PROGETTO
DI UN MURO DI SOSTEGNO
CON ARCHI DI SCARICO

DETERMINAZIONE GRAFICA della SPINTA DELLE TERRE

DISSERTAZIONE

PRESENTATA

ALLA COMMISSIONE ESAMINATRICE

della R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri in Torino

DA

PASTERIS GIOVANNI

DI CIGLIANO

PER OTTENERE IL DIPLOMA DI LAUREA

DI

INGEGNERE CIVILE

DICEMBRE 1873

TORINO

Tip. Fodratti, via Gaudenzio Ferrari, 3.

A MIA MADRE

DEDICO QUESTO LAVORO

TROPPO DEBOLE OMAGGIO

A TANTA VIRTÙ E A TANTO AMORE

ALL'OTTIMO MIO FRATELLO

A MIO ZIO

CAV. ING. PASTERIS GIUSEPPE

IN SEGNO D'AFFETTO E DI RICONOSCENZA

TEMA DI COSTRUZIONE.

Una via ferrata ad un solo binario, colla larghezza di metri 3,50 alla superficie superiore del ballast, e colla pendenza del 6 per 1000, corre per una lunghezza di 640 metri a fianco di un colle di terra argillosa. A questa terra corrisponde la scarpa di 3 e $1/_2$ di base per uno di altezza, e, per difendere la strada dagli scoscendimenti, si vuol costrurre un muro di sostegno con archi di scarico, colla faccia esterna, presentante la scarpa di $1/_8$, ed avente l'altezza massima di 15 metri. Il terreno atto a buone fondazioni trovasi di metri 5,50 sotto il livello del suolo stradale. Si domanda il progetto del muro. (*Prof.* Curioni)

Dall'enunciato del tema sovraesposto scorgesi come la questione sia tutta rivolta alla ricerca della spinta che può produrre un prisma determinato di terra, e della corrispondente muratura capace di sostenerla. Ma nell'enunciato non sono esposte tutte quelle condizioni necessarie alla determinazione del prisma di terra producente la spinta, onde queste converrà fissarci prima di intraprendere la trattazione del tema.

Il tipo del muro di sostegno da applicarsi in questo caso, come viene proposto, si compone di un muro continuo avente scarpa esterna, e appoggiato alla costa, di cui si teme lo scoscendimento, con una faccia verticale. Da tale faccia si dipartono e s'internano nella costa altre porzioni di muratura in senso normale alla faccia stessa, poste a certe determinate e convenienti distanze, e di lunghezza pure determinata, che si chiamano speroni o contrafforti interni. Fra due di questi contrafforti successivi si collocano degli archi o volti cilindrici, detti archi di scarico. Questi volti hanno per ufficio di sostenere la terra che sovra essi si pone sino a raggiungere il profilo superiore del terreno, la quale agendo col proprio peso come parte integrante del muro di sostegno, ne accresce il peso, allontana il suo centro di gravità dallo spigolo esterno della base, e rende quindi meno dispendiosa la costruzione di queste opere di difesa. Ma acciocchè un tale vantaggio sia reale, è necessario che il muro continuo sia ben collegato cogli archi di scarico e cogli speroni interni in modo da formare un sol tutto con questi; quindi è, che più archi di scarico dovranno sovrapporsi l'uno all'altro fra due contrafforti successivi, e collocarsi a tale distanza da non permettere qualsiasi degradamento nel muro continuo. Sui particolari di questo sistema di muro di sostegno ritornerò quando avrò da calcolarne le dimensioni; per ora basta aver accennato a queste poche nozioni, ed avvertire che il muro continuo si ritiene nel calcolarlo come funzione della sola altezza e si ottiene con regole pratiche, mentre la lunghezza degli speroni, e per conseguenza anche degli archi, si deduce direttamente col calcolo. — Ciò premesso, si conoscerà sin da principio secondo qual piano si disporrà la faccia verticale o interna del muro continuo; secondo questo piano suppongo fatta una sezione nel colle, e di averne ottenuto il profilo che è rappresentato nella *fig.* 1; in essa AB e BC sono le linee che danno il profilo longitudinale del terreno; AC è la traccia del piano che è fondo del canale di scolo delle acque, e che presenta la pendenza del 6 per 1000 da C verso A, pendenza eguale a quella che ha la via ferrata alla superficie superiore del ballast. Abbassando da B, punto culminante del profilo longitudinale, una verticale sino in D, ove incontra la AC, sarà $BD = 15$ m.; e suppongo che D divida la AC per metà, onde si avrà $AD = DC = 320$ m.; AE orizzontale condotta per A; FG parallela ad AC e rappresentante la traccia del piano ove comincia il terreno atto a buone fondazioni, onde sarà $AF = CG =$ m. 5,50. In un caso pratico tale profilo si otterrebbe bentosto, avendo già rilevato il terreno per un certo tratto a destra ed a sinistra dell'asse della strada.

Per fare il progetto del muro di sostegno richiesto, sarà sufficiente che si prendano a considerare alcune sezioni in diversi punti di quel profilo, e che si calcolino le dimensioni che dovrà avere il muro in quei punti; fra una sezione e l'altra poi il muro andrà cangiando dimensioni in larghezza per proporzionati risalti, che si faranno corrispondere ai successivi contrafforti. Siccome inoltre si è supposto che il profilo sia simmetrico rispetto alla BD, di necessità saranno eguali le dimensioni del muro nei punti corrispondenti, o d'eguale altezza, cioè nei punti egualmente distanti dalla BD, purchè, come intendo, le sezioni trasversali, ossia normali all'asse della strada in essi siano eguali. Ciò posto considererò solo la parte di terrapieno rappresentata in ABD; e in essa prenderò ad esaminare le sezioni $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$, $\alpha''\beta''$, $\alpha'''\beta'''$, $\alpha^{IV}\beta^{IV}$, $\alpha^{V}\beta^{V}$, BD, le quali distano tutte fra di loro di 50 m.; e la $\alpha\beta$ dal punto A di 20 m.; e indicandole rispettivamente coi numeri romani successivi, ne calcolerò tosto le altezze, cioè l'altezza che in esse presenta il terrapieno; e la chiamerò h,

I.	$\alpha\ \beta = 0{,}94$	V.	$\alpha^{IV}\beta^{IV} = 10{,}31$
II.	$\alpha'\ \beta' = 3{,}28$	VI.	$\alpha^{V}\ \beta^{V} = 12{,}65$
III.	$\alpha''\beta'' = 5{,}62$	VII.	$BD = 15{,}00$
IV.	$\alpha'''\beta''' = 7{,}97$		

Queste dunque sono le altezze che avrà il muro di sostegno nei diversi punti considerati. Ora che cosa si dovrà fare per ottenere il progetto di quel muro? — Si dovrà 1° procurare le sezioni trasversali corrispondenti a quei punti: — 2° Determinare il prisma di massima spinta, ossia il piano di distacco: — 3° Determinare la spinta che quel prisma produrrà contro il masso murale: — 4° Determinare il punto d'applicazione di quella spinta: — 5° Si passerà a determinare le dimensioni del muro, fatte le necessarie ipotesi intorno al rapporto fra la larghezza del muro continuo e la sua altezza, alla grossezza dei contrafforti, e loro distanza, spessore e distanza degli archi di scarico sovrapposti, ecc. ecc. come si vedrà in seguito.

Sezioni Trasversali.

Incominciamo a fissarci le sezioni trasversali che presenta la costa a sostenere nei diversi punti considerati. La scarpa naturale delle terre che si devono sostenere è di 3 e $\frac{1}{2}$ di base per 1 di altezza, il che corrisponde ad un angolo di natural declivio di 16°. Questa condizione ci apprende tosto, che abbiamo a trattare un caso di terra argillosa assai scorrevole, un caso eccezionale, poichè nei casi ordinari alle terre argillose corrisponde l'angolo di natural declivio di 55° se asciutte, di 31° se umide; come risulta da esperienze instituite appositamente da Gadroy, Rondelet, Barlow ed altri.

Considero il punto VII in cui l'altezza del terrapieno è la massima, e suppongo che il piano determinante la sezione trasversale in quel punto sia lo stesso che passa per la linea di maggior pendìo della costa (*fig. 2*); ne avverrà quindi che la linea BM, la quale termina superiormente il profilo trasversale, sarà la linea di massima pendenza in quel punto. Suppongo ancora che tale angolo sia il massimo possibile con quelle terre, l'angolo di natural declivio; sarà quindi l'angolo OBM di 16°. Man mano che ci allontaniamo dal punto VII suppongo che le sezioni trasversali ci presentino angoli d'inclinazione minore, e sempre decrescenti; quindi nelle sezioni VI e V la BM sarà meno inclinata all'orrizonte di quello che essa lo sia nella VII; tuttavia per operare più speditamente nelle ricerche e nei calcoli successivi, e operare sempre in favore della stabilità, supporremo che abbia la stessa inclinazione, cioè 16°. — Per le sezioni III e IV assumeremo per tale angolo quello di 13°; e per le sezioni I e II quello di 10°. Si osserverà intanto che nelle sezioni V, VI, VII la linea, che supporremo retta, sebbene in natura generalmente non lo sia, la quale ci dà l'inclinazione del terrapieno, e la retta condotta da A, facente coll'orizzonte l'angolo di natural declivio, sono fra loro parallele, e quindi non s'incontrano, mentre in tutte le altre sezioni considerate tali rette sono convergenti, e quindi s'incontrano in un certo punto più o meno lontano.

Determinazione del prisma di massima spinta.

La ricerca della spinta di un terrapieno contro una parete resistente fu intrapresa da molti distinti costruttori; fra cui primo Coulomb nel 1773, in seguito molto più ampiamente svolta e corredata di formole da Prony, Navier, Audoy, Saint-Guilhem, Curioni, le quali tutte danno risultati che poco fra di loro differiscono.

Nella determinazione di tale spinta prodotta dal terrapieno contro un ritegno costrutto per impedirne gli scoscendimenti, si suppone, che si stacchi un prisma di terra, e che agisca come un cuneo producendo spinta contro il ritegno, e pressione sulla superficie di rottura di questo prisma dal resto del terrapieno. Tutti gli autori nel trattare tale argomento ammisero, che la superficie, secondo cui il masso spingente ha tendenza a separarsi dal terrapieno, sia piana; che anzi Hagen *(Manuel des constructions hydrauliques)* e Persy (*Cours de stabilité des constructions)* hanno cercato di dimostrare, che nel caso particolare in cui il terrapieno è terminato superiormente da una superficie piana orizzontale, la detta ipotesi si verifica realmente. Ma le loro dimostrazioni lasciano campo a serie obbiezioni. Al prof. Curioni pare più verosimile, e maggiormente conforme a quanto si manifesta nei terrapieni scoscesi, l'ammettere che la superficie di separazione del masso spingente dal sottostante terrapieno sia una superficie cilindrica a generatrici orizzontali, avente per direttrice una linea la quale incomincia in alto con una breve retta verticale, o poco distante dalla verticale, e a cui si raccorda una curva convessa verso l'interno del terrapieno, colla sua tangente nel punto più basso inclinata all'orizzonte di un angolo ben poco diverso da quello che corrisponde al natural declivio delle terre.

