tre angoli del triangolo (espressi prendendo per unità l'angolo retto) e due retti. Segue da ciò che, essendo r il raggio della sfera ed A° , B° e C° i tre angoli del triangolo sferico dati col prendere il grado per unità, la superficie S ammette il valore dato da

$$S = \frac{A^\circ + B^\circ + C^\circ - 180^\circ}{90^\circ} \frac{1}{2} \pi r^2.$$

95. **Superficie dell'unghia sferica.** — Se immaginasi un triangolo CAB (fig. 104) isoscele sulla base \overline{AB} , se col centro nel vertice C e con raggio eguale al lato \overline{CA} si suppone descritto l'arco AFB , e se dal mezzo fuso sferico $VAFB$ coprente il settore circolare $CAFB$ si suppone tolta la semi-calotta $AEBF$ insistente al segmento BFA , la porzione di superficie sferica $VAEB$ che ancora rimane e che copre il triangolo CAB costituisce un'unghia sferica.

La superficie della descritta unghia sferica assai facilmente si ottiene considerandola siccome la differenza fra la superficie del mezzo fuso $VAFB$ e quella della mezza calotta $AEBF$. Segue da ciò che, chiamando

2c la base \overline{AB} del triangolo isoscele coperto dall'unghia ossia la corda dell'unghia,

a l'altezza \overline{DC} dell'indicato triangolo ed

S la superficie domandata,

si ha: per valore del raggio \overline{CA} della sfera cui l'unghia appartiene

$$\overline{CA} = \sqrt{a^2 + c^2};$$

per valore della saetta \overline{FD} della semi-calotta $AEBF$

$$\overline{FD} = \sqrt{a^2 + c^2} - a;$$

per equazione determinatrice dell'angolo $ACD = C$

$$\operatorname{tang} C = \frac{c}{a} \quad (1);$$

per espressione della superficie del mezzo fuso sferico $VAFB$

$$\frac{C}{90^\circ} \pi (a^2 + c^2);$$

per espressione della superficie della mezza calotta sferica $AEBF$

$$\pi \sqrt{a^2 + c^2} \left(\sqrt{a^2 + c^2} - a \right);$$

e finalmente per valore della superficie S dell'unghia

$$S = \pi \sqrt{a^2 + c^2} \left[\left(\frac{C}{90^\circ} - 1 \right) \sqrt{a^2 + c^2} + a \right] \quad (2).$$

L'equazione (1) serve a trovare l'angolo C che si deve esprimere prendendo il grado per unità, e, una volta trovato quest'angolo, si passa a dedurre la superficie dell'unghia sferica applicando la formula (2).

96. Superficie degli ellissoidi. — Gli ellissoidi che soventi volte avviene di dover considerare nella pratica sono: quello di rivoluzione intorno al suo asse minore, detto *ellissoide schiacciato*; e quello di rivoluzione intorno all'asse maggiore, chiamato *ellissoide allungato*. Qualche volta si presenta anche il caso di dover considerare l'*ellissoide a tre assi*.

1° Per trovare la superficie del mezzo ellissoide schiacciato generato dal quarto di ellisse AB (*fig. 402*) rotante intorno al suo semi-asse minore \overline{CB} , assumasi per origine di coordinate il centro C dell'ellisse cui appartiene la curva generatrice, l'asse delle ascisse nella direzione Cx dell'asse maggiore e l'asse delle ordinate nella direzione Cy dell'asse minore della stessa ellisse.

Considerando un punto qualunque M della curva AB , si può dire che questo punto è l'intersezione delle due rette NP e QM , la prima perpendicolare e l'altra parallela all'asse delle ascisse, condotte per punti N e Q in cui una stessa retta CN interseca le due circonferenze descritte col centro in C ed aventi i loro

raggi rispettivamente eguali a \overline{CA} e \overline{CB} . Segue da ciò che chiamando

c il semi-asse maggiore \overline{CA} ,

m il semi-asse minore \overline{CB} ,

φ l'angolo yCN ,

S la superficie cercata,

x ed y le due coordinate \overline{CP} e \overline{PM} del punto M

ds un arco elementare MM' ,

si ha: che il differenziale dS della superficie generata dall'archetto infinitesimo MM' , mentre il quadrante ellittico AB fa un'intera rivoluzione, vien dato da

$$dS = 2\pi x ds;$$

e che, come si è trovato al numero 89 parlando del fuso cilindrico a monta depressa con direttrice ellittica,

$$x = c \operatorname{sen} \varphi,$$

$$y = m \operatorname{cos} \varphi,$$

$$dx = c \operatorname{cos} \varphi d\varphi,$$

$$dy = -m \operatorname{sen} \varphi d\varphi,$$

$$ds = d\varphi \sqrt{c^2 \operatorname{cos}^2 \varphi + m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}.$$

Ponendo nell'espressione di dS il valore di x e quello di ds , mettendo $1 - \operatorname{cos}^2 \varphi$ invece di $\operatorname{sen}^2 \varphi$ e portando fuori del radicale la semi-corda c , si ottiene

$$dS = 2\pi c^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{\frac{c^2 - m^2}{c^2} \operatorname{cos}^2 \varphi + \frac{m^2}{c^2}};$$

e, facendo

$$\frac{c^2 - m^2}{c^2} = e^2 \tag{1},$$

risulta

$$dS = 2\pi c^2 e \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{\frac{1 - e^2}{e^2} + \operatorname{cos}^2 \varphi}.$$

Questo valore del differenziale dell'area d'un ellissoide schiacciato differisce dal valore del differenziale dell'area del fuso cilindrico a monta depressa con direttrice ellittica, dato dalla formola (II) del numero 89, nel solo coefficiente costante il quale è $2\pi c^2$ invece di ac . Segue da ciò che le formole determinatrici della superficie S di un mezzo ellissoide schiacciato saranno quelle stesse trovate nel citato numero per il fuso cilindrico a monta depressa con direttrice ellittica quando in esse si cangi ac in $2\pi c^2$, e che per conseguenza si avrà

$$S = \pi c^2 \left(1 + \frac{1-e^2}{2c} \log \frac{1+e}{1-e} \right) \quad (2),$$

$$S = \pi c^2 \left(1 + \frac{1-e^2}{2eK} \log \frac{1+e}{1-e} \right) \quad (3),$$

$$S = 2\pi c^2 \left(1 - \frac{1}{1.3} e^2 - \frac{1}{3.5} e^4 - \frac{1}{5.7} e^6 - \dots \right) \quad (4),$$

Tenendo conto solamente dei due primi termini della serie rappresentante il valore di S e ponendo per c^2 il suo valore dato dall'equazione (1), si ottiene

$$S = \frac{2}{3} \pi (2c^2 + m^2),$$

la quale evidentemente conduce ad una superficie maggiore della vera, e che dà risultati i quali tanto più si allontanano dal vero quanto più la monta del fuso è piccola.

Per ottenere una formola la quale, con un'approssimazione sufficiente nelle ordinarie circostanze della pratica, serva a calcolare la superficie del mezzo ellissoide schiacciato, è necessario tener conto di almeno tre termini del fattore svolto in serie nell'equazione (4), e così facendo si ottiene la formola

$$S = 2\pi \frac{9c^4 + 7c^2 m^2 - m^4}{15c^2} \quad (5),$$

la quale dà per l'ellissoide schiacciato il grado d'approssimazione somministrato dalla formola (7) del numero 89 quando vien questa impiegata al calcolo della superficie del fuso cilindrico ellittico a monta depressa.

Soventi volte nella pratica, invece di adottare le formole (2), (3) e (4) od anche la (5) nel calcolo della superficie del mezzo ellissoide schiacciato, si impiega la semplicissima formola empirica

$$S = 2\pi c \left[m + \frac{2}{5}(c - m) \right] \quad (6).$$

Questa formola dà risultati un po' minori del vero pei semi-ellissoidi molto schiacciati, e dà risultati assai prossimi al vero pei semi-ellissoidi il cui semi-asse minore è poco diverso dal semi-asse maggiore.

2° La superficie del mezzo ellissoide allungato generato dal quarto di ellisse AB (*fig. 105*) rotante intorno al suo semi-asse maggiore \overline{CB} , si ottiene ragionando come si è fatto per avere la superficie del mezzo ellissoide schiacciato. Assumasi per origine di coordinate il centro C, l'asse delle ascisse nella direzione del semi-asse minore \overline{CA} e l'asse delle ordinate nella direzione del semi-asse maggiore \overline{CB} , e si consideri un punto qualunque M della curva AB siccome intersezione delle due rette QP ed NR la prima perpendicolare e l'altra parallela al semi-asse maggiore \overline{CB} , condotte pei due punti Q ed N in cui una stessa retta CQ interseca le due circonferenze descritte col centro in C ed aventi i loro raggi rispettivamente eguali a \overline{CB} ed a \overline{CA} .

Essendo

c il semi-asse minore \overline{CA} ,

m il semi-asse maggiore \overline{CB} ,

φ l'angolo yCQ ,

e ritenendo le denominazioni già stabilite per quanto si riferisce alla superficie domandata, alle coordinate del punto qualunque M al differenziale dell'arco MM' ed alla superficie infinitesima generata dall'arco elementare MM' nell'intera rivoluzione del quarto di ellisse AB attorno al suo semi-asse \overline{CB} , si ha, come per l'ellissoide schiacciato,

$$dS = 2\pi x ds,$$

$$x = c \operatorname{sen} \varphi,$$

$$y = m \cos \varphi,$$

$$dx = c \cos \varphi d\varphi,$$

$$dy = -m \operatorname{sen} \varphi d\varphi,$$

$$ds = d\varphi \sqrt{c^2 \cos^2 \varphi + m^2 \operatorname{sen}^2 \varphi};$$

e quindi, ponendo nell'espressione di dS il valore di x e quello di ds , mettendo $1 - \cos^2 \varphi$ invece di $\operatorname{sen}^2 \varphi$ e portando fuori del radicale la semi-corda c , si ottiene

$$dS = 2\pi c^2 \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{\frac{m^2}{c^2} - \frac{m^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \varphi}.$$

Quest'espressione di dS , ponendo

$$\frac{m^2 - c^2}{c^2} = \varepsilon^2 \tag{7},$$

diventa

$$dS = 2\pi c^2 \varepsilon \operatorname{sen} \varphi d\varphi \sqrt{\frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon^2} - \cos^2 \varphi},$$

e differisce dal differenziale dell'area di un fuso cilindrico a monta rialzata con direttrice ellittica, dato dalla formola (III) del numero 89, nel solo coefficiente costante, il quale è $2\pi c^2$ invece di ac . Segue da ciò che assai facilmente si possono dedurre le formole le quali servono al calcolo della superficie del mezzo ellissoide allungato dalle formole (9) e (10) del citato numero 89, relative al fuso cilindrico a monta rialzata con direttrice ellittica, ponendo in esse $2\pi c^2$ invece di ac ; e quindi risulta

$$S = \pi c^2 \left[1 + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \operatorname{arc} (\operatorname{tang} = \varepsilon) \right] \tag{8},$$

$$S = 2\pi c^2 \left(1 + \frac{1}{1.3} \varepsilon^2 - \frac{1}{3.5} \varepsilon^4 + \frac{1}{5.7} \varepsilon^6 - \dots \right) \tag{9}.$$

Quando ε^2 è una frazione, ossia quando

$$\frac{m^2 - c^2}{c^2} < 1,$$

ossia ancora quando

$$m < c\sqrt{2},$$

conviene generalmente adottare la formola (9) con pochi termini del fattore svolto in serie. Prendendo due soli termini di questo fattore e ponendo per ε^2 il suo valore dato dalla (7) si ottiene la formola

$$S = \frac{2}{3} \pi (2c^2 + m^2) \quad (10),$$

la quale, essendo negativo il primo termine trascurato nell'indicato fattore svolto in serie, deve condurre a risultati maggiori del vero.

La formola (10), sia per essere solamente applicabile ai pochi casi in cui $m < c\sqrt{2}$ sia per dare una grossolana approssimazione per poco che m differisca da c , non si può ritenere siccome formola utile da impiegarsi nella pratica, e, per ottenere una formola d'approssimazione atta a calcolare la superficie del mezzo ellissoide allungato in tutti i casi della pratica, si parta dalla già trovata equazione

$$dS = 2\pi c^2 \sin \varphi d\varphi \sqrt{\frac{m^2}{c^2} - \frac{m^2 - c^2}{c^2} \cos^2 \varphi},$$

la quale esprime il differenziale dell'area del detto ellissoide e si porti fuori del radicale il fattore $\frac{m^2}{c^2}$. Così facendo si ottiene

$$dS = 2\pi c m \sin \varphi d\varphi \sqrt{1 - \frac{m^2 - c^2}{m^2} \cos^2 \varphi},$$

che, ponendo

$$\frac{m^2 - c^2}{m^2} = \eta^2 \quad (11),$$

si riduce a

$$dS = 2\pi c m \sin \varphi d\varphi \sqrt{1 - \eta^2 \cos^2 \varphi}.$$

Questo valore di dS differisce da quello dato dalla formola (IV) del numero 89 solamente per un coefficiente costante, cioè la lunghezza a del fuso è surrogata dalla lunghezza $2\pi c$ della circonferenza del circolo coperto dal mezzo ellissoide. Segue da ciò che dalla formola (13) del citato numero, col solo cangiamento di a in $2\pi c$, riesce facile il dedurre la formola

$$S = 2\pi c m \left(1 - \frac{11}{23} \eta^2 - \frac{1.11}{2.45} \eta^4 - \frac{1.1.31}{2.4.67} \eta^6 - \dots \right) \quad (12),$$

la quale serve al calcolo della superficie del mezzo ellissoide allungato.

L'ultima equazione riesce utilissima nella pratica e dà sempre risultati un po' minori del vero, ma tanto più prossimi alla verità quanto più grande è il numero dei termini di cui si tien conto nel fattore svolto in serie. Tenendo soltanto conto dei due primi termini e ponendo, per η^2 il suo valore dato dalla (11) risulta la semplicissima formola pratica

$$S = \pi c \frac{5m^2 + c^2}{3m}, \quad (13),$$

la quale, essendo negativi tutti i termini trascurati nella serie che trovasi nel secondo membro della (12), conduce necessariamente a risultati un po' maggiori del vero con quel grado di approssimazione che somministra la formola (14) del numero 89 nel calcolo della superficie del fuso cilindrico ellittico a monta rialzata.

Nella pratica, invece di adottare le formole (8), (9), (12) e (13) per il calcolo della superficie dei semi-ellissoidi allungati, ben di frequente si impiega la formola empirica

$$S = 2\pi c \left[m - \frac{2}{7}(m - c) \right] \quad (14),$$

la quale dà risultati assai prossimi al vero per i semi-ellissoidi non molto allungati.

3° La superficie del mezzo ellissoide a tre assi si ottiene partendo dal differenziale dS dell'area di una superficie curva qualunque, il quale, come si sa dal calcolo differenziale, per una

superficie curva riferita a tre assi coordinati ortogonali delle x , delle y e delle z vien dato da

$$dS = dx dy \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}}$$

Ora, essendo

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{m^2} = 1$$

l'equazione dell'ellissoide di semi-assi a , b ed m diretti rispettivamente secondo gli assi delle x , delle y e delle z , e quindi risultando

$$z^2 = m^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad (15),$$

le derivate parziali $\frac{dz}{dx}$ e $\frac{dz}{dy}$ ammettono i valori

$$\frac{dz}{dx} = - \frac{m^2 x}{a^2 z},$$

$$\frac{dz}{dy} = - \frac{m^2 y}{b^2 z},$$

per cui il valore di dS si riduce a

$$dS = dx dy \sqrt{1 + \frac{m^4 x^2}{a^4 z^2} + \frac{m^4 y^2}{b^4 z^2}}$$

Eliminando da quest'equazione il valore di z^2 mediante l'equazione (15), il valore di dS diventa

$$dS = dx dy \sqrt{\frac{1 - \left(1 - \frac{m^2}{a^2}\right) \frac{x^2}{a^2} - \left(1 - \frac{m^2}{b^2}\right) \frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

e la superficie S del mezzo ellissoide vien rappresentata da

$$S = \iint dx dy \sqrt{\frac{1 - \left(1 - \frac{m^2}{a^2}\right) \frac{x^2}{a^2} - \left(1 - \frac{m^2}{b^2}\right) \frac{y^2}{b^2}}{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$$

allorquando i limiti delle due integrazioni s'intendano determinati dalla sua traccia sul piano delle xy , ossia dal contorno dell'ellisse, la cui equazione è

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (16).$$

Per arrivare ad eseguire la duplice integrazione che trovasi nel valore di S , suppongasi per fissare le idee

$$a > b > m,$$

e di più si faccia

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \varepsilon, & \frac{y}{b} &= \eta, \\ 1 - \frac{m^2}{a^2} &= \alpha^2, & 1 - \frac{m^2}{b^2} &= \beta^2 \end{aligned} \quad (17).$$

Evidentemente si ha

$$\alpha < 1, \quad \beta < 1, \quad \beta < \alpha;$$

i valori di dx e di dy riescono

$$dx = a d\varepsilon, \quad dy = b d\eta;$$

ed il valore di S diventa

$$S = ab \iint d\varepsilon d\eta \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \varepsilon^2 - \beta^2 \eta^2}{1 - \varepsilon^2 - \eta^2}}.$$

Ponendo ora

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \varepsilon^2 - \beta^2 \eta^2}{1 - \varepsilon^2 - \eta^2}} \quad (18),$$

il valore di S si riduce semplicemente a

$$S = ab \iint \zeta d\varepsilon d\eta, \quad (19),$$

dove il valore di ζ è determinato dalla (18), ossia ancora dall'equazione

$$(\zeta^2 - \alpha^2)\varepsilon^2 + (\zeta^2 - \beta^2)\eta^2 = \zeta^2 - 1, \quad (20),$$

e dove i limiti delle nuove intersezioni sono dati dall'equazione

$$\varepsilon^2 + \eta^2 = 1 \quad (21),$$

la quale risulta dalla (16) facendo in essa $\frac{x}{a} = \varepsilon$ ed $\frac{y}{b} = \eta$.

Considerando ora le nuove variabili ε , η e ζ siccome le coordinate ortogonali di un'altra superficie rappresentata dall'equazione

(20), $\iint \zeta d\varepsilon d\eta$ si può riguardare siccome l'espressione analitica

di un volume limitato dal piano delle $\varepsilon\eta$, dalla superficie cilindrica (21) e dalla superficie (20) di ordinata ζ . L'intersezione di quest'ultima superficie con un piano parallelo a quello delle $\varepsilon\eta$ è la curva rappresentata dal complesso dell'equazione (20) coll'equazione

$$\zeta = C,$$

essendo C quella costante che determina a qual distanza dall'origine delle coordinate passa il piano secante; e l'equazione della proiezione della stessa intersezione sul piano delle $\varepsilon\eta$ è

$$(C^2 - \alpha^2)\varepsilon^2 + (C^2 - \beta^2)\eta^2 = C^2 - 1.$$

Quest'equazione evidentemente rappresenta un'ellisse i cui semiassi U e V, rispettivamente paralleli agli assi coordinati dalle ε e delle η , sono espressi da

$$U = \sqrt{\frac{C^2 - 1}{C^2 - \alpha^2}}$$

$$V = \sqrt{\frac{C^2 - 1}{C^2 - \beta^2}};$$

per modo che quando il piano segante, sempre parallelo al piano delle $\varepsilon \eta$, passa alla distanza qualunque ζ dall'origine, i due semiassi u e v dell'ellisse intersezione verranno dati dalle formole

$$u = \sqrt{\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - \alpha^2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - \beta^2}}$$

Questi semi-assi divengono eguali fra di loro ed all'unità per $\zeta = \infty$, diventano nulli per $\zeta = 1$, e quindi la superficie rappresentata dall'equazione (20) taglia l'asse delle ζ nel punto A (fig. 104) posto a distanza $\overline{\Omega A} = 1$ dall'origine delle coordinate e si innalza in modo da rendersi assintotica alla superficie cilindrica BCED avente per direttrice la circonferenza di circolo rappresentata dall'equazione (21) e le sue generatrici parallele all'asse $\Omega \zeta$.

Così essendo, si può misurare il volume espresso da $\iint \zeta d\varepsilon d\eta$ prendendo per elemento di esso la differenza infinitesima fra i volumi dei due cilindri retti le cui altezze sono

$$\overline{bd} = \zeta, \quad \overline{b'd'} = \zeta + d\zeta,$$

e le cui basi sono le ellissi di semi-assi

$$\begin{aligned} \overline{\Omega b} &= u, & \overline{\Omega c} &= v, \\ \overline{\Omega b'} &= u + du, & \overline{\Omega c'} &= v + dv. \end{aligned}$$

Le superficie di queste ellissi, trascurando gli infinitesimi di secondo ordine, vengono rispettivamente espresse da

$$\pi uv,$$

$$\pi(uv + u dv + v du) = \pi(uv + duv);$$

l'elemento di volume vale

$$\pi \zeta duv;$$

il volume totale rappresentato da $\iint \zeta d\varepsilon d\eta$ fra i limiti risultanti dall'equazione (24) si può esprimere con

$$\pi \int \zeta duv$$

preso fra i limiti $\zeta=1$ e $\zeta=\infty$; e così, mediante un ingegnoso ripiego dovuto al signor Catalan, l'integrale doppio $\iint \zeta d\varepsilon d\eta$ trovasi trasformato nell'equivalente integrale semplice $\pi \int \zeta duv$.

Chiamando V l'ultimo integrale, l'integrazione per parti facilmente conduce ad ottenere l'equazione

$$\frac{V}{\pi} = \zeta uv - \int uv d\zeta,$$

la quale, per i trovati valori di u e di v in funzione di ζ , si riduce a

$$\frac{V}{\pi} = \frac{\zeta(\zeta^2-1)}{\sqrt{(\zeta^2-\alpha^2)(\zeta^2-\beta^2)}} - \int \frac{(\zeta^2-1)d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2-\alpha^2)(\zeta^2-\beta^2)}}.$$

Se ora si osserva che ζ non può essere minore di 1 e per conseguenza non minore di α , è lecito il porre

$$\text{sen } \varphi = \frac{\alpha}{\zeta} \quad (22),$$

d'onde

$$\zeta = \frac{\alpha}{\text{sen } \varphi} \quad \text{e} \quad d\zeta = -\frac{\alpha \cos \varphi d\varphi}{\text{sen}^2 \varphi},$$

e quindi il valore di $\frac{V}{\pi}$ vien dato da

$$\frac{V}{\pi} = \frac{\alpha^2 - \text{sen}^2 \varphi}{\text{sen} \varphi \cos \varphi \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{sen}^2 \varphi}} - \int \frac{(\text{sen}^2 \varphi - \alpha^2) d\varphi}{\text{sen}^2 \varphi \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{sen}^2 \varphi}}.$$

Ma identicamente si ha

$$\text{sen}^2 \varphi - \alpha^2 = \text{sen}^2 \varphi - \beta^2 \text{sen}^2 \varphi - (\alpha^2 - \beta^2 \text{sen}^2 \varphi),$$

per cui, dividendo per $\text{sen}^2 \varphi \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{sen}^2 \varphi}$, risulta

$$\frac{\text{sen}^2 \varphi - \alpha^2}{\text{sen}^2 \varphi \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{sen}^2 \varphi}} = \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{sen}^2 \varphi}} - \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{sen}^2 \varphi}}{\text{sen}^2 \varphi}$$

e l'ultimo valore di $\frac{V}{\pi}$ si riduce a

$$\frac{V}{\pi} = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\alpha^2 - \text{sen}^2 \varphi}{\text{sen} \varphi \cos \varphi \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{sen}^2 \varphi}} \\ - (1 - \beta^2) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{sen}^2 \varphi}} + \int \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{sen}^2 \varphi}}{\text{sen}^2 \varphi} d\varphi \end{array} \right\}.$$

Trattando l'ultimo integrale col metodo dell'integrazione per parti, si trova che esso vale

$$- \cot \varphi \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{sen}^2 \varphi} - \beta^2 \int \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \text{sen}^2 \varphi}};$$

cosicchè il valore di $\frac{V}{\pi}$ può essere ridotto a

$$\frac{V}{\pi} = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\operatorname{sen} \varphi (\alpha^2 + \beta^2 \cos^2 \varphi - 1)}{\cos \varphi \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \\ - (1 - \beta^2) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} - \beta^2 \int \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \end{array} \right\},$$

o più semplicemente, mettendo $1 - \operatorname{sen}^2 \varphi$ invece di $\cos^2 \varphi$ nell'ultimo integrale e riducendo i due integrali, a

$$\frac{V}{\pi} = \frac{\operatorname{sen} \varphi (\alpha^2 + \beta^2 \cos^2 \varphi - 1)}{\cos \varphi \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} - \int \frac{(1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}.$$

Avendosi ora per identità

$$1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi = (\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) + 1 - \alpha^2,$$

il valore di $\frac{V}{\pi}$ può anche essere scritto

$$\frac{V}{\pi} = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\operatorname{sen} \varphi (\alpha^2 + \beta^2 \cos^2 \varphi - 1)}{\cos \varphi \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \\ - \int d\varphi \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi} - (1 - \alpha^2) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \end{array} \right\},$$

o finalmente

$$\frac{V}{\pi} = \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\operatorname{sen} \varphi (\alpha^2 + \beta^2 \cos^2 \varphi - 1)}{\cos \varphi \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}} \\ - \alpha \int (1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi - \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \int (1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \end{array} \right\}.$$

Intanto, essendo 1 ed ∞ i limiti di ζ , quelli di $\text{sen } \varphi$ in virtù dell'equazione (22) devono essere α e 0, e ponendo

$$\alpha = \text{sen } \mu \tag{23},$$

quelli di φ devono essere μ e 0. Ora, nell'ultimo valore di $\frac{V}{\pi}$ la parte libera dal segno \int , fra i limiti $\text{sen } \varphi = \alpha$ e $\text{sen } \varphi = 0$, assume il valore

$$\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)},$$

per modo che il valore di V , rappresentante $\pi \int \zeta \, du \, v$ fra i limiti $\zeta = 1$ e $\zeta = \infty$ o ancora $\iint \zeta \, d\varepsilon \, d\eta$ fra i limiti risultanti dall'equazione (21), vien espresso da

$$\pi \left\{ \begin{array}{l} + \sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} - \alpha \int_{\mu}^0 \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{sen}^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ - \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \int_{\mu}^0 \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{sen}^2 \varphi\right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \end{array} \right\}.$$

Ma, come risulta dall'equazione (19), quest'espressione moltiplicata per ab dà la superficie S del mezzo ellissoide per cui, invertendo l'ordine dei limiti nei due integrali ed osservando che per le relazioni (17)

$$\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)} = \frac{m^2}{ab},$$

si trova

$$S = \pi m^2 + \pi ab \left\{ \begin{array}{l} + \alpha \int_{\varphi=0}^{\varphi=\mu} \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{sen}^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} d\varphi \\ + \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\mu} \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{sen}^2 \varphi\right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \end{array} \right\} \tag{24}.$$

I due integrali contenuti nel trovato valore di S, i quali si riducono a

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\mu} (1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi$$

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\mu} (1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi$$

quando si faccia

$$\frac{\beta}{\alpha} = c,$$

sono tali da non potersi effettuare che per approssimazione, sviluppando in serie col linomio di Newton le espressioni $(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$

ed $(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}$. Legendre però, ponendo eguale al seno di un angolo θ la frazione rappresentante il coefficiente di $\operatorname{sen}^2 \varphi$, ha calcolati e raccolti in tavole questi integrali chiamati rispettivamente *funzioni o trascendenti ellittiche di prima e seconda specie*.

Come già si notò al numero 41 parlando dello sviluppo della semi-ellisse, dove avvenne di considerare l'integrale dell'espressione

$(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi$, queste tavole contengono i valori dei citati integrali corrispondenti a tutti quelli di φ e di θ variabili di grado in grado da zero a novanta, e di necessità sono esse a *doppia entrata* come quella di Pittagora. La prima loro colonna contiene i diversi valori dell'angolo φ chiamato *ampiezza*; le altre, nel numero che permette il formato della carta, sono occupate dai valori corrispondenti del primo e del secondo integrale pei diversi valori del *modulo* θ . Le colonne poste a destra di quella contenente le ampiezze φ , secondo che trattasi del primo o del secondo integrale, sono intestate E (0°), E (1°), E (2°),, E (90°) oppure F (0°), F (1°), F (2°),, F (90°), e queste indicazioni significano che

nelle espressioni $(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi$ od $(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi$ il modulo θ , di cui c è il seno, si suppone corrispondere successivamente a 0°, 1°, 2°,, 90°. Per tal modo volendo, per esempio, il valore

di $\int (1 - c^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi$ corrispondente a gradi 20 di ampiezza φ ed a gradi 54 di modulo θ , si cercherà l'ampiezza nella prima colonna, il modulo nel primo rigo superiore, e, seguendo coll'occhio le linee dirette secondo la larghezza e l'altezza della tavola che passerebbero pei rispettivi luoghi dei numeri cercati, si troverà nell'incontro di esse il richiesto valore dell'ultimo indicato integrale.

Per ben far apprendere l'uso delle indicate tavole, trascrivo qui appresso una piccola parte di quella che dà i valori dell'integrale dell'espressione $(1 - c^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi$, e mi propongo di trovare quest'integrale per $\varphi = 47^\circ 29'$ e per $c = 0,064242$ cui corrisponde $\theta = 5^\circ 41'$.

φ	E(0°)	E(1°)	E(2°)	E(3°)	E(4°)
0°	0,00000 00000	0,00000 00000	0,00000 00000	0,00000 00000	0,00000 00000
1	0,01745 32925	0,01745 32922	0,01745 32914	0,01745 32901	0,01745 32882
2	0,03490 65850	0,03490 65829	0,03490 65764	0,03490 65656	0,03490 65505
3	0,05235 98776	0,05235 98705	0,05235 98484	0,05235 98121	0,05235 97512
4	0,06981 31701	0,06981 31528	0,06981 31010	0,06981 30199	0,06981 28944
5	0,08726 64626	0,08726 64290	0,08726 63278	0,08726 61547	0,08726 59244
6	0,10471 97551	0,10471 96970	0,10471 95224	0,10471 92320	0,10471 88258
7	0,12217 30476	0,12217 29554	0,12217 26784	0,12217 22176	0,12217 15731
8	0,13962 63402	0,13962 62026	0,13962 57896	0,13962 51025	0,13962 41411
9	0,15707 96327	0,15707 94569	0,15707 88497	0,15707 78720	0,15707 65048
10	0,17453 29252	0,17453 26569	0,17453 18525	0,17453 05129	0,17452 86395
11	0,19198 62177	0,19198 58611	0,19198 47917	0,19198 30140	0,19198 05208
12	0,20943 95102	0,20943 90479	0,20943 76615	0,20943 53528	0,20943 21244
13	0,22689 28028	0,22689 22158	0,22685 04558	0,22688 75250	0,22688 34266
14	0,24434 60953	0,24434 53635	0,24434 81688	0,24435 95043	0,24435 44039
15	0,26179 93878	0,26179 84893	0,26179 57948	0,26179 15078	0,26178 50333
16	0,27925 26803	0,27925 15919	0,27924 28987	0,27924 28927	0,27923 52920
17	0,29670 59728	0,29670 46700	0,29670 07631	0,29669 42565	0,29668 51579
18	0,31415 92654	0,31415 77221	0,31415 30943	0,31414 53870	0,31415 46094
19	0,33161 25579	0,33161 07469	0,33160 35164	0,33159 62723	0,33158 36253
20	0,34906 58504	0,34906 37432	0,34905 74244	0,34904 69007	0,34903 21847

Cercando nella prima colonna l'angolo 47° e nel rigo superiore l'indicazione E (5°), si trova che il valore corrispondente dell'integrale è

$$E' = 0,2966942565.$$

Per tener conto dei 29' contenuti nell'ampiezza φ si osserva che la variazione fra il valore dell' $E(5^\circ)$ corrispondente a 18° ed il valore del $E(5^\circ)$ corrispondente a 17° è

$$0,3141453870 - 0,2966942565 = 0,0174511305,$$

e che quindi in proporzione la variazione Δ da farsi sul valore di E' per avere il valore $E(5^\circ)$ corrispondente al $17^\circ 29'$ approssimativamente vien data da

$$\Delta = \frac{29'}{60} 0,0174511305 = 0,00843471293.$$

Analogamente si tien conto dei 41' contenuti nel modulo θ , osservando che la variazione fra il valore di $E(5^\circ)$ ed $E(4^\circ)$ corrispondenti all'ampiezza 17° , la qual variazione si ottiene togliendo il valore di E' dal numero scrittogli a destra nel medesimo rigo, è

$$0,2966851579 - 0,2966942565 = -0,0000090986,$$

e che quindi la variazione Δ' corrispondente a 41' vale in proporzione

$$\Delta' = -\frac{41'}{60} 0,0000090986 = -0,00000621736.$$

Le due correzioni Δ e Δ' riunite ne fanno una data da

$$0,00843471293 - 0,00000621736 = 0,0084284956,$$

la quale, aggiunta al valore di E' , dà il seguente valore E dell'integrale dell'espressione $(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi$ per $\varphi = 17^\circ 29'$ e per $c = 0,064242$

$$E = 0,2966942565 + 0,0084284956 = 0,3051227521.$$

L'esposto metodo per ottenere l'integrale dell'espressione $(1 - c^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi$ per dati valori di φ e di c , semplicissimo quando

l'ampiezza ed il modulo risultano affetti anche da minuti, conduce a risultati i quali non sono generalmente esatti oltre le prime cinque cifre decimali. Quest'approssimazione però è più che sufficiente in tutti i problemi di geometria pratica, per cui mi credo autorizzato a non far parola di altro metodo più esatto suggerito dallo stesso Legendre al numero 241 del tomo III della sua opera sugli esercizi di calcolo integrale.

La tavola che dà i valori dell'integrale dell'espressione $(1 - c^2 \text{sen}^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi$ per diversi valori di φ e di c è precisamente disposta come quella che serve a trovare i valori dell'integrale dell'espressione $(1 - c^2 \text{sen}^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi$, nè vi ha diversità nel modo di servirsi di questa tavola.

Riepilogando quanto si è detto sul calcolo della superficie di un semi-ellissoide a tre assi, di cui si conoscono i tre semi-assi principali a , b ed m , parmi potersi conchiudere: 1° doversi calcolare le quantità α e β mediante le equazioni (17); 2° essere necessario trovare l'angolo μ colla formola (23); 3° doversi ottenere l'angolo θ ponendo $\text{sen} \theta = c = \frac{\beta}{\alpha}$; 4° servire le tavole di Legendre al calcolo dei due integrali

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\mu} \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{sen}^2 \varphi\right)^{\frac{1}{2}} d\varphi,$$

$$\int_{\varphi=0}^{\varphi=\mu} \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \text{sen}^2 \varphi\right)^{-\frac{1}{2}} d\varphi$$

aventi per ampiezza l'angolo μ e per modulo l'angolo θ ; e finalmente doversi sostituire nella formola (24) i valori dati di a , b ed m , il valore noto di π ed i valori calcolati di α e degli accennati integrali per ottenere la domandata superficie S del semi-ellissoide.

L'esposto metodo per trovare la superficie del mezzo ellissoide o tre assi è difficile e lungo, per cui grandemente c'è da dubitare se i pratici vorranno adattarsi ad applicarlo. Per questo motivo, denotando sempre con a e b i due semi-assi principali dell'ellisse che serve di base all'ellissoide, con m il terzo semi-asse principale, e chiamando L lo sviluppo dell'indicata ellisse, nel caso in cui

$$\frac{a+b}{2} > m$$

si può empiricamente calcolare la superficie S colla formola

$$S=L\left[m+\frac{2}{5}\left(\frac{a+b}{2}-m\right)\right] \quad (25),$$

e nel caso in cui

$$\frac{a+b}{2} < m$$

si può invece adottare la formola

$$S=L\left[m-\frac{2}{7}\left(m-\frac{a+b}{2}\right)\right] \quad (26).$$

Queste formole (25) e (26) si riducono rispettivamente alle formole empiriche (6) e (14) convenienti per gli ellissoidi schiacciati ed allungati nel caso in cui $b=a$; danno risultati non molto lontani dai veri quando i tre semi-assi a , b ed m sono poco differenti tra loro; ed invece non possono condurre che a risultati di grossolana approssimazione quando i detti tre semi-assi notevolmente differiscono.

97. Regola di Guldino per ottenere le superficie di rivoluzione. — L'enunciato di questa regola è il seguente: la superficie generata dalla rotazione di un arco di curva piana intorno ad un asse fisso, contenuto nel piano e posto da una sol parte di essa, ha per misura il prodotto della lunghezza dell'arco generatore per la lunghezza dell'arco descritto dal suo centro di gravità.

Per dimostrare la verità dell'enunciata regola si consideri una curva piana qualunque AMB (fig. 405) rotante attorno all'asse YY' contenuto nel suo piano, e si chiamino

L la lunghezza dell'arco generatore AMB ,

x_1 la distanza \overline{PG} del centro di gravità di quest'arco dell'asse di rotazione YY' ,

l la lunghezza di una parte infinitesima qualunque MM' dell'arco generatore ed

x la distanza \overline{ON} del punto di mezzo di questa parte infinitesima dell'asse YY' .

Supponendo che la linea AMB si riduca ad una linea materiale di dimensioni infinitamente piccole nella sua sezione trasversale, il momento del suo peso totale rispetto al piano proiettato in YY' deve essere eguale alla somma dei momenti di tutti i pesi elementari degli archetti infinitesimi, analoghi ad MM' , rispetto allo stesso piano; cosicchè si ha l'equazione

$$Lx_1 = \Sigma lx$$

dove il simbolo Σ rappresenta una somma estesa a tutti i prodotti degli archetti infinitesimi analoghi ad MM' per le distanze dei loro centri dall'asse YY' . — Moltiplicando ora la stabilita equazione per 2π e scrivendo per primo il secondo membro, si ottiene

$$\Sigma 2\pi x.l = L.2\pi x_1.$$

Per essere $2\pi x$ la circonferenza di raggio $\overline{NO} = x$, $2\pi x.l$ la superficie convessa generata dall'arco infinitesimo MM' (superficie che si può considerare siccome quella di un tronco di cono retto di altezza pure infinitesima, giacchè il detto arco si confonde colla sua corda) e $\Sigma 2\pi x.l$ la somma delle aree elementari generate da tutti gli archi infinitesimi analoghi ad MM' , in cui s'intende scomposta l'intera curva AMB , il primo membro dell'ultima equazione esprime la superficie di rivoluzione generata dall'or indicata curva. Il secondo membro poi è il prodotto della lunghezza L dell'arco generatore per la circonferenza $2\pi x_1$, descritta dal suo centro di gravità, e quindi nell'ultima equazione trovasi contenuto l'enunciato della regola di Guldino.

Questa regola, non solo è vera quando la curva generatrice descrive un intero giro attorno all'asse YY' , ma anche quando descrive una parte di giro; e questo risulta ad evidenza da ciò che si ha sempre un'eguaglianza, quando nell'ultima equazione si dividano le lunghezze delle due circonferenze $2\pi x$ e $2\pi x_1$ per uno stesso numero.

Una superficie la quale assai facilmente può essere calcolata applicando la regola di Guldino, è quella dell'anello generato dalla rivoluzione di una mezza circonferenza, di un arco circolare, di una mezza-ellisse o di una mezza ovale rotante attorno ad un asse OY contenuto nel piano della curva generatrice e perpen-

dicolare alla direzione OAB (*fig. 106*) della sua corda. Evidentemente in questo caso il centro di gravità della curva generatrice ACB trovasi sulla saetta \overline{CD} e quindi la lunghezza dell'arco descritto dal detto centro nell'intera rivoluzione della curva ACB attorno all'asse OY non è altro che la lunghezza della circonferenza di raggio $\overline{OD} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}$. Segue da ciò che la domandata

superficie vien data dalla lunghezza dell'arco ACB , facile ad ottenersi colle norme che vennero date ai numeri 25, 24, 50, 41 e 42, moltiplicata per la lunghezza della circonferenza di raggio \overline{OD} .

Un'altra superficie, che anche facilmente si può ottenere applicando la regola di Guldino, è quella generata dalla rotazione di un quarto di ovale attorno ad un suo semi-asse. Così, supponendo che vogliasi trovare la superficie generata dal quarto di ovale AB (*fig. 107*) costituito dai quattro archi circolari AF , FE , ED e DB e rotante attorno al suo semi-asse CB , s'incomincerà col determinare i centri di gravità g' , g'' e g''' dei primi tre archi, non che le loro distanze $\overline{m'g'}$, $\overline{m''g''}$ ed $\overline{m'''g'''}$ dalla retta CB , e quindi si dirà che la superficie richiesta vien data dalla superficie della calotta sferica generata dall'arco BD , aumentata dei tre prodotti $AF \times 2\pi \cdot \overline{m'g'}$, $EF \times 2\pi \cdot \overline{m''g''}$ e $DE \times 2\pi \cdot \overline{m'''g'''}$. La determinazione di centri di gravità g' , g'' e g''' assai facilmente si fa quando si osservi che trovansi essi rispettivamente sulle bisettrici degli angoli AO_1F , FO_2E ed EO_3D , e che, per quanto risulta dallo studio della meccanica razionale, le loro distanze dai centri O_1 , O_2 ed O_3 sono altrettante quarte proporzionali dopo gli archi, le corde ed i raggi corrispondenti.

98. Metodo approssimato per la valutazione di una superficie di rivoluzione. — Allorquando devesi valutare la superficie di rivoluzione generata da una curva AB (*fig. 108*) rotante intorno ad un'asse YY' contenuto nel suo piano, e per la quale riesce impossibile, tanto l'applicazione della regola di Guldino, nel modo facile indicato nel precedente numero, quanto i procedimenti derivanti dall'applicazione del calcolo integrale alla quadratura della superficie di questo genere, si può procedere approssimativamente come segue: si segnino sulla curva AB diversi punti C , D , E , talmente vicini che gli archi fra essi intercetti ben poco differiscano dalle loro corde; e si assuma la somma delle superficie generate dalla rotazione di queste corde attorno all'asse YY' , siccome rappresentante la superficie domandata.

Queste superficie generate dalle corde sono poi facilissime ad ottenersi, giacchè sono esse le superficie convesse dei tronchi di coni retti a basi parallele le cui circonferenze medie hanno per raggi le rette $\overline{FF'}$, $\overline{GG'}$, $\overline{HH'}$, condotte dai mezzi F, G, H, delle corde perpendicolarmente all'asse di rotazione, ed i cui lati sono rispettivamente le corde stesse \overline{AC} , \overline{CD} , \overline{DE} ,

Nel caso di una curva generatrice la quale sia concava verso l'asse di rotazione, l'indicato procedimento per la valutazione approssimata di una superficie di rivoluzione conduce evidentemente a trovare un valore un po' minore del vero; e l'errore in cui necessariamente s'incorre tanto più è piccolo quanto più si prendono vicini i punti A, C, D, E,

Un altro metodo consiste: nel prendersi ancora sull'arco generatore AB i punti A, C, D, E, non molto distanti, affinché agli archi fra essi intercetti si possano sostituire le corde corrispondenti, nel tirare le corde \overline{AC} , \overline{CD} , \overline{DE} ,; nel dividerle per mezzo nei punti F, G, H,; nel cercare il centro di gravità del perimetro ACDE.....B: nel misurare la distanza di questo centro di gravità dall'asse di rotazione YY'; nel procurarsi lo sviluppo dell'arco AB assumendolo come eguale al detto perimetro, oppure applicando le regole che vennero date nel numero 24; e finalmente nel moltiplicare questo sviluppo per la circonferenza avente per raggio la distanza dell'accennato centro di gravità dall'asse di rotazione. — Per determinare la posizione del centro di gravità del perimetro che si sostituisce all'arco generatore AB, si unisca F con G e si divida la retta FG in parti inversamente proporzionali ai lati \overline{AC} e \overline{CD} ponendo

$$\overline{Fg} = \frac{\overline{CD} \times \overline{FG}}{\overline{AC} + \overline{CD}},$$

e si ottiene così il punto g centro di gravità della parte di perimetro ACD. Fatto questo, si unisca g con H, e si divida \overline{gH} in parti inversamente proporzionali alle lunghezze $\overline{AC} + \overline{CD}$ e \overline{DE} ponendo

$$\overline{gg'} = \frac{\overline{DE} \times \overline{gH}}{\overline{AC} + \overline{CD} + \overline{DE}},$$

e, così facendo, si determina il centro di gravità g' della parte

di perimetro ACDE. Unendo g' col mezzo del lato successivo al lato \overline{DE} che venne considerato per l'ultimo, si trova il centro di gravità della parte di perimetro costituita da quattro lati; e, continuando collo stesso metodo ad unire il centro di gravità ultimo trovato col mezzo del lato che immediatamente segue la parte di perimetro a cui il detto centro si riferisce, facilmente si arriva a trovare il centro di gravità dell'intero perimetro che si sostituisce alla curva AB.

99. **Superficie dell'elicoide a piano direttore.** — Sia ABCD (fig. 109) la proiezione verticale di un'elica delineata su un cilindro retto di raggio $\overline{OA} = \overline{O_1A_1} = R$ e di passo p ; il centro della sezione retta del cilindro passante pel punto O si assuma come origine delle coordinate; l'asse delle x prendasi nella direzione del raggio che unisce il detto centro coll'origine A dell'elica, l'asse delle y normale a quello delle x , e quello delle ordinate z diretto secondo l'asse Oz del cilindro. Considerando sull'elica un punto qualunque di proiezione verticale M e di proiezione orizzontale M' e chiamando z l'ordinata \overline{PM} , la lunghezza dell'arco circolare A_1M_1 rappresentante la proiezione orizzontale dell'arco d'elica AM vien espressa da

$$\frac{2\pi R}{p} z,$$

e quindi da

$$\frac{2\pi}{p} z$$

la lunghezza dell'arco circolare di raggio eguale all'unità chiudente l'angolo $A_1O_1M_1$. Ora, denotando con x e con y le due coordinate $\overline{O_1Q_1} = \overline{OP}$ e $\overline{Q_1M_1}$ del punto M e considerando il triangolo rettangolo $O_1Q_1M_1$, ricavasi

$$x = R \cos \frac{2\pi}{p} z$$

$$y = R \sin \frac{2\pi}{p} z,$$

le quali equazioni divise tra loro conducono a

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \frac{2\pi}{p} z,$$

d'onde

$$z = \frac{p}{2\pi} \operatorname{arc} \left(\operatorname{tang} \frac{y}{x} \right) \quad (1).$$

La penultima equazione, e quindi anche l'ultima che da essa deriva, per ogni valore costante di z esprime una retta la quale incontra l'asse delle z , ed appartiene perciò alla superficie generata da una retta che, restando parallela al piano delle xy , si muove in modo da incontrare sempre l'elica ABCD ed il di lei asse Oz , la qual superficie è appunto quella dell'elicoide a piano direttore.

Ciò premesso, essendo

$$dx dy \sqrt{1 + \frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2}}$$

il differenziale dell'area di una superficie curva, e nel caso dell'elicoide a piano direttore avente per equazione la (1) risultando

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{p}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{p}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2},$$

si ottiene che il differenziale dS dell'area di questa superficie sghemba vien dato da

$$dS = dx dy \sqrt{1 + \frac{p^2}{4\pi^2(x^2 + y^2)}}.$$

Ora, volendosi integrare quest'espressione di dS , conviene introdurre l'angolo $M_1 O_1 x = \theta$ in luogo della variabile y cui è legato coll'equazione

$$y = x \operatorname{tang} \theta.$$

Ma, quando si voglia integrare l'espressione di dS per rapporto ad y , bisogna supporre la x costante, per cui nella sostituzione

di $x \operatorname{tang} \theta$ ad y , ciò che si deve surrogare a dy si ottiene differenziando $x \operatorname{tang} \theta$ rispetto alla sola θ , cosicchè si ha

$$dy = \frac{x d\theta}{\cos^2 \theta}.$$

Ora, siccome per la sostituzione di $x \operatorname{tang} \theta$ ad y risulta

$$\sqrt{1 + \frac{p^2}{4\pi^2(x^2 + y^2)}} = \sqrt{1 + \frac{p^2}{4\pi^2 x^2 \sec^2 \theta}} = \frac{1}{x} \sqrt{x^2 + \frac{p^2 \cos^2 \theta}{4\pi^2}},$$

si ottiene il seguente valore di S in x e θ

$$S = \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \int dx \sqrt{x^2 + \frac{p^2 \cos^2 \theta}{4\pi^2}}.$$

Supponendo che vogliasi la parte di superficie elicoidale racchiusa nel senso dell'elica fra la superficie cilindrica di raggio $\overline{O_1 A_1} = \overline{OA} = R$ ed un'altra di raggio minore $\overline{O_1 E_1} = \overline{OE} = r$, e nel senso della generatrice tra la posizione OA sita nel piano xOy ed una posizione particolare distante da questo piano della quantità $\overline{OR} = a$, i limiti dell'integrazione per rapporto ad x sono

$$O_1 T_1 = r \cos \theta, \quad O_1 Q_1 = R \cos \theta,$$

e quelli rispetto all'angolo θ risultano 0 e l'arco di raggio eguale all'unità chiedente l'angolo corrispondente all'altezza a , cosicchè questi limiti saranno 0 e $2\pi \frac{a}{p}$. Integrando per rapporto ad x , introducendo mediante le equazioni

$$p = 2\pi R \operatorname{tang} \Gamma = 2\pi r \operatorname{tang} \gamma. \quad (2)$$

le inclinazioni Γ e γ delle due eliche $ABCD$ ed $EBFG$ al piano delle xy , osservando che

$$\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \Gamma} = \sec \Gamma, \quad \sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \gamma} = \sec \gamma,$$

e che il logaritmo della differenza di due quantità vale il logaritmo del loro quoziente, si trova

$$\int_{r \cos \theta}^{R \cos \theta} dx \sqrt{x^2 + \frac{p^2 \cos^2 \theta}{4\pi^2}}$$

$$= \left[R^2 \sec \Gamma - r^2 \sec \gamma + R^2 \operatorname{tang}^2 \Gamma \cdot l \frac{R(1 + \sec \Gamma)}{r(1 + \sec \gamma)} \right] \frac{\cos^2 \theta}{2};$$

per cui il valore di S vien dato da

$$S = \pi \frac{a}{p} \left[R^2 \sec \Gamma - r^2 \sec \gamma + R^2 \operatorname{tang}^2 \Gamma \cdot l \frac{R(1 + \sec \Gamma)}{r(1 + \sec \gamma)} \right].$$

Se ora si eliminano i due raggi R ed r, ponendo come risulta dalle (2)

$$R = \frac{p}{2\pi \operatorname{tang} \Gamma}$$

$$r = \frac{p}{2\pi \operatorname{tang} \gamma},$$

e se osservasi che

$$\frac{\sec \Gamma}{\operatorname{tang}^2 \Gamma} = \frac{\cot \Gamma}{\operatorname{sen} \Gamma}$$

$$\frac{\sec \gamma}{\operatorname{tang}^2 \gamma} = \frac{\cot \gamma}{\operatorname{sen} \gamma},$$

$$\frac{1 + \sec \Gamma}{\operatorname{tang} \Gamma} = \frac{1 + \cos \Gamma}{\operatorname{sen} \Gamma} = \cot \frac{\Gamma}{2}$$

$$\frac{1 + \sec \gamma}{\operatorname{tang} \gamma} = \frac{1 + \cos \gamma}{\operatorname{sen} \gamma} = \cot \frac{\gamma}{2},$$

il valore di S si riduce a

$$S = \frac{ap}{4\pi} \left(\frac{\cot \Gamma}{\operatorname{sen} \Gamma} - \frac{\cot \gamma}{\operatorname{sen} \gamma} + l \cdot \cot \frac{\Gamma}{2} - l \cdot \cot \frac{\gamma}{2} \right).$$

Finalmente, sostituendo ai logaritmi neperiani i logaritmi corrispondenti nella base 10, risulta

$$S = \frac{ap}{4\pi} \left(\frac{\cot \Gamma}{\sin \Gamma} - \frac{\cot \gamma}{\sin \gamma} + \frac{1}{K} \log. \cot \frac{\Gamma}{2} - \frac{1}{K} \log. \cot \frac{\gamma}{2} \right) \quad (3),$$

dove K (num. 89) ha il noto valore 0,45429448

100. Metodi approssimati per la valutazione delle superficie qualunque. — Questi metodi servono per la determinazione delle superficie curve qualunque di cui non si conosce la generazione geometrica, ed anche per la determinazione delle superficie curve di cui si conosce la generazione geometrica, ma per le quali non riescono applicabili i metodi esposti nei precedenti numeri per impossibilità od anche solamente per difficoltà nell'effettuare le integrazioni. Un primo metodo consiste nello scomporre nel miglior modo possibile la superficie curva da valutarsi in varie porzioni tali, che ciascuna di esse si possa sensibilmente considerare come piana, nel valutare le superficie di tutte queste porzioni colle norme che vennero date nel precedente capitolo, e nel prendere la loro somma. Un secondo metodo si riduce a scomporre la proposta superficie in tante porzioni le quali almeno approssimativamente si possano considerare come sviluppabili, nel misurare le aree delle diverse porzioni sviluppate e nell'assumere quindi la somma di tutte queste aree siccome rappresentante la superficie domandata.

Alcune superficie curve, la cui valutazione riesce difficile e che pure avviene di dover considerare nella pratica, si valutano anche mediante formole empiriche, e già vennero date alcune di queste formole nel numero 96 parlando delle superficie degli ellissoidi.

101. Superficie delle vólte a botte. — Le superficie d'intrados (*a*) delle vólte a botte coprenti aree rettangolari e parallelogrammiche, sono superficie cilindriche aventi le loro generatrici lunghe come le linee d'imposta. Segue da ciò che si ottengono le superficie d'intrados di queste vólte, moltiplicando gli sviluppi delle loro sezioni rette, ossia delle sezioni normali alle generatrici, per la lunghezza della linea d'imposta. Chiamando adunque

(*a*) Per ben far comprendere la generazione geometrica della superficie d'intrados delle vólte, vale quanto già si è detto in quest'opera sull'arte di fabbricare, al capitolo VII del volume intitolato *Lavori generali d'architettura civile, stradale ed idraulica, e analisi dei loro prezzi.*

Lo sviluppo della sezione retta di una volta a botte,
 a la lunghezza della volta, ossia la lunghezza della generatrice
 d'imposta, ossia ancora la lunghezza di una generatrice qualunque,
 Σ_b la superficie domandata,
 si ha la semplicissima formula

$$\Sigma_b = La.$$

Allorquando la volta a botte è retta, ossia allorquando copre un rettangolo posto in un piano orizzontale ed ha le sue generatrici pure orizzontali, la sezione retta è identica ad uno dei due archi di testa.

Se invece la volta a botte è obliqua, ossia se ha le sue generatrici orizzontali e se copre un parallelogramma ABCD (fig. 110) collocato in un piano orizzontale, la sezione retta è una curva identica alla curva DIE, la quale risulta immaginando tagliata la superficie d'intrados della volta mediante un piano verticale perpendicolare alla linea d'imposta AD e passante pel punto D. Essendo poi

$2c$ la corda \overline{DC} dell'arco di testa DKC,

m la sua monta \overline{HK} ,

α l'angolo EDC il quale misura l'obliquità della volta, evidentemente si ha: che la monta \overline{GI} della sezione retta è eguale alla monta $\overline{HK} = m$ dell'arco di testa; e che la corda \overline{DE} della stessa sezione retta vien data da

$$\overline{DE} = 2c \cos \alpha.$$

La lunghezza della corda della sezione retta si può anche ottenere colla misura diretta, fissando un filo in un punto qualunque L della linea d'imposta AD e distendendo questo filo finchè, arrivando all'altra linea d'imposta BC, descrive un arco ad essa tangente col punto M in cui la tocca. La parte di filo disteso, interdetta fra i punti L ed M, misura evidentemente la corda della sezione retta.

Finalmente quando si ha una volta a botte rampante, ossia una volta a botte coi piani di testa verticali e colle sue generatrici inclinate all'orizzonte, la sezione retta è una curva identica alla curva IGK (fig. 111) che risulta immaginando tagliata la superficie d'intrados della volta con un piano passante pel punto G e perpendicolare alle generatrici. Segue da ciò che, dicendo

$2c$ la corda \overline{AB} dell'arco di testa,

m la sua monta \overline{GE} ,

β l'angolo GEL misurante l'inclinazione delle generatrici colla verticale,

risulta essere eguale alla corda \overline{AB} dell'arco di testa la corda \overline{IK} della sezione retta, e potersi ottenere la sua monta \overline{GL} dal triangolo rettangolo ELG ponendo

$$\overline{GL} = m \operatorname{sen} \beta.$$

La lunghezza della monta \overline{GL} della sezione retta si può anche ottenere direttamente prendendo sulle linee d'imposta due punti I' e K' rispettivamente equidistanti da A e da B , distendendo fra questi due punti un filo, fissando il suo punto di mezzo L' , ponendo una squadra con un suo cateto lungo la generatrice suprema GH e facendola avanzare finchè l'altro cateto passa pel punto L' . La parte di quest'ultimo cateto, intercetta fra la generatrice suprema della vòlta ed il punto L' , misura evidentemente la monta della sezione retta.

Quando si conoscono la corda e la monta della sezione retta di una vòlta a botte, riesce facile il procurarsi o esattamente o per approssimazione il suo sviluppo L , seguendo le norme che vengano date nei numeri 21, 23, 24, 50, 52, 56, 57, 41 e 42.

Sovente avviene di dover considerare delle vòlte coprenti aree trapezie, e la loro superficie si ottiene moltiplicando lo sviluppo della sezione retta per la semi-somma delle lunghezze delle due linee d'imposta. Infatti essendo $ABCD$ (*fig. 112*) il trapezio coperto dalla vòlta, se immaginasi il rettangolo $HKIG$ equivalente al detto trapezio ed i cui lati \overline{GH} ed \overline{IK} passano rispettivamente per i punti di mezzo E ed F dei lati non paralleli \overline{AD} e \overline{BC} , i due triangoli DGE e CIF sono rispettivamente eguali ai triangoli AHE e BKF , e quindi invece dei fusi cilindrici coprenti gli ultimi due triangoli si possono sostituire quelli insistenti agli altri due. Segue da ciò che alla superficie d'intrados della vòlta a botte, coprente il trapezio $ABCD$ si può sostituire quella della vòlta a botte, di egual sezione retta, coprente il rettangolo $HKIG$, la qual ultima si ottiene moltiplicando lo sviluppo della sezione retta per la lunghezza della retta \overline{GI} eguale alla retta \overline{EF} , ossia ancora eguale alla semi-somma delle due basi parallele \overline{AB} e \overline{DC} costituenti appunto le due linee d'imposta della vòlta coprente il trapezio $ABCD$.

102. **Superficie delle vólte a collo d'oca.** — La superficie d'intrados di una di queste vólte, le quali generalmente coprono delle aree rettangolari, non è altro che quella di una superficie cilindrica avente per sezione retta la curva ABC (*fig. 115*) posta nel piano di testa ed avente le sue generatrici costantemente eguali alle linee d'imposta $\overline{AA'}$ e $\overline{CC'}$. Segue da ciò che, dicendo

L lo sviluppo dell'arco di testa ABC contenuto in un piano normale alle generatrici ed

a la lunghezza della linea d'imposta, si ottiene la superficie Σ_r dell'intrados della vólta mediante la semplicissima formola

$$\Sigma_r = La.$$

La curva ABC o è una curva policentrica, oppure una curva progettata col tracciarla a mano libera in modo da soddisfare a date condizioni. Nel primo caso si può calcolare rigorosamente il suo sviluppo colle norme che vennero date parlando dello sviluppo delle curve policentriche; nel secondo si ottiene esso approssimativamente coi metodi già su tale proposito esposti al numero 24.

103. **Superficie delle vólte anulari.** — Le vólte anulari sono quelle che frequentemente si impiegano per coprire delle superficie poste in piani orizzontali aventi la forma di corone circolari, e la regola di Guldino (num. 97) si presta a meraviglia per calcolare la superficie d'intrados di queste vólte, sia che coprano esse delle intiere corone, sia che ne coprano soltanto delle parti.

Avendosi la corona circolare chiusa dalle due circonferenze concentriche di raggi \overline{CA} e \overline{CB} (*fig. 114*), contornata da un muro che si eleva verticalmente attorno alla circonferenza maggiore ed avente nel suo mezzo il maschio cilindrico di raggio \overline{CB} , la vólta anulare che la copre è generata o da una mezza circonferenza di circolo, o da un arco di circolo, o da una mezza ovale o da una mezza ellisse, di corda eguale alla larghezza \overline{AB} della corona, e rotante attorno alla verticale determinata dal centro C in modo da passare sempre il suo piano per la verticale medesima, colla corda orizzontale e cogli estremi sul piano d'imposta. Il centro di gravità della curva generatrice descrive evidentemente la circonferenza avente per raggio il raggio medio \overline{CD} fra \overline{CA} e \overline{CB} , per cui, dicendo

R il raggio maggiore \overline{CA} della corona,

r il raggio minore \overline{CB} ,

L la lunghezza della curva generatrice e

Σ_a la superficie domandata,

risulta

$$CB = \frac{R+r}{2}$$

e quindi

$$\Sigma_a = \pi(R+r)L.$$

Se la vólta anulare, invece di coprire un'intera corona circolare, copre soltanto una parte $A E F G H B$ cui corrisponde l'angolo $\angle ACF = \alpha^\circ$, la lunghezza dell'arco DLI descritto dal centro di gravità della curva generatrice vien espressa da

$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \pi(R+r),$$

per cui si ottiene la superficie Σ_a della vólta mediante la semplicissima formola.

$$\Sigma_a = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \pi(R+r)L.$$

Evidentemente la regola di Guldino serve anche a trovare la superficie di una vólta anulare coprente una corona o soltanto una porzione di corona non circolare, purchè abbia essa larghezza costante in modo da non cangiar di forma l'arco generatore.

104. Superficie delle vólte elicoidali. — Le vólte elicoidali sono quelle che s'impiegano per la costruzione delle scale a chio-ciola, ed ammettono esse per superficie d'intrados quella dell'elicoide a piano direttore (num. 99 e fig. 109). Per calcolare la superficie d'intrados di una di queste vólte, conoscendosi i raggi R ed r del cilindro maggiore e del cilindro minore, il passo p delle eliche descritte sui detti cilindri e limitanti la domandata superficie e l'altezza a della generatrice più elevata dell'elicoide sulla generatrice più bassa, s'incomincia dal trovare le inclinazioni Γ e γ delle accennate due eliche mediante le formole

$$\text{tang } \Gamma = \frac{p}{2\pi R}$$

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{p}{2\pi r},$$

facili a dedursi dalle equazioni (2) del citato numero 99, e quindi si passa alla deduzione della richiesta superficie Σ_0 applicando la formola (5) dello stesso numero e ponendo

$$\Sigma_0 = \frac{ap}{4\pi} \left(\frac{\cot \Gamma}{\operatorname{sen} \Gamma} - \frac{\cot \gamma}{\operatorname{sen} \gamma} + \frac{1}{K} \log \cot \frac{\Gamma}{2} - \frac{1}{K} \log \cot \frac{\gamma}{2} \right).$$

La superficie d'intrados delle vòlte elicoidali si può anche ottenere per approssimazione, supponendo che ad essa sia applicabile la regola di Guldino, e dicendo che vien data dalla lunghezza della retta generatrice di detta superficie per la lunghezza dell'arco d'elica descritto dal suo centro di gravità. Ora è facile il vedere: che l'arco d'elica descritto dall'accennato centro ha lo stesso passo delle eliche limitanti l'elicoide e poste sui cilindri di raggio R ed r ; che trovasi esso su un cilindro di raggio $\frac{R+r}{2}$, e che ha le sue estremità sui piani delle sezioni rette medesime sulle quali esistono le generatrici estreme dell'elicoide. Essendo adunque a la differenza d'altezza fra la generatrice più elevata e la generatrice più bassa della superficie costituente l'intrados della vòlta elicoidale e p il passo, risulta: che la lunghezza della retta generatrice vien espressa da

$$R - r;$$

che la proiezione sul piano di una sezione retta dell'arco d'elica descritto dal centro di gravità di questa retta vien data da

$$\frac{a}{p} \pi (R + r);$$

che la lunghezza o sviluppo dello stesso arco d'elica (num. 44) ammette per valore

$$\frac{a}{p} \sqrt{p^2 + \pi^2 (R + r)^2};$$

e finalmente che la superficie approssimata Σ_e della vólta elicoidale si può calcolare colla formola

$$\Sigma_e = \frac{a(R-r)}{p} \sqrt{p^2 + \pi^2(R+r)^2}.$$

Questa formola dà una superficie un po' diversa dalla vera, e nelle ordinarie circostanze della pratica basta moltiplicare il risultato a cui essa conduce per il coefficiente 1,05 per ottenere un risultamento che ben di poco scostasi da quello che ottiensi colla formola esatta.

105. Superficie delle vólte anulari ed elicoidali. — La superficie d'intrados di queste vólte, le quali s'impiegano pure per le scale a chiocciola, è generata da una curva direttrice che suol essere una mezza circonferenza di circolo, oppure un arco di circolo, e una mezza ovale o una mezza ellisse, rotante in modo da mantenersi sempre nel piano verticale passante per l'asse comune delle due superficie cilindriche fra cui cade la chiocciola, e coi suoi estremi conservantisi allo stesso livello su due eliche di equal passo, descritte sulle accennate superficie cilindriche. Segue da ciò che vi ha una certa analogia fra le superficie d'intrados delle vólte elicoidali e delle vólte anulari elicoidali: per quelle si può dire che la superficie d'intrados è generata da una retta che scorre su due eliche di equal passo coi suoi estremi allo stesso livello; per queste invece la superficie d'intrados è generata da un arco che scorre nello stesso modo su due eliche pure di equal passo. Ora, se riesce applicabile la regola di Guldino per ottenere approssimativamente la superficie di una vólta elicoidale, la stessa regola deve pure dare un risultato di sufficiente approssimazione per la pratica, quando si applichi alle vólte anulari elicoidali, e quindi sembra potersi stabilire: che la superficie d'intrados di una vólta anulare elicoidale approssimativamente si ottiene moltiplicando la lunghezza o sviluppo della curva generatrice per la lunghezza o sviluppo dell'arco di elica descritto dal suo centro di gravità. Segue da ciò che, chiamando

R il raggio del cilindro maggiore fra cui cade la vólta,

r il raggio del cilindro minore,

a la differenza di livello fra il punto più alto ed il punto più basso dell'arco di elica percorso da uno dei due estremi della curva generatrice

p il passo delle eliche direttrici,

L la lunghezza o sviluppo dell'arco generatore e
 Σ_{ac} la superficie domandata,
 si deve avere, analogamente a quanto si è trovato nel precedente numero,

$$\Sigma_{ac} = \frac{aL}{p} \sqrt{p^2 + \pi^2 (R+r)^2}.$$

La lunghezza L dell'arco generatore si ottiene colle regole che già su tale argomento vennero date in questo volume.

