

le grandezze un sistema coerente di unità di misura (ad esempio il sistema M.K.S.A. in cui μ è espresso in decapoise e λ in watt/m, °C). Per l'integrazione della (1) occorre tener presente che i coefficienti μ e λ sono funzioni della temperatura. Nel campo abbastanza ristretto (meno di un centinaio di gradi) che interessa la lubrificazione il coefficiente μ può essere approssimativamente rappresentato da funzioni di tipo esponenziale come la:

$$\mu = m e^{-n t} \quad (2)$$

in cui m ed n sono costanti dipendenti dalla qualità del lubrificante. Il coefficiente λ decresce in tale campo pressochè linearmente con t , ma in complesso in misura molto meno sentita di μ , tanto che in prima approssimazione si potrà adottare per esso un valore medio costante.

Contrassegnando con gli indici p , s , o le grandezze relative rispettivamente alle superfici del perno e del supporto ed alla superficie intermedia in cui è raggiunta la massima temperatura, e trascurando d'altra parte le variazioni assiali dei vari parametri l'Hagg (*) trova:

$$t = \frac{1}{n} \log_e \left(e^{\frac{np}{\lambda}} + \frac{mnp\omega}{\lambda} w - \frac{mn}{2\lambda} w^2 \right) \quad (3)$$

che mostra il legame fra la distribuzione delle temperature e quella delle velocità.

Cesare Codegone

Il fenomeno della butteratura e la teoria della lubrificazione negli ingranaggi

Richiamata la natura del fenomeno della butteratura, si determinano, utilizzando i risultati di una precedente memoria e nell'ipotesi della lubrificazione perfetta, i valori delle pressioni massime pmax in una coppia di denti in presa, lungo il segmento dei contatti, ponendoli a confronto coi valori delle tensioni massime di compressione secondo la teoria di Hertz. Si calcola inoltre l'espressione della derivata dp/dt della pressione p rispetto al tempo t in un punto del profilo del dente e se ne esamina la variazione lungo il segmento dei contatti, per ambedue i denti di una coppia in presa, introducendo anche, come parametro $p_{max}^0 \left(\frac{dp}{dt} \right)_{x=0} (x=0 \text{ è la sezione ristretta del meato})$ e ponendo in relazione i valori delle grandezze calcolate con alcuni risultati sperimentali esistenti.

1. *Ragione e argomento del presente studio.* - Nel numero di ottobre 1950 della rivista « Konstruktion » è riportato un breve resoconto delle memorie presentate da svariati autori in alcune giornate di studio tenute nel luglio 1950 presso la Technische Hochschule di Braunschweig e dedicate ai problemi degli ingranaggi.

In particolare si riferisce su alcune ricerche, tuttora in corso, di C. Weber, tendenti a porre in relazione il problema della butteratura degli ingranaggi coi risultati delle teorie e della lubrificazione e del contatto fra superficie elastiche curve secondo Hertz.

Poichè lo stesso argomento aveva fatto oggetto, nel 1948, di un mio studio preliminare, che poi, per ragioni varie non era stato pubblicato, la notizia che sono in corso ricerche sull'argomento mi induce a riprendere e a pubblicare in questa sede il mio studio.

Il valore massimo della temperatura si ottiene ponendo nella (3) ω , in luogo di ω , essendo:

$$\omega_p = \frac{w_p}{2} + \frac{\lambda}{n w_p} \left(\frac{1}{\mu_p} - \frac{1}{\mu_s} \right) \quad (4)$$

Se il perno non trasmette calore all'esterno ed il rapporto m a ω , $^2/2$ λ è piccolo rispetto all'unità si ha semplicemente:

$$t_p \approx t_s + \frac{\mu_s}{2\lambda} w_p^2 \quad (5)$$

In problemi concreti si porrà un limite superiore a t_s , quindi un limite inferiore a μ , effettuando, se occorre, un raffreddamento artificiale del supporto (allo scopo di ridurre t_s), oppure un rinnovamento forzato del lubrificante, nel qual caso occorrerà tener conto anche del gradiente assiale di temperatura.