Di questo fatto che succede realmente in natura si può anche aver una conferma nei risultati teorici, quando si ponga mente all'azione della forza di coesione. Poichè nello scoscendere di un masso di terra da una costa, la superficie di separazione presenterà tale forma, che corrisponda precisamente allo stato d'equilibrio delle molecole terrose componenti la costa, sollecitate da tutte le forze che agiscono su di esse, e quindi anche dalla coesione; però siccome su di essa non si può fare alcun assegnamento, poichè da un momento all'altro, per una causa qualunque, essa può venir meno, così supporrò quelle molecole terrose componenti il terrapieno, soggette soltanto all'azione del proprio peso e dell'attrito fra le molecole stesse, e quindi che la superficie di distacco sia piana, che parta dallo spigolo inferiore della parete interna del muro di sostegno e che faccia un certo angolo coll'orizzonte, angolo che si tratta appunto di determinare.

Se considero un terrapieno, la cui sezione sia $MCABO$ qualunque (*fig.* 3), e se suppongo che si stacchi da quello un prisma di terra, o tenda a staccarsi e quindi scendere in basso secondo la faccia di natural declivio BD, la componente parallela a questo piano del peso del prisma di terra incombente su di esso, avrà un certo valore; così pure l'attrito prodotto dalla componente del peso normale al piano di distacco; il valore della componente parallela al piano, diminuita dell'attrito sviluppato sul piano stesso ci dà la forza con cui quel prisma di terra tende a scorrere in basso su quel piano; e la componente di questa forza parallela alla direzione RG, che fa colla normale alla faccia spinta AB, l'angolo d'attrito, rappresenta la spinta prodotta da quel prisma di terra contro la parete resistente oppostagli; quando però quel prisma si staccasse realmente secondo il piano BD e quindi fosse obbligato a scorrere su di esso. — Suppongo invece che il piano di distacco, epperò anche di scorrimento, sia un altro qualunque BE; in tal caso il prisma di terra che si stacca sarà diverso dal primo, e valori diversi avranno pure la componente del suo peso parallelo al piano BE, e l'attrito prodotto sullo stesso dalla sua componente normale, perciò altro valore avrà la forza con cui quel prisma tende a scorrere in basso, staccandosi secondo il piano BE, e quindi altro valore della spinta prodotta.

Supponendo ancora altri piani di scorrimento, si avranno altri valori diversi della spinta; di tali valori alcuni saranno minori ed altri maggiori: si considera fra questi il più grande trovato, e questo ci darà la spinta che il terrapieno produrrebbe realmente contro la parete resistente appostagli se in esso non agisse la forza di coesione; e sarà questa appunto, perchè per le scioltezze delle terre, il terrapieno tenderà a staccarsi appunto secondo quel piano, in cui la forza che tende a staccarlo è la massima.

Conosciuta questa spinta massima si ha tosto nel suo piano di rottura, e nel corrispondente prisma spingente, il piano di scorrimento cercato, e il prisma di massima spinta. Su questo metodo per tentativi e per induzione è fondato il metodo grafico proposto dal prof. Curioni nel suo corso di Costruzioni alla Scuola d'applicazione per gli ingegneri in Torino, l'anno 1873; di cui intendo far parola, e valermene nelle determinazioni richieste dal tema che mi sono proposto.

Si abbia un terrapieno qualunque, la cui sezione trasversale sia ABO (*fig.* 3) ed AB la traccia del piano, secondo cui esso poggia contro la parete che lo sostiene. Suppongo di conoscere già il piano di distacco, e sia BE. Il cuneo di terra ABE nell' istante in cui tende a rimuovere la faccia AB, esercita in tutti i punti della faccia BE, pressioni normali alla faccia stessa, la cui risultante sarà N applicata in F; questa pressione dà luogo ad una certa resistenza di attrito, che sarà fN. Il prisma di terra ABE esercita inoltre pressioni in tutti i punti della parete spinta AB, la cui risultante sarà applicata in un certo punto H, ed eguale ad N'; questa poi svilupperà una resistenza d'attrito contenuta nel piano di AB, e sarà $f'N'$: la risultante di N ed fN sarà S; la risultante di N' ed $f'N'$ sarà R; quindi quel cuneo o prisma di terra ABE agisce sulla faccia BE come la forza S e sulla AB come la forza R.

Ora quali sono le forze che agiscono in quel prisma di terra?

Esse sono, il peso del prisma, e il sovraccarico sulla sua faccia ACE.

Chiamo P il complesso di questi pesi, lo posso supporre applicato nel punto G, e scomponendolo in due componenti dirette secondo la S e la R, mi darà per queste componenti appunto la S ed R trovate. Sia BO orizzontale; ang$ABO=\gamma$; φ l'angolo di attrito di terra contro terra, che si sviluppa sulla faccia BE; φ' quello d'attrito di terra contro la parete spinta; si avrà $f=\operatorname{tang}\varphi$, $f'=\operatorname{tang}\varphi'$: pongo ang$PGR=\alpha$ e ang$PGS=\beta$; prolungo la GP sino ad incontrare in Q la BO, conduco la GK perpendicolare ad AB; dal quadrilatero $BQGK$ ottengo $\gamma+\widehat{KGP}=180°$;

$$\widehat{KGP}=\alpha+\varphi' \quad \text{quindi} \quad \alpha=180°-\gamma-\varphi' \quad . \; . \; . \; (1)$$

Chiamo ψ l'angolo EBO, cioè l'angolo che fa il piano di distacco BE, col piano orizzontale BO, e conduco da G la GL perpendicolare a BE; si ha

$$\widehat{QGL}=\psi=\beta+\varphi \quad \text{onde} \quad \beta=\psi-\varphi \quad . \; . \; . \; (2)$$

dalle quali espressioni scorgesi che β varia col variare del piano di distacco, mentre l'α si mantiene costante.

Prendo ora a considerare la sezione IV del terrapieno che devo sostenere, e voglio determinare la spinta R che è capace di esercitare; considero perciò una lunghezza di terrapieno eguale all'unità.

La faccia superiore che esso presenta in corrispondenza di quella sezione è data dalla retta IV M^{IV}, che ha l'inclinazione di 13° coll'orizzontale IV O^{IV}. Conduco dal punto B tante rette nell'interno del prisma, in modo che facciano angoli noti coll'orizzontale, e siano la $B.30$, $B.31$, $B.32$ . . . $B.40$ che fanno rispettivamente colla BO gli angoli di 30°, 31°, 32°... 40°. Queste rette incontrano la IV M^{IV} nei punti α, β, γ... come si vede in figura; determino l'area dei triangoli limitati dalla IV B, IV M^{IV} e da ognuna delle rette ora condotte; quest'area moltiplico per il peso specifico di quella terra, che suppongo di 1800 kg. per metro cubo: avrò così il peso di quei prismi triangolari di terra limitati dalle faccie, le cui traccie sulla sezione considerata sono le B IV, IV M^{IV} e ciascuna delle rette come $B.30$. Poscia prendo sul foglio un punto qualunque V, e tiro la verticale VU; da V conduco una retta che faccia colla VU l'angolo α dato dalla (1), che nel caso nostro, essendo $\gamma = 90°$, diventa $\alpha = 90 - \varphi'$. In pratica però suolsi ritenere $\varphi = \varphi'$; e questo nel nostro caso si può accettare quasi in modo rigoroso, poichè l'attrito si verifica appunto fra le molecole terrose componenti il terrapieno, e quelle che si trovano fra i successivi archi di scarico. Si avrà dunque $\alpha = 90 - \varphi$, ed essendo $\varphi = 16°$ sarà $\alpha = 74°$; otterremo così la $V\rho$. Assumeremo una certa scala per le forze, e si opera per tentativi nel seguente modo. Suppongo dapprima che sia $B.40$ il piano di distacco, in tal caso il peso del prisma di terra spingente sarà quello incombente ad esso cioè 94000 kg. che chiamo t_1, porto questo t_1 nella scala adottata sulla VU, a partire da V, e sarà $V.24^{IV}$.

Da V conduco ancora una retta $V.24$ dalla parte opposta a quella, in cui fu tirata la $V\rho$, e tale che faccia colla VU l'angolo $\beta = \psi - \varphi = 40° - 16° = 24°$; e dal punto 24^{IV}, sulla VU, conduco una parallela a questa; essa incontrerà in r_1, la $V\rho$; la Vr_1, misurata colla scala adottata dà la spinta che si avrebbe contro la parete $B.IV$ quando il piano di distacco fosse quello supposto, cioè $B.40$.

Poi suppongo che il piano di distacco sia $B.39$, avrò un altro peso di prisma spingente e sia t_2, lo porto medesimamente sulla VU a partire da V, esso verrà in 23^{IV}, e da questo punto tirando una parallela alla $V.23$, retta che fa colla VU l'angolo $\beta = \psi - \varphi$, in cui ψ è l'angolo $39.B.0$ cioè di $39°$, avrò il punto r_2 in cui esso incontra la $V\rho$; e quindi la spinta Vr_2 che produrrebbe il terrapieno, qualora il piano di distacco fosse quello supposto $B.39$. — Questa spinta la trovo maggiore della prima, il che mi fa tosto dire che il primo piano di distacco supposto non è il vero. Operando nello stesso modo successivamente per tutti quei piani tracciati, si avranno tanti valori diversi della spinta prodotta dal terrapieno, e si osserverà che andrà crescendo sino a un certo punto, e poi diminuisce; quando si trova una spinta minore della precedente è segno che si è oltrepassato quel piano che è il vero piano di distacco, secondo le supposizioni fatte: il criterio di chi opera poi, guiderà le ricerche in modo da approssimarsi a questo piano il più che sia possibile, e col minore numero possibile di operazioni.

Ecco il quadro dei risultati ottenuti nel fare questa ricerca, di cui le operazioni grafiche trovansi nel disegno annesso:

ψ	B	Sezione IV		Sezione II	
		H	P	H	P
25°	9°			11,33	33500
30°	14°	23,04	165000	8,20	24250
31°	15°	21,51	154500	7.73	22800
32°	16°	20,23	145000	7,32	21625
33°	17°	19,05	136500	6,94	20500
34°	18°	17,97	128800	6,58	19480
35°	19°	16,98	121800	6,26	18400
36°	20°	16,08	115300	5,91	17400
37°	21°	15,24	109200	5,68	16775
38°	22°	14,46	103800	5,42	16000
39°	23°	13,77	98800	5,18	15300
40°	24°	13,09	94000	4,95	14625

In questo quadro sono registrati i risultati ottenuti per la sezione IV e la sezione II; le lettere ψ e β hanno lo stesso significato che fu loro dato qui sopra: H rappresenta l'altezza dei prismi di terra spingenti, misurata ritenendo la faccia verticale OIV come base; P sono i pesi dei prismi di terra spingenti di cui la lunghezza è l'unità. I valori di P si dedussero moltiplicando H per 1800, peso specifico della terra, e $\frac{1}{2}h$, metà altezza del terrapieno.

Fatte le costruzioni grafiche indicate sopra si venne a trovare che la massima spinta per la sezione IV corrisponde a $\psi = 33°$, e quindi $\beta = 17°$ e che tale spinta R_m è di 40000 kg.; per la sezione II invece corrisponde a $\psi = 37°$; e quindi $\beta = 21°$; per cui $R_m = 6050$ chilogrammi.