106. Superficie delle vólte coniche. — Le vólte coniche che più di frequente avviene di dover considerare nella pratica coprono trapezii isosceli, e la loro superficie d'intrados è una porzione di superficie convessa di tronco di cono retto a basi parallele quando i due archi di testa AED e BFC (*fig. 115*) sono due archi circolari simili. In questo caso, dicendo

2c ed m la corda \overline{AD} e la monta \overline{GE} dell'arco insistente alla base maggiore del trapezio,

2c' la corda \overline{BC} dell'arco insistente alla base minore, si ha che la monta \overline{NF} di quest'ultima vien data da

$$\overline{NF} = \frac{c'}{c} m;$$

e, immaginando la sezione KLI prodotta nella superficie d'intrados della vólta da un piano egualmente distante dai due piani determinati dagli archi di testa, si ha che la corda e la monta di quest'arco sono rispettivamente

$$\overline{KI} = \frac{2c + 2c'}{2} = c + c',$$

$$\overline{ML} = \frac{m + \overline{HF}}{2} = m \frac{c + c'}{2c}.$$

Ora, conoscendosi corda e monta dell'arco medio KLI, riesce facile il trovare la sua lunghezza (num. 24) e, moltiplicando questa lunghezza per quella della generatrice AB, evidentemente risulta la superficie d'intrados della vólta conica considerata. In generale adunque, chiamando

L lo sviluppo dell'arco medio di una vólta conica coprente un

trapezio isoscele ed avente due archi circolari simili per archi di testa,

a la lunghezza della generatrice della superficie d'intrados,

Σ_c il valore di questa superficie
si ha

$$\Sigma_c = aL.$$

Allorquando, essendo sempre un trapezio isoscele l'area coperta dalla vólta, i due archi di testa AED e BFC non sono due archi circolari simili, ma sibbene due semi-ellissi o due semi-ovali simili, le generatrici della superficie d'intrados della vólta non hanno più lunghezza costante, e nelle quistioni pratiche conviene, o valutare questa superficie facendone lo sviluppo colle norme che vennero date al numero 92, oppure attenersi al metodo empirico adottato da molti pratici e che consiste nel trovare corda e monta dell'arco medio ILK, nel calcolare la sua lunghezza e nel moltiplicarla per la media aritmetica delle lunghezze delle tre generatrici \overline{AB} , \overline{DC} ed \overline{EF} , assunte le due prime all'imposta e l'altra alla sommità della superficie d'intrados della vólta. Invece di considerare tre sole generatrici per prenderne la media aritmetica, se ne possono considerare cinque, sette, nove ed in generale un numero impari qualunque, non dimenticando però quella più alta e le due d'imposta, e prendendo le altre simmetricamente poste rispetto alla prima.

Se la vólta conica di cui vuolsi trovare la superficie copre, non un trapezio isoscele, ma sibbene un quadrilatero ABCD (*fig.* 116) appartenente ad un triangolo VAD isoscele sulla base AD, nel caso in cui l'arco di testa AED è una mezza circonferenza di circolo, riesce facile il calcolare la superficie applicando quanto si è detto al numero 92 sul modo di trovare la superficie convessa di un tronco di cono retto a basi non parallele. La figura BFC è una mezza ellisse che si proietta sul piano DEA pure in una mezza ellisse B'F'C', e la superficie richiesta si ottiene togliendo dall'area del semi-circolo AED quella della mezza ellisse B'F'C', e dividendo la differenza per il coseno dell'angolo DAB = ADC, misurante l'inclinazione delle generatrici della superficie conica al piano di testa ADE.

Quando una vólta conica insiste ad un quadrilatero che fa parte da un triangolo isoscele senza avere una mezza circonferenza per arco di testa corrispondente alla base di questo triangolo, e quando

copre un quadrilatero qualunque, il metodo che conviene seguire in pratica per trovare la sua superficie consiste nel farne lo sviluppo procedendo colle norme che vennero date nel citato numero 92.

107. **Superficie delle vólte conoidiche.** — Le vólte conoidiche, al pari delle coniche, s'impiegano sovente per coprire trapezii isosceli posti in piani orizzontali, e la loro superficie d'intrados è generata da una linea retta conservantesi costantemente orizzontale e moventesi in modo da passare sempre per un arco AED (fig. 117) e per una retta VU determinata dall'intersezione dei due piani verticali passanti per le due linee d'imposta AB e DC. Questa superficie d'intrados è sghemba, e per ottenerla in modo rigoroso bisognerebbe scrivere la sua equazione rispetto a tre assi coordinati, procurarsi il differenziale dell'area e quindi integrare fra limiti convenienti con un processo analogo a quello tenuto nel numero 99 per l'elicoide a piano direttore. Nella pratica però questo metodo di valutazione esatta della superficie conoidica vien generalmente riputato troppo difficile, ed ordinariamente si ricorre a metodi d'approssimazione.

Uno di questi metodi consiste nell'immaginare l'arco IMK rappresentante l'intersezione della superficie d'intrados della vólta col piano verticale egualmente distante dai due piani di testa AED e BFC, nel procacciarsi la lunghezza di quest'arco e nel moltiplicarla per la media aritmetica delle lunghezze delle tre generatrici \overline{AB} , \overline{DC} ed \overline{EF} corrispondenti, le due prime all'imposta della vólta e la terza alla sua sommità. Invece di considerare tre sole generatrici nel prendere la media aritmetica, se ne possono considerare cinque, sette, nove ed in generale un numero impari qualunque. Le due generatrici d'imposta però e quella posta alla sommità della superficie d'intrados non si devono mai dimenticare, e si devono prendere le altre in modo da trovarsi esse simmetricamente disposte rispetto al piano verticale GVNE, dividente per mezzo la vólta nel senso longitudinale.

Per ottenere la lunghezza dell'arco medio IMK importa di prima saperselo descrivere, ed ecco come può essere condotta quest'operazione: assunto per piano orizzontale di proiezione il piano d'imposta, si disegni il trapezio ABCD (fig. 118) coperto dalla vólta; prendasi la linea di terra nella direzione D'A' perpendicolare alla retta VG costituente l'altezza del triangolo isoscele cui il detto trapezio appartiene; ed in proiezione verticale si disegni l'arco direttore D'E'A' orizzontalmente proiettato in DA, non che

la direttrice $V'U'$ orizzontalmente proiettata nel punto V . Immaginando un piano verticale qualunque, parallelo al piano di testa la cui traccia orizzontale è DA , la traccia orizzontale di quel piano riesce una retta KI parallela a DA , e la sua intersezione colla superficie d'intrados della vólta risulta un arco di corda \overline{KI} e di monta $\overline{V'E'}$. Abbassando dai punti K ed I due perpendicolari alla linea di terra si ottengono in K' ed I' le due estremità del detto arco il cui punto più elevato trovasi in E' . Per ottenere poi un punto qualunque dell'arco medesimo s'immagini una generatrice qualunque della superficie d'intrados della vólta, per esempio quella orizzontalmente proiettata in VO . Questa generatrice incontra l'arco di testa nel punto di proiezione orizzontale O , e la proiezione verticale dello stesso punto risulta conducendo per O una perpendicolare alla linea di terra fino ad incontrare in O' l'arco $D'E'A'$: la proiezione verticale dell'accennata generatrice si ha nella parallela alla linea di terra $O'v'$; e finalmente ottiensi il punto o' della curva domandata conducendo per o una perpendicolare alla linea di terra fino ad incontrare la proiezione verticale dell'indicata generatrice. Il metodo tenuto per determinare il punto o' dell'intersezione della superficie d'intrados della vólta col piano KI , serve a trovare quanti altri punti si vogliono e quindi alla completa descrizione della stessa intersezione.

Volendosi maggior esattezza nella valutazione della superficie di una vólta conoidica coprente un trapezio isoscele, sembra potersi procedere nel seguente modo: divisa l'altezza \overline{PQ} (fig. 449) del trapezio in parti eguali piuttosto piccole, s'immaginino per punti di divisione le rette A_1D_1 , A_2D_2 , A_3D_3 , parallele alle basi; si facciano separatamente e col metodo già esposto le superficie delle vólte conoidiche coprenti i trapezii AA_1D_1D , $A_1A_2D_2D_1$, $A_2A_3D_3D_2$,; e finalmente prendasi per superficie della vólta proposta la somma delle superficie parziali così ottenute.

108. Superficie di una vólta con strombature. — Una vólta con strombature, che sovente impiegasi per coprire trapezii isosceli disposti in piani orizzontali, è quella la cui superficie d'intrados, limitata dalla mezza circonferenza $D'E'C'$ (fig. 120) insistente alla base minore del trapezio, dall'arco circolare $A'F'B'$ insistente alla base maggiore e dai due archi eguali $A'D'$ e $B'C'$ proiettati orizzontalmente nei lati non paralleli del trapezio, è costituita da una superficie sghemba generata da una retta costantemente passante per la linea discontinua $D'A'F'B'C'$, per la mezza

circonferenza $D'E'C'$ e per la retta Oo uniente i due punti di mezzo delle basi del trapezio d'imposta, ossia del trapezio coperto dalla vòlta al livello dei due punti D' e C' . La determinazione esatta della superficie d'intrados di questa vòlta è problema serio del quale, per quanto a me consta, non venne ancora data la risoluzione, ed è sufficiente per la pratica il metodo d'approssimazione che immediatamente passo ad esporre.

Rappresentata la superficie d'intrados della vòlta mediante la sua proiezione orizzontale fatta sul piano d'imposta nel trapezio $ABCD$, e mediante la sua proiezione $D'A'F'B'C'E'$ sopra un piano verticale parallelo alle basi del detto trapezio, s'immagini essa tagliata mediante tanti piani verticali non molto lontani fra di loro, paralleli al piano verticale di proiezione e quindi determinati unicamente dalle loro tracce orizzontali $a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, \dots$. Le intersezioni di questi piani colla superficie d'intrados della vòlta sono facili a determinarsi, e considerandone una, per esempio quella corrispondente al piano $a_2 b_2$, ecco come si procede per la sua costruzione. Pei due punti a_2 e b_2 si conducono due perpendicolari alla linea di terra fino ad incontrare gli archi $A'D'$ e $B'C'$ in a_2' e b_2' , e si ottengono così i due estremi dell'intersezione domandata. L'intersezione della superficie d'intrados della vòlta col piano di profilo OU è la retta $E''F''$ determinata col prendere sulla linea di terra $\overline{I''K''} = \overline{IK}$ e col portare perpendicolarmente ad essa le lunghezze $\overline{I''E''}$ e $\overline{K''F''}$ rispettivamente eguali ad $\overline{O'E'}$ ed $\overline{O'F'}$; cosicchè, prendendo $\overline{I''d''} = \overline{Ic_2}$, conducendo $\overline{d''c_2''}$ perpendicolarmente ad $A''K''$ e prendendo $\overline{O'c_2''} = \overline{d''c_2''}$, risulta in c_2' il punto più alto dell'intersezione che si sta cercando. Segnando in proiezione verticale le due generatrici $O'A'$ ed $O'B'$, trovando le proiezioni orizzontali G ed H dei punti in cui queste generatrici incontrano la mezza circonferenza $D'E'C'$, e finalmente tirando le due rette GA e BH , che prolungate devono incontrarsi in uno stesso punto V della retta OV , si determinano i due punti m_2 ed n_2 le cui proiezioni verticali m_2' ed n_2' danno due punti appartenenti pure all'intersezione domandata. Per trovare un punto qualunque di questa curva basta condurre una generatrice $O'P'$ sulla proiezione verticale; trovare le proiezioni orizzontali Q e P dei punti Q' e P' in cui la detta retta incontra gli archi $D'E'C'$ ed $A'F'B'$; segnare la proiezione orizzontale QP di questa generatrice; e finalmente condurre dal punto n_2 , in cui questa retta incontra la traccia $a_2 b_2$, la perpendicolare

alla linea di terra fino ad incontrare in r_2' la retta $O'P'$, per ottenere nel punto r_2' un punto della curva richiesta. Il procedimento tenuto per trovare il punto r_2' torna in acconcio per trovare quanti altri punti si vogliono. Come si è descritta la curva $a_2'c_2'b_2'$ si possono descrivere le altre curve $a_1'c_1'b_1'$, $a_3'c_3'b_3'$,, rappresentanti le intersezioni della superficie d'intrados della volta coi piani verticali determinati dalle loro tracce orizzontali a_1b_1 , a_3b_3 ,, parallele alle basi del trapezio d'imposta. Così facendo si scompone la detta superficie d'intrados in tante zone limitate da curve poste in piani paralleli, delle quali si possono approssimativamente avere le lunghezze; la superficie di ciascuna di queste zone non può essere molto diversa da quella che risulta dal prodotto della semi-somma delle lunghezze dei due archi fra cui la zona cade per la lunghezza effettiva della parte di generatrice suprema $E'F'$ che fra essi si trova; e nella somma di tutti questi prodotti risulta approssimativamente il valore della superficie d'intrados della volta proposta. Le parti poi di generatrice suprema $E'F'$ corrispondenti alle diverse zone sono; $F'''c_1'''$ per la zona $A'F'B'b_1'c_1'a_1'$; $c_1'''c_2'''$ per la zona $a_1'c_1'b_1'b_2'c_2'a_2'$; $c_2'''c_3'''$ per la zona $a_2'c_2'b_2'b_3'c_3'a_3'$,

109. Superficie delle vòlte a bacino su pianta circolare. — La superficie d'intrados di queste vòlte è quasi sempre una superficie di rivoluzione generata da un quarto di circonferenza di circolo, o da un arco circolare; o da un quarto di ovale o da un quarto di ellisse. L'asse di rivoluzione è determinato dalla retta condotta pel centro del circolo coperto dalla vòlta perpendicolarmente al suo piano: la curva generatrice ha un suo estremo sull'asse colla tangente in quest'estremo perpendicolare all'asse medesimo, ed ha l'altro estremo distante dall'asse di una quantità eguale al raggio del detto circolo coperto dalla vòlta.

Allorquando una vòlta a bacino è a tutta monta (fig. 121), ossia allorquando la proiezione \overline{CD} della curva generatrice dell'intrados sull'asse è eguale al raggio \overline{CA} del circolo che serve di base alla vòlta, la curva generatrice AD è generalmente un quarto di circonferenza di circolo, e la superficie d'intrados una mezza sfera. Segue da ciò che dicendo r il raggio \overline{AC} del circolo coperto dalla vòlta, la superficie Σ_β del suo intrados vien data in questo caso da

$$\Sigma_\beta = 2\pi r^2.$$

Se una vòlta a bacino è a monta depressa, ossia se la proiezione

\overline{CD} (*fig. 122*) della curva generatrice dell'intrados sull'asse risulta minore del raggio \overline{CA} del circolo coperto dalla vòlta, e se la detta curva generatrice è un arco circolare, la superficie d'intrados Σ_{β} , è quella di una calotta sferica, e si ottiene essa mediante la semplicissima formola (num. 94)

$$\Sigma_{\beta} = \pi(c^2 + m^2),$$

dove c ed m rappresentano rispettivamente la corda \overline{CA} e la monta \overline{CD} dalla vòlta.

La superficie d'intrados Σ_{β} d'una vòlta a bacino a monta depressa generata dalla rotazione di una semi-ellisse attorno al suo semi-asse minore (*fig. 102*), e per la quale sono note la semi-corda c e la monta m , si ottiene calcolando prima la quantità e mediante la formola (num. 96)

$$e = \frac{\sqrt{c^2 - m^2}}{c} \quad (1),$$

ed impiegando poscia: o la formola

$$\Sigma_{\beta} = \pi c^2 \left(1 + \frac{1 - e^2}{2eK} \log \frac{1+e}{1-e} \right), \quad (2),$$

nella quale $K = 0,45429448 \dots$; oppure l'altra

$$\Sigma_{\beta} = 2\pi c^2 \left(1 - \frac{1}{1.3} e^2 - \frac{1}{3.5} e^4 - \frac{1}{5.7} e^6 - \dots \right), \quad (3),$$

la quale conduce ad un risultato tanto più esatto quanto maggiore è il numero dei termini di cui si tien conto nella serie rappresentata dal fattore chiuso fra parentesi.

Molti pratici, invece di adoperare le formole (1), (2) e (3) pel calcolo delle superficie d'intrados delle vòlte a bacino su pianta circolare, ellissoidiche ed a monta depressa, impiegano: o la semplice formola

$$\Sigma_{\beta} = 2\pi \frac{9c^4 + 7c^2m^2 - m^4}{15c^2} \quad (4),$$

che si ottiene tenendo conto soltanto dei primi tre termini del fat-

tore svolto in serie nell'equazione (3); oppure la formola empirica

$$\Sigma_{\beta} = 2\pi c \left[m + \frac{2}{5}(c-m) \right] \quad (5).$$

La formola (4) dà risultati un po' maggiori del vero e l'ultima formola invece conduce a risultati un po' minori del vero per le vòlte a monta piuttosto depressa; ma ambedue somministrano risultati assai prossimi al vero per le vòlte la cui monta è poco diversa dalla semi-corda.

Per le vòlte a bacino su pianta circolare, a monta rialzata e colla superficie d'intrados generata dalla rivoluzione di una semi-ellisse attorno al suo semi-asse maggiore (*fig. 105*), essendo c la semi-corda ed m la monta, si calcola la superficie Σ_{β} , trovando prima la quantità ε mediante la formola (num. 96)

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{m^2 - c^2}}{c} \quad (6),$$

ed impiegando poscia la formola

$$\Sigma_{\beta} = \pi c^2 \left[1 + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = \varepsilon) \right] \quad (7).$$

Quando il valore di ε è una frazione, si può anche adottare la formola

$$\Sigma_{\beta} = 2\pi c^2 \left(1 + \frac{1}{1.3} \varepsilon^2 - \frac{1}{3.5} \varepsilon^4 + \frac{1}{5.7} \varepsilon^6 - \dots \right) \quad (8),$$

la quale conduce a risultati tanto più prossimi al vero quanto più grande è il numero dei termini che si prendono nella valutazione del fattore svolto in serie.

Invece della formola (8), la quale è solo applicabile quando ε è una frazione, conviene generalmente trovare la quantità n ponendo (num. 96)

$$n = \frac{\sqrt{m^2 - c^2}}{m}, \quad (9),$$

e calcolare quindi la superficie Σ_{β} coll'equazione

$$\Sigma_{\beta} = 2\pi cm \left(1 - \frac{1.1}{2.3} \gamma^2 - \frac{1.1.1}{2.4.5} \gamma^4 - \frac{1.1.3.1}{2.4.6.7} \gamma^6 - \dots \right) \quad (10),$$

Tenendo conto soltanto dei due primi termini del fattore svolto in serie e ponendo per γ il suo valore, si ha la semplicissima formola

$$\Sigma_{\beta} = \pi c \frac{5m^2 + c^2}{3m} \quad (11),$$

la quale dà sempre risultati un po' maggiori del vero, ma tanto più prossimi alla verità quanto più piccola è la differenza fra la semi-corda c e la monta m .

Anche per le vòlte a bacino su pianta circolare, ellissoidiche ed a monta rialzata, usano molti pratici impiegare la semplicissima formola empirica

$$\Sigma_{\beta} = 2\pi c \left[m - \frac{2}{7}(m - c) \right] \quad (12)$$

invece delle formole più complicate (6), (7), (8), (9), (10) ed (11), ed i risultati che con essa si ottengono, si possono considerare come assai prossimi al vero soltanto per le vòlte a bacino a monta non molto rialzata.

Può anche avvenire il caso di dover trovare la superficie d'intrados di una vòlta a bacino su pianta circolare generata dalla rivoluzione di un quarto di ovale attorno ad un suo semi-asse. Questa superficie esattamente si può ottenere applicando la regola di Guldino, come si è detto al numero 97; e, volendosi procedere speditamente, ma per approssimazione, possono servire le formole empiriche (5) e (12). La prima di queste formole va adottata quando la vòlta è a monta depressa e la seconda quando la vòlta è a monta rialzata.

110. Superficie delle vòlte a bacino su pianta ellittica e su pianta ovale. — La superficie d'intrados di una vòlta a bacino su pianta ellittica è generalmente un mezzo ellissoide a tre assi (fig. 123), e quindi si può essa ottenere col metodo esatto svolto al numero 96, impiegando le tavole delle funzioni ellittiche.

Qualora poi vogliasi rinunciare al metodo esatto, per impiegare qualche metodo d'approssimazione facile e spedito, si può far uso

di formole empiriche e, per non allontanarsi da quelle che vennero date per le vólte a bacino su pianta circolare, si può calcolare la superficie Σ_s di una vólta a bacino di monta m ed insistente ad una pianta ellittica oppure ad una pianta ovale di semi-assi a e b e di periferia L : mediante la formola

$$\Sigma_s = L \left[m + \frac{2}{5} \left(\frac{a+b}{2} - m \right) \right]$$

quando

$$\frac{a+b}{2} > m;$$

e mediante l'altra formola

$$\Sigma_s = L \left[m - \frac{2}{7} \left(m - \frac{a+b}{2} \right) \right]$$

nel caso in cui

$$\frac{a+b}{2} < m.$$

Affinchè queste formole diano risultati non molto lontani dai veri si richiede che i tre semi-assi a , b ed m siano poco differenti tra loro. In quanto poi alla lunghezza o sviluppo L della periferia dell'ellisse o dell'ovale coperta dalla vólta, si deve essa ottenere colle norme che vennero date al capitolo III della prima parte, parlando degli sviluppi delle semi-ellissi e delle semi-ovali.

111. Superficie delle vólte a conca. — Queste vólte coprono aree rettangolari e la loro superficie d'intrados è generata da una semi-ellisse GVH (*fig. 124*), posta primitivamente in modo da trovarsi in un piano perpendicolare a quello del rettangolo $ABCD$ che serve di base alla vólta, col suo asse intiero \overline{GH} nel piano di detto rettangolo eguale in lunghezza al lato \overline{AB} e col suo semi-asse \overline{OV} eguale alla monta della vólta. Questa semi-ellisse, cambiando di forma, si muove parallelamente a sè medesima in modo da conservarsi l'asse intiero, sempre lungo come \overline{AB} , nel piano del detto rettangolo d'imposta $ABCD$, ed in modo che la metà dell'altro asse varii di lunghezza come le ordinate di una semi-ellisse fissa EVF , disposta in un piano perpendicolare al piano del rettangolo coperto dalla vólta ed al piano della semi-ellisse generatrice, col-

L'asse intero \overline{EF} uguale al lato \overline{AD} del rettangolo e col semi-asse \overline{OV} eguale alla monta della vòlta.

Se la superficie d'intrados di questa vòlta immaginasi tagliata con piani perpendicolari a quello del rettangolo d'imposta ABCD e paralleli al lato AB, le sezioni sono evidentemente le stesse semi-ellissi generatrici; ed è facile il dimostrare che, immaginando tagliata la detta superficie d'intrados con piani pure perpendicolari a quello dell'accennato rettangolo e paralleli al lato AD, le sezioni sono pure semi-ellissi, cosicchè la superficie indifferentemente si può immaginare generata in due modi, prendendo cioè per direttrice o la semi-ellisse EVF oppure l'altra GVH. Per dimostrare questo, si consideri una semi-ellisse generatrice qualunque *avb*; sulla periferia di questa curva prendasi un punto qualunque M; s'immagini per questo punto un piano perpendicolare a quello del rettangolo ABCD e parallelo al lato AD; suppongasi che questo piano tagli la semi-ellisse GVH nel punto *u*; e si faccia vedere che la semi-ellisse avente per asse intero la retta $\overline{dc} = \overline{DA}$ e per semi-asse la retta \overline{ru} , rappresentante un'ordinata della semi-ellisse GVH, passa pel punto M. Perciò si osservi: che, supponendo distinti l'uno dall'altro i due punti proiettati in P ed appartenenti uno alla semi-ellisse *avb* e l'altro alla semi-ellisse *cud*, le loro altezze al disopra del piano ABCD sono rispettivamente espresse da

$$\left. \begin{aligned} \frac{\overline{ov}}{\overline{oa}} \sqrt{\overline{oa}^2 - \overline{op}^2} \\ \frac{\overline{ru}}{\overline{rc}} \sqrt{\overline{rc}^2 - \overline{rp}^2} \end{aligned} \right\} \quad (1);$$

che \overline{ov} , considerata come ordinata della semi-ellisse EVF, vien data da

$$\overline{ov} = \frac{\overline{OV}}{\overline{OF}} \sqrt{\overline{OF}^2 - \overline{Oo}^2};$$

che il valore di \overline{ru} , per essere essa ordinata della semi-ellisse GVH, risulta

$$\overline{ru} = \frac{\overline{OV}}{\overline{OG}} \sqrt{\overline{OG}^2 - \overline{Or}^2};$$

che

$$\overline{oa} = \overline{OG}, \quad \overline{oP} = \overline{Or}, \quad \overline{rc} = \overline{OF}, \quad \overline{rP} = \overline{Oo};$$

che le espressioni (1), sostituendovi i trovati valori di \overline{ov} , \overline{ru} , \overline{oa} , \overline{oP} , \overline{rc} ed \overline{rP} , si riducono ad avere lo stesso valore

$$\frac{\overline{OV}}{\overline{OF} \times \overline{OG}} \sqrt{\overline{OF}^2 - \overline{Oo}^2} \sqrt{\overline{OG}^2 - \overline{Or}^2};$$

che per conseguenza la semi-ellisse \overline{cud} di semi-assi \overline{rc} ed \overline{ru} passa pel punto M dell'altra semi-ellisse di semi-assi \overline{oa} ed \overline{ov} ; e finalmente ancora che la semi-ellisse \overline{cud} , come incontra la generatrice qualunque \overline{avb} , deve incontrare tutte le altre, e trovarsi quindi per intero sulla superficie d'intrados della vòlta.

Ciò premesso, si può ottenere la superficie della vòlta a conca col seguente metodo d'approssimazione. Si consideri la quarta parte della superficie d'intrados di questa vòlta e, per fissare le idee, quella proiettata nel rettangolo \overline{AFOG} (fig. 125) equivalente alla quarta parte del rettangolo totale d'imposta \overline{ABCD} .

I lati opposti \overline{OG} ed \overline{FA} si dividano in parti eguali piuttosto piccole; e lo stesso si faccia sui lati opposti \overline{OF} e \overline{GA} ; ed i punti corrispondenti si uniscano mediante rette in modo da scomparire in tanti rettangoletti il rettangolo \overline{AFOG} . Egli è evidente che la somma, delle parti di superficie d'intrados della vòlta a conca coprenti i detti rettangoletti, dà la superficie d'intrados coprente il rettangolo \overline{AFOG} , e che, quadruplicando questa somma, ne deve risultare la superficie d'intrados della vòlta. Ora, considerando la parte di superficie d'intrados proiettata in uno dei rettangoletti, per esempio quella che corrisponde al rettangoletto \overline{afog} , è essa una superficie curva chiusa da quattro archi di ellisse proiettati nelle rette \overline{af} , \overline{fo} , \overline{og} , e \overline{ga} ; e, qualora le rette \overline{mn} e \overline{pq} , \overline{rs} e \overline{tu} siano abbastanza vicine, ai detti archi ellittici si possono sostituire le loro corde ed alla superficie curva fra i medesimi compresa, le due facce piane triangolari proiettate nei triangoli \overline{afo} ed \overline{ago} . Per le dette facce piane triangolari, essendo i due vertici proiettati in \overline{a} ed \overline{f} sulla semi-ellisse generatrice di asse \overline{tu} ed i due vertici proiettati in \overline{o} e \overline{g} sulla semi-ellisse generatrice di asse \overline{rs} , è facile trovare le altezze dei loro vertici al disopra del piano d'imposta, si può quindi passare al

calcolo dei loro lati, giacchè per ciascuno di questi è nota la proiezione orizzontale e la differenza di livello degli estremi, e dedurre finalmente la loro superficie dietro la conoscenza dei lati di ciascuno di essi. Il metodo esposto per trovare la superficie, che per approssimazione si sostituisce alla vera superficie d'intrados coprente il rettangolo *afog*, si applichi alla ricerca approssimata delle diverse superficie coprenti i rettangoletti in cui venne scomposto il rettangolo AFOG; si sommino i risultati che così si ottengono, ed il quadruplo della somma che ne risulta dà un valore approssimato della superficie d'intrados della vòlta a conca. Il risultamento a cui conduce l'esposto metodo è sempre un po' minore del vero, e tanto più si accosta a questo quanto più grande è il numero delle parti rettangolari in cui si scompone il rettangolo AFOG.

112. Superficie delle vòlte a vela sferiche. — Le vòlte a vela sferiche si possono soltanto costruire per coprire aree poligonali a cui è circoscrivibile un circolo, e la superficie d'intrados di una di queste vòlte risulta immaginando l'emisfero (*fig. 126*) insistente al circolo circoscritto al poligono d'imposta che essa copre, supponendo elevati pei diversi lati di questo poligono dei piani ad esso perpendicolari e togliendo le semi-calotte che questi piani separano dall'emisfero. Evidentemente in tutte le vòlte a vela sferiche la monta \overline{CV} non costituisce un dato arbitrario, ma sibbene è sempre eguale al raggio \overline{CA} del circolo circoscritto al poligono coperto dalla vòlta.

L'indicato modo di generazione della superficie d'intrados di una vòlta a vela sferica, facilmente conduce a stabilire doversi ottenere questa superficie procurandosi prima quella della mezza sfera avente per raggio quello del circolo circoscritto al poligono coperto dalla vòlta, e togliendovi poscia la somma delle superficie di tante semi-calotte sferiche quanti sono i lati del detto poligono. Quando il poligono coperto dalla vòlta è regolare, tutte le semi-calotte sono eguali; la corda di ciascuna di esse è il lato del poligono, e la saetta è la differenza fra il suo raggio ed il suo apotema. Quando invece la vòlta copre un poligono non regolare, le semi-calotte non sono più tutte eguali fra di loro; la corda di ciascuna di esse è un lato dell'indicato poligono e la saetta è la differenza fra il raggio del circolo circoscritto e la perpendicolare abbassata dal centro del circolo stesso sul lato il quale serve di corda alla semi-calotta che si considera.

115. Superficie delle vòlte a vela sferiche su pianta regolare.

— Per una vólta a vela sferica coprente un poligono regolare, se chiamasi

r il suo raggio, ossia il raggio del circolo circoscritto,

a l'apotema,

n il numero dei suoi lati e

Σ_v la superficie d'intrados della vólta,

si ha: che la superficie dell'emisfero insistente al circolo di raggio r vien espressa da

$$2\pi r^2;$$

che la superficie di ognuna delle semi-calotte vale

$$\pi r(r-a);$$

e finalmente che la superficie Σ_v della vólta a vela si può calcolare colla semplicissima formola

$$\Sigma_v = \pi r [2r - n(r-a)].$$

Generalmente i poligoni regolari sono determinati per la conoscenza del numero n dei loro lati e della lunghezza l di questi, ed allora si possono dedurre i valori delle due quantità a ed r osservando che, immaginando unito il centro C (*fig. 64*) di un poligono regolare cogli estremi A e B di un suo lato \overline{AB} , si ha $\frac{180^\circ}{n}$ per valore dell'angolo ACD e quindi

$$a = \frac{1}{2} l \cot \frac{180^\circ}{n},$$

$$r = \frac{l}{2 \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{n}}.$$

114. Superficie della vólta a vela sferica su pianta rettangolare. — Per una vólta a vela sferica coprente un rettangolo $ABCD$ (*fig. 127*), chiamando

a e b i suoi due lati \overline{AB} e \overline{BC} ,

r il raggio \overline{OA} del circolo ad esso circoscritto,

Σ_v la superficie d'intrados della vólta,

risulta: che la superficie dell'emisfero coprente il circolo circoscritto al rettangolo è

$$2\pi r^2;$$

che la somma delle superficie delle due semi-calotte eguali, aventi per corde i lati \overline{AB} e \overline{DC} di lunghezza a e per saette le rette \overline{EF} e \overline{GH} di lunghezza $r - \frac{1}{2}b$, vale

$$2\pi r \left(r - \frac{1}{2}b \right);$$

che la somma delle superficie delle due semi-calotte eguali, le cui corde sono i lati \overline{BC} e \overline{AD} di lunghezza b e le cui saette sono le rette \overline{IK} ed \overline{LM} lunghe $r - \frac{1}{2}a$, vien espressa da

$$2\pi r \left(r - \frac{1}{2}a \right);$$

e finalmente che la superficie Σ , si ottiene colla formola

$$\Sigma_v = 2\pi r \left(\frac{a+b}{2} - r \right).$$

Il raggio r del circolo circoscritto al rettangolo è un elemento facilissimo a determinarsi in funzione dei lati a e b , giacchè dal triangolo rettangolo OEA , i cui cateti \overline{EA} ed \overline{EO} sono rispettivamente $\frac{1}{2}a$ ed $\frac{1}{2}b$ e la cui ipotenusa \overline{OA} vale r , immediatamente si deduce

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}.$$

115. **Superficie della volta a vela su pianta rettangolare col-
l'intrados generato da un arco di circolo di forma variabile.**
— Allorquando occorre di dover costruire una volta a vela su pianta rettangolare e che non riesce possibile adottare per monta il raggio del circolo circoscritto al rettangolo coperto dalla volta, per soddisfare a tutte le esigenze di bellezza e di facile esecuzione,

parmi potersi immaginare generata la sua superficie d'intrados nel modo che vado a esporre. Ammettendo che sia orizzontale il piano d'imposta e quindi il rettangolo $ABCD$ (*fig. 428*) avente i suoi vertici nei quattro punti più bassi della vòlta, nei piani verticali determinati dai quattro lati \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} e \overline{DA} s'immaginino descritte le semi-circonferenze AEB , BFC , CGD e DHA ; verticalmente al di sopra del centro O del rettangolo d'imposta si supponga determinato il punto V in modo da risultare la retta \overline{OV} eguale alla monta della vòlta; e quindi immaginisi l'arco circolare determinato dal punto V e dai due punti F ed H posti nel mezzo delle due semi-circonferenze BFC ed AHD . Supponendo ora che un arco circolare di forma variabile, mantenendosi sempre in un piano parallelo a quello del semi-circolo BFC , si muova in modo da conservarsi sempre colle sue due estremità sulle mezze circonferenze BEA e CGD e col suo mezzo sull'arco FVH , genera esso una superficie che può essere assunta come superficie d'intrados della vòlta a vela.

L'intersezione della superficie d'intrados generata nel modo descritto con un piano verticale parallelo a quello del semi-circolo BFC è sempre un arco di circolo, ed assai facilmente può essere determinata nel seguente modo. Segnata la traccia IK , parallela alla retta BC , del piano segante col piano d'imposta, si determinino sulle due mezze circonferenze AEB e DGC i due punti M e P verticalmente posti al di sopra dei punti I e K , e si misuri $\overline{IM} = \overline{KP}$ non che la lunghezza della verticale \overline{LN} compresa fra il mezzo L di \overline{IK} e la superficie d'intrados della vòlta. L'intersezione di questa superficie col piano verticale determinato dalla retta IK è l'arco circolare passante pei tre punti M , N e P , la corda di quest'arco è $\overline{MP} = \overline{IK} = \overline{BC}$ e la sua monta è la retta $\overline{NQ} = \overline{LN} - \overline{LQ} = \overline{LN} - \overline{IM}$. Conoscendosi corda e monta di quest'arco riesce facile trovare la sua lunghezza colle norme che vennero date al numero 24.

Volendosi ora determinare la superficie d'intrados di una vòlta a vela su pianta rettangolare coll'intrados generato da un arco di circolo di forma variabile, si può tenere il seguente metodo d'approssimazione: immaginare tanti piani verticali, paralleli al piano del semi-circolo BFC piuttosto vicini fra di loro; trovare la lunghezza degli archi circolari RST , MNP , UXY ,, rappresentanti le intersezioni di questi piani colla superficie d'intrados della vòlta; procurarsi le lunghezze delle parti FS , SN , NX , dell'arco direttore culminante FVH ; ottenere approssimativamente le superficie delle

zone in cui venne così scomposta la mezza vòlta $BFCGVE$, moltiplicando le semi-somme delle lunghezze dei due archi fra cui esse cadono per le rispettive larghezze misurate sull'arco FV ; sommare tutti questi prodotti, e finalmente prendere il doppio della somma. Questo modo di trovare la superficie della vòlta conduce ad un risultato il quale tanto più è prossimo al vero, quanto più grande è il numero delle zone in cui si scompone la semi-vòlta $BFCGVE$.

Quando si reputi sufficiente un'approssimazione grossolana nel valutare la superficie d'intrados della vòlta in quistione, si può adottare la regola di moltiplicare la media aritmetica dello sviluppo dell'arco d'imposta BFC e dell'arco alla chiave ad esso parallelo EVG , per la media aritmetica degli sviluppi dell'altro arco d'imposta AEB e dell'arco parallelo HVF posto alla chiave.

116. Superficie delle vòlte a padiglione. — Le vòlte a padiglione hanno la loro superficie d'intrados costituita da tanti fusi cilindrici quanti sono i lati dei poligoni che esse coprono, e quindi per trovare la detta superficie vale la regola generale di fare le superficie dei diversi fusi componenti colle norme che vennero date al numero 89, e di prendere quindi la loro somma.

117. Superficie delle vòlte a padiglione su pianta regolare. — 1^o Quando una vòlta a padiglione copre un poligono regolare e quando la perpendicolare calata dal punto più alto della sua superficie d'intrados, in cui si riuniscono i vertici dei diversi fusi, è eguale all'apertura del detto poligono, tutti i fusi sono eguali ed a tutta monta, la loro direttrice è un quarto di circonferenza di circolo, la loro superficie riescé calcolabile colla formola (4) del numero 89, e, chiamando

a il lato \overline{AB} (*fig. 429*) del poligono regolare,

n il numero dei suoi lati,

m la monta \overline{OV} della vòlta e

Σ_p la sua superficie d'intrados,

si ha

$$\Sigma_p = nam.$$

Siccome poi, per essere i fusi a tutta monta, risulta che la monta \overline{OV} è eguale all'apotema \overline{OD} , e siccome in un poligono regolare, avente n lati, l'angolo AOD vale $\frac{180^\circ}{n}$, evidentemente il valore di m è funzione dei due dati a ed n , e risulta esso dalla semplicissima formola

$$m = \frac{1}{2} a \cot \frac{180^\circ}{n},$$

che immediatamente si deduce dal triangolo rettangolo ADO.

2° Quando una volta a padiglione coprente un poligono regolare ha la sua superficie d'intrados costituita da tanti fusi cilindrici a monta depressa aventi per direttrice un arco circolare, la cui superficie vien data dalla formola (2) del numero 89, ritenendo le denominazioni già stabilite per quanto si riferisce alla lunghezza dei lati del poligono regolare, al loro numero, alla monta della volta ed alla sua superficie, e dicendo c l'apotema del poligono regolare costituente la semi-corda dei diversi fusi, si ha

$$\Sigma_p = n \frac{a(c^2 + m^2)}{2c},$$

essendo le due quantità a e c legate fra loro dalla semplicissima relazione

$$c = \frac{1}{2} a \cot \frac{180^\circ}{n} \quad (1),$$

che immediatamente ricavasi dalla considerazione del triangolo rettangolo ODA.

3° Per il caso di una volta a padiglione coprente un poligono regolare avente i suoi fusi a monta depressa con direttrice ellittica, conservando alle lettere a , c , m ed n i significati che già loro vennero attribuiti nei due casi esaminati, non dimenticando che fra a e c esiste sempre la relazione (1) ed osservando che pel calcolo di ciascun fuso riesce applicabile la formola (5) del numero 89, si ottiene la superficie Σ_p dell'intrados della volta, calcolando prima la quantità ausiliaria e mediante l'espressione

$$e = \frac{\sqrt{c^2 - m^2}}{c},$$

ed impiegando poscia la formola

$$\Sigma_p = \frac{1}{2} n a c \left(1 + \frac{1 - e^2}{2eK} \log \frac{1 + e}{1 - e} \right) \quad (2),$$

nella quale $K = \log. 2,71828182..... = 0,43429448.....$

Invece dalla formola (2) si può anche adottare l'equazione

$$\Sigma_p = nac \left(1 - \frac{1}{1.3} e^2 - \frac{1}{3.5} e^4 - \frac{1}{5.7} e^6 - \right) \quad (3),$$

di cui è facile rendersi ragione, in seguito a quanto si è detto nel già citato numero 89, e che dà risultati tanto più prossimi al vero, quanto più grande è il numero dei termini di cui si tien conto nel fattore svolto in serie.

Finalmente, bastando una valutazione approssimata della superficie d'intrados della vòlta, la superficie di ciascun fuso può essere ottenuta colla formola (7) del citato numero 89, e quindi riesce applicabile al calcolo di Σ_p la semplicissima formola pratica

$$\Sigma_p = na \frac{9c^4 + 7c^2m^2 - m^4}{15c^3},$$

la quale dà risultamenti un po' maggiori del vero, e conduce a risultati che tanto più si accostano alla verità, quanto più l'apotema c è poco differente dalla monta m .

4° Presentandosi il caso di dover trovare la superficie di una vòlta a padiglione a monta rialzata, coprente un poligono regolare e colla sua superficie d'intrados costituita da fusi cilindrici eguali aventi per direttrice un quarto di ellisse e quindi calcolabili colla formola (9) del numero 89, ritenute le denominazioni già stabilite per quanto si riferisce al numero dei lati del poligono coperto dalla vòlta, alla loro lunghezza, all'apotema ed alla monta, s'incincia dal calcolare la quantità ε mediante l'equazione

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{m^2 - c^2}}{c},$$

e quindi si procede alla deduzione della superficie Σ_p applicando la formola

$$\Sigma_p = \frac{1}{2} nac \left[1 + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \arctan(\varepsilon) \right].$$

La superficie di ciascuno dei fusi cilindrici ellittici a monta rial-

zata, componenti l'intrados della volta a padiglione su pianta regolare di cui vuolsi valutare la superficie, si può anche valutare colla formola (15) del numero 89; per cui, ottenuta la quantità γ col porre

$$\gamma = \frac{\sqrt{m^2 - c^2}}{m},$$

si può dedurre la superficie Σ_p dalla formola

$$\Sigma_p = n a m \left(1 - \frac{11}{23} \gamma^2 - \frac{111}{245} \gamma^4 - \frac{1131}{2467} \gamma^6 - \dots \right) \quad (4),$$

la quale dà un'approssimazione tanto maggiore, quanto più grande è il numero dei termini di cui si tien conto nel fattore svolto in serie.

Finalmente, nelle ordinarie circostanze in cui basta un valore approssimato di Σ_p , si può ricorrere alla formola pratica (14) del numero 89 per valutare la superficie d'un fuso, ed adottare quindi nel calcolo della superficie domandata la semplicissima formola

$$\Sigma_p = n a \frac{5m^2 + c^2}{6m},$$

la quale conduce sempre a risultati un po' maggiori del vero.

118. Superficie della volta a padiglione su pianta rettangolare. — I dati necessari a conoscersi onde poter procedere al calcolo della superficie d'intrados Σ_p di una volta a padiglione su pianta rettangolare, sono i due lati $\overline{AB} = a$ e $\overline{BC} = b$ (fig. 150) dell'indicata pianta e la monta $\overline{EV} = m$ della volta.

1° Quando la monta \overline{EV} è più piccola della metà del lato minore \overline{BC} del rettangolo coperto dalla volta e quando i quattro fusi cilindrici componenti la domandata superficie Σ_p hanno per direttrice un arco di circolo, si ha: che la superficie di ciascun fuso deve essere calcolata applicando la formola (2) del numero 89; che la somma delle superficie dei due fusi VAB e VCD, ciascuno dei quali ammette $\frac{1}{2}b$ per semi-corda, a per lato ed m per monta, vale

$$a \frac{b^2 + 4m^2}{2b};$$

che la somma delle superficie dei due fusi VBC e VDA, ciascuno dei quali ha $\frac{1}{2}a$ per semi-corda, b per lato ed m per monta, si esprime con

$$b \frac{a^2 + 4m^2}{2a};$$

e finalmente che la superficie d'intrados della volta a padiglione, somma delle due espressioni trovate, si ottiene colla formola

$$\Sigma_p = \frac{a^2 b^2 + 2m^2(a^2 + b^2)}{ab}.$$

2° Se la monta $\overline{E\bar{V}}$ è ancora più piccola della metà del lato minore \overline{BC} del rettangolo coperto dalla volta, ma se i quattro fusi cilindrici componenti la sua superficie d'intrados sono a direttrice ellittica, la superficie di ciascuno di essi si deve calcolare: colla formola (5) del numero 89 quando vuolsi il valore esatto della superficie Σ_p ; colla formola (6) dello stesso numero, tenendo conto d'un sufficiente numero di termini nel fattore svolto in serie, quando si vuole il valore della superficie Σ_p con una grande approssimazione; e colla formola (7) del medesimo numero, quando si desidera quell'approssimazione che generalmente basta nelle ordinarie circostanze della pratica.

Quando vuolsi applicare la formola (5) del citato numero 89 nel calcolo della superficie di ciascun fuso, si ha: che la somma delle superficie dei due fusi VAB e VCD, le cui semi-corde, lati e monte sono rispettivamente $\frac{1}{2}b$, a ed m , vien espressa da

$$\frac{1}{2}ab \left(1 + \frac{1-e^2}{2eK} \log \frac{1+e}{1-e} \right),$$

essendo

$$e = \frac{\sqrt{b^2 - 4m^2}}{b} \quad (1);$$

che la somma delle superficie dei due fusi VBC e VDA, aventi rispettivamente $\frac{1}{2} a, b$ ed m per semi-corde, lati e monte, vale

$$\frac{1}{2} ab \left(1 + \frac{1 - e'^2}{2e'K} \log \frac{1 + e'}{1 - e'} \right),$$

dove

$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - 4m^2}}{a} \quad (2);$$

e che la superficie Σ_p della volta a padiglione, somma delle due espressioni trovate, risulta dalla formola

$$\Sigma_p = \frac{1}{2} ab \left[2 + \frac{1}{2K} \left(\frac{1 - e^2}{e} \log \frac{1 + e}{1 - e} + \frac{1 - e'^2}{e'} \log \frac{1 + e'}{1 - e'} \right) \right].$$

Le formole (1) e (2) servono rispettivamente al calcolo delle due quantità e ed e' , e l'ultima formola si presta al calcolo della superficie Σ_p . Il valore di K poi è rappresentato da $\log. 2,71828182 \dots = 0,45429448 \dots$

Quando invece vuoi si applicare la formola (6) del numero 89 al calcolo della superficie di ciascun fuso, si ha: che la somma delle superficie dei due fusi VAB e VCD vien espressa da

$$ab \left(1 - \frac{1}{1.3} e^2 - \frac{1}{3.5} e^4 - \frac{1}{5.7} e^6 - \dots \right);$$

che la somma delle superficie dei due fusi VBC e VDA vien rappresentata da

$$ab \left(1 - \frac{1}{1.3} e'^2 - \frac{1}{3.5} e'^4 - \frac{1}{5.7} e'^6 - \dots \right);$$

e che quindi la superficie Σ_p risulta dalla formola

$$\Sigma_p = ab \left[\begin{array}{l} 2 - \frac{1}{1.3} (e^2 + e'^2) - \frac{1}{3.5} (e^4 + e'^4) \\ - \frac{1}{5.7} (e^6 + e'^6) - \dots \end{array} \right],$$

nella quale si devono porre per e ed e' i valori che risultano dalle equazioni (1) e (2).

Se invece si crede sufficiente l'approssimazione a cui conduce l'equazione (7) del numero 89 nel calcolo della superficie di ciascuno dei fusi, risulta: che la somma delle superficie dei due fusi VAB e VCD ammette per valore

$$a \frac{9b^4 + 28b^2m^2 - 16m^4}{15b^3};$$

che la somma delle superficie dei due fusi VBC e VDA vien espressa da

$$b \frac{9a^4 + 28a^2m^2 - 16m^4}{15a^3};$$

e che la superficie Σ_p vien data dalla formola

$$\Sigma_p = \frac{18a^4b^4 + 28a^2b^2m^2(a^2 + b^2) - 16m^4(a^4 + b^4)}{15a^3b^3}.$$

5° Quando la monta \overline{EV} è eguale alla metà del lato minore \overline{BC} del rettangolo che essa copre, i due fusi cilindrici VAB e VCD risultano a tutta monta, e gli altri due VBC e VDA si conservano a monta depressa. Il valore di e dato dalla (1) diventa zero per $m = \frac{1}{2}b$, il valore di e' dato dalla (2) si riduce a

$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

e la superficie Σ_p dell'intrados della volta a padiglione si ottiene: colla formola

$$\Sigma_p = \frac{1}{2} ab \left[3 + \frac{1 - e'^2}{2e'K} \log \frac{1 + e'}{1 - e'} \right].$$

quando vuolsi il suo valore esatto; colla formola

$$\Sigma_p = ab \left(2 - \frac{1}{1.3} e'^2 - \frac{1}{3.5} e'^4 - \frac{1}{5.7} e'^6 - \dots \right),$$

tenendo conto di un sufficiente numero di termini nel fattore svolto in serie, quando vuolsi valutare la superficie Σ_p con una grande approssimazione; e finalmente colla formola

$$\Sigma_p = b \frac{24a^4 + 7a^2b^2 - b^4}{15a^3}$$

quando si crede sufficiente quell'approssimazione che dà la formola (7) del numero 89 nel calcolo della superficie di un fuso cilindrico con direttrice ellittica a monta depressa.

4° Quando la monta $\overline{E\bar{V}}$ è maggiore della metà del lato maggiore \overline{AB} del rettangolo coperto dalla vòlta, i quattro fusi cilindrici componenti la sua superficie d'intrados sono a monta rialzata e generalmente con direttrice ellittica, per cui le loro superficie si devono ottenere: colla formola (9) del numero 89, quando vuolsi avere la superficie d'intrados della vòlta colla massima esattezza possibile; colla formola (15) dello stesso numero, tenendo conto d'un sufficiente numero di termini nel fattore svolto in serie, quando si desidera avere il valore della detta superficie con una grande approssimazione; e colla formola (14) del medesimo numero, quando vuolsi operare speditamente ed ottenere quell'approssimazione che generalmente basta nelle ordinarie circostanze della pratica.

Nel caso in cui si vuol applicare la citata formola (9) al calcolo della superficie d'intrados Σ_p della vòlta, si ha: che la somma delle superficie dei due fusi VAB e VCD , le cui semi-corde, lati e monte sono rispettivamente $\frac{1}{2}b$, a ed m , vale

$$\frac{1}{2}ab \left[1 + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \arccos(\varepsilon) \right],$$

essendo

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{4m^2 - b^2}}{b} \quad (3);$$

che la somma delle superficie dei due fusi VBC e VDA , le cui semi-corde, lati e monte sono rispettivamente $\frac{1}{2}a$, b ed m , vien espressa da

$$\frac{1}{2} ab \left[1 + \frac{1 + \varepsilon'^2}{\varepsilon'} \operatorname{arc} (\operatorname{tang} = \varepsilon') \right],$$

essendo

$$\varepsilon' = \frac{\sqrt{4m^2 - a^2}}{a} \quad (4);$$

e che quindi la formola determinatrice della superficie d'intrados Σ_p dell'intera volta risulta

$$\Sigma_p = \frac{1}{2} ab \left[\begin{array}{l} 2 + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \operatorname{arc} (\operatorname{tang} = \varepsilon) \\ + \frac{1 + \varepsilon'^2}{\varepsilon'} \operatorname{arc} (\operatorname{tang} = \varepsilon') \end{array} \right],$$

dove si devono porre per ε ed ε' i valori somministrati dalle equazioni (5) e (4).

Volendosi applicare la formola (15) del numero 39 al calcolo delle superficie dei fusi componenti la superficie Σ_p della volta a padiglione, conviene osservare: che la somma delle superficie dei due fusi VAB e VCD vien espressa da

$$2am \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \eta^2 - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{1}{5} \eta^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7} \eta^6 - \dots \right),$$

essendo

$$\eta = \frac{\sqrt{4m^2 - b^2}}{2m} \quad (5);$$

che la somma delle superficie dei due fusi VBC e VDA vien data dall'espressione

$$2bm \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \eta'^2 - \frac{1.1}{2.4} \cdot \frac{1}{5} \eta'^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6} \cdot \frac{1}{7} \eta'^6 - \dots \right),$$

nella quale

$$r' = \frac{\sqrt{4m^2 - a^2}}{2m} \quad (6);$$

e che la superficie d'intrados Σ_p dell'intera volta a padiglione può essere determinata mediante la formola

$$\Sigma_p = 2m \left[\begin{aligned} &(a+b) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} (a r^2 + b r'^2) - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} (a r^4 + b r'^4) \\ &- \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} (a r^6 + b r'^6) - \dots \end{aligned} \right],$$

nella quale per r ed r' si devono porre i valori dati dalle equazioni (5) e (6).

Quando si vuole soltanto un valore approssimato della superficie Σ_p , e che credesi sufficiente l'approssimazione a cui conduce la formola (14) del numero 39 nel calcolo dei fusi che la compongono, vien espressa da

$$a \frac{20m^2 + b^2}{12m}$$

la somma delle superficie dei due fusi VAB e VCD, e da

$$b \frac{20m^2 + a^2}{12m}$$

la somma delle superficie dei due fusi VBC e VDA. Il valore approssimato di Σ_p , somma delle due espressioni trovate, sarà adunque dato da

$$\Sigma_p = \frac{(a+b)(20m^2 + ab)}{12m}.$$

5° Presentandosi il caso in cui la monta della volta risulta eguale alla metà del lato maggiore \overline{AB} del rettangolo che essa copre, sono a monta rialzata i due fusi VAB e VCD ed a tutta monta gli altri due VBC e VDA. Per $m = \frac{1}{2}a$ il valore di ε , dato dalla (5), si riduce a

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b},$$

e diventa zero il valore di ε' dato dalla (4). Il valore esatto della superficie d'intrados Σ_p della volta si ottiene colla formola

$$\Sigma_p = \frac{1}{2} ab \left[3 + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = \varepsilon) \right];$$

ed il suo valore grandemente approssimato si può dedurre dalla formola

$$\Sigma_p = ab + a^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \varepsilon^2 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \varepsilon^4 - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} \varepsilon^6 - \dots \right),$$

tenendo conto d'un conveniente numero di termini nel fattore svolto in serie, e ponendo in essa

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

Finalmente, con quell'approssimazione che permette l'impiego della formola (14) del numero 89 nel calcolo della superficie dei fusi, si può dedurre la superficie Σ_p dalla semplicissima formola

$$\Sigma_p = \frac{(a+b)(5a+b)}{6}.$$

419. Superficie delle volte a botte con teste di padiglione.

— Queste volte generalmente si costruiscono per coprire aree rettangolari, ma nulla osta che si possano anche fare sopra aree parallelogrammiche e sopra aree trapezie. Esaminando il caso più generale di una volta a botte con teste di padiglione coprente un trapezio ABCD (*fig. 451*), la sua superficie d'intrados si compone di quattro distinte parti ABF'E', CDE'F', BCF' e DAE', coprenti rispettivamente i due trapezii ABFE, CDEF ed i due triangoli BCF e DAE aventi le loro altezze \overline{EL} , \overline{EG} , \overline{FK} ed \overline{EI} eguali fra di loro. Immaginando poi condotti pei due punti E ed

F due piani perpendicolari alle basi \overline{AB} e \overline{DC} del trapezio, tagliano essi la superficie d'intrados della vòlta secondo due curve $LE'G$ ed $MF'H$, e la detta superficie rimane scomposta nelle seguenti sette parti: nella superficie cilindrica retta $LMF'HGE'$ coprente il rettangolo $LMHG$; e nei sei fusi cilindrici BMF' , BCF' , CHF' , DGE' , DAE' ed ALE' coprenti rispettivamente i triangoli BMF , BCF , CHF , DGE , DAE ed ALE . Le semi-corde della superficie cilindrica retta e de' sei fusi sono tutte eguali fra di loro: lo stesso fatto si verifica per le monte; e per ottenere la superficie d'intrados dell'intiera vòlta bisogna procurarsi separatamente le superficie delle sette parti di cui essa si compone e prenderne quindi la loro somma. Chiamando

b e b' la base maggiore \overline{AB} e la base minore \overline{DC} del trapezio coperto dalla vòlta,

l ed l' i due lati non paralleli \overline{AD} e \overline{BC} ,
se dal vertice D del trapezio s'immagina condotta la retta DN parallela a BC , risulta il triangolo DAN i cui lati sono

$$\overline{AD} = l, \quad \overline{ND} = \overline{BC} = l', \quad \overline{AN} = \overline{AB} - \overline{DC} = b - b'.$$

L'altezza \overline{DO} di questo triangolo si deduce (num. 65) dalla formola

$$\overline{DO} = \frac{1}{2(b-b')} \sqrt{4(b-b')^2 l'^2 - [(b-b')^2 + l'^2 - l^2]} \quad (1),$$

e la metà di quest'altezza costituisce le semi-corde c della vòlta a botte e de' sei fusi cilindrici. Se si considerano i due triangoli AOD ed NOD rettangoli in O , se chiamansi rispettivamente A e B i due angoli DAB ed ABC e se osservasi che $\angle AND = \angle ABC = B$ risulta

$$\text{sen } A = \frac{2c}{l},$$

$$\text{sen } B = \frac{2c}{l'}.$$

Ma i due triangoli rettangoli AIE e ALE sono eguali siccome aventi l'ipotenusa comune ed i due cateti \overline{IE} ed \overline{LE} eguali fra di loro; lo stesso succede per le coppie di triangoli BMF e BKF ,

CKF e CHF, DGE e DIE; le rette AE, BF, CF e DE dividono per metà gli angoli A, B, C e D; gli angoli BCD e CDA valgono rispettivamente $180^\circ - B$ e $180^\circ - A$; e quindi, dicendo $2c$ il valore trovato dell'altezza \overline{DO} , immediatamente si ha

$$\begin{aligned} \overline{AL} &= c \cot \frac{1}{2} A \\ \overline{BM} &= c \cot \frac{1}{2} B \\ \overline{CH} &= c \operatorname{tang} \frac{1}{2} B \\ \overline{DG} &= c \operatorname{tang} \frac{1}{2} A \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \overline{AL} \\ \overline{BM} \\ \overline{CH} \\ \overline{DG} \end{aligned}} \right\} (2).$$

Togliendo dalla lunghezza b della base maggiore \overline{AB} la somma di \overline{AL} con \overline{BM} , risulta la lunghezza \overline{LM} della superficie cilindrica retta e questa lunghezza vien data da

$$\overline{LM} = b - c \left(\cot \frac{1}{2} A + \cot \frac{1}{2} B \right).$$

Si può ora dire che, quando si conosca la monta $\overline{EE'}$ della vólta, sono noti tutti gli elementi necessari per trovare la superficie cilindrica coprente il rettangolo LMHG come si è detto al numero 101, e per calcolare le superficie dei sei fusi cilindrici insistenti ai triangoli ALE, BMF, BCF, CHF, DGE e DAE colle norme che vennero date nel numero 89.

120. Superficie della vólta a botte con teste di padiglione su pianta rettangolare. — Nel caso di una vólta a botte con teste di padiglione su pianta rettangolare si ha (*fig. 131*) $\overline{DC} = \overline{AB}$ e $\overline{BC} = \overline{AD}$. Il valore di \overline{DO} dato dalla formola (1) del numero precedente, per essere $b' = b$, $l' = l$, $b - b' = 0$ ed $l' - l = 0$ ed in seguito a soppressione del fattore $b - b'$ che diventa comune al numeratore ed al denominatore, diventa eguale ad l : i lati \overline{AL} , \overline{BM} , \overline{CH} e \overline{DG} dati dalle formole (2), per essere $\frac{1}{2} A = \frac{1}{2} B = 45^\circ$, si

riducono semplicemente ad $\frac{1}{2}l$; e risulta $b - l$ per lunghezza \overline{LM} della superficie cilindrica retta. Segue da ciò che la superficie d'intrados di una volta a botte con teste di padiglione, coprente un rettangolo, consta: della parte centrale, che è una superficie cilindrica retta lunga come la differenza fra il lato maggiore ed il lato minore del rettangolo, avente per direttrice un arco di corda eguale alla larghezza o lato minore dello stesso rettangolo e di monta eguale a quella della volta; e delle due parti laterali che assieme unite formano quattro fusi cilindrici eguali, aventi ciascuno per lato la larghezza del rettangolo, per semi-corda la metà di questa larghezza e per monta quella della volta. La parte centrale costituisce una volta a botte su pianta rettangolare e le due parti laterali messe assieme compongono una volta a padiglione su pianta quadrata; per cui si può anche dire che la superficie d'intrados di una volta a botte con teste di padiglione su pianta rettangolare equivale alla somma delle superficie d'intrados di due volte aventi la stessa monta della volta proposta, l'una a botte di lunghezza eguale alla differenza fra il lato maggiore ed il lato minore e di corda eguale al lato minore della pianta rettangolare, e l'altra a padiglione insistente ad un quadrato di lato eguale al lato minore della detta pianta.

121. **Superficie delle volte a schifo.** — Le volte a schifo s'impiegano per coprire aree poligonali qualunque e, come risulta dalla figura 452, la loro superficie d'intrados consta: delle superficie cilindriche $ABG'F'$, $BCH'G'$, $CDI'H'$, $DEK'I'$, $ELM'K'$, $LAF'M'$ aventi tutte la stessa sezione retta, e coprenti i trapezii $ABGF$, $BCHG$, $CDIH$, $DEKI$, $ELMK$, $LAFM$, eguali in numero ai lati del poligono coperto dalla volta; del poligono $F'G'H'I'K'M'$ coprente il poligono eguale $FGHIKM$ il cui perimetro è costituito dalle basi minori degli accennati trapezii. La sezione retta di tutte le parti cilindriche di una volta a schifo è una curva la quale ha generalmente la tangente orizzontale nel suo punto più elevato, ed i trapezii che esse coprono costituiscono una zona di larghezza costante compresa fra il perimetro del poligono coperto dalla volta ed il perimetro entro il quale si proietta la parte piana della superficie d'intrados. Immaginando poi condotti per ciascuna delle rette FF' , GG' , HH' , II' , KK' , MM' , perpendicolari al piano d'imposta $ABCDEL$, due piani perpendicolari ai lati AB ed AL , BA e BC , CB e CD , DC e DE , ED ed EL , LE ed LA , ciascuna delle superficie cilindriche resta scomposta in una superficie ciliu-

drica retta ed in due fusi; e, per essere eguali fra di loro i due triangoli rettangoli AaF ed $Aa'F$, non che le altre coppie di triangoli rettangoli BbG e $Bb'G$, CcH e $Cc'H$, DdI e $Dd'I$, EeK ed $Ee'K$, LlM ed $Ll'M$ siccome aventi le ipotenuse comuni ed eguali i cateti perpendicolari al perimetro $ABCDEL$, agevolmente si deduce essere due a due eguali fra di loro i fusi cilindrici AaF' ed $Aa'F'$, BbG' e $Bb'G'$, CcH' e $Cc'H'$, DdI' e $Dd'I'$, EeK' ed $Ee'K'$, LlM' ed $Ll'M'$.

Premesso questo, ecco come si procede per trovare la superficie della vólta a schifo coprente un poligono qualunque. Essendo

l, l', l'', l''', l'''' le lunghezze dei lati \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} , \overline{EL} , \overline{LA} del poligono coperto dalla vólta,

A, B, C, D, E, L le ampiezze dei suoi angoli interni $LAB, ABC, BCD, CDE, DEL, ELA$,

c la distanza del perimetro $FGHIKM$ del perimetro $ABCDEL$, per la considerazione dei triangoli rettangoli adiacenti alle rette AF, BG, CH, DI, EK, LM immediatamente si deduce

$$\overline{Aa} = \overline{Aa'} = c \cot \frac{1}{2} A$$

$$\overline{Bb} = \overline{Bb'} = c \cot \frac{1}{2} B$$

$$\overline{Cc} = \overline{Cc'} = c \cot \frac{1}{2} C$$

$$\overline{Dd} = \overline{Dd'} = c \cot \frac{1}{2} D$$

$$\overline{Ee} = \overline{Ee'} = c \cot \frac{1}{2} E$$

$$\overline{Ll} = \overline{Ll'} = c \cot \frac{1}{2} L;$$

e quindi

$$\overline{ab'} = l - c \left(\cot \frac{1}{2} A + \cot \frac{1}{2} B \right)$$

$$\overline{bc'} = l' - c \left(\cot \frac{1}{2} B + \cot \frac{1}{2} C \right)$$

$$\overline{cd'} = l'' - c \left(\cot \frac{1}{2} C + \cot \frac{1}{2} D \right)$$

$$\overline{de'} = l'' - c \left(\cot \frac{1}{2} D + \cot \frac{1}{2} E \right)$$

$$\overline{el'} = l'' - c \left(\cot \frac{1}{2} E + \cot \frac{1}{2} L \right)$$

$$\overline{la'} = l'' - c \left(\cot \frac{1}{2} L + \cot \frac{1}{2} A \right).$$

Per le diverse superficie cilindriche, le quali si possono riguardare siccome le superficie d'intrados di altrettante mezze vòlte a botte rette, si conoscono ora le semi-corde e le lunghezze; per i diversi fusi si conoscono oltre le semi-corde anche i lati, e per il poligono costituente la parte piana della vòlta a schifo, sono noti i lati e gli angoli. Quando abbiassi conoscenza della monta della vòlta, la quale è pure la monta delle mezze vòlte a botte e dei fusi, riesce facile calcolare le superficie delle parti cilindriche rette, dei fusi e del poligono, e sommando tutte queste superficie parziali, risulta la totale superficie d'intrados della vòlta a schifo.