(*) Cfr. A. G. HACC, *Journ. Appl. Mech.*, 12, A-126; 1945. Il Kingsbury (*Mech. Eng.*, 1933, pag. 685) ha invece risolto il problema risolvendo graficamente in un caso singolo gli integrali di $(2/\mu) dt$ e di $p \omega da i$ quali esso dipende. La verifica sperimentale è risultata discretamente soddisfacente.

e cavità che portano ad un progressivo deterioramento della superficie stessa.

L'intimo meccanismo di questo fenomeno, che in passato è stato attribuito ad usura per attrito [9] e ad asportazione di particelle metalliche, oppure a corrosione per attrito manifestantesi nelle piccole crepe superficiali [11], è stato notevolmente illuminato dalle belle ricerche di M. Ulrich [14], [15] e dei giapponesi T. Nishihara e T. Kobayashi [12].

Per effetto delle sollecitazioni locali di contatto di tipo Hertziano, il punto di massima sollecitazione effettiva (ad es. il punto di tensione ideale massima, se a tale ipotesi di rottura si fa ricorso) è posto ad una certa distanza sotto alla superficie del corpo stesso [7]. Col ripetersi dei cicli di sollecitazione, se il carico supera il valore corrispondente alla resistenza indefinita, si produce in tale punto, dopo un certo numero di cicli, il cedimento per fatica del materiale. La rottura si propaga quindi alla superficie e l'olio in pressione che penetra entro le crepe così prodotte, insieme, probabilmente, all'effetto di azioni di attrito misto, produce l'asportazione di particelle di materiale, cui corrisponde il caratteristico aspetto della butteratura.

Si tratta dunque, in sostanza, di un fenomeno di fatica, per il quale appunto, in un certo numero di casi particolari, Nishihara e Kobayashi hanno potuto determinare le curve di Wöhler come per un qualsiasi altro tipo di sollecitazione alternata.

Poichè, come hanno dimostrato le esperienze di Way [16], il fenomeno della butteratura non si produce se manca la lubrificazione o se la pellicola di lubrificante viene lacerata, non sembra inutile il cercare di porre in relazione a tale fenomeno i risultati e le formule della teoria della lubrificazione nelle dentature cilindriche a denti dritti, stabiliti dall'A. in precedenti lavori [4, 5].

In particolare la teoria svolta permette di determinare, nei limiti di approssimazione che le sono propri, quale sia, in una data posizione relativa dei denti, con un dato lubrificante e con date velocità delle ruote, il valore della pressione massima nello strato lubrificante, e con quale legge varii tale pressione massima allo spostarsi del punto di contatto lungo la retta dei contatti.

Nell'applicazione della teoria è opportuno non dimenticare che svariate cause tendono a far differire dalle indicazioni della teoria stessa la realtà del fenomeno.

Si osserva anzitutto che per gli ingranaggi di acciaio, ai quali, come ai più importanti della pratica, si riferiscono, per quanto a me consta, le ricerche esistenti, le pressioni necessarie a produrre la butteratura sono così elevate che ne risultano spessori minimi del meato dell'ordine di grandezza del micron e anche minori; ne segue che la applicazione della teoria della lubrificazione perfetta non può in questi casi rappresentare che una larga approssimazione.

Poichè poi, come è illustrato al paragr. 3, le pressioni nel velo lubrificante risultano dell'ordine di grandezza di quelle dovute al contatto secondo

la teoria di Hertz, una teoria più precisa dovrebbe mettere in conto anche la variazione di forma dei profili per effetto delle sollecitazioni locali nel velo lubrificante.

Tuttavia, tenuto conto che l'esistenza del fenomeno della butteratura è condizionata, come già detto, dall'esistenza della lubrificazione, non sembra da escludere che, da un punto di vista generale, l'applicazione della teoria della lubrificazione perfetta possa fornire indicazioni di orientamento non prive di interesse.