La sezione III, simile alla sezione IV, avrà lo stesso piano di distacco, come la I avrà lo stesso piano di distacco che la II; difatti moltiplicando o dividendo tutti i valori di P per uno stesso numero, il che corrisponderebbe a variare la altezza h del terrapieno, si hanno sempre gli stessi risultati. Conoscendo quindi preventivamente il piano di distacco di queste due sezioni avremo tosto:

Sezioni	ψ	β	H	P	R_m
III	33°	17°	13,43	66000	19500
I	37°	21°	1,55	1380	520

Avvertirò intanto che le operazioni grafiche relative alla sezione I sono state fatte nelle scale di $\frac{1}{10}$: quelle relative alla II nelle scale di $\frac{1}{30}$ e quelle relative alla III e IV nelle scale di $\frac{1}{50}$: fu poi adottato per scala delle forze della sezione I, $\frac{1}{20000}$; cioè un centimetro a rappresentare 200 kg.; per la sezione II la scala di $\frac{1}{200000}$, cioè un centimetro a rappresentare 2000 kg.; per la sezione III la scala di $\frac{1}{300000}$ cioè un centimetro a rappresentare 3000 kg.; infine per la sezione IV la scala di $\frac{3}{2000000}$, cioè un centimetro e mezzo a rappresentare 10000 kg., e quindi un centimetro per 6666 chilogrammi.

Resta ancora da procurarsi il piano di distacco o di scorrimento relativo alle sezioni V, VI e VII. Ora in queste sezioni noi non possiamo più applicare il metodo grafico sopra enunciato ed applicato ai casi sinora trattati, poichè in queste la retta che limita superiormente il terrapieno è parallela a quella di natural declivio e quindi è indeterminata la superficie sezione retta del prisma spingente. In questo caso dobbiamo ricorrere alle formole dedotte dalla teoria generale della spinta delle terre. Fra queste richiamerò quella che dà l'angolo ψ cercato; ed è la seguente (Curioni, *Resistenza dei materiali*, pag. 546).

$$\tang \psi = \tang \varphi + \frac{1}{\cos \varphi} \sqrt{\frac{\tang \varphi - C}{\tang \varphi + \tang \varphi'}}$$

in cui C è la tangente dell'angolo che fa la faccia superiore del terrapieno coll'orizzonte; le altre lettere hanno lo stesso significato che fu loro attribuito nei calcoli precedenti. Nelle sezioni che ora consideriamo si ha $C = \tang \varphi$ quindi risulta $\tang \varphi = \tang \psi$, $\psi = \varphi$, cioè il piano di distacco, o il piano che limita inferiormente il prisma di massima spinta è lo stesso piano di natural declivio, e ciò vale per le sezioni V, VI, VII.

Determinazione della spinta.

La determinazione del prisma di massima spinta quando si fa col metodo grafico, ha tale relazione colla ricerca della massima spinta prodotta, che non si può ottenere quello senza prima conoscere questa, e l'abbiamo veduto nel caso delle prime quattro sezioni. Per questa adunque la spinta è già nota. Resta a determinarsi quelle relative alle sezioni V, VI, VII, le quali è assolutamente necessario determinare analiticamente, ricorrendo alle formole convenienti. Il prof. Curioni ha applicato a questo caso particolare la sua teoria generale, ed ha dedotta la seguente espressione della spinta R_m.

$$R_m = \frac{1}{2} \Pi h^2 \frac{\cos \varphi}{\cos (\varphi + \varphi')} \frac{1}{\tang (\varphi + \varphi') \tang \psi + 1}$$

applicando questa formola alla sezione V in cui $h = 10,31$; e ricordando che $\Pi = 1800$ $\varphi = \varphi' = \psi = 16^0$: avremo:

$$R_m = 900 \times h^2 \times 1,133 \times 0,85 = 867 . h^2 = 867 \times 106,2 = 92000$$

Per la sezione VI e VII in cui h è rispettivamente eguale a 12,65 e 15, ottiensi:

$$R_m = 867 \times 160 = 138700 \text{ per la VI}$$

$$R_m = 867 \times 225 = 194000 \text{ per la VII}$$

Ottenuta così la spinta del terrapieno, è necessario pei calcoli che si avranno da instituire in seguito, scomporre detta spinta in due componenti, una orizzontale e l'altra verticale; ora siccome sappiamo che la spinta contro la parete resistente ha tale direzione da fare coll'orizzontale l'angolo di attrito, chiamando Q la componente orizzontale, e V la componente verticale cercata, queste ci saranno tosto date dalle formole semplicissime:

$$Q = R_m \cos \varphi \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

$$V = R_m \,\text{sen}\, \varphi \quad . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Per le sezioni a cui fu applicato il metodo grafico, tali componenti si possono anche ottenere graficamente in modo ancora più spedito; difatti se dal punto V, da cui fu condotta la VU verticale, conduciamo ora la VO orizzontale, questa farà colla $V\rho$ l'angolo φ, poichè abbiamo l'angolo $\rho VU = \alpha = 90 - \varphi$, e per conseguenza se proiettiamo su di essa quel tratto della $V\rho$ che rappresenta la spinta massima ottenuta, questa proiezione misurata colla stessa scala adottata per la spinta, ce ne dà la sua componente orizzontale, mentre la sua proiezione sulla VU, ce ne dà la componente verticale. Avendo fatto uso di questo metodo per le prime quattro sezioni, e della formola (3) e (4) per le tre ultime, ottenni i risultati registrati nella tavola seguente, in cui vi unisco i valori delle spinte, di ψ ed h corrispondenti:

Sezioni	h	ψ	R_m	$Q=R_m \cos\varphi$	$V=R_m \operatorname{sen}\varphi$
I	0,94	37°	520	485	136
II	3,28	37°	6050	5800	1670
III	5,62	33°	19500	18750	5400
IV	7,97	33°	40000	38300	11100
V	10,31	16°	92000	88500	25400
VI	12,65	16°	138700	133000	38200
VII	15,00	16°	194000	186500	53500

Punto d'applicazione della spinta.

Alla determinazione del punto d'applicazione della spinta si rivolsero distinti costruttori che trattarono l'importante questione della spinta delle terre; però mentre per la determinazione della spinta proposero formole che danno risultati assai prossimi fra di loro, differenziano piuttosto notevolmente nel determinare il centro della spinta.

Il maggiore del Genio, Biagio De Benedectis, in una sua memoria, stampata nella *Rivista Militare Italiana* nel 1865, propose un metodo che dimostrò assai bene, e che si riassume nella seguente proposizione tratta dal § 8 della suddetta memoria: « Una volta determinato il prisma di massima spinta, e cercato graficamente il centro di gravità del suo profilo trasversale, se dal medesimo centro si conduce una parallela alla retta, che in profilo rappresenta il piano di rottura, il punto d'incontro di tale retta colla parete interna del muro, sarà il centro di spinta, ossia il punto d'applicazione della spinta delle terre. »

Questo metodo però veniva già accennato da Gauthey fin dal 1784 nelle *Mémoires de l'Académie de Dijon*, e dimostrato esatto dallo stesso con esperienze appositamente instituite nel solo caso in cui il terrapieno sia terminato superiormente da una faccia piana.

Il De Benedectis fonda la sua proposizione sull'ipotesi, che al primo istante in cui l'equilibrio viene a rompersi, il prisma di scoscendimento scorre sul piano di rottura come se fosse un prisma solido, cioè come se tutti i suoi elementi fossero sollecitati da forze parallele, proporzionali alla massa degli elementi stessi.

Il prof. Curioni allo stesso scopo, proponeva un metodo analitico, che fu inserito nelle *Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino*, tom. XXV, serie II, 1867; e che si appoggia all'ipotesi seguente; che cioè le terre in procinto di scoscendere, tendano a separarsi secondo piani paralleli alla faccia inferiore del prisma spingente. L'ing. Regis, in un suo opuscolo stampato nel corrente anno 1873, in cui si fa ad analizzare i diversi metodi proposti per la determinazione del centro di spinta di un terrapieno, messi a confronto i risultati che si ottengono dei due metodi indicati li trovò affatto identici, quando non si tenga conto della coesione delle terre fra di loro, nè dell'adesione delle terre alle pareti del ritegno, ma si consideri unicamente l'attrito delle terre fra di loro, e quello delle terre colle pareti del ritegno, e che di più non si abbiano sovraccarichi sul terrapieno.

Un metodo fu pure proposto da Coulomb e Poncelet, il quale è fondato sull'ipotesi seguente: che cioè la pressione o spinta esercitata dal terrapieno contro una certa altezza della parete resistente, sia quella che è dovuta al prisma di massima spinta corrispondente a quell'altezza, e che se la parete resistente subisce un aumento infinitesimo nella sua altezza si accrescerà pure il prisma spingente, onde aumenterà la spinta, e tale aumento nella spinta si suppone abbia il suo punto di applicazione sulla zona infinitesima che forma l'accrescimento della parete resistente.

L'ing. Regis nella sua memoria sovracitata, dimostrò diffusamente, che in generale il momento della spinta rispetto ad uno degli spigoli inferiori del muro di sostegno, trovasi più grande se si determina il centro di spinta col metodo di Prony e Poncelet, che se si determina con quello di Curioni; col metodo di De Benedectis poi, sarebbe maggiore solo nel caso in cui vi fosse sovraccarico sul terrapieno; poichè allora col metodo di Curioni si ritiene che tutto il peso sia concentrato sulla sua base, e ciò perchè il sovraccarico non spinge contro il ritegno ma preme unicamente sul terrapieno; col metodo De Benedectis invece, si tien conto anche dell'altezza a cui si trova il centro di gravità del sovraccarico, sul terrapieno.

Per trovare il centro di spinta, nei casi che mi occorrono, farò uso del metodo De Benedectis; però esso sarà molto semplificato attesa la forma che presenta la sezione retta del prisma spingente. Tale forma è un triangolo ABE (*fig.* 2); di esso si conoscerà tosto il centro di gravità, che si trova sulla mediana BD, in G tale, che $\overline{GD} = \frac{1}{3}\ \overline{BD}$ se ora da G conduco una parallela alla traccia AE del piano di distacco, si vede subito che essa incontrerà la faccia AB nel punto H tale che $\overline{AH} = \frac{1}{3}\ \overline{AB}$. Sarà quindi facile avere il punto di applicazione cercato; poichè chiamando q la distanza di esso da A si avrà $q = \frac{1}{3}\ h$.

Tale metodo non si può applicare al caso che ci si presenta nelle sezioni V, VI, VII, in cui la sezione retta del prisma spingente è di superficie indeterminata. In questo caso ricorrerò alla teoria del prof. Curioni e richiamerò quella formola che ci dà la posizione di questo punto: essa è la seguente (CURIONI, *Resistenza dei materiali*, pag. 547):

$$Z_m = \frac{y_1}{3} \frac{\Pi y_1 + 3p}{\Pi y_1 + 2p}$$

in cui Z_m rappresenta il nostro q; $y_1 = h$; p è il sovraccarico insistente al terrapieno, e quindi nel nostro caso $p = 0$: perciò si otterrà ancora $q = \frac{1}{3} h$, come è risultato col metodo grafico per le altre sezioni; registrerò qui sotto i valori di q relativi alle diverse sezioni considerate:

Sezioni	I	II	III	IV	V	VI	VII
q	0.313	1.093	1.873	2.657	3.437	4.217	4.00

Determinazione delle dimensioni del muro di sostegno.