422. **Superficie della vòlta a schifo su pianta rettangolare.**

— Per una vòlta a schifo su pianta rettangolare (*fig. 455*) si ha

$$A = B = C = D = 90^\circ,$$

e quindi

$$\cot \frac{1}{2} A = \cot \frac{1}{2} B = \cot \frac{1}{2} C = \cot \frac{1}{2} D = \cot 45^\circ = 1.$$

I lati \overline{Aa} , $\overline{Aa'}$, \overline{Bb} , $\overline{Bb'}$, \overline{Cc} , $\overline{Cc'}$, \overline{Dd} e $\overline{Dd'}$ degli otto fusi diventano tutti eguali alla larghezza c della zona ABCDFGHI coperta dalla parte curva della superficie d'intrados della vòlta, e si trova che le quattro superficie cilindriche rette due a due diventano eguali, giacchè risulta $\overline{ab'} = \overline{cd'}$ e $\overline{bc'} = \overline{da'}$. Segue da ciò che la superficie d'intrados di una vòlta a schifo su pianta rettangolare consta: di quattro superficie cilindriche che assieme unite compongono una vòlta a botte retta di lunghezza eguale alla somma dei due lati del rettangolo diminuita dal quadruplo della larghezza

della zona coperta della parte curva della superficie d'intrados, di semi-corda eguale alla detta larghezza e di monta eguale a quella della vòlta; e di otto fusi cilindrici i quali messi assieme costituiscono una vòlta a padiglione su pianta quadrata avente per lato il doppio della larghezza dell'indicata zona ed avente pure per monta la monta stessa della vòlta.

125. Superficie delle vòlte a padiglione sopra schifo. — Soventi volte, allorquando si ha disponibile un'altezza piuttosto grande, alla parte piana $F'G'H'I'K'M'$ (fig. 152) di una vòlta a schifo si sostituisce una vòlta a padiglione, e, affinchè l'immediato succedersi di due superficie curve, quella costituita dalle superficie cilindriche della vòlta a schifo e quella formante l'intrados della vòlta a padiglione, non abbia da produrre uno spiacevole aspetto, suolsi elevare il piano d'imposta della vòlta a padiglione, facendo in modo che fra la linea poligonale $F'G'H'I'K'M'$ e l'imposta dell'ultima accennata vòlta risulti una superficie prismatica retta.

Evidentemente la superficie d'intrados di una vòlta a padiglione sopra schifo si otterrà: trovando, come si è detto nel numero 121, la superficie curva componente l'intrados della vòlta a schifo; calcolando, come si è insegnato nel numero 116, la superficie della vòlta a padiglione insistente al poligono $F'G'H'I'K'M'$; e cercando la superficie della parte prismatica intercetta fra l'indicato poligono ed il piano d'imposta della vòlta a padiglione. La somma dei tre risultati che così si ottengono dà la superficie della vòlta a padiglione sopra schifo.

124. Superficie delle vòlte a crociera con unghie cilindriche. — La superficie d'intrados di una vòlta a crociera con unghie cilindriche, coprente un poligono qualunque $ABCDE$ (fig. 154) consta di tante di queste unghie quanti sono i lati dell'accennato poligono. Supponendo che sia orizzontale il poligono d'imposta della vòlta, tutte le unghie hanno per direttrice le mezze ellissi AGB , BHC , CID , DKE ed ELA contenute nei piani verticali determinati dai lati dell'indicato poligono; i loro assi intieri sono eguali a questi stessi lati, ed i loro semi-assi verticali, tutti eguali fra di loro, sono lunghi come la monta \overline{FV} della vòlta, ossia come l'altezza del punto V in cui si riuniscono i vertici delle unghie al di sopra del piano d'imposta. Si ottiene la superficie d'intrados della vòlta, calcolando separatamente le superficie delle unghie di cui essa si compone colle norme che vennero date al numero 91 e facendo quindi la loro somma.

125. **Superficie della vòlta a crociera su pianta regolare e con unghie cilindriche.** — 1° Quando la vòlta a crociera con unghie cilindriche deve coprire un poligono regolare, si fa generalmente in modo che le diverse lunette (*fig. 154*) AGB , BHC , CID , DKE , ELA siano semi-circoli. Allora la monta \overline{VF} della vòlta e delle unghie che ne compongono la sua superficie d'intrados eguaglia la metà del lato del poligono regolare, il vertice V si proietta nel centro del poligono, e tutte le unghie sono eguali ed a tutta monta. In questo caso, assai frequente nella pratica, come si è trovato nel numero 91, la superficie di ciascun'unghia deve eguagliare gli $\frac{8}{7}$ dell'area del triangolo che essa copre, e quindi la superficie d'intrados di tutta la vòlta a crociera deve risultare gli $\frac{8}{7}$ dell'area del poligono regolare sul quale essa si proietta orizzontalmente. Segue da ciò che, dicendo

$2c$ il lato del poligono regolare costituente la corda ed
 a l'apotema rappresentante la lunghezza di ciascun'unghia,
 n il numero dei lati del poligono e

Σ_c la superficie d'intrados della vòlta,
 si ha

$$\Sigma_c = \frac{8}{7} nac.$$

Fra le quantità a , c ed n esiste poi la nota relazione

$$a = c \cot \frac{180^\circ}{n} \quad (1),$$

che sempre passa fra la metà del lato, l'apotema ed il numero dei lati del poligono regolare.

2° Se le diverse lunette AGB , BHC , CID , DKE , ELA , sono mezze ellissi eguali e se i loro semi-assi \overline{MG} , \overline{NH} , \overline{OI} , \overline{PK} , \overline{QL} , eguali alla monta \overline{FV} della vòlta, hanno lunghezza minore della metà del lato del poligono regolare coperto dalla vòlta, tutte le unghie sono eguali ed a monta depresso con direttrice ellittica. Segue da ciò che, ritenute le denominazioni già stabilite per quanto si riferisce al lato, all'apotema ed al numero dei lati del poligono regolare e detta m la monta della vòlta, si ha che la sua super-

ficie Σ_c , somma di n unghie cilindriche eguali di corda $2c$, di lunghezza a e di monta m , vien data (num 91) da

$$\Sigma_c = na \left[L - c \left(1 + \frac{1 - e^2}{2eK} \log \frac{1+e}{1-e} \right) \right].$$

In questa formola devesi porre: per L lo sviluppo della semi-ellisse direttrice d'un'unglia i cui semi-assi sono c ed m , il qual sviluppo si ottiene con una delle regole che vennero date nei numeri 41 e 42; per e il valore che ricavasi dalla formola

$$e = \frac{\sqrt{c^2 - m^2}}{c};$$

e per K il noto numero 0,45429448.....

Invece d'impiegare la formola (5) del numero 91 nel calcolo della superficie di ciascun'unglia componente la superficie d'intrados della vòlta a crociera, si può anche far uso della formola (7) dello stesso numero, ed allora la superficie Σ_c della vòlta a crociera su pianta regolare vien data da

$$\Sigma_c = na c \left\{ \begin{aligned} & \left((\pi - 2) - \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 \pi - \frac{2}{3} \right] e^2 - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 \pi - \frac{2}{5} \right] e^4 \right) \\ & - \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \right)^2 \pi - \frac{2}{7} \right] e^6 - \dots \end{aligned} \right\}.$$

Questa formola dà risultamenti sempre un po' maggiori del vero, i quali tanto più si approssimano alla verità, quanto più grande è il numero dei termini di cui si tien conto nel fattore svolto in serie.

Quando si crede sufficiente l'approssimazione a cui conduce l'applicazione della formola (9) del citato numero 91 nel calcolo della superficie dell'unglia cilindrica a monta depressa con direttrice ellittica, la superficie Σ_c può essere calcolata mediante la semplicissima formola

$$\Sigma_c = na \frac{43c^2 + 5m^2}{42c},$$

5° Presentandosi il caso di dover trovare la superficie di una vòlta a crociera su pianta regolare, colla superficie d'intrados costituita da unghie cilindriche con direttrice ellittica a monta rialzata, la superficie di ciascun'unghia si deve calcolare colla formola (10) del numero 91, e quindi la superficie d'intrados Σ_c della vòlta vien data da

$$\Sigma_c = n a \left\{ L - c \left[1 + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = \varepsilon) \right] \right\},$$

nella qual formola devesi porre per L lo sviluppo della semi-ellisse di semi-asse maggiore m e di semi-asse minore c , e per ε il numero che ricavasi dall'equazione

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{m^2 - c^2}}{c}.$$

Il calcolo della superficie di ciascun'unghia cilindrica, componente la superficie d'intrados della vòlta a crociera in quistione, può anche essere fatto mediante la formola (12) del numero 91, e così si può adottare nella determinazione della superficie Σ_c la formola

$$\Sigma_c = n a m \left\{ \begin{aligned} & (\pi - 2) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{2}{3} \right) \eta^2 - \frac{1.1}{2.4} \left(\frac{1.3}{2.4} \pi - \frac{2}{5} \right) \eta^4 \\ & - \frac{1.1.3}{2.4.6} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \pi - \frac{2}{7} \right) \eta^6 - \dots \end{aligned} \right\}.$$

In questa formola bisogna porre

$$\eta = \frac{\sqrt{m^2 - c^2}}{m};$$

ed i risultati a cui essa conduce, sempre un po' maggiori del vero, sono tanto più esatti quanto più grande è il numero dei termini di cui si tien conto nel fattore svolto in serie.

Stimandosi sufficiente l'approssimazione a cui conduce la formola (14) del numero 91 nel calcolo della superficie di ciascuna

delle unghie componenti l'intrados della vòlta a crociera con unghie cilindriche a monta rialzata, la superficie Σ_c si può dedurre dalla formola

$$\Sigma_c = n a \frac{1993 m^4 + 2174 m^2 c^2 - 327 c^4}{3360 m^3}.$$

126. Superficie della vòlta a crociera su pianta rettangolare e con unghie cilindriche. — Sia ABCD (*fig.* 155) il rettangolo coperto dalla vòlta e si chiamino

a il lato maggiore \overline{AB} e

b il lato minore \overline{BC} dell'indicato rettangolo,

m la monta \overline{OV} e

Σ_c la superficie d'intrados della vòlta.

1° Se la monta \overline{OV} della vòlta è minore della metà del lato minore \overline{BC} del rettangolo che essa copre, le quattro unghie cilindriche VAEB, VBFC, VCGD e VDHA sono a monta depressa e, essendo semi-ellissi le loro direttrici, si ha: che la somma delle superficie delle due unghie VAEB e VCGD, aventi $\frac{1}{2}a$ per semi-corda, $\frac{1}{2}b$ per lunghezza ed m per monta, vien espressa, per la formola (5) del numero 91, da

$$b \left[L - \frac{1}{2} a \left(1 + \frac{1-e^2}{2eK} \log \frac{1+e}{1-e} \right) \right],$$

essendo L lo sviluppo della semi-ellisse di semi-asse maggiore $\frac{1}{2}a$ e di semi-asse minore m , e risultando il valore di e dalla formola

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - 4m^2}}{a} \quad (1);$$

che la somma delle superficie delle due unghie VBFC e VDHA, aventi $\frac{1}{2}b$ per semi-corda, $\frac{1}{2}a$ per lunghezza ed m per monta, analogamente vien espressa da

$$a \left[L' - \frac{1}{2} b \left(1 + \frac{1 - e'^2}{2e'K} \log \frac{1 + e'}{1 - e'} \right) \right];$$

dove L' rappresenta lo sviluppo della semi-ellisse di semi-asse maggiore $\frac{1}{2}b$ e di semi-asse minore m , ed e' il numero che ricavasi dall'equazione

$$e' = \frac{\sqrt{b^2 - 4m^2}}{b} \quad (2);$$

e che la formola determinatrice della superficie Σ_c , somma delle due espressioni trovate, risulta

$$\Sigma_c = \left\{ \begin{array}{l} bL + aL' - ab \\ - \frac{1}{4} \frac{ab}{K} \left(\frac{1 - e^2}{e} \log \frac{1 + e}{e - e} + \frac{1 - e'^2}{e'} \log \frac{1 + e'}{1 - e'} \right) \end{array} \right\}.$$

Gli sviluppi L ed L' delle due semi-ellissi, aventi rispettivamente $\frac{1}{2}a$ ed $\frac{1}{2}b$ per semi-assi maggiori ed m per semi-assi minori, facilmente si ottengono colle regole che vennero date nei numeri 41 e 42; i valori di e ed e' si deducono dalle formole (1) e (2); e per valore di K si assume il noto numero 0,43429448

Invece dell'ultima formola, si può adottare, nel calcolo della superficie della vólta in quistione, quella che risulta applicando la formola (7) del numero 91 alla determinazione della superficie di ciascun'unghia, e facilmente si arriva alla seguente equazione determinatrice di Σ_c .

$$\Sigma_c = \frac{ab}{2} \left\{ \begin{array}{l} 2(\pi - 2) - \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 \pi - \frac{2}{5} \right] (e^2 + e'^2) \\ - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 \pi - \frac{2}{5} \right] (e^4 + e'^4) \\ - \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \right)^2 \pi - \frac{2}{7} \right] (e^6 + e'^6) - \dots \end{array} \right\}.$$

I valori di e e di e' da porsi in questa formola, si ottengono dalle equazioni (1) e (2), ed i risultati a cui essa conduce, sempre maggiori del vero, tanto più si accostano alla verità quanto più grande è il numero dei termini di cui si tien conto nel fattore svolto in serie.

Allorquando nel calcolo della superficie delle quattro unghie componenti l'intrados della vòlta a crociera si reputa conveniente la formola d'approssimazione (9) del citato numero 91, la superficie Σ_c vien data dalla semplice formola

$$\Sigma_c = \frac{43a^2b^2 + 10m^2(a^2 + b^2)}{42ab}$$

2° Se la monta \overline{OV} della vòlta a crociera su pianta rettangolare è eguale alla metà del lato minore \overline{BC} , le due unghie VAEB e VCGD riescono ancora a monta depressa, mentre le altre due VBFC e VDHA sono a tutta monta. La formola (1), per $m = \frac{1}{2}b$, si riduce a

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a};$$

la formola (2) dà $e' = 0$; lo sviluppo L diventa quello della mezza ellisse di semi-asse maggiore $\frac{1}{2}a$ e di semi-asse minore $\frac{1}{2}b$; lo sviluppo L' si riduce a $\frac{1}{2}\pi b$, ossia a quello della semi-circonferenza di raggio $\frac{1}{2}b$; e la superficie Σ_c vien data, o dalla formola

$$\Sigma_c = bL + \frac{ab}{2} \left(\pi - 3 - \frac{1-e^2}{2eK} \log \frac{1+e}{1-e} \right),$$

oppure dall'altra

$$\Sigma_c = \frac{ab}{2} \left\{ \begin{array}{l} 2(\pi - 2) - \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 \pi - \frac{2}{3} \right] e^2 - \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1.3}{2.4} \right)^2 \pi - \frac{2}{5} \right] e^4 \\ - \frac{1}{5} \left[\left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \right)^2 \pi - \frac{2}{7} \right] e^6 - \dots \end{array} \right\},$$

la quale dà risultati tanto più esatti quanto più grande è il numero dei termini di cui si tien conto nel fattore svolto in serie.

Qualora poi si creda di raggiungere una sufficiente approssimazione impiegando la formola (9) del numero 91 per il calcolo della superficie delle due unghie a monta depressa VAEB e VCGD, siccome per superficie delle altre due unghie si possono assumere gli $\frac{8}{7}$ dell'area che esse coprono, si arriva alla seguente semplicissima formola determinatrice della superficie Σ_c .

$$\Sigma_c = b \frac{91 a^2 + 5 b^2}{84 a}.$$

5° Quando la monta \overline{OV} di una vólta a crociera su pianta rettangolare è maggiore della metà del lato maggiore \overline{AB} , le quattro unghie componenti la sua superficie d'intrados sono a monta rialzata, e si ha: che la somma della superficie delle due unghie VAEB e VCGD, le quali hanno rispettivamente per semi-corda, per lunghezza e per monta $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$ ed m , vien espressa da

$$b \left\{ L - \frac{1}{2} a \left[1 + \frac{1 + \varepsilon^2}{\varepsilon} \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = \varepsilon) \right] \right\},$$

essendo L lo sviluppo della mezza ellisse di semi-asse maggiore m e di semi-asse minore $\frac{1}{2}a$, ed essendo ε la quantità che risulta dalla formola

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{4m^2 - a^2}}{a} \quad (3);$$

che la somma delle superficie delle due unghie VBFC e VDHA, le quali hanno rispettivamente $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}a$ ed m per semi-corda, per lunghezza e per monta, vale

$$a \left\{ L' - \frac{1}{2} b \left[1 + \frac{1 + \varepsilon'^2}{\varepsilon'} \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = \varepsilon') \right] \right\},$$

dove per L' si deve assumere lo sviluppo della mezza ellisse di semi-asse maggiore m e di semi-asse minore $\frac{1}{2}b$, e dove si deve prendere per valore di ϵ' quello dato dalla formola

$$\epsilon' = \frac{\sqrt{4m^2 - b^2}}{b} \quad (4);$$

e che quindi la superficie d'intrados Σ_c della vòlta in quistione vien data dalla formola

$$\Sigma_c = \left\{ \begin{array}{l} bL + aL' - ab \\ -\frac{1}{2}ab \left[\frac{1 + \epsilon^2}{\epsilon} \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = \epsilon) + \frac{1 + \epsilon'^2}{\epsilon'} \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = \epsilon') \right] \end{array} \right\}.$$

Gli sviluppi L ed L' si ottengono con una delle regole che vennero date nei numeri 41 e 42, ed i valori di ϵ e di ϵ' si deducono dalle formole (5) e (4).

Qualora esprimasi la superficie di ciascun'unghia applicando la formola (12) del numero 91, la superficie Σ_c della vòlta a crociera su pianta rettangolare e con tutte le sue unghie a mont rialzata, può essere calcolata mediante la formola

$$\Sigma_c = m \left\{ \begin{array}{l} (\pi - 2)(b + a) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{2}{3} \right) (b\eta^2 + a\eta'^2) \\ - \frac{1.1}{2.4} \left(\frac{1.3}{2.4} \pi - \frac{2}{5} \right) (b\eta^4 + a\eta'^4) \\ - \frac{1.1.3}{2.4.6} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \pi - \frac{2}{7} \right) (b\eta^6 + a\eta'^6) - \dots \end{array} \right\}.$$

I valori di η e di η' che entrano in questa formola sono dati dalle equazioni

$$\eta = \frac{\sqrt{4m^2 - a^2}}{2m}$$

$$\eta' = \frac{\sqrt{4m^2 - b^2}}{2m},$$

e conduce essa a risultamenti tanto più esatti quanto più grande è il numero dei termini di cui si tien conto nel fattore svolto in serie.

Nei casi poi in cui è sufficiente l'approssimazione che dà la formola (14) del numero 94 nella valutazione della superficie dell'unghia cilindrica retta con direttrice ellittica a monta rialzata, si può calcolare la superficie Σ_c mediante la formola

$$\Sigma_c = \frac{(31888 m^2 + 8696 ab)(a+b)m^2 - 327(a^3 + b^3)ab}{53760 m^3}.$$

4° Avvenendo il caso in cui la monta \overline{OV} della vólta in questione è eguale alla metà del lato maggiore \overline{AB} del rettangolo che essa copre, risultano a tutta monta le due unghie cilindriche VAEB e VCGD, a monta rialzata le altre due VBFC e VDHA.

Per $m = \frac{1}{2}a$ il valore di ϵ diventa zero, e vien dato dalla formola

$$\epsilon' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

quello di ϵ' . Lo sviluppo L diventa $\frac{1}{2}\pi a$ ossia quello della mezza circonferenza di raggio $\frac{1}{2}a$; lo sviluppo L' si riduce a quello della mezza ellisse di semi-asse maggiore $\frac{1}{2}a$ e di semi-asse minore $\frac{1}{2}b$; e la formola determinatrice della superficie Σ_c risulta

$$\Sigma_c = aL' + \frac{ab}{2} \left[\pi - 3 - \frac{1 + \epsilon'^2}{\epsilon'} \arccos(\epsilon') \right].$$

Se poi si osserva che per $m = \frac{1}{2}a$ il valore di η diventa zero, riesce facile il dedurre come la superficie Σ_c si possa anche ricavare dalla formola

$$\Sigma_c = m \left\{ \begin{array}{l} (\pi - 2)(b + a) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \pi - \frac{2}{3} \right) a \eta'^2 \\ - \frac{1.1}{2.4} \left(\frac{1.3}{2.4} \pi - \frac{2}{5} \right) a \eta'^4 \\ - \frac{1.1.3}{2.4.6} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6} \pi - \frac{2}{7} \right) a \eta'^6 - \dots \end{array} \right\},$$

quando in essa si faccia

$$\eta' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

e quando tengasi conto d'un sufficiente numero di termini nel fattore svolto in serie.

Finalmente, qualora basti l'approssimazione a cui conduce l'uso della formola (14) del numero 91 nella valutazione della superficie delle due unghie a monta rialzata, assumendo per superficie delle altre due unghie gli $\frac{8}{7}$ dell'area che esse coprono, si arriva alla seguente formola determinatrice di Σ_c .

$$\Sigma_c = \frac{1993 a^4 + 3840 a^3 b + 2174 a^2 b^2 - 327 b^4}{6720 a^2}.$$

127. Superficie delle volte a crociera con unghie cilindroidiche. — Per ottenere che le curve AGB, BHC, CID, DKE, ELA (fig. 134) siano mezzecirconferenze e quindi mezzi circoli le lunette corrispondenti, e per rendere possibile la costruzione di volte a crociera col loro vertice V avente qualsiasi altezza al di sopra del piano d'imposta, ben di frequente si costruiscono le volte a crociera con unghie cilindroidiche. Considerando una qualunque delle unghie componenti la superficie d'intrados di una di queste volte, per esempio quella che copre il triangolo FAB, la sua superficie sarebbe generata: per la parte VGB da una retta che si muove passando per un punto del quarto di circonferenza GB e per un punto del quarto di ellisse VB, e conservandosi parallela al piano verticale determinato dai due punti G e V; ed analogamente per la parte VGA da una retta che si muove passando per un punto del

quarto di circonferenza GA e per un punto del quarto di ellisse VA, e mantenendosi parallela allo stesso piano verticale. Adottando per tutte le altre unghie il sistema di generazione or ora indicato, si viene a definire l'intrados di una vólta a crociera con unghie cilindroidiche, e per valutare la sua superficie bisogna generalmente procedere separatamente al calcolo di quella delle diverse unghie e sommare quindi i risultati che si ottengono.

La superficie di un'unghia cilindroidica è un elemento difficile a valutarsi, e mi limito a suggerire due metodi d'approssimazione che credo utili e sufficienti nelle ordinarie circostanze della pratica.

Supponendo che debbasi trovare la superficie di un'unghia cilindroidica coprente un triangolo qualunque, s'incominci dal segnare la sua proiezione sul piano d'imposta, che suppongo orizzontale, nel triangolo ACB (*fig. 456*). Si rappresenti la sua proiezione verticale su un piano parallelo al piano verticale determinato dall'altezza \overline{CE} dell'indicato triangolo, la qual proiezione consta della retta $\overline{A'D'}$ perpendicolare alla linea di terra e lunga la metà di \overline{AB} , del quarto di ellisse $A'C'$ di semi-assi $\overline{A'C'_1} = \overline{EC}$ e $\overline{C'_1C'}$ eguale alla monta dell'unghia, e della retta $\overline{D'C'}$. Finalmente si faccia un ribattimento sul piano verticale di proiezione della semi-circonferenza già rappresentata nelle rette \overline{BA} e $\overline{A'D'}$.

Fatto questo, s'immagini tagliata l'unghia mediante due sistemi di piani verticali, gli uni paralleli alla mediana DC del triangolo coperto dall'unghia e gli altri paralleli alla base AB dello stesso triangolo. Le tracce orizzontali dei piani appartenenti al primo sistema sono le rette ab, cd, ef, \dots parallele a DC, mentre le tracce orizzontali dei piani appartenenti al secondo sistema sono le rette hb, id, kf, \dots parallele ad AB. Quando abbiasi l'avvertenza di fare in modo che le tracce orizzontali del secondo sistema incontrino le rette AC e BC negli stessi punti b, d, f, \dots in cui sono incontrate dalle tracce orizzontali del primo sistema, la proiezione orizzontale ABC dell'unghia rimane scomposta in triangoli e parallelogrammi, e basta procurarsi, almeno approssimativamente, le parti d'unghia coprenti tutte queste figure, per ottenere nella loro somma il valore approssimato dell'unghia intiera. Per giungere allo scopo, è necessario conoscere le altezze al di sopra del piano d'imposta di tutti i punti della superficie dell'unghia, proiettati nei vertici delle figure elementari in cui venne scomposto il triangolo ABC; ed ecco come facilmente si arriva alla loro determinazione. Quando trattasi di un punto, come quello

proiettato in c , posto sulla mezza circonferenza, le cui proiezioni orizzontale e verticale sono rispettivamente \overline{AB} ed $\overline{A'D'}$, si prende $\overline{A''c_1''} = \overline{Ac}$, si segna l'ordinata $\overline{c_1''c''}$ nella semi-circonferenza $A''D''B''$: quest'ordinata rappresenta l'altezza del punto dell'unghia, orizzontalmente proiettato in c , al di sopra del piano d'imposta. Quando il punto dell'unghia pel quale vuolsi l'altezza al di sopra del piano d'imposta trovasi, come il punto d , proiettato sulla retta AC , da d si conduce la dd' perpendicolare alla linea di terra, prendesi l'ordinata $d_1'd'$ del quarto di ellisse $A'C'$, e quest'ordinata rappresenta la voluta altezza. Quando il punto dell'unghia, pel quale cercasi l'altezza al di sopra del piano d'imposta, proiettasi in uno dei vertici posti nel triangolo ABC , per esempio nel vertice m , osservasi: che la proiezione orizzontale della generatrice passante per un tal punto è la retta ef ; che la proiezione verticale della stessa generatrice risulta prendendo $\overline{A''e_1''} = \overline{Ae}$, tirando l'ordinata $\overline{e_1''e''}$ nella semi-circonferenza $A''D''B''$, determinando il punto e' coll'assumere $\overline{A'e'} = \overline{e_1''e''}$ ed il punto f' coll'abbassare da f una perpendicolare alla linea di terra fino ad incontrare il quarto di ellisse $A'C'$ e conducendo la retta $e'f'$; che la proiezione verticale del punto dell'unghia proiettato orizzontalmente in m è il punto m' in cui la perpendicolare alla linea di terra, condotta per m , incontra la retta $e'f'$; e finalmente che si ha l'altezza domandata nella retta $\overline{m_1'm'}$. — Una volta determinate le altezze di tutti i punti dell'unghia proiettati nei vertici dei triangoli e parallelogrammi in cui venne scomposta la sua proiezione orizzontale ABC , anche i parallelogrammi si scompongono in triangoli, ed alla superficie dell'unghia s'immagina sostituita la superficie poliedrica a facce triangolari, aventi i loro vertici nei punti dell'unghia di cui vennero determinate le altezze e proiettantisi orizzontalmente nei triangoli in cui trovasi scomposta la proiezione orizzontale ABC dell'unghia. Per ciascuna delle dette facce triangolari, riesce facile il calcolo dei lati, giacchè sono note le lunghezze delle loro proiezioni orizzontali, non che le differenze di livello dei loro estremi; e, conosciuti i lati, si può passare al calcolo dell'area. La somma poi delle aree delle facce triangolari componenti la superficie polidrica, che si sostituisce all'unghia, dà approssimativamente la superficie di questa, la quale evidentemente riesce tanto più prossima al vero, quanto più sono vicine fra di loro le rette $ab, cd, ef, \dots, bh, di, fh, \dots$.

L'esposto metodo per trovare la superficie di un'unghia conoi-

dica riesce generalmente lungo e faticoso, ed i pratici preferiscono l'impiego d'una formola empirica, tuttochè non sappiasi precisare il grado d'approssimazione a cui essa conduce. Considerando innanzi tutto il caso d'un'unghia conoidica retta, ossia di un'unghia conoidica coprente un triangolo CAB (*fig. 137*) isoscele sulla base AB, e chiamando

$2c$ la corda \overline{AB} ,

l la lunghezza \overline{CD} dell'unghia,

m la monta \overline{CV} ed

S la superficie domandata,

empiricamente suolsi calcolare la superficie S mediante la semplicissima formola

$$S = \left(2c + \frac{2}{7}m \right) \frac{l}{2}.$$

Quando l'unghia non è retta, ossia quando il triangolo CAB è un triangolo qualunque, si assume per lunghezza l dell'unghia la sua mediana \overline{DC} , ossia la retta che unisce il suo vertice col mezzo della sua base, per semi-corda c si prende la perpendicolare \overline{BF} calata dal vertice B sulla detta mediana, e si ottiene la superficie colla stessa formola.

128. Superficie della vòlta a crociera su pianta regolare con unghie cilindroidiche. — La superficie d'intrados di questa vòlta è costituita da tante unghie cilindroidiche rette eguali, quanti sono i lati del poligono regolare che essa copre. Tutte queste unghie hanno per corda il lato dell'accennato poligono regolare, per lunghezza l'apotema, e per monta la retta che unisce il centro dello stesso poligono col punto in cui vengono a riunirsi i vertici delle diverse unghie. La superficie d'intrados poi dell'intera vòlta a crociera si ottiene procurandosi prima la superficie d'una mezz'unghia, applicando il metodo d'approssimazione esposto nel precedente numero ragionando sulla figura 136, e moltiplicando il risultato che si ottiene per il doppio del numero dei lati del poligono regolare.

Quando, invece dell'accennato metodo d'approssimazione, si crede opportuno di adottare la formola empirica che venne data nel precedente numero per valutare la superficie di ciascun'unghia componente la superficie d'intrados della vòlta, chiamando

$2c$ il lato,

a l'apotema ed

n il numero dei lati del poligono regolare che essa copre,

m la monta della vólta a crociera e
 Σ_c la sua superficie d'intrados,
 si ha la formola

$$\Sigma_c = n \left(2c + \frac{2}{7}m \right) \frac{a}{2},$$

e fra le quantità a , c ed n esiste la nota relazione (4) del numero 125.

129. **Superficie della vólta a crociera su pianta rettangolare con unghie cilindroidiche.** — La vólta a crociera con unghie cilindroidiche di cui vuoi si trovare la superficie, sia quella rappresentata nella figura 153, e si chiamino

a il lato maggiore \overline{AB} ,

b il lato minore \overline{BC} del rettangolo $ABCD$ coperto dalla vólta
 m la monta \overline{OV} ,

Σ_c la superficie d'intrados che vuoi si valutare.

Adottando la formola empirica che venne data nel precedente numero per trovare le superficie delle quattro unghie componenti la superficie d'intrados della vólta in quistione, si ha che la somma delle superficie delle due unghie $VAEB$ e $VCGD$ vale

$$\left(a + \frac{2}{7}m \right) \frac{b}{2};$$

che la somma delle superficie delle due unghie $VBFC$ e $VDHA$ ammette per valore l'espressione

$$\left(b + \frac{2}{7}m \right) \frac{a}{2};$$

e finalmente che la formola determinatrice di Σ_c risulta

$$\Sigma_c = ab + \frac{1}{7}(a+b)m.$$

Se la monta \overline{OV} della vólta è eguale alla metà del lato maggiore \overline{AB} del rettangolo che essa copre, le due unghie $VAEB$ e $VCGD$ diventano unghie cilindriche a tutta monta, le altre due restano cilindroidiche e facendo $m = \frac{1}{2}a$ nell'ultima formola si trova

$$\Sigma_c = a \frac{15b+a}{14}.$$

150. **Superficie delle vólte a crociera con unghie dette sferiche generate da un arco circolare di forma variabile.** — Invece delle vólte a crociera con unghie cilindroidiche, vantaggiosamente si possono impiegare le vólte a crociera con unghie dette sferiche, generate da un arco di forma variabile, giacchè, senza nuocere alla facilità d'esecuzione, le seconde riescono più belle e più eleganti delle prime. La superficie d'intrados di una di tali vólte consta di tante unghie, quanti sono i lati del poligono che essa copre; i vertici delle diverse unghie si riuniscono in uno stesso punto che si proietta verso il mezzo del poligono coperto dalla vólta o nel suo centro, se è regolare; e ciascun'unghia ammette il sistema di generazione che vado ad indicare ragionando sulla figura 159, che suppongo rappresentare un'unghia sferica generata da un arco di forma variabile e facente parte d'un'intiera vólta a crociera, la quale copre un poligono, cui appartiene il triangolo d'imposta FAB coperto dall'indicata unghia. Nel piano verticale determinato dalle due rette \overline{VF} ed \overline{FB} s'immagini descritto un quarto d'ellisse VB avente per semi-assi le lunghezze delle accennate due rette, ed analogamente nel piano verticale delle due rette \overline{VF} ed \overline{FA} s'immagini descritto il quarto d'ellisse VA di semi-assi lunghi come le ultime due rette; un arco circolare, tracciato colla condizione di passare pel punto più alto H della semi-circonferenza AHB non che pel vertice V e di avere la tangente orizzontale in questo vertice, suppongasi descritto nel piano verticale HGFV; e finalmente s'immagini che un arco di circolo di forma variabile si muova in un piano verticale parallelo a quello della semi-circonferenza AHB passando pei tre punti in cui questo piano taglia le tre curve VA, VH e VB. L'arco di forma variabile, movendosi come si è detto, genera una superficie, che impropriamente suolsi chiamare *unghia sferica*.

La determinazione della superficie d'un'unghia sferica, generata come si è detto, costituisce un problema che non si sa ancora risolvere in modo esatto; e, per le ordinarie circostanze della pratica, può bastare la seguente risoluzione approssimata. Supponendo che vogliasi trovare la superficie di un'unghia sferica coprente un triangolo isoscele, s'incominci a segnare la sua proiezione sul piano

d'imposta, che suppongo orizzontale, nel triangolo CAB (*fig. 140*). Si rappresenti dopo la sua proiezione verticale su un piano parallelo al piano verticale, determinato dall'altezza \overline{CD} dell'indicato triangolo, la qual proiezione consta della retta $\overline{A'D'}$ perpendicolare alla linea di terra ed eguale alla metà di \overline{AB} , del quarto di ellisse $A'C'$ di semi-assi $\overline{A'C'_1} = \overline{DC}$ e $\overline{C'_1C'}$ eguale alla monta dell'unghia e dell'arco circolare $D'C'$ passante pei due punti dati D' e C' ed avente la sua tangente orizzontale nel punto C' . Fatto questo, s'immagini tagliata la superficie dell'unghia mediante tanti piani di profilo assai vicini fra di loro; e per fissare le idee, siano bm' , dn' , fo' , rette perpendicolari alla linea di terra determinanti le tracce di alcuni di questi piani. La superficie dell'unghia resta intersecata da questi piani secondo archi circolari le cui corde sono evidentemente le rette \overline{ab} , \overline{cd} , \overline{ef} , ed aventi rispettivamente per saette le rette $\overline{a'm'}$, $\overline{c'n'}$, $\overline{e'o'}$, Conoscendosi le corde e le saette di questi archi circolari, riesce facile ottenere le loro lunghezze. Gli archi $D'm'$, $m'n'$, $n'o'$, in cui gli accennati piani seganti scompongono l'arco di circolo $D'C'$, sono anche tali da potersi facilmente trovare le loro lunghezze; moltiplicando le semi-somme degli archi che limitano le zone d'unghia proiettate nei trapezii $ABba$, $abdc$, $cdfe$, per le lunghezze corrispondenti $D'm'$, $m'n'$, $n'o'$, misurate sull'arco $D'C'$, si può dire che si ottengono approssimativamente le superficie delle accennate zone; e finalmente nella somma di queste superficie risulta quella dell'unghia, la quale evidentemente riesce tanto più prossima alla vera, quanto più i piani seganti di tracce orizzontali ab , cd , ef , si conducono vicini l'uno all'altro.

151. Superficie delle vólte a crociera con unghie dette sferiche generate da un arco circolare di raggio costante. — Le unghie impropriamente denominate unghie sferiche, che s'impiegano per comporre la superficie d'intrados delle vólte a crociera, non sono sempre generate come si è detto nel precedente numero, e qualche volta ammettono questo secondo sistema di generazione. Supponendo che sia FAB (*fig. 159*) un triangolo il quale fa parte di un poligono da coprirsi con una vólta a crociera, ed essendo \overline{AB} quel lato del triangolo che appartiene al perimetro del detto poligono, si descriva nel piano verticale determinato dal lato \overline{AB} la mezza circonferenza di circolo AHB , nei due piani AFV e BFV si traccino rispettivamente i due quarti d'ellisse AV e BV col semi-asse comune \overline{FV} eguale alla monta della vólta, e si faccia

scorrere la mezza circonferenza AHB in modo da conservarsi il suo piano parallelo a quello in cui trovavasi nella sua posizione iniziale, colla tangente orizzontale nel suo punto di mezzo. Le successive parti di questa mezza circonferenza, le quali rimangono intercette fra i due quarti d'ellisse AV e BV , costituiscono evidentemente una superficie di facile esecuzione nella pratica, che può assumersi siccome quella d'un'unghia che serve a coprire il triangolo FAB e che impropriamente suolsi anche chiamare *unghia sferica*.

Per determinare la superficie d'un'unghia sferica generata da un arco di circolo di raggio costante, si può seguire il seguente metodo d'approssimazione da chi possiede le sole nozioni di matematiche elementari. Posto il caso più frequente della pratica, in cui l'unghia deve coprire un triangolo isoscele, che si suppone contenuto nel piano orizzontale d'imposta, si faccia la sua proiezione orizzontale nel triangolo ABC (*fig. 141*); si assuma la linea di terra perpendicolare alla base \overline{AB} di questo triangolo; si rappresenti nella retta $\overline{A'D'}$, eguale alla metà di \overline{AB} e perpendicolare alla linea di terra, la mezza circonferenza di circolo orizzontalmente proiettata in \overline{AB} ; si fissi il punto C' sulla perpendicolare alla linea di terra abbassata da C ed elevato su questa linea della quantità $\overline{C_1'C'}$ eguale alla monta dell'unghia; e si descriva il quarto di ellisse $A'C'$ i cui semi-assi sono $\overline{A'C_1'} = \overline{DC}$ e $\overline{C_1'C'}$. Fatto questo, si passi a fare la proiezione dell'unghia su un piano di profilo ossia su un piano parallelo a quello che contiene la mezza circonferenza proiettata orizzontalmente in \overline{AB} e verticalmente in $\overline{A'D'}$. Questa terza proiezione si riduce alla mezza circonferenza $A''D''B''$ di diametro $\overline{A''B''} = \overline{AB}$ ed alla mezza ellisse $A''C''B''$ di semi-assi $\overline{D_1''A''}$ e $\overline{D_1''C''}$, rispettivamente eguali alla metà della corda \overline{AB} ed alla monta $\overline{C_1'C'}$, e rappresentante i due quarti di ellisse proiettati orizzontalmente nelle rette \overline{CA} e \overline{CB} . Se ora immaginasi tagliata l'unghia mediante tanti piani di profilo assai vicini fra di loro e le cui tracce sono le rette bm', dn', fo', \dots , le intersezioni di questi piani colla superficie dell'unghia sono tanti archi circolari di raggio eguale alla metà di \overline{AB} . Le corde di questi archi sono le rette ab, cd, ef, \dots , e le loro saette risultano: portando le dette rette in $a_1''b_1'', c_1''d_1'', e_1''f_1'', \dots$, metà a dritta e metà a sinistra del centro D_1'' ; conducendo nella semi-ellisse $A''C''B''$ le ordinate corrispondenti agli estremi a_1'' e b_1'' , c_1'' e d_1'' , e_1'' ed f_1'' , \dots per determinare i punti a'' e b'' , c'' e

d'' , e'' ed f'' ,; facendo centro nei punti a'' , c'' , e'' , con raggio eguale a $D_1''A''$ e tagliando la retta $D_1''C''$ in 1, 2, 3,, descrivendo gli archi $a''b''$, $c''d''$, $e''f''$, che hanno questi centri e l'accennato raggio; e conducendo dai punti m'' , n'' , o'' , delle parallele alla linea di terra fino ad incontrare in m' , n' , o' , le direzioni ba' , dc' , fe' , Le lunghezze delle rette $a'm'$, $c'n'$, $e'o'$, rappresentano le saette degli archi circolari secondo cui i piani verticali di tracce orizzontali ab , cd , ef , tagliano la superficie dell'unghia, ed i punti D' , m' , n' , o' , C' , uniti fra di loro mediante una curva, determinano l'intersezione dell'unghia col piano verticale di traccia orizzontale CD . Gli accennati archi circolari, per cui si conoscono corde e saette, scompongono la superficie dell'unghia in tante zone, e quando i detti archi siano sufficientemente vicini, si può ritenere che la superficie di ciascuna di esse sia data dalla sua larghezza misurata sulla curva culminante $D'n'C'$ per la semi-somma delle lunghezze degli archi circolari fra cui si trova. La somma delle superficie di tutte le zone comprese fra i varii archi circolari, tracciati sull'unghia nel modo indicato, dà il valore approssimato della sua superficie totale.

Per quanto a me consta, i metodi di generazione delle unghie sferiche descritte in questo e nel precedente numero, vennero ideati dal distinto architetto Carlo Promis, Professore d'architettura civile presso la R. Scuola d'applicazione degli Ingegneri in Torino; e la prima volta vennero pubblicati per le stampe nel volume di quest'opera sull'arte di fabbricare il quale tratta dei *Lavori generali d'architettura civile, stradale ed idraulica*, al capitolo VII ed a numero 260. Il problema della determinazione analitica delle loro superficie, che sembra presentare delle difficoltà per le unghie sferiche generate da un arco di circolo di raggio variabile, si può risolvere per l'unghia sferica generata da un arco di raggio costante, ed ecco come sono giunto a stabilire la formola conveniente al caso più frequente della pratica in cui l'unghia copre un triangolo isoscele.

Essendo $VAHB$ l'unghia che si considera (*fig. 459*) ed ABF i triangolo isoscele che essa copre, si chiamino:

$2c$ la base \overline{AB} dell'indicato triangolo, ossia la corda dell'unghia

l l'altezza \overline{FG} dello stesso triangolo, ossia la lunghezza dell'unghia

m la sua monta \overline{VF} ed

S la sua superficie.

Immaginando un piano qualunque $abb'd'$ parallelo a quello della lunetta AHB , questo piano taglia l'unghia secondo un arco circolare $a'd'b'$ di raggio c , e dicendo x la lunghezza della retta \overline{Fd} che misura la distanza di questo piano dal punto F , si ha per la similitudine dei due triangoli Fab ed FAB

$$\overline{ab} = \overline{a'b'} = \frac{2c}{l} x,$$

e quindi

$$\overline{ad} = \overline{a'e} = \frac{c}{l} x.$$

Se osservasi che, supponendo descritta l'intera circonferenza cui appartiene l'arco $a'd'b'$, la semi-corda $\overline{a'e}$ è media proporzionale fra i due segmenti adiacenti dal diametro, si ha

$$\overline{ed'} (2c - \overline{ed'}) = \frac{c^2}{l^2} x^2,$$

dalla quale, per essere $\overline{ed'}$ minore di c , si ricava

$$\overline{ed'} = c \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \right).$$

Essendo i triangoli FGB ed Fda rettangoli in G ed in d , ed i loro cateti essendo $\overline{FG} = l$ e $\overline{BG} = c$, $\overline{Fd} = x$ ed $\overline{ad} = \frac{c}{l} x$ risulta

$$\overline{FB} = \sqrt{c^2 + l^2}$$

$$\overline{Fa} = x \sqrt{1 + \frac{c^2}{l^2}},$$

per cui l'ordinata $\overline{aa'}$ nel quarto di ellisse $Va'b$ vien data da

$$\overline{aa'} = \frac{m}{\sqrt{c^2 + l^2}} \sqrt{c^2 + l^2 - \left(1 + \frac{c^2}{l^2}\right) x^2} = m \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}.$$

Se ora si assume per origine di coordinate il punto F, se le due direzioni ortogonali Fx ed Fy si prendono per assi coordinati onde riferirvi la curva $Vd'H$ e se chiamasi y l'ordinata $\overline{dd'} = \overline{de} + \overline{ed'}$, per essere \overline{de} eguale ad $\overline{aa'}$, si ha

$$y = c + (m - c) \sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}} \quad (1),$$

la quale, isolando il termine contenente il radicale, elevandola al quadrato e portando tutti i termini nel primo membro, conduce all'equazione

$$y^2 + \frac{(m - c)^2}{l^2} x^2 - 2cy - m(m - 2c) = 0$$

che, paragonata coll'equazione generale del 2° grado a due variabili e coi criterii da cui si conosce quale delle tre curve del 2° grado rappresenta, porta a concludere essere un arco ellittico la curva $Vd'H$. Prendendo per area elementare dS dell'unghia la zona infinitesima compresa fra i due archi infinitamente vicini $a'd'b'$ e $a''d''b''$, dicendo L la lunghezza di uno di essi e ds l'arco infinitamente piccolo della curva VH fra essi compreso, si ha

$$dS = L ds \quad (2).$$

L'arco L , avendo per semi-corda la retta $\overline{ea'}$ di lunghezza $\frac{c}{l}x$ ed appartenendo ad una circonferenza di raggio c , vien dato dalla formola

$$L = 2c \operatorname{arc} \left(\operatorname{sen} = \frac{x}{l} \right),$$

la quale, svolgendo in serie il fattore $\operatorname{arc} \left(\operatorname{sen} = \frac{x}{l} \right)$, si riduce a

$$L = 2c \left(\frac{x}{l} + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3l^3} + \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{x^5}{5l^5} + \dots \right) \quad (3).$$

Il valore di ds vien dato da

$$ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

ossia, svolgendo il radicale in serie, da

$$ds = dx \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1.1}{2.4} \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + \dots \right];$$

e, siccome dalla (1) ricavasi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m-c}{l} \frac{\frac{x}{l}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}},$$

sostituendo nell'ultimo valore di ds , risulta

$$ds = dx \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(m-c)^2}{l^2} \frac{\frac{x^2}{l^2}}{1 - \frac{x^2}{l^2}} - \frac{1.1}{2.4} \frac{(m-c)^4}{l^4} \frac{\frac{x^4}{l^4}}{\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2} + \dots \right].$$

Se ora osservasi che

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{l^2}} = 1 + \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^4}{l^4} + \dots$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)^2} = 1 + 2 \frac{x^2}{l^2} + 3 \frac{x^4}{l^4} + \dots,$$

e se, per essere il rapporto $\frac{x}{l}$ una frazione finchè x si riferisce ad un punto dell'arco $Vd'H$ posto sull'unghia, con un'approssimazione sufficiente per la pratica si trascurano le sue potenze superiori alla quarta, il valore di ds si riduce a

$$ds = dx \left\{ 1 + \frac{1}{2} \frac{(m-c)^2 x^2}{l^2} + \frac{1}{2} \frac{(m-c)^2}{l^2} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{(m-c)^2}{l^2} \right] \frac{x^4}{l^4} \right\}.$$

Questo valore di ds non che quello di L dato dall'equazione (3), trascurando in quest'ultimo le potenze di $\frac{x}{l}$ superiori alla quarta, si pongano nell'equazione (2), e si ottiene

$$dS = 2c \left(\frac{x}{l} + \frac{1}{6} \frac{x^3}{l^3} \right) \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{2} \frac{(m-c)^2 x^2}{l^2} \\ + \frac{1}{2} \frac{(m-c)^2}{l^2} \left[1 - \frac{1}{4} \frac{(m-c)^2}{l^2} \right] \frac{x^4}{l^4} \end{array} \right\} dx,$$

che, effettuando i prodotti e stando nei limiti della prestabilita approssimazione, si riduce a

$$dS = 2cl \left\{ \frac{x}{l} + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} + \frac{(m-c)^2}{l^2} \right] \frac{x^3}{l^3} \right\} d \frac{x}{l}.$$

Se ora si integra quest'equazione e, se l'integrale si prende fra i limiti $x=0$ ed $x=l$, ossia fra $\frac{x}{l}=0$ ed $\frac{x}{l}=1$, risulta

$$S = \frac{1}{4} cl \left[\frac{13}{3} + \frac{(m-c)^2}{l^2} \right] \quad (4).$$

Il metodo seguito per dedurre questa formola chiaramente fa vedere come essa conduca soltanto a risultati d'approssimazione nel valutare la superficie delle unghie, dette sferiche, generate da un arco circolare di raggio costante, coprenti triangoli isosceli le cui basi costituiscono le corde; e, volendosi altre formole che diano risultamenti più approssimati di quelli a cui conduce la formola stabilita, basta tener conto di una o più potenze superiori alla quarta della frazione $\frac{x}{l}$ negli svolgimenti in serie pei quali conveni passare nel procurarsi il valore dell'area elementare dS .

Quando l'unghia, invece di coprire un triangolo isoscele copre

un triangolo qualunque, ossia quando è obliqua invece di essere retta, se chiamasi α l'angolo d'obliquità AGU (fig. 159), che la corda $\overline{AB}=2c$ fa colla perpendicolare GU alla mediana $\overline{FG}=l$, non si va lungi dal vero assumendo la seguente formola determinante della superficie S dell'unghia

$$S = \frac{1}{4} c l \left[\frac{13}{3} + \frac{(m-c)^2}{l^2} \right] \cos \alpha.$$

Ora che si conoscono i metodi i quali conducono in pratica a trovare la superficie delle unghie dette sferiche generate da un arco di circolo di raggio costante, riesce facile il calcolo della superficie d'una vólta a crociera avente il suo intrados composto di tali unghie, giacchè separatamente basta fare le superficie delle unghie componenti e sommarle.

152. Superficie della vólta a crociera con unghie sferiche su pianta regolare. — Quando le unghie componenti la superficie d'intrados di questa vólta sono generate da un arco di circolo di raggio variabile, si ottiene la superficie di un'unghia, col metodo d'approssimazione che venne dato nel numero 150, ed il risultato ottenuto si moltiplica per il numero dei lati del poligono regolare coperto dalla vólta.

Quando invece le dette unghie sono generate da un arco circolare di raggio costante, si può far uso della formola (4) per la valutazione della superficie di ciascun'unghia, ed allora, chiamando

$2c$ il lato,

a l'apotema ed

n il numero dei lati del poligono regolare coperto dalla vólta,

m la monta e

Σ_c la superficie che vuolsi valutare,

si ha

$$\Sigma_c = \frac{1}{4} n a c \left[\frac{13}{3} + \frac{(m-c)^2}{a^2} \right].$$

Tra le quantità a , c ed n ha luogo la nota relazione (1) del numero 125.

153. Superficie della vólta a crociera su pianta rettangolare con unghie sferiche. — Se le unghie formanti la superficie d'intrados di questa vólta sono generate da un arco di circolo di raggio variabile, si trovano prima col metodo che venne dato nel numero

130 le superficie delle due unghie differenti VAEB e VBFG (fig. 142), si sommano i due risultati, e si prende il doppio della somma: questo doppio rappresenta la domandata superficie della vòlta a crociera.

Se le dette unghie sferiche sono generate da un arco di circolo di raggio costante, si può adottare la formola (4) del numero 131 nella loro valutazione e, chiamando

a il lato maggiore \overline{AB} e

b il lato minore \overline{BC} del rettangolo ABCD coperto dalla vòlta, m la monta \overline{OV} ,

Σ_c la superficie della vòlta a crociera coprente il detto rettangolo, si ha: che la somma delle superficie delle due unghie VAEB e VCGD, di semi-corda $\frac{1}{2}a$, di lunghezza $\frac{1}{2}b$ e di monta m , vien espressa da

$$\frac{1}{8}ab \left[\frac{13}{3} + \frac{(2m-a)^2}{b^2} \right];$$

che la somma delle superficie delle due unghie VBFC e VDHA, di semi-corda $\frac{1}{2}b$, di lunghezza $\frac{1}{2}a$ e di monta m , vale

$$\frac{1}{8}ab \left[\frac{13}{3} + \frac{(2m-b)^2}{a^2} \right];$$

e finalmente che la superficie Σ_c , somma delle due espressioni trovate, può essere calcolata mediante la formola

$$\Sigma_c = \frac{1}{4}ab \left[\frac{13}{3} + \frac{(2m-a)^2}{2b^2} + \frac{(2m-b)^2}{2a^2} \right].$$

Se, come sovente si fa nella pratica per ottenere che colla minor monta possibile risultino semi-circoli le quattro lunette AEB, BFC, CGD e DHA, si assume la monta \overline{OV} eguale alla metà del lato maggiore \overline{AB} del rettangolo ABCD, la superficie Σ_c , che si può dedurre dall'ultima formola facendo in essa $m = \frac{1}{2}a$, vien data da

$$\Sigma_c = \frac{1}{4} ab \left[\frac{13}{3} + \frac{(a-b)^2}{2a^2} \right].$$

154. **Superficie delle vòlte lunulate.** — La denominazione generale di vòlte lunulate si dà a quelle vòlte a botte, a bacino, a conca, a padiglione, a botte con teste di padiglione, a schifo, nella cui superficie d'intrados si trovano delle unghie cilindriche o cilindroidiche o sferiche poste in luogo di altrettanti fusi tolti dalla superficie d'intrados delle accennate vòlte.

La definizione stessa che venne data delle vòlte lunulate indica con qual regola si deve procedere per la valutazione delle loro superficie d'intrados: si deve incominciare ad ottenere la superficie d'intrados Σ dell'intera vòlta in cui si trovano le unghie, supponendo che queste non esistano; quindi si passa a cercare le superficie dei fusi che da essa vennero tolti per sostituirvi le unghie, e si fa la somma F di queste superficie; dopo si procede alla determinazione delle superficie delle diverse unghie esistenti nella vòlta, e si effettua pure la loro somma U . La superficie Σ_1 della vòlta lunulata vien evidentemente data da

$$\Sigma_1 = \Sigma - F + U.$$

Per applicare l'esposta regola generale ad un caso pratico debbasi trovare la superficie d'intrados della vòlta a botte a tutta monta lunulata, di cui in proiezione orizzontale, in sezione longitudinale secondo la retta IK ed in sezione trasversale secondo la retta HU si ha la rappresentazione nella figura 145, ed in cui trovansi quattro unghie cilindroidiche eguali coprenti i quattro triangoli EGF , LNM , OPQ ed RST . Suppongasi che le quattro unghie debbano essere generate da una retta che si conserva parallela al piano verticale HU , e si chiamino

p il lato maggiore \overline{AB} e

q il lato minore \overline{BC} del rettangolo coperto dalla vòlta,

a la corda $\overline{EF} = \overline{E'F'}$ delle unghie,

l la lunghezza $\overline{HG} = \overline{E''G''}$ delle medesime.

La superficie Σ dell'intera vòlta a botte a tutta monta coprente il rettangolo $ABCD$ vien data da

$$\Sigma = \frac{1}{2} \pi p q \quad (1).$$

Considerando il fuso incompleto che copre il triangolo EGF, l'angolo $G''I''X = \alpha$, che il raggio $I''G''$ condotto al vertice G'' fa colla verticale, vien dato dalla formola (1) del numero 90 facendo in essa $r = \frac{1}{2}q$ e $c = l$, per cui si ha

$$\text{sen } \alpha = \frac{q - 2l}{q} \quad (2),$$

e la superficie di questo fuso, espressa dal secondo membro dell'equazione (2) del citato numero quando in esso si pongano i già notati valori di r e di c , vale

$$\frac{aq}{4l} \left[q \cos \alpha - (q - 2l) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right].$$

Ma, nel caso particolare che si considera, i fusi tolti dalla superficie della vòlta a botte coprente il rettangolo ABCD per sostituirvi le unghie, sono in numero di quattro e quindi la somma F delle loro superficie vien data da

$$F = \frac{aq}{l} \left[q \cos \alpha - (q - 2l) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] \quad (3).$$

Venendo ora al calcolo della superficie U, rappresentante la somma delle quattro unghie cilindroidiche sostituite ai quattro fusi, si ha: che ciascuna di queste unghie, avente per semi-corda $\frac{1}{2}a$, per lunghezza l e per monta

$$\overline{G_1''G''} = \frac{1}{2}q \cos \alpha,$$

ammette per espressione approssimata della sua superficie (num. 127)

$$\left(a + \frac{1}{7}q \cos \alpha \right) \frac{l}{2};$$

e che per conseguenza la superficie U vien data da

$$U = 2 \left(a + \frac{1}{7}q \cos \alpha \right) l \quad (4).$$

La formola (1) serve a calcolare la superficie Σ , la formola (2) si presta a dedurre l'angolo α il quale viene in acconcio per trovare F ed U mediante le formole (3) e (4). Togliendo il valore di F dal valore di Σ ed aggiungendo alla differenza il valore di U , si ha la superficie d'intrados Σ_1 della vòlta a botte lunulata di cui venne data la rappresentazione nella figura 143.

135. **Superficie delle vòlte a fascioni.** — Le vòlte a fascioni sono di svariatissime forme, e la generazione della loro superficie d'intrados può essere spiegata immaginando: che sul poligono da coprirsi con una di queste vòlte già insista l'intrados di una vòlta la quale, a seconda della figura del detto poligono, può essere a botte, a conca, a padiglione, a botte con teste di padiglione, a schifo, a bacino; che sul poligono d'imposta si trovino tracciate tante linee per guisa che, sollevando per esse dei piani verticali, vengano questi a tagliare la superficie d'intrados secondo zone; che tanti solidi arconi appoggiati ai piedritti e con vicendevole contrasto fra di loro, siano gettati su queste zone; e che dagli spazii non coperti dagli arconi vengano tolte le parti corrispondenti di vòlta primitiva per sostituirvi delle convenienti vòlte a cui servono di piedritti i fascioni non che i muri contro i quali essi appoggiano.

Le superficie d'intrados di queste vòlte si calcolano trovando separatamente quelle dei fascioni, non che quelle delle vòlte fra essi comprese e prendendo quindi la loro somma. Per ragionare su un caso particolare si consideri la vòlta a fascioni su pianta rettangolare $ABCD$ (*fig. 144*) colla sua superficie d'intrados generata, immaginando insistere una vòlta a padiglione al rettangolo $A_1B_1C_1D_1$ avente il suo perimetro di poco equidistante dal perimetro del rettangolo $ABCD$; supponendo tirate le due rette E_1K_1 ed F_1I_1 parallele ai lati di maggior lunghezza del detto rettangolo e da questi equidistanti, non che le altre due M_1G_1 ed L_1H_1 parallele ed equidistanti dai lati di minor lunghezza del medesimo rettangolo e talmente spaziate fra loro da essere $\overline{M_1L_1} = \overline{E_1F_1}$; considerando le rette E_1R , F_1O , I_1P e K_1Q non che le altre G_1O , H_1P , L_1Q ed M_1R siccome le tracce orizzontali di tanti piani verticali innalzati fino a tagliare la già definita vòlta a padiglione; immaginando sulla parte di questa vòlta la quale copre la superficie cruciforme $F_1OG_1H_1PI_1K_1QL_1M_1RE_1$ costrutti due arconi appoggiati ai muri che circuiscono il rettangolo $ABCD$; e finalmente supponendo coperte le quattro aree rettangolari $AGOF$, $BHPI$, $CLQK$ e $DMRE$ mediante vòlte a padiglione aventi i loro piani d'imposta allo stesso livello, ma al di sopra dei punti più alti

esistenti sull'intrados dei detti arconi. La superficie d'intrados della descritta vólta a fascioni si può evidentemente ottenere: trovando prima la superficie d'intrados S dell'arcone proiettato nel rettangolo $E_1F_1I_1K_1$, considerandola per approssimazione siccome quella di una vólta a botte retta; facendo la superficie d'intrados S' della porzione dell'altro arcone proiettata nel rettangolo G_1H_1PO , considerandola pure come una porzione di superficie d'intrados di vólta a botte retta; calcolando la superficie S'' di una delle quattro vólte a padiglione eguali impostate sui muri laterali e sui detti arconi; e deducendo finalmente la superficie Σ_f della vólta a fascioni col porre

$$\Sigma_f = S + 2S' + 4S''.$$

Quanto si è detto doversi fare per la vólta a fascioni su pianta rettangolare rappresentata in proiezione orizzontale nella figura 144, si applica in tesi generale a qualunque altra vólta a fascioni.

156. **Superficie delle vólte a cupola composta.** — Queste vólte risultano generalmente dalla combinazione: di una vólta a vela sferica troncata con un piano orizzontale passante al di sopra dei suoi archi perimetrali; di una parte cilindrica di qualche altezza, avente per circonferenza della sua base la sezione fatta dal detto piano nella superficie d'intrados della vólta a vela; e di una vólta a bacino insistente alla base superiore dell'accennata parte cilindrica.

Le vólte a cupola composta, che più di frequente avviene di dover considerare nella pratica, coprono generalmente un'area quadrata, e, per trovare la superficie d'intrados di una di queste vólte di cui, in proiezione orizzontale ed in sezione secondo la retta XY passante pei mezzi dei due lati \overline{AD} e \overline{BC} si ha la rappresentazione nella figura 145, s'incomincia a calcolare la superficie d'intrados della vólta a vela sferica coprente il quadrato $ABCD$, da questa superficie si sottrae quella della calotta sferica coprente il circolo $HPIS$ secondo cui venne tagliata la detta vólta a vela dal piano orizzontale $H'I'$, ed alla differenza si aggiunge la superficie convessa del cilindro retto $H'K'L'I'$, non che la superficie d'intrados della vólta a cupola $K'M'L'$. Così, chiamando

a il lato \overline{AB} del quadrato coperto dalla vólta,

r il raggio \overline{OA} del circolo circoscritto a questo quadrato,

b l'altezza $\overline{N'P'}$ del piano orizzontale secondo cui venne tagliata la vólta a vela al disopra del piano d'imposta,

b' l'altezza $\overline{H'K'}$ della parte cilindrica, e supponendo che la superficie d'intrados della vòlta a bacino $K'M'L'$ sia a tutta monta, si ha: che la superficie della vòlta a vela sferica coprente il quadrato ABCD vien espressa (num. 115) da

$$2\pi r(a-r);$$

che la saetta $P'R'$ vien data da

$$\overline{P'R'} = r - b;$$

che la superficie della calotta sferica $H'R'I'$ vale

$$2\pi r(r-b);$$

che la retta $\overline{H'P'}$, come immediatamente si deduce dal triangolo rettangolo $H'P'N'$, si ottiene ponendo

$$\overline{H'P'} = \sqrt{r^2 - b^2};$$

che la superficie della parte cilindrica $H'I'L'K'$ ammette per valore

$$2\pi b' \sqrt{r^2 - b^2};$$

che la parte emisferica $K'M'L'$ vale

$$2\pi(r^2 - b^2);$$

e finalmente che la superficie Σ_c dell'intera vòlta a cupola composta vien data dalla formola

$$\Sigma_c = 2\pi \left[r(a+b-r) - b^2 + b' \sqrt{r^2 - b^2} \right],$$

nella quale si deve porre per r il valore che ricavasi dall'equazione

$$r = \frac{1}{2} a \sqrt{2},$$

che immediatamente si deduce dalla considerazione del triangolo rettangolo OTA.

157. Conclusione sulla misura delle superficie delle vólte.
— Oltre le vólte delle quali si è parlato, la cui superficie d'intrados ha una generazione geometricamente ben definita, molte altre se ne costruiscono senza una generazione geometrica fissa o con una generazione geometrica arbitraria, per cui risulta impossibile lo stabilire le formole atte a trovare la superficie d'intrados delle vólte in tutti i casi della pratica. I molteplici esempi però che vennero considerati ed i metodi che vennero esposti per trovare le superficie d'intrados delle vólte d'uso più frequente, sono sufficienti per far comprendere come il costruttore deve procedere in ogni caso, e per tracciare al medesimo una guida sicura onde arrivare almeno approssimativamente alla determinazione delle superficie d'intrados delle vólte anche più complicate, e per cui riesce impossibile il dare una definizione geometrica ben determinata.

PARTE TERZA

DEI VOLUMI

CAPITOLO I.

Misura dei volumi dei solidi poliedrici.

158. **Norme generali.** — Il volume di un solido poliedrico qualunque si deve determinare colle seguenti norme generali: 1° eseguire quelle misure di lunghezze e di angoli che servono alla completa determinazione del solido di cui vuolsi il volume; 2° scomporre questo in solidi geometrici, di ciascuno dei quali sapiasi eseguire la cubatura; 3° dedurre dalle lunghezze e dagli angoli misurati i fattori che sono necessari pel calcolo di questi solidi parziali e pei quali non vennero fatte le misure dirette; 4° effettuare il calcolo dei volumi dei diversi solidi componenti il corpo proposto ed eseguire la loro somma algebrica.

I solidi risultanti dall'indicata scomposizione devono essere parallelepipedi, prismi, tronchi di prisma, piramidi e tronchi di piramide, ossia solidi di cui si possa trovare il volume applicando le regole a cui conduce lo studio della geometria elementare; ed in alcuni numeri che immediatamente seguono trovansi esposte formole e metodi per trovare la cubatura degli accennati solidi nei diversi casi che si possono presentare all'ingegnere costruttore. Non si dà dimostrazione alcuna delle formole derivanti dalle regole più ovvie ed a tutti note di geometria elementare; e si dà invece una traccia delle dimostrazioni dei metodi di valutazione dei volumi di quei corpi

che, pei dati da cui sono determinati e per la loro figura, non vengono abitualmente considerati nei corsi di geometria elementare.

139. Volume di un prisma. — I prismi dei quali avviene di dover trovare la cubatura sono i parallelepipedi rettangoli, retti ed obliqui, i prismi retti ed obliqui aventi per base un poligono qualunque. Questi solidi possono essere determinati in molti modi, e quindi molte sono le formole dalle quali si può desumere il loro volume V . Quelle però che avviene di dover considerare nella pratica delle costruzioni si riducono ad un numero assai limitato, e principalmente alle tre che immediatamente passo ad esporre.