2. *Valore della pressione massima in una data posizione di una coppia di denti in presa.* - Detti: r, r' i raggi di curvatura dei denti nel punto di massimo accostamento; ω, ω' le velocità angolari delle due ruote, h , la distanza dei punti di massimo accostamento (spessore minimo del meato), z la distanza del punto di contatto dei denti dal punto di contatto delle primitive, μ la viscosità assoluta del lubrificante e posto (x =ascissa nel senso del meato, a partire dalla sezione di minimo spessore):

$$(1) \quad \zeta = \frac{r' - r}{2 r r'} + \frac{1}{\lambda^2} = \frac{r + r'}{2 r r' h_0} \quad ; \quad \bar{z} = \frac{z}{\lambda}$$

si trovò in precedenti lavori [4, 5] che la pressione p , qualora si trascuri, come nel caso degli ingranaggi è lecito fare, l'effetto di una lubrificazione per accostamento, è espressa dalla:

$$(2) \quad p = \frac{3}{4} \mu (\omega + \omega') (e\bar{z} + 1) \frac{\lambda^3}{h^3} A$$

essendo:

$$(3) \quad A = - \frac{\zeta(1 + 3\bar{z}^2)}{1 + \zeta^2} + 2\zeta \frac{(1 + \bar{z}^2)}{(1 + \zeta^2)^2} + \frac{\bar{z}(1 + 3\bar{z}^2)}{1 + \zeta^2} - (1 - 3\bar{z}^2) (\operatorname{arctg} \zeta + \operatorname{arctg} \bar{z})$$

in cui \bar{z} è la radice di una equazione complessa, che può ritenersi con buona approssimazione abbia in ogni caso il valore $\bar{z} = 0,474$.

Nello stesso lavoro fu visto che il valore massimo della pressione si ha all'ascissa $Z = z$. Per la (3), il valore corrispondente di A vale:

$$A_{\max} = 0,4855$$

Ricordiamo d'altra parte la espressione di h_0 , [4], (B dipende dal valore di \bar{z} e può ritenersi che abbia in ogni caso il valore $B = 1,633$; N è la forza complessiva per unità di lunghezza del dente):

$$(4) \quad h_0 = \frac{3 \mu B (\omega + \omega')}{2 N (r + r')^2} [3(r' - r) + 2 r r'] r r'$$

e sostituendola nella seconda delle (1) e quindi nella (2), tenuto conto delle (1), si ottiene per la P_{\max} l'espressione:

$$(5) \quad P_{\max} = \frac{A_{\max} N}{B \lambda} = \frac{A_{\max} (r + r')^{3/2}}{\sqrt{3} B^{3/2} r r'} \frac{1}{\sqrt{3} (r' - r) + 2 r r'} \frac{N^{3/2}}{\sqrt{\mu (\omega + \omega')}}$$

La (5) ci dice fra l'altro che la p_{max} è maggiore quando z è negativo, cioè quando la velocità di scorrimento relativa z ($\omega + \omega'$) delle due superficie lubrificate è di senso tale da contrastare l'effetto di lubrificazione dovuto alla rotazione relativa ($\omega + \omega'$).

Negli ingranaggi ad evolvente, alla considerazione dei quali, come già si è fatto nei precedenti lavori, si intende qui di limitarsi, si ha, detti R, R' i raggi delle primitive, θ l'angolo di pressione:

$$(6) \quad r = R' \sin \theta - \delta \quad r' = R \sin \theta + \delta,$$

e quindi, posto:

$$(7) \quad \tau = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{R}{R'} = \text{rapporto di trasmissione}; \quad \alpha = \frac{\delta}{R \sin \theta};$$

e introdotta la forza periferica per unità di lunghezza del dente:

$$(8) \quad Q = N \cos \theta,$$

la (5) può anche scriversi:

$$(9) \quad p_{max} = p_0 \cdot f(z)$$

essendo ($v = R \omega = R' \omega'$):