Il tipo del muro di sostegno da adottarsi fu indicato nell'enunciato stesso del tema; il concetto generale di esso fu già esposto sul principio di questa dissertazione; resta ora a precisarne meglio le particolarità, e intraprendere la determinazione di quelle dimensioni che si vogliono far dipendere direttamente dalla spinta che si deve sostenere. Volendosi naturalmente attenere nel progetto di questo muro a quei dati generali, a quei rapporti che l'esperienza ha dimostrato più convenienti, e procurando anche di applicare quelli che sembrano più adatti al caso nostro attese le sue condizioni veramente eccezionali, e cercando di modificare con giusto criterio gli altri che si trovarono o rilevarono da esempi dal nostro troppo dissimili, per dare la voluta stabilità all'opera, e ben connettere il muro continuo cogli speroni ed archi di scarico, riterremo i seguenti dati: La distanza fra asse ed asse dei successivi contrafforti sia di 5 metri, e la loro larghezza di 2 metri; di 0,60 la grossezza uniforme dei volti, o archi di scarico; di m. 2,90 il raggio del loro intrados; di 2 metri la distanza fra le generatrici corrispondenti di due archi successivi sovrapposti, e di almeno 0,50 la profondità della generatrice più elevata dell'estrados dell'arco più alto, sotto il piano orizzontale passante per la sommità del muro. Inoltre siccome è nostro interesse di collocare il primo, cioè il più basso arco di scarico a tale altezza da poter utilizzare il più che sia possibile il peso proprio della terra, e quindi a tale altezza, che riesce massima la quantità di terra insistente fra gli archi, e sugli archi, e nello stesso tempo in modo da non introdurre alcuna nuova pressione, come avverrebbe quando la generatrice pq dell'intrados dell'arco più basso, si trovasse in $p'q'$, cioè passasse sotto il piano di distacco; prefiggeremo di collocare l'arco di scarico più basso pei tratti primo e secondo, cioè compresi fra le sezioni I e la III, in tale sito che sia l'imposta dell'arco stesso elevata di m. 0,50 sopra il piano di base del muro; pei tratti terzo e quarto, compresi cioè fra le sezioni III e V in modo che si elevi da quel piano di base di m. 1,20, e infine pei tratti quinto e sesto in modo che si trovi elevata di 2 metri.

Riterremo per ultimo che il muro continuo abbia alla sommità uno spessore eguale ad $\frac{1}{5}h$ per la sezione II, III e IV; ed eguale ad $\frac{1}{4}h$ per le sezioni V, VI, VII; la faccia esterna del muro abbia l'inclinazione di $\frac{1}{8}$, come è detto nell'enunciato. Dopo tutto ciò che si è premesso appare, che il muro di sostegno sarà pienamente determinato, quando si conoscerà la lunghezza dei contrafforti o degli archi di scarico, cioè si saprà di quanto essi s'internano nel colle a partire dalla faccia verticale interna del muro continuo. Questa adunque sarà la nostra incognita che ora ci proponiamo di determinare.

In base alle accennate condizioni, risulta ancora, che l'altezza minima compatibile al muro di sostegno, acciocchè possa avere un arco di scarico, è di m. 2,02, dovendo comprendere la distanza dal piano di base del muro all'imposta dell'arco, che è di 0,50; lo spessore dell'arco che è 0,60; la distanza minima dalla generatrice più elevata dell'estrados dell'arco al piano orizzontale passante per la sommità del muro continuo in quella sezione, cioè 0,50; e la saetta della curva direttrice dell'intrados, che è eguale a 0,42. Ora siccome in corrispondenza alla sezione I l'altezza del terrapieno, e quindi del muro, è solo di 0,94, non si potrà quivi adottare il tipo di muro proposto; avremo perciò un tratto della costa, compreso fra le sezioni I e II, che si dovrà sostenere con un muro senza archi di scarico, e che io supporrò debba essere un muro continuo, senza speroni interni e colla scarpa esterna di $\frac{1}{8}$. Suppongo ancora che il muro di sostegno cominci solo colla sezione I, essendo inutile fare muri di sostegno per altezza di terrapieno minore di quella che abbiamo nella I.

Determino ora il numero degli archi di scarico che occorrono al muro di sostegno in ciascuna delle sezioni considerate, e lo chiamo n, mentre indico con k l'altezza rappresentata nella *fig.* 4 da mn.

Dietro le norme sopra riferite, facendo questa ricerca trovo i risultati che registro qui sotto:

Sezioni	I	II	III	IV	V	VI	VII
n		1	2	3	4	5	6
k		1,76	1,40	1,75	1,29	1,63	1,98

Stabilità di un muro. — Una costruzione murale acciocchè possa dirsi stabile sotto l'azione di determinate forze, deve presentare in giusto grado varie resistenze che si oppongano e neutralizzino l'azione di quelle forze. Così il muro rappresentato in *fig.* 4, sollecitato dalle forze Q e V, componenti orizzontale e verticale della spinta del terrapieno, e P peso del muro stesso, può per l'azione della Q staccarsi dalla sua base secondo il piano AD, e scorrere su di esso; oppure rovesciarsi infuori rotando intorno allo spigolo proiettato in D; e può ancora sotto l'azione di P e V deformarsi per rottura o schiacciamento dei materiali, onde è formato. Dovrà quindi il muro presentare sufficiente *resistenza allo scorrimento* in corrispondenza del piano AD; sufficiente *resistenza al rovesciamento* intorno allo spigolo D; sufficiente *resistenza allo schiacciamento* sulla base AD; dovrà cioè presentare stabilità sotto i tre rapporti ora enumerati.

Nel determinare adunque le dimensioni del muro di sostegno, terrò questa via; cioè considero prima la resistenza che deve presentare allo scorrimento, e in base a questa ne calcolo la grossezza; poscia considero la resistenza che deve opporre al rovesciamento, e ne deduce la grossezza conveniente perchè possa presentare tale resistenza; avrò così due valori diversi della grossezza del muro, il maggiore dei due sarà quello da adottarsi, per avere la voluta stabilità sotto entrambi i rapporti. Avendo così il muro di sostegno con tutte le sue dimensioni già determinate, verifico se è stabile sotto il rapporto della resistenza allo schiacciamento; se non lo trovo stabile, ne aumento di una certa quantità arbitraria lo spessore, e verifico nuovamente la stabilità nelle nuove condizioni, e ciò ripeto sino a che ho riconosciuto presentare la necessaria stabilità anche sotto questo rispetto.

Stabilità allo scorrimento. (*fig.* 4). — Trascurando la coesione nella massa murale, e tenendo solo conto dell'attrito, l'equazione che ci dà la stabilità allo scorrimento è la seguente:

$$Q = \nu f \,(P + V) \quad . \; . \; . \; (5)$$

in cui Q_1 e V_1 sono le componenti orizzontale e verticale della spinta che si esercita contro il muro, P peso del muro; f coefficiente d'attrito di muro contro muro, che è variabile fra 0,57 e 0,75: ν coefficiente di stabilità allo scorrimento che suolsi assumere variabile fra $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{5}$. Nell'espressione di P entrerà l'incognita x, spessore del muro, e da quell'equazione se ne ricaverà il valore.

Si è già veduto che per un certo tratto, compreso fra le sezioni I e II, il muro di sostegno sarà un semplice muro continuo, colla faccia esterna presentante la scarpa di $\frac{1}{8}$, e la faccia interna verticale; siccome l'altezza del terrapieno va crescendo dalla prima alla seconda sezione, crescerà pure lo spessore del muro, onde per avere qualche norma nel far crescere quello spessore, supporrò che il muro sia continuo in tutto il tratto I - II, e ne dedurrò lo spessore x che deve avere alla sommità nelle due sezioni estreme. Considero una lunghezza del muro eguale ad 1 metro.

Sezione I. — $Q = 485$; $V = 136$; prendo νf 0,50 che equivarrebbe a prendere $\nu = \frac{4}{5}$ e $f = 0{,}62$ oppure $f = 0{,}75$ e $\nu = \frac{3{,}3}{5}$;

Dalla *fig.* 5 risulta che il peso P del masso murale si compone, del prisma di muro a sezione triangolare $C\,D\,N$, di cui $\overline{CN} = h = 0{,}94$; $\overline{DN} = \frac{1}{8} h = \frac{1}{8}\, 0{,}94 = 0{,}117$ e quindi la superficie eguale a $\frac{1}{16} h^2 = 0{,}055$; più il prisma a sezione rettangolare $C\,B\,A\,N$, di cui $\overline{CB} = x$, e quindi la superficie $h\,x = 0{,}94\,.\,x$.

Dicendo Π' il peso specifico della muratura, che intendiamo adottare in questa costruzione; e ponendo che tale muratura sia di buoni laterizi, avremo $\Pi' = 2100$ kg. per m. c. e quindi

$$P = \Pi' \left(\frac{1}{16} h^2 + h\,x \right)$$

$$P = 2100\ (0{,}055 + 0{,}94\,.\,x) = 116 + 1975\,.\,x$$

Sostituendo questi valori in (5) risulterà:

$$485 = 0{,}50\ (116 + 1975\,.\,x + 136)$$

da cui

$$970 = 252 + 1975 . x \; ; \qquad x = \frac{718}{1975} = 0{,}37$$

cioè lo spessore alla sommità del muro nella sezione I deve essere di 0,37, perchè esso possa presentare la necessaria resistenza, e quindi stabilità allo scorrimento.

Sezione II. — In questa si ha $Q = 5800$; $V = 1670$; prendo $\nu f = 0{,}50$; $h = 3{,}28$; quindi risulterà:

$$P = \Pi' \left(\frac{1}{16} h^2 + h x\right) = 1410 + 6890 . x;$$

sostituendo in (5) e risolvendo rispetto ad x si deduce:

$$x = \frac{8520}{6890} = 1{,}24$$

Con questi due valori di x in I ed in II, sapremo con quale regola far crescere lo spessore del muro dalla sezione prima verso la seconda sino a quel punto di altezza eguale a $2^m{,}02$, già veduto, in cui puossi cominciare a inserirvi gli archi di scarico richiesti dal tema.

Per le altre sezioni ci riferiremo alla *fig.* 4; e considereremo non più una lunghezza di muro eguale ad un metro, ma sì bene la lunghezza di muro compresa fra asse ed asse di due contrafforti successivi, cioè 5 metri; a tale lunghezza naturalmente riferiremo pure la spinta del terrapieno, e quindi anche le sue componenti Q e V; che ora, riferite a tale lunghezza, chiameremo Q_1 e V_1.

Formiamo l'espressione di P; esso si compone 1° del peso del prisma di muratura a sezione triangolare $C\,D\,N$; 2° del peso del prisma di muratura a sezione rettangolare $C\,B\,A\,N$; 3° del peso di un contrafforte $E\,F\,L\,A$; 4° del peso degli archi di scarico in numero di n; 5° del peso della terra posta fra gli archi di scarico; 6° del peso della terra posta sopra l'arco di scarico più elevato e sopra un contrafforte, sino a raggiungere l'altezza del piano orizzontale, condotto per il punto più alto del muro continuo nella stessa sezione; 7° infine, del peso della terra posta sopra il piano orizzontale ora supposto, sino a raggiungere l'inclinazione naturale del terrapieno, che costituisce un prisma triangolare di terra avente BST per sezione.

Formiamo tutti questi pesi separatamente;

1° La superficie del triangolo CDN, essendo $\overline{NC} = h$, $\overline{DN} = \frac{1}{8}h$, è $\frac{1}{16}h^2$; il peso di quel prisma triangolare sarà

$$5 \,.\, \Pi' \frac{1}{16} h^2$$

2° Il rettangolo $CBAN$ ha per lati h e $\frac{1}{5}h$, se si riferisce alle sezioni II, III e IV; h e $\frac{1}{4}h$ se si tratta delle sezioni V, VI e VII; quindi nel primo caso il peso di quel prisma a base rettangolare sarà $5 \,.\, \Pi' . \frac{h^2}{5} = \Pi' h^2$; nel secondo caso sarà $5 \,.\, \Pi' \,.\, \frac{h^2}{4}$.