1° Per un prisma di altezza a ed avente per base un poligono qualunque di area A , si ha

$$V = Aa.$$

2° Per un parallelepipedo rettangolo, in cui sono b e c gli spigoli diversi contenuti in quella faccia che si assume come base ed in cui il terzo spigolo è a , si ha evidentemente

$$A = bc,$$

e quindi

$$V = abc.$$

3° Per un prisma obliquo, in cui A è l'area della sua base $ABCDE$ (*fig. 146*) ed in cui uno spigolo laterale $\overline{CF} = d$ fa colla sua proiezione \overline{CG} sul piano della base l'angolo $FCG = \alpha$, si ha che l'altezza \overline{FG} del prisma vien data da

$$\overline{FG} = d \operatorname{sen} \alpha,$$

e che per conseguenza

$$V = Ad \operatorname{sen} \alpha.$$

140. Volume di un tronco di prisma. — I tronchi di prisma sono solidi poliedrici di cui ben di frequente deve il costruttore trovare il volume V ; ed ecco le norme che in tutti i casi della pratica conducono a questa determinazione.

1° Per un tronco di prisma a sezione retta triangolare, come insegna la geometria elementare, si ottiene il volume moltiplicando la superficie A della sua sezione retta, ossia della sezione fatta nel

corpo perpendicolarmente ai suoi spigoli, per il terzo della somma delle lunghezze dei tre spigoli medesimi, cosicchè, chiamando a' , a'' ed a''' queste lunghezze, si ha

$$V = A \frac{a' + a'' + a'''}{3} \quad (1).$$

2° Per un tronco di prisma il quale ha per sezione retta un parallelogramma ABCD (*fig. 147*), se chiamansi

A l'area dell'indicata sezione retta ed

a' , a'' , a''' , a^{iv} le lunghezze dei quattro spigoli \overline{EI} , \overline{FK} , \overline{GL} , \overline{HM} , si ha che il suo volume V, somma dei due tronchi di prisma triangolare EFGIKL ed EHGIML, aventi per sezioni rette i triangoli ABC e CDA eguali fra di loro ed equivalenti in superficie alla metà di A, vien dato da

$$V = \frac{A}{6} (2a' + a'' + 2a''' + a^{iv}).$$

Il volume V si può anche considerare siccome la somma dei tronchi di prisma triangolare EFHIKM e GFHLKM, aventi per sezioni rette i triangoli ABD e CBD di superficie pure eguale alla metà di A, e quindi si può esso ottenere mediante la formola

$$V = \frac{A}{6} (a' + 2a'' + a''' + 2a^{iv}).$$

Se ora si sommano membro a membro le due equazioni determinatrici di V e se le due somme si dividono per 2, si ottiene

$$V = A \frac{a' + a'' + a''' + a^{iv}}{4} \quad (2),$$

ossia che il volume del tronco di prisma a sezione retta parallelogrammatica si ottiene moltiplicando l'area della sezione retta per il quarto della somma dei quattro spigoli.

Immaginando condotta per il punto N, in cui s'incontrano le due diagonali \overline{AC} e \overline{BD} della sezione retta, la retta OP parallelamente agli spigoli del tronco di prisma, evidentemente essa passa pei punti di mezzo O e P delle diagonali \overline{EG} ed \overline{FH} , \overline{IL} e \overline{KM} delle

due facce parallelogrammiche EFGH ed IKLM, per cui, chiamando a la lunghezza della retta \overline{OP} , la quale è simultaneamente la semi-somma delle basi parallele dei due trapezii EGLI e FHMK, si ha

$$a = \frac{a' + a'''}{2}$$

$$a = \frac{a'' + a^{iv}}{2}$$

Queste equazioni divise per 2 e sommate membro a membro danno

$$\frac{a' + a'' + a''' + a^{iv}}{4} = a,$$

per cui l'ultima formola determinatrice di V diventa

$$V = A a,$$

ossia che il volume del tronco di prisma avente per sezione retta una parallelogramma, si ottiene anche moltiplicando l'area della sua sezione retta per la lunghezza del suo asse, intendendo per asse la retta che unisce i punti d'incontro delle diagonali condotte nelle due facce parallelogrammiche opposte.

5° Quando un tronco di prisma ha per sezione retta un trapezio ABCD (*fig. 143*), si ottiene il suo volume immaginando condotta nell'indicata sezione retta una diagonale, per esempio AC, supponendo scomposto il detto volume nei due tronchi di prisma a sezioni rette triangolari ABC ed ADC mediante il piano determinato dagli spigoli \overline{EI} e \overline{GL} , e prendendo la somma dei volumi degli accennati tronchi di prisma. Perciò chiamando

b' la base maggiore \overline{AB} del trapezio ABCD,

b'' la sua base minore \overline{DC} e

h la sua altezza, ossia la distanza fra le due facce parallele EF KI ed HGLM del tronco di prisma,

a' , a'' , a''' ed a^{iv} le lunghezze dei quattro spigoli \overline{EI} , \overline{FK} , \overline{GL} ed \overline{HM} , si ha: che il volume del tronco di prisma triangolare, avente per sezione retta il triangolo ABC di base b' e di altezza h ed avente per spigoli le tre lunghezze a' , a'' ed a''' , vien espresso da

$$\frac{b' h}{6} (a' + a'' + a''');$$

che il volume del tronco di prisma triangolare, la cui base è il triangolo CDA di base b'' e di altezza h , ed i cui tre spigoli sono le lunghezze a' , a''' ed a^{iv} , vale

$$\frac{b''h}{6}(a' + a''' + a^{iv});$$

e finalmente che il domandato volume V del proposto tronco di prisma a sezione retta trapezia, somma dei volumi dei due tronchi di prisma triangolare già considerati, vien dato dalla formola

$$V = \frac{b'h}{6}(a' + a'' + a''') + \frac{b''h}{6}(a' + a''' + a^{iv}),$$

la quale si riduce anche a

$$V = h \frac{(a' + a''')(b' + b'') + b'a'' + b''a^{iv}}{6} \quad (3).$$

4° Quando un tronco di prisma ha per sezione retta un poligono qualunque, si ottiene il suo volume scomponendo il poligono costituente l'indicata sezione retta in tanti triangoli, trovando i volumi dei prismi tronchi corrispondenti a questi triangoli e prendendone quindi la loro somma.

141. Volume di una piramide. — Semplicissima è la regola che vien data in geometria elementare per trovare il volume V di una piramide avente per base un poligono qualunque, e chiamando

A l'area della base della piramide,

a la sua altezza,

si ha

$$V = \frac{1}{3} Aa.$$

142. Volume di un tronco di piramide a basi parallele. — Le due basi di un tronco di piramide a basi parallele sono, due poligoni simili, e chiamando

A la superficie della base maggiore del tronco,

A' la superficie della sua base minore,

a la sua altezza ossia la distanza delle basi,

come insegna la geometria elementare, si ottiene il suo volume V adottando la formola

$$V = \frac{1}{3} a \left(A + A' + \sqrt{AA'} \right).$$

143. Volume di un poliedro qualunque. — Il volume di un poliedro qualunque si ottiene scomponendolo in tante piramidi, facendo i volumi di tutte queste piramidi e prendendo la somma di tutti questi volumi. La scomposizione di un poliedro in piramidi può farsi in più maniere, ed una di queste consiste nel supporre unito il vertice di uno stesso angolo solido a tutti gli altri vertici per mezzo di altrettante rette o diagonali. Il poliedro si può così immaginare scomposto in piramidi aventi per basi le diverse facce del poliedro, eccettuate quelle che comprendono il primo angolo solido; ed il numero di queste piramidi è generalmente eguale al numero totale delle facce del poliedro, meno il numero delle facce concorrenti nel vertice comune delle piramidi.

Se avvenisse di dover trovare il volume di un poliedro chiuso lateralmente da facce che s'intersecano secondo spigoli paralleli, potrebbe tornar utile la scomposizione del solido in tronchi di prisma a sezione retta triangolare.

144. Misura delle ghiaie e delle sabbie. — Le ghiaie e le sabbie che avviene dover considerare nelle costruzioni si valutano a volume, e prima d'impiegarle si dispongono generalmente i cumuli aventi una forma geometrica onde facilmente poter procedere alla loro misura. In pratica questi cumuli si fanno in due modi diversi: i piccoli come risulta dalla figura 149; i grandi come vien indicato nella figura 150.

1° Il cumulo rappresentato nella figura 149, geometricamente considerato, è evidentemente un tronco di prisma avente per sezione retta un triangolo, e quindi, chiamando

a' , a'' e a''' le lunghezze dei suoi tre spigoli paralleli \overline{AB} , \overline{DC} e \overline{KI} ,
 b la sua larghezza che è eguale alla base \overline{FG} della sua sezione retta \overline{FIG} ,

h l'altezza \overline{MN} del cumulo eguale all'altezza \overline{LI} dell'indicata sezione retta,

il suo volume V , per la formola (1) del numero 140, vien dato da

$$V = bh \frac{a' + a'' + a'''}{6}.$$

Nel determinare il valore della larghezza b conviene generalmente misurare le larghezze alle due estremità del cumulo, ed assumere la loro media aritmetica. Analogamente conviene generalmente prendere per valore di h la media aritmetica di due o di tre altezze del cumulo misurate alle due estremità, oppure alle due estremità ed in un sito intermedio.

Se il cumulo è collocato su un'area rettangolare orizzontale $ABCD$, e se quindi sono eguali i due spigoli \overline{AB} e \overline{DC} , si può dedurre il terzo spigolo \overline{KI} partendo dalle seguenti considerazioni: essendo costante l'angolo corrispondente al natural declivio per una stessa qualità di ghiaia o di sabbia da misurarsi, le quattro facce del cumulo devono risultare egualmente inclinate all'orizzonte; gli spigoli \overline{BI} e \overline{CI} devono proiettarsi sul piano orizzontale $ABCD$ in modo da dividere per mezzo i due angoli retti ABC e DCB ; la figura FLB risulta un triangolo rettangolo ed isoscele sulla base \overline{BL} , e quindi

$$\overline{BF} = \overline{FL} = \frac{\overline{FG}}{2} = \frac{\overline{BC}}{2}.$$

Segue da ciò che, per essere $\overline{AE} = \overline{BF}$, si ha

$$\overline{AE} + \overline{BF} = \overline{BC},$$

e

$$\overline{KI} = \overline{OL} = \overline{AB} - (\overline{AE} + \overline{BF}) = \overline{AB} - \overline{BC};$$

cosicchè, quando il cumulo si trova su un'area rettangolare orizzontale, si può assumere per lunghezza a''' del suo spigolo \overline{KI} la differenza $a' - b$ fra la lunghezza e la larghezza del cumulo.

2° Il cumulo, di cui si ha la rappresentazione nella figura 150, è un tronco di prisma avente per sezione retta un trapezio. Si possono assumere siccome spigoli laterali di questo tronco di prisma le quattro rette parallele \overline{AB} , \overline{DC} , \overline{HG} ed \overline{EF} , e per sezione retta il trapezio $ILMK$ che risulta tagliando il detto solido con un piano perpendicolare agli accennati spigoli. Segue da ciò che, chiamando a' , a'' , a''' ed a'''' le lunghezze rispettive dei quattro spigoli \overline{AB} , \overline{DC} , \overline{HG} ed \overline{EF} ,

b' e b'' le larghezze inferiore e superiore del cumulo, rispettivamente eguali alle basi \overline{IK} ed \overline{LM} della sezione retta,

h la sua altezza \overline{PO} eguale all'altezza \overline{LN} della stessa sezione retta,

ed applicando la formola (5) del numero 140, si ha che il volume V del solido rappresentato nella citata figura 150, supposto diviso nei due tronchi di prisma aventi per sezioni rette i due triangoli IKM ed MLI , vien data da

$$V = h \frac{(a' + a'')(b' + b'') + b'a'' + b''a'}{6}.$$

Nel determinare i valori delle larghezze b' e b'' conviene generalmente misurare le larghezze inferiori e superiori alle due estremità del cumulo ed assumere, per valore di b' la semi-somma delle due larghezze inferiori e per valore di b'' la semi-somma delle due larghezze superiori. Analogamente conviene prendere per valore di h la media aritmetica di due o di tre altezze del cumulo, misurate alle due estremità oppure alle due estremità ed in un sito intermedio.

Allorquando la figura $ABCD$, sulla quale trovasi collocato il cumulo di cui vuolsi il volume, è un rettangolo posto in un piano orizzontale ed allorquando è pure un rettangolo orizzontale la faccia superiore $EFGH$, si può dedurre il lato \overline{FG} conoscendosi gli altri tre \overline{AB} , \overline{EF} e \overline{BC} . Infatti, per una stessa qualità di ghiaia o di sabbia formante il cumulo, si ha: che gli spigoli \overline{BF} , \overline{CG} , \overline{DH} ed \overline{AE} si proiettano rispettivamente sul piano $ABCD$ in \overline{BQ} , \overline{CR} , \overline{DX} ed \overline{AY} sulle rette che dividono per mezzo gli angoli retti ABC , DCB , ADC e BAD ; che le sezioni rette passanti per gli spigoli \overline{FG} ed \overline{EH} tagliano la base $ABCD$ secondo le rette \overline{ST} ed \overline{UV} eguali e parallele a \overline{BC} ; che i triangoli BSQ , CTR , DVX ed AUY , rettangoli in S , T , V ed U ed isosceli sulle basi \overline{BQ} , \overline{CR} , \overline{DX} ed \overline{AY} , danno rispettivamente

$$\overline{SQ} = \overline{TR} = \overline{VX} = \overline{UY} = \overline{BS} = \overline{CT} = \overline{DV} = \overline{AU};$$

che per conseguenza

$$\overline{SQ} + \overline{TR} = \overline{AU} + \overline{BS} = \overline{AB} - \overline{US} = \overline{AB} - \overline{EF};$$

e finalmente che

$$\overline{FG} = \overline{ST} - (\overline{SQ} + \overline{TR}) = \overline{BC} - (\overline{AB} - \overline{EF}),$$

ossia che la larghezza superiore \overline{FG} del cumulo è eguale alla larghezza inferiore \overline{BC} , diminuita di $\overline{AB} - \overline{EF}$ esprime la differenza fra la sua lunghezza inferiore \overline{AB} e la sua lunghezza superiore \overline{EF} .

145. Misura delle travi e dei legnami squadrati ricavabili dai fusti naturali delle piante. — Per ottenere il volume d'una trave usano generalmente i costruttori misurare i due lati della sua sezione perpendicolare agli spigoli e la lunghezza del suo asse, e, considerando la trave siccome un parallelepipedo rettangolo, ne deducono il volume facendo il prodotto delle accennate tre lunghezze.

Soventi volte avviene nelle costruzioni di dover valutare il volume della trave ricavabile da un dato fusto grezzo. In questo caso si considera il fusto siccome un cilindro circolare avente per circonferenza la periferia media che corrisponde alla metà della sua lunghezza, e, stando a quanto l'esperienza ha confermato essere generalmente poco lungi dalla verità, si considera la trave da esso ricavabile siccome un parallelepipedo rettangolo a base quadrata avente per perimetro i $\frac{4}{5}$ della detta periferia media. Segue da ciò che si otterrà il volume della trave ricavabile da un fusto grezzo, misurando la sua lunghezza non che la sua periferia media, prendendo la quinta parte di questa per ottenere il valore approssimato del lato della sezione del pezzo squadrato, facendo il quadrato del numero ottenuto e moltiplicando questo quadrato per la lunghezza del fusto.

146. Misura del volume dei muri pieni. — I muri che hanno grossezza maggiore della dimensione massima del mattone si misurano generalmente a volume; ed ecco le norme da seguirsi nel calcolo del volume dei muri pieni tracciati con direzioni rettilinee ed aventi facce piane.

1° Quando un muro è compreso fra due facce verticali parallele e quando alle estremità è pure limitato da due piani verticali paralleli perpendicolari ai primi, ha esso spessore uniforme, il solido geometrico che rappresenta è un parallelepipedo rettangolo AB (fig. 151) e quindi si ottiene il suo volume facendo il prodotto della sua lunghezza \overline{AC} , per la sua spessezza \overline{AD} e per la sua altezza \overline{AE} .

2° Quando invece il muro è a riseghe da una parte, ossia quando presenta una sola faccia verticale da una parte e delle facce alternativamente orizzontali e verticali dall'altra (fig. 152), e quando alle

due estremità è limitato da due piani verticali paralleli perpendicolari alla sua lunghezza \overline{AG} , si ottiene il suo volume: immaginandolo scomposto nei parallelepipedi rettangoli AB , CD , EF mediante piani orizzontali condotti alle altezze delle riseghe; misurando i tre spigoli per ciascuno di questi parallelepipedi; calcolando i volumi di ognuno di essi; e finalmente prendendo la somma dei volumi parziali ottenuti.

5° Se il muro, sempre limitato alle due estremità da due piani verticali paralleli perpendicolari alla sua lunghezza, è a scarpa da una parte (*fig. 153*), rappresenta esso un prisma retto a base trapezia, ed il suo volume si ottiene misurando la larghezza inferiore \overline{AB} , la larghezza superiore \overline{CD} , l'altezza \overline{AC} e la lunghezza \overline{BE} , calcolando l'area del trapezio $ABDC$ e moltiplicandola per la lunghezza \overline{BE} .

Soventi volte non si conosce la larghezza inferiore \overline{AB} del muro, ed in sua vece vien data l'inclinazione della faccia $BEGD$ all'orizzonte mediante la sua scarpa, ossia mediante il rapporto della distanza orizzontale \overline{BF} fra il punto B ed il punto D alla loro differenza di livello \overline{DF} . In questo caso, chiamando $\frac{m}{n}$ l'indicato rapporto, il quale non è altro che la tangente trigonometrica dell'angolo BDF , si ha

$$\overline{BF} = \frac{m}{n} \overline{FD}$$

e quindi

$$\overline{AB} = \overline{CD} + \frac{m}{n} \overline{FD}.$$

In alcune circostanze la larghezza inferiore \overline{AB} del muro è nota e non si conosce la larghezza superiore \overline{CD} , a dedurre la quale serve l'ultima equazione quando si pongano in essa le quantità note \overline{AB} , \overline{FD} ed $\frac{m}{n}$.

4° Se il muro, ancora limitato alle due estremità da due piani verticali paralleli e perpendicolari alla sua lunghezza \overline{BE} (*fig. 154*), da una parte è a scarpa e dall'altra a riseghe, s'immagina condotto per lo spigolo DG il piano verticale $DFHG$. Il volume del solido AG si trova come si è detto per quello rappresentato nella figura 152; il volume del solido $FBDHEG$, il quale è un prisma retto

triangolare avente per base il triangolo rettangolo DFB , si ottiene moltiplicando $1/2 \overline{FB}$ per \overline{DF} e per \overline{BE} ; e, sommando i due volumi indicati, si ottiene quello dell'intero muro con scarpa e riseghe, rappresentato nella figura 154.

5° Sia ora un muro terminato alle due estremità da due piani verticali non paralleli AB e CD (*fig. 155*) ed avente le due facce AD e CB verticali e parallele. Questo muro, geometricamente considerato, è evidentemente un prisma retto avente per base il trapezio $AECG$; per cui si ottiene il suo volume procurandosi l'altezza \overline{AF} di questo trapezio, non che le lunghezze delle basi \overline{EC} ed \overline{AG} , oppure la lunghezza della retta \overline{HI} che unisce i due punti di mezzo dei lati non paralleli \overline{AE} e \overline{GC} , calcolando la superficie dello stesso trapezio, e moltiplicandola per l'altezza \overline{EB} della muraglia.

6° Se invece un muro, terminato da due piani verticali non paralleli AB e CD , ha da una parte la parete verticale CB e dall'altra è tagliato a riseghe come le dimostra la figura 156, all'altezza delle diverse riseghe conviene immaginare condotti tanti piani orizzontali; calcolare come si è detto ragionando sulla figura 155, i volumi dei diversi prismi retti AF , HI e KL le cui basi sono rispettivamente i trapezii $AECG$, $HMFN$, $KOIP$ e le cui altezze sono \overline{AQ} , \overline{HR} , \overline{KS} ; e sommare tutti questi volumi, il cui complesso costituisce evidentemente il volume dell'intera muraglia rappresentata nella figura 156.

7° Quando un muro, limitato alle sue estremità da due piani verticali non paralleli AB e CD (*fig. 157*), da una parte presenta una parete verticale AD e dall'altra una parete a scarpa CB , si può ottenere il suo volume considerandolo come un tronco di prisma a sezione retta trapezia. Perciò si determineranno la larghezza \overline{AE} dal muro al suo piede, la larghezza \overline{FG} in sommità, la sua altezza \overline{AF} , non che i quattro spigoli \overline{AI} , \overline{HC} , \overline{BK} ed \overline{FD} , e, applicando la formola (3) del numero 140 riescirà facile la determinazione del suo volume.

8° Quando un muro, sempre limitato alle sue estremità da due piani verticali non paralleli, presenta delle riseghe dalla parte opposta a quella in cui trovasi la faccia a scarpa (*fig. 158*), s'immagini per lo spigolo BK il piano verticale $BKLM$ e si consideri il volume da trovarsi siccome la somma dei volumi dei due solidi posti l'uno da una parte e l'altro dall'altra del detto piano. Il solido $BMHKLC$ è un tronco di prisma a sezione retta triangolare e quindi,

applicando la formola (1) del numero 140, si sa calcolare il suo volume allorquando si conoscano la base \overline{MP} , l'altezza \overline{BM} della sua sezione retta, non che i tre spigoli \overline{ML} , \overline{HG} e \overline{BK} : l'altro solido AK poi è facilissimo a calcolarsi col metodo, che venne indicato nel 6° caso considerato, ragionando sulla figura 156.

Può ancora avvenire di dover considerare dei muri pieni e rettilinei a facce piane, aventi forma diversa da quella dei muri già esaminati. Comunque sia però, la determinazione dei loro volumi non può mai riuscire operazione difficile, e quanto si è detto è più che sufficiente per far comprendere come, in tutti i casi della pratica, si deve procedere per tale determinazione.

147. Misura del volume dei muri con speroni. — In molte circostanze avviene di dover costruire dei muri rinforzati da speroni, ed il loro volume si determina calcolando prima quello dei muri senza gli speroni ed aggiungendovi la somma dei volumi di questi ultimi. I pochi esempi che immediatamente seguono, indicano a sufficienza come si deve procedere in quei casi della pratica in cui gli speroni, terminati da facce piane, trovansi a rinforzo di muraglie tracciate con direzioni rettilinee ed aventi pure facce piane.

1° Quando gli speroni, come quello rappresentato nella figura 159, trovansi addossati alla parete verticale AB di un muro e sono terminati lateralmente da due piani verticali CD e EF perpendicolari alla detta parete, anteriormente dal piano ED parallelo alla stessa parete e superiormente dalla faccia inclinata DF , geometricamente considerati sono prismi retti a base trapezia, e per ottenere il volume di uno di essi si misurano: la sua sporgenza \overline{CG} dalla parete AB del muro cui trovansi addossato; le due basi \overline{CH} e \overline{GD} del trapezio CD , od anche solamente la sua base media \overline{IK} , e finalmente la sua larghezza \overline{GE} . Colle prime tre lunghezze si può calcolare la superficie del trapezio CD la quale, moltiplicata per la larghezza \overline{GE} , dà evidentemente il volume dello sperone.

2° Se gli speroni presentano, come quello disegnato nella figura 160, lateralmente due facce quadrilatero CD ed EF contenute in piani verticali perpendicolari alla parete verticale AB , anteriormente una faccia inclinata DE e superiormente una faccia inclinata DF , geometricamente considerati sono prismi retti a base quadrilatera; ed il volume di uno di essi si ottiene moltiplicando l'area del quadrilatero CD per la sua larghezza \overline{GE} . L'area del detto quadrilatero si ottiene immaginando condotta per D la verticale

\overline{DH} e prendendo quindi la somma dell'area del trapezio CD con quella del triangolo rettangolo DHG.

5° Se gli speroni, sempre addossati alla parete verticale AB di un muro rettilineo, sono terminati, come lo dimostra la figura 461, lateralmente dalle due facce triangolari HCD e GFE ed anteriormente dal quadrilatero DG, per guisa che diventi un trapezio la base CDEF, geometricamente considerati sono essi tronchi di prisma a sezione retta triangolare. Questa sezione retta è il triangolo rettangolo IKL che nasce immaginando tagliato lo sperone con un piano verticale perpendicolare alla parete AB e passante per un punto L dello spigolo \overline{DE} ; ed i tre spigoli sono le tre rette \overline{HG} , \overline{DE} e \overline{CF} . Misurando l'altezza $\overline{IK} = \overline{IK}$ dello sperone non che la sua sporgenza $\overline{K'L} = \overline{KL}$ dalla parete AB del muro cui trovasi addossato, si hanno gli elementi necessari al calcolo della sua sezione retta; misurando al piede dello sperone la larghezza massima $\overline{C'F'} = \overline{CF}$ non che la larghezza minima \overline{DE} , ed alla sommità la larghezza \overline{HG} , si ottengono i tre spigoli. L'area della sezione retta per il terzo della somma dei tre spigoli dà il volume.

4° Venendo a considerare il caso di un muro compreso fra due facce inclinate AB e CD rinforzato da speroni come lo indica la figura 462, se ammettesi che il muro sia terminato alle sue estremità da due piani verticali paralleli AE ed FD, è esso un prisma retto avente per base il trapezio ACEG, per altezza la sua lunghezza AF, e quindi assai facile riesce la determinazione del suo volume. In quanto poi al volume di uno sperone, supponendolo terminato lateralmente dai due quadrilateri HI e KL disposti in piani verticali paralleli e perpendicolari alla lunghezza del muro cui lo sperone serve di rinforzo, anteriormente dal rettangolo IK disposto in un piano inclinato e superiormente dal rettangolo IL posto pure in un piano inclinato, si ottiene assai facilmente considerandolo come un prisma retto avente per base il quadrilatero HI e per altezza la larghezza \overline{MK} . Per ottenere l'area del quadrilatero HI conviene immaginare condotte dai vertici I ed N le verticali \overline{IO} ed \overline{NP} e dire che essa consta della somma delle aree del triangolo rettangolo IOM, del trapezio NPOI e del triangolo rettangolo NPH.

148. **Misura del volume del complesso di più muri.** — Ben sovente i muri, che al costruttore conviene di dover misurare nel valutare il costo delle sue opere, risultano dal complesso di più muri rettilinei della forma di quelli che vennero considerati nel

numero 145, ed i loro volumi si possono ottenere, o facendo separatamente i volumi delle diverse parti rettilinee applicando le norme che vennero date nel citato numero 145 e quindi sommandoli, oppure procedendo coi metodi risultanti dall'esame dei casi che immediatamente seguono.

4° Trattandosi di un muro costituito da più muri rettilinei AB, CD, EF (*fig. 163*), ciascuno dei quali è limitato da pareti verticali, si ottiene il suo volume considerandolo siccome un prisma retto avente per base la zona poligonale ACEGHIKL e per altezza l'altezza \overline{LM} del muro. La superficie dell'accennata zona poligonale si può ottenere come si è detto al numero 76, quando essa ha larghezza costante; diversamente si deve riguardare siccome somma dei trapezii ACKL, CEIK, EGHI.

2° Nel caso complesso di un muro come quello rappresentato nella figura 164 in proiezione orizzontale ed in sezione secondo il piano verticale determinato dalla retta XY, il quale esternamente ha le sue facce a scarpa mentre internamente presenta delle riseghe, convien decomporlo come segue per calcolarne il volume. Dai tre spigoli \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{CD} , posti alla sommità delle tre facce inclinate ABFE, BCGF e CDHG, s'immaginino condotti tre piani verticali, i quali separano dal masso murale i tre tronchi di prisma a sezione retta triangolare, proiettati orizzontalmente negli accennati tre trapezii ed aventi ciascuno per sezione retta il triangolo rettangolo di cui un cateto è l'altezza del muro e l'altro cateto la larghezza orizzontale della sua faccia a scarpa, non che la muraglia a riseghe proiettata orizzontalmente in ABCDMLKI. I volumi degli accennati tronchi di prisma a sezione retta triangolare sono facilissimi ad ottenersi applicando la formola (1) del numero 140; e riesce pure della massima facilità il calcolo del volume della parte di muraglia a scarpa, giacchè si compone esso di tre prismi retti, aventi rispettivamente per basi le zone IABCDMLK, NABCDQPO e RABCDUTS e per altezze le tre parti $\overline{L'L'_1}$, $\overline{P'P'_1}$ e $\overline{T'T'_1}$ in cui i piani orizzontali posti al livello delle riseghe dividono la totale altezza del muro.

Il complesso di più muri, di cui devesi trovare il volume, si può presentare al costruttore in isvariabilissime guise e sotto forme ben diverse da quelle che si riscontrarono nei due casi esaminati. Comunque sia però, il problema è sempre di assai facile risoluzione, e basta quanto in questo e nei due ultimi numeri si è detto per far comprendere come in ogni caso si deve procedere.

149. **Misura del volume dei vani praticati nei muri ed aventi forma poliedrica.** — Allorquando in un muro trovansi dei vani di dimensioni un po' considerevoli, è necessario togliere il loro volume da quello del muro, supposto pieno, se vuolsi avere la quantità effettiva di muratura in esso contenuta; e quindi la cubatura dei vani praticati nei muri costituisce un problema il quale ben di frequente si presenta nella pratica delle costruzioni.

1° Essendo MN (*fig.* 165) la sezione orizzontale, secondo un piano XY, fatta in un muro a pareti verticali dove trovasi un vano, per esempio quello di una finestra di luce rettangolare, si ottiene il volume di questo vano scomponendolo nelle due parti $D'C'C_1'D_1'$ ed $E'F'F_1'E_1'G'H'H_1'G_1'$ aventi rispettivamente per sezioni orizzontali il rettangolo ABCD ed il trapezio EFHG. Il primo volume è evidentemente quello di un parallelepipedo rettangolo i cui tre spigoli sono \overline{AB} , \overline{AD} e $\overline{D'D_1'}$ e che si ottiene facendo il prodotto degli accennati tre spigoli. Il secondo è un tronco di prisma a sezione retta trapezia EFHG ed avente per spigoli le rette $\overline{E'E_1'}$, $\overline{F'F_1'} = \overline{E'E_1'}$, $\overline{H'H_1'}$ e $\overline{G'G_1'} = \overline{H'H_1'}$, del quale si calcola il volume applicando la formola (5) del numero 140.

2° Quando in un muro a scarpa trovasi praticata un'apertura la quale, come in elevazione ed in sezione secondo il piano verticale XY lo dimostra la figura 166, consta delle parti le cui sezioni sono il rettangolo ABCD, il trapezio AFHK ed il quadrilatero BIGE, si ottiene il suo volume procurandosi quelli delle tre parti e sommandoli. Il solido che ammette il rettangolo ABCD per sezione secondo il piano XY è un parallelepipedo rettangolo il cui volume vien dato dal prodotto dei suoi tre spigoli \overline{AD} , \overline{DC} e $\overline{C'C_1'}$. Il solido tagliato dal detto piano XY secondo il trapezio AFHK è un tronco di prisma avente per sezione retta questo trapezio, per spigoli le quattro rette $\overline{a'a_1'}$, $\overline{F'F_1'} = \overline{a'a_1'}$, $\overline{H'H_1'}$ e $\overline{K'K_1'} = \overline{H'H_1'}$ e quindi facilissimo a calcolarsi applicando la formola (5) del numero 140. Il solido intersecato dallo stesso piano segante secondo il quadrilatero BEGI è un tronco di prisma a sezione retta quadrilatera, e per ottenere il suo volume conviene immaginare per lo spigolo $\overline{G'G_1'}$ il piano verticale $\overline{L'G'G_1'L_1'}$ il quale divide il detto solido nei due rappresentati sulla sezione nel trapezio BLGE e nel triangolo LIG. Il primo di questi due solidi è un tronco di prisma a sezione retta trapezia BLGE, avente per spigoli le rette $\overline{b'b_1'}$, $\overline{L'L_1'} = \overline{G'G_1'}$, $\overline{G'G_1'}$ ed $\overline{E'E_1'}$, e quindi riesce facile ottenere il suo volume applicando la formola (5) del numero 140. Il secondo è

un tronco di prisma la cui sezione retta è il triangolo LIG , che ha per spigoli le rette $\overline{L'L_1'}$, $\overline{G'G_1'}$ ed il cui volume assai facilmente si calcola applicando la formola (1) del già citato numero 140.

I vani di forma poliedrica che s'incontrano nei muri possono anche avere forma diversa da quella dei due vani che vennero considerati; la determinazione della loro cubatura però non può mai presentare difficoltà, e sono sufficienti i due esempi considerati per far comprendere qual è la via che conduce alla risoluzione del problema in tutti i casi della pratica.

CAPITOLO II.

Misura dei volumi dei solidi terminati da superficie curve, e principalmente dei volumi delle vólte.

150. Assunto del presente capitolo. — Oltre i solidi poliedrici, di cui si parlò nel precedente capitolo, avviene al costruttore di dover considerare parecchi solidi terminati da superficie curve, e fra questi meritano di essere citati i cilindri, i con, la sfera, gli ellissoidi ed altri corpi che sono parti di questi, alcuni solidi terminati da superficie rigate ed altri generati da superficie di forma costante o variabile secondo una data legge e moventisi in modo ben determinato.

I volumi di alcuni di questi solidi si ottengono applicando le semplici regole che si apprendono nei corsi di geometria elementare; per altri è necessario ricorrere ai processi d'integrazione sulle cubature; e finalmente s'impiegano i metodi d'approssimazione, quando sono insufficienti le regole somministrate dalla geometria elementare, e quando le integrazioni riescono impossibili od anche soltanto troppo difficili.

Le regole e le formole che si prestano al calcolo dei vari volumi terminati da superficie curve, che più di frequente avviene di dover considerare nella pratica delle costruzioni, e soprattutto quelle che si riferiscono alla cubatura delle vólte, costituiscono l'assunto di questo capitolo. Senza dimostrazioni sono riportate le formole derivanti da regole, ben note a tutti coloro cui questo corso è dedicato,

le quali servono a dedurre quei volumi che si considerano nella geometria elementare; si dimostra come, convenientemente applicando quanto s'apprende dalla geometria elementare, si possono dedurre alcuni volumi che sovente avviene al costruttore di dover considerare nella pratica; trovansi svolti i calcoli che conducono alla valutazione di quei volumi, cui convien applicare il processo delle integrazioni; e finalmente si indicano quei metodi che servono alla ricerca approssimata dei volumi di quei solidi la cui determinazione, per la loro forma e per la natura delle superficie da cui sono terminati, non si può eseguire coi metodi rigorosi delle cubature.

151. **Volume dei cilindri e dei tronchi di cilindro.** — 1° Il cilindro, potendosi considerare come un prisma avente per basi due poligoni eguali, di un numero infinito di lati, in conformità di quanto insegna la geometria elementare, si ottiene il suo volume moltiplicando l'area della sua base per la sua altezza, ossia per la perpendicolare abbassata da un punto qualunque d'una delle due basi sul piano dell'altra. Segue da ciò che dicendo:

S l'area della base di un cilindro qualunque,

a la sua altezza e

V il suo volume,

risulta:

$$V = Sa.$$

2° Supponendo di avere un tronco di cilindro la cui base $ABCD$ (*fig. 167*) è dotata di centro, e le cui generatrici sono perpendicolari al piano della base, riesce facile il dimostrare che anche l'altra faccia piana $EFGH$ del tronco è fornita di centro, e che un tal punto trovasi in P dove questa faccia è intersecata dalla parallela alle generatrici del cilindro condotta pel centro O della base. Inoltre, supponendo che sulle direzioni delle generatrici \overline{AE} e \overline{CG} , passanti per gli estremi di uno stesso diametro \overline{AC} , si prendano i prolungamenti $\overline{EA'}$ e $\overline{GC'}$ rispettivamente eguali a \overline{CG} ed \overline{AE} e praticando una costruzione analoga sulle infinite coppie di generatrici passanti fra gli estremi degli infiniti diametri che si possono condurre nella base $ABCD$, risulta un secondo tronco di cilindro in tutto eguale al primo, e formante con questo un cilindro a basi parallele $ACC'A'$, di asse $\overline{OO'}$ eguale a due volte l'asse \overline{OP} del tronco primitivo e colle sue generatrici perpendicolari al piano della base $ABCD$. Ora il volume di questo cilindro evidentemente vien dato dal prodotto dell'area della base $ABCD$ per il suo asse $\overline{OO'}$, il quale ne costi-

tuisce l'altezza; e quindi quello del tronco in quistione si otterrà moltiplicando l'area della stessa base per la retta \overline{OP} metà di $\overline{OO'}$. Segue da ciò che il volume di un tronco cilindrico, la cui base abbia centro e le cui generatrici siano perpendicolari al piano di detta base, si ottiene moltiplicando l'area della base stessa pel suo asse; e quest'enunciato, se ben si riflette, sussiste ancora quando nessuna delle basi è perpendicolare alle generatrici, giacchè, considerando per esempio il cilindro $E'G'GE$, basta immaginare in esso una sezione retta qualunque $ABCD$ per poter conchiudere: che il volume del cilindro AG è dato dall'area di questa sezione retta per la lunghezza del corrispondente asse \overline{OP} ; che il volume del cilindro AG' è dato dall'area della stessa sezione retta per la lunghezza dell'asse $\overline{OP'}$; e quindi che il volume di tutto il tronco EG' , somma dei volumi dei due tronchi indicati, deve risultare dal prodotto dell'indicata sezione retta per tutta la lunghezza dell'asse $\overline{PP'}$ ad esso corrispondente, ossia per la congiungente dei centri P e P' delle due basi. Quando le basi di un tronco di cilindro non ammettono centri di figura, l'enunciata regola sussiste ancora, purchè si sostituiscano i centri di superficie, o centri di gravità delle basi medesime ai detti centri di figura, per cui, chiamando:

S la superficie della sezion retta fatta in un tronco di cilindro qualunque,

b la lunghezza della retta congiungente i centri di figura od i centri di superficie delle due basi e

V il suo volume,

si ha la relazione:

$$V = Sb,$$

la quale serve al calcolo del volume di un tronco cilindrico qualunque.

152. Volume degli spicchii cilindrici. — Chiamo col nome di *spicchio cilindrico* il solido terminato dalla superficie VAB (*fig.* 92) di un fuso cilindrico, dal triangolo CAB coperto da questa superficie e dalle due facce piane CAV e CBV contenute nei piani determinati dalla monta \overline{CV} del fuso e dai lati \overline{CA} e \overline{CB} del triangolo che esso copre.

1° Considerando lo spicchio cilindrico avente una mezza ellisse per direttrice del fuso ad esso corrispondente, se prendonsi su questa direttrice due punti M ed M' (*fig.* 94) infinitamente vicini fra di loro, e se per questi punti s'immaginano condotti due piani perpendicolari alla direzione Ox , il volume elementare di spicchio che fra questi

piani rimane compreso si può considerare come un prisma avente per base il rettangolo $mnpq$ e di altezza dx . La base di questo prisma, quando si ritengano le denominazioni già stabilite nel numero 89, ha per lati

$$\overline{pm} = \overline{PM} = y = m \cos \varphi$$

$$\overline{pq} = \frac{a}{c} x = a \operatorname{sen} \varphi;$$

e quindi, per essere

$$dx = c \cos \varphi d\varphi$$

e chiamando dV l'indicato volume elementare, si ha

$$dV = a c m \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Ora

$$\operatorname{sen} \varphi d\varphi = -d \cos \varphi,$$

cosicchè

$$V = -a c m \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d \cos \varphi = \frac{1}{3} a c m \quad (1),$$

ossia il volume V dello spicchio cilindrico è dato dal terzo del prodotto del lato, della semicorda e della saetta o monta.

Nel dedurre il valore del volume dello spicchio cilindrico, il cui fuso ha per direttrice una mezza ellisse, non venne fatta distinzione delle tre diverse relazioni che possono esistere fra la monta e la semi-corda, per guisa che la semplicissima formola (1) vale per gli spicchii cilindrici a tutta monta, aventi per direttrice un quarto di circonferenza di circolo, per quelli a monta depressa la cui direttrice sia un quarto di ellisse e per quelli a monta rialzata aventi pure per direttrice un quarto di ellisse. Quando lo spicchio è a tutta monta, si ha $m = c$ e quindi il volume V vien dato da

$$V = \frac{1}{3} a c^2 \quad (2).$$

12° Allorquando vuoi trovare il volume di uno spicchio cilin-

drico il cui fuso ha per direttrice un arco di circolo VD (*fig. 93*), bisogna cangiare l'espressione di dV , dedotta nell'ipotesi di uno spicchio cilindrico avente per direttrice un quarto di ellisse, in quella che conviene al caso in cui questa direttrice diventa un quarto di circonferenza di circolo VDD' di raggio $\overline{C'D'} = \overline{C'V} = r$. Allora il valore di dV vien dato dall'equazione

$$dV = ar^2 \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi d\varphi,$$

ed il valore di V , essendo l'integrale di dV fra i limiti $\varphi = 0$ e φ eguale all'angolo α che il raggio $\overline{C'D}$ fa col raggio $\overline{C'V}$, si ottiene col porre

$$V = -ar^2 \int_0^\alpha \cos^2 \varphi d \cos \varphi = \frac{1}{3} ar^2 (1 - \cos^3 \alpha).$$

Chiamando ora c la semi-corda \overline{DC} dello spicchio cilindrico $VABC$ di cui vuolsi il volume ed m la sua monta \overline{CV} , dal triangolo avente i suoi vertici nei punti D, C, C' e rettangolo in C si ha

$$\cos \alpha = \frac{r-m}{r},$$

e quindi il valore di V si riduce a

$$V = \frac{1}{3} am \frac{3r(r-m) + m^2}{r}.$$

Ma (num. 24)

$$r = \frac{m^2 + c^2}{2m},$$

per cui il volume V dello spicchio cilindrico avente per direttrice un arco di circolo di corda c e di monta m , vien dato da

$$V = \frac{1}{6} a \frac{3c^4 + m^4}{c^2 + m^2} \quad (3).$$

3° Il volume di uno spicchio cilindrico, avente per direttrice del fuso che lo copre una curva qualunque VD (*fig. 92*), assai facil-

mente si può ottenere, considerando questo solido siccome un tronco cilindrico, e quindi moltiplicando la superficie della sua sezione retta, ossia la superficie della sezione VCD in esso fatta da un piano passante per la sua monta CV e perpendicolare al suo lato AB, per la lunghezza della retta la quale unisce i centri di superficie delle due facce VCA e VCB. La superficie S della sezione retta VCD è sempre un elemento facilissimo ad ottendersi colle norme che vengano date nel capitolo I della parte seconda, e la lunghezza della retta che unisce i centri di superficie delle due facce piane mistilinee VCA e VCB si può ottenere: cercando con metodi geometrici o con metodi pratici il centro di gravità o centro di superficie della sezione retta VCD; trovando la distanza d di questo centro dalla retta CV; immaginando per lo stesso centro una retta parallela alle generatrici del fuso e limitata ai punti in cui interseca le due facce VCA e VCB; e trovando la lunghezza b di questa retta col porre

$$b = \frac{d}{c} a,$$

essendo a il lato \overline{AB} e c la semicorda \overline{CD} dello spicchio.

Applicando il metodo generale ora esposto al caso dello spicchio cilindrico avente per direttrice un quarto di circonferenza di circolo, di lato a e di semi-corda c , si ha: che la sezione retta è un quarto di circolo di raggio c , e che quindi la sua superficie S vien data da

$$S = \frac{1}{4} \pi c^2;$$

che il centro di superficie di questa sezione retta cade sul raggio che fa angolo di 45° colla semi-corda e che la sua distanza dal centro della direttrice è quarta proporzionale dopo la lunghezza $\frac{1}{2} \pi c$ della direttrice stessa, la corda $c\sqrt{2}$ ed i $\frac{2}{3}$ del raggio c , cosicchè vien essa data da

$$\frac{4\sqrt{2}}{3\pi} c;$$

che la distanza d di questo centro di superficie dalla monta dello

spicchio risulta moltiplicando per il seno di 45° la trovata distanza dal centro della direttrice, per modo che

$$d = \frac{4}{3\pi} c;$$

che

$$b = \frac{4}{3\pi} a;$$

e finalmente che il domandato volume V dello spicchio vien dato da

$$V = S \times b = \frac{1}{3} a c^2,$$

come già si è trovato per altra via.

153. Volume dello spicchio cilindrico incompleto. — Sia lo spicchio cilindrico $vABo$ (*fig.* 92) terminato dalla superficie del fuso incompleto vAB , dal triangolo oAB e dalle due facce piane oAv e oBv contenute nei piani determinati dalla monta ov del fuso e dai due lati oA ed oB del triangolo che esso copre. Suppongasi che il detto fuso vAB abbia per direttrice un arco di circolo Dv , colla sua tangente nel punto D perpendicolare al piano del triangolo oAB ; si ritengano le denominazioni già stabilite nel numero 90 per quanto si riferisce al lato AB , alla semi-corda $\overline{D\sigma}$, al raggio \overline{CD} ed all'angolo vCX ; e si dica V il volume domandato.

Immaginando condotte sulla superficie del fuso vAB due generatrici infinitamente vicine rs e tu e per queste due piani perpendicolari alla retta CD , il volume elementare dV compreso fra questi piani si può considerare come un prisma avente per base di rettangolo $rs\sigma\rho$ e di altezza eguale alla distanza infinitesima che esiste fra questi piani. La base di questo prisma ha per lati

$$\overline{\rho r} = \overline{\zeta z} = r \cos \varphi$$

$$\overline{\rho \sigma} = a \frac{c - r(1 - \sin \varphi)}{c},$$

e per altezza l'espressione

$$r \cos \varphi d\varphi.$$

Il volume elementare dV risulta adunque

$$dV = \frac{r^2 a}{c} \left[(c-r) \cos^2 \varphi + r \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi \right] d\varphi;$$

ed il volume totale V dello spicchio cilindrico $vABo$ vien dato da

$$V = \frac{r^2 a}{c} \left[(c-r) \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi + r \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \right].$$

Ora si sa che

$$\int \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} (\varphi + \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi)$$

$$\int \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{1}{3} \cos^3 \varphi,$$

cosicchè prendendo questi integrali fra i limiti α e $\frac{\pi}{2}$ si ottiene

$$V = \frac{ar^2}{c} \left[\frac{c-r}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\alpha \right) + \frac{r}{3} \cos^3 \alpha \right] \quad (1).$$

Conoscendo il raggio r dell'arco circolare Dv e la corda $\overline{Do} = c$ del fuso vAB , si calcola, mediante la formola (1) del citato numero 90, l'angolo $vCX = \alpha$ del raggio \overline{Cv} condotto al vertice v del detto fuso colla perpendicolare CX al piano del triangolo che esso copre, e quindi applicando l'ultima formola si può determinare il volume V dello spicchio $vABo$.

154. **Volume del cuneo cilindrico.** — Col nome di *cuneo cilindrico* chiamo il solido, come $ADBGV$ (fig. 96), compreso fra un'unghia cilindrica $VADB$, il triangolo GAB che essa copre ed i due piani AGV e BGV determinati dai lati \overline{AG} e \overline{BG} dell'accennato triangolo e dalla monta \overline{GV} dell'unghia.

Il volume del cuneo cilindrico $ADBGV$, analogamente a quanto si è visto essere vero (num. 91) per l'unghia cilindrica $VADB$, è

la differenza fra il volume del cilindro $ADBEVF$ avente la stessa direttrice ADB e la stessa lunghezza \overline{CG} del cono e quello dello spicchio cilindrico $VAHG$ di lato \overline{AH} doppio dell'accennata lunghezza, di saetta, di semi-corda e di sezione retta eguali a quelle del cilindro cui il cono appartiene.

1° Se la corda \overline{AB} del cono cilindrico è perpendicolare alla sua lunghezza \overline{GC} , ossia alla retta che unisce il vertice G colla metà di \overline{AB} , si dice che esso è retto, e, essendo una semi-ellisse la direttrice ADB , quando si ritengano le denominazioni già stabilite nel citato numero 91, per quanto si riferisce alla corda, alla lunghezza ed alla monta, si ha: che la superficie della semi-ellisse ADB vien data (num. 75) da

$$\frac{1}{2} \pi cm;$$

che il volume del cilindro $ADBEVF$ risulta

$$\frac{1}{2} \pi acm; \quad (I);$$

che il volume dello spicchio cilindrico $VAHG$ vale (num. 152)

$$\frac{2}{3} acm; \quad (II);$$

e finalmente che si ottiene la formola determinatrice del volume V del cono cilindrico $ADBGV$ col fare la differenza fra le ultime due espressioni trovate, e quindi col porre

$$V = \frac{1}{6} (3\pi - 4) acm \quad (1).$$

Questa formola, assumendo $\frac{22}{7}$ per valore di π , si riduce a

$$V = \frac{19}{21} acm \quad (2).$$

Se la curva direttrice ADB è una mezza circonferenza di circolo, ossia se l'unghia $VADB$ è a tutta monta, si ha $m=c$, ed il volume del cono cilindrico vien dato, o dalla formola

$$V = \frac{4}{6} (3\pi - 4) a c^2 \quad (3),$$

oppure dall'altra

$$V = \frac{19}{21} a c^2 \quad (4),$$

la quale risulta dalle (3) assumendo $\frac{22}{7}$ per valore di π .

2° Quando il cono cilindrico $ADBGV$ non è retto, ma obliquo, e che l'angolo d'obliquità $B'AB$ vale α , il volume del cilindro avente la stessa direttrice e la stessa lunghezza del cono si ottiene cambiando a in $a \cos \alpha$ nell'espressione (I), ed il volume dello spicchio cilindrico di lunghezza doppia e di sezione retta eguale a quella del detto cilindro risulta dall'espressione (II) cambiando in essa c in $c \cos \alpha$. Segue da ciò che il volume V del cono cilindrico con direttrice semi-ellittica vien dato dal secondo membro della formola (1) o della formola (2) moltiplicato per il coseno dell'angolo d'obliquità α .

3° Il volume del cono cilindrico retto od obliquo con direttrice qualunque assai facilmente si può determinare, immaginandolo scomposto nelle due parti $ADVGC$ e $BDVGC$ mediante il piano CV determinato dalla sua lunghezza \overline{CG} e dalla sua monta \overline{GV} , facendo separatamente il volume di ciascuna di queste parti col considerarle siccome tronchi di cilindro e quindi coll'operare in modo affatto analogo a quello tenuto nel numero 152 per trovare il volume di uno spicchio cilindrico avente per direttrice una curva qualunque, e finalmente prendendo la somma dei due volumi che così si ottengono.

155. **Volume dei coni e dei tronchi di cono.** — Questi volumi si ottengono applicando quanto insegna la geometria elementare.

1° Essendo

A l'area della base,

a l'altezza e

V il volume di un cono qualunque,

si ha

$$V = \frac{1}{3} A a.$$

2° Per il tronco di cono a basi parallele, essendo

A ed A' le aree delle due basi ed
a l'altezza,
si ottiene il volume V mediante la formola

$$V = \frac{1}{3} a \left(A + A' + \sqrt{AA'} \right).$$

3° Per un tronco di cono a basi non parallele si ottiene il volume, togliendo dal numero esprimente la solidità del cono intero quello che dà la solidità del cono reciso.

156. **Volume dell'unghia conica.** — Generalmente chiamasi volume d'unghia conica quello compreso fra la base ADBE (fig. 100) di un cono, un piano DFE intersecante questa base e la superficie della corrispondente unghia DAEF. Questo volume è facilissimo ad ottenersi, giacchè, immaginando condotte le due generatrici VD e VE, risulta agevole il vedere che esso è la differenza di due solidi entrambi di natura conica, uno che ha per base la figura EAD facente parte della base del cono cui l'unghia appartiene, e per altezza quella del cono stesso e l'altro che ha per base la figura EFD e per altezza la perpendicolare calata dal vertice del cono sul piano di questa figura.

157. **Volume della sfera e delle sue parti.** — La geometria elementare somministra le formole per trovare il volume V della sfera, dello spicchio e del settore sferico, della piramide sferica e dei segmenti sferici ad una ed a due basi.

1° Chiamando r il raggio di una sfera ed essendo π il noto rapporto della circonferenza col diametro, il volume V vien dato dalla superficie della sfera moltiplicata per il terzo del raggio, cosicchè

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

2° Per lo spicchio sferico limitato da due semi-circoli massimi i cui piani fanno fra loro un angolo di n° ed appartenente ad una sfera di raggio r , si ottiene il volume V moltiplicando la superficie del fuso ad esso corrispondente per il terzo del raggio, per cui si ha

$$V = \frac{n^\circ}{270^\circ} \pi r^3.$$

Se poi, invece dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani

limitanti lo spicchio, si conosce la lunghezza l dell'arco di circonferenza massima della sfera cui lo spicchio appartiene, misurante il detto angolo, risulta

$$V = \frac{2}{3} l r^2.$$

3° Il volume del settore sferico si ottiene moltiplicando la superficie della corrispondente calotta per il terzo del raggio, per guisa che, avendosi un settore di raggio r e di saetta m , si ha

$$V = \frac{2}{3} \pi m r^2.$$

Quando non si conosce il raggio del settore, ma sibbene la corda $2c$ della calotta che gli corrisponde, la superficie di questa vale (num. 94) $\pi(c^2 + m^2)$, il raggio risulta (num. 24) $\frac{m^2 + c^2}{2m}$ e quindi il volume del settore vien dato da

$$V = \frac{1}{6} \pi \frac{(c^2 + m^2)^2}{m}.$$

4° Il volume della piramide sferica appartenente ad una sfera di raggio r si ottiene moltiplicando la superficie del poligono sferico ad essa corrispondente per il terzo del raggio. Segue da ciò che il volume V della piramide sferica triangolare vien dato da

$$V = \frac{A^\circ + B^\circ + C^\circ - 180^\circ}{90^\circ} \frac{1}{6} \pi r^3.$$

dove A° , B° e C° sono le ampiezze dei tre angoli del triangolo sferico.

5° Il volume V del segmento sferico ad una sola base vale la metà del prodotto della base del segmento per la sua altezza, più una sfera di diametro eguale all'altezza medesima, cosicchè, essendo $2c$ la corda ed m l'altezza del segmento, risulta

$$V = \frac{1}{6} \pi m (3c^2 + m^2).$$

6° Il volume V del segmento sferico a due basi parallele ha

per misura la semi-somma delle aree delle due basi moltiplicata per l'altezza del segmento, più il volume di una sfera di diametro eguale all'altezza medesima, cosicchè, essendo c e c' i raggi delle due basi del segmento ed m l'altezza, si ha

$$V = \frac{1}{6} \pi m \left[3(c^2 + c'^2) + m^2 \right].$$

158. **Volume del cuneo sferico.** — Sia $AEB CV$ (*fig.* 404) il cuneo sferico di cui vuolsi trovare il volume, che si può considerare siccome la differenza fra il volume del mezzo spicchio sferico $AFBCV$, e quello del mezzo segmento sferico $ABEF$.

Ritenendo le denominazioni già stabilite al numero 95, per quanto si riferisce alla base \overline{AB} ed all'altezza \overline{CD} del triangolo isoscele ABC , e chiamando V il volume domandato, si ha: che il raggio \overline{CA} , la saetta \overline{FD} e l'angolo $ACD = C$ si ottengono dalle equazioni

$$\overline{CA} = \sqrt{a^2 + c^2},$$

$$\overline{FD} = \sqrt{a^2 + c^2} - a,$$

$$\text{tang } C = \frac{c}{a} \quad (1);$$

che il volume del mezzo spicchio sferico $AFBCV$ vien espresso da

$$\frac{C}{270^\circ} \pi (a^2 + c^2) \sqrt{a^2 + c^2};$$

che il volume del mezzo segmento sferico $ABEF$ vale

$$\frac{1}{6} \pi \left[2(a^2 + c^2) \sqrt{a^2 + c^2} - a(2a^2 + 3c^2) \right];$$

finalmente che la formola determinatrice del domandato volume V del cuneo sferico risulta

$$V = \pi \left[\left(\frac{C}{270^\circ} - \frac{1}{3} \right) (a^2 + c^2) \sqrt{a^2 + c^2} + \frac{1}{6} a(2a^2 + 3c^2) \right].$$

L'angolo C si calcola mediante la formola (1) prendendo per unità il grado, e quindi si passa alla deduzione del volume V applicando la formola (2).

159. Volume degli ellissoidi. — Considerando l'ellissoide a tre assi, del quale per ottavo si ha la rappresentazione nella figura 168, e chiamando rispettivamente a , b ed m i tre semi-assi principali \overline{OA} , \overline{OB} ed OC , si ha: che una sezione qualunque EDF , parallela al piano yz e distante da questo piano di $\overline{OD} = x$, è un quadrante ellittico i cui semi-assi \overline{DF} ed \overline{ED} , desunti dalle equazioni delle sezioni principali AOB ed AOC , sono rispettivamente espressi da

$$\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$\frac{m}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

che l'area del detto quadrante ellittico vale

$$\frac{1}{4} \frac{\pi b m}{a^2} (a^2 - x^2);$$

che l'elemento di volume dell'ottavo di ellissoide, il qual elemento si può considerare come un cilindro infinitesimo avente per base l'or indicato quadrante ellittico e di altezza dx , risulta

$$\frac{1}{4} \frac{\pi b m}{a^2} (a^2 - x^2) dx;$$

e finalmente che il volume dell'ottavo di ellissoide si ottiene integrando quest'espressione fra i limiti $x = 0$ ed $x = a$, cosicchè vien esso dato da

$$\frac{1}{4} \frac{\pi b m}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{1}{6} \pi a b m.$$

Chiamando poi V il volume dell'ellissoide a tre assi, eguale ad otto volte quello or ora trovato, si ha

$$V = \frac{4}{3} \pi abm.$$

Quando l'ellissoide di cui vuolsi il volume è di rivoluzione attorno all'asse m , ponendo c invece degli altri due semi-assi, i quali diventano allora eguali fra di loro, si ottiene la formola

$$V = \frac{4}{3} \pi c^2 m,$$

la quale serve tanto pel calcolo del volume dell'ellissoide schiacciato, quanto pel calcolo del volume dell'ellissoide allungato.

160. Regola di Guldino per ottenere i volumi dei solidi di rivoluzione. — Questa regola si enuncia nei seguenti termini: il volume del solido generato dalla rotazione di una superficie piana intorno ad un asse fisso, contenuto nel piano e posto da una sola parte di essa, ha per misura il prodotto dell'area generatrice per la lunghezza dell'arco descritto dal suo centro di gravità.

La verità dell'enunciata regola assai facilmente si può dimostrare. Per giungere allo scopo si consideri una superficie piana qualunque $ABCF$ (fig. 169) rotante attorno all'asse ZZ' contenuto nel suo piano, e si chiamino:

S l'area della detta figura piana,

x_1 la distanza \overline{PG} del centro di gravità di quest'area dall'asse di rotazione ZZ' ,

ω una parte infinitesima $abcd$ dell'area generatrice $ABCF$, cui si può assegnare una forma rettangolare con due lati paralleli all'asse ZZ' ,

x la distanza \overline{pg} del punto di mezzo g di questa parte infinitesima dal detto asse.

Supponendo che la superficie $ABCF$ si riduca ad una lastra di spessore uniforme ma piccolissima, il momento del suo peso totale rispetto al piano proiettato nell'asse ZZ' deve eguagliare la somma dei momenti di tutti i pesi elementari corrispondenti alle aree infinitesime, analoghe ad $abcd$, rispetto allo stesso piano, cosicchè risulta l'equazione

$$Sx_1 = \Sigma \omega x,$$

nella quale il simbolo Σ rappresenta una somma estesa a tutti i

prodotti delle accennate aree infinitesime per le distanze dei loro mezzi dall'asse ZZ' . — Se ora si moltiplica la stabilita equazione per 2π , se chiamansi u e v i due lati infinitesimi \overline{ab} ed \overline{ad} dell'area elementare ω , e se scrivesi per primo il secondo membro, si ottiene

$$\Sigma 2\pi x . u . v = S . 2\pi x_1 .$$

Il prodotto $2\pi x$ dà la lunghezza della circonferenza di raggio eguale a pg , ossia di raggio eguale alla distanza che il punto di mezzo del lato \overline{ab} ha dall'asse ZZ' ; $2\pi x . u$ rappresenta la superficie della corona circolare descritta dall'or indicato lato nella rotazione della figura $ABCF$ attorno al detto asse ZZ' ; $2\pi x . u . v$ non è altro che il volume d'un cilindro infinitesimo avente per base la definita corona circolare e per altezza v ; e quindi $\Sigma 2\pi x . u . v$ esprime la somma dei volumi elementari generati da tutte le aree infinitesime analoghe ad $abcd$, in cui s'intende scomposta l'intera figura piana $ABCF$, ossia il volume di rivoluzione generato da tutta questa figura nel descrivere un intiero giro attorno all'asse ZZ' . Il secondo membro poi dell'ultima equazione è il prodotto della superficie generatrice S per la circonferenza $2\pi x_1$ descritta dal suo centro di gravità, cosicchè in quest'equazione trovasi contenuto l'enunciato della regola di Guldino.

La regola di Guldino per la valutazione dei volumi dei solidi di rivoluzione, non solo è vera quando la superficie generatrice descrive un intiero giro attorno all'asse di rotazione, ma anche quando descrive una parte di giro; e questo perchè risultano sempre eguali i due membri della stabilita equazione, quando si dividono le lunghezze delle due circonferenze $2\pi x$ e $2\pi x_1$ per uno stesso numero.

Un volume il quale colla massima facilità può essere calcolato mediante la regola di Guldino, è quello generato dalla rotazione di una mezza circonferenza di circolo, di un arco circolare, di una mezza ellisse o di una mezza ovale intorno ad un asse OY (*fig. 406*) contenuto nel piano della figura generatrice e disposto perpendicolarmente alla direzione OAB della sua corda. In questo caso il centro di gravità dell'area generatrice ACB trovasi sulla saetta \overline{DC} , per cui la lunghezza dell'arco descritto dal detto centro nell'intera rivoluzione della figura ACB attorno all'asse OY risulta eguale alla circonferenza di raggio $\overline{OD} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}$. Il domandato volume poi si ottiene moltiplicando l'area della figura ACB , facile a calcolarsi

mediante le norme che vennero date ai numeri 70, 71 e 73, per la lunghezza della circonferenza di raggio \overline{OD} .

161. **Metodi approssimati per la valutazione dei solidi di rivoluzione.** — Avvenendo di dover trovare la cubatura di un solido di rivoluzione, generato da un'area piana $EABCD$ (*fig. 170*), compresa fra una curva ABC , fra due rette \overline{EA} e \overline{DC} condotte dagli estremi di questa curva perpendicolarmente all'asse di rotazione YY' e fra quest'asse stesso, se non riesce facile l'adottare la regola di Guldino e se incontrasi qualche difficoltà nell'applicazione dei procedimenti di calcolo integrale alla cubatura dei solidi di rivoluzione, si può procedere approssimativamente come segue. Dividasi la curva AC in archi talmente piccoli che si possano ad essi sostituire le corde corrispondenti; dai punti di divisione F, B, G, \dots si abbassino le perpendicolari $\overline{FH}, \overline{BI}, \overline{GK}, \dots$ sull'asse di rotazione; e si assuma la somma dei volumi generati dalla rotazione dai trapezii $EAFH, HFBI, IBGK, \dots$ intorno all'asse YY' , siccome rappresentante il volume domandato. Questi volumi generati dai trapezii sono poi facilissimi ad ottenersi, giacchè sono essi tanti tronchi di coni retti a basi circolari, i cui raggi sono \overline{EA} ed $\overline{HF}, \overline{HF}$ ed $\overline{IB}, \overline{IB}$ e \overline{KG}, \dots e le cui altezze sono rispettivamente $\overline{EH}, \overline{HI}, \overline{IK}, \dots$

L'esposto metodo per la valutazione approssimata dei solidi di rotazione, secondo che la curva ABC è concava o convessa verso l'asse YY' conduce a un risultato un po' minore oppure un po' maggiore del vero; e l'errore, che generalmente vi ha nei risultamenti finali, è tanto più piccolo quanto più è grande il numero delle parti in cui si divide la curva AC .

Quando, invece del volume generato da una area piana, la quale termina all'asse di rotazione come avviene per quella rappresentata nella figura 170, vuolsi il volume generato da un'area chiusa da un perimetro $ABCF$ (*fig. 169*) di cui non fa parte il detto asse, col metodo indicato si ottengono i volumi generati dalle due aree piane $ECBAD$ ed $ECFAD$: la differenza di questi due volumi dà il volume domandato.

Nella determinazione approssimata dei volumi dei solidi di rivoluzione si possono anche considerare i solidi generati dalle aree piane (*fig. 170*) $EAFH, HFBI, IBGK, \dots$ aventi le loro altezze $\overline{EH}, \overline{HI}, \overline{IK}, \dots$ assai piccole, come altrettanti cilindretti circolari coi loro raggi rispettivamente eguali alle rette $\overline{ab}, \overline{cd}, \overline{ef}, \dots$ perpendicolari all'asse YY' , dividenti per metà le dette altezze e prolungate fino ad incontrare la curva ABC nei punti b, d, f, \dots

Un altro metodo di facilissima applicazione e che sempre conduce a risultati assai soddisfacenti consiste: nel determinare il centro di gravità dell'area generatrice; nel misurare la distanza di questo centro dall'asse di rotazione; e nel moltiplicare il numero esprimente l'indicata area per la circonferenza avente per raggio l'accennata distanza. Il centro di gravità della figura generatrice assai facilmente si può ottenere in diversi modi, ed uno di questi consiste nel disegnare su carta di spessore uniforme e ben omogenea la figura generatrice coll'asse di rotazione; nell'estrarre da questo disegno il solo pezzo di carta su cui trovasi la figura generatrice e nel determinarne il centro di gravità o col farlo stare in equilibrio su una punta verticale, oppure sospendendolo per due dei suoi punti. Trovato così il centro di gravità del pezzo di carta foggiato precisamente come la figura generatrice, si rimetta esso a sito sul disegno da cui venne estratto, e riescirà allora facile il determinare la distanza del centro di gravità della figura generatrice dell'asse di rotazione.