$$(10) \quad p_0 = p_{max}(z=0) = \frac{2 A_{max}}{\sqrt{3} B \mu^2} \frac{Q}{\sin 2\theta} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{z(\omega + \omega')}} = \frac{2 A_{max}}{\sqrt{3} B \mu^2} \frac{1 + \tau}{(\sin 2\theta)^{3/2}} \frac{Q}{R} \sqrt{\frac{Q}{\mu v}}$$

la pressione massima che si ha nel punto $z=0$, cioè quando il contatto è nel punto di contatto delle primitive, ed avendo posto:

$$(11) \quad f(z) = \frac{1}{(1 - \tau z)(1 + z)} \sqrt{1 + z(1 - \tau)/2}$$

Risulta dalle (9), (10) che la p_{max} cresce secondo la potenza $3/2$ della forza periferica Q e della curvatura relativa ($1/R + 1/R'$) delle primitive (cioè più che proporzionalmente a queste grandezze), mentre è inversamente proporzionale alla radice quadrata della viscosità assoluta e della velocità angolare relativa ($\omega + \omega'$).

3. Confronto fra la p_0 e la τ_{max} secondo Hertz.

È interessante confrontare il valore della p_{max} col valore della tensione massima di compressione secondo la teoria di Hertz, espressa dalla nota formula:

$$(12) \quad \sigma_{max} = 0,410 \sqrt{NE \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right)},$$

con:

$$(13) \quad \frac{1}{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \right)$$

(E_1, E_2 = moduli di elasticità normale dei due denti a contatto).

Limitiamoci qui dapprima per semplicità alla

considerazioni del contatto nel punto $z=0$ ($f(z) = -1$), cioè nel punto di contatto delle primitive, come si suol fare nella applicazione usuale della formula di Hertz per il calcolo all'usura.

Detti n il numero di denti del rochetto, m il modulo, $V = R \omega$ la velocità periferica delle primitive, dalle (10), (12), tenute presenti le (6), (7) e ritenendo $B = 1,633$, si deduce con facili passaggi:

$$(14) \quad \frac{p_0}{\sigma_{max}} = \frac{0,643}{\sin 2\theta} \sqrt{\frac{Q}{n m E}} \sqrt{1 + \tau},$$

dove:

$$(15) \quad 0,643 = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{A_{max}}{0,410 B \mu^2}$$

Il rapporto p_0/σ_{max} è quindi proporzionale al carico Q , e diminuisce al crescere di μ e di V .

Se si svolge qualche esempio numerico, si verifica facilmente che tale rapporto è dell'ordine di grandezza dell'unità, cioè la p_0 è, come la τ_{max} , dell'ordine di grandezza di qualche decina di kg/mm^2 , cioè di qualche migliaio di atmosfere. Ne segue anche, essendo le p_0 così elevate, che un calcolo più perfezionato dovrebbe tener conto delle deformazioni elastiche locali da esse prodotte, dato che esse fanno variare in una certa misura la forma del profilo del dente¹.

4. Variazione della p_{max} lungo la linea dei contatti. - La legge di variazione della p_{max} lungo la retta dei contatti è espressa dalla funzione $f(z)$ definita dalla (11).

La variabile z è legata al rapporto

$$(16) \quad z = \frac{s}{p}$$

fra l'arco s di cui hanno rotolato le primitive affinché il contatto passasse dal centro C di istantanea rotazione al punto di contatto distante di r da C , e il passo p , dalla relazione

$$(17) \quad z = \frac{\delta}{R \sin \theta} = \frac{2\pi s \cos \theta}{n p \sin \theta} = \frac{2\pi}{n} \cot \theta \cdot z_1$$

Si assumono z, z_1, z_2 negativi in accesso, positivi in recesso.

Poiché, come è ben noto, non possono aversi contatti all'infuori dell'intervallo $-R \sin \theta \leq \delta \leq R' \sin \theta$, basta limitarsi a considerare la variazione della $f(z)$ nell'intervallo $-1 \leq z \leq 1/\tau$.