3° I contrafforti interni si staccano dal muro continuo secondo una certa orizzontale $E' e'$ che sta un po' al disotto dello spigolo $B' B''$ del muro, e presentano sempre la loro faccia superiore inclinata in basso verso la costa secondo la linea EF: io supporrò nei calcoli che l'altezza media IQ degli speroni sia sempre di metri 0,50 minore dell'altezza del muro continuo nella stessa sezione; cioè $h - 0{,}50$:

Il peso di un contrafforte sarà quindi, essendo $AL = x$, e lo spessore di 2 metri, $2 \,.\, \Pi' \,(h - 0{,}50)\, x = 2\,\Pi' h x - \Pi' . x$.

4° Chiamando S l'area finita di corona circolare, $gq'hlni$, ed essendo la lunghezza degli archi di scarico eguale a quella dei contrafforti, epperciò x, il peso di n archi sarà $n \,.\, \Pi' . S \,.\, x$.

Determiniamo questo S, superficie delle corone circolari finite degli archi (*fig. 4*). Voglio far uso delle tavole adatte che si trovano nei *Prontuari*. Si ha all'introdos $gh = 3^m$; $0g = 2{,}90$: la corda dell'arco simile di raggio 1, sarà $\frac{3}{2{,}90} = 1{,}033$; la sua freccia eguale a 0,143, e l'area del segmento corrispondente eguale a 0,099, mi è data dalle tavole. Sapendo poi, che le corde, le freccie ed i raggi di archi simili sono fra loro proporzionali, ed i segmenti corrispondenti proporzionali al quadrato di dette linee, si avrà tosto:

$$0{,}143 : 1 = x : 2{,}90 \qquad x = 0{,}143 \times 2{,}90 = 0{,}42$$
$$0{,}0996 : 1 = X : 2{,}90^2 \qquad X = 8{,}40 \times 0{,}0996 = 0{,}837$$

x è la saetta $q'r$; X è la superficie del segmento corrispondente all'intrados, cioè $g\,q'\,h$.

All'estrados abbiamo il raggio $o\,i = 3{,}50$; la corda $i\,l = 3^m$: onde sarà $\frac{3}{3{,}50} = 0{,}858$ la corda corrispondente dell'arco simile di raggio 1; a tale corda corrisponde la freccia 0,097, e la superficie del segmento 0,056; e quindi per la nota proporzionalità sopra riferita sarà $x_1 = 0{,}34$ la freccia corrispondente al nostro arco di raggio 3,50, cioè $n\,v = 0{,}34$; e l'area X_1 del segmento $i\,n\,l$ sarà eguale a $0{,}056 \times 12{,}25 = 0{,}69$.

Quindi la superficie S sarà eguale al rettangolo di lati $i\,g$, e $g\,h$, aumentato del segmento dell'arco d'estrados $i\,n\,l$, e diminuito del segmento dell'arco d'intrados $g\,q'\,h$. Il lato $i\,g$ è eguale, o almeno molto prossimamente eguale a

$$\frac{i\,u}{\cos.\,\widehat{g\,i\,o}} = \frac{0{,}60}{\cos.25^\circ}$$

poichè

$$\text{ang.}\,\widehat{g\,i\,o} = \text{ang.}\,\widehat{i\,o\,q} = 25^\circ;\ \text{quindi}\ \overline{i\,g} = \frac{60}{0{,}9} = 0{,}66$$

risulta perciò

$$S = 3 \times 0{,}66 + 0{,}69 - 0{,}84 = 1{,}83$$

e l'espressione del peso degli archi diventa $1{,}83\,\Pi'\,n\,x$.

5° Il peso della terra posta fra gli archi di scarico è dato da $(n-1)\,S_1\,\Pi\,.\,x$ in cui S_1 è la superficie della corona finita $a\,d\,h\,g$, e che è uguale al rettangolo di lati $a\,g$ e $a\,d$, aumentato dal segmento $g\,q'\,h$, e diminuito dal segmento $i\,n\,l$: quindi $S_1 = 3 \times 1{,}34 + 0{,}84 - 0{,}69 = 4{,}17$, sostituendo, quel peso sarà espresso da $4{,}17\,(n-1)\,.\,\Pi\,x$.

6° Comprende il peso di un prisma di terra avente per base $\alpha\,\beta\,l\,n\,i$, ed altezza x, incombente sull'arco più elevato, più il peso del prisma di terra avente per base $B\,T\,F\,E$ ed altezza 2 metri, cioè la larghezza del contrafforte; ora superf. $\alpha\,\beta\,l\,n\,i =$ superf. rettang. $\alpha\,\beta\,l\,i$ — segmento $i\,n\,l$, ed avendo visto $n\,v = 0{,}34$ sarà superf. $\alpha\,\beta\,l\,n\,i = (k + 0{,}34)\,3 - 0{,}69 = 3\,k + 0{,}33$: il prisma che gravita sul contrafforte avrà per base $0{,}50\,.\,x$, avendo supposto $I\,R = 0{,}50$: quindi il peso considerato sarà

$$\Pi\,.\,x\,(3\,k + 0{,}33) + \Pi\,.\,2.\,0{,}50\,.\,x = \Pi\,.\,x\,(3\,k + 1{,}33).$$

7° Il peso considerato in questo numero varia da sezione a sezione secondo l'inclinazione della faccia superiore del terrapieno: dicendo θ l'angolo $T\,B\,S$ avremo $T\,S = x$ tang. θ; quindi il peso sarà $\Pi\,.\,5\,.\,x\,.\,\frac{1}{2}\,x$ tang. $\theta = \frac{5}{2}\,\Pi\,.\,x^2$ tang. θ, avendo il prisma di terra, che qui consideriamo, per base $T\,B\,S$ e per altezza 5 metri.

Riunendo tutti i pesi parziali ora formati, avremo il P cercato, e sarà per le sezioni II, III e IV.

$$P = 5\,.\,\Pi'\,.\,\frac{1}{16}\,h^2 + \Pi'\,h^2 + 2\,.\,\Pi'\,h\,x - \Pi'\,x + 1{,}83\,.\,\Pi'\,.\,n\,.\,x +$$
$$+ 4{,}17\,(n-1)\,\Pi\,.\,x + \Pi\,x\,(3\,k + 1{,}33) + \frac{5}{2}\,\Pi\,x^2\,\text{tang.}\,\theta\,.$$

Sostituendo i valori di Π, Π', e θ, avremo per le sezioni II, III e IV:

$$P = 2757\,.\,h^2 + (11290\,.\,n + 4200\,.\,h + 5400\,.\,k - 7520)\,x + 1035\,.\,x^2 \quad (\alpha)'$$

Per le sezioni V, VI, VII avremo quest'altra espressione:

$$P = 3282\,.\,h^2 + (11290\,.\,n + 4200\,.\,h + 5400\,.\,k - 7520)\,x + 1290\,.\,x^2 \quad (\alpha)''$$

Sostituendo ora per ciascuna sezione i rispettivi valori di h, n, k, si ricavano i valori di P che registro qui sotto, insieme ai valori di Q_1 e V_1 cioè delle componenti orizzontali e verticali della spinta riferita alla lunghezza di 5 metri:

Sezioni	h	n	k	P	Q_1	V_1
II	3,28	1	1,76	$29680 + 27070 . x + 1035 . x^2$	29000	8350
III	5,62	2	1,40	$87000 + 46220 . x + 1035 . x^2$	93750	27000
IV	7,97	3	1,75	$175000 + 69300 . x + 1035 . x^2$	191500	55500
V	10,31	4	1,29	$348000 + 95550 . x + 1290 . x^2$	442500	127000
VI	12,65	5	1,63	$525000 + 118350 . x + 1290 . x^2$	665000	191000
VII	15,00	6	1,98	$739000 + 141440 . x + 1290 . x^2$	932500	267500

Sostituendo questi valori di Q_1, V_1, P_1, nell'equazione (5), in cui si prenda $\nu f = 0{,}50$, si avranno tante equazioni di 2° ordine in x le quali risolte ci daranno la dimensione voluta del nostro muro; nel quadro seguente trascrivo, e le equazioni e i valori dell'incognita dedotti da esse, per le singole sezioni:

Sezioni	Equazioni relative allo scorrimento	x
II	$1035 . x^2 + 27070 . x - 19970 = 0$	0,70
III	$1035 . x^2 + 46220 . x - 73500 = 0$	1,55
IV	$1035 . x^2 + 69300 . x - 152500 = 0$	2,10
V	$1290 . x^2 + 95550 . x - 414000 = 0$	4,08
VI	$1290 . x^2 + 118350 . x - 614000 = 0$	4,90
VII	$1290 . x^2 + 141440 . x - 858500 = 0$	5,85

Stabilità al rovesciamento. — Il rovesciamento tende ad avvenire intorno allo spigolo che si proietta in D (*fig.* 4 e 5); la forza che tende a produrre il rovesciamento è Q, la quale agisce con momento Qq, essendo q il suo braccio cioè $q = AH$: e vi si oppone P e V coi momenti Pp e Vv essendo $p = DY$, $v = DA$; onde per l'equilibrio avremo $Qq = Pp + Vv$; e per la stabilità, dicendo n^{IV} il coefficiente di stabilità relativo al rovesciamento:

$$Qq = n^{IV}(Pp + Vv) \quad . \; . \; . \; (6)$$

il coeff. n^{IV} suolsi prendere variabile fra $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{5}$. In quest'equazione P, p e v si possono assumere in funzione dell'x, spessore o lunghezza dei contrafforti ed archi di scarico, e ricaveremo da essa un altro valore di x. Applichiamo dunque la (6) alle varie sezioni, e cominciamo dal considerare la I e II supponendo in entrambe il muro continuo.

Abbiamo:

Sezione I. $Q = 485$; $q = 0{,}313$ quindi $Qq = 152$; inoltre si ha $V = 136$, e $v = \frac{1}{8}h + x = 0{,}117 + x$; quindi $Vv = 136 . x + 16$; infine il P si compone del prisma a sezione triangolare CDN il cui braccio è $\frac{2}{3}\overline{DN} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}h = \frac{1}{12}h$; e del parallelepipedo avente per base $ABCN$, il cui braccio è $\frac{1}{8}h + \frac{x}{2}$: per conseguenza sarà $Pp = 116 \cdot \frac{1}{12}h + 1975\left(\frac{1}{8}h + \frac{x}{2}\right)$

$Pp = 9{,}05 + 231 . x + 987 . x^2$; prendendo $n^{IV} = \frac{3}{5}$ e sostituendo in (6), si ha l'equazione $228 = 367 . x + 987 . x^2$; la quale risolta rispetto ad x ci dà: $x = 0{,}33$.

Sezione II. — In questa sezione abbiamo $Q = 5800$; $q = 1{,}093$ quindi sarà $Qq = 6330$; inoltre hassi $V = 1670$; $v = 0{,}41 + x$ quindi $Vv = 1670 . x + 685$; infine scomponendo come per la sezione I il P si ottiene:

$$Pp = 1410 . \frac{1}{12}h + 6890\left(\frac{1}{8}h + \frac{x}{2}\right) = 385 + 2820 . x + 3445 . x^2$$

Sostituendo questi valori in (6) si ottiene l'equazione:

$$9480 = 4490 . x + 3445 . x^2$$

da cui si ricava $x = 1{,}13$.