162. Volume compreso fra due superficie cilindriche concentriche, una loro sezione retta ed una porzione di elicoide a piano direttore. — Considerando l'elicoide a piano direttore di cui già venne trovata la superficie nel numero 99 e ritenendo le denominazioni nel medesimo numero già stabilite, egli è evidente che per elemento di volume, compreso fra le due superficie cilindriche concentriche di raggi $\overline{O_1 A_1}$ ed $\overline{O_1 E_1}$ (fig. 109), fra il piano orizzontale rappresentato nella retta OA e fra la superficie elicoidale, si può prendere il prisma elementare insistente all'area infinitamente piccola di primo ordine limitata dal raggio qualunque $O_1 M_1$ e dal suo infinitamente vicino, facente con esso l'angolo misurato dall'arco $d\theta$ ed avente per altezza l'ordinata $\overline{PM} = z$. Ora, essendo $\frac{1}{2}(R+r)$ il raggio medio, $\frac{1}{2}(R+r)d\theta$ l'arco medio corrispondente alla detta area elementare, ed $R-r$ la larghezza della corona cui la stessa area elementare appartiene, l'elemento di volume dV vien dato da

$$dV = \frac{1}{2}(R^2 - r^2)z d\theta.$$

Ma dall'equazione

$$y = x \operatorname{tang} \theta,$$

che venne trovata al numero 99, si ha

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{y}{x}$$

e

$$\theta = \operatorname{arc} \left(\operatorname{tang} = \frac{y}{x} \right),$$

cosicchè il valore di z , dato dall'equazione (1) del citato numero, risulta

$$z = \frac{p}{2\pi} \theta.$$

Sostituendo questo valore di z sull'espressione di dV , si trova

$$dV = \frac{p}{4\pi} (R^2 - r^2) \theta d\theta.$$

Se ora si vuole il volume V compreso fra le due superficie cilindriche di raggi $\overline{O_1A_1}$ ed $\overline{O_1E_1}$, fra il piano orizzontale rappresentato nella retta OA e fra la parte di superficie elicoidale la cui generatrice suprema dista della quantità a , minore di p , dal detto piano orizzontale, bisogna integrare il valore di dV fra i limiti $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi \frac{a}{p}$, cosicchè risulta

$$V = \frac{1}{2} \pi (R^2 - r^2) \frac{a^2}{p} \quad (1).$$

Facendo in quest'equazione $a = p$, si ottiene quel valore particolare V_1 del volume V che corrisponde ad un intero giro di elicoide, e risulta

$$V_1 = \frac{1}{2} \pi (R^2 - r^2) p \quad (2).$$

165. Metodi approssimati per la valutazione di volumi qualunque. — Allorquando devesi determinare il volume di corpi limitati da superficie di cui non si conosce la generazione geometrica, od anche da superficie la cui generazione geometrica è ben definita, ma per le quali non riescono applicabili i metodi esposti nei prece-

denti numeri per impossibilità od anche solamente per difficoltà che s'incontrano nell'effettuare le integrazioni, è necessario aver ricorso a metodi d'approssimazione, di alcuni dei quali immediatamente si dà un breve cenno.

Un primo metodo consiste: nell'immaginare tagliato il solido, di cui vuolsi trovare il volume, mediante un sistema di piani paralleli equidistanti o non, ma talmente vicini che i diversi solidi fra essi compresi si possano senza grave errore considerare come altrettanti prismi; nel determinare le aree delle diverse sezioni prodotte dai detti piani seganti non che le loro distanze; nel fare i volumi delle singole parti, moltiplicando la semi-somma delle aree delle sezioni fra cui cadono per le distanze delle sezioni medesime; e finalmente prendendo la somma di tutti i prodotti così ottenuti.

Un secondo metodo consiste: nel proiettare il corpo di cui vuolsi il volume su un piano; nell'immaginare divisa questa proiezione in triangoli talmente piccoli, da potersi essi considerare come le proiezioni di altrettanti triangoli aventi i loro vertici sulla superficie del corpo di cui vuolsi il volume e costituenti una superficie poliedrica che poco si scosta e che per approssimazione si sostituisce alla sua superficie effettiva; nel valutare le aree dei varî triangoli segnati sulla detta proiezione; non che le rette proiettantisi nei loro vertici per le parti intercette nel corpo; nel calcolare i volumi di tutti i tronchi di prisma aventi per sezioni rette i triangoli di cui si determinarono le aree, e per spigoli le rette di cui si trovarono le lunghezze; e finalmente nel fare i volumi di tutti questi tronchi di prisma, e nel sommarli.

Avvenendo poi di dover trovare il volume di un corpo facile a trasportarsi, e che senza inconvenienti si può immergere nell'acqua, convien adottare il seguente semplicissimo metodo. In un recipiente prismatico o cilindrico disposto colla sua base in un piano orizzontale si versi tant'acqua, che il corpo di cui vuolsi il volume per intiero vi possa rimanere sommerso; si segnino le posizioni del livello del liquido prima e dopo la sommersione; si calcolino i volumi dei prismi o dei cilindri aventi per base quella del recipiente e per altezze le distanze fra le accennate due posizioni del livello del liquido dal piano della detta base, ed evidentemente la differenza fra questi due volumi rappresenta quello del corpo stato posto nel recipiente. — Allo stesso risultato si arriva, riempiendo totalmente d'acqua un recipiente prismatico o cilindrico in cui per intiero il corpo da misurarsi possa rimaner sommerso, e misurando, vuoi la quantità di liquido che da questo si riversa per la totale immersione del

detto corpo, vuoi il volume della parte di recipiente che rimane senz'acqua in seguito all'estrazione dello stesso corpo.

Il peso assoluto di un corpo si ottiene moltiplicando il suo volume per il suo peso specifico, convenientemente riferito all'unità adottata nel valutare il volume. Segue da ciò che si può determinare il volume di un corpo di forma per quanto si vuole irregolare, ma omogeneo e tale da potersi pesare, determinando il suo peso assoluto e dividendo questo pel suo peso specifico.

164. Volume compreso fra la superficie d'intrados d'una vòlta a botte ed il suo piano d'imposta. — Il volume compreso fra la superficie d'intrados di una vòlta a botte coprente un rettangolo oppure un parallelogramma ed il suo piano d'imposta, è quello di un cilindro avente per base la figura limitata da uno degli archi di testa e dalla corrispondente corda, per cui, chiamando

S l'area dell'indicata figura,

b la perpendicolare abbassata da un punto qualunque di uno dei due piani di testa sull'altro, e

V_b il volume domandato,

si ha la semplice formola

$$V_b = Sb.$$

Se la vòlta a botte è retta, ossia se copre un rettangolo posto in un piano orizzontale e se ha le sue generatrici pure orizzontali, l'altezza b del cilindro è eguale alla lunghezza costante delle generatrici.

Quando invece la vòlta a botte è obliqua, ossia quando coprendo un parallelogramma $ABCD$ (*fig. 110*) collocato in un piano orizzontale, ha le sue generatrici pure orizzontali, l'altezza b è la perpendicolare comune ai due lati paralleli \overline{AB} e \overline{DC} del detto parallelogramma. Siccome poi, immaginando abbassata dal punto F una perpendicolare sulla base CKD , questa perpendicolare fa con FH un angolo eguale all'angolo EDC della sezione retta EID col piano di testa CKD , se si ritengono le denominazioni già stabilite al numero 101 per quanto si riferisce al detto angolo ed alla lunghezza delle generatrici, si ha che il valore di b vien dato da

$$b = a \cos \alpha.$$

Finalmente se la vòlta a botte è rampante (*fig. 111*), l'altezza b ,

che è orizzontale e che è lunga come la proiezione orizzontale di una generatrice, si ottiene mediante la formola

$$b = a \operatorname{sen} \beta,$$

dove a e β hanno i significati che già loro vennero attribuiti nel citato numero 101.

Avvenendo il caso di dover trovare il volume compreso fra il piano d'imposta e la superficie d'intrados di una volta a botte coprente un trapezio, siccome questo volume è quello di un tronco di cilindro, basta per ottenerlo moltiplicare la superficie della sua sezione retta per il suo asse. Quest'asse poi si proietta in grandezza naturale sulla retta EF (fig. 112), la quale unisce i punti di mezzo E ed F dei due lati non paralleli del trapezio.

165. Volume compreso fra la superficie d'intrados d'una volta a collo d'oca ed il piano orizzontale passante per la sua generatrice più bassa. — Questo volume non è altro che quello di un cilindro retto avente per base l'area chiusa fra la curva direttrice ABC (fig. 115), fra la proiezione orizzontale e la proiezione verticale di questa curva, ed avente per altezza la lunghezza $\overline{AA'}$ delle diverse generatrici. L'area S della base del definito cilindro si può ottenere esattamente allorquando la curva ABC venne descritta con metodi geometrici, ed in tutti i casi la stessa area si può valutare con grande approssimazione applicando le regole che vennero date nei numeri 74 e 75. Chiamando poi V_r il volume domandato ed a la lunghezza della generatrice $\overline{AA'}$, si ha

$$V_r = S a.$$

166. Volume compreso fra la superficie d'intrados di una volta anulare ed il suo piano d'imposta. — Questo volume assai facilmente si ottiene applicando la regola di Guldino quale venne enunciata nel numero 160. Ragionando sulla volta anulare rappresentata in proiezione orizzontale nella figura 114, per la quale già si insegnò a trovare la superficie d'intrados nel numero 105, ritenendo le denominazioni in questo numero stabilite per quanto si riferisce ai due raggi \overline{CA} e \overline{CB} della corona circolare coperta dalla volta e chiamando

S la superficie della figura generatrice che generalmente suol essere un mezzo circolo, o un segmento circolare, o una mezza ellisse, o una mezza ovale,

V_a il volume domandato, si ha: che l'arco descritto dal centro di gravità della figura generatrice nel produrre il volume V_a è la circonferenza di raggio $\frac{R+r}{2}$, e che quindi questo volume vien dato dalla formola

$$V_a = \pi(R+r)S.$$

Quando la vòlta anulare non coprè un'intera corona circolare, ma sibbene una parte AEF GHB cui corrisponde l'angolo $\angle ACF = \alpha^\circ$, la lunghezza dell'arco DLI descritto dal centro di gravità dell'area generatrice vien espressa da

$$\frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \pi(R+r),$$

per cui il volume V_a , compreso fra la superficie d'intrados della vòlta ed il suo piano d'imposta, vien dato da

$$V_a = \frac{\alpha^\circ}{360^\circ} \pi(R+r)S.$$

La regola di Guldino si presta anche a trovare il volume racchiuso fra il piano d'imposta e la superficie d'intrados di una vòlta anulare coprente una corona o soltanto una porzione di corona non circolare; purchè abbia essa larghezza costante, in modo da non cambiare di forma la figura generatrice.

167. Volume compreso fra la superficie d'intrados di una vòlta elicoidale ed il piano orizzontale passante per la sua generatrice più bassa. — Ritenendo le denominazioni che già vennero stabilite al numero 104 per quanto si riferisce ai raggi dei cilindri fra cui si trova la superficie elicoidale, al passo delle eliche direttrici ed all'altezza della generatrice più alta sulla generatrice più bassa dell'elicoide, si ha che il volume V_e vien dato: dalla formola (1) del numero 162 e quindi da

$$V_e = \frac{1}{2} \pi (R^2 - r^2) \frac{a^2}{p}$$

quando la vòlta elicoidale fa meno di un giro; dalla formola (2) dello stesso numero e quindi da

$$V_e = \frac{1}{2} \pi (R^2 - r^2) p$$

quando la vólta fa un giro intiero.

Se poi la vólta elicoidale fa più di un giro intiero, convien immaginare condotti, per la generatrice più bassa, per le generatrici che corrispondono a giri intieri e per la generatrice più alta, altrettanti piani perpendicolari all'asse dei cilindri fra cui la vólta si trova, e separatamente calcolare colle formole che vennero stabilite tutti i volumi compresi fra questi piani considerati successivamente a due a due, giacchè questi volumi sono appunto quelli che nella pratica importa di conoscere per giungere alla determinazione del volume della muratura da impiegarli nella costruzione di una vólta elicoidale.

168. Volume compreso fra la superficie d'intrados d'una vólta anulare ed elicoidale e la superficie dell'elicoide a piano direttore, determinata dalle due eliche d'imposta. — Per trovare la formola determinatrice di questo volume si ritengano le denominazioni già stabilite nel numero 105 per quanto si riferisce ai raggi dei cilindri fra cui trovasi la vólta, alla differenza di livello fra il punto più alto e il punto più basso dell'arco di elica descritto da uno dei due estremi della curva generatrice della superficie d'intrados ed al passo delle eliche direttrici; si chiamino poi

S l'area della figura generatrice del volume che vuolsi valutare, la qual area è quella compresa fra la curva generatrice della detta superficie d'intrados e la sua corda e

V_{ee} il volume domandato.

Considerando la figura generatrice in due posizioni infinitamente vicine, cosicchè i loro piani facciano col piano corrispondente alla posizione iniziale della stessa figura gli angoli misurati dagli archi θ e $\theta + d\theta$ di raggio eguale all'unità, il volume elementare compreso fra queste due posizioni infinitamente vicine si può considerare siccome un piccolissimo spicchio di solido di rivoluzione e quindi si può esprimere mediante la regola di Guldino. Ora, essendo

$\frac{1}{2} (R+r) d\theta$ l'arco descritto dal centro di gravità dell'area S nel generare il detto volume elementare, si ha che vien esso espresso da

$$\frac{1}{2} S (R+r) d\theta;$$

per cui il volume totale V_{ac} , quando vogliasi per una differenza di livello a fra il punto più basso ed il punto più alto dell'arco di elica descritto da uno dei due estremi della curva generatrice della superficie d'intrados, si ottiene integrando fra i limiti $\theta=0$ e $\theta=2\pi\frac{a}{p}$, e ponendo quindi

$$V_{ac} = \frac{a}{p} \pi (R+r) S.$$

169. Volume compreso fra la superficie d'intrados d'una volta conica ed il suo piano d'imposta. — Nel caso ben frequente della pratica in cui trattasi di una volta conica che, avendo gli archi di testa contenuti in piani verticali, copre all'imposta un trapezio ABCD collocato in un piano orizzontale (*fig. 115*), il volume che vuolsi trovare è quello di un tronco di cono a basi parallele, per modo che, chiamando

A ed A' le aree delle due figure simili AED e BFC,

a l'altezza del trapezio coperto dalla volta, la qual altezza è pur quella del tronco di cono di cui si deve trovare il volume,

V_c il volume domandato,
si ha

$$V_c = \frac{1}{3} a \left(A + A' + \sqrt{AA'} \right).$$

Quando la figura coperta da una volta conica alla sua imposta non è un trapezio, ma sibbene un quadrilatero ABCD, il volume compreso fra il piano d'imposta e la superficie d'intrados della volta si ottiene togliendo dal volume del cono VAED quello del cono VBFC.

170. Volume compreso fra la superficie d'intrados d'una volta conoidica ed il suo piano d'imposta. — Il volume compreso fra la superficie d'intrados di una volta conoidica ed il suo piano d'imposta si può facilmente valutare per approssimazione.

S'immagini perciò un sistema di piani, paralleli a quello contenente la curva di testa AED; come si è detto nel numero 107, ragionando sulla figura 118 e pel piano segante KL in particolare, si trovino le intersezioni di tutti questi piani colla superficie d'intrados della volta; si determinino le superficie delle figure comprese fra queste intersezioni e le relative corde poste nel piano d'imposta; si calcolino i volumi compresi fra i diversi piani seganti,

moltiplicando la semi-somma delle aree delle sezioni fra cui si trovano per la distanza delle sezioni medesime; e finalmente si sommano tutti questi prodotti per ottenere il volume totale.

Considerando la vólta conoidica coprente alla sua imposta il trapezio isoscele ABCD (*fig. 117 e 118*) posto in un piano orizzontale e colla superficie d'intrados generata come si è detto nel numero 107, assai facilmente si può arrivare alla formola determinatrice del volume compreso fra la detta superficie d'intrados ed il piano d'imposta. Perciò si assuma per origine di coordinate il punto V, per asse delle x la retta VG, per asse delle y la perpendicolare a questa retta contenuta nel piano del triangolo VAD e per asse delle z la verticale determinata dal punto V, rappresentata in VU sulla figura 117 e proiettantesi verticalmente in V'E' sulla figura 118. Si chiamino

$2c$ la corda \overline{AD} dell'arco di testa AED,

b la distanza \overline{VG} del piano contenente quest'arco dal punto V, ossia dalla retta direttrice VU,

b' la distanza \overline{VH} del piano contenente l'altro arco di testa BFC dalla stessa retta direttrice VU,

m la monta \overline{GE} della vólta,

x, y e z le tre coordinate \overline{VL} , \overline{Lo} e $\overline{V'v'}$ del punto qualunque della superficie d'intrados rappresentato (*fig. 118*) in o sulla proiezione orizzontale ed in o' sulla proiezione verticale,

V_e il volume domandato,

e suppongasi che la curva direttrice AED proiettata orizzontalmente in \overline{AD} e verticalmente in $A'E'D'$ sulla citata figura 118 sia una mezza ellisse. L'ordinata $z = \overline{V'v'}$, essendo quella del punto O' della semi-ellisse $A'E'D'$ cui corrisponde l'ascissa $\overline{v'O'} = \overline{GO}$, vien data da

$$z = \frac{m}{c} \sqrt{c^2 - \overline{GO}^2};$$

e, avendosi pei due triangoli simili OGV ed oLV

$$\overline{OG} = \frac{\overline{VG} \times \overline{Lo}}{\overline{VL}} = b \frac{y}{x},$$

risulta l'equazione

$$z = \frac{m}{c} \sqrt{c^2 - b^2 \frac{y^2}{x^2}},$$

la quale, essendo una relazione fra le tre coordinate x , y e z di un punto qualunque della superficie conoidica costituente l'intrados della vòlta, rappresenta appunto l'equazione di questa superficie. Elevando al quadrato i due membri della trovata equazione, si può essa scrivere

$$\frac{y^2}{c^2 x^2} + \frac{z^2}{m^2} = 1,$$

e così dimostra come la sezione $I'E'K'$, prodotta nella detta superficie conoidica da un piano qualunque KI parallelo al piano di testa DA e distante dal punto V della quantità $\overline{VL} = x$, è una semi-ellisse i cui semi-assi sono

$$\overline{VK'} = \overline{LK} = \frac{cx}{b}, \quad \overline{VE'} = m.$$

Premesso questo, se prendesi per elemento del volume che vuoi valutare quello compreso fra la sezione determinata dal piano qualunque IK e la sezione infinitamente vicina, distante da essa della quantità dx , il volume elementare dV , potendosi considerare come un prisma avente per base la semi-ellisse di semi-assi $\frac{cx}{b}$ ed m ed avente l'altezza dx , vien dato da

$$dV = \frac{1}{2} \pi \frac{cm}{b} x dx,$$

per cui il volume V , essendo l'integrale di dV fra i limiti $x = \overline{VH} = b'$ ed $x = \overline{VG} = b$, risulta dalla formola

$$V_c' = \frac{1}{4} \pi cm \left(b - \frac{b'^2}{b} \right).$$

171. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta con strombature. — Sia la vòlta con strombature la cui superficie d'intrados è rappresentata nella figura 120, e vogliasi trovare il volume proiettantesi orizzontalmente nel trapezio $ABCD$ e limitato, inferiormente dal piano d'imposta $A''B''$ e

superiormente dalla superficie d'intrados $A'F'B'C'E'D'$ della quale già venne spiegata la generazione nel numero 108.

Per ottenere l'indicato volume non terrò il metodo esatto che consiste nel procurarsi prima il suo differenziale e nel passare poscia all'integrazione fra limiti convenienti, giacchè l'applicazione di un tal metodo indubitatamente deve presentare delle serie difficoltà; ma sibbene mi accontenterò di procedere con un metodo d'approssimazione. Questo metodo consiste nell'immaginare tagliato il solido di cui vuolsi il volume mediante il sistema di piani verticali $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \dots$ paralleli alle basi del trapezio $ABCD$ coperto dalla volta; nel trovare le intersezioni $a_1'c_1'b_1', a_2'c_2'b_2', a_3'c_3'b_3', \dots$ di questi piani colle superficie d'intrados, come si è detto nel già citato numero 108; nel calcolare le aree comprese fra le curve $A'F'B', a_1'c_1'b_1', a_2'c_2'b_2', a_3'c_3'b_3', \dots, D'E'C'$, fra le perpendicolari abbassate dai loro estremi sulla retta $A''B''$ e fra quest'ultima retta, le quali aree sono appunto quelle delle sezioni prodotte nel solido, di cui vuolsi il volume, dai piani verticali $a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \dots$; nell'ottenere i volumi compresi fra queste sezioni, moltiplicando le semi-somme delle aree delle sezioni, fra cui questi volumi si trovano, per le distanze delle sezioni stesse; e finalmente nel sommare tutti i prodotti che si ottengono, onde ottenere nella somma il volume totale.

172. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una volta a bacino su pianta circolare. — Questo volume, che verrà indicato con V_β , è sempre di rivoluzione, ed ecco le norme che generalmente conducono alla sua valutazione.

1° Per una volta a bacino a tutta monta colla superficie d'intrados generata dalla rotazione di un quarto di circonferenza di circolo, BD (*fig. 121*), di raggio $\overline{CB} = r$, il volume V_β è quello di un emisfero, e quindi vien esso dato (num. 157) da

$$V_\beta = \frac{2}{3} \pi r^3.$$

2° Per una volta a bacino colla superficie d'intrados generata da un arco circolare DB (*fig. 122*), di semi-corda $\overline{CB} = c$ e di monta $\overline{CD} = m$, il volume V_β è quello di un segmento sferico ad una sol base per cui (num. 157) si ha

$$V_\beta = \frac{1}{6} \pi m (3c^2 + m^2).$$

3° Per una vólta a bacino a monta depressa od a monta rialzata colla superficie d'intrados generata da un quarto di periferia ellittica AB (*fig. 102 e 103*), in modo da essere c la semi-corda \overline{CA} ed m la monta \overline{CB} della vólta, il volume V_β è quello di un mezzo ellissoide, e per conseguenza serve alla sua valutazione la formola (num. 159)

$$V_\beta = \frac{2}{3} \pi c^2 m.$$

4° Per una vólta a bacino colla superficie d'intrados generata dalla rotazione di un quarto di ovale attorno ad un suo semi-asse, facilmente si può arrivare alla determinazione del volume V_β applicando una delle regole che vennero date nel numero 161, le quali regole vengono pure in acconcio per le vólte a bacino colla superficie d'intrados generata dalla rotazione di una curva qualunque.

Allorquando nella valutazione del volume V_β , per una vólta a bacino colla superficie d'intrados generata da un quarto di ovale, vuoi si procedere con un'approssimazione piuttosto grossolana, ma speditamente, si può adottare l'ultima formola che venne stabilita in questo numero, ossia quella che conviene per la vólta a bacino colla superficie d'intrados generata dalla rotazione di un quarto di ellisse.

173. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vólta a bacino su pianta ellittica e su pianta ovale. — Questo volume è generalmente quello di un mezzo ellissoide a tre assi, quando la figura coperta dalla vólta al livello del piano d'imposta è un'ellisse, per cui, chiamando rispettivamente a e b i due semi-assi principali \overline{CB} e \overline{CD} (*fig. 123*) di quest'ellisse, m la monta \overline{CF} della vólta e V_ε il volume domandato, si ha (num. 159)

$$V_\varepsilon = \frac{2}{3} \pi abm.$$

Quando la vólta copre, non un'area ellittica, ma sibbene un'area ovale, si può per approssimazione trovare il volume V_ε , o applicando il primo dei metodi che vennero dati nel numero 163, oppure applicando la formola or ora stabilita pel caso della vólta a bacino su pianta ellittica.

174. Volume compreso fra il piano d'imposta e la superficie d'intrados d'una vólta a conca. — In seguito al sistema di generazione della superficie d'intrados della vólta, quale venne definito

nel numero 111, ecco come si può determinare in modo rigoroso il volume compreso fra la sua superficie d'intrados ed il suo piano d'imposta. Si chiamino

$2a$ e $2b$ i lati \overline{AD} ed \overline{AB} (fig. 124) del rettangolo coperto dalla vólta,

m la sua monta \overline{OV} , e

V_{co} il volume domandato.

Considerando una sezione qualunque avb fatta nel solido di cui vuolsi il volume perpendicolarmente al piano del rettangolo d'imposta $ABCD$ e parallelamente al lato AB , e dicendo x la distanza di questa sezione dal centro O dell'indicato rettangolo, si ha: che la detta sezione è una semi-ellisse generatrice i cui semi-assi sono

$$\overline{oa} = b, \quad \overline{ov} = \frac{m}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

che l'area di questa semi-ellisse vien espressa da

$$\frac{1}{2} \pi b \frac{m}{a} \sqrt{a^2 - x^2};$$

che il volume elementare, compreso fra la detta sezione ed una sezione infinitamente vicina, distante da essa della quantità dx , vale

$$\frac{1}{2} \pi b \frac{m}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx;$$

che l'integrale di quest'ultima espressione, preso fra i limiti $x=0$ ed $x=\overline{OF}=a$, dà per metà del valore del volume V_{co} .

$$\frac{1}{2} \pi b \frac{m}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{8} \pi^2 abm;$$

e finalmente che la formola determinatrice del total volume domandato V_{co} risulta

$$V_{co} = \frac{1}{4} \pi^2 abm.$$

Il volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vòlta a conca si può anche determinare per approssimazione, immaginando una serie di semi-ellissi generatrici assai vicine fra di loro, a partire dalla GVH fino a quella che si riduce alla retta AB, trovando le aree di tutte queste semi-ellissi, e calcolando i volumi compresi fra le coppie di due semi-ellissi successive col moltiplicare le semi-somme delle loro aree per le loro distanze contate sulla retta OF. La somma di tutti i prodotti, che così si ottengono, dà per approssimazione la metà del volume domandato; e quindi il doppio di questa somma somministra tutto intiero questo volume con un'approssimazione tanto più grande quanto più le semi-ellissi generatrici vennero assunte vicine le une alle altre.

175. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vòlta a vela sferica. — La generazione della superficie d'intrados di una vòlta a vela sferica, quale venne definita nel numero 112, chiaramente fa vedere che il volume compreso fra la superficie d'intrados ed il suo piano d'imposta si ottiene procurandosi prima il volume della mezza sfera avente per raggio quello del circolo circoscritto al poligono coperto dalla vòlta, e togliendovi la somma dei volumi di tanti semi-segmenti sferici ad una sola base, quanti sono i lati del detto poligono. Quando il poligono coperto dalla vòlta è regolare, tutti i semi-segmenti sono eguali, la corda di ciascuno di essi è il lato del poligono, e la saetta è la differenza fra il suo raggio ed il suo apotema. Quando invece la vòlta copre un poligono non regolare, i semi-segmenti non sono più tutti eguali fra di loro, la corda di ciascuno di essi è un lato dell'indicato poligono, e la saetta è la differenza fra il raggio del circolo circoscritto, e la perpendicolare calata del centro del circolo stesso sul lato il quale serve di corda al semi-segmento che si considera.

176. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vòlta a vela sferica coprente un poligono regolare. — Ritenendo le denominazioni che già vennero stabilite nel numero 113 per quanto si riferisce al raggio, al lato, all'apotema ed al numero dei lati del poligono regolare coperto della vòlta a vela, e chiamando V, il domandato volume, si ha: che il volume dell'emisfero di raggio r vien espresso da

$$\frac{2}{3} \pi r^3;$$

che il volume di ognuno dei semi-segimenti sferici, di corda l e di saetta $r - a$, vale

$$\frac{1}{12} \pi (r - a) \left[\frac{3}{4} l^2 + (r - a)^2 \right];$$

e finalmente che il volume V_v della vòlta a vela, differenza fra quello dell'emisfero e quello di n semi-segimenti, si può ottenere colla formola

$$V_v = \frac{1}{48} \pi \left\{ 32r^3 - n(r - a) \left[3l^2 + 4(r - a)^2 \right] \right\},$$

nella quale si devono porre per a e per r i valori somministrati dalle ultime due formole del citato numero 445, allorquando il poligono regolare è determinato dal numero n dei suoi lati e dalla loro lunghezza l .

177. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a vela sferica su pianta rettangolare. — Per ottenere la formola determinatrice di questo volume, si attribuiscono alle lettere a , b ed r i significati che già loro vennero dati al numero 444 parlando del modo di trovare la superficie d'intrados della vòlta a vela sferica su pianta rettangolare, e si chiami V_v il volume domandato. Il volume V' dell'emisfero coprente il circolo circoscritto al rettangolo ABCD (*fig.* 427), posto al livello dell'imposta della vòlta, vien dato da

$$V' = \frac{2}{3} \pi r^3;$$

la somma V'' dei volumi dei due semi-segimenti eguali, aventi per corde i lati \overline{AB} e \overline{DC} di lunghezza a e per saette le rette \overline{EF} e \overline{GH} di lunghezza $r - \frac{1}{2}b$, risulta

$$V'' = \frac{1}{48} \pi (2r - b) \left[3a^2 + (2r - b)^2 \right];$$

la somma V''' dei volumi dei due semi-segimenti eguali, aventi per

corde i lati \overline{BC} ed \overline{AD} di lunghezza b e le cui saette sono le rette \overline{IK} ed \overline{LM} lunghe $r - \frac{1}{2}a$, vien data da

$$V''' = \frac{1}{48} \pi (2r - a) \left[3b^2 + (2r - a)^2 \right];$$

e finalmente il volume V_v , differenza fra quello dell'emisfero e la somma di quelli dei semi-segimenti, risulta dalla formola

$$V_v = V - (V'' + V''').$$

Il raggio r del circolo circoscritto al rettangolo $ABCD$ coperto dalla vólta è funzione dei due lati a e b , e, per sostituirlo nelle formole che danno i valori di V' , V'' e V''' , bisogna prima calcolarlo coll'ultima formola del citato numero 114.

178. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vólta a vela su pianta rettangolare coll'intrados generato da un arco di circolo di forma variabile. — La generazione geometrica della superficie d'intrados di questa vólta, quale venne data nel numero 115, lascia travedere dover presentare delle difficoltà la determinazione del volume compreso fra la detta superficie d'intrados ed il piano d'imposta, col metodo esatto di procurarsi prima il suo differenziale e di passare quindi ad integrare fra limiti convenienti, per cui mi accontenterò di indicare come si possa esso determinare per approssimazione.

Col metodo già esposto nel citato numero 115 si trovino le intersezioni della superficie d'intrados della semi-vólta $EBFCGVE$ (*fig.* 128) con piani perpendicolari al piano d'imposta $ABCD$ e paralleli a BC ; si calcolino le aree delle figure piane analoghe ad $IMNPK$; si facciano le semi-somme di queste aree considerandole successivamente due a due, a partire da quella corrispondente alla monta OV fino alla BFC ; e si moltiplichino queste semi-somme per le distanze fra le sezioni cui si riferiscono. Il doppio della somma di tutti questi prodotti evidentemente dà il volume domandato, il quale sarà tanto più esatto quanto più grande sarà il numero delle fatte intersezioni analoghe ad $IMNPK$.

179. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vólta a padiglione. — Questo volume evidentemente si compone di tanti spicchii cilindrici quanti sono i lati del

poligono coperto dalla vòlta a padiglione, e quindi vale, per determinarlo, la regola generale di ottenere i volumi dei diversi spicchii componenti, colle norme che vennero date nel numero 152, e di prendere quindi la loro somma.

180. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a padiglione su pianta regolare. — 1° Quando la vòlta a padiglione è a tutta monta, ossia quando la sua monta è eguale all'apotema del poligono regolare che essa copre, la cubatura di ciascuno degli spicchii, componenti il chiesto volume V_p , vien data dalla formola (2) del numero 152, per cui indicando con a il lato del detto poligono regolare, con n il numero dei suoi lati e con c il suo apotema costituente la semi-corda di ciascun spicchio, si ha

$$V_p = \frac{1}{3} n a c^2.$$

2° Se la vòlta a padiglione è a monta depressa e se la direttrice di ciascuno dei fusi, componenti la sua superficie d'intrados, è un arco di circolo di monta m , i volumi degli spicchii risultano dalla formola (5) del numero 152, e quindi il volume domandato V_p si ottiene ponendo

$$V_p = \frac{1}{6} n a \frac{3c^4 + m^4}{c^2 + m^2}.$$

3° Nel caso in cui ciascuno dei fusi componenti la superficie d'intrados della vòlta ha per direttrice un quarto di ellisse, il volume di ciascuno degli n spicchii cilindrici vien dato dalla formola (1) del numero 152, e quindi il volume totale V_p compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta vien dato dalla formola

$$V_p = \frac{1}{3} n a c m.$$

Nelle tre formole or ora stabilite, che servono a dedurre il valore di V_p nei tre distinti casi di una vòlta a padiglione coprente un poligono regolare coi fusi componenti la sua superficie d'intrados, aventi per direttrice un quarto di circonferenza di circolo, un arco circolare, un quarto di ellisse, si può esprimere c in funzione di a e di n mediante la formola (1) del numero 117.

181. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vólta a padiglione su pianta rettangolare. — Si ritengano le denominazioni che già vennero stabilite al numero 113 per quanto si riferisce ai lati del rettangolo coperto dalla vólta ed alla sua monta, e si indichi con V_p il volume domandato.

Se i quattro fusi costituenti la superficie d'intrados della vólta hanno per direttrice un quarto di ellisse, si ha: che la somma dei volumi dei due spicchii cilindrici VABE e VCDE (*fig. 130*), le cui semi-corde, lati e monte sono rispettivamente $\frac{1}{2}b$, a ed m , vien espressa da

$$\frac{1}{3}abm;$$

che la somma dei volumi dei due spicchii cilindrici VBCE e VDAE, aventi rispettivamente $\frac{1}{2}a$, b ed m , per semi-corde, per lati e per monte, vale pure

$$\frac{1}{3}abm;$$

e finalmente che il volume V_p , somma de' due volumi trovati, risulta dalla formola

$$V_p = \frac{2}{3}abm.$$

182. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vólta a botte con teste di padiglione. — Ragionando sulla figura 131, già venne indicato nel numero 119 qual sia la generazione geometrica della superficie d'intrados di questa vólta nel caso più generale in cui copre un'area trapezia, e, da quanto in detto numero venne stabilito, si può conchiudere che il volume compreso fra la sua superficie d'intrados ed il suo piano d'imposta consta: del cilindro retto LE'GMF'H; e degli spicchii cilindrici F'MBF, F'BCF, F'CHF, E'GDE, E'DAE ed E'ALE.

Le dimensioni lineari poi che, unitamente alla monta della vólta, servono al calcolo dei volumi delle accennate sette parti facilmente si deducono, come già s'insegnò nel citato numero 119, quando si conoscano i quattro lati del trapezio ABCD, per cui, trovate queste

dimensioni lineari, altro non si ha da fare che ottenere il volume della parte cilindrica, come si è detto al numero 451, e calcolare i volumi degli spicchii come si è insegnato nel successivo numero 452. La somma di tutti questi volumi parziali dà il total volume domandato.

183. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a botte con teste di padiglione su pianta rettangolare. — Questo volume, come facilmente si deduce con un ragionamento in tutto analogo a quello tenuto nel numero 420 per dare la regola che serve al calcolo della superficie d'intrados d'una vòlta a botte con teste di padiglione su pianta rettangolare, vale la somma dei volumi compresi fra le superficie d'intrados ed i piani d'imposta di due vòlte, l'una a botte di lunghezza eguale alla differenza fra il lato maggiore ed il lato minore, e di corda eguale al lato minore della pianta rettangolare, e l'altra a padiglione insistente ad un quadrato di lato eguale al lato minore della detta pianta. La monta poi di queste due vòlte è eguale a quella della vòlta proposta.

184. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vòlta a schifo. — Nel numero 421 venne spiegato qual sia la generazione geometrica della superficie d'intrados di una vòlta a schifo coprente un poligono qualunque, e, da quanto in questo stesso numero venne detto, risulta ad evidenza che il volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una di queste vòlte consta di tante parti cilindriche (*fig. 452*) $FaF'Gb'G'$, $Gb'G'Hc'H'$, $Hc'H'Id'I'$, $Id'I'Ke'K'$, $Ke'K'Ml'M'$ ed $Ml'MFa'F'$, quanti sono i lati del poligono che essa copre; di tante coppie di spicchii cilindrici $F'AaF$ e $G'Bb'G$, $G'Bb'G$ ed $H'Cc'H$, $H'Cc'H$ ed $I'Dd'I$, $I'Dd'I$ e $K'Ee'K$, $K'Ee'K$ ed $M'Ll'M$, $M'Ll'M$ ed $F'Aa'F'$, quanti sono gli stessi lati; e di un prisma retto $FGHIKMF'G'H'I'K'M'$. Conoscendosi i lati e gli angoli del poligono coperto dalla vòlta non che la distanza del perimetro $ABCDEL$ di questo poligono dall'altro perimetro $FGHIKM$, che corrisponde alla parte piana della superficie d'intrados, si calcolano, colle formole che vennero stabilite nel citato numero 424, i lati $\overline{Aa} = \overline{Aa'}$, $\overline{Bb} = \overline{Bb'}$, $\overline{Cc} = \overline{Cc'}$, $\overline{Dd} = \overline{Dd'}$, $\overline{Ee} = \overline{Ee'}$, ed $\overline{Ll} = \overline{Ll'}$ dei diversi spicchii, non che le lunghezze $\overline{ab'}$, $\overline{bc'}$, $\overline{cd'}$, $\overline{de'}$, $\overline{el'}$ ed $\overline{la'}$ delle parti cilindriche. Calcolati questi lati e queste lunghezze, si può dire, quando si aggiunga la monta della vòlta, che si hanno tutti gli elementi che servono al calcolo dei volumi delle parti cilindriche, degli spicchii

e del prisma, i quali volumi parziali danno nella loro somma il totale volume domandato.

185. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a schifo su pianta rettangolare. — Riesce facile il dedurre, con un ragionamento analogo a quello tenuto nel numero 122 per formulare la regola colla quale si può facilmente arrivare alla determinazione della superficie d'intrados della vòlta a schifo coprente il rettangolo $ABCD$ (*fig. 153*), che il volume compreso fra questa superficie d'intrados ed il piano d'imposta consta: del volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vòlta a botte retta, di lunghezza eguale alla somma dei due lati \overline{AB} e \overline{BC} del rettangolo $ABCD$ diminuita del quadruplo della larghezza \overline{Fa} della zona coperta dalla parte curva della superficie d'intrados, di semi-corda eguale alla detta larghezza, e di monta eguale alla monta FF' della vòlta a schifo; del volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vòlta a padiglione su pianta quadrata, avente per lato il doppio della larghezza dell'indicata zona ed avente pure per monta quella stessa della vòlta proposta; e del volume del parallelepipedo rettangolo, i cui tre spigoli sono la monta $\overline{FF'}$ e le rette \overline{FG} e \overline{GH} rispettivamente eguali ai lati \overline{AB} e \overline{BC} del rettangolo $ABCD$ diminuiti del doppio della larghezza \overline{Fa} .

186. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a padiglione sopra schifo. — Da quanto si è detto nel numero 125 sulla superficie d'intrados di questa vòlta risulta ad evidenza che il domandato volume è la somma dei seguenti tre distinti volumi: di quello corrispondente all'intera vòlta a schifo, da calcolarsi come venne indicato nel numero 134; di quello del prisma compreso fra il poligono $F'G'H'IK'M'$ (*fig. 152*) che limita la superficie curva della vòlta a schifo ed il piano d'imposta della sovrastante vòlta a padiglione; e finalmente di quello compreso fra la superficie d'intrados di questa vòlta a padiglione ed il suo piano d'imposta.

187. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a crociera con unghie cilindriche. — Come già si è detto nel numero 124, la superficie d'intrados di questa vòlta si compone di tante unghie cilindriche, quanti sono i lati del poligono che essa copre, per cui, in modo affatto analogo, si ottiene il volume compreso fra la sua superficie d'intrados ed il suo piano d'imposta calcolando separatamente, colle regole che vennero date

nel numero 154, i volumi di tutti i conei cilindrici corrispondenti alle accennate unghie e prendendo quindi la loro somma.

188. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a crociera su pianta regolare e con unghie cilindriche. — I conei cilindrici, dal cui assieme risulta il domandato volume V_c , sono tutti retti ed eguali fra di loro, e, come si è trovato nel numero 154, si può ritenere che il volume di ciascuno di essi sia dato dai $\frac{19}{21}$ del prodotto della sua lunghezza eguale all'apotema del poligono coperto dalla vòlta, della sua semi-corda eguale alla metà del lato dello stesso poligono, e della sua monta eguale all'altezza del vertice della vòlta sul piano d'imposta. Segue da ciò che, ritenendo le denominazioni già stabilite nel numero 125 per quanto si riferisce al lato, all'apotema ed al numero dei lati del detto poligono regolare, si ha

$$V_c = \frac{19}{21} n a c m,$$

dove si può esprimere a in funzione di c e di n mediante l'equazione (1) del citato numero 125.

Se tutte le unghie componenti la superficie d'intrados della vòlta in quistione sono a tutta monta, ossia se la monta della vòlta è eguale alla metà del lato del poligono regolare che essa copre, la formola determinatrice di V_c si riduce a

$$V_c = \frac{19}{21} n a c^2.$$

189. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vòlta a crociera su pianta rettangolare e con unghie cilindriche. — Alle lettere a , b ed m si attribuiscono i significati che già loro vennero dati nel numero 126, e si chiami V_c il chiesto volume. Evidentemente si ha: che la somma dei volumi dei due conei cilindrici AEBOV e CGDOV (*fig. 155*), aventi $\frac{1}{2}a$ per semi-corda, $\frac{1}{2}b$ per lunghezza ed m per monta, vien espressa, per la formola (2) del numero 154, da

$$\frac{1}{2} \frac{19}{21} a b m;$$

che la somma dei volumi dei due cunei cilindrici BFCOV e BHAOV, aventi $\frac{1}{2}b$ per semi-corda, $\frac{1}{2}a$ per lunghezza ed m per monta, vien pure data da

$$\frac{1}{2} \frac{19}{21} abm;$$

finalmente che il total volume V_c , somma dei due volumi trovati, risulta dalla formola

$$V_c = \frac{19}{21} abm.$$

190. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una volta a crociera con unghie cilindroidiche. — Questo volume consta di tanti *cunei cilindroidici* aventi forma analoga a quella dei cunei cilindrici considerati nel numero 154, ma limitati superiormente dalla superficie dell'unghia cilindroidica, quale venne definita nel numero 127. Considerando uno qualunque di questi cunei cilindroidici, per esempio quello insistente al triangolo CAB (*fig. 171*); chiamando

$2c$ la sua corda \overline{AB} ,

l la sua lunghezza \overline{DC} ossia la retta che unisce il vertice C dell'indicato triangolo colla metà della corda \overline{AB} ,

m la sua monta \overline{CV} ,

α l'angolo BDx che la direzione della detta corda fa colla perpendicolare Dx alla mediana DC del triangolo CAB, ed assumendo per origine di coordinate il punto D e per assi ortogonali le tre direzioni DCy , Dx e DEz , ecco come ottengo il suo volume V . Immagino tagliato il cuneo mediante un piano qualunque parallelo al piano yDz , distante da questo della quantità $\overline{Do} = x$, per ottenere la sezione trapezia $mnqp$, le cui basi sono \overline{mp} ed \overline{nq} e la cui altezza è \overline{mn} ; esprimo l'area di questa sezione in funzione dei dati del problema e di x ; la moltiplico per dx per avere il differenziale del volume; e finalmente integro fra i limiti $x = 0$ ed $x = \overline{Db}$, essendo \overline{Db} la proiezione della metà della corda \overline{AB} sull'asse xDx' , per avere il volume U del cuneo insistente al triangolo CDB.

Dal triangolo Dom , rettangolo in o , si ha

$$\overline{Dm} = \frac{x}{\cos \alpha},$$

per cui

$$\overline{Bm} = \overline{DB} - \overline{Dm} = c - \frac{x}{\cos \alpha}.$$

I due triangoli BDC e Bmn sono simili, ed immediatamente da essi si ricava

$$\overline{mn} = l \left(1 - \frac{x}{c \cos \alpha} \right).$$

La lunghezza \overline{mp} , essendo l'ordinata corrispondente dell'ascissa \overline{Dm} nel semicircolo AEB di raggio $\overline{DB} = c$, vien data da

$$\overline{mp} = \sqrt{c^2 - \frac{x^2}{\cos^2 \alpha}} = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha}}.$$

Analogamente la lunghezza \overline{nq} , per essere nel quarto di ellisse BV l'ordinata corrispondente all'ascissa \overline{Cn} , si ottiene ponendo

$$\overline{nq} = \frac{m}{CB} \sqrt{CB^2 - \overline{Cn}^2} = m \sqrt{1 - \frac{\overline{Cn}^2}{CB^2}}.$$

Ma, per il parallelismo delle rette mn e DC , si ha

$$\frac{\overline{Cn}}{CB} = \frac{\overline{Dm}}{DB} = \frac{x}{c \cos \alpha},$$

cosicchè risulta

$$\overline{nq} = m \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha}}.$$

Si conoscono ora le basi \overline{mp} ed \overline{nq} non che l'altezza \overline{mn} del

trapezio $mnqp$, e si può fare la sua superficie la quale vien espressa

$$l \frac{c+m}{2} \left(1 - \frac{x}{c \cos \alpha}\right) \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha}}$$

Questa superficie poi, moltiplicata per dx , dà il differenziale dU del volume del cono $BE DCV$ insistente al triangolo CDB , cosicchè

$$dU = l \frac{c+m}{2} \left(l - \frac{x}{c \cos \alpha}\right) \sqrt{l - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha}} dx;$$

e, siccome

$$\overline{Db} = c \cos \alpha,$$

risulta

$$U = l \frac{c+m}{2} \int_0^{c \cos \alpha} \left(1 - \frac{x}{c \cos \alpha}\right) \sqrt{l - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha}} dx$$

Per effettuare quest'intersezione, si osservi che

$$dx = c \cos \alpha d \frac{x}{c \cos \alpha}$$

$$\frac{x}{c \cos \alpha} dx = \frac{1}{2} c \cos \alpha d \left(1 - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha}\right),$$

e che quindi il valore di U può essere scritto

$$U = lc \frac{c+m}{2} \cos \alpha \left\{ \int_0^{c \cos \alpha} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha}} d \frac{x}{c \cos \alpha} + \frac{1}{2} \int_0^{c \cos \alpha} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha}} d \left(1 - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha}\right) \right\}$$

Eseguendo ora le integrazioni coll'osservare che

$$\int \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha}} d \frac{x}{c \cos \alpha} = \frac{1}{2} \frac{x}{c \cos \alpha} \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha}} + \frac{1}{2} \arcsin \left(\frac{x}{c \cos \alpha} \right),$$

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha}} d \left(1 - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha} \right) \sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2 \cos^2 \alpha}}, \end{aligned}$$

e prendendole fra gli stabiliti limiti, risulta

$$U = \frac{cl(c+m)}{2} \left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{3} \right) \cos \alpha,$$

ossia che il volume del cuneo insistente al triangolo CDB vale la costante $\left(\frac{1}{4} \pi - \frac{1}{3} \right)$ moltiplicata per il volume di un prisma retto

la cui base è il detto triangolo di area $\frac{cl}{2} \cos \alpha$ e la cui altezza è $(c+m)$. Analogamente il volume del cuneo insistente al triangolo CDA vien dato dalla citata costante moltiplicata pel volume di un prisma retto, la cui base è l'ultimo triangolo anche di area $\frac{cl}{2} \cos \alpha$ e la cui altezza è $(c+m)$; cosicchè ne deriva che il volume V di tutto il cuneo AEBCV insistente al triangolo CAB vale due volte il volume U; e che per conseguenza vien dato dalla formola

$$V = \frac{1}{12} cl (c+m) (3\pi - 4) \cos \alpha,$$

la quale, assumendo $\frac{22}{7}$ per valore di π , si riduce a

$$V = \frac{19}{42} cl (c+m) \cos \alpha \quad (1),$$

Quando il cuneo è retto l'angolo α è di 0° , il coseno di α vale l'unità e quindi il valore di V vien dato da

$$V = \frac{19}{42} c l (c + m) \quad (2).$$

Il volume d'un cuneo cilindroidico si può anche ottenere per approssimazione. S'immaginino perciò fatte nel solido $DEBCV$ diverse sezioni parallele al piano $DCVE$; si facciano le aree di tutte queste sezioni, che risultano tanti trapezii; e si moltiplichino le semi-somme delle aree delle sezioni successive, a partire dalla $DCVE$ fino a quella passante pel punto B che ha un'area nulla, per le loro distanze. La somma di tutti questi prodotti somministra il volume del cuneo insistente al triangolo CDB , ed il doppio di questa somma dà il volume del cuneo insistente al triangolo CAB la cui superficie è il doppio di quella del triangolo CDB .

Dovendosi trovare il volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vòlta a crociera con unghie cilindroidiche, converrà fare separatamente i volumi dei diversi cunei, o applicando la formola (1) o ricorrendo all'accennato metodo d'approssimazione, e la somma di tutti questi volumi parziali dà il volume totale.

191. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a crociera su pianta regolare e con unghie cilindroidiche. — Tutti i cunei cilindroidici componenti il volume domandato V_c sono retti ed eguali fra di loro; ciascuno ha per corda il lato $2c$, per lunghezza l'apotema a del poligono regolare coperto dalla vòlta e per monta m quella della vòlta stessa; e quindi, essendo n il numero dei lati del detto poligono regolare, si ha l'equazione

$$V_c = \frac{19}{42} n c a (c + m),$$

nella quale si può esprimere a in funzione di c e di n mediante la nota relazione (1) del numero 125.

192. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a crociera su pianta rettangolare e con unghie cilindroidiche. — Sia la vòlta a crociera con unghie cilindroidiche rappresentata nella figura 158, si ritengano le denominazioni già stabilite nel numero 129 per quanto si riferisce ai lati

del rettangolo $ABCD$; e si chiami V_c il volume domandato. La somma dei volumi dei due cunei cilindroidici retti $AEBOV$ e $CGDOV$, ciascuno dei quali ha $\frac{1}{2}a$ per semicorda, $\frac{1}{2}b$ per lunghezza ed m per monta, vien dato da

$$\frac{19}{168} ab (a + 2m);$$

la somma degli altri due cunei cilindroidici retti $BFCOV$ e $DHAOV$, aventi rispettivamente $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}a$ ed m per semi-corda, per lunghezza e per monta, risulta

$$\frac{19}{168} ab (b + 2m);$$

e quindi si ottiene

$$V_c = \frac{19}{168} ab (a + b + 4m)$$

per formola determinatrice del volume V_c .

195. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una volta a crociera con unghie dette sferiche generate da un arco circolare di forma variabile. — Questo volume è la somma dei volumi di tanti cunei aventi forma analoga a quella del cuneo rappresentato nella figura 171, ma limitati superiormente dalle superficie di unghie, quali vennero definite nel numero 150, e per la valutazione di uno di questi cunei può servire il seguente metodo d'approssimazione.

S'immagini tagliato il cuneo mediante tanti piani paralleli alla faccia AHB (*fig. 159*) ed assai vicini fra di loro. Si trovino le intersezioni di questi piani col cuneo, le quali si riducono al semicircolo AHB pel piano secante determinato dalla corda \overline{AB} ; ed a figure analoghe alla $abb'd'a'$, composta di un rettangolo $abb'a'$ e di un segmento circolare $a'b'd'$ per uno qualunque dei detti piani secanti; alla retta \overline{FV} per quello determinato dal punto F . Si calcolino le aree delle figure risultanti da queste intersezioni e si moltiplichino le semi-somme di tutte le aree delle sezioni successive, a partire dalla AHB fino a quella passante pel punto F , per le rispettive loro distanze. La somma dei prodotti che così si otten-

gono rappresenta approssimativamente il volume domandato, ed il risultato a cui si arriva, tanto più s' avvicina al vero quanto più i piani seganti vennero condotti vicini fra di loro.

194. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a crociera con unghie dette sferiche, generate da un arco circolare di raggio costante. — Sommando i volumi di tanti cunei, eguali in numero a quello dei lati del poligono coperto dalla vòlta, della forma di quello rappresentato nella figura 159 e terminati superiormente da unghie quali vennero definite nel numero 151, si ottiene il volume la cui determinazione costituisce lo scopo del presente numero.

Il volume approssimato di uno dei detti cunei può essere determinato: immaginandolo tagliato mediante un sistema di piani BA, ba , dc , fe , paralleli alla faccia semi-circolare proiettata su tre piani ortogonali in AB, in A'D' ed A''D''B'' (fig. 144); trovando le intersezioni di questi piani col cuneo, le quali intersezioni, facili a determinarsi come si è detto nel numero 151, sono il semi-circolo A''D''B'', e le figure $a_1'' a_1'' m'' b_1'' b_1''$, $c_1'' c_1'' n'' d_1'' d_1''$, $e_1'' e_1'' o'' f_1'' f_1''$,; calcolando le aree delle figure costituenti le dette intersezioni; e moltiplicando le loro semi-somme, considerandole successivamente due a due a partire dalla A''D''B'', per le loro distanze \overline{Dp} , \overline{pq} , \overline{qr} , contate sull'altezza del triangolo CAD. La somma di tutti questi prodotti somministra il volume del cuneo, e l'esattezza del risultato a cui si arriva è tanto più grande, quanto più i piani seganti AB, ab , cd , ef , vennero condotti vicini l'uno all'altro.

Il volume del cuneo AHBFV (fig. 159), terminato superiormente da un'unghia sferica generata da un arco circolare di raggio costante, può anche essere determinato in modo rigoroso, ed ecco con quale procedimento sono arrivato a questa determinazione, nel caso generale in cui il cuneo insista ad un triangolo qualunque FAB. Attribuiti alle lettere c , l , m ed α i significati che loro vennero dati nel numero 190, s'immagini una sezione qualunque $abb'd'a'$ fatta nel solido parallelamente al piano della lunetta AHB e si chiami x la lunghezza \overline{Fd} . Ragionando come già si fece nel citato numero 151, si trova

$$\overline{ab} = \overline{a'b'} = \frac{2c}{l} x,$$

$$\overline{ad} = \overline{a'e'} = \frac{c}{l} x.$$

L'ordinata $\overline{aa'}$ del quarto di ellisse BV vien data da

$$\overline{aa'} = \frac{m}{FB} \sqrt{FB^2 - F\overline{a^2}} = m \sqrt{1 - \frac{F\overline{a^2}}{FB^2}},$$

e, per essere

$$\frac{F\overline{a^2}}{FB} = x,$$

risulta

$$\overline{aa'} = \frac{m}{l} \sqrt{l^2 - x^2}.$$

Se ora si vuol l'area della sezione $abb'd'a'$, riesce facile l'ottennerla quando si consideri essa come equivalente alla somma delle aree del rettangolo $abb'a'$, del settore $a'ob'$ diminuita dell'area del triangolo $a'ob'$ isoscele sulla base $\overline{a'b'}$. L'area del rettangolo $abb'a'$, i cui lati sono \overline{ab} ed $\overline{aa'}$, vien data da

$$2 \frac{cm}{l^2} x \sqrt{l^2 - x^2};$$

l'area del settore circolare $a'ob'$ di raggio c , ed a cui corrisponde l'arco $b'd'a'$ che ha per lunghezza

$$2c \operatorname{arc} \left(\operatorname{sen} = \frac{x}{l} \right),$$

vien espressa da

$$c^2 \operatorname{arc} \left(\operatorname{sen} = \frac{x}{l} \right);$$

l'area del triangolo isoscele $a'ob'$, di base $\overline{a'b'} = \overline{ab}$ e di altezza $\overline{oe} = \sqrt{\overline{oa'^2} - \overline{ea'^2}} = \frac{c}{l} \sqrt{l^2 - x^2}$, vale

$$\frac{c^2}{l^2} x \sqrt{l^2 - x^2};$$

e quindi l'area S della sezione $abb'd'a'$ vien data da

$$S = \frac{c}{l^2} (2m - c) x \sqrt{l^2 - x^2} + c^2 \arcsin \left(\frac{x}{l} \right).$$

Considerando nel cuneo una sezione infinitamente vicina a quella di cui venne trovata l'area S , si può prendere per elemento del volume da calcolarsi V il prisma infinitesimo compreso fra queste sezioni; e, siccome la perpendicolare condotta dal punto F sulla retta AB fa con FG un angolo eguale a $BGU' = \alpha$, si ha che la distanza fra le dette sezioni, ossia l'altezza dell'indicato prisma elementare, vale $dx \cdot \cos \alpha$, per guisa che risulta

$$dV = \frac{c}{l^2} (2m - c) x \sqrt{l^2 - x^2} dx \cdot \cos \alpha + c^2 \arcsin \left(\frac{x}{l} \right) dx \cdot \cos \alpha.$$

Integrando il valore di dV fra i limiti $x=0$ ed $x=l$ risulta il domandato volume V del cuneo, per cui

$$V = \frac{c}{l^2} (2m - c) \cos \alpha \int_0^l \sqrt{l^2 - x^2} x dx + c^2 \cos \alpha \int_0^l \arcsin \left(\frac{x}{l} \right) dx.$$

Per effettuare le due integrazioni contenute nel valore di V si osservi che

$$\begin{aligned} \int \sqrt{l^2 - x^2} x dx &= -\frac{1}{2} \int \sqrt{l^2 - x^2} d(l^2 - x^2) \\ &= -\frac{1}{3} (l^2 - x^2) \sqrt{l^2 - x^2}, \end{aligned}$$

che

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arc} \left(\operatorname{sen} = \frac{x}{l} \right) dx &= x \operatorname{arc} \left(\operatorname{sen} = \frac{x}{l} \right) - \int x \frac{dx}{\sqrt{l^2 - x^2}} \\ &= x \operatorname{arc} \left(\operatorname{sen} = \frac{x}{l} \right) + \frac{1}{2} \int \frac{d(l^2 - x^2)}{\sqrt{l^2 - x^2}} \\ &= x \operatorname{arc} \left(\operatorname{sen} = \frac{x}{l} \right) + \sqrt{l^2 - x^2}, \end{aligned}$$

e che per conseguenza il valore di V, prendendo questi integrali fra gli stabiliti limiti e convenientemente riducendo, vien dato da

$$V = \frac{(3\pi - 8)c + 4m}{6} cl \cos \alpha.$$

Assumendo $\frac{22}{7}$ per valore di π , il trovato valore di V si riduce a

$$V = \frac{5c + 14m}{21} cl \cos \alpha.$$

Se il cuneo è retto, l'angolo α si riduce a 0° , il suo coseno vale l'unità e quindi il valore di V vien dato da

$$V = \frac{5c + 14m}{21} cl.$$

195. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una volta a crociera su pianta regolare e con unghie dette sferiche. — Allorquando le unghie costituenti la superficie d'intrados della volta sono generate da un arco di circolo di raggio variabile, si ottiene il volume del cuneo corrispondente ad un'unghia col metodo d'approssimazione che venne dato nel numero 195, ed il risultato che così si ottiene si moltiplica per il numero dei lati del poligono regolare coperto dalla volta.

Allorquando invece le dette unghie sono generate da un arco circolare di raggio costante si può, o determinare per approssimazione il volume del cuneo corrispondente ad un'unghia col metodo

che venne indicato sul principio del precedente numero 194, oppure esattamente ottenere il volume del detto cuneo applicando l'ultima formola dell'or indicato numero. Il volume V_c compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta della vòlta a crociera vale il volume del cuneo corrispondente ad un'unghia, moltiplicato per il numero dei lati del poligono regolare coperto dalla vòlta, per guisa che, quando vogliasi questo volume esattamente, risulta

$$V_c = n \frac{5c + 14m}{21} ca,$$

dove le lettere a , c , m ed n hanno i significati che loro vennero attribuiti nel numero 132 e dove fra le quantità a , c ed n esiste sempre la nota relazione (1) del numero 125.

196. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a crociera su pianta rettangolare e con unghie dette sferiche. — Quando le unghie costituenti la superficie d'intrados della vòlta sono generate da un arco circolare di raggio variabile, si trovano prima col metodo d'approssimazione che venne dato nel numero 195 i volumi dei due cunei differenti AEBOV e BFCOV (*fig. 142*), si sommano i due risultati e si prende il doppio della somma: questa somma rappresenta il domandato volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta della vòlta a crociera.

Quando invece le unghie, dal cui assieme risulta la superficie d'intrados della vòlta in quistione, sono generate da un arco circolare di raggio costante, si può procedere per approssimazione come si è indicato pel caso delle unghie generate da un arco di raggio variabile; ma, in modo più esatto, convien generalmente impiegare l'ultima formola nel numero 194 nella valutazione di ciascuno dei due cunei differenti. Ritenendo le denominazioni già stabilite nel numero 133 per quanto si riferisce ai lati del rettangolo ed alla monta della vòlta, si ha: che la somma dei vo-

lumi dei due cunei retti AEBOV e CGDOV, di semi-corda $\frac{1}{2}a$, di lunghezza $\frac{1}{2}b$ e di monta m , vien data da

$$\frac{5a + 28m}{84} ab;$$

che la somma dei volumi dei due cunei retti $BFCOV$ e $DHAOV$, le cui semi-corde, lunghezze e monte sono rispettivamente $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}a$ ed m , vien espressa da

$$\frac{5b+28m}{84}ab;$$

e finalmente che il domandato volume V_c , somma delle due espressioni trovate, si può ottenere mediante la formola

$$V_c = \frac{5(a+b)+56m}{84}ab.$$

197. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta lunulata. — Già nel numero 134 venne definito il modo di generazione della superficie d'intrados delle vòlte lunulate, e, da quanto in tale numero venne detto, risulta ad evidenza che per trovare il volume compreso fra la superficie d'intrados ed il suo piano d'imposta convien procedere come segue: cercare il volume V compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta dell'intera vòlta in cui si trovano le unghie, nell'ipotesi che queste non esistano; determinare i volumi degli spicchii che da esso vennero tolti per sostituirvi altrettanti cunei ed ottenere la somma S di tutti questi spicchii; passare alla determinazione dei volumi dei diversi cunei ed eseguire la loro somma C . Il volume V_1 compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta della vòlta lunulata evidentemente vien dato da

$$V_1 = V - S + C.$$

I volumi V , S e C talvolta si possono determinare con regole e con formole esatte, talvolta è giuocoforza di accontentarsi di una loro determinazione approssimata.

198. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a fascioni. — Nel numero 135, parlando della determinazione della superficie d'intrados delle vòlte a fascioni, già venne indicato come debbansi intendere generate queste superficie, e, da quanto si è detto nell'indicato numero, evidentemente si può conchiudere che, per ottenere il volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a fascioni,

conviene tenere la seguente regola: trovare, o con metodi esatti o con metodi d'approssimazione, il volume V compreso fra il piano d'imposta e la superficie d'intrados dei fascioni; calcolare i volumi dei prismi compresi fra il detto piano d'imposta dei fascioni ed i piani d'imposta delle vòlte a cui servono di piedritti i fascioni stessi ed i muri contro i quali questi trovano appoggio, e fare la somma V' di questi volumi; determinare i volumi compresi fra le superficie d'intrados ed i piani delle imposte delle dette vòlte insistenti alle parti di pianta non coperta dai fascioni, ed ottenere la somma V'' di questi volumi; finalmente prendere la somma dei tre volumi V , V' e V'' per avere in essa il domandato volume della vòlta a fascioni.

199. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a cupola. — Considerando la vòlta a cupola composta, di cui già venne trovata la superficie d'intrados nel numero 156, il volume compreso fra questa superficie ed il piano d'imposta risulta dalla somma di tre volumi, ossia di quello compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta della vòlta a vela sferica coprente il quadrato $ABCD$ (fig. 145), di quello del cilindro retto avente per base un circolo di raggio $\overline{HO} = \overline{H'P'}$ ed avente per altezza $\overline{HK'}$ e di quello della mezza sfera insistente al detto circolo di raggio \overline{HO} , diminuita del volume del segmento sferico ad una sol base di raggio $\overline{HO} = \overline{H'P'}$ e di saetta $\overline{PR'}$.

Ritenendo tutte le denominazioni che già vennero stabilite nel citato numero 156, si ha: che il volume V' compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta della vòlta a vela sferica coprente il quadrato di lato $\overline{AB} = a$ vien dato (num. 176) da

$$V' = \frac{1}{24} \pi \left\{ 16 r^3 - (2r - a) [3a^2 + (2r - a)^2] \right\};$$

che il volume V'' del cilindro retto di raggio $\overline{H'P'} = \sqrt{r^2 - b^2}$ e di altezza $\overline{HK'} = b'$ risulta dall'equazione

$$V'' = \pi (r^2 - b^2) b';$$

che il volume V''' dell'emisfero di raggio $\overline{K'Q'} = \overline{H'P'}$ si ottiene ponendo.

$$V''' = \frac{2}{3} \pi (r^2 - b^2) \sqrt{r^2 - b^2};$$

e che il volume V'' del segmento sferico di raggio $\overline{H'P'}$ e di sassetta $\overline{P'R'} = r - b$ vien dato dall'equazione

$$V'' = \frac{1}{3} \pi (r - b)^2 (2r + b).$$

Se ora si osserva che

$$r = \frac{1}{2} a \sqrt{2},$$

i valori di V' , V'' , V''' e V'''' diventano

$$V' = \frac{1}{12} \pi a^3 (5 - 2\sqrt{2}),$$

$$V'' = \frac{1}{2} \pi b' (a^2 - 2b^2),$$

$$V''' = \frac{1}{6} \pi (a^2 - 2b^2) \sqrt{2(a^2 - 2b^2)},$$

$$V'''' = \frac{1}{6} \pi [a^3 \sqrt{2} - b(3a^2 - 2b^2)];$$

e finalmente il volume V_c , compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta della considerata vòlta a cupola, vien dato da

$$V_c = V' + V'' + V''' - V''''.$$

200. Volume compreso fra la superficie d'intrados e la superficie d'estrados d'una vòlta qualunque. — Il volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta qualunque, che nelle ordinarie circostanze della pratica è possibile ottenere o coi metodi d'approssimazione o coi metodi esatti svolti

nel presente capitolo, è un elemento indispensabile a conoscersi allorquando trattasi di determinare la capacità dei diversi membri in cui si scompone un edificio qualunque; e di più vien esso in acconcio per trovare il volume compreso fra la superficie d'intrados e la superficie d'estrados di una vòlta qualunque, giacchè si può stabilire, come regola generale, che questo volume vale il volume del solido rappresentato in $ABB'A'$ (fig. 172), compreso fra il piano d'imposta AB della superficie d'intrados, fra il piano d'imposta $A'B'$ della superficie d'estrados e le impostature o *pulvinari* AA' e BB' , più il volume $A'B'C'$ del solido compreso fra la superficie d'estrados ed il suo piano d'imposta $A'B'$, meno il volume ACB del solido limitato dalla superficie d'intrados e dal suo piano d'imposta AB .