Negli estremi di tale intervallo si ha $f(z) = \infty$. Derivando rispetto ad z il denominatore della (11), si riconosce che la derivata può annullarsi solo quando sia soddisfatta l'equazione:

$$(18) \quad \tau z^2 - \frac{4}{3} z \left[\frac{3}{4} (1 - \tau) - 2 \frac{\tau}{1 - \tau} \right] - 1 = 0,$$

¹ Un tale studio, in base al ricordato riassunto su « Konstruktion », è stato intrapreso da C. Weber, ed è tuttora in corso di svolgimento. Dal riassunto stesso l'effetto della variazione della forma del profilo per deformazioni elastiche risulterebbe assai notevole.

cioè per:

$$(19) \quad z = \frac{(0,3\tau^2 - 1,4\tau + 0,3)}{\tau(1 - \tau)} + \frac{\sqrt{(0,3\tau^2 - 1,4\tau + 0,3)^2 + \tau(1 - \tau)^2}}{\tau(1 - \tau)}$$

Si riconosce facilmente che la soluzione col segno meno è da escludere, perchè porta a un valore $z < -1$; rimane da considerare la soluzione col segno più, la quale rappresenta un massimo del denominatore della $f(z)$, cioè un minimo della $f(z)$. Tale minimo si produce nel punto $z=0$, cioè nel centro di istantanea rotazione per ruote uguali ($\tau=1$); e si sposta gradatamente verso valori maggiori di z , fino a raggiungere il punto $z = \infty$, per $\tau=0$ (coppia rochetto-dentiera).

La tabellina che segue riporta, in funzione di τ , i valori di z per cui la $f(z)$ ha un minimo.

τ	z	$1/\tau$
1	0,000	1,000
0,9	0,069	1,111
0,8	0,156	1,250
0,7	0,267	1,429
0,6	0,415	1,667
0,5	0,621	2,000
0,4	0,928	2,500
0,3	1,436	3,333
0,2	2,445	5,000
0,1	5,455	10,000
0,0	∞	∞

In fig. 1 sono rappresentati gli andamenti delle funzioni $f(z)$ per vari valori di τ , entro gli intervalli $-1 \leq z \leq 1/\tau$. Si vede che in punti $\pm \alpha$, simmetrici rispetto al punto $z=0$, si hanno valori maggiori per l'ascissa negativa che per quella positiva.

Per dentature con proporzionamento normale, se si suppone, come di solito accade, movente il rochetto e cedente la ruota, il segmento dei contatti in accesso: $z_1 p \cos \theta$, è più lungo del segmento in recesso: $z_2 p \cos \theta$. D'altra parte, se si ammette che il rapporto fra l'arco d'azione e il passo sia compreso, come di solito accade, fra 1 e 2, si ha una sola coppia in presa nell'intervallo da $(z_1 - 1)$ a $(1 - z_2)$, essendo $z_2 - 1 < (1 - z_1)$.