Comparando questi due valori di x ora ottenuti, coi corrispondenti ottenuti nel caso della stabilità allo scorrimento, si vede che questi sono minori di quelli; onde quelli saranno da adottarsi per avere la necessaria stabilità sotto entrambi gli aspetti.

Applichiamo ora la stessa equazione al caso del muro con archi di scarico; e vediamo come si possano formare separatamente i diversi termini di essa; anzitutto, siccome consideriamo un tratto di muro che intercede fra gli assi di due speroni successivi avremo invece di Q e V, il Q_1 e V_1 già registrati sopra: il q pure fu già registrato, onde facilmente otterremo per ciascuna sezione il momento Qq; inquanto poi al v, osservando la *fig.* 4, vediamo essere

$$v=\overline{DL}=\overline{DN}+\overline{NA}+\overline{AL};$$

e quindi sarà per le sezioni II, III e IV

$$v=\frac{1}{8}h+\frac{1}{5}h+x=\frac{13}{40}h+x,$$

e per le sezioni V, VI e VII

$$v=\frac{1}{8}h+\frac{1}{4}h+x=\frac{3}{8}h+x;$$

per conseguenza anche il momento Vv sarà facile ottenerlo. Vediamo il momento Pp; e per ottenerlo scomporremo il P in tre distinte parti, a ciascuna delle quali assegneremo il suo braccio speciale: il P si compone del prisma di muratura a sezione triangolare NCD, avente per braccio $\frac{2}{3}\,\overline{DN}$ cioè $\frac{1}{12}h$; del parallelepipedo di muratura avente per base $ABCN$, il cui braccio rispetto allo spigolo D è:

$$\overline{DN}+\frac{1}{2}\overline{AN}=\frac{1}{8}h+\frac{1}{10}h=\frac{9}{40}h$$

per le sezioni II, III e IV; e

$$=\frac{1}{8}h+\frac{1}{8}h=\frac{1}{4}h$$

per le altre tre; e infine si compone ancora del peso del prisma di muratura e terra che manca a formare il P sopra già trovato, che abbraccia archi di scarico, un contrafforte, la terra compresa fra e sopra quelli, e il cui braccio possiamo supporre eguale a $\overline{DQ}$, essendo $\overline{AQ}=\frac{1}{2}\overline{AL}$; purchè ben inteso trascuriamo il prisma di terra che ha per sezione BTS, prisma che avrebbe per iscopo di allontanare maggiormente dallo spigolo D il centro di gravità di quest'ultima parte di P, e che darebbe quindi un valore maggiore al Pp, diminuendone per conseguenza l'incognita x: trascurando quindi il termine in x^2 di P noi operiamo in favore della stabilità, mentre semplifichiamo di molto i nostri calcoli; poichè tenendo conto di esso avremmo tante equazioni di 3° grado da risolvere, invece di equazioni di 2°. Ritenendo dunque che DQ sia il braccio di quest'ultima parte di P, sarà rappresentato da quest'espressione:

$$\overline{DQ} = \frac{13}{14} h + \frac{x}{2}$$

per le sezioni II, III e IV; e

$$\overline{DQ} = \frac{3}{8} h + \frac{x}{2}$$

per le sezioni V, VI, VII. Con queste considerazioni potremo scrivere il termine Pp nel seguente modo:

$$Pp = 5\,\Pi' \left(\frac{1}{16} h^2 . \frac{1}{12} . h + \frac{1}{5} h^2 . \frac{9}{40} h \right) +$$

$$+ \text{termine di } P \text{ in } x \left(\frac{13}{40} h + \frac{x}{2} \right)$$

$$Pp = 10500 \left(\frac{1}{192} h^3 + \frac{9}{200} h^3 \right) + \text{termine di } P \text{ in } x \left(\frac{13}{40} h + \frac{x}{2} \right)$$

per le sezioni II, III e IV: ovvero ancora:

$$Pp = 527{,}2 \times h^3 + \text{termine di } P \text{ in } x \left(\frac{13}{40} h + \frac{x}{2} \right) \qquad (\beta)$$

Per le altre tre sezioni V, VI, VII avremo:

$$Pp = 10500 \left(\frac{1}{16} h^2 \cdot \frac{1}{12} h + \frac{1}{4} h^2 . \frac{1}{4} h \right) +$$

$$+ \text{termine di } P \text{ in } x \left(\frac{3}{8} h + \frac{x}{2} \right)$$

$$Pp = 711 . h^3 + \text{termine di } P \text{ in } x \left(\frac{3}{8} h + \frac{x}{2} \right) \qquad (\beta')$$

Trascriverò nei seguenti quadri i risultati ottenuti relativi ai singoli termini dell'equazione (6); e ai valori di x dedotti avendo ritenuto $n^{IV} = \frac{3}{5}$:

Sezioni	$Q_1 q$	v	$V_1 v$			Pp	x
II	31700	$1,067 + x$	$8350 \cdot x + 8900$		$1,067 + \frac{x}{2}$	$18600 + 28900 \cdot x + 14640 \cdot x^2$	0,59
III	175500	$1,825 + x$	$27000 \cdot x + 49250$	$\frac{13}{40} h + \frac{x}{2}$	$1,825 + \frac{x}{2}$	$93600 + 84200 \cdot x + 25000 \cdot x^2$	1,26
IV	509000	$2,59 + x$	$55500 \cdot x + 143800$		$2,59 + \frac{x}{2}$	$267000 + 179300 \cdot x + 37330 \cdot x^2$	1,50
V	1520000	$3,86 + x$	$127000 \cdot x + 490000$		$3,86 + \frac{x}{2}$	$781000 + 368300 \cdot x + 52755 \cdot x^2$	2,08
VI	2805000	$4,75 + x$	$191000 \cdot x + 907000$	$\frac{3}{8} h + \frac{x}{2}$	$4,75 + \frac{x}{2}$	$1440000 + 562000 \cdot x + 65305 \cdot x^2$	2,94
VII	4662500	$5,615 + x$	$267500 \cdot x + 1502000$		$5,615 + \frac{x}{2}$	$2400000 + 787000 \cdot x + 77960 \cdot x^2$	4,19

Confrontando i valori di x ottenuti nell'ipotesi della stabilità al rovesciamento, con quelli ottenuti prima nell'ipotesi della stabilità allo scorrimento, vediamo che questi sono tutti minori di quelli; onde quelli saranno da adottarsi come i valori cercati della nostra incognita.

Bisogna però che ora facciamo un osservazione. Nel calcolare la spinta del terrapieno nelle diverse sezioni, noi abbiamo supposto che si dovesse sostenere secondo la faccia verticale AB, contro cui supponemmo pure dovesse appoggiarsi la faccia verticale interna del muro continuo. Ma invece la parete resistente reale che si deve considerare è la SL; poichè tutta la massa composta di muratura e di terra, che in figura ci si presenta secondo la sezione $DLSBC$, si può ritenere come la massa resistente opposta al terrapieno per sostenerlo vincendone la spinta. Ora dunque se la parete che si sostiene è la LS, quale sarà la spinta del terrapieno? e sarà ella, la massa murale progettata, capace di sostenere questa spinta? Conviene perciò fare questa verifica, quindi è necessario stabilir bene qual è l'altezza del terrapieno nei singoli punti (*fig.* 4). La retta AN ci dà la traccia del piano di distacco in quella sezione, e noi abbiamo procurato di collocare il primo o più basso arco di scarico a tale altezza che stesse tutto al di sopra di quel piano, il che non sarebbe avvenuto per esempio se pq si fosse trovato in $p'q'$. Venendo ora a sostener il terrapieno non più contro la faccia AB, ma contro la LS; si vede tosto che l'altezza presentata dal terrapieno in quel piano è L_1S, distanza intercedente fra la traccia del piano di distacco e della faccia superiore del terrapieno, in quel piano verticale; converrà quindi per ciascnna sezione avere l'altezza rappresentata da L_1S: ora

$$\overline{L_1S} = \overline{AB} + \overline{TS} - \overline{L_1L}$$

ponendo $TS = i$, $L_1L = i_1$ $L_1S = h_1$ avremo $h_1 = h + i - i_1$ dovremo ora determinare separatamente i valori di i e i_1, il che si otterrà assai facilmente essendo:

$$i = x \,.\, \text{tang}\, \theta; \text{ e } i_1 = x \,\text{tang}\, \psi.$$

Questo sta bene pei tratti in cui vi sono gli archi di scarico; ma negli altri tratti in cui vi sono i contrafforti, l'altezza del terrapieno che si sostiene sarà $LS = h_2 = h + i$, poichè in questo sito la massa resistente presenta difatti la sezione $DLSBC$; mentre nei tratti fra i contrafforti la massa resistente presenta la sezione DAL_1SBC. Sarà pur facile ottenere questo h_2. Ottenute queste altezze, siccome nelle varie sezioni il piano di distacco rimane quale era prima, si potrà facilmente ricavarne la spinta sia col metodo analitico, sia più speditamente col metodo grafico, già usato. Tali costruzioni grafiche, io non ho segnato nella figura annessa, per non complicarla di troppo; però ne ho ricavato le spinte e qui sotto ne noterò i risultati, chiamando $R^1{}_m$ le spinte corrispondenti alle altezze h_1 e $R^2{}_m$ quelle relative alle h_2. Poscia scompongo queste spinte nelle loro componenti orizzontali e verticali; riferendo $R^1{}_m$ e loro componenti alla distanza intercedente fra due successivi contrafforti, cioè a 3 metri; e $R^2{}_m$ e loro componenti allo spessore e degli speroni, cioè a 2 metri.

Faccio i valori di P colle espressioni che sopra abbiamo registrato, sostituendo in esse i valori di x trovati ed adottati: ottenuto tutto questo coll'equazione $Q = \nu f(P + V)$, in cui tutto è noto ad eccezione di νf, trovo questo fattore: ora se suppongo che sia $f = 0{,}75$, essendo necessario per la stabilità allo scorrimento che sia ν minore o tutto al più eguale a $\frac{4}{5}$, ne risulta che per la stabilità in discorso dovrà essere νf minore, o tutto al più eguale a 0,60; dal valore ricavato di νf verifico se vi è, o no, questa stabilità.