Quando le superficie d'intrados e d'estrados della vòlta, per la quale vuolsi trovare il volume della muratura che la costituisce, sono a tutta monta, le impostature AA' e BB' sono orizzontali, i piani d'imposta della superficie d'intrados e della superficie di estrados si riducono ad un piano unico, il volume compreso fra questi due piani è per conseguenza nullo, ed il volume domandato si ottiene calcolando i due volumi compresi fra il detto piano d'imposta e le due superficie d'estrados e d'intrados e togliendo il secondo dal primo. In questo caso della superficie d'intrados e d'estrados a tutta monta, si ha che le dette superficie sono generalmente parallele, e che per conseguenza la stessa regola che si presta al calcolo del volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta, serve pure alla determinazione dell'altro volume compreso fra la superficie d'estrados e lo stesso piano.

Il problema che ha per oggetto di determinare il volume della muratura costituente una data vòlta, riesce pure d'una risoluzione assai facile allorquando, senza essere a tutta monta le superficie d'intrados e d'estrados, sono esse parallele colle loro linee d'imposta collocate in una superficie normale alla superficie d'intrados e quindi anche alla superficie d'estrados. In questo caso la superficie d'estrados è ancora della stessa natura della superficie d'intrados, cosicchè la stessa regola la quale serve a trovare il volume compreso fra questa ed il suo piano d'imposta, deve pur valere a determinare il volume compreso fra quella ed il corrispondente piano d'imposta.

Generalmente parlando, riesce della massima facilità il problema della determinazione del volume della muratura componente una data vòlta di rivoluzione, qualunque sia il suo estrados. In questo caso basta applicare la regola di Guldino (num. 160) alla ricerca

del volume generato dall'area piana rappresentante la mezza sezione meridiana fatta nel masso murale costituente il corpo della vólta, moltiplicando quest'area per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo centro di gravità.

Quanto si è detto per le vólte di rivoluzione si applica pure alle vólte anulari; giacchè per queste vólte evidentemente si può ottenere il volume compreso fra la superficie d'intrados, la superficie d'estrados e le impostature, moltiplicando l'area della sezione prodotta in detto volume da un piano normale alla curva descritta dal suo centro di gravità per la lunghezza di questa curva.

Per le vólte elicoidali e per le vólte anulari ed elicoidali, il cui masso murale si può intendere generato da un'area di figura e dimensioni note, la quale si muove conservandosi costantemente in un piano passante per l'asse comune delle due superficie cilindriche fra cui trovansi le vólte e percorrendo con due dei suoi vertici due eliche di egual passo descritte sulle accennate superficie, si ottiene il volume compreso fra le superficie d'intrados e d'estrados e le impostature, moltiplicando l'area della figura generatrice, ossia l'area della figura che nasce tagliando l'accennato volume con un piano passante per l'asse delle due superficie cilindriche già indicate, per la lunghezza dell'arco circolare rappresentante la proiezione sopra un piano perpendicolare al detto asse dell'arco d'elica percorso dal centro di gravità della figura generatrice (*b*). Generalmente questo centro di gravità si trova ad egual distanza dalle superficie cilindriche, e quindi si proietta sull'accennato piano in un arco circolare avente per raggio la media aritmetica fra i due raggi delle stesse superficie. Segue da ciò che, dicendo

Σ l'area della figura generatrice del volume che vuoi trovare,

p il passo delle eliche che guidano questa figura nel suo movimento,

a la differenza di livello fra le due posizioni più-bassa e più alta di uno stesso punto della figura generatrice,

R ed *r* il raggio maggiore ed il raggio minore delle superficie cilindriche fra cui si trovano le vólte elicoidali,

W il volume domandato,

si ha: che la lunghezza dell'arco circolare, rappresentante la proie-

(*b*) La verità di questa semplicissima regola risulta ad evidenza, ragionando come si è fatto nel numero 168, per trovare il volume compreso fra la superficie d'intrados d'una vólta anulare ed elicoidale e la superficie dell'elicoide a piano direttore, determinata dalle due eliche d'imposta.

zione sopra un piano perpendicolare all'asse delle dette superficie cilindriche dell'arco d'elica media percorso dal centro di gravità della figura generatrice, vien espressa da

$$\frac{a}{p} \pi (R + r);$$

e che quindi il domandato volume W risulta dalla semplicissima formola

$$W = \frac{a}{p} \pi (R + r) \Sigma.$$

Ben di frequente la superficie d'estrados delle vòlte è una superficie a risalti, giacchè questa disposizione risulta una necessità allorchando s'impiegano nella sua costruzione dei materiali aventi forma parallelepipeda, quali sono i mattoni. La superficie d'estrados è allora costituita da varie porzioni di superficie parallele a quella d'intrados, ed inegualmente discoste da quest'ultima, giacchè s'incomincia la muratura alle imposte con una determinata grossezza, e si continua così per un certo tratto, poi si diminuisce la grossezza e si continua la muratura di nuovo fino ad una certa uniforme altezza; poi si diminuisce ancora la grossezza e con questa si continua la muratura fino alla chiave, oppure si fa ancora uno o più risalti prima di giungervi. Il voler misurare esattamente il volume della muratura costituente una vòlta così costrutta, conduce generalmente a calcoli lunghi e difficili; e quasi sempre convien ricorrere ai metodi d'approssimazione di cui si tenne parola nei numeri 161 ed ai due primi che vennero indicati nel numero 163, i quali, convenientemente applicati, possono sempre condurre a risultati più che sufficienti per la pratica.

201. **Conclusionè sulla misura dei volumi delle vòlte.** — Le vòlte per le quali si è insegnato a valutare, vuoi il volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta, vuoi il volume compreso fra la superficie d'intrados e d'estrados, non sono le sole che s'incontrano nella pratica delle costruzioni, dove molte se ne costruiscono senza una generazione geometrica ben definita o con una generazione geometrica arbitraria. Segue da ciò che si deve ritenere come impresa assai difficile, per non dire impossibile, quella di stabilire le regole e le formole atte a trovare i volumi delle vòlte in tutti i casi della pratica. I molteplici esempi però che in questo capitolo vennero considerati ed i metodi che vennero esposti per

trovare i volumi relativi alle vólte d'uso piú frequente, sono sufficienti per far comprendere come il costruttore deve procedere in ogni caso, e per somministrare al medesimo una guida sicura onde arrivare, almeno approssimativamente, alla determinazione dei volumi relativi anche alle vólte piú complicate e per cui riesce impossibile il dare una generazione geometrica ben precisa.

CAPITOLO III.

Misura degli sterri e degli interri.

202. **Assunto del presente capitolo.** — Ogniqualvolta è questione di ridurre la superficie di un determinato tratto di terreno ad avere forma diversa da quella che esso presenta, è necessario che in alcuni siti si abbassi questa superficie, facendo quelle operazioni che si dicono scavi o *sterri*, e che in alcuni altri si elevi la medesima superficie mediante quei lavori che si chiamano rialzi o *interri*. Gli sterri e gl'interri sono lavori della massima importanza e quasi sempre di ragguardevole entità in tutte le costruzioni, che sono del dominio dell'architettura stradale e dell'architettura idraulica; ed in questo capitolo si espongono le norme mediante le quali si può arrivare al calcolo dei loro volumi, sia nel caso in cui la superficie del terreno che si vuol ridurre ad altra forma ha la sua^a proiezione orizzontale comunque terminata, come nel caso in cui questa proiezione orizzontale è una lunga lista o zona, come succede nella costruzione di strade, di canali, di argini.

203. **Norme generali per il calcolo degli sterri e degli interri, nel caso in cui la superficie del terreno che si vuol ridurre ad altra forma è comunque terminata.** — Per risolvere questo problema è necessario avere il piano quotato del terreno sul quale vuoi eseguire il lavoro di trasformazione della sua superficie in altra ben definita, detta *superficie di progetto*. In questo piano devono essere rappresentati tali e tanti punti della superficie attuale del terreno che, immaginandoli convenientemente uniti con rette, tutto il piano rimanga diviso in triangoli, proiezioni di altri triangoli aventi i loro vertici sulla superficie da trasformarsi, ed il cui complesso formi una superficie poliedrica da potersi con sufficiente approssimazione sostituire alla superficie attuale del terreno; e di tutti questi punti devono essere note le altezze al disopra di un dato piano di

paragone. Queste altezze, ed in generale tutte quelle di punti posti sulla superficie attuale del terreno, chiamansi *ordinate nere*, giacchè usano i pratici scriverle in nero allorquando le marcano sul piano accanto ai punti a cui si riferiscono.

Sul detto piano quotato, da ottenersi come s'insegna nel volume che tratta delle operazioni topografiche, e preferibilmente coi metodi della celerimensura, si rappresenta la superficie di progetto a cui vuolsi ridurre la superficie attuale del terreno, e, supponendo che quella superficie debba esser poliedrica, si fa la sua rappresentazione mediante le proiezioni orizzontali degli spigoli che limitano le varie sua facce e mediante le altezze dei punti estremi di tali spigoli al disopra del piano orizzontale a cui già trovansi riferite le altezze dei diversi punti della superficie attuale. Queste altezze, non che quelle di altri punti posti sulla superficie di progetto, chiamansi *ordinate rosse*, giacchè è generale consuetudine di scriverle in color rosso allorquando si marcano sul piano accanto ai punti a cui si riferiscono. Ciò fatto, si determinano le intersezioni delle due superficie poliedriche accennate, e per le rette rappresentanti gli spigoli della prima superficie, per quelle rappresentanti gli spigoli della seconda superficie, per quelle rappresentanti le indicate intersezioni non che per quelle altre che ancora converrà tracciare, per scomporre in triangoli la totale figura rappresentata sul piano, s'immaginano condotti tanti piani verticali. Evidentemente tutti questi piani dividono il solido compreso fra le due superficie anzidette in altrettanti tronchi di prisma a sezione retta triangolare ed aventi i loro spigoli verticali. Quelli di questi prismi, la cui faccia superiore appartiene alla superficie attuale del terreno, sono solidi di sterro; e quelli la cui faccia superiore appartiene alla superficie di progetto, sono solidi d'interro. Alcuni di questi tronchi di prisma possono avere uno spigolo, due spigoli e persino tre spigoli eguali a zero e si verifica il primo, il secondo ed il terzo caso per quei tronchi di prisma che si proiettano rispettivamente in triangoli aventi un vertice, un lato e l'intero perimetro sull'intersezione delle due superficie, attuale e di progetto.

Il calcolo dei volumi degl'indicati tronchi di prisma si fa applicando la formola (1) del numero 140. Le lunghezze dei loro spigoli si determinano facendo le differenze fra le ordinate appartenenti alla superficie attuale ed alla superficie di progetto corrispondentemente ai punti che ne rappresentano le proiezioni; e le loro sezioni rette sono i triangoli in cui trovasi scomposto il piano, per cui riesce facile il calcolo delle loro aree. Calcolati i volumi dei diversi prismi,

si sommano assieme tutti quelli di sterro e quindi tutti quelli d'interro per avere finalmente i volumi totali dello sterro e dell'interro.

204. Metodo seguito da molti pratici nel fare il piano quotato per operazioni di spianamenti. — Allorquando devesi operare una trasformazione di superficie su una data estensione di terreno, invece d'impiegare i vantaggiosi metodi della moderna celerimensura pur troppo non conosciuti dalla maggior parte dei pratici, è abitudine di condurre le operazioni come immediatamente viene indicato. Innanzi tutto si traccia sul terreno un *allineamento* o *direzione fondamentale*, e si scelgono su questa tali e tanti punti i quali, successivamente uniti fra di loro, diano un linea spezzata che molto si approssimi alla linea effettiva del terreno, rappresentante l'intersezione della sua superficie col piano verticale determinato dalla stessa direzione.

Per ciascuno di questi punti si conducono altrettanti allineamenti perpendicolari alla fondamentale, i quali si protendano fino ai confini del terreno e nuovamente si individuano su essi tali e tanti punti, per guisa che ad ogni linea del terreno la quale trovasi negli allineamenti medesimi si possa sostituire la linea spezzata avente i suoi vertici nei punti individuati. Finalmente, prima di abbandonare il terreno, si esamina in qual modo convenga unire fra loro con rette tutti i punti scelti sui tracciati allineamenti, affinchè la pianta del terreno rimanga divisa in triangoli il cui complesso rappresenti la proiezione orizzontale di una superficie poliedrica, la quale meglio si approssimi alla superficie vera del terreno.

Di mano in mano che si fanno le indicate operazioni di tracciamento convien rilevare tutti i punti che vennero individuati sul terreno, e si ottiene questo, misurando le distanze successive fra i varii punti della fondamentale pei quali si sono alzate le direzioni ad essa perpendicolari, non che le distanze pure successive fra i varii punti determinati su ciascuna di queste perpendicolari. Nell'eseguire il rilevamento non bisogna dimenticare il perimetro della superficie da trasformarsi, i cui vertici si rilevano generalmente mediante perpendicolari abbassate sulle perpendicolari alla fondamentale che loro si trovano vicine. Terminata l'operazione di rilevamento planimetrico si può procedere alla livellazione, la quale generalmente vien compiuta facendo stazione in diversi punti, e determinando le quote dei punti scelti sulla fondamentale e sulle direzioni ad essa perpendicolari, non che quelle dei vertici del perimetro della superficie da trasformarsi. Sull'abbozzo, oppure in apposito registro, si marcano tutte le quote lette sul terreno; e da queste,

operando come s'insegna nel volume che tratta delle operazioni topografiche, si deducono in seguito tutte le ordinate dei punti livellati per rapporto ad uno stesso piano di paragone passante al di sotto di tutti questi punti.

Servendosi delle misure fatte nell'eseguire il rilevamento planimetrico non che delle anzidette ordinate, si compie il piano quotato, e si segnano su esso anche le distanze orizzontali misurate sul terreno, non che le rette che valgono a scomporlo in triangoli nel modo che si giudicò più conveniente in seguito alle osservazioni fatte sul luogo.

205. Pendenza di una superficie. — Per pendenza di un piano s'intende la pendenza di una retta in esso condotta perpendicolarmente ad una sua generatrice orizzontale. Questa retta, fra tutte quelle che si possono condurre nel piano, fa il massimo angolo coll'orizzonte, e prende quindi il nome di *linea di massima pendenza* o di *maggior pendio*.

La pendenza di una superficie curva qualunque varia generalmente da punto a punto della superficie medesima. In un determinato suo punto vien essa data dalla pendenza del piano tangente alla superficie nel punto stesso; e quindi vale quella della retta condotta in questo piano normalmente ad una orizzontale in esso contenuta.

206. Condizioni diverse per determinare un piano costituente la superficie di progetto in un'operazione di spianamento. — Essendo un unico piano la superficie di progetto a cui vuolsi ridurre la superficie di una data porzione di terreno, generalmente si suol esso determinare o mediante un'orizzontale ed un punto per cui deve passare; o mediante la sua pendenza ed un'orizzontale che in esso deve trovarsi; o mediante la sua pendenza e due punti che deve contenere; o mediante tre punti pei quali si vuole che esso passi. Qualunque però sia il modo con cui il detto piano di progetto vien determinato, è necessario, per rendere facili e spediti tutti i calcoli relativi alle operazioni di spianamento, che si determini la sua pendenza non solo, ma anche la direzione della sua linea di maggior pendio, d'onde consegue quella delle sue generatrici.

1° Quando il piano è dato mediante una sua generatrice orizzontale ed un punto per cui deve passare, la sua retta di maggior pendio vien rappresentata dalla perpendicolare abbassata da questo su quella o da una parallela all'anzidetta perpendicolare. Chiamando poi

d la distanza orizzontale fra la generatrice orizzontale ed il punto per cui il piano deve passare,

a l'altezza di un punto qualunque della detta generatrice orizzontale al di sopra di un piano di paragone,

b l'altezza del punto dato al di sopra dello stesso piano di paragone,

p la pendenza del piano,
si ha

$$p = \frac{a-b}{d},$$

la quale evidentemente esprime che, andando dalla generatrice orizzontale al punto dato, si discende o si sale secondo che *p* risulta positivo o negativo.

2° Se il piano è determinato mediante la sua pendenza ed una sua generatrice orizzontale, immediatamente si ottiene la sua linea di massimo pendio, conducendo in un punto qualunque della data orizzontale una retta con pendenza eguale a quella del piano.

3° Nel caso in cui il piano è dato mediante la sua pendenza *p* e mediante due punti A e B (*fig. 175*) per cui deve passare, distanti orizzontalmente della quantità $\overline{B'A'} = d$ ed alti al di sopra del piano orizzontale di paragone FG di $\overline{AA'} = a$ e $\overline{BB'} = b$, se immaginasi pel punto più basso B un piano parallelo a quello di paragone ed in esso una circonferenza di circolo col centro in a_1 sulla verticale $\overline{AA'}$ e di raggio $\overline{a_1C} = \frac{a-b}{p}$, si ha: che tutti

i piani tangenti alla superficie del cono retto, avente l'accennata circonferenza per periferia di base ed avente per asse la $\overline{Aa_1}$, hanno la data pendenza; che, fra questi piani tangenti, quei due che passano per la retta BA soddisfano alla doppia condizione di avere la pendenza data *p* e di passare pei due punti dati A e B; che le due tangenti BC e BD, le quali proiettansi rispettivamente sul piano di paragone in B'C' e B'D', sono due generatrici orizzontali contenute, una nell'uno, l'altra nell'altro degli accennati due piani; e che le due rette AC ed AD, condotte per A perpendicolarmente alle accennate generatrici, rappresentano le corrispondenti linee di maggior pendio.

Per fissare ora sul piano orizzontale di paragone le proiezioni delle generatrici orizzontali che passano pel punto B e che si trovano nei due piani che soddisfano ai dati del problema, basta descrivere al centro in A', proiezione orizzontale del punto dato A, la circonferenza di raggio $\overline{A'C'} = \frac{a-b}{p}$ e condurre dal punto B',

proiezione orizzontale dell'altro punto dato B, le due tangenti B' C' e B' D' all'indicata circonferenza. — Per determinare poi nel modo più esatto possibile i due punti di contatto C' e D', si possono calcolare le due distanze $\overline{A'c'}$ e $\overline{c'C'} = \overline{c'D'}$. Perciò basta osservare che dal triangolo B' C' A', rettangolo in C', assai facilmente si può dedurre il segmento dell'ipotenusa $\overline{A'c'}$ il quale vien dato da

$$\overline{A'c'} = \frac{(a-b)^2}{dp^2},$$

non che l'altezza $\overline{c'C'}$ che risulta dall'equazione

$$\overline{c'C'} = \frac{a-b}{dp^2} \sqrt{d^2 p^2 - (a-b)^2}.$$

Per decidere in ogni caso particolare quale dei due piani passanti pei due punti A e B ed aventi la pendenza p va assunto per superficie di progetto, è necessario che alle due condizioni indicate aggiungasi se essa deve discendere verso dritta o verso sinistra, per rapporto ad un osservatore che, trovandosi per esempio nel punto B, guarda verso il punto A.

4° Allorquando per determinare il piano, costituente la superficie di progetto per una data operazione di spianamento, vengono dati tre dei suoi punti A, B e C (*fig. 176*), distanti orizzontalmente dalle quantità $\overline{B'C'} = d$, $\overline{A'C'} = e$ e $\overline{B'A'} = f$, ed alti sul piano orizzontale di paragone di $\overline{A'A} = a$, $\overline{B'B} = b$ e $\overline{C'C} = c$, si fisserà la generatrice orizzontale passante, per esempio, pel punto B, determinando sulla retta CA un punto D tale che la sua altezza $\overline{D'D}$ risulti eguale all'altezza $\overline{B'B}$. Perciò basta trovare la distanza orizzontale $\overline{C'D'}$ che il detto punto D, deve avere dal punto dato C. Per giungere allo scopo s'immagini condotta la Ca parallelamente a C'A': i due triangoli DCd ed ACa, che così risultano, sono simili; i lati \overline{Dd} , \overline{Aa} e \overline{Ca} sono rispettivamente $b-c$, $a-c$ ed e ; ed il valore di $\overline{C'D'} = \overline{Cd} = l$ vien dato da

$$l = \frac{(b-c)e}{a-c}.$$

Avendo ora la generatrice orizzontale BD del piano, la quale proiettasi sul piano di paragone, assunto come piano orizzontale di

proiezione, in $B'D'$, riesce facile il determinare la linea di maggior pendio passante pel punto A , la quale non è altro che la perpendicolare AE condotta da A su BD , proiettantesi orizzontalmente nella retta $A'E'$ passante per A' e perpendicolare a $B'D'$.

Se ora immaginasi condotta per E la retta orizzontale Ea_1 , contenuta nel piano verticale determinato dalla linea di maggior pendio, evidentemente si ha che la differenza di livello $\overline{Aa_1}$ fra il punto A ed il punto E vien data da

$$\overline{Aa_1} = a - b.$$

Considerando poi il triangolo $A'B'C'$ pel quale si conoscono i tre lati, ed immaginando condotta la sua altezza $\overline{B'F}$, si ha: che il segmento $\overline{C'F} = m$ vien dato da (num. 65)

$$m = \frac{e^2 + d^2 - f^2}{2e};$$

e che l'altezza $\overline{B'F} = n$ si ottiene ponendo

$$n = \sqrt{d^2 - m^2}.$$

La lunghezza $\overline{FD'} = q$, differenza fra $\overline{C'F}$ e $\overline{C'D'}$, risulta dall'equazione

$$q = m - l;$$

la lunghezza $\overline{B'D'} = r$, ipotenusa del triangolo rettangolo $B'FD'$, si ottiene col porre

$$r = \sqrt{n^2 + q^2};$$

la lunghezza $\overline{A'D'} = s$, differenza fra $\overline{A'C'}$ e $\overline{C'D'}$, vien data da

$$s = e - l;$$

il segmento $\overline{B'E'} = t$ del lato $\overline{B'D'}$ del triangolo $A'B'D'$, ammette il valore somministrato dall'equazione

$l = \frac{r^2 + f^2 - s^2}{2r}$;

e finalmente l'altezza $\overline{A'E'} = D$ dell'or indicato triangolo, ossia la distanza orizzontale $\overline{Ea_1}$ fra il punto E ed il punto A, si deduce col porre

$$D = \sqrt{f^2 - l^2}.$$

Se ora vuolsi la pendenza p della retta di maggior pendio AE, la qual pendenza è pur quella del piano determinato dai tre punti A, B e C, si ha

$$p = \frac{a - b}{D}.$$

La distanza orizzontale D fra il punto E ed il punto A si può anche dedurre trovando prima la lunghezza $\overline{A'D'}$, differenza fra $\overline{A'C'}$ e $\overline{C'D'}$; calcolando poscia l'angolo A' del triangolo B'A'C' nel quale sono noti i tre lati; deducendo i due angoli A'B'D' ed A'D'B' del triangolo B'A'D' in cui si conoscono due lati e l'angolo compreso; e finalmente trovando la distanza $\overline{A'E'} = D$ col considerarla siccome cateto del triangolo rettangolo A'E'B', nel quale sono noti il lato A'B', e l'angolo A'B'D'.

207. Pendenza di una retta qualunque, contenuta in un piano dato. — Nelle operazioni per spianamenti continuamente occorre, nel calcolo delle ordinate rosse, di dover risolvere il problema avente per oggetto di determinare la pendenza di una retta qualunque contenuta in un piano dato, giacchè, come si è visto nel numero 446, l'ordinata di un punto qualunque di una retta dipende dall'ordinata nota di un punto di questa retta e dalla sua pendenza. Si considerino perciò un piano orizzontale OP (fig. 177) ed un piano qualunque MN avente la pendenza p . Siano AP una linea di maggior pendio ed AC una retta qualunque, contenute in questo piano; le proiezioni orizzontali delle indicate due rette siano DB e DC; e queste proiezioni facciano fra loro l'angolo $CDB = \alpha$. Dal triangolo rettangolo ADB, in cui la retta AB ha la pendenza p , si ha

$$\overline{AD} = p \cdot \overline{BD},$$

e dal triangolo DBC, rettangolo in B, immediatamente si deduce

$$\overline{CD} = \frac{\overline{BD}}{\cos \alpha}.$$

Se ora si divide la differenza di livello \overline{AD} fra i due punti A e C per la loro distanza orizzontale \overline{CD} , si ha nel quoziente la pendenza p' della retta AC, la qual pendenza vien quindi data da

$$p' = p \cos \alpha.$$

208. Ordinate dei varii punti di un piano, posti su una direzione qualunque e su una serie di direzioni fra loro parallele. — Suppongasi che, per eseguire un'operazione di spianamento, siansi livellati diversi punti della superficie del terreno, posti su un allineamento qualunque AX e su una serie di allineamenti paralleli AA', BB', CC', DD'..... (fig. 178) perpendicolari ad AX, oppure facenti con AX un angolo noto; e la proiezione orizzontale della linea di maggior pendio del piano, costituente la superficie di progetto, sia la AE, la quale fa colla direzione AX l'angolo dato $\angle EAX = \alpha$.

Essendo p la pendenza del detto piano e quindi quella della sua linea di maggior pendio AE (che si suppone discendere da A verso E) la pendenza della retta in esso contenuta e proiettantesi in AX vien espressa, per quanto si è trovato nel precedente numero, da

$$p \cos \alpha;$$

e, essendo rispettivamente d', d'', d''', \dots le distanze orizzontali da A dei punti dell'ultima accennata retta, proiettantesi in B, C, D,....., si ha che le loro ordinate b, c, d, \dots per rapporto al piano orizzontale di paragone sono rispettivamente date da (numero 46)

$$b = a - p d' \cos \alpha,$$

$$c = a - p d'' \cos \alpha,$$

$$d = a - p d''' \cos \alpha,$$

$$\dots$$

dove a rappresenta l'ordinata nota del punto A.

Se si indica colla lettera β l'angolo $A'AX$ che la direzione AA' e tutte le direzioni ad essa parallele BB', CC', DD', \dots fanno con AX , si ha che l'angolo $A'AE$ vale $\alpha - \beta$, e che la pendenza delle rette, appartenenti al piano costituente la superficie di progetto e proiettantisi sulle accennate direzioni parallele, vien data da

$$p \cos(\alpha - \beta).$$

Conoscendosi ora le ordinate dei punti dell'ultimo accennato piano proiettati orizzontalmente in A, B, C, D, \dots e la pendenza di tutte le rette parallele poste nello stesso piano, partenti dai detti punti e proiettate in $AA', BB', CC', DD', \dots$, riesce agevole il trovare le ordinate di quanti altri punti si vogliono situati sulle rette medesime, purchè si conoscano le loro distanze orizzontali dai punti A, B, C, D, \dots pei quali già si hanno le rispettive ordinate a, b, c, d, \dots .

209. Metodo della rete ortogonale nella formazione del piano quotato per operazioni di spianamenti. — Questo metodo consiste nel tracciare quattro allineamenti AK, DC, CB e BA (*fig. 475*) fra loro perpendicolari, in modo che le tracce dei medesimi, sul piano orizzontale di proiezione, costituiscano un rettangolo $ABCD$, il cui perimetro si accosti a quello del terreno sul quale si opera; nel dividere in un egual numero di parti eguali i lati opposti di questo rettangolo; e nell'immaginare uniti i punti di divisione due a due, per guisa che rimanga esso diviso in altri rettangoli piccoli, tutti eguali fra loro.

Fatta quest'operazione di tracciamento, si passa a prendere le misure necessarie per costruire il piano, in cui siano rappresentati tutti i vertici della rete rettangolare non che il perimetro; e generalmente si compie quest'operazione determinando le posizioni dei diversi punti, per rapporto ai lati dell'accennato rettangolo, prendendo un loro estremo come origine e misurando le coordinate ortogonali dei punti che loro passano in prossimità. Così, vennero rilevati i punti F, H, I e K col riferirli alla direzione AK del lato \overline{AD} ed all'origine A ; le posizioni dei punti M ed N vennero determinate col riportarle alla direzione del lato \overline{DC} ed all'estremo D assunto come origine; e le posizioni dei punti P e Q vennero fissate assumendo per asse delle ascisse la direzione del lato \overline{CB} ed il punto C per origine di coordinate. Le posizioni dei vertici della rete ortogonale posti sul perimetro del rettangolo $ABCD$ restano fissate dietro la conoscenza delle lunghezze dei lati, che sono di metri 70,98 pei

lati maggiori \overline{AB} e \overline{DC} , e di metri 34,59 pei lati minori \overline{AD} e \overline{BC} ; le posizioni dei vertici situati nell'interno dello stesso perimetro sono determinate in seguito ai numeri sei e tre di parti eguali in cui vennero rispettivamente divisi i suoi lati maggiori ed i suoi lati minori; e le posizioni dei vertici appartenenti al perimetro del terreno risultano dalle misure riportate nel seguente quadro:

INDICAZIONE dei VERTICI	ASCISSE	ORDINATE
F	$\overline{AE} = 11,53^m$	$\overline{EF} = 8,20^m$
H	$\overline{AG} = 27,56$	$\overline{GH} = 8,50$
I	$\overline{AD} = 34,59$	$\overline{DI} = 6,00$
K	$\overline{AK} = 43,59$	0
M	$\overline{DL} = 40,82$	$\overline{LM} = 6,10$
N	$\overline{DC} = 70,98$	$\overline{CN} = 7,50$
P	$\overline{CO} = 11,53$	$\overline{OP} = 8,50$
Q	$\overline{CB} = 34,59$	$\overline{BQ} = 4,50$

Alle operazioni di rilevamento planimetrico devono tener dietro le operazioni altimetriche, che consistono nel livellare tutti i vertici che vennero determinati mediante le prime, eseguendo una livellazione raggiante, semplice o composta, secondo le accidentalità e secondo l'estensione del terreno da spianarsi. Nel caso particolare rappresentato nella figura 473 si suppone d'aver fatto stazione nei due punti S ed S', ed i risultati della livellazione trovansi marcati nelle prime tre colonne della tavola che segue:

STAZIONI	PUNTI LIVELLATI	QUOTE	ORDINATE	ORDINATE
		LETTE	dei PIANI DI MIRA	dei PUNTI LIVELLATI
S	A	^m 3,99	^m 13,99	^m 10,00
	b	3,97	•	10,02
	c	2,94	•	11,05
	F	4,47	•	9,52
	E	0,47	•	13,52
	f	1,95	•	12,06
	g	1,67	•	12,52
	h	3,98	•	10,01
	i	4,98	•	9,01
	k	0,15	•	13,84
	l	2,05	•	11,96
	m	3,05	•	10,96
	H	3,46	•	10,53
	G	4,47	•	9,52
	I	3,78	•	10,21
	D	3,74	•	10,25
r	1,44	•	12,55	
s	1,79	•	12,20	
K	3,45	•	10,56	
u	1,82	•	12,17	
v	2,22	•	11,77	
S'	a'	2,25	•	10,74
	b'	2,57	•	10,42
	c'	1,41	•	11,58
	B	2,57	•	10,42
	Q	2,44	•	10,55
	f'	0,98	•	12,01
	g'	0,57	•	12,42
	h'	0,01	•	12,98
	i'	4,08	•	8,91
	k'	3,37	•	9,62
	m	2,05	12,99	10,96
	l'	2,75	•	10,26
	n'	0,55	•	12,46
	O	2,75	•	10,26
	P	1,97	•	11,02
	q'	2,49	•	10,50
	L	2,75	•	10,24
	s'	3,06	•	9,95
	t'	2,65	•	10,36
	C	1,88	•	11,11
v'	1,61	•	11,38	
M	1,81	•	11,18	
y'	1,91	•	11,08	
z'	2,04	•	10,95	
N	2,12	•	10,87	

Come chiaramente risulta dalla riportata tavola, il punto *m* venne livellato dalle due stazioni S ed S', e questo si fece nell'intento di

coordinare fra loro le operazioni di livellazione che vennero eseguite nelle due stazioni.

Il piano di paragone, per rapporto al quale vennero determinate le ordinate di tutti i punti livellati, si scelse di 40 metri al di sotto del punto A, e, aggiungendo alla ordinata 10^m la quota $5^m,99$ relativa al detto punto, si ottenne $45^m,99$ per distanza del piano orizzontale in cui erano contenute le orizzontali date dal livello nella prima stazione dal detto piano di paragone. Togliendo poi da questa distanza le quote di tutti i punti livellati dalla prima stazione, si deducono le loro ordinate, che sono tutte quelle registrate nella prima parte della quinta colonna. L'ordinata $40^m,96$ del punto indicato colla lettera *m*, aggiunta alla quota $2^m,03$ letta dalla seconda stazione sullo stesso punto, servi per determinare la distanza $42^m,99$ del piano in cui si trovavano contenute tutte le orizzontali date dal livello nella seconda stazione dal piano di paragone; e, togliendo da questa distanza le quote di tutti i punti che vennero livellati nella seconda stazione, si ottennero le ordinate di tutti questi punti per rapporto al piano di paragone. Per ottenere il piano quotato vennero marcate sul piano del terreno, fra parentesi ed accanto ai punti a cui si riferiscono, tutte le ordinate contenute nella quinta colonna della tavola.

210. Determinazione della superficie di progetto. — Come si è detto nel numero 206, molte sono le condizioni colle quali, su un piano quotato costruito nello scopo di studiare un dato lavoro che richiede una trasformazione della superficie del terreno, si può determinare la superficie di progetto, che generalmente si suppone costituita da una o più facce piane. Per fissare le idee suppongasi di dover spianare il terreno di cui si ha il piano quotato nella figura 173, e di dover ridurre la sua superficie ad un piano inclinato, avente le sue generatrici orizzontali parallele al piano verticale determinato dalla retta AQ, passante di metri 1,58 al di sopra del punto A e di metri 0,80 al di sopra del punto K.

Per ben definire la superficie di progetto conviene riferirla al piano di paragone per rapporto al quale già si hanno le ordinate dei vari punti rappresentati nel piano quotato, e determinare l'ordinata di una generatrice orizzontale della superficie piana costituente la detta superficie di progetto, non che la pendenza di quest'ultima. Considerando la generatrice orizzontale, la quale proiettasi nella retta AQ, ammette essa per ordinata

$$10 + 1,58 = 11^m,58,$$

ossia l'altezza del punto A, appartenente alla superficie attuale del terreno, aumentata dell'altezza dell'accennata generatrice sopra lo stesso punto. Per trovare poi la pendenza della superficie di progetto si osserva: che essa è una superficie piana la quale passa di metri 0,80 al di sopra del punto K, la cui altezza al di sopra del piano di paragone è metri 10,56; che per conseguenza viene la medesima a passare per il punto proiettato in K avente per ordinata

$$10,56 + 0,80 = 11^m,36;$$

che la retta collocata sull'indicata superficie di progetto e passante pei due punti proiettati in A ed in K è appunto una linea di maggior pendio; che la proiezione orizzontale di questa linea è lunga

$$34,59 + 9 = 43^m,59;$$

che la differenza di livello dei suoi due estremi è

$$11,58 - 11,36 = 0^m,22$$

e finalmente che la sua pendenza (num. 43), rappresentante quella del piano, è data dal quoziente

$$\frac{0,22}{43,59} = \frac{22}{4359},$$

che, tenendo conto di sei cifre decimali, si riduce a 0,005047.

211. Determinazione delle ordinate rosse e delle quote rosse.

— Una volta determinata la superficie di progetto, si deve passare al calcolo delle ordinate rosse, ossia al calcolo delle altezze di quei punti di questa superficie, che trovansi orizzontalmente proiettati sul piano quotato nei punti della superficie attuale del terreno, pei quali già vennero determinate le ordinate nere.

Immaginando per la retta AK un piano verticale, è facile il vedere che esso taglia la superficie di progetto secondo una retta la quale, come si è trovato nel numero precedente, ammette per ordinata del punto proiettato in A

$$10 + 1,58 = 11^m,58,$$

e che ha la pendenza $\frac{22}{4359}$. Ora, essendo rispettivamente $11^m,53$,

23^m,06, 27^m,56, 34^m,59 e 43^m,59 le distanze orizzontali dei punti proiettati orizzontalmente in E, i, G, D e K dal punto proiettato in A, si hanno (num. 46) le seguenti ordinate rosse, con errore minore di mezzo centesimo nei risultati finali:

$$\begin{aligned} \text{pel punto proiettato in E} & 11,58 - \frac{22}{4359} 11,53 = 11,52; \\ \text{“} & \text{ i } 11,58 - \frac{22}{4359} 23,06 = 11,46; \\ \text{“} & \text{ G } 11,58 - \frac{22}{4359} 27,56 = 11,44; \\ \text{“} & \text{ D } 11,58 - \frac{22}{4359} 34,59 = 11,41; \\ \text{“} & \text{ K } 11,58 - \frac{22}{4359} 43,59 = 11,36. \end{aligned}$$

Siccome poi sulle rette AQ, Fk', hP, HG ed IC trovansi proiettate altrettante generatrici orizzontali del piano costituente la superficie di progetto, risulta: che l'ordinata rossa 11^m,58 è quella di tutti i punti proiettati sulla retta AQ; che l'ordinata rossa 11^m,52 conviene a tutti i punti proiettati sulla retta Fk'; che l'ordinata rossa 11^m,46 si adatta a tutti i punti della retta hP; che l'ordinata rossa 11^m,44 vale per tutti i punti della retta di proiezione HG; e che l'ordinata rossa 11^m,41 s'addice a tutti i punti che hanno la loro proiezione orizzontale sulla retta IC.

Per calcolare le ordinate rosse dei punti della superficie di progetto orizzontalmente proiettati sulla retta KM in u, v, v' ed M, bisogna prima determinare le distanze ru, sv e q'v' dei punti u, v e v' dalla retta IC. Immaginando perciò condotta per K la retta Kδ parallela all'ultima indicata retta, si ha

$$\overline{M\delta} = \overline{DK} - \overline{LM} = 9 - 6,10 = 2^m,90,$$

e, per la similitudine dei triangoli Kαu, Kβv e Kγv' col triangolo KδM, risulta

$$\overline{ru} = \overline{DK} - \overline{\alpha u} = 9 - \frac{11,83}{40,82} 2,90 = 8^m,16,$$

$$\overline{sv} = \overline{DK} - \overline{\beta v} = 9 - \frac{23,66}{40,82} 2,90 = 7^m,32,$$

$$\overline{q'v'} = \overline{DK} - \overline{\gamma v'} = 9 - \frac{35,49}{40,82} 2,90 = 6^m,48.$$

Osservando ora che i piani verticali passanti per le rette $ru, sv, q'v'$ ed LM tagliano il piano costituente la superficie di progetto secondo rette determinate dall'ordinata $11^m,41$ comune a tutti i punti orizzontalmente proiettati in r, s, q' ed L e dalla pendenza $\frac{22}{4359}$, e stando sempre all'approssimazione di mezzo centesimo nei risultati finali, si ottengono (num. 46) le seguenti ordinate rosse:

$$\text{pel punto proiettato in } u \quad 11,41 - \frac{22}{4359} 8,16 = 11^m,37;$$

$$" \quad v \quad 11,41 - \frac{22}{4359} 7,52 = 11,37;$$

$$" \quad v' \quad 11,41 - \frac{22}{4359} 6,48 = 11,38;$$

$$" \quad M \quad 11,41 - \frac{22}{4359} 6,10 = 11,38.$$

Come vennero determinate le ordinate rosse dei punti u, v, v' ed M orizzontalmente proiettati sulla retta KM, si possono anche determinare quelle dei punti y', z' ed N le cui proiezioni orizzontali si trovano sulla retta MN. Immaginando tirata per N la retta $N\lambda$ parallela alla retta DC, si ha

$$\overline{M\lambda} = \overline{L\lambda} - \overline{LM} = \overline{CN} - \overline{LM} = 7,50 - 6,10 = 1^m,40;$$

e per la similitudine dei triangoli $N\lambda M, N\epsilon y'$ ed $Ny'z'$ si ottiene

$$\overline{s'y'} = \overline{CN} - \overline{\epsilon y'} = 7,50 - \frac{23,66}{30,16} 1,40 = 6^m,40,$$

$$\overline{t'z'} = \overline{CN} - \overline{r'z'} = 7,50 - \frac{11,83}{30,16} 1,40 = 6^m,95;$$

e, sempre nei limiti dell'approssimazione di mezzo centesimo, risultano le seguenti ordinate rosse:

$$\begin{aligned} \text{pel punto proiettato in } y' & 11,41 - \frac{22}{4359} 6,40 = 11,58^m; \\ \text{“} & z' \quad 11,41 - \frac{22}{4359} 6,95 = 11,37; \\ \text{“} & N \quad 11,41 - \frac{22}{4359} 7,50 = 11,37. \end{aligned}$$

Le ordinate rosse, ottenute coi calcoli ora instituiti, sono quelle marcate sul piano rappresentato nella citata figura 173 mediante i numeri non posti fra parentesi, e vennero esse marcate soltanto in un punto per le generatrici orizzontali, ciascuna delle quali ammette la stessa ordinata da un estremo all'altro.

Togliendo dalle ordinate rosse le corrispondenti ordinate della superficie naturale del terreno, si ottengono le *quote rosse*. Queste quote rappresentano la distanza fra due punti posti sulla stessa verticale, appartenenti uno alla superficie attuale del terreno, e l'altro alla superficie di progetto; e nel caso particolare rappresentato nella figura 173, per cui si hanno le ordinate nere e le ordinate rosse, si ha:

per quota rossa del punto	A	$11,58 - 10,00 =$	$1,58^m;$
“	b	$11,58 - 10,02 =$	$1,56;$
“	c	$11,58 - 11,05 =$	$0,53;$
“	a'	$11,58 - 10,74 =$	$0,84;$
“	b'	$11,58 - 10,42 =$	$1,16;$
“	c'	$11,58 - 11,58 =$	$0,00;$
“	B	$11,58 - 10,42 =$	$1,16;$
“	Q	$11,58 - 10,55 =$	$1,03;$
“	F	$11,52 - 9,52 =$	$2,00;$
“	E	$11,52 - 13,52 =$	$-2,00;$
“	f	$11,52 - 12,06 =$	$-0,54;$
“	g	$11,52 - 12,32 =$	$-0,80;$
“	f'	$11,52 - 12,01 =$	$-0,49;$
“	g'	$11,52 - 12,42 =$	$-0,90;$
“	h'	$11,52 - 12,98 =$	$-1,46;$
“	i'	$11,52 - 8,91 =$	$2,61;$
“	k'	$11,52 - 9,62 =$	$1,90;$

per quota rossa del punto	<i>h</i>	11,46 — 10,01 =	1,45 ^m ;
“	<i>i</i>	11,46 — 9,01 =	2,45;
“	<i>k</i>	11,46 — 13,84 =	-2,38;
“	<i>l</i>	11,46 — 11,96 =	-0,50;
“	<i>m</i>	11,46 — 10,96 =	0,50;
“	<i>l'</i>	11,46 — 10,26 =	1,20;
“	<i>n'</i>	11,46 — 12,46 =	-1,00;
“	<i>O</i>	11,46 — 10,26 =	1,20;
“	<i>P</i>	11,46 — 11,02 =	0,44;
“	<i>H</i>	11,44 — 10,53 =	0,91;
“	<i>G</i>	11,44 — 9,52 =	1,92;
“	<i>I</i>	11,41 — 10,21 =	1,20;
“	<i>D</i>	11,41 — 10,25 =	1,16;
“	<i>r</i>	11,41 — 12,55 =	-1,14;
“	<i>s</i>	11,41 — 12,20 =	-0,79;
“	<i>q'</i>	11,41 — 10,50 =	0,91;
“	<i>L</i>	11,41 — 10,24 =	1,17;
“	<i>s'</i>	11,41 — 9,95 =	1,48;
“	<i>t'</i>	11,41 — 10,36 =	1,05;
“	<i>C</i>	11,41 — 11,11 =	0,30;
“	<i>K</i>	11,56 — 10,56 =	0,30;
“	<i>u</i>	11,57 — 12,17 =	-0,80;
“	<i>v</i>	11,57 — 11,77 =	-0,40;
“	<i>v'</i>	11,58 — 11,58 =	0,00;
“	<i>M</i>	11,58 — 11,18 =	0,20;
“	<i>y'</i>	11,58 — 11,08 =	0,50;
“	<i>z'</i>	11,57 — 10,95 =	0,42;
“	<i>N</i>	11,57 — 10,87 =	0,50.

In tutti quei punti in cui le ordinate nere sono minori delle corrispondenti ordinate rosse si deve fare un interro, mentre deve eseguirsi uno sterro in tutti quei punti nei quali le ordinate nere sono maggiori delle corrispondenti ordinate rosse. Segue da ciò che le quote rosse, secondo che sono positive o negative, indicano un rialzo oppure uno scavo da farsi nei punti ai quali esse si riferiscono.

212. Determinazione dell'intersezione della superficie attuale del terreno colla superficie di progetto. — Ultimati i calcoli di cui si parlò nel precedente numero, sopra una copia esatta del piano del terreno di cui vuolsi trasformare la superficie, si marchino

in color rosso ed accanto ai diversi punti le relative quote rosse, e non si dimentichi il segno da cui esse sono affette. Egli è evidente che, trovandosi due punti successivi uno colla quota rossa positiva e l'altro colla quota rossa negativa, fra questi due punti deve trovarsi un punto della *linea di passaggio* ossia dell'intersezione della superficie attuale del terreno colla superficie di progetto, e che appartengono già a questa intersezione tutti quei punti pei quali risultano nulle le quote rosse.

Ragionando sul caso particolare di cui si ha il piano quotato nella figura 173, e del quale si ha nella figura 174 una copia esatta, colle quote rosse relative ai diversi punti livellati, è facile riconoscere: che i punti c' e v' sono due punti della proiezione orizzontale della linea di passaggio; che su ciascuna delle rette \overline{AE} , \overline{bf} , \overline{cg} , $\overline{a'f'}$, $\overline{b'g'}$, \overline{FE} , $\overline{h'i'}$, \overline{Ei} , $\overline{f'm}$, $\overline{g'l'}$, \overline{ik} , \overline{lm} , $\overline{l'n'}$, $\overline{n'o}$, $\overline{n't'}$, \overline{Dr} , $\overline{sg'}$ e \overline{Ku} deve trovarsi un punto della proiezione orizzontale della stessa linea; che la posizione di ciascuno di questi punti può essere determinata cercando le distanze orizzontali che esso ha dai due punti vicini della superficie attuale del terreno fra cui si trova e per cui sono cognite le quote rosse, positiva una e negativa l'altra. Queste distanze si ottengono risolvendo il problema già svolto nel numero 47 pel caso della figura 44, ed i calcoli devono essere instituiti applicando la formola (1) del citato numero, come appare dalla tabella che segue:

$$\overline{A\theta} = \frac{11,53 \times 1,58}{1,58 + 2} = 5^m,09$$

$$\overline{E\theta} = \frac{11,53 \times 2}{2 + 1,58} = 6,44,$$

$$\overline{b\theta'} = \frac{11,53 \times 1,56}{1,56 + 0,54} = 5,87$$

$$\overline{f\theta'} = \frac{11,53 \times 0,54}{0,54 + 1,56} = 5,66,$$

$$\overline{c\theta''} = \frac{11,53 \times 0,53}{0,53 + 0,80} = 4,59$$

$$\overline{g\theta''} = \frac{11,53 \times 0,80}{0,80 + 0,53} = 6,94,$$

$$\overline{a'\theta'''} = \frac{11,53 \times 0,84}{0,84 + 0,49} = 7,28$$

$$\overline{f'\theta'''} = \frac{11,53 \times 0,49}{0,49 + 0,84} = 4,25,$$

$$\overline{b'\theta'''} = \frac{11,53 \times 1,16}{1,16 + 0,90} = 6,49$$

$$\overline{g'\theta'''} = \frac{11,53 \times 0,90}{1,16 + 0,90} = 5,04,$$

$$\overline{F\mu} = \frac{8,20 \times 2}{2 + 2} = 4,10$$

$$\overline{E\mu} = \frac{8,20 \times 2}{2 + 2} = 4,10,$$

$$\overline{h'\mu'} = \frac{11,83 \times 1,46}{1,46 + 2,61} = 4,24$$

$$\overline{i'\mu'} = \frac{11,83 \times 2,61}{2,61 + 1,46} = 7,59,$$

$$\overline{E\nu} = \frac{11,53 \times 2,00}{2,00 + 2,45} = 5,18$$

$$\overline{i\nu} = \frac{11,53 \times 2,45}{2,45 + 2,00} = 6,35,$$

$$\overline{f'\nu'} = \frac{11,53 \times 0,49}{0,49 + 0,50} = 5,71$$

$$\overline{m\nu'} = \frac{11,53 \times 0,50}{0,50 + 0,49} = 5,82,$$

$$\overline{g'\nu''} = \frac{11,53 \times 0,90}{0,90 + 1,20} = 4,94$$

$$\overline{v'\nu''} = \frac{11,53 \times 1,20}{1,20 + 0,90} = 6,59,$$

$$\overline{i\xi} = \frac{11,83 \times 2,45}{2,45 + 2,38} = 6,00$$

$$\overline{k\xi} = \frac{11,83 \times 2,38}{2,38 + 2,45} = 5,83,$$

245. Calcolo dei volumi degli sterri e degli interri. — Una volta eseguiti tutti i calcoli delle quote rosse e, determinata la linea di passaggio, si può passare alla ricerca dei volumi degli sterri e degli interri. Perciò bisogna suddividere in triangoli le diverse figure nelle quali già trovasi scomposto il piano, su cui venne descritta la linea di passaggio; marcare in esso le misure che valgono a dare l'area di tutti i detti triangoli; e quindi fare il volume di sterro e d'interro proiettato in ciascuno di essi, moltiplicando la sua superficie per il terzo della somma delle tre quote rosse relative ai suoi vertici.

La tavola che segue, nella quale a mo' d'esempio sono riportati gli elementi che servono al calcolo ed i volumi calcolati dei solidi rappresentati sulla figura 174 nei triangoli 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, è atta a dare il riassunto del calcolo degli sterri e degli interri per spianamenti di terreni

N° d'ordine dei solidi	SEZIONI RETTE		AREE DOPPIE	SOMMA dei tre SPIGOLI	SESTUPLI DEI VOLUMI		VOLUMI DOMANDATI	
	BASI	ALTEZZE			STERRI	INTERRI	STERRI	INTERRI
1	m 5,09	m 8,20	mq 41,7380	m 3,58	•	mc 149,422		
2	4,10	6,44	26,4040	2,00	•	52,808		
3	4,10	6,44	26,4040	2,00	mc 52,808	•		
4	5,09	11,85	60,2147	3,14	•	189,074		
5	5,87	11,85	69,4421	4,56	•	108,530		
6	6,44	11,85	76,1852	2,00	152,370	•		
7	5,66	11,85	66,9578	2,54	170,075	•		
					375,251	499,634	mc 62,542	mc 83,272

Si ottenne il doppio delle aree delle sezioni rette dei diversi tronchi di prisma triangolare, per non prendere sempre la metà di uno dei fattori che servono a conseguirle, ed invece dei terzi delle somme dei tre spigoli vennero iscritte nel casellario le somme intere. Segue da ciò che i prodotti iscritti nella sesta e nella settima colonna rappresentano i sestupli dei volumi parziali degli sterri e degli interri, e che le due somme di quelli e di questi

devono essere divise per sei, per rappresentare il complesso degli sterri e degli interri da porsi rispettivamente nell'ottava e nella nona colonna.

214. Norme generali per il calcolo degli sterri e degli interri, nel caso in cui la proiezione orizzontale della superficie del terreno, che si vuol ridurre ad altra forma, è una lunga lista o zona, come succede per la costruzione di strade, di canali, di argini e simili. — In questo caso, invece del piano quotato per rappresentare i dati della quistione e per farvi sopra le operazioni occorrenti pel calcolo di quelle lunghezze che servono a determinare i domandati volumi, si sogliono adoperare i profili: un profilo longitudinale, ossia una sezione verticale fatta secondo l'asse della zona, nella quale sezione si vedono in conseguenza le due linee secondo cui viene tagliata la superficie del terreno e quella in cui questa si vuole trasformare; e varii profili trasversali o sezioni fatte da piani verticali normali all'asse a distanza più o men grande le une dalle altre a seconda delle accidentalità, in ciascuna delle quali si vedono pure le due linee secondo cui ciascuno di questi piani taglia la superficie attuale del terreno, e quella in cui essa si vuol trasformare. Mediante questi profili, una volta determinate le quote rosse, i punti di passaggio e le distanze orizzontali fra i diversi vertici colle norme che vennero date nel capitolo IV della parte prima, riesce facile il determinare, ove occorra, la proiezione orizzontale compiuta del terreno, e disegnare su di essa le intersezioni della superficie attuale colla superficie di progetto, separare gli sterri dagli interri, e quindi procedere al calcolo degli uni e degli altri. Nei numeri che immediatamente seguono, premesse le regole atte al calcolo dei movimenti di terra per la costruzione di strade, di canali, di argini e simili, si fa vedere in qual modo debbasi procedere nella pratica loro applicazione.

215. Metodo delle sezioni ragguagliate. — Si consideri un solido ACBDFE (*fig. 179*) compreso fra due facce parallele e verticali ACB e DFE, suppongasi che la superficie la quale limita questo solido sia tale che, andando dalla prima alla seconda delle dette facce verticali, le diverse sezioni crescano proporzionalmente alla distanza orizzontale che hanno dalla sezione ACB, e si chiamino:

A la superficie della sezione estrema ACB,

A' la superficie dell'altra sezione estrema DFE,

l la distanza orizzontale \overline{IK} fra queste due sezioni e

V il volume domandato ACBDFE.

Essendo x la distanza $\overline{IP'}$ di una sezione qualunque $A'C'B'$, fatta nel solido parallelamente alle facce estreme, dalla prima sezione ACB , per l'ipotesi stabilita si ha: che quella è maggiore di questa di

$$\frac{A' - A}{l} x;$$

che la superficie della sezione $A'C'B'$ vale

$$A + \frac{A' - A}{l} x;$$

che il volume elementare, il quale si può considerare come un prisma avente per area della sua base la trovata superficie e per altezza dx , vien espresso da

$$A dx + \frac{A' - A}{l} x dx;$$

e finalmente che il domandato volume V risulta dall'equazione

$$V = A \int_0^l dx + \frac{A' - A}{l} \int_0^l x dx,$$

d'onde

$$V = \frac{A + A'}{2} l \quad (1).$$

Questa formola dice che si calcola, col metodo delle sezioni ragguagliate, il volume compreso fra due facce piane parallele, moltiplicando la distanza orizzontale delle due facce per la semi-somma delle loro superficie.

Allo stesso risultamento si può arrivare con considerazioni affatto elementari. Immaginando perciò costruito un trapezio la cui altezza \overline{ab} sia eguale ad l , e le cui basi parallele \overline{ad} e \overline{bc} siano tali da contenere tante unità lineari quante sono quelle superficiali contenute in A ed A' , supponendo tagliato il solido con tanti piani paralleli alle sezioni estreme, assai vicini fra di loro, quali sono quelli determinanti le sezioni $A'C'B'$, $A''C''B''$,, e supponendo anche

condotte nel trapezio le rette $\overline{a'd'}$, $\overline{a''d''}$,..... parallele alle basi e distanti da ad di quanto le sezioni nel corpo si sono fatte distanti dalla faccia estrema ACB , facilmente si deducono le seguenti conseguenze: che per ipotesi le superficie delle sezioni $A'C'B'$, $A''C''B''$,..... sono maggiori della superficie A di quantità proporzionali alle distanze orizzontali $\overline{IP'}$, $\overline{IP''}$,.....; che, supponendo vicinissime fra di loro le dette sezioni, i volumi compresi fra due sezioni parallele successive si possono considerare come prismi aventi per basi le medie aritmetiche fra le aree delle due sezioni che li comprendono, e che per conseguenza sono dati da

$$\overline{IP'} \frac{ACB + A'C'B'}{2}, \quad \overline{IP''} \frac{A'C'B' + A''C''B''}{2}, \quad \dots\dots;$$

che le rette $\overline{a'd'}$, $\overline{a''d''}$,....., condotte nel trapezio parallelamente alle sue basi, per la teoria delle linee proporzionali, sono maggiori della retta \overline{ad} di quantità proporzionali alle distanze $\overline{aa'}$, $\overline{aa''}$,....., e che per conseguenza, rappresentando \overline{ad} e \overline{bc} tante unità quante sono unità superficiali in ACB e DFE , anche $\overline{a'd'}$, $\overline{a''d''}$,....., devono contenere tante unità quante sono unità superficiali in $A'C'B'$, $A''C''B''$,.....; che le superficie dei trapezii $aa'd'd$, $a'a''d''d'$,....., date da

$$\overline{aa'} \frac{\overline{ad} + \overline{a'd'}}{2}, \quad \overline{aa''} \frac{\overline{a'd'} + \overline{a''d''}}{2}, \quad \dots\dots,$$

contengono tante unità superficiali quante sarebbero le unità cube contenute nei volumi $ACBA'C'B'$, $A'C'B'A''C''B''$,.....; che sommando le aree dei trapezii $aa'd'd$, $a'a''d''d'$,....., ossia che trovando la superficie del trapezio totale $abcd$, si avranno tante unità quante sono le unità cube nella somma dei volumi $ACBA'C'B'$, $A'C'B'A''C''B''$,.....; e che finalmente il volume domandato V , dovendo contenere tante unità cube quante sono unità nel trapezio $abcd$ di altezza $\overline{ab} = l$ e di basi \overline{ad} e \overline{bc} lunghe rispettivamente tante unità quante sono le unità superficiali contenute in A ed A' , risulta dalla stabilita formola (1), ossia dalla distanza fra le due sezioni estreme ACB e DFE per la semi-somma delle loro aree.

Sovente avviene nelle pratiche applicazioni di dover trovare due volumi $ABCDEF$ e $GHIKEF$ (*fig. 180*), uno di sterro e l'altro d'interro, compresi fra due facce piane verticali e parallele $ABCD$ e

GHIK, e di conoscere solamente le aree delle dette due facce verticali e la loro distanza orizzontale \overline{OQ} . In questo caso è necessario di prima cercare quali sono le lunghezze dei due volumi distinti, e per questa ricerca valgono le seguenti considerazioni. Se immaginasi condotta la orizzontale \overline{ag} lunga come \overline{OQ} , se elevansi ai suoi due estremi le perpendicolari \overline{ad} e \overline{gk} lunghe rispettivamente tante unità quante sono le unità superficiali contenute nelle due basi estreme ABCD e GHIK, e se tirasi la retta dk , questa retta interseca la \overline{ag} in un punto e . Siccome poi le perpendicolari $\overline{a'd'}$, $\overline{a''d''}$,..... alla \overline{ag} diminuiscono proporzionalmente alle distanze $\overline{aa'}$, $\overline{aa''}$,..... da a , ne viene che le loro lunghezze contengono tante unità quante sono unità superficiali nelle sezioni $A'B'C'D'$, $A''B''C''D''$,..... fatte parallelamente alla sezione ABCD con distanze orizzontali $\overline{OP} = \overline{aa'}$, $\overline{OP''} = \overline{aa''}$,..... da questa. Segue da ciò che il volume dello sterro ABCDEF contiene tante unità cube quante sono unità nell'area del triangolo aed ; che il volume dell'interro GHIKEF risulta di tante unità cube quante sono unità nell'area del triangolo gek ; e che le lunghezze di questi due solidi sono rispettivamente $\overline{OP} = \overline{ae}$ e $\overline{QP} = \overline{ge}$. Premesso questo, si chiamino

A_s l'area della faccia ABCD,

A_i quella della faccia GHIK,

L la distanza $\overline{OQ} = \overline{ag}$ fra le dette facce,

l_s la lunghezza $\overline{OP} = \overline{ae}$ del solido di sterro ABCDEF,

l_i la lunghezza $\overline{QP} = \overline{ge}$ del solido d'interro GHIKEF,

V_s e V_i i volumi degli ultimi indicati solidi.

Essendo le due rette \overline{ad} e \overline{gk} lunghe tante unità quante sono le unità superficiali contenute in A_s ed A_i , per la considerazione dei due triangoli simili aed e gek si hanno le seguenti formole determinatrici di l_s e di l_i ,

$$l_s = \frac{L A_s}{A_s + A_i}$$

$$l_i = \frac{L A_i}{A_s + A_i}$$

Osservando ora che i due volumi ABCDEF e GHIKEF devono rispettivamente contenere tante unità cube quante sono unità nelle aree dei due triangoli aed e gek , o altrimenti che essi sono due

volumi da calcolarsi colla formola (1) nell'ipotesi della sezione estrema EF di area nulla, si hanno le equazioni

$$V_s = \frac{1}{2} A_s l_s$$

$$V_i = \frac{1}{2} A_i l_i,$$

le quali, ponendo per l_s e per l_i i valori già trovati, diventano

$$\left. \begin{aligned} V_s &= \frac{1}{2} \frac{L A_s^2}{A_s + A_i} \\ V_i &= \frac{1}{2} \frac{L A_i^2}{A_s + A_i} \end{aligned} \right\} (2).$$

Queste formole, tradotte in linguaggio ordinario, danno origine alla seguente regola: quando fra due sezioni verticali e parallele trovansi due volumi, uno di sterro e l'altro d'interro, si ottiene il primo moltiplicando la distanza delle due sezioni per il quadrato della superficie della sezione di sterro, dividendo questo prodotto per la somma della superficie delle due sezioni e prendendo ancora la metà del risultato; analogamente si ottiene il secondo, cioè si moltiplica la distanza delle due sezioni per il quadrato della superficie della sezione d'interro, si divide il prodotto delle superficie delle due sezioni e si prende la metà per la somma dal risultato.

216. Volume del prismoide. — Sia ABCD (*fig. 431*) un trapezio disposto in un piano orizzontale, e trovisi sovr'esso un solido ABCDEFGH lateralmente limitato da quattro piani verticali ABFE, BCGF, CDHG e DAEH. Questo solido poi suppongasi superiormente chiuso da una superficie sghemba, generata da una linea retta la quale si muove passando per le due rette FG ed EH e conservandosi parallela al piano verticale ABFE preso come piano direttore.