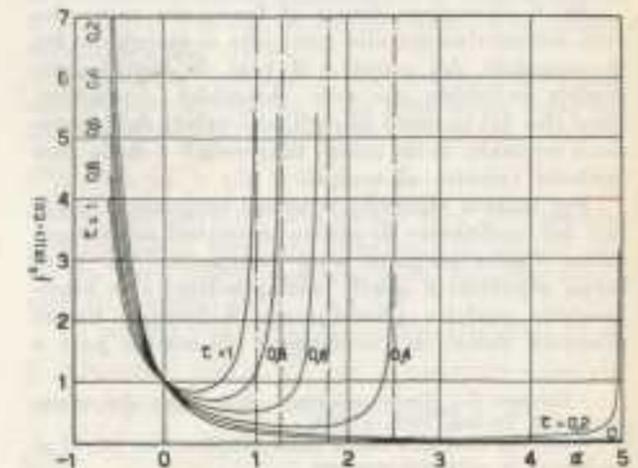
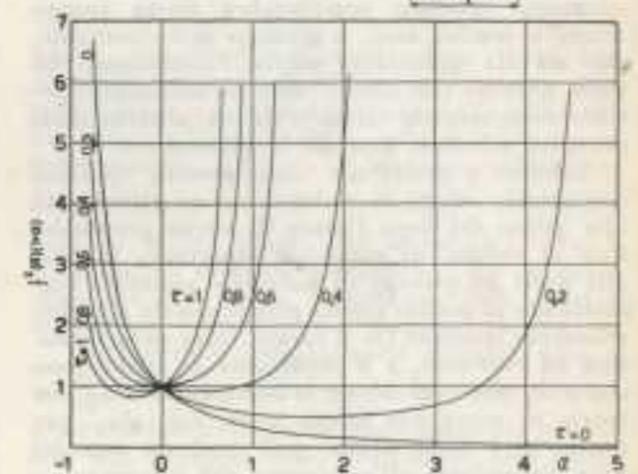
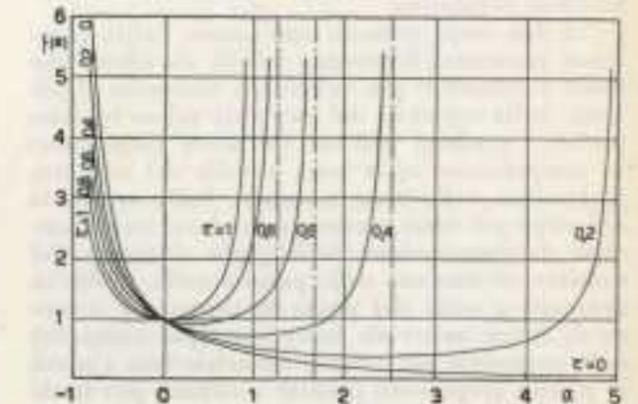
Se perciò, senza entrare nella spinosa questione della ripartizione del carico fra le varie coppie di denti in presa simultanea, ci limitiamo a considerare ciò che accade quando è in presa una sola coppia di denti, si vede che il punto di pressione massima si ha per $z = (z_2 - 1)$, cioè per $z = \frac{2\pi}{n} \cot \theta \cdot (z_2 - 1)$.

Ivi si inizia appunto [6] il prodursi della butteratura sul fianco del dente del rochetto, ma non in quello del dente della ruota, in cui la butteratura ha invece inizio nel punto $(1 - z_1)$, dove la pressione massima è minore che nel punto $(z_2 - 1)$.

5. Effetto dello strisciamento specifico e considerazioni sulle variabili fisiche da cui può dipendere il fenomeno della butteratura. - Le esperienze

di Nishihara e Kobayashi [12]), di A. Meldhal [10], di M. Ulrich [15, 16] e di H. Glaubitz [6], hanno dimostrato concordemente che quando due superficie rotolano e insieme strisciano una sull'altra il fenomeno della butteratura ha inizio ed è comunque più accentuato sopra la superficie che va più adagio, cioè su quella per cui lo strisciamento specifico s (scorrimento relativo nel tempo dt , diviso per la lunghezza dell'arco di profilo su cui tale scorrimento si produce) è negativo.

In base ai risultati delle esperienze di Nishihara



e Kobayashi, esisterebbe anzi un valore critico caratteristico s_c dello strisciamento specifico, pari al -22 %, per il quale, a parità di carico, l'effetto della butteratura sarebbe massimo. Negli ingranaggi, Glaubitz ha trovato che l'inizio della butteratura si produceva per valori di s variabili da -10 % a -100 %.

Del fatto che si butteri prima la superficie che va più adagio è stata data da M. Warren, come solo di recente ho appreso¹, una ingegnosa spiegazione che sembra avere un fondamento fisico abbastanza persuasivo.