Sezioni	i	i_1	h_1	h_2	R^1_m	R^2_m	Compon. di R^1_m riferite a 3 metri		Compon. di R^2_m riferite a 2 metri		$Q^1_3 \times Q^2_2$	$V^1_3 \times V^2_2$	P	νf
							Q^1_3	V^1_3	Q^2_2	V^2_2				
II	0,12	0,52	2,88	3,40	5760	6480	16621	4770	12460	3580	29080	8400	49140	0,505
III	0,36	1,00	4,98	5,98	19280	22500	55650	15960	43300	12400	98950	28360	161090	0,522
IV	0,48	1,36	7,09	8,45	38750	44800	111750	32040	86200	24680	197950	56720	325370	0,518
V	1,17	1,17	10,31	11,48	92000	114000	265500	76200	219200	62900	484700	139100	759500	0,54
VI	1,40	1,40	12,65	14,05	138700	171000	399000	114600	328600	94400	727600	209000	1136000	0,542
VII	1,68	1,68	15,00	16,68	194000	241000	559500	160500	463000	132400	1022500	292900	1611200	0,538

Vedendo che il valore di νf per le diverse sezioni è minore di 0,60, conchiuderemo che quel muro quale fu progettato presenta la voluta stabilità allo scorrimento contro la spinta del terrapieno, sebbene questa non sia precisamente quella da cui si è partito nel determinare le sue dimensioni. Occorrerà ancora verificare se la stessa stabilità la possiede al rovesciamento; perciò applicheremo l'equazione

$$Qq = n^{IV}(Pp + Vv) \;.\;.\;.\; (6).$$

Avvertiremo che essendo $Q = Q^1{}_3 + Q^2{}_2$ a ciascuna di queste parti di Q appartiene un braccio q particolare, e dicendo q^1 il braccio di $Q^1{}_3$ e q^2 il braccio di $Q^2{}_2$ sarà:

$$q^1 = \frac{1}{3} h_1; \qquad q^2 = \frac{1}{3} h_2$$

per conseguenza sarà pure

$$Qq = Q^1{}_3 q^1 + Q^2{}_2 q^2.$$

Il braccio ν si otterrà dalle sue espressioni registrate in una tavola qui sopra, sostituendo in esse i diversi valori di x trovati; poscia avremo $Vv = (V^1{}_3 + V^2{}_2)v$. Infine il termine Pp si conoscerà ricorrendo alle espressioni di esso che furono sopra registrate in funzione di x, sostituendovi i valori trovati di x: facendo adunque quanto venne ora indicato, e sostituendo i diversi termini nell'equazione di stabilità (6), si avrà in essa la sola incognita n^{IV}, dedotto il cui valore, se non è maggiore di $\frac{4}{5}$ è segno che anche sotto questo rispetto il muro progettato presenta la necessaria stabilità.

Registro nella tavola seguente i diversi risultati parziali ottenuti, non che i valori di n^{IV}.

Sezioni	$Q^1_3\ q^1$	$Q^2_2\ q^2$	$Q^1_3\ q^1 + Q^2_2\ q^2$	v	$v\left(V^1_3 \times V^2_3\right)$	$P\,p$	n^{IV}
II	21100	14080	35180	1,767	14850	46040	0,68
III	127400	86000	213400	3,375	95800	284100	0,56
IV	359000	243000	602000	4,69	266000	808300	0,56
V	1223000	840000	2063000	7,94	1110000	3163000	0,48
VI	2245000	1540000	3785000	9,65	2020000	5696000	0,49
VII	3780000	2570000	6350000	11,465	3360000	9675000	0,49

Siccome anche qui $n^{IV} < 0{,}8$, ne consegue che vi è stabilità.

Stabilità allo schiacciamento — Rimane per ultimo a verificare, se non vi è pericolo di rottura per lo *schiacciamento*. Perciò se si toglie (*fig.* 4) l'appoggio sottostante al muro, dovrassi sostituire ad esso una data reazione, che sarà quella appunto che esercitava detto appoggio contro il muro; questa reazione ammetterà due componenti, una orizzontale, e l'altra verticale; ora tutte le forze applicate a quel sistema devono farsi equilibrio: quindi sarà necessariamente la componente verticale della reazione eguale a $P + V$, e l'orizzontale eguale a Q, però di segno contrario.

Il punto d'applicazione della reazione dell'appoggio sia Z; pongo $Z\,K = d$; siccome tutte le forze del sistema debbono farsi equilibrio intorno al punto D, avremo:

$$Qq - Vv - Pp + (P + V)\,d = o$$

da cui si ottiene $d = \dfrac{Vv + Pp - Qq}{P + V}$ . . . (7)

si verrà così a conoscere il punto d'applicazione della pressione sulla base DA, cioè Z. Bisognerà conoscere questa pressione; e non avendo qui base rettangolare, si dovranno a tale scopo applicare formole adatte. Chiamo K' la nuova pressione riferita all' unità di superficie che agisce sullo spigolo di rotazione $D_1 D_2$; e K'' la pressione riferita all'unità di superficie che agisce sullo spigolo $F_1 F_2$. La variazione di pressione riferita all'unità di superficie che si ha passando da $D_1 D_2$ a $F_1 F_2$ sarà $K' - K''$.

Considerando una retta qualunque $\mu\nu$, parallela a $D_1 D_2$ e tale che disti da essa di $y = D_1 \mu$; ammettendo che la pressione riferita all'unità di superficie su rette parallele a $D_1 D_2$ comprese fra $D_1 D_2$ e $F_1 F_2$ varii di quantità proporzionali alla distanza che le dette parallele hanno dalla $D_1 D_2$; si ha, che la differenza fra le pressioni riferite all'unità di superficie che hanno luogo su $D_1 D_2$ e $\mu\nu$ viene data da $\frac{K' - K''}{m + x}\, y$, essendo $m = \overline{DA} = \overline{D_1 B_1}$ ed $x = \overline{AL} = \overline{B_1 F_1}$.

Così se consideriamo una retta $\mu_1 \nu_1$ tagliante i contrafforti, e diciamo $D_1 \mu_1 = y'$, per analogia la variazione di pressione riferita all'unità di superficie fra $D_1 D_2$ e $\mu_1 \nu_1$ sarà $\frac{K' - K''}{m + x}\, y'$. Quindi se vogliamo la pressione vera, intendiamo sempre riferita all'unità di superficie, che ha luogo in un punto qualunque della $\mu\nu$, dovremo togliere dalla pressione in $D_1 D_2$ la variazione che la medesima subisce passando da $D_1 D_2$ in $\mu\nu$; perciò sarà $K - \frac{K' - K''}{m + x} y$; analogamente la pressione in un punto qualunque della $\mu_1 \nu_1$ sarà $K' - \frac{K' - K''}{m + x}\, y'$

La pressione elementare poi che avrà luogo sopra una lista rettangolare $\mu\pi\nu\rho$ in cui $\mu\nu = l$ e $\mu\rho = dy$, sarà $\left(K' - \frac{K' - K''}{m + x}\right) l \,.\, dy \ldots (\alpha)$ così pure la pressione in una lista elementare della base in vicinanza di $\mu_1 \nu_1$ sarà:

$$\left(K' - \frac{K' - K''}{m + x}\, y'\right) e \,.\, dy' \ldots (\alpha_1)$$

in cui $e = \overline{F_1 U_1} + \overline{U_2 F_2}$ larghezza costante degli speroni. I momenti poi di queste pressioni elementari rispetto a $D_1 D_2$ saranno rispettivamente:

$$\left(K' - \frac{K' - K''}{m + x} y\right) l . y . dy \qquad (\beta)$$

$$\left(K' - \frac{K' - K''}{m + x} y'\right) e . y' . dy' \qquad (\beta_1)$$

La pressione su tutta la base rettangolare $D_1 B_1 B_2 D_2$ si avrà facendo la somma delle diverse pressioni elementari che hanno luogo sulla base stessa, cioè integrando la espressione (α) fra $y = o$ e $y = m$; così la pressione su tutta la base dei contrafforti $B_1 F_1 U_1 X_1 + X_2 U_2 F_2 B_2$, si otterrà integrando la (β) fra $y' = m$ e $y' = m + x$ e saranno

$$\int_0^m \left(K' - \frac{K' - K''}{m + x} y\right) l . dy \qquad (\alpha_2)$$

$$\int_m^{m+x} \left(K' - \frac{K' - K''}{m + x} y'\right) e . dy' \qquad (\alpha_3)$$

Ma la somma di quelle pressioni deve essere eguale alla pressione totale che si esercita sulla base del muro, che sappiamo essere $P + V$; quindi avremo:

$$P + V = \int_0^m \left(K' - \frac{K' - K''}{m + x} y\right) l . dy + \int_m^{m+x} \left(K' - \frac{K' - K''}{m + x} y'\right) e . dy' \qquad (8)$$

Infine il momento delle pressioni elementari, che agiscono sulla base rettangolare $D_1 B_1 B_2 D_2$ rispetto allo spigolo $D_1 D_2$, e quello delle pressioni elementari che hanno luogo sulla base dei contrafforti, rispetto allo stesso spigolo, sarà dato il primo dall'integrazione della (β) estesa fra i limiti $y = o$ e

$y = m$ e il secondo dall'integrazione di (β_1) estesa fra $y' = m$ e $y' = m + x$, ed avremo:

$$\int_0^m \left(\mathrm{K}' - \frac{\mathrm{K}' - \mathrm{K}''}{m + x} y \right) l . y . dy \qquad (\beta_2)$$

$$\int_m^{m+x} \left(\mathrm{K}' - \frac{\mathrm{K}' - \mathrm{K}''}{m + x} y' \right) e . y' . dy' \qquad (\beta_3)$$

La somma poi di questi due momenti deve essere per l'equilibrio del sistema, eguale al momento $(P + V)\,d$, della pressione totale $P + V$, rispetto allo stesso spigolo; onde risulterà quest'altra equazione:

$$(P + V)\,d = \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_0^m \left(\mathrm{K}' - \frac{\mathrm{K}' - \mathrm{K}''}{m + x} y \right) l . y . dy + \\ \displaystyle + \int_m^{m+x} \left(\mathrm{K}' - \frac{\mathrm{K}' - \mathrm{K}''}{m + x} y' \right) e . y' . dy' \end{array} \right\} \quad (9)$$

Avremo così due equazioni (8)e (9) con due incognite, K'e K'', le quali si potranno perciò determinare.

Supposto adunque di aver risolto le due equazioni (8) e (9) e di averne ricavato i valori di K' e K'', vediamo i varii casi che si possono presentare.

Potranno succedere due casi; o K' e K'' sono dello stesso segno, ovvero di segno contrario.

1° *Caso*. Quando K' e K'' sono dello stesso segno, sui due spigoli $D_1 D_2$ e $F_1 F_2$ del muro ha luogo pressione, quindi tutta la base è premuta; in tal caso si prende quella di queste due pressioni che è la maggiore, generalmente sarà $K' > K''$, e si stabilisce la seguente equazione, detta di stabilità, $n'' R'' = K'$, in cui n'' è il coefficiente di stabilità allo schiacciamento, R'' il coefficiente di rottura allo schiacciamento; sostituendo in quell'equazione il valore di K' trovato, e quello di R'' che viene dato da tavole apposite, conosciuti i materiali di cui si vuol costrurre il muro; si potrà dedurre il valore di n'';

si osserva questo, e se si trova minore o tutto al più eguale ad $\frac{1}{10}$ è segno che in quella costruzione non vi è pericolo di rottura per schiacciamento.

2° *Caso.* — Quando poi avvenisse che K' e K'' fossero di segno diverso, avremo pressione sullo spigolo $D_1 D_2$, e tensione sullo spigolo $F_1 F_2$; quindi in questo spigolo sarà sviluppata resistenza alla tensione, resistenza sostenuta dalla tenacità delle malte. Siccome però tale tenacità può venir meno col tempo, e in certe circostanze speciali, così il costruttore non può confidare in essa, epperciò si suole di essa fare astrazione. In questo caso sullo spigolo $F_1 F_2$ invece di tensione, avremo distacco, e sarà necessario determinare sulla base la linea, che separa la parte premuta dalla parte non premuta. Che se avessimo $KZ < \frac{1}{3} D_1 B_1$ (CURIONI - *Resistenza dei materiali*, pag. 326) per quanto si conosce da tale teoria basterebbe prendere $D_1 \mu = 3 KZ$; la parte premuta sarebbe il rettangolo $D_1 \mu \nu D_2$; sulla $\mu \nu$ si avrebbe pressione unitaria zero; e la massima pressione si avrebbe in tutti i punti dello spigolo $D_1 D_2$, giacchè sono questi i punti che maggiormente distano dalla linea di separazione $\mu \nu$, detta altrimenti asse neutro. Tale pressione poi vien data dall'equazione seguente $K' = \frac{2(P+V)}{3dl}$; conosciuto K' facendo uso dell'equazione di stabilità $n'' R'' = K'$ se ne determina il coefficiente di stabilità, come fu visto testè.