Se nel trapezio ABCD si conduce l'altezza \overline{DN} e se nel definito solido immaginasi fatta una sezione qualunque parallela al piano direttore ABFE, evidentemente questa sezione risulta un trapezio *abfe*. Se poi immaginansi pei punti H e G condotte le rette HE₁ e GF₁, rispettivamente parallele a DA e CB, la prima incontrante la *ae* in *e*₁ e la seconda incontrante la *bf* in *f*₁; si deduce dalla

similitudine dei due triangoli Hee_1 ed HEE_1 , dalla similitudine degli altri due triangoli Gff_1 e $GF F_1$ e dalla teoria delle linee proporzionali:

$$\overline{ee_1} = \overline{EE_1} \frac{\overline{He_1}}{\overline{HE_1}} = \overline{EE_1} \frac{\overline{Da}}{\overline{DA}} = \overline{EE_1} \frac{\overline{Dg}}{\overline{DN}} \quad (1);$$

$$\overline{ff_1} = \overline{FF_1} \frac{\overline{Gf_1}}{\overline{GF_1}} = \overline{FF_1} \frac{\overline{Cb}}{\overline{CB}} = \overline{FF_1} \frac{\overline{Dg}}{\overline{DN}} \quad (2).$$

Analogamente, supponendo condotta per D la retta DO parallela a CB , si ha

$$\overline{ah} = \overline{AO} \frac{\overline{Dg}}{\overline{DN}} \quad (3).$$

Se ora chiamansi

p e q le due basi \overline{AB} e \overline{DC} del trapezio nel quale proiettasi il prismoide di cui vuolsi il volume V ,

h l'altezza \overline{DN} del medesimo trapezio,

a, b, c e d i quattro spigoli $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}$ e \overline{DH} ,
si ha

$$\overline{EE_1} = a - d$$

$$\overline{FF_1} = b - c$$

$$\overline{AO} = p - q.$$

Dicendo poi y la distanza \overline{Dg} , del piano determinato dalla sezione $abfe$, dal piano $DCGH$, risulta dalle (1), (2) e (3)

$$\overline{ee_1} = (a - d) \frac{y}{h}$$

$$\overline{ff_1} = (b - c) \frac{y}{h}$$

$$\overline{ah} = (p - q) \frac{y}{h}.$$

Moltiplicando l'area del trapezio $abfe$ per dy , si ha l'espressione del volume elementare dV , e l'integrale di quest'espressione fra i limiti 0 ed h rappresenta il volume domandato V , cosicchè, per essere

$$\overline{ae} = d + (a-d) \frac{y}{h}$$

$$\overline{bf} = c + (b-c) \frac{y}{h}$$

$$\overline{ab} = q + (p-q) \frac{y}{h},$$

si ha

$$V = \int_0^h \frac{d + (a-d) \frac{y}{h} + c + (b-c) \frac{y}{h}}{2} \left[q + (p-q) \frac{y}{h} \right] dy,$$

ossia ancora

$$V = \frac{q(d+c)}{2} \int_0^h dy + \frac{(d+c)(p-2q) + (a+b)q}{2h} \int_0^h y dy \\ + \frac{(p-q)(a+b-c-d)}{2h^2} \int_0^h y^2 dy.$$

Effettuando le integrazioni e riducendo, si trova la formola

$$V = ph \frac{2a+2b+c+d}{12} + qh \frac{a+b+2c+2d}{12} \quad (4),$$

la quale può anche essere scritta

$$V = \frac{h}{12} \left[(2p+q)(a+b) + (p+2q)(c+d) \right].$$

Alla formola (4) si può anche arrivare, senza far uso d'integrazioni, col seguente metodo. Supponendo prolungati, lo spigolo \overline{AE} della quantità $\overline{EI} = \overline{BF}$, lo spigolo \overline{BF} della quantità $\overline{FK} = \overline{AE}$, lo spigolo \overline{CG} della quantità $\overline{GL} = \overline{DH}$ e finalmente lo spigolo \overline{DH}

della quantità $\overline{HM} = \overline{CG}$, le due verticali \overline{AI} e \overline{BK} risultano di egual lunghezza, tali risultano pure le altre due \overline{DM} e \overline{CL} , le due rette IK ed ML si trovano orizzontalmente disposte e, giacendo esse in piani verticali paralleli, sono contenute in uno stesso piano $IKLM$. Segue da ciò che il solido $ABC DIKLM$ è un tronco di prisma a sezione retta trapezia: che, immaginando condotta per H la retta HE_2 parallela ad MI , risulta

$$\overline{EE_2} = \overline{EI} - \overline{HM} = \overline{BF} - \overline{CG} = \overline{FF_1};$$

che, essendo

$$\overline{ee_2} = \overline{EE_2} \frac{\overline{He_2}}{\overline{HE_2}} = \overline{EE_2} \frac{\overline{He_1}}{\overline{HE_1}} = \overline{EE_2} \frac{\overline{Dg}}{\overline{DN}},$$

si ha, per la (2), $\overline{ee_2} = \overline{ff_1}$; che, per essere

$$\overline{bf} = \overline{bf_1} + \overline{ff_1} = \overline{CG} + \overline{ff_1},$$

$$\overline{ie} = \overline{ie_2} + \overline{ee_2} = \overline{HM} + \overline{ee_2},$$

e per l'eguaglianza di \overline{CG} con \overline{HM} e di $\overline{ff_1}$ con $\overline{ee_2}$, si deduce $\overline{bf} = \overline{ie}$; che analogamente deve risultare $\overline{ae} = \overline{kf}$; che i due trapezii $abfe$ ed $ikfe$ componenti il rettangolo $abki$, avendo le basi rispettivamente eguali e la stessa altezza, sono eguali; e finalmente, che l'ultimo accennato rettangolo ha superficie doppia di quella del trapezio $abfe$. Se ora s'immaginano condotti tanti piani verticali paralleli al piano $ABKI$ e vicinissimi fra di loro, questi piani tagliano il solido proposto $ABCDEF GH$ in tante fette sottilissime $ABbaEFfe$, $abb'a'eff'e'$, che si possono considerare come prismi di piccolissima altezza, e tagliano il tronco di prisma $ABC DIKLM$ anche in tante fette sottilissime $ABbaIKki$, $abb'a'ikk'i'$, le quali si possono pure considerare come altrettanti prismi di piccolissima altezza. Siccome poi i prismi, in cui trovasi decomposto il solido di cui vuolsi il volume, hanno basi metà delle basi dei prismi corrispondenti del tronco di prisma a sezione retta trapezia, risulta che ciascuno di questi è rispettivamente doppio di ciascuno di quelli e che, per conseguenza, il prismoide $ABCDEF GH$ è la metà del tronco di prisma

ABCDIKLM. — Premesso questo, si ritengano le denominazioni che in questo numero già vennero stabilite per quanto si riferisce alle basi ed all' altezza del trapezio ABCD, ai quattro spigoli \overline{AE} , \overline{BF} , \overline{CG} e \overline{DH} ed al volume domandato. Pel modo con cui si è formato il tronco di prisma ABCDIKLM, si ha

$$\overline{AI} = \overline{BK} = a + b,$$

$$\overline{CL} = \overline{DM} = c + d.$$

Siccome poi il volume cercato V vale la metà del volume del tronco del prisma ABCDIKLM, il quale si compone dei due tronchi di prisma ABDIKM e BCDKLM, le cui sezioni rette sono rispettivamente i due triangoli ABD e BCD, aventi la stessa altezza del trapezio ABCD, rammentando che il volume di un tronco di prisma triangolare vien dato dall'area della sua base per il terzo della somma dei tre spigoli, si ha l'equazione

$$2V = \frac{1}{2}ph \frac{(a+b) + (a+b) + (c+d)}{3} + \frac{1}{2}qh \frac{(a+b) + (c+d) + (c+d)}{3},$$

dalla quale, dividendola per 2 ed in seguito a semplicissime riduzioni, immediatamente si deduce la formola (4), che è quella da adoperarsi nella pratica per la determinazione del volume del prismoide.

Allorquando la base ABCD del prismoide ABCDEFGH, invece di essere un trapezio, è un parallelogramma, si ha $q=p$, ed allora la formola (4), determinatrice del volume V, diventa

$$V = ph \frac{a+b+c+d}{4} \quad (5).$$

Osservando che ph esprime l'area del parallelogramma, l'ultima formola conduce a conchiudere che il volume del solido insistente ad un parallelogramma orizzontale, chiuso lateralmente da quattro piani verticali e superiormente da una superficie rigata avente per piano direttore uno degli accennati piani verticali, vien dato, come

pel tronco di prisma a sezione retta parallelogrammica (num. 140), dall'area di base per il quarto dalla somma di quattro spigoli.

Se la base ABCD del prismoide si riduce ad un triangolo, nel qual caso $q=0$ e $d=c$, la formola (4) diventa

$$V = ph \frac{a+b+c}{6} \quad (6),$$

la quale equazione esprime che il solido si è ridotto ad un tronco di prisma triangolare, perchè, scomponendo il denominatore 6 in 2×3 e ponendo il 2 divisore al prodotto ph , si ha appunto l'area di base moltiplicata per il terzo della somma dei tre spigoli.

Soventi volte, nel calcolo dei volumi degli sterri e degli interri avviene di dover considerare dei corpi, come EFGHIKLM (fig. 182), proiettantisi orizzontalmente in trapezii, come ABCD, chiusi lateralmente da quattro piani verticali e limitati superiormente ed inferiormente da superficie sghembe, generate da rette parallele ai piani verticali ABKI e DCLM. In questo caso, ritenute le denominazioni già stabilite per quanto concerne alle basi ed all'altezza del trapezio ABCD, nel quale orizzontalmente proiettasi il solido di cui vuolsi il volume, e chiamando rispettivamente

a, b, c e d i quattro spigoli verticali $\overline{EI}, \overline{FK}, \overline{GL}$ ed \overline{HM} ,
 a', b', c' e d' le lunghezze delle verticali $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}$ e \overline{DH} ,
 a'', b'', c'' e d'' quelle delle verticali $\overline{AI}, \overline{BK}, \overline{CL}$ e \overline{DM} ,

V e V'' i due volumi ABCDEFGH ed ABCDIKLM, a ciascuno dei quali riesce applicabile la formola (4), si hanno le equazioni

$$V' = ph \frac{2a' + 2b' + c' + d'}{12} + qh \frac{a' + b' + 2c' + 2d'}{12},$$

$$V'' = ph \frac{2a'' + 2b'' + c'' + d''}{12} + qh \frac{a'' + b'' + 2c'' + 2d''}{12}.$$

Sottraendo membro a membro queste equazioni ed osservando che

$$V'' - V' = V$$

$$a'' - a' = a$$

$$b'' - b' = b$$

$$c'' - c' = c$$

$$d'' - d' = d,$$

si ottiene per formola determinatrice di V

$$V = ph \frac{2a + 2b + c + d}{12} + qh \frac{a + b + 2c + 2d}{12},$$

che è la stessa formola (4) applicata al caso più generale della pratica, in cui il prismoide proiettantesi orizzontalmente in un trapezio trovasi superiormente ed inferiormente chiuso da una superficie rigata.

Analogamente la formola (5) vale anche pel caso di un solido proiettantesi orizzontalmente in un parallelogramma chiuso lateralmente da quattro piani verticali e limitato da superficie rigate al di sopra ed al di sotto, quando per p ed h s'intendano rispettivamente la base e l'altezza del parallelogramma nel quale proiettasi il corpo, e quando per a , b , c e d s'intendano i quattro spigoli verticali del corpo.

217. Metodo delle altezze ragguagliate. — Alcuni pratici, invece di applicare la formola (4) del numero precedente nel calcolo del volume proiettantesi orizzontalmente in un trapezio, chiuso lateralmente da quattro piani verticali e chiuso superiormente ed inferiormente da superficie alle quali venne assegnata una generazione geometrica nella deduzione della citata formola, usano moltiplicare l'area del trapezio in cui il solido si proietta per il quarto della somma dei quattro spigoli, ed usano così il *metodo delle altezze ragguagliate*. Questo metodo, applicato al calcolo del volume del solido EFGHIKLM rappresentato nella figura 182, conduce alla formola

$$V = (p + q) h \frac{a + b + c + d}{8},$$

nella quale le lettere a , b , c , d , p , q , h e V hanno i significati che loro vennero attribuiti nel precedente numero.

Quando il solido, invece di proiettarsi nel trapezio ABCD, si

proietta in un parallelogramma, si ha $q=p$, e l'ultima formola si riduce a

$$V = ph \frac{a+b+c+d}{4},$$

come già venne trovato nel precedente numero pel prismoide a sezione retta parallelogrammica.

218. Calcolo degli sterri e degli interri per strade, canali, argini e simili, col metodo delle sezioni raggugliate. — Per eseguire questo calcolo è necessario avere diversi profili trasversali del terreno su cui si vuol costruire l'opera progettata, disegnare su questi la linea di progetto colle norme che vennero date nel numero 55, e determinare i volumi di sterro e d'interro compresi fra due sezioni successive, distinguendo i seguenti quattro casi: 1° quando fra due sezioni successive il volume da calcolarsi è totalmente in rialzo ossia un interro; 2° quando fra due sezioni successive il volume da calcolarsi è totalmente in iscavo, ossia uno sterro; 3° quando fra due sezioni successive si presentano due distinti volumi, ossia uno sterro ed un interro, essendo però tutta in rialzo una sezione e tutta in iscavo l'altra sezione; 4° quando, in una sola oppure nell'una o nell'altra delle due sezioni successive, il solido da calcolarsi si presenta per una parte in rialzo e per una parte in iscavo.

Nel primo caso, qual è quello rappresentato nella figura 183, si calcolano le aree delle due figure ABCD ed A'B'C'D'; nella formola (1) del numero 215 si pongono, invece di A l'area della prima figura, invece di A' l'area della seconda figura ed invece di l la distanza fra i due piani verticali in cui si trovano le due sezioni trasversali ABCD ed A'B'C'D'. Il valore di V, che così si trova, si assume siccome rappresentante il volume del rialzo od interro da farsi fra le stesse sezioni.

Nel secondo caso in cui le due sezioni indicano uno scavo (fig. 184), si trovano ambe le aree A ed A' delle figure ABCD ed A'B'C'D'; si sostituiscono nella citata formola (1) del numero 215 questi valori di A e di A', non che quello della distanza orizzontale l fra i piani verticali in cui si trovano le dette sezioni; ed il prodotto si assume siccome rappresentante il volume dello scavo o sterro che fra esse si deve eseguire.

Nel terzo caso, essendo nota la distanza orizzontale L dei due piani verticali in cui trovansi le due sezioni trasversali ABCD ed

$A'B'C'D'$ (*fig. 135*), e già essendosi calcolate le aree A_1 ed A_2 , si ottengono i volumi V_1 del rialzo posto dalla parte della sezione $ABCD$ e V_2 dello scavo posto dalla parte della sezione $A'B'C'D'$, applicando rispettivamente la seconda e la prima delle formole (2) del numero 215; ed i risultati a cui queste formole conducono si assumono siccome rappresentanti i volumi dell'interro e dello sterro da farsi fra le dette due sezioni trasversali.

Nel quarto caso bisogna immaginare condotti pei punti di passaggio P, Q ed R (*fig. 136*), che vi sono sui profili trasversali, i piani verticali rappresentati nelle loro tracce orizzontali PS, QT ed RU parallele alla retta AB che unisce i punti che sono comuni ai profili trasversali ed al profilo longitudinale a cui questi trovansi collegati, e considerare separatamente: il volume di sterro corrispondente alle due sezioni PEF ed $SIKL$ da calcolarsi colla formola (1) del numero 115; i due volumi, il primo d'interro corrispondente alla sezione PQA e l'altro di sterro corrispondente alla sezione $LBMTS$, da ottenersi applicando le formole (2) dello stesso numero; il volume di sterro corrispondente alle due sezioni QVR ed $MNUT$, da trovarsi colla citata formola (1); ed i due volumi, uno d'interro e l'altro di sterro corrispondenti rispettivamente alle due sezioni RDC ed $NHGU$ facili a calcolarsi coll'applicazione delle indicate formole (2).

Presentandosi il caso di dover eseguire col metodo delle sezioni ragguagliate il calcolo di sterri e d'interri per la costruzione di strade, di canali, di argini e simili, dove queste opere devono presentare degli andamenti curvilinei, si procede con un metodo in tutto analogo a quello che già venne esposto nell'ipotesi che fra due sezioni successive le opere a cui i calcoli si riferiscono, seguano un andamento rettilineo. Quando due sezioni successive sono tali da appartenere o tutte e due ad uno scavo, o tutte e due ad un rialzo, oppure una totalmente ad uno scavo e l'altra totalmente ad un rialzo, si assume per loro distanza lo sviluppo della curva costituente la direttrice orizzontale della superficie cilindrica in cui trovansi il profilo longitudinale, al quale trovansi collegate le due sezioni trasversali che si considerano. Quando poi in una sola, oppure nell'una e nell'altra di due sezioni successive, si presentano contemporaneamente degli scavi e dei rialzi, invece di separare gli sterri dagli interri con piani verticali, si devono essi dividere mediante superficie cilindriche, generate da rette verticali, che si muovono sopra curve parallele a quella costituente la già accennata direttrice orizzontale; e per lunghezze

dei solidi parziali compresi fra queste superficie cilindriche si possono assumere quelle delle direttrici orizzontali di superficie cilindriche equidistanti da quelle che limitano gli stessi solidi.

219. Calcolo degli sterri e degli interri per strade, canali, argini e simili, scomponendoli in prismoidi. — Allorquando nel calcolo degli sterri e degli interri, per l'esecuzione di un lavoro relativamente al quale si hanno il profilo longitudinale e parecchi profili trasversali, si vuol arrivare a risultamenti più esatti di quelli a cui conduce il metodo delle sezioni ragguagliate, conviene generalmente dividere i solidi di cui si vuole la cubatura in prismoidi, calcolare i volumi di questi solidi colle formole che vennero date nel numero 216, e sommare separatamente fra di loro sia i volumi che rappresentano sterri, sia quelli che rappresentano interri.

Allorquando è quistione di trovare il volume d'interro compreso fra due sezioni successive, quali si vedono ribattute sul piano orizzontale di proiezione nella figura 187, si procede come segue; si conducono pei punti B ed E, che sono i punti appartenenti simultaneamente al profilo longitudinale ed ai profili trasversali le rette VX ed YZ perpendicolari a BE e rappresentanti le proiezioni orizzontali dei detti profili; dai punti A e C, D ed F si abbassano rispettivamente delle perpendicolari su VX e su YZ, e si hanno in $\overline{A'C'}$ e $\overline{D'F'}$ le proiezioni orizzontali di detti profili; si conducono le rette $A'D'$ e $C'F'$ onde far risultare il trapezio $A'C'F'D'$, che si può ritenere siccome rappresentante la proiezione orizzontale del total solido da calcolarsi; e si conducono da tutti i vertici, tanto delle due linee del terreno quanto di quelle del progetto, tante rette parallele a BE, le quali rappresentano le tracce orizzontali di tanti piani dividenti il total volume da calcolarsi in parti facilmente calcolabili. Il volume I, proiettato orizzontalmente nel trapezio $A'G'H'D'$, è facile a calcolarsi colla formola (4) del numero 216, giacchè le lunghezze contenute nel secondo membro di questa formola sono rappresentate da $\overline{D'H'}$ la base p e da $\overline{A'G'}$ la base q ; da $\overline{H'G'}$ l'altezza h ; da zero lo spigolo a corrispondente al vertice D' , da $\overline{H'h}$ lo spigolo b corrispondente al vertice H' , da \overline{Gg} lo spigolo c che corrisponde al vertice G' e da zero lo spigolo d il quale corrisponde al vertice A' . — Il volume II proiettato nel rettangolo $H'K'I'G'$ si può anche calcolare colla citata formola (4), ma più semplicemente colla formola (5) ponendo in essa, invece di p il lato $\overline{H'K'}$,

invece di h il lato $\overline{K'I'}$, invece di a, b, c e d le lunghezze o quote rosse \overline{Hh} , \overline{Kk} , \overline{Ii} e \overline{Gg} . — I volumi III, IV, V e VI, proiettandosi orizzontalmente in aree rettangolari, si calcolano come il volume II; ed il volume VII, il quale proiettasi orizzontalmente in un trapezio, si ottiene come il volume I.

Quando trattasi di calcolare non un volume d'interro, ma sibbene un volume di sterro, il metodo da seguirsi non differisce punto da quello ora esposto, e, fermando l'attenzione sulla figura 488, agevolmente si conosce: doversi calcolare i volumi I e IX, i quali si proiettano orizzontalmente su aree trapezie, come si è detto pel volume I del caso precedente; e doversi calcolare i volumi intermedi II, III, IV, V, VI, VII e VIII, che orizzontalmente si proiettano su figure rettangolari, come si è indicato pel volume II.

Nel caso in cui una delle due sezioni (fig. 489) si presenta tutta in interro e l'altra tutta in isterro, due volumi di diversa natura, ossia un primo d'interro ed un secondo di sterro, sono da calcolarsi; ed importa innanzi tutto di procedere a determinare sul piano la linea di passaggio, ossia quella che demarca il sito in cui finisce l'interro per incominciare lo sterro.

Incominciando dal determinare il punto di passaggio posto sulla retta orizzontalmente proiettata in AB , si osserva che, immaginando il piano verticale avente per traccia orizzontale la detta retta, questo piano taglia la superficie del terreno secondo una linea che, per l'ipotesi stabilita nel numero 216 per la deduzione del volume del prismoide, è una retta rappresentabile in $\overline{A_1B_1}$, e taglia la superficie dell'opera progettata pure secondo una retta rappresentabile in $\overline{a_1b_1}$. I due punti A_1 ed a_1 sono su una stessa verticale lunga come \overline{Aa} , i due punti B_1 e b_1 sono pure su una medesima verticale lunga come \overline{Bb} , la distanza $a'b'$ fra le dette verticali eguaglia la distanza orizzontale \overline{AB} fra le due sezioni considerate; e, per essere simili i due triangoli $\overline{A_1m'a_1}$ e $\overline{B_1m'b_1}$, nei quali sono note le due quote rosse $\overline{A_1a_1} = \overline{Aa}$ e $\overline{B_1b_1} = \overline{Bb}$ non che la distanza orizzontale $\overline{a'b'} = \overline{AB}$ che indico rispettivamente colle lettere i, s ed L , risulta facile il calcolo delle lunghezze $\overline{a'm'}$ e $\overline{b'm'}$ le quali vengono date da

$$\overline{a'm'} = \frac{Li}{i+s}$$

$$\overline{b'm'} = \frac{Ls}{i+s}$$

La somma di queste due lunghezze dà la distanza $\overline{AB} = L$, e, portando il valore di $\overline{a'm'}$ in \overline{Am} , si ottiene in m il punto di passaggio domandato, ed i valori di $\overline{a'm'}$ e di $\overline{b'm'}$ rappresentano le distanze orizzontali di questo punto di passaggio dalle due sezioni trasversali fra cui si trova. — Il metodo seguito per la determinazione del punto di passaggio m vale per fissare le posizioni degli altri punti di passaggio n , p e q . Per giungere ora a stabilire la proiezione orizzontale del fondo del fosso che si suppone esistere nelle parti in iscavo, della sua controscarpa e della parte di scarpa del rialzo che ancora manca, si può tenere la seguente via: per il punto C in cui la retta $H'I$, rappresentante lo spigolo interno del fondo del fosso, incontra la linea KE , rappresentante sulla sezione in interro la scarpa sinistra dell'opera da farsi, si conduca la retta ausiliaria \overline{CD} lunga come la larghezza del fondo del fosso e si tiri la retta FD ; si trovi il punto di passaggio r , supponendo che \overline{dD} valga i e che \overline{Ff} valga s ; unendo r con G' , proiezione di G su BG' , si ha in $rG'F'$ la proiezione orizzontale della controscarpa; e, unendo q con E' , proiezione di E su AE' , si ottiene in $qE'T'$ la proiezione orizzontale della parte di scarpa che manca a completare tutta la scarpa sinistra dell'interro fra le due sezioni trasversali considerate. Il metodo tenuto per determinare la linea di passaggio $mnpqr$ facilmente conduce anche alla determinazione dell'altra parte $mstuvx$.

Separato così il solido d'interro dal solido di sterro, agevolmente si vede che, tanto l'uno quanto l'altro si compongono di tante parti che si proiettano sul piano orizzontale in trapezii ed in triangoli, e che quindi assai facilmente si possono determinare colle formole (4) e (6) del numero 216.

Quando finalmente devesi calcolare un movimento di terra tale che in una sezione si presenta parte in interro e parte in isterro, e che nell'altra sezione si mostra o tutto in isterro (fig. 490) o tutto in interro, od anche parte in isterro e parte in interro, si cerca ancora la linea di passaggio, e sempre si ottengono dei volumi proiettantisi in trapezii, in rettangoli ed in triangoli, che si sanno calcolare colle formole (4), (5) e (6) del già citato numero 216. In questo caso la proiezione M' del punto di passaggio M sulla retta AB' , rappresentante la proiezione orizzontale del profilo trasversale in cui trovasi il detto punto di passaggio, è già un punto della linea di passaggio segnata in $M'pqr$.

Avvenendo che fra due sezioni successive sia curvilineo l'an-

damento del profilo longitudinale a cui trovansi collegate le due sezioni trasversali che si considerano, bisogna operare la scomposizione dei solidi d'interro e di sterro che fra queste sezioni si trovano, non già con piani verticali, ma sibbene con superficie cilindriche a generatrici verticali, aventi per direttrici delle curve parallele a quella che costituisce la direttrice orizzontale della superficie cilindrica nella quale esiste il detto profilo longitudinale. Le lunghezze delle accennate curve costituiscono gli elementi da porsi invece delle altezze h nell'applicare le formole (4) (5) e (6) del numero 216 al calcolo dei volumi parziali.

La formola (5) del numero 216, conveniente alla determinazione del volume del prismoide proiettantesi orizzontalmente in un parallelogramma, può essere scritta

$$V = \frac{\frac{p(a+b)}{2} + \frac{q(c+d)}{2}}{2} h,$$

e siccome $\frac{p(a+b)}{2}$ e $\frac{q(c+d)}{2}$ rappresentano rispettivamente le aree delle due facce parallele $EFKI$ ed $HGLM$ (*fig. 132*) distanti fra loro di h , si vien a conchiudere che il volume dell'accennato prismoide si può anche ottenere applicando il metodo delle sezioni raggiugliate. Segue da ciò che, avendosi diversi prismoidi proiettantesi orizzontalmente in rettangoli di eguale altezza, il volume del loro complesso risulta dalla semi-somma delle aree dei due poligoni paralleli fra cui essi si trovano per la detta altezza eguale alla distanza dei piani verticali in cui gli indicati poligoni sono contenuti. Quest'osservazione permette di semplificare il calcolo degli sterri e degli interri mediante la scomposizione in prismoidi nei due casi rappresentati nelle figure 137 e 138, giacchè con un sol calcolo si possono ottenere, tanto i volumi II, III, IV, V e VI della figura 137, moltiplicando la semi-somma delle aree delle due figure $GLlBg$ ed $HmEmh$ per la distanza orizzontale \overline{BE} fra le due sezioni in cui esse si trovano, quanto i volumi II, III, IV, V, VI, VII ed VIII della figura 138, col moltiplicare la semi-somma delle aree delle due figure $GgAlL$ ed $HhBmM$ per la loro distanza orizzontale \overline{AB} .

INDICE ANALITICO

PARTE PRIMA

Delle linee.

CAPITOLO I.

Tracciamento di allineamenti e misura di distanze.

1. Assunto del presente capitolo	Pag.	7
2. Voltate e deviazioni dei lati di una linea poligonale rilevata per camminamento		<i>ivi</i>
3. Coordinate dei vertici di un poligono rilevato per camminamento		9
4. Coordinate dei vertici di una rete trigonometrica stabilita fra due punti dati		12
5. Tracciare sul terreno l'allineamento determinato da due punti molto lontani, e tali che da uno di essi non si possa scoprire l'altro		14
6. Determinare la distanza orizzontale fra due punti molto lontani e tali che da uno di essi non si possa scoprire l'altro		20
7. Trovare l'angolo di due direzioni che vengono ad intersecarsi in un punto inaccessibile ed invisibile, e fissare la posizione di questo punto		21
8. Tracciamento di una linea poligonale sul terreno		23
9. Nozioni generali sul tracciamento di una galleria in direzione rettilinea		28

CAPITOLO II.

Tracciamento di linee curve sul terreno e misura del loro sviluppo.

10. Assunto del presente capitolo		34
11. Calcolo degli elementi necessari alla costruzione di un arco circolare per punti		<i>ivi</i>
12. Risvolta circolare passante per un punto preso su una delle direzioni da raccordarsi		37

13. Risvolta circolare passante per un punto preso fuori delle direzioni da raccordarsi	Pag.	38
14. Risvolta circolare di raggio dato		40
15. Effettivo tracciamento delle risvolte circolari col metodo delle perpendicolari alla tangente		<i>ivi</i>
16. Effettivo tracciamento delle risvolte circolari col metodo delle seganti		44
17. Tracciamento delle risvolte circolari in galleria		49
18. Risvolte circolari successive		51
19. Risvolte paraboliche		52
20. Sviluppo delle risvolte circolari		57
21. Sviluppo delle risvolte paraboliche		62

CAPITOLO III.

Tracciamento e misura dello sviluppo delle curve direttrici.

22. Indicazione delle curve più usate in qualità di direttrici nella genesi delle volte		64
23. Mezza circonferenza di circolo		<i>ivi</i>
24. Arco circolare		65
25. Condizioni a cui deve soddisfare una curva policentrica per essere ben tracciata		68
26. Il problema di descrivere una semi-ovale quando sono date la sua corda e la sua monta, è indeterminato		<i>ivi</i>
27. Metodi da seguirsi per rendere determinato il problema di descrivere una semi-ovale conoscendosi la corda e la monta		70
28. Metodo generale per la descrizione di una semi-ovale a qualsivoglia numero di centri		71
29. Calcolo delle coordinate dei centri di una semi-ovale e calcolo dei raggi dell'arco culminante e dell'arco che lo precede		72
30. Lunghezza degli archi diversi componenti una semi-ovale e lunghezza della curva intiera		74
31. Coordinate di un punto qualunque di una semi-ovale e principalmente dei punti di raccordamento degli archi		75
32. Semi-ovale cogli archi della medesima ampiezza tendente a confondersi colla mezza ellisse avente i semi-assi eguali alla semi-corda ed alla monta della semi-ovale a descriversi		76
33. Tavole di Michal per la descrizione delle semi-ovali a cinque, a sette e a nove centri		79
34. Descrizione della semi-ovale a tre centri coi suoi tre archi della stessa ampiezza		80
35. Lunghezze dei due raggi diversi di una semi-ovale a tre centri coi suoi tre archi della stessa ampiezza		81
36. Sviluppo di una semi-ovale a tre centri coi suoi tre archi della medesima ampiezza		83
37. Semi-ovali cogli archi della stessa ampiezza e coi raggi crescenti in progressione aritmetica		84

38. Tavole di Lerge per il tracciamento delle semi-ovali a tre, a cinque, a sette e a nove centri	Pag. 85
39. Tavole di Michal per la descrizione di semi-ovali cogli archi presso a poco della medesima lunghezza per le curve a cinque, a sette e a nove centri	88
40. Metodi generalmente seguiti nella pratica delle costruzioni pel tracciamento delle ellissi	90
41. Sviluppo di una semi-ellisse	91
42. Formole atte al calcolo dello sviluppo delle mezze ellissi	96
43. Tracciamento dell'elica	98
44. Sviluppo di un arco d'elica	99

CAPITOLO IV.

Trasformazione dei profili.

45. Pendenza di una retta in funzione delle ordinate di due dei suoi punti e della loro distanza orizzontale	100
46. Ordinata di un punto qualunque di una retta data colla sua pendenza e coll'ordinata di un suo punto	101
47. Intersezione di due rette date colle ordinate dei loro estremi	<i>ivi</i>
48. Intersezione di due rette di pendenza cognita e partenti da due punti dati sulla stessa verticale	102
49. Intersezione di due rette di pendenza data e partenti da due punti di cui si conoscono la distanza e le ordinate	<i>ivi</i>
50. Tracciamento di due rette passanti per due punti dati ed aventi pendenza e contropendenza eguali	103
51. Tracciamento della linea di progetto su un profilo longitudinale	104
52. Determinazione delle ordinate e delle quote rosse nei profili longitudinali	105
53. Determinazione dei punti di passaggio nei profili longitudinali	107
54. Condizioni diverse dietro le quali si può determinare la linea di progetto su un profilo longitudinale	108
55. Tracciamento della linea di progetto sui profili trasversali	109
56. Determinazione delle ordinate nere nei profili trasversali	111
57. Determinazione delle ordinate rosse e delle quote rosse nei profili trasversali	112
58. Determinazione dei punti di passaggio e delle lunghezze orizzontali delle scarpe nei profili trasversali	113
59. Disegno dei profili	114
60. Determinazione del punto d'incontro di un profilo trasversale colla superficie cilindrica avente per direttrice una data risvolta ed avente le sue generatrici verticali	115
61. Determinazione di più punti posti su una retta di data pendenza	116

PARTE SECONDA

Delle superficie.

CAPITOLO I.

Misura delle superficie piane.

62. Norme generali	Pag.	119
63. Area di un triangolo	»	120
64. Area di un quadrilatero	»	122
65. Area di un poligono regolare	»	126
66. Area di un poligono qualunque quando si conoscono le coordinate dei suoi vertici rispetto a due assi ortogonali	»	<i>ivi</i>
67. Area di un poligono qualunque rilevato per irradiazione	»	127
68. Area di un poligono qualunque rilevato per camminamento	»	128
69. Area di un poligono rilevato per intersezione	»	130
70. Area del circolo e delle sue parti	»	131
71. Area delle semi-ovali	»	134
72. Area di un segmento parabolico	»	<i>ivi</i>
73. Area dell'ellisse e dei segmenti ellittici	»	135
74. Calcolo dell'area compresa fra una curva, una retta e due perpendicolari a questa retta; fra una curva, una retta passante per un suo estremo ed una perpendicolare a questa retta; fra una curva e la sua corda	»	139
75. Formola di Simpson	»	140
76. Aree delle zone comprese fra due linee parallele	»	142
77. Valutazione delle aree dei terreni	»	143
78. Relazione esistente fra una scala di proporzione, una superficie naturale e la corrispondente superficie sul piano	»	145
79. Planimetri	»	146
80. Descrizione del planimetro ortogonale	»	<i>ivi</i>
81. Teoria del planimetro ortogonale	»	147
82. Uso del planimetro ortogonale	»	149
83. Descrizione del planimetro polare	»	153
84. Teoria del planimetro polare	»	154
85. Uso del planimetro polare	»	156
86. Approssimazione data dai planimetri	»	161

CAPITOLO II.

**Misura delle superficie curve e principalmente
delle superficie delle vólte.**

87. Assunto del presente capitolo	<i>Pag.</i> 162
88. Superficie cilindriche rette ed oblique	» 163
89. Superficie dei fusi cilindrici	» 165
90. Superficie dei fusi cilindrici incompleti	» 180
91. Superficie dell'unghia cilindrica	» 182
92. Superficie coniche rette ed oblique	» 188
93. Superficie delle unghie coniche	» 192
94. Superficie sferiche	» <i>ivi</i>
95. Superficie dell'unghia sferica	» 194
96. Superficie degli ellissoidi	» 195
97. Regola di Guldino per ottenere le superficie di rivoluzione	» 214
98. Metodo approssimato per la valutazione di una superficie di rivoluzione	» 216
99. Superficie dell'elicoide a piano direttore	» 218
100. Metodi approssimati per la valutazione delle superficie qualunque	» 222
101. Superficie delle vólte a botte	» <i>ivi</i>
102. Superficie delle vólte a collo d'oca	» 225
103. Superficie delle vólte anulari	» <i>ivi</i>
104. Superficie delle vólte elicoidali	» 226
105. Superficie delle vólte anulari ed elicoidali	» 228
106. Superficie delle vólte coniche	» 229
107. Superficie delle vólte conoidiche	» 231
108. Superficie di una vólta con strombature	» 232
109. Superficie delle vólte a bacino su pianta circolare	» 234
110. Superficie delle vólte a bacino su pianta ellittica e su pianta ovale	» 237
111. Superficie delle vólte a conca	» 238
112. Superficie delle vólte a vela sferiche	» 241
113. Superficie delle vólte a vela sferiche su pianta regolare	» <i>ivi</i>
114. Superficie delle vólte a vela sferica su pianta rettangolare	» 242
115. Superficie della vólta a vela su pianta rettangolare coll'intrados generato da un arco di circolo di forma variabile	» 243
116. Superficie delle vólte a padiglione	» 245
117. Superficie delle vólte a padiglione su pianta regolare	» <i>ivi</i>
118. Superficie delle vólte a padiglione su pianta rettangolare	» 248
119. Superficie delle vólte a botte con teste di padiglione	» 255
120. Superficie della vólta a botte con teste di padiglione su pianta rettangolare	» 257
121. Superficie delle vólte a schifo	» 258
122. Superficie della vólta a schifo su pianta rettangolare	» 260
123. Superficie della vólta a padiglione sopra schifo	» 261
124. Superficie della vólta a crociera con unghie cilindriche	» <i>ivi</i>
125. Superficie della vólta a crociera su pianta regolare e con unghie cilindriche	» 262

126. Superficie della vòlta a crociera su pianta rettangolare e con unghie cilindriche	Pag. 265
127. Superficie delle vòlte a crociera con unghie cilindroidiche	271
128. Superficie della vòlta a crociera su pianta regolare con unghie cilindroidiche	274
129. Superficie della vòlta a crociera su pianta rettangolare con unghie cilindroidiche	275
130. Superficie delle vòlte a crociera con unghie, dette sferiche, generate da un arco circolare di forma variabile	276
131. Superficie delle vòlte a crociera con unghie, dette sferiche, generate da un arco circolare di raggio costante	277
132. Superficie della vòlta a crociera su pianta regolare con unghie dette sferiche	284
133. Superficie della vòlta a crociera su pianta rettangolare con unghie dette sferiche	<i>ivi</i>
134. Superficie delle vòlte lunulate	286
135. Superficie delle vòlte a fascioni	288
136. Superficie delle vòlte a cupola composta	289
137. Conclusione sulla misura delle superficie delle vòlte	291

PARTE TERZA

Dei volumi.

CAPITOLO I.

Misura dei volumi dei solidi poliedrici.

138. Norme generali	292
139. Volume di un prisma	293
140. Volume di un tronco di prisma	<i>ivi</i>
141. Volume di una piramide	296
142. Volume di un tronco di piramide a basi parallele	<i>ivi</i>
143. Volume di un poliedro qualunque	297
144. Misura delle ghiaie e delle sabbie	<i>ivi</i>
145. Misura delle travi e dei legnami squadrati ricavabili dai fusti naturali delle piante	300
146. Misura del volume dei muri pieni	<i>ivi</i>
147. Misura del volume dei muri con speroni	303
148. Misura del volume del complesso di più muri	304
149. Misura del volume dei vani praticati nei muri ed aventi forma poliedrica	306

CAPITOLO II.

**Misura dei volumi dei solidi terminati da superficie curve,
e principalmente dei volumi delle vólte.**

150. Assunto del presente capitolo	Pag. 307
151. Volume dei cilindri e dei tronchi di cilindro	308
152. Volume degli spicchii cilindrici	309
153. Volume dello specchio cilindrico incompleto	313
154. Volume del cuneo cilindrico	314
155. Volume dei coni e dei tronchi di cono	316
156. Volume dell'unghia conica	317
157. Volume della sfera e delle sue parti	<i>ivi</i>
158. Volume del cuneo sferico	319
159. Volumi degli ellissoidi	320
160. Regola di Guldino per ottenere i volumi dei solidi di rivoluzione	321
161. Metodi approssimati per la valutazione dei solidi di rivoluzione	323
162. Volume compreso fra due superficie cilindriche concentriche, una loro sezione retta ed una porzione di elicoide a piano direttore	324
163. Metodi approssimati per la valutazione di volumi qualunque	325
164. Volume compreso fra la superficie d'intrados d'una vólta a botte ed il suo piano d'imposta	327
165. Volume compreso fra la superficie d'intrados d'una vólta a collo d'oca ed il piano orizzontale passante per la sua generatrice piú bassa	328
166. Volume compreso fra la superficie d'intrados di una vólta anulare ed il suo piano d'imposta	<i>ivi</i>
167. Volume compreso fra la superficie d'intrados di una vólta elicoidale ed il piano orizzontale passante per la sua generatrice piú bassa	329
168. Volume compreso fra la superficie d'intrados d'una vólta anulare ed elicoidale e la superficie dell'elicoide a piano direttore, determinata dalle due eliche d'imposta	330
169. Volume compreso fra la superficie d'intrados d'una vólta conica ed il suo piano d'imposta	331
170. Volume compreso fra la superficie d'intrados d'una vólta conoidica ed il suo piano d'imposta	<i>ivi</i>
171. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vólta con strombature	333
172. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vólta a bacino su pianta circolare	334
173. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vólta a bacino su pianta ellittica e su pianta ovale	335
174. Volume compreso fra il piano d'imposta e la superficie d'intrados d'una vólta a conca	<i>ivi</i>
175. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vólta a vela sferica	337
176. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vólta a vela sferica coprente un poligono regolare	<i>ivi</i>

177. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a vela sferica su pianta rettangolare	Pag. 338
178. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a vela su pianta rettangolare coll'intrados generato da un arco di circolo di forma variabile	339
179. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vòlta a padiglione	<i>ivi</i>
180. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a padiglione su pianta regolare	340
181. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vòlta a padiglione su pianta rettangolare	341
182. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a botte con teste di padiglione	<i>ivi</i>
183. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a botte con teste di padiglione su pianta rettangolare	342
184. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vòlta a schifo	<i>ivi</i>
185. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a schifo su pianta rettangolare	343
186. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a padiglione sopra schifo	<i>ivi</i>
187. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a crociera con unghie cilindriche	<i>ivi</i>
188. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a crociera su pianta regolare e con unghie cilindriche	344
189. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vòlta a crociera su pianta rettangolare e con unghie cilindriche	<i>ivi</i>
190. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a crociera con unghie cilindroidiche	345
191. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a crociera su pianta regolare e con unghie cilindroidiche	349
192. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a crociera su pianta rettangolare e con unghie cilindroidiche	<i>ivi</i>
193. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a crociera con unghie, dette sferiche, generate da un arco circolare di forma variabile	350
194. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a crociera con unghie, dette sferiche, generate da un arco circolare di raggio costante	351
195. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta di una vòlta a crociera su pianta regolare e con unghie dette sferiche	354
196. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a crociera su pianta rettangolare e con unghie dette sferiche	355
197. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta lunulata	356
198. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a fascioni	<i>ivi</i>

199. Volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vòlta a cupola	Pag. 357
200. Volume compreso fra la superficie d'intrados e la superficie d'estrados d'una vòlta qualunque	358
201. Conclusione sulla misura dei volumi delle vòlte	361

CAPITOLO III.

Misura degli sterri e degli interri.

202. Assunto del presente capitolo	362
203. Norme generali per il calcolo degli sterri e degli interri, nel caso in cui la superficie del terreno che si vuol ridurre ad altra forma è comunque terminata	<i>ivi</i>
204. Metodo seguito da molti pratici nel fare il piano quotato per operazioni di spianamenti	364
205. Pendenza di una superficie	365
206. Condizioni diverse per determinare un piano costituente la superficie di progetto in un'operazione di spianamento	<i>ivi</i>
207. Pendenza di una retta qualunque contenuta in un piano dato	369
208. Ordinate dei vari punti di un piano, posti su una direzione qualunque e su una serie di direzioni fra loro parallele	370
209. Metodo della rete ortogonale nella formazione del piano quotato per operazioni di spianamenti	371
210. Determinazione della superficie di progetto	374
211. Determinazione delle ordinate rosse e delle quote rosse	375
212. Determinazione dell'intersezione della superficie attuale del terreno colla superficie di progetto	379
213. Calcolo dei volumi degli sterri e degli interri	385
214. Norme generali per il calcolo degli sterri e degli interri, nel caso in cui la proiezione orizzontale della superficie del terreno che si vuol ridurre ad altra forma, è una lunga lista o zona, come succede per la costruzione di strade, di canali, di argini e simili	384
215. Metodo delle sezioni ragguagliate	<i>ivi</i>
216. Volume del prismoide	388
217. Metodo delle altezze ragguagliate	394
218. Calcolo degli sterri e degli interri per strade, canali, argini e simili, col metodo delle sezioni ragguagliate	395
219. Calcolo degli sterri e degli interri per strade, canali, argini e simili, scomponendoli in prismoidi	397

INDICE ALFABETICO

Geometria pratica applicata all'arte del costruttore.

A

- Allineamento determinato da due punti molto lontani, e tali che da uno di essi non si possa scoprire l'altro, pag. 14 n. 5.
- Angolo di due direzioni che vengono ad intersecarsi in un punto inaccessibile ed invisibile e determinazione di questo punto, pag. 21 n. 7.
- Area delle figure piane, da pag. 119 a 162 e da n. 62 a 86.
- Arco circolare, pag. 65 n. 24.

C

- Calotta sferica: sua superficie, pag. 195 n. 94.
- Cilindri retti ed obliqui: loro superficie, pag. 163 n. 88.
- Cilindri e tronchi di cilindro: loro volume, pag. 508 n. 151.
- Circolo: sua area, pag. 151 n. 70.
- Condizioni a cui deve soddisfare una curva policentrica per essere ben tracciata, pag. 68 n. 25.
- Condizioni atte a rendere determinato il problema di descrivere una semi-ovale, conoscendosi la corda e la monta, pag. 70 n. 27.
- Condizioni dietro le quali si può determinare la linea di progetto sui profili longitudinali, pag. 108, n. 54.
- Condizioni dietro le quali si può determinare un piano costituente la superficie di progetto in un'operazione di spianamento, pag. 365 n. 206.
- Coni retti ed obliqui: loro superficie, pag. 188 n. 92.
- Coni e tronchi di cono: loro volume, pag. 316 n. 155.

- Coordinate dei vertici di un poligono rilevato per camminamento, pag. 9 n. 3.
- Coordinate dei vertici di una rete trigonometrica stabilita fra due punti dati, pag. 12 n. 4.
- Coordinate dei centri di una semi-ovale e raggi dell'arco culminante e dell'arco che lo precede, pag. 72 n. 29.
- Coordinate di un punto qualunque di una semi-ovale e principalmente dei punti di raccordamento degli archi, pag. 75 n. 31.
- Corona circolare: sua area, pag. 153 n. 70.
- Cuneo cilindrico: suo volume, pag. 314 n. 154.
- Cuneo sferico: suo volume, pag. 319 n. 158.
- Curve direttrici, da pag. 64 a 100 e da n. 22 a 45.
- Curve policentriche, da pag. 68 a 90 e da n. 25 a 41.

D

- Descrizione di una semi-ovale a qualsivoglia numero di centri, pag. 71 n. 28.
- Determinazione di più punti posti su una retta di data pendenza, pag. 116 n. 61.
- Distanza orizzontale fra due punti molto lontani e tali che da uno di essi non si possa scoprire l'altro, pag. 20 n. 6.

E

- Elementi necessari alla costruzione di un arco circolare per punti, pag. 34 n. 11.

Ellisse: suo tracciamento e suo sviluppo, pag. 90 n. 40, pag. 91 n. 41, pag. 96 n. 42.

Ellisse: sua area, pag. 135 n. 75.

Ellisoidi: loro superficie, pag. 195 n. 96; loro volume, pag. 320 n. 159.

Elica: suo tracciamento e suo sviluppo, pag. 98 n. 43 e pag. 99 n. 44.

Elicoide a piano direttore: sua superficie, pag. 218 n. 99; volume compreso fra le due superficie cilindriche che lo racchiudono, una loro sezione retta ed una porzione della superficie eliocidale, pag. 324 n. 162.

F

Figure piane contorniate da linee curve qualunque: loro area, pag. 139 n. 74 e pag. 140 n. 75.

Fuso cilindrico: sua superficie, pag. 165 n. 89.

Fuso cilindrico incompleto: sua superficie, pag. 180 n. 90.

Fuso sferico: sua superficie, pag. 193 n. 94.

G

Ghiaie e sabbie: loro volume, pag. 297 n. 144.

I

Incontro di un profilo trasversale colla superficie cilindrica avente per direttrice una data risvolta ed avente le sue generatrici verticali, pag. 115 n. 60.

Indeterminazione del problema di descrivere una semi-ovale quando si conoscono la corda e la monta, pag. 68 n. 26.

Interri e sterri: loro volumi, da pag. 362 a 400 e da n. 202 a 219.

Interri e sterri per spianamenti di terreni, pag. 383 n. 215.

Interri e sterri per strade, canali, argini e simili, col metodo delle sezioni ragguagliate, pag. 395 n. 218.

Interri e sterri per streme, canali, argini e simili, scomponendoli in prismoidi, pag. 397 n. 219.

Intersezione di due rette date colle ordinate dei loro estremi, pag. 101 n. 47.

Intersezione di due rette di pendenza cognita e partenti da due punti dati sulla stessa verticale, pag. 102 n. 48.

Intersezione di due rette di pendenza data e partenti da due punti di cui si conoscono la distanza orizzontale e le ordinate, pag. 102 n. 49.

L

Legnami squadrati ricavabili dai fusti naturali delle piante: loro volume, pag. 300 n. 145.

Linea di progetto sui profili longitudinali, pag. 104 n. 51.

Linea di passaggio quale deve essere determinata nelle operazioni per spianamenti, pag. 379 n. 212.

Lunghezze orizzontali delle scarpe nei profili trasversali, pag. 113 n. 58.

M

Metodo delle sezioni ragguagliate per il calcolo degli sterri e degli interri, pag. 384 n. 215.

Metodo delle altezze ragguagliate per il calcolo degli sterri e degli interri, pag. 394 n. 217.

Mezza circonferenza di circolo, pag. 64 n. 23.

Misura di distanze e tracciamento di allineamenti, da pag. 7 a 35 e da n. 1 a 9.

Misura e tracciamento di linee curve sul terreno, da pag. 34 a 63 e da n. 10 a 21.

Misura delle risvolte circolari, pag. 57 n. 20.

Misura delle risvolte paraboliche, pag. 62 n. 21.

Misura dello sviluppo di curve qualunque con metodi d'approssimazione, pag. 62 n. 21.

Misura, tracciamento e sviluppo delle curve direttrici, da pag. 64 a 100 e da n. 22 a 44.

Misura delle superficie piane, da pag. 119 a 162 e da n. 62 a 86.

Misura della superficie curve o principalmente della superficie delle volte, da pag. 162 a 291 e da n. 87 a 137.

Misura dei volumi dei solidi poliedrici, da pag. 292 a 307 e da n. 138 a 149.

Misura dei volumi dei solidi terminati da superficie curve, e principalmente dei volumi delle volte, da pag. 307 a 362 e da n. 150 a 201.

Misura dei volumi degli sterri e degli interri, da pag. 362 a 400 e da n. 202 a 219.

Muri pieni: loro volume, pag. 300 n. 146.

Muri con speroni: loro volume, pag. 303 n. 147.
Muri riuniti: loro volume, pag. 304 n. 148.

O

Ordinata di un punto qualunque di una retta data colla sua pendenza e coll'ordinata di un suo punto, pag. 101 n. 46.
Ordinate rosse e quote rosse nei profili longitudinali, pag. 105 n. 52.
Ordinate nere nei profili trasversali, pag. 111 n. 56.
Ordinate rosse e quote rosse nei profili trasversali, pag. 112 n. 57.
Ordinate dei vari punti di un piano, posti su una direzione qualunque e su una serie di direzioni fra loro parallele, pag. 370 n. 208.
Ordinate rosse e quote rosse determinate nelle operazioni per spianamenti, pag. 275 n. 211.
Ovali: loro tracciamento e loro sviluppo da pag. 68 a 90 e da n. 25 a 39; loro area, pag. 154 n. 71.

P

Pendenza di una retta, pag. 100 n. 45.
Pendenza di una retta qualunque contenuta in un piano dato, pag. 369 n. 207.
Pendenza di una superficie, pag. 365 n. 205.
Pendenza di una retta in funzione delle ordinate di due dei suoi punti e della loro distanza orizzontale, pag. 100 n. 45.
Piano quotato per operazioni di spianamenti, pag. 364 n. 204.
Piramide: suo volume, pag. 296 n. 141.
Piramide sferica: suo volume, pag. 318 n. 157.
Planimetri, da pag. 146 a 162 e da n. 79 a 86.
Planimetro ortogonale, da pag. 146 a 153 e da n. 80 a 82.
Planimetro polare, da pag. 153 a 161 e da n. 83 a 85.
Poliedro qualunque: suo volume, pag. 297 n. 143.
Poligono regolare: sua area, pag. 126 n. 65.
Poligono qualunque: sua area, quando si conoscono le coordinate dei suoi vertici rispetto a due assi ortogonali, pag. 126 n. 66.
Poligono rilevato per irradiazione: sua area, pag. 127 n. 67.

Poligono rilevato per camminamento: sua area, pag. 128 n. 68.
Poligono rilevato per intersezione: sua area, pag. 130 n. 69.
Poligono qualunque: sua area desumendola dal tipo, pag. 143 n. 77.
Prisma: suo volume, pag. 293 n. 139.
Prismoide: suo volume, pag. 388 n. 216.
Profili e loro trasformazione, da pag. 100 a 118 e da n. 45 a 62.
Punti di passaggio nei profili longitudinali, pag. 107 n. 55.
Punti di passaggio nei profili trasversali, pag. 115 n. 58.

Q

Quadrilatero: sua area, pag. 122 n. 64.
Quote rosse nei profili longitudinali, pag. 105 n. 52.
Quote rosse nei profili trasversali, pag. 112 n. 57.
Quote rosse nelle operazioni per spianamenti, pag. 375 n. 211.

R

Raggi dell'arco culminante e dell'arco che lo precede, e coordinate dai centri di una semi-ovale, pag. 72 n. 29.
Raggi di una semi-ovale a tre centri coi suoi tre archi della stessa ampiezza, pag. 81 n. 35.
Rete ortogonale nella formazione del piano quotato per operazioni di spianamenti, pag. 371 n. 209.
Risvolte, da pag. 34 a 63 e da n. 10 a 21.
Risvolte circolari passanti per un punto preso su una delle due direzioni da raccordarsi, pag. 37 n. 12.
Risvolte circolari passanti per un punto preso fuori delle due direzioni da raccordarsi, pag. 38 n. 13.
Risvolte circolari di raggio dato, pag. 40 n. 14.
Risvolte circolari tracciate col metodo delle perpendicolari alla tangente, pag. 40 n. 15.
Risvolte circolari tracciate col metodo delle seganti, pag. 44 n. 16.
Risvolte circolari in galleria, pag. 49 n. 17.
Risvolte circolari successive, pag. 51 n. 18.
Risvolte paraboliche, pag. 52 n. 19.

S

Sabbie e ghiaie: loro volume, pag. 297 n. 144.

Segmento circolare: sua area, pag. 131 n. 70.

Segmento ellittico: sua area, pag. 135 n. 73.

Segmento parabolico: sua area, pag. 134 n. 72.

Segmento sferico: suo volume, pag. 318 n. 157.

Semi-ovali, da pag. 68 a 90 e da n. 25 a 39.

Semi-ovali cogli archi della medesima ampiezza, tendenti a confondersi colla mezza ellisse avente i semi-assi eguali alla semi-corda ed alla monta della semi-ovale a descriversi, pag. 76 n. 52, pag. 79 n. 53.

Semi-ovali a tre centri coi loro tre archi della stessa ampiezza, pag. 80 n. 34.

Semi-ovali cogli archi della stessa ampiezza e coi raggi crescenti in progressione aritmetica, pag. 84 n. 37, pag. 85 n. 38.

Semi-ovali cogli archi presso a poco della medesima lunghezza, pag. 88 n. 59.

Semi-ovali: loro area, pag. 134 n. 71.

Settore circolare: sua area, pag. 131 n. 70.

Settore sferico: suo volume, pag. 318 n. 157.

Sfera: sua superficie, pag. 192 n. 94; suo volume, pag. 317 n. 157.

Spianamenti, da pag. 362 a 384 e da n. 203 a 213.

Spicchii cilindrici: loro volume, pag. 309 n. 152.

Spicchio cilindrico incompleto: suo volume, pag. 313 n. 153.

Spicchio sferico: suo volume, pag. 317 n. 157.

Sterri ed interri: loro volumi, da pag. 362 a 400 e da n. 202 a 219.

Sterri ed interri per spianamenti di terreni, pag. 385 n. 213.

Sterri ed interri per strade, canali, argini e simili, col metodo delle sezioni ragguagliate, pag. 395 n. 218.

Sterri ed interri per strade, canali, argini e simili, scomponendoli in prismoidi, pag. 397 n. 219.

Superficie piane, da pag. 119 a 162 e da n. 62 a 86.

Superficie curve, da pag. 162 a 291 e da n. 87 a 137.

Superficie di rivoluzione, pag. 214 n. 97 e pag. 216 n. 98.

Superficie qualunque, pag. 222 n. 100.

Superficie di progetto in un caso particolare di operazioni per spianamenti, pag. 374 n. 210.

Sviluppo delle risvolte circolari, pag. 57 n. 20.

Sviluppo delle risvolte paraboliche, pag. 62 n. 21.

Sviluppo di curve qualunque con metodi d'approssimazione, pag. 62 n. 21.

Sviluppo delle curve direttrici circolari, pag. 65 n. 24.

Sviluppo degli archi diversi componenti una semi-ovale e lunghezza della curva intiera, pag. 74 n. 30.

Sviluppo di una semi-ovale a tre centri coi suoi tre archi della medesima ampiezza, pag. 83 n. 36.

Sviluppo di una semi-ellisse, pag. 91 n. 41, pag. 96 n. 42.

Sviluppo di un arco d'elica, pag. 99 n. 44.

T

Tracciamento di allineamenti e misura di distanze, da pag. 7 a 35 e da n. 1 a 9.

Tracciamento di una linea poligonale sul terreno, pag. 23 n. 8.

Tracciamento di una galleria in direzione rettilinea, pag. 28 n. 9.

Tracciamento di linee curve sul terreno e misura del loro sviluppo, da pag. 34 a 65 e da n. 10 a 21.

Tracciamento delle risvolte circolari col metodo delle perpendicolari alla tangente, pag. 40 n. 15.

Tracciamento delle risvolte circolari col metodo delle seganti, pag. 44 n. 16.

Tracciamento delle risvolte circolari in galleria, pag. 49 n. 17.

Tracciamento e misura dello sviluppo delle curve direttrici, da pag. 64 a 100 e da n. 22 a 45.

Tracciamento dell'ellisse, pag. 90 n. 40.

Tracciamento dell'elica, pag. 98 n. 43.

Tracciamento di due rette passanti per due punti dati ed aventi pendenza e contropendenza eguali, pag. 103 n. 50.

Tracciamento della linea di progetto su un profilo longitudinale, pag. 104 n. 51.

Tracciamento della linea di progetto sui profili trasversali, pag. 109 n. 55.

Travi: loro volume, pag. 500 n. 145.

Triangolo: sua area, pag. 120 n. 63.

Triangolo sferico: sua superficie, pag. 194 n. 94.

Tronco di prisma: suo volume, pag. 293 n. 140.

Troppo di piramide a basi parallele: suo volume, pag. 296 n. 142.

U

Unghia cilindrica: sua superficie, pag. 182 n. 91.

Unghie coniche: loro superficie, pag. 192 n. 95; loro volume, pag. 317 n. 156.

Unghie sferiche: loro superficie, pag. 194 n. 95.

V

Vani praticati nei muri: loro volume, pag. 306 n. 149.

Vertice dell'angolo di due direzioni che vengono ad intersecarsi in un sito inaccessibile ed invisibile, pag. 21 n. 7.

Voltate e deviazione dei lati di una linea poligonale rilevata per camminamento, pag. 7 n. 2.

Vòlte: loro superficie, da pag. 222 a 291 e da n. 101 a 237.

Vòlte: loro volume, da pag. 327 a 362 e da n. 164 a 201.

Vòlte a botte: loro superficie, pag. 222 n. 101; loro volume, pag. 327 n. 164.

Vòlte a collo d'oca: loro superficie, pag. 225 n. 102; loro volume, pag. 328 n. 165.

Vòlte anulari: loro superficie, pag. 225 n. 103; loro volume, pag. 328 n. 166.

Vòlte elicoidali: loro superficie, pag. 226 n. 104; loro volume, pag. 329 n. 167.

Vòlte anulari ed elicoidali: loro superficie, pag. 228 n. 105; loro volume, pag. 330 n. 168.

Vòlte coniche: loro superficie, pag. 229 n. 106; loro volume, pag. 331 n. 169.

Vòlte conoidiche: loro superficie, pag. 231 n. 107; loro volume, pag. 331 n. 170.

Vòlte con strombature: loro superficie, pag. 232 n. 108; loro volume, pag. 333 n. 171.

Vòlte a bacino su pianta circolare: loro superficie, pag. 234 n. 109; loro volume, pag. 334 n. 172.

Vòlte a bacino su pianta ellittica e su pianta ovale: loro superficie, pag. 237 n. 110; loro volume, pag. 335 n. 173.

Vòlte a conca: loro superficie, pag. 238 n. 111; loro volume, pag. 335 n. 174.

Vòlte a vela sferiche: loro superficie, pag. 241 n. 112; loro volume, pag. 337 n. 175.

Vòlte a vela, sferiche, su pianta regolare: loro superficie, pag. 241 n. 113; loro volume, pag. 337 n. 176.

Vòlte a vela, sferiche, su pianta rettangolare: loro superficie, pag. 242 n. 114; loro volume, pag. 338 n. 177.

Vòlte a vela, sferiche, su pianta rettangolare coll'intrados generato da un arco di circolo di forma variabile: loro superficie, pag. 343 n. 115; loro volume, pag. 339 n. 178.

Vòlte a padiglione: loro superficie, pag. 245 n. 116; loro volume, pag. 339 n. 179.

Vòlte a padiglione su pianta regolare: loro superficie, pag. 245 n. 117; loro volume, pag. 340 n. 180.

Vòlte a padiglione su pianta rettangolare: loro superficie, pag. 248 n. 118; loro volume, pag. 341 n. 181.

Vòlte a botte con teste di padiglione: loro superficie, pag. 255 n. 119; loro volume, pag. 341 n. 182.

Vòlte a botte con teste di padiglione su pianta rettangolare: loro superficie, pag. 257 n. 120; loro volume, pag. 342 n. 183.

Vòlte a schifo: loro superficie, pag. 258 n. 121; loro volume, pag. 342 n. 184.

Vòlte a schifo su pianta rettangolare: loro superficie, pag. 260 n. 122; loro volume, pag. 343 n. 185.

Vòlte a padiglione sopra schifo: loro superficie, pag. 261 n. 123; loro volume, pag. 343 n. 186.

Vòlte a crociera con unghie cilindriche: loro superficie, pag. 261 n. 124; loro volume, pag. 343 n. 187.

Vòlte a crociera su pianta regolare e con unghie cilindriche: loro superficie, pag. 262 n. 125; loro volume, pag. 344 n. 188.

Vòlte a crociera su pianta rettangolare e con unghie cilindriche: loro superficie, pag. 265 n. 126; loro volume, pag. 344 n. 189.

Vòlte a crociera con unghie cilindroidiche: loro superficie, pag. 271 n. 127; loro volume, pag. 345 n. 190.

Vòlte a crociera su pianta regolare con unghie cilindroidiche: loro superficie, pag. 274 n. 128; loro volume, pag. 349 n. 191.

Vòlte a crociera su pianta rettangolare con unghie cilindroidiche: loro superficie, pag. 275 n. 129; loro volume, pag. 349 n. 192.

Vòlte a crociera con unghie, dette sferiche, generate da un arco circolare di forma variabile: loro superficie, pag. 276 n. 130; loro volume, pag. 350 n. 193.

Vòlta a crociera con unghie, dette sferiche, generate da un arco circolare di raggio costante: loro superficie, pag. 277 n. 151; loro volume, pag. 351 n. 194.

Vòlta a crociera con unghie, dette sferiche, su pianta regolare: loro superficie, pag. 284 n. 152; loro volume, pag. 354 n. 195.

Vòlta a crociera con unghie, dette sferiche, su pianta rettangolare: loro superficie, pag. 284 n. 153; loro volume, pag. 355 n. 196.

Vòlta lunulate: loro superficie, pag. 286 n. 154; loro volume, pag. 356 n. 197.

Vòlta a fascioni: loro superficie, pag. 288 n. 155; loro volume, pag. 356 n. 198.

Vòlta a cupola composta: loro superficie, pag. 289 n. 156; loro volume, pag. 357 n. 199.

Voltimetria: superficie delle vòlta, da pag. 222 a 291 e da n. 101 a 137; vo-

lumi delle vòlta, da pag. 327 a 362 e da n. 164 a 201.

Volume compreso fra la superficie d'intrados e la superficie d'estrados d'una vòlta qualunque, pag. 358 n. 200.

Volumi dei solidi poliedrici, da pag. 292 a 307 e da n. 158 a 149.

Volumi dei cumuli di ghiaie e di sabbie, pag. 297 n. 144.

Volumi dei solidi terminati da superficie curve, da pag. 307 a 361 e da n. 150 a 201.

Volumi dei solidi di rivoluzione, pag. 321 n. 160, pag. 323 n. 161.

Volumi terminati da superficie qualunque, pag. 325 n. 163.

Z

Zone piane comprese fra due linee parallele: loro area, pag. 142 n. 76.

Zone sferiche; loro superficie, pag. 193 n. 94.

ERRATA-CORRIGE

Pagina	linea	invece di	leggasi
12	16	$y_{n-2} = y_{n-3} + a_{n-2} \cos(a_{n-2} a_1)$	$y_{n-2} = y_{n-3} + a_{n-2} \sin(a_{n-2} a_1)$
ivi	18	$y_{n-1} = y_{n-2} + a_{n-2} \cos(a_{n-2} a_1)$	$y_{n-1} = y_{n-2} + a_{n-2} \sin(a_{n-2} a_1)$
ivi	20	$y_n = y_{n-1} + a_{n-1} \cos(a_{n-1} a_1)$	$y_n = y_{n-1} + a_{n-1} \sin(a_{n-1} a_1)$
13	30	AX'	A ₁ X'
ivi	31	AX	A ₁ X
21	8	Z	Y
25	18	α_1	α'
ivi	30	α_1	α'
38	25	della direzione	delle direzioni
43	36	Dividendo GA, GC, HC ed HB per metà nei punti I, K, L ed M,	Calcolando la tangente dell'angolo $\frac{1}{8} \text{AOB}$, data da $r \tan \frac{1}{8} \beta$ e portandola in $\overline{AI}, \overline{CK}, \overline{BM}$, e CL,
47	21	Per continuare il tracciamento, si fa	Per continuare il tracciamento nell'ipotesi che d sia piccola in confronto di R, si fa
68	16	successivi devono	successivi ed il loro punto di contatto devono
95	8	θ	Δ
119	10	3° dedurre dai numeri	3° dedurre dalle lunghezze
129	ultima	Resistenza dei materiali,	Geometria pratica,
178	17	$\frac{m}{c^2}$	$\frac{m^2}{c^2}$
184	14 e 16	l	\log
186	6	$(\text{tang} - \varepsilon)$	$(\text{tang} = \varepsilon)$
188	6	$\overline{CD'}$	$\overline{C'D'}$
219	15	p_2	p
297	22	i cumuli	in cumuli
313	23	di rettangolo	il rettangolo
323	15	dai trapezii	dei trapezii
326	25	nel fare i volumi di tutti questi tronchi di prisma, e nel sommarli	nel sommare i volumi di tutti questi tronchi di prisma.
361	10	nella sua costruzione	nella loro costruzione
377	19	e per	per
388	17	delle superficie delle due sezioni e si prende la metà per la somma dal risultato	per la somma delle superficie delle due sezioni e si prende la metà del risultato.

GEOMETRIA

PRATICA

APPLICATA ALL'ARTE DEL COSTRUTTORE

LAVORO AD USO

degli Ingegneri, degli Architetti, dei Periti in costruzione
e di quanti si trovano applicati alla direzione ed alla sorveglianza di costruzioni
civili, stradali ed idrauliche

UTILE

agli studenti delle scuole d'applicazione per gl'Ingegneri
e dei corsi tecnici per Periti in costruzione

PER

CURIONI GIOVANNI

Ingegnere, Architetto e Dottore aggregato al Collegio della Facoltà di scienze fisiche e matematiche della R. Università di Torino, Professore di costruzioni civili, stradali ed idrauliche nella R. Scuola d'applicazione per gl'Ingegneri laureati, e Professore di geometria pratica e costruzioni nel R. Istituto industriale e professionale di Torino, Membro ordinario residente della Società Reale d'Agricoltura, industria e commercio, Membro effettivo residente della Società degl'Ingegneri e degl'Industriali di Torino, e Socio onorario dell'Associazione di Conferenze di Matematiche pure ed applicate di Napoli.



TORINO

Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO, Editore
Via Lagrange, 16, piano 1°

1868

GEOMETRIA

PRATICA

APPLICATA ALL'ARTE DEL COSTRUTTORE

LAVORO AD USO

Proprietà letteraria e artistica.
Fatto il deposito alla R. Prefettura di Torino, il 1° settembre 1868,
con riserva della traduzione.

CURIONI GIOVANNI

TORINO

GIUSEPPE AUGUSTO KRIBERIO NEGRO, Editore.

Torino, 1868 — Stamp. dei Compositori-Tipografi A. Oddenino e Comp.
via del Teatro d'Augennes, 16.