In due corpi premuti uno contro l'altro e insieme striscianti nasce una azione di attrito che tende a frenare il più veloce e a trascinare il più lento. Sulla superficie del corpo più veloce tendono perciò a prodursi tensioni (in senso tangenziale) di compressione nella zona a valle del contatto, di tensione nella zona a monte. Sulla superficie del corpo più lento tendono a prodursi invece tensioni di compressione nella parte a monte del contatto, di tensione nella parte a valle. L'olio in pressione a valle del punto di contatto², si trova di fronte materiale compresso (più compatto) nella superficie più veloce, materiale teso (in cui le piccole crepe sono dilatate e offrono più facile ingresso all'olio in pressione) nella superficie più lenta.

Comunque la relazione fra butteratura e strisciamento specifico non sembra finora troppo chiara e sembra anzi, a giudizio dello scrivente, che sia da giustificare meglio l'assunzione, che viene fatta da vari autori, dello strisciamento specifico come seconda variabile da cui, oltreché dalle pressioni massime, dipende la butteratura.

Riferirsi a priori allo strisciamento specifico corrisponde infatti in sostanza a fare riferimento alla ipotesi del Reye (lavoro di attrito proporzionale al volume di materiale asportato), in base alla quale lo spessore di materiale asportato normalmente al profilo risulta proporzionale allo strisciamento specifico (se il carico, come nelle dentature ad evolvente, e il coefficiente di attrito sono costanti), cioè considerare la butteratura come una specie di usura per attrito secco, ciò che, per quanto si è detto prima, può sembrare non del tutto rispondente all'andamento del fenomeno.

Se si concepisce invece il fenomeno come dovuto essenzialmente alle forze che si esercitano fra le superficie dei corpi e il velo di lubrificante, sembra indubbio che esso dovrebbe dipendere, oltre che dal numero di cicli, dai valori delle pressioni normali, delle azioni tangenziali e delle loro derivate rispetto al tempo.

Per quanto riguarda le azioni tangenziali, i valori del coefficiente di attrito incontrati nelle esperienze finora eseguite sono certamente di gran lunga superiori a quelli corrispondenti alla lubrificazione perfetta (Nishihara e Kobayashi hanno misurato valori del coefficiente di attrito pari a

¹ HENRIOT G., *Traité théorique et pratique des engrenages*, Ed. Dunod, 1949, p. 276.
² *Ivi.*, in base alla teoria della lubrificazione [4, 5] si producono le pressioni massime.

0,13÷0,15) e quindi il volerne tener conto con la teoria della lubrificazione perfetta non potrebbe corrispondere nemmeno lontanamente alla realtà. La teoria non può portare pertanto luce alcuna su questo punto.

È invece possibile e, pensiamo, interessante, tenendo presente la supposta azione di incuneamento e di scalzamento prodotta dal lubrificante, calcolare la derivata rispetto al tempo delle pressioni normali, ciò che è fatto nel paragrafo seguente.

6. *Calcolo della derivata locale della pressione rispetto al tempo.* - Al tempo t la pressione in un dato punto del meato è funzione, in base alle (2), (3), (1), del carico N , della viscosità assoluta, della velocità angolare relativa $(\omega + \omega')$, della distanza z , di cui sono funzioni i raggi di curvatura r, r' , e della distanza x del punto considerato dalla sezione ristretta del meato. Supponendo costanti N, μ, ω, ω' , si ha perciò:

$$(20) \quad p = p(x, z).$$

In un dato punto del profilo di un dente l'incremento della pressione in un intervallo infinitesimo dt del tempo vale perciò:

$$(21) \quad dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz,$$

essendo dx e dz le variazioni, in tale intervallo, dell'ascissa x del punto e della distanza z prima definita.

La (21) ci dice che la variazione dp della pressione è somma di due variazioni, dovute, la prima a uno spostamento dx del punto rispetto al diagramma iniziale della p in funzione di x , supposto invariato tale diagramma; la seconda a una variazione del diagramma della pressione, per effetto della variazione di z , supposta inalterata la x del punto.