Ma quando invece fosse $KZ > \frac{1}{3} D_1 B_1$, vuol dire che la parte premuta si estende anche nei contrafforti, ed allora ha luogo la determinazione della linea che separa la parte premuta dalla non premuta sulla base dei contrafforti. Tale determinazione si può ottenere colle formole che ci porge il prof. Curioni nel suo *Trattato* della Resistenza dei materiali al n. 136.

Applicando quelle formole al caso nostro le scriveremo così:

$$P + V = K \Sigma \omega y \qquad (P + V) y_1 = K \Sigma \omega y^2$$

donde si ricava:

$$y_1 = \frac{\Sigma\,\omega\,y^2}{\Sigma\,\omega\,y} \qquad (\gamma)$$

in cui K è una quantità costante, ω un elemento superficiale, y l'ordinata del centro di tale elemento per rispetto a un certo determinato sistema di assi, y_1 la distanza che la retta, la quale separa la parte premuta dalla parte che non sostiene sforzo alcuno, ha dal centro di pressione Z conosciuto.

Nel caso nostro si avrebbe (*fig.* 4)

$$y_1 = Z\zeta = K\zeta - KZ = Y - d \qquad (\delta)$$

quindi:

$$\Sigma\,\omega\,y = \int_0^m l.dy.y + \int_m^Y e.dy'.y' = \frac{1}{2}\,l\,m^2 + \frac{1}{2}\,e\,(Y^2 - m^2)$$

$$\Sigma\,\omega\,y^2 = \int_0^m l\,dy.y^2 + \int_m^Y e\,dy'.y'^3 = \frac{1}{3}\,l\,m^3 + \frac{1}{3}\,e\,(Y^3 - m^3)$$

sostituendo queste espressioni in (γ) si ricava l'y_1 e poscia colla (δ) il valore di Y; così sarebbe determinata quella linea di separazione. Conosciuta questa si ricorre all'equazione $K = \frac{2(P+V)}{\Omega}$ in cui si pone per Ω la base premuta, la quale colla determinazione ora fatta si conoscerà perfettamente: e per P e V i noti valori del peso del muro, e della componente verticale della spinta; e da quest'equazione si ricava il K', pressione massima riferita all'unità di superficie su quella base premuta, e che naturalmente ha luogo sullo spigolo D_1D_2. Per ultimo colla nota equazione di stabilità $n''R'' = K'$ si rileverà, come si è fatto per gli altri casi se esiste la necessaria resistenza allo schiacciamento.

Applicheremo ora l'equazione (7) alle varie sezioni del nostro caso per trovare il punto d'applicazione della pressione, e perciò avvertiremo che:

$$Vv = (V_3{}^1 + V_2{}^2)\,v\ ; \qquad Qq = Q_3{}^1 q^1 + Q_2{}^2 q^2\ ; \qquad P + V = P + V_3{}^1 + V_2{}^2$$

sostituendo i valori noti di queste quantità in quell'equazione se ne ottengono i seguenti risultati:

Sezioni	II	III	IV	V	VI	VII
d	0,45	0,88	1,24	2,46	2,92	3,51

Per le sezioni I e II poi, nella supposizione del muro continuo, converrà prima formarci quei vari termini dell'equazione, poichè non li conosciamo ancora; ciò facendo otteniamo:

Sezioni	Qq	v	Vv	Pp	P	$P+V$	d
I	152	0,487	66	230	846	982	0,15
II	6330	1,65	2760	9455	9940	11610	0,50

In queste sezioni I e II, siccome la base premuta è rettangolare e di più $d < \frac{1}{3} v$, essendo $d = \overline{KZ}$ e $v = \overline{D_1 B_1}$ la massima pressione unitaria che ha luogo sulla base sarà data da $K = \frac{2(P+V)}{3.d}$, poichè consideriamo una lunghezza di muro eguale all'unità; e quindi applicandola a quelle due sezioni, si ha:

$$K = 4460 \text{ per la sezione I;}$$

$$K = 15500 \text{ per la sezione II.}$$

L'equazione di stabilità è $n'' R'' = K$; sostituendo in questa i valori di K trovati, e supponendo di usare materiali il cui coefficiente di rottura, R'', sia di 600000 kg. per metro quadrato; avremo rispettivamente per la I sezione $n'' = \frac{1}{73}$, e per la II $n'' = \frac{1}{26}$: il che significa che non vi è in quel tratto alcun pericolo di rottura per schiacciamento.

Per il tratto di muro poi in cui si è fatto uso di contrafforti ed archi di scarico, per ottenere i valori delle pressioni K' e K'', dobbiamo ricorrere alle equazioni (8) e (9); eseguendo perciò gl'integrali indicati in esse, avremo:

$$P+V = K'(lm+ex) - (K'-K'')\left(\frac{l}{m+x}\,\frac{m^2}{2} + \frac{e}{m+x}\,\frac{(m+x)^2-m^2}{2}\right) \quad (8)'$$

$$(P+V)d = K'\left(\frac{m^2}{2}\,l + \frac{(m+x)^2-m^2}{2}\,e\right) -$$

$$-(K'-K'')\left(\frac{l}{m+x}\,\frac{m^3}{3} + \frac{e}{m+x}\,\frac{(m+x)^3-m^3}{3}\right) \quad (9)'$$

Ritenendo che $l = 5^m$, $e = 2^m$, $m = \overline{D_1B_1}$, $x = \overline{B_1F_1}$, avremo per ciascuna sezione i risultati che trascrivo nella tavola seguente, in cui noto pure i valori di K' e K'' dedotti dalla risoluzione di queste equazioni:

Sezioni	m	$m + x$	$(P + V)\,d$	Equazioni di K' e K''	K'	K''
II	1,067	1,767	25900	$57540 = 6{,}73 \,.\, K' - 2{,}725\,(K' - K'')$ $25900 = 4{,}79 \,.\, K' - 2{,}76\,(K' - K'')$	12750	— 2425
III	1,825	3,375	166000	$189450 = 12{,}22 \,.\, K' - 4{,}84\,(K' - K'')$ $166000 = 16{,}37 \,.\, K' - 9{,}35\,(K' - K'')$	23840	— 2525
IV	2,59	4,69	474500	$382090 = 17{,}15 \,.\, K' - 6{,}87\,(K' - K'')$ $474500 = 32{,}09 \,.\, K' - 18{,}08\,(K' - K'')$	33630	— 5210
V	3,86	7,94	2210000	$898600 = 27{,}46 \,.\, K' - 10{,}76\,(K' - K'')$ $2210000 = 85{,}30 \,.\, K' - 49{,}30\,(K' - K'')$	47280	10300
VI	4,75	9,65	3930000	$1345000 = 33{,}55 \,.\, K' - 13{,}03\,(K' - K'')$ $3930000 = 126{,}84 \,.\, K' - 73{,}03\,(K' - K'')$	58460	11050
VII	5,615	11,465	6690000	$1904100 = 39{,}77 \,.\, K' - 15{,}46\,(K' - K'')$ $6690000 = 178{,}5 \,.\, K' - 102{,}45\,(K' - K'')$	69500	13650

Dai risultati registrati in questo quadro, vediamo che nelle sezioni II, III e IV il K'' è negativo, il che vuol dire che non tutta la base del muro è premuta. Bisognerebbe dunque determinare quella linea di separazione fra la parte premuta e quella non premuta, della cui determinazione abbiamo qui sopra accennato il modo. Questa determinazione riesce però piuttosto lunga, vediamo se è possibile evitarla. Se la base premuta fosse rettangolare si prenderebbe su di essa $\mu_1 D_1 = 3d$ e questo sarebbe un lato della parte premuta; siccome però non è rettangolare e quindi la porzione $\gamma_1 X_1 X_2 \gamma_2$ non sopporta pressione di sorta, potrà avvenire che la mancanza di tale porzione di superficie premuta faccia avvicinare maggiormente alla $F_1 F_2$ quella certa retta $\mu_1 \nu_1$ di separazione, onde sarebbe in tal caso $D_1 \mu_1 > 3d$. A ogni modo non sarà mai, che la mancanza di quella parte di superficie, faccia diventare $D_1 \mu_1$ minore di $3d$. Se noi dunque supponiamo $D_1 \mu_1 = 3d$ avremo una certa superficie premuta che ci sarà assai facile determinare, che sarà minore della vera, e nella supposizione che questa sia la vera, potremo determinare la massima pressione unitaria che sopporta; siccome $K = \frac{2(P+V)}{\Omega}$ mettendo per Ω un valore minore del vero, avremo sempre per K un valore maggiore del vero; e se anche con tale pressione è ancora soddisfatta la stabilità allo schiacciamento, lo sarà maggiormente colla vera pressione.

Dicendo Ω la superficie premuta nell'ipotesi fatta abbiamo:

Sezioni	Ω	K
II	5,92	19400
III	10,77	35200
IV	15,21	50300

Sostituendo questi tre valori di K per le prime tre sezioni, e quelli di K' registrati nella tavola precedente, per le tre ultime, nell'equazione di stabilità $n''R''=K$, in cui porremo pure $R''=600000$, deducesi il valore del coefficiente di stabilità per ciascuna sezione:

Sezioni	II	III	IV	V	VI	VII
n''	$\frac{1}{31}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12,7}$	$\frac{1}{10,3}$	$\frac{1}{8,7}$

da cui si scorge che per la sezione VII sarebbe dubbia la stabilità allo schiacciamento se si usasse materiali per cui $R''=600000$; bisognerebbe quindi, per un tratto prossimo a tale sezione, usare muratura più resistente, almeno per una certa altezza, che si potrebbe benissimo determinare; per esempio, muratura in pietrame. Invece per tutte le altre sezioni non si avrebbe alcun pericolo di rottura per schiacciamento.

L'enunciato del tema dice ancora, che il suolo atto a buone fondazioni, trovasi alla profondità di m. 5,50 sotto il livello del suolo stradale; a tale profondità dunque dovremo portare le basi del nostro muro, e credo che il mezzo più conveniente per arrivarvi sia quello di approfondire tutte le costruzioni murali che sono a farsi, cioè muro continuo e contrafforti, sino a quel livello, facendo i voluti risalti fra il muro e la sua base, come scorgesi nel disegno annesso.

Il progetto fatto, e domandato dal tema, è un progetto che può stare benississimo come studio della spinta delle terre, e come applicazione ad un caso particolare del sistema di muro di sostegno con contrafforti ed archi di scarico, ma come progetto da adottarsi in pratica non potrebbe stare poichè il sistema richiesto di muro di sostegno non è in questo caso nè il più conveniente nè il più economico, come lo mostrano le condizioni speciali del caso proposto e lo comprovano abbastanza i risultati ottenuti.

PASTERIS GIOVANNI.

MURO DI SOSTEGNO — DETERMINAZIONE GRAFICA DELLA SPINTA DELLE TERRE