INDICE DELLE FIGURE

Tavola I.

- Figure 1 e 2*, per la determinazione delle voltate e delle deviazioni dei lati di una linea poligonale rilevata per camminamento.
- *3 e 4*, per la determinazione delle coordinate dei vertici di una linea poligonale rilevata per camminamento.
- Figura 5*, per la determinazione delle coordinate dei vertici di una rete trigonometrica stabilita fra due punti dati.
- Figure 6 e 7*, pel tracciamento d'un allineamento determinato da due punti molto lontani e tali che da uno di essi non si possa scoprire l'altro, e per la misura della distanza orizzontale degli stessi punti.
- *8 e 9*, per la determinazione dell'angolo di due direzioni intersecantisi in un punto inaccessibile ed invisibile, e per fissare la posizione di questo punto.
- Figura 10*, pel tracciamento di una linea poligonale.

Tavola II.

- Figure 11, 12, 13 e 14*, per la determinazione degli elementi necessari alla costruzione di un arco circolare per punti.
- *15 e 16*, pel tracciamento d'una risvolta circolare passante per un punto preso su una delle direzioni da raccordarsi, e d'una risvolta circolare di raggio dato.
- Figura 17*, pel tracciamento d'una risvolta circolare di piccolo raggio.
- Figure 18 e 19*, pel tracciamento d'una risvolta circolare passante per un punto preso fuori delle direzioni da raccordarsi.
- Figura 20*, pel tracciamento d'una risvolta circolare col metodo delle tangenti.
- Figure 21 e 22*, pel tracciamento d'una risvolta circolare col metodo delle seganti.
- *23 e 24*, pel tracciamento delle risvolte circolari in galleria.

Tavola III.

- Figure 25, 26 e 27*, pel tracciamento delle risvolte paraboliche.
- *28 e 29*, per la determinazione approssimata dello sviluppo di una curva qualunque.
 - *30 e 31*, dirette a far vedere quali sono i calcoli che occorre istituire sulle mezze circonferenze e sugli archi circolari, assunti come curve direttrici.
 - *32 e 33*, sulle quali si fa vedere quali sono i calcoli da instituirsi pel tracciamento delle semi-ovali.
- Figura 34*. — Semi-ovale a sette centri, tracciata coll'uso delle tavole di Michal.
- *35*. — Semi-ovale a tre centri cogli archi della stessa ampiezza.

Tavola IV.

- Figura 36* — Semi-ovale a nove centri, tracciata coll'uso delle tavole di Lerouge.
- 37 — Semi-ovale a cinque centri avente i suoi archi presso a poco della stessa lunghezza, e tracciata coll'uso delle tavole di Michal.
 - 38, per dedurre la formola determinatrice dello sviluppo della mezza ellisse.
- Figure 39 e 40*, relative al tracciamento ed alla determinazione dello sviluppo dell'elica.
- 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47 e 48, per dedurre le formole fondamentali da impiegarsi nella trasformazione dei profili.
- Figura 49*, pel tracciamento di due rette a pendenza e contropendenza eguali, passanti per due punti dati e per un punto da determinarsi su una stabilita orizzontale.

Tavola V.

- Figura 50*, pel tracciamento di due rette a pendenza e contropendenza eguali, passanti per due punti dati e per un punto da determinarsi su un dato profilo.
- 51. — Saggio di profilo longitudinale.
 - 52, sulla quale si fa vedere quali sono le condizioni diverse colle quali si può determinare la linea di progetto su un profilo longitudinale.
- Figure 53 e 54*, dirette a far vedere come si tracciano le linee di progetto sui profili trasversali.

Tavola VI.

- Figure 55 e 56*, relative al tracciamento ed ai calcoli da instituirsi sui profili trasversali.
- 57 e 58, per la determinazione del punto d'incontro di un profilo trasversale colla superficie cilindrica avente per direttrice una data risvolta ed avente le sue generatrici verticali.
- Figura 59*, per far vedere come si determinano più punti posti su una retta di dato pendio.
- Figure 60, 61, 62, 63 e 64*, riferentisi al calcolo delle aree del triangolo, del parallelogramma, del trapezio, del quadrilatero e del poligono regolare.
- Figura 65*, per la determinazione dell'area di un poligono qualunque, pel quale si hanno le coordinate dei vertici, rispetto a due assi ortogonali condotti nel suo piano.
- Figure 66 e 67*, per la determinazione dell'area di un poligono rilevato per irradamento.

Tavola VII.

- Figure 68 e 69*, relative alla determinazione delle aree di due poligoni rilevati per camminamento e per intersezione.
- Figura 70*, per la determinazione dell'area del circolo e delle sue parti.
- 71, per la determinazione dell'area del segmento parabolico.
- Figure 72 e 73*, per la determinazione delle aree dell'ellisse e dei segmenti ellittici.
- 74, 75, 76 77 e 78, per la determinazione delle aree comprese fra rette e curve qualunque.
 - 79 e 80, per la determinazione delle aree di zone comprese fra linee parallele.

Figura 81, per la determinazione delle aree di due appezzamenti, scomponendo il loro piano col metodo della triangolazione.

Tavola VIII.

Figura 82. — Planimetro ortogonale.

Figure 83, 84 e 85, per spiegare la teoria e l'uso del planimetro ortogonale.

Figura 86. — Planimetro polare.

Figure 87, 88 e 89, per spiegare la teoria e l'uso del planimetro polare.

Tavola IX.

Figure 90 e 91. — Superficie cilindriche.

• 92, 93, 94 e 95. — Fusi cilindrici.

Figura 96. — Unghia cilindrica.

Figure 97 e 98. — Superficie coniche.

• 99 e 100. — Unghie coniche.

Tavola X.

Figura 101. — Unghia sferica.

Figure 102, 103 e 104, per dedurre le formole che servono al calcolo delle superficie degli ellissoidi.

• 105, 106, 107 e 108, per dedurre le regole che servono a determinare le superficie di rivoluzione.

Figura 109, per dedurre le formole le quali si prestano alla determinazione di superficie e volumi relativi all'elicoide sghebo a piano direttore.

Figure 110 e 111. — Rappresentazione di vólte a botte.

Figura 112, per far vedere come si può ottenere la superficie d'intrados ed il volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta della vólta a botte coprente un trapezio.

Tavola XI.

Figura 113. — Superficie d'intrados della vólta a collo d'oca.

• 114, per far vedere come si ottiene la superficie d'intrados ed il volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vólta anulare.

Figure 115 e 116. — Rappresentazione di due vólte coniche.

Figura 117. — Rappresentazione di una vólta conoidica.

Figure 118 e 119, per far vedere come si può determinare la superficie d'intrados ed il volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vólta conoidica.

Figura 120, per far vedere come si può ottenere la superficie d'intrados ed il volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vólta con strombature.

Figure 121, 122 e 123. — Rappresentazione delle vólte a bacino.

• 124 e 125, per far vedere come si può ottenere la superficie d'intrados ed il volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una vólta a conca.

Figura 126. — Rappresentazione di una vólta a vela sferica.

Tavola XII.

- Figura 127*, per dedurre come si può ottenere la superficie d'intrados ed il volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una volta a vela sferica su pianta rettangolare.
- 128, per far vedere come si può ottenere la superficie d'intrados ed il volume compreso fra la superficie d'intrados ed il piano d'imposta d'una volta a vela a monta depressa su pianta rettangolare.
- Figure 129 e 130*. — Rappresentazione di due volte a padiglione, una su pianta esagonale e l'altra su pianta rettangolare.
- Figura 131*. — Rappresentazione di una volta a botte con teste di padiglione.
- Figure 132 e 133*. — Rappresentazione di due volte a schifo, una su pianta esagonale e l'altra su pianta rettangolare.
- 134 e 135. — Rappresentazione di due volte a crociera, una su pianta pentagonale e l'altra su pianta rettangolare.
 - 136 e 137, per far vedere come si può determinare la superficie d'un'unghia conoidica.

Tavola XIII.

- Figura 138*. — Rappresentazione d'una volta a crociera su pianta rettangolare con unghie conoidiche.
- 139. — Rappresentazione d'un'unghia detta sferica.
- Figure 140 e 141*. — Per far vedere come si possono determinare le superficie delle unghie, dette sferiche, ed i corrispondenti volumi.
- Figura 142*. — Rappresentazione di una volta a crociera su pianta rettangolare con unghie sferiche.
- 143. — Rappresentazione d'una volta lunulata.
 - 144. — Proiezione orizzontale della superficie d'intrados di una volta a fascioni.
 - 145. — Rappresentazione di una volta a cupola composta.
 - 146. — Prisma obliquo.
- Figure 147 e 148*. — Tronchi di prisma, uno a sezione retta parallelogrammica, e l'altro a sezione retta trapezia.

Tavola XIV.

- Figure 149 e 150*. — Cumuli secondo i quali si dispongono le ghiaie e le sabbie per la loro misura.
- 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157 e 158 rappresentanti altrettanti esempi di muri pieni.
 - 159, 160, 161 e 162, rappresentanti quattro esempi di muri con speroni.
- Figura 163*, rappresentante un primo esempio del complesso di più muri.

Tavola XV.

- Figura 164*, rappresentante un secondo esempio del complesso di più muri.
- Figure 165 e 166*, rappresentanti due esempi di coperture praticate entro muraglie.
- Figura 167*. — Tronco di cilindro.
- 168. — Ottava parte di un'ellissoide a tre assi.

Figura 169, sulla quale vengono instituiti i ragionamenti per trovare i volumi dei solidi di rivoluzione, applicando la regola di Guldino.

- 170, sulla quale vengono instituiti i ragionamenti per la determinazione approssimata dei volumi dei solidi di rivoluzione.
- 171, rappresentante un cono conoidico.
- 172, sulla quale vengono instituiti i ragionamenti che conducono a dedurre la regola mediante la quale si determina il volume compreso fra la superficie d'intrados, la superficie d'estrados ed i pulvinari di una vòlta qualunque.
- 173. — Piano quotato di una porzione di terreno, sul quale vuoi eseguire un'operazione di spianamento.

Tavola XVI.

Figura 174. — Piano di una porzione di terreno, sul quale vuoi eseguire un'operazione di spianamento, colla linea di passaggio e con tutte le quote che servono alla determinazione dei volumi degli sterri e degli interri.

Figure 175, 176, 177 e 178, relative alla determinazione di alcuni elementi della superficie di progetto, indispensabili a conoscersi nelle operazioni di spianamenti.

- 179 e 180, riferentisi alla determinazione dei volumi degli sterri e degli interri col metodo delle sezioni raggugliate.
- 181 e 182, relative alla determinazione dei volumi dei prismoidi che avviene di dover considerare nel calcolo dei volumi degli sterri e degli interri.

Tavola XVII.

Figure 183, 184, 185 e 186, dirette a far vedere come si deve applicare il metodo delle sezioni raggugliate nel calcolo dei volumi degli sterri e degli interri per strade, canali, argini e simili.

- 187, 188, 189 e 190, relative al calcolo dei volumi degli sterri e degli interri per strade, canali, argini e simili, scomponendoli in prismoidi.

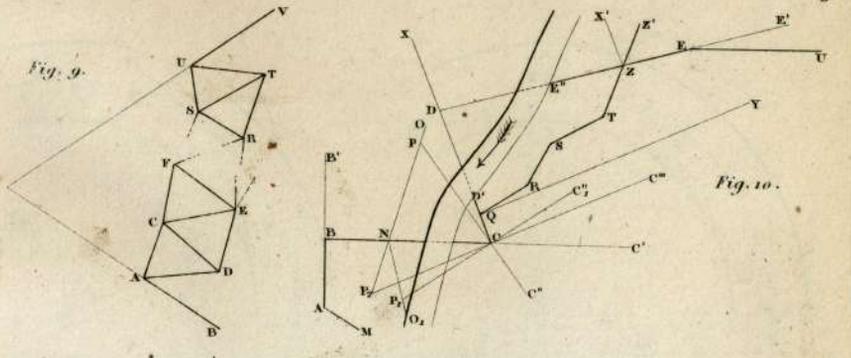
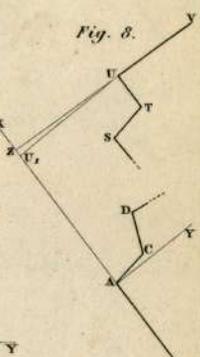
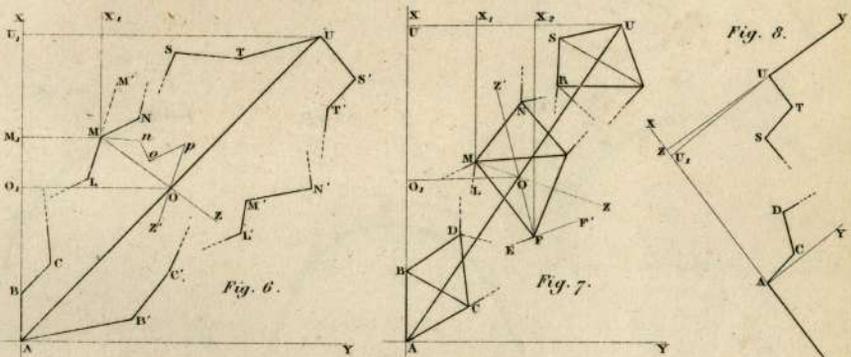
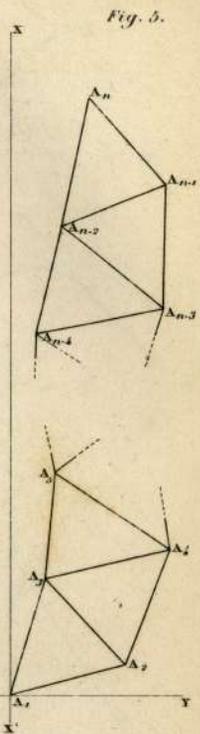
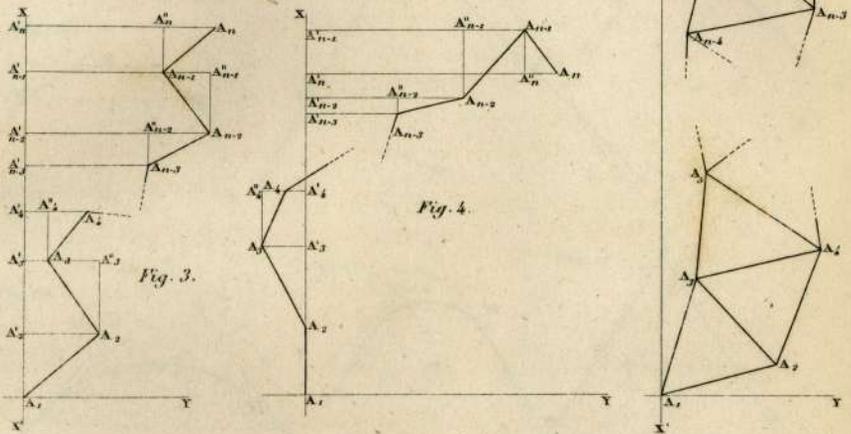
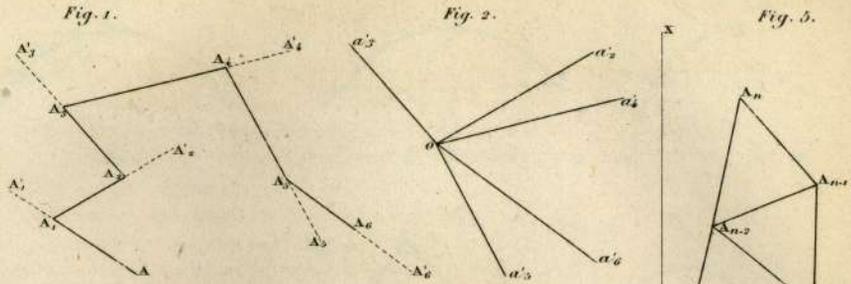


Fig. 11.

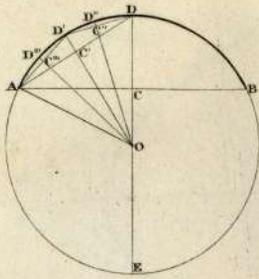


Fig. 12.

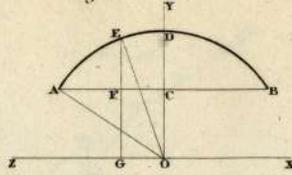


Fig. 13.

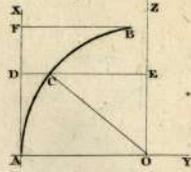


Fig. 14.

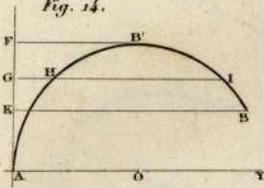


Fig. 15.

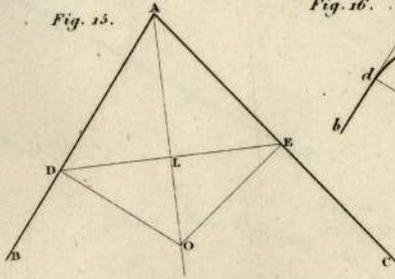


Fig. 16.

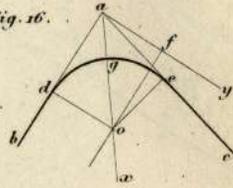


Fig. 17.

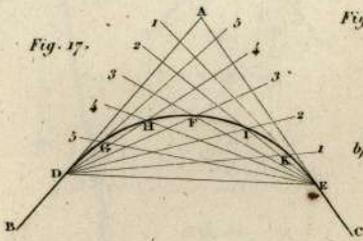


Fig. 19.

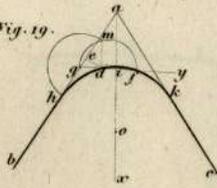


Fig. 18.

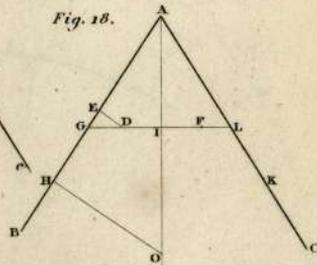


Fig. 20.

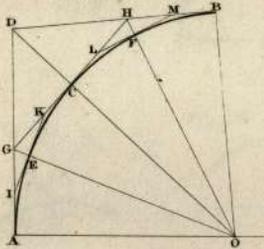


Fig. 22.

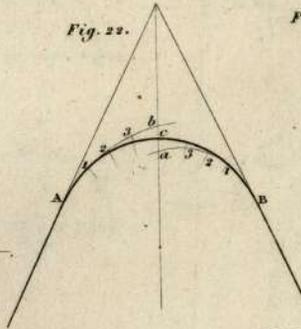


Fig. 21.

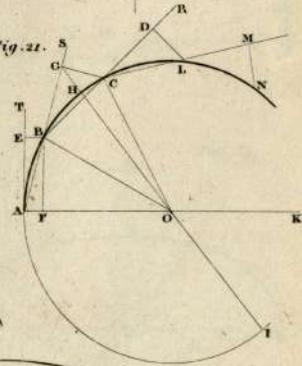


Fig. 23.

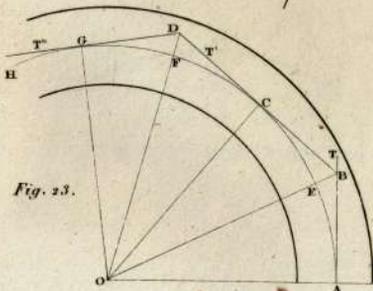
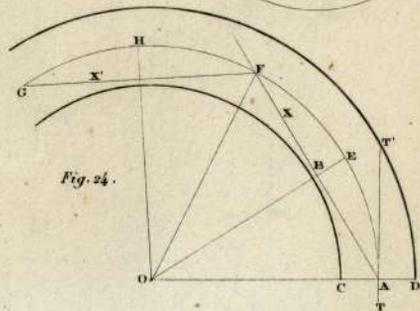


Fig. 24.



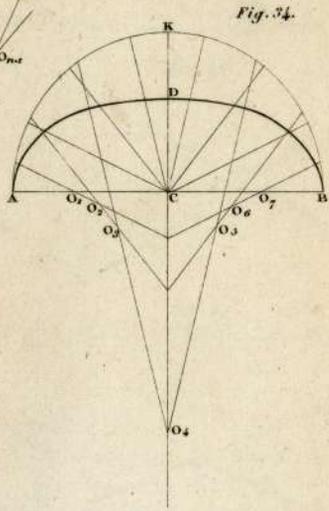
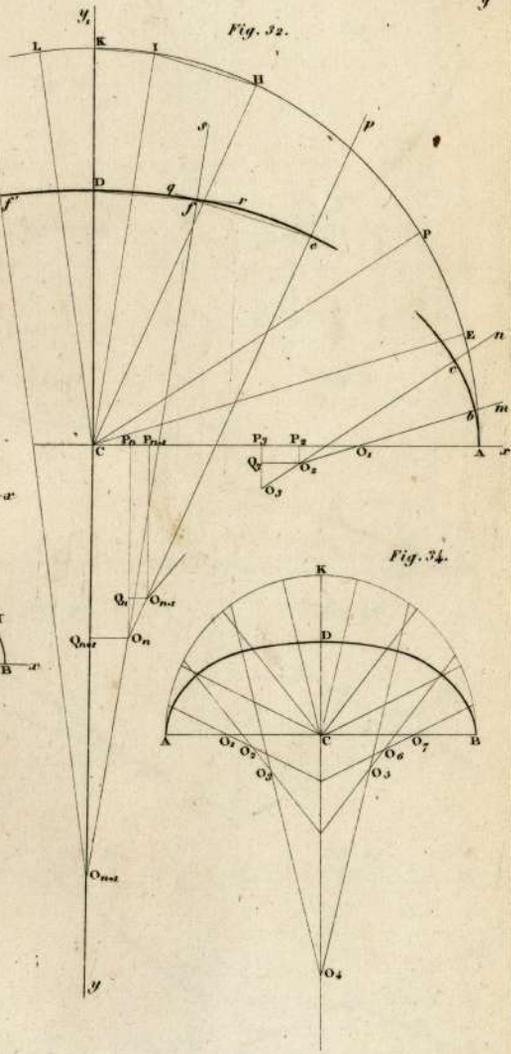
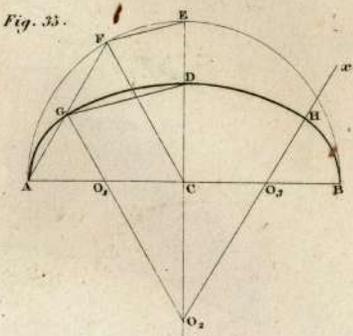
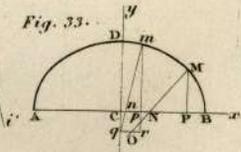
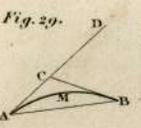
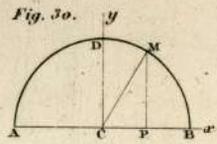
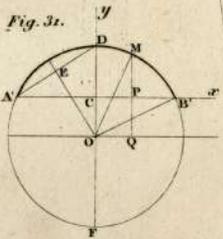
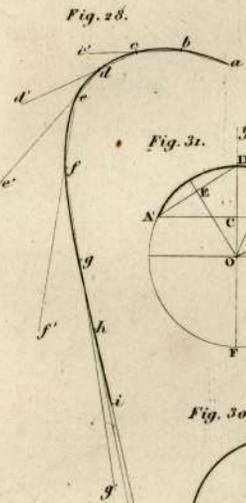
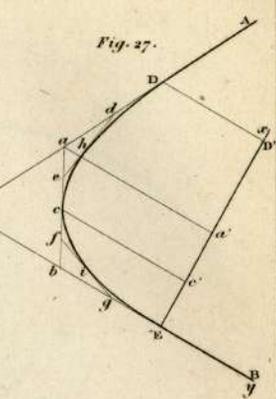
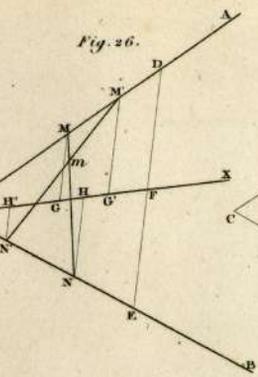
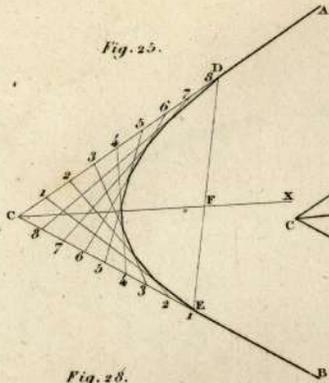


Fig. 36.

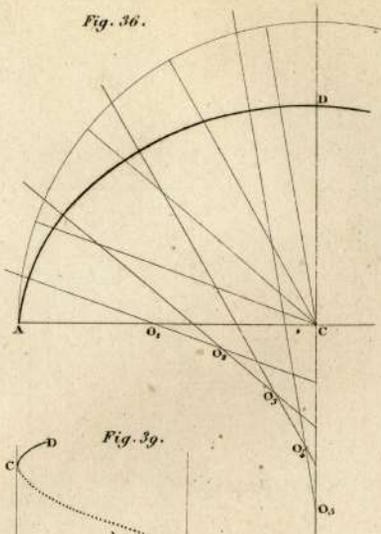


Fig. 37.

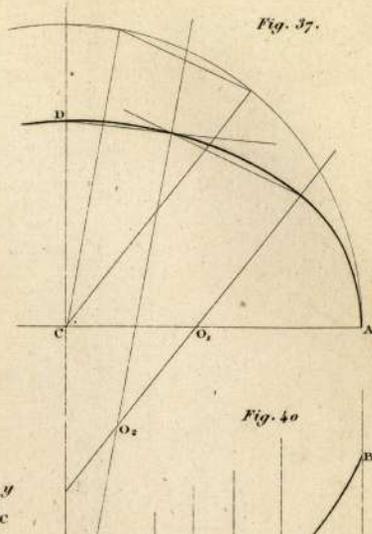


Fig. 39.

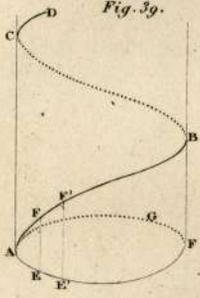


Fig. 38.

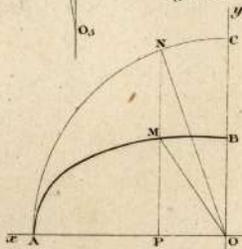


Fig. 40.

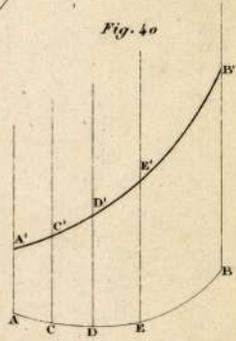


Fig. 41.

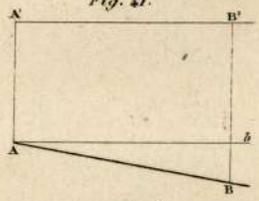


Fig. 42.

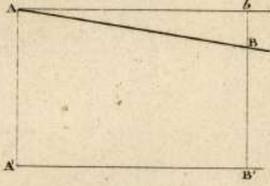


Fig. 43.

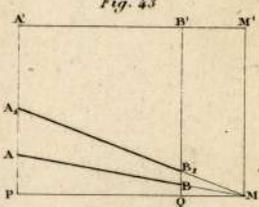


Fig. 44.

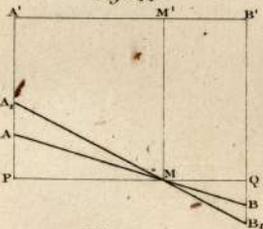


Fig. 45.

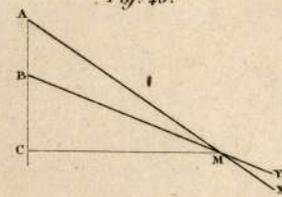


Fig. 46.

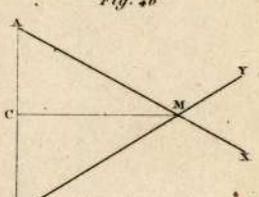


Fig. 47.

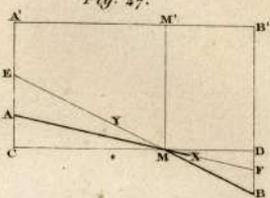


Fig. 48.

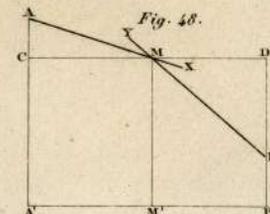


Fig. 49.

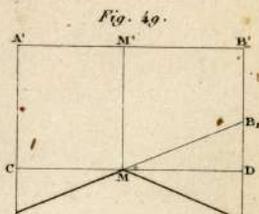


Fig. 55

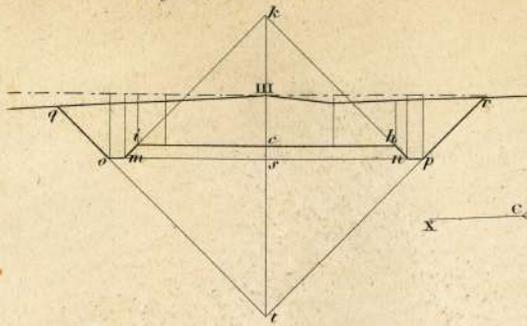


Fig. 57

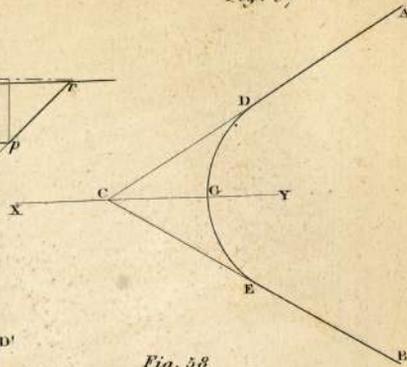


Fig. 59

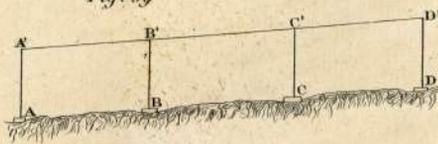


Fig. 58

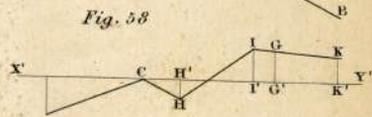
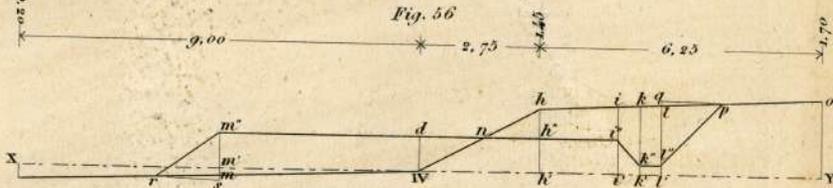


Fig. 56



$\leftarrow 1,36 \leftarrow 0,68 \leftarrow 4,50 \leftarrow 0,78 \leftarrow 1,46 \leftarrow 1,29 \leftarrow 1,75 \leftarrow 0,40 \leftarrow 0,57 \leftarrow 0,57 \leftarrow 0,57 \leftarrow 1,33 \rightarrow$

Fig. 60

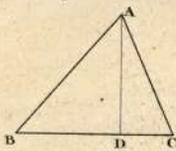


Fig. 61

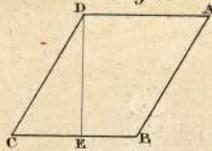


Fig. 62

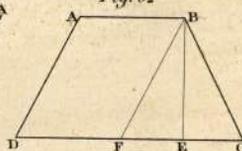


Fig. 63

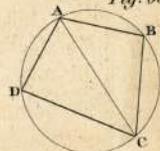


Fig. 64

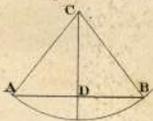


Fig. 65

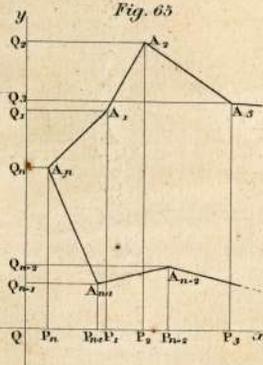


Fig. 66

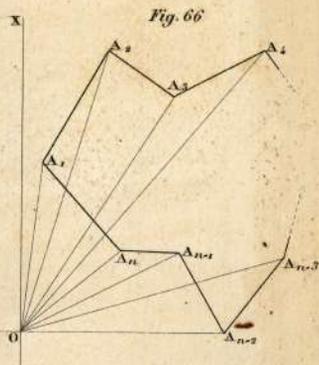
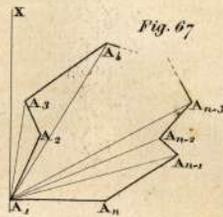
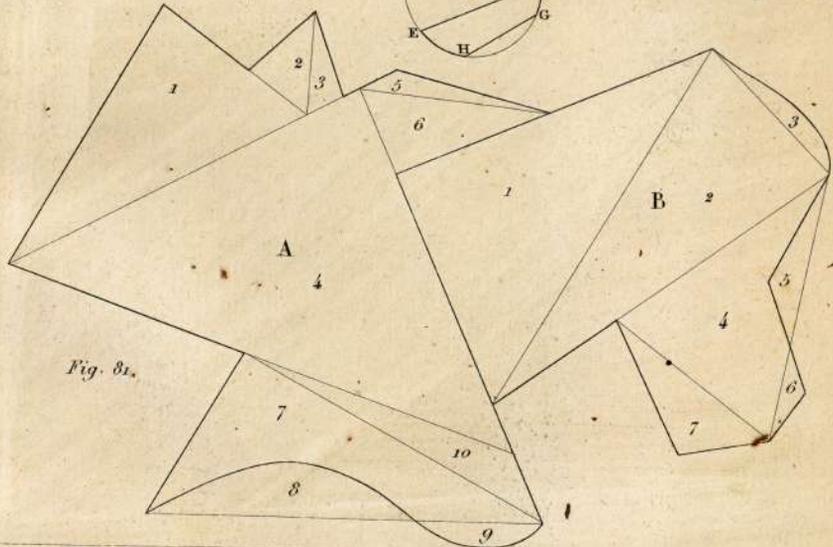
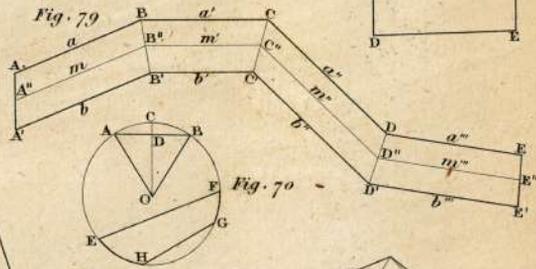
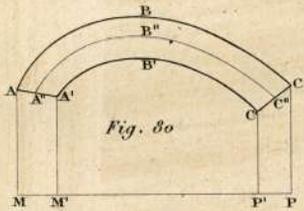
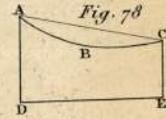
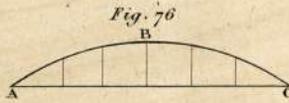
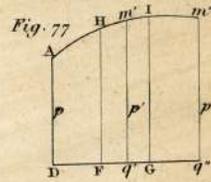
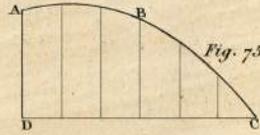
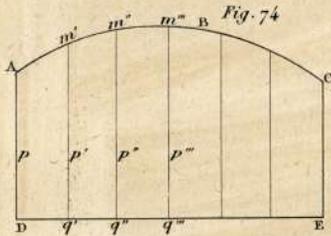
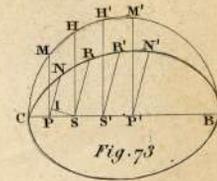
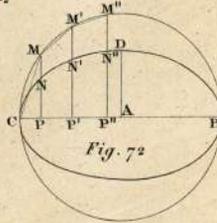
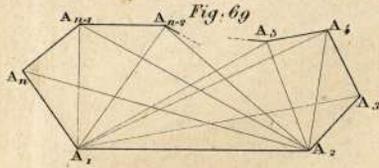
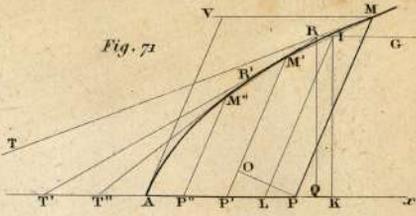
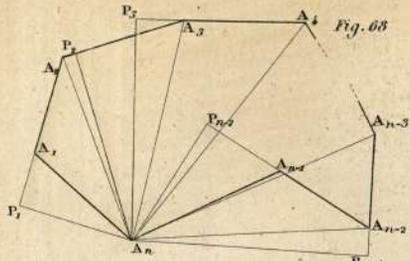


Fig. 67





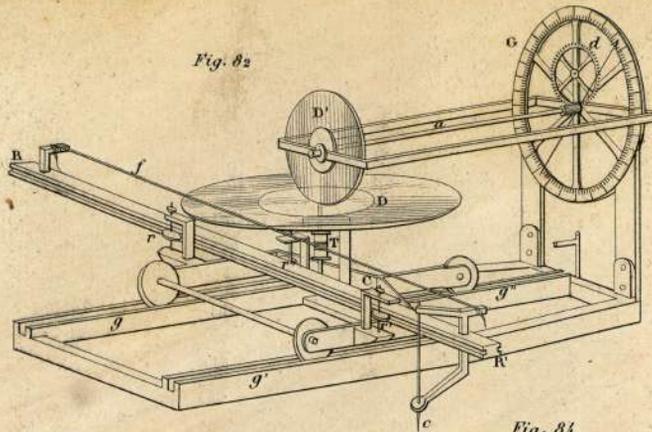


Fig. 82

Fig. 85

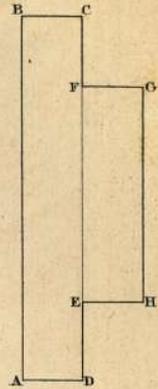


Fig. 83

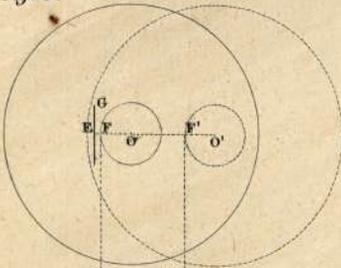


Fig. 84

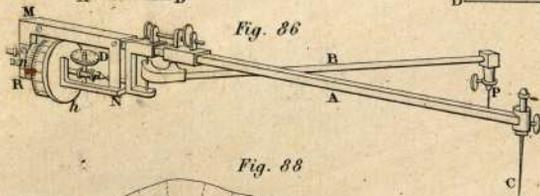
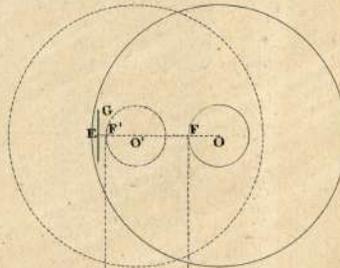


Fig. 86

Fig. 87

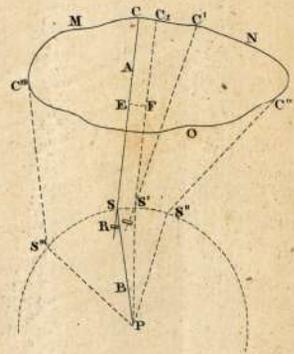


Fig. 88

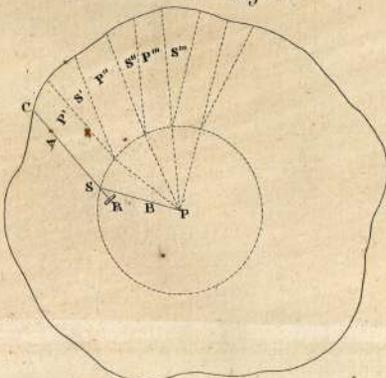


Fig. 89

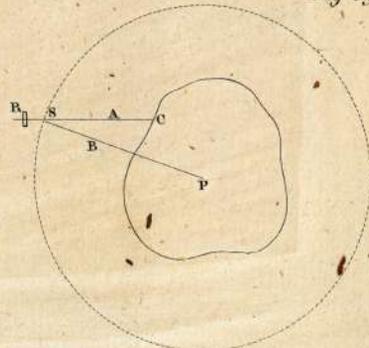


Fig. 90.

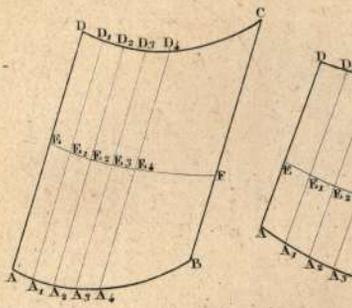


Fig. 91.

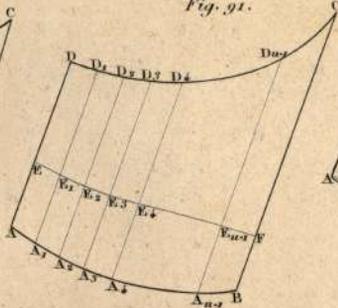


Fig. 92.

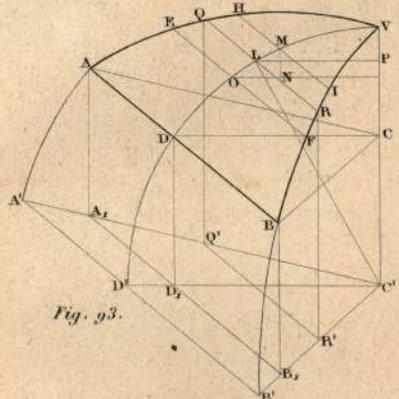
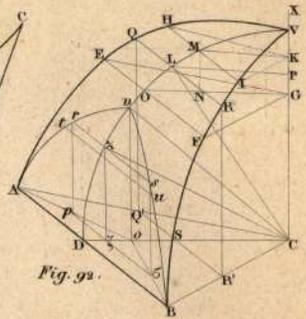


Fig. 93.

Fig. 100.

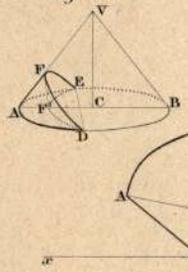


Fig. 94.

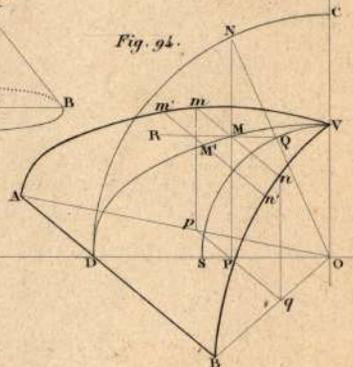


Fig. 95.

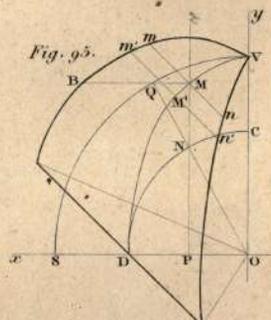


Fig. 96.

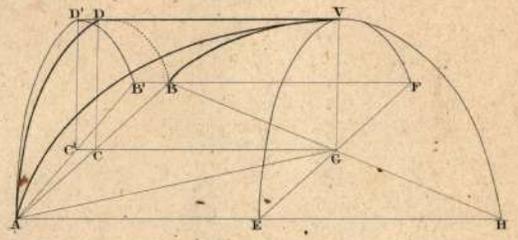


Fig. 98.

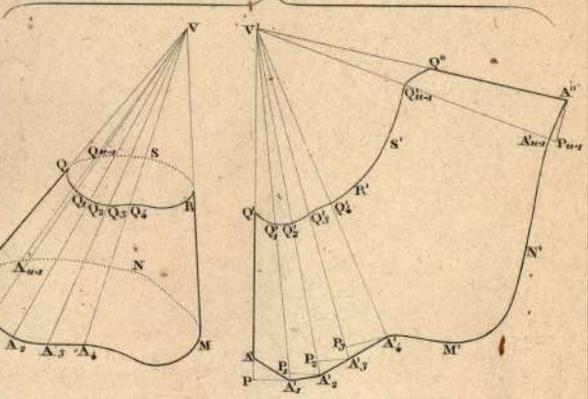


Fig. 97.

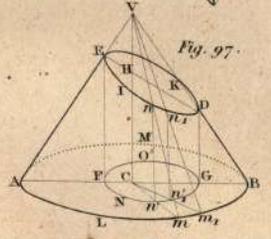


Fig. 99.

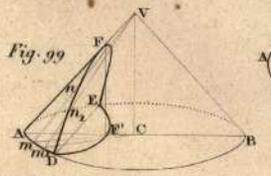


Fig. 101.

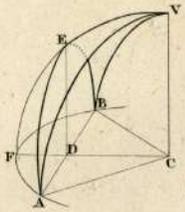


Fig. 102.

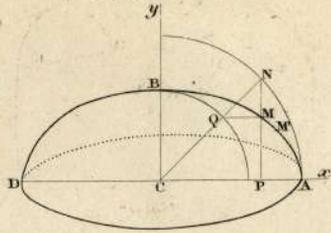


Fig. 103.

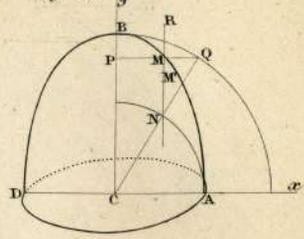


Fig. 104.

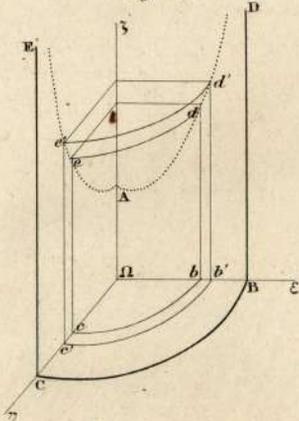


Fig. 105.

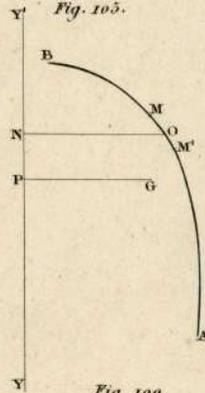


Fig. 107.

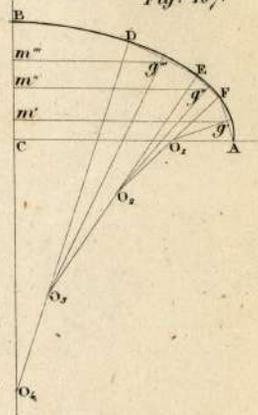


Fig. 108.

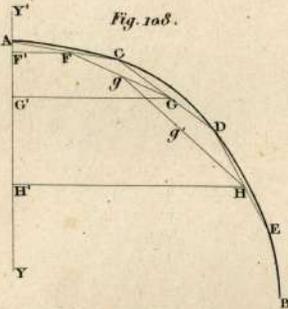


Fig. 109.

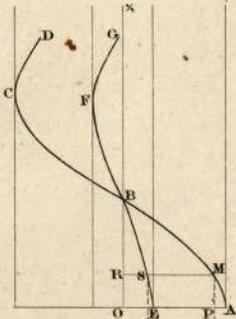


Fig. 106.

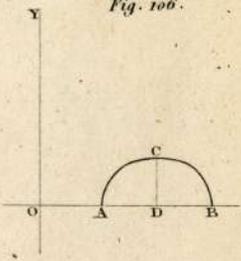


Fig. 112.

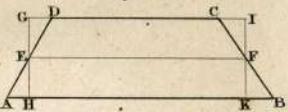


Fig. no.

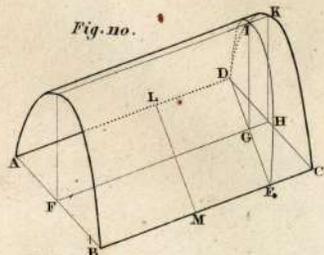


Fig. m.

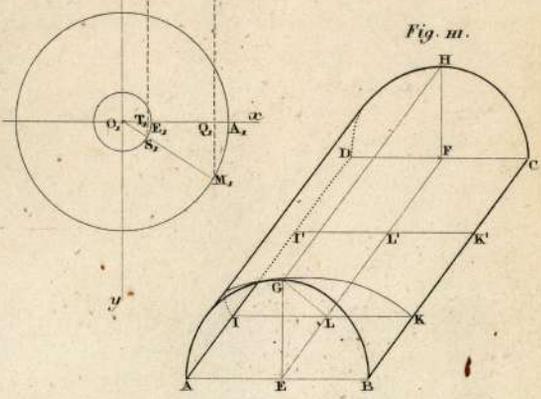


Fig. 127.

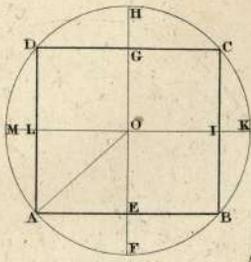


Fig. 128.

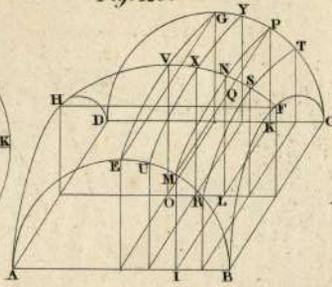


Fig. 129.

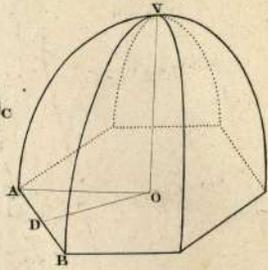


Fig. 130.

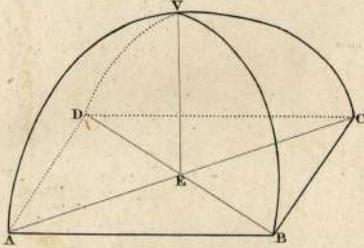


Fig. 132.

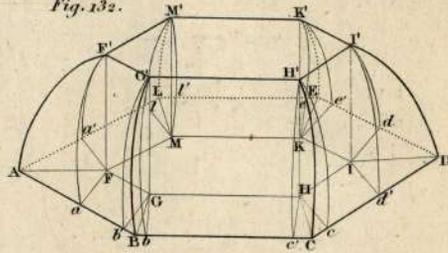


Fig. 131.

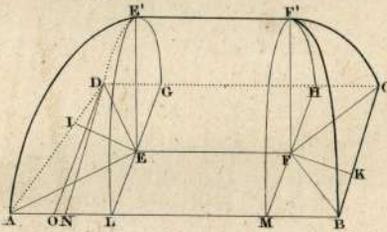


Fig. 133.

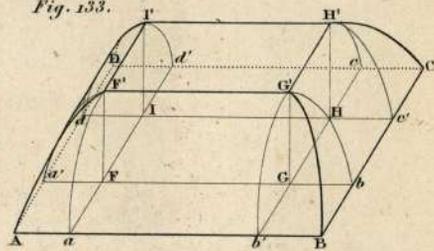


Fig. 134.

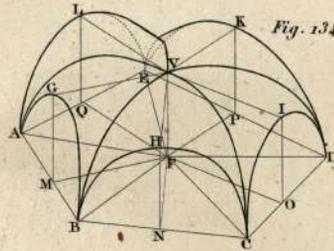


Fig. 136.

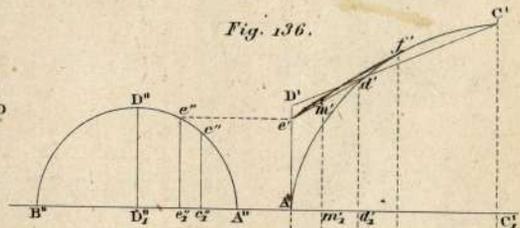


Fig. 135.

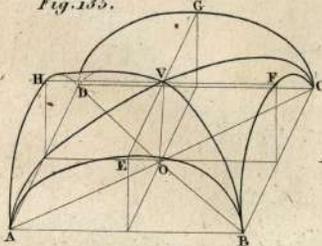
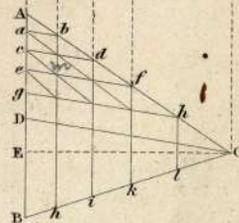
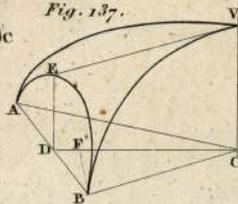


Fig. 137.



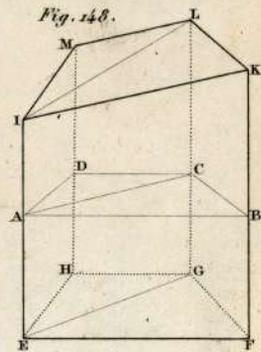
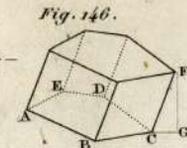
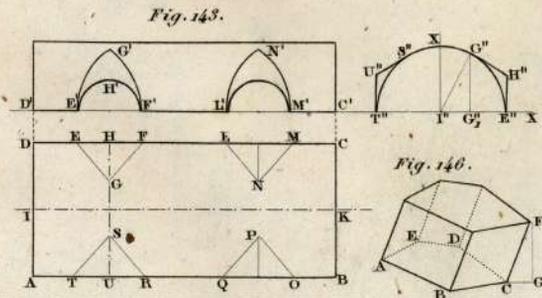
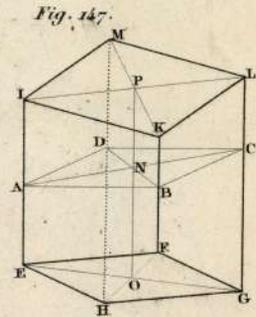
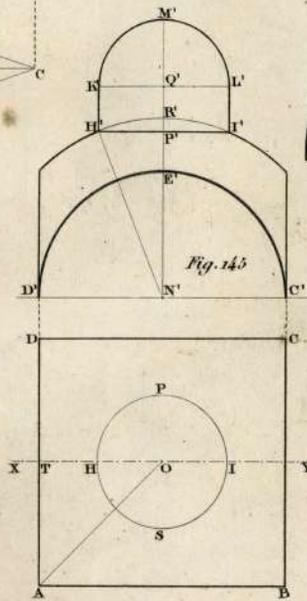
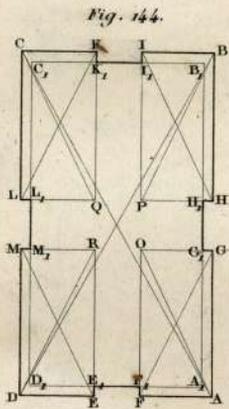
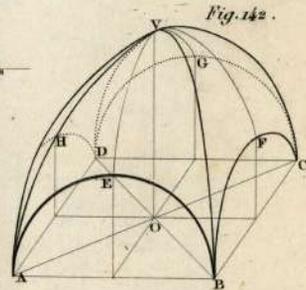
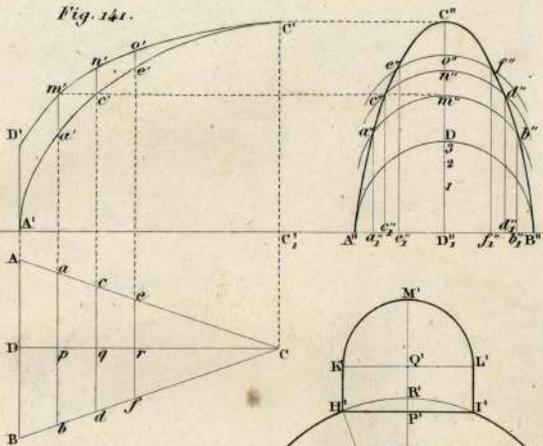
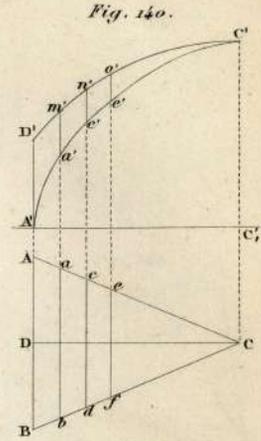
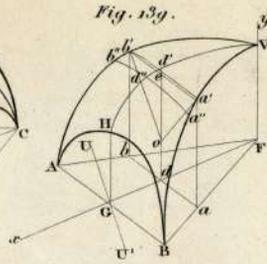
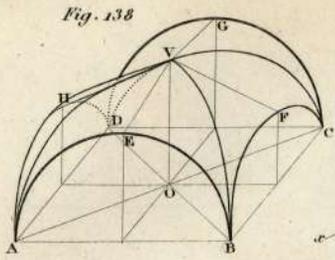


Fig. 149.

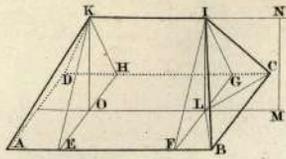


Fig. 150.

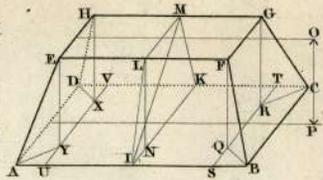


Fig. 151.

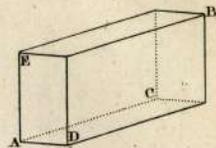


Fig. 152.

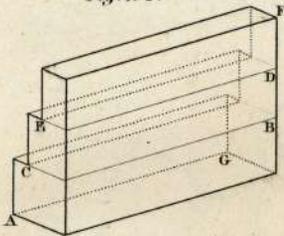


Fig. 153.

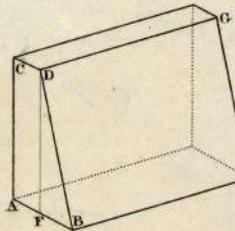


Fig. 154.

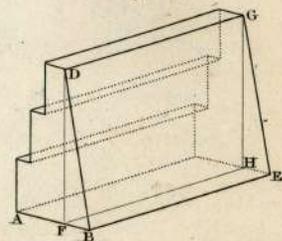


Fig. 155.

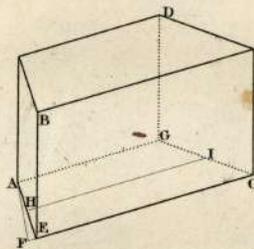


Fig. 156.

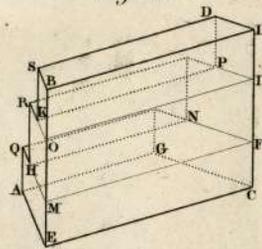


Fig. 157.

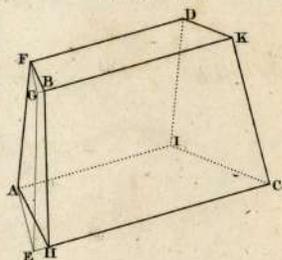


Fig. 158.

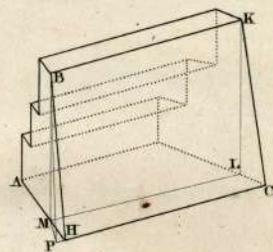


Fig. 159.

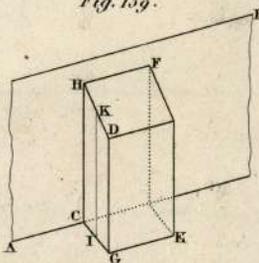


Fig. 160.

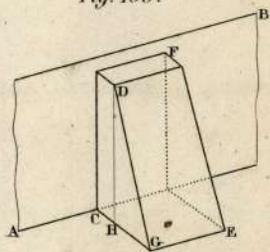


Fig. 161.

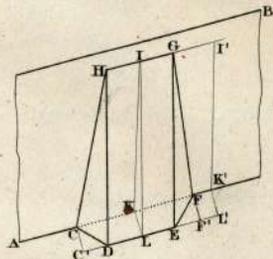


Fig. 162.

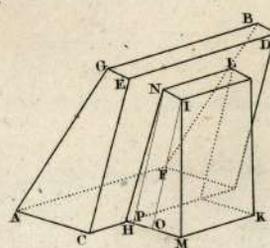


Fig. 163.

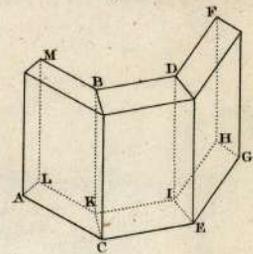


Fig. 164.

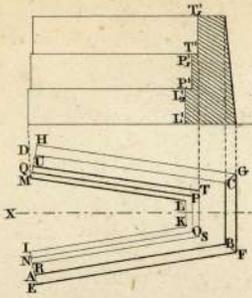


Fig. 165.

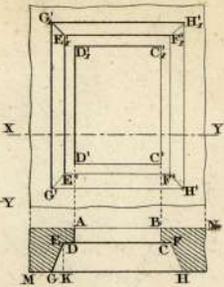


Fig. 166.

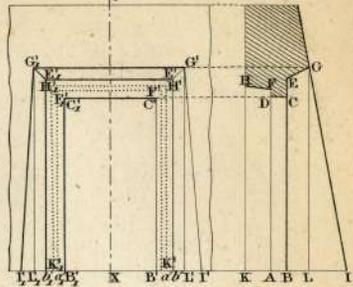


Fig. 168

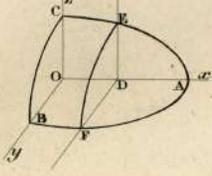


Fig. 169

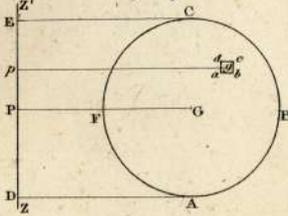


Fig. 170

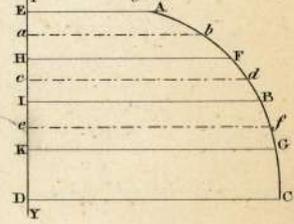


Fig. 167.

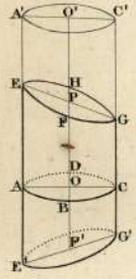


Fig. 171.

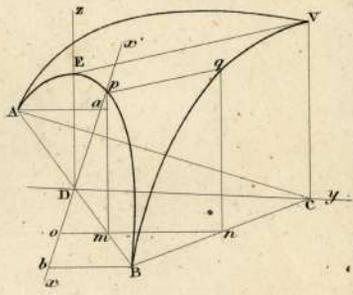


Fig. 172.

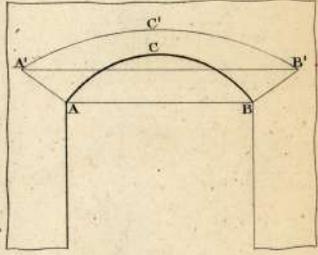


Fig. 173.

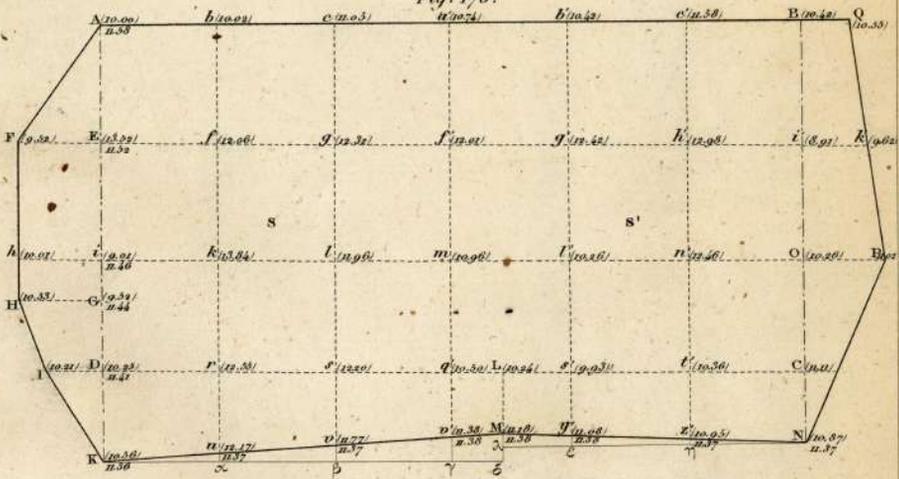


Fig. 183.

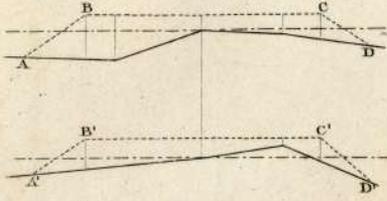


Fig. 184.

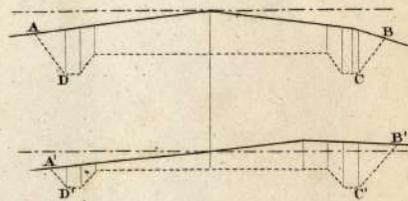


Fig. 185.

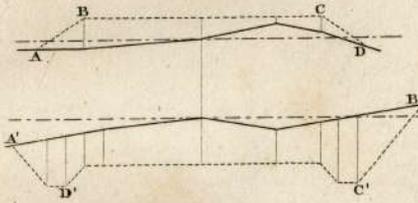


Fig. 186.

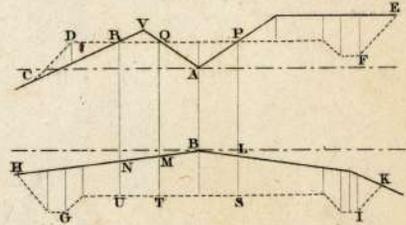


Fig. 187.

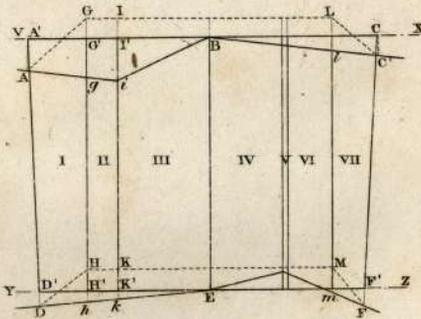


Fig. 188.

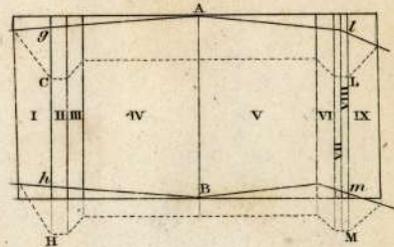


Fig. 189.

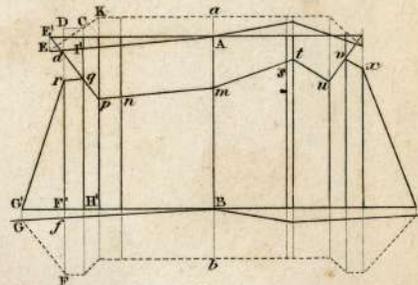


Fig. 190.