Per un punto di uno dei profili, l'incremento dx della x è uguale all'arco infinitesimo di cui si è spostato, sul profilo, il punto di contatto con l'altro profilo nel tempo dt . È facile vedere che nelle dentature ad evolvente si ha, con le notazioni e i segni usati:

$$(22) \quad \begin{aligned} dx &= -r \omega dt \\ dx &= -r' \omega' dt \end{aligned}$$

per i punti del dente del rochetto
per i punti del dente della ruota.

L'incremento dz è invece uguale per il rochetto e per la ruota, e vale, detta v la velocità periferica delle primitive:

$$(23) \quad dz = v \cos \theta \cdot dt$$

Perciò, della variazione complessiva dp , la parte $\frac{\partial p}{\partial x} dx$ è diversa per i punti del dente del rochetto e della ruota aventi la stessa x ; mentre è uguale per tali punti la parte $\frac{\partial p}{\partial z} dz$.

Dal lavoro precedente già citato si ha:

$$(24) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 6 \mu (\omega + \omega') (\omega \delta + 1) \frac{\lambda^2 z^2 - \zeta^2}{h^3 (1 + \zeta^2)^2}$$

D'altra parte, facendo uso delle (5), (2), (3), (9), si può scrivere:

$$(25) \quad p = \frac{P_0}{A_{max}} A \cdot f(x) = \frac{N}{B} \frac{A}{\lambda}$$

e perciò:

$$(25) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{P_0}{A_{max}} \left[\frac{\partial A}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial (1/\delta)} \frac{\partial (1/\delta)}{\partial x} f(x) + A \cdot f'(x) \frac{\partial x}{\partial \delta} \right]$$

Dalle (3), (1), (5), (9), (7) si deduce:

$$(26) \quad \frac{\partial A}{\partial \zeta} = \frac{z^2 - \zeta^2}{(1 + \zeta^2)^2} \frac{\partial \zeta}{\partial (1/\delta)} = -x \frac{\partial (1/\delta)}{\partial x} = -\frac{B}{A_{max}} \frac{P_0}{N} f'(x),$$

$$\frac{\partial x}{\partial \delta} = \frac{1}{R \sin \theta}$$

e quindi, ricordando le (25), (1):

$$(27) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{P_0}{A_{max}} \left[\frac{z^2 - \zeta^2}{(1 + \zeta^2)^2} \zeta + A \right] \frac{f'(x)}{R \sin \theta}$$

Ponendo infine, mediante le (4), (1), (9), la (24) nella forma:

$$(24) \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{6B}{A_{max}^2} \frac{P_0}{N} \frac{z^2 - \zeta^2}{(1 + \zeta^2)^2} f'(x)$$

si ha in definitiva:

$$(25) \quad dp = \frac{P_0}{A_{max}} \left[\frac{6B}{A_{max}} \frac{P_0}{N} \frac{z^2 - \zeta^2}{(1 + \zeta^2)^2} f'(x) \cdot dx + \right. \\ \left. + \frac{z^2 - \zeta^2}{(1 + \zeta^2)^2} \zeta + A \right] \frac{f'(x)}{R \sin \theta} \cdot dz$$

nella quale, come subito risulta dalla (11):

$$(26) \quad f'(x) = \frac{d\{f(x)\}}{dx} = \frac{5(1-\tau)(1-\tau x^2) + x[3(1-\tau)^2 - 8\tau]}{4[1 + (1-\tau)x - \tau x^2][1 + x/2(1-\tau)^2]}$$

Per fissare le idee, applichiamo la (25) al caso particolare del punto $x = \zeta = 0$ (sezione ristretta del meato), che si presta forse meglio d'ogni altro a caratterizzare all'ingrosso l'andamento medio della $\frac{dp}{dt}$, essendo in esso, come risulta dalla (24), la pressione uguale costantemente alla metà della p_{max} (cioè $A(0) = 0,5 A_{max} = 0,2427$) e la $\frac{\partial p}{\partial x}$ massima.

Si ha in tal punto ($x = 0$):

Per il dente del rochetto:

$$(27) \quad \frac{dp}{dt} = P_0 v \left[-\frac{6B}{A_{max}^2} \frac{P_0}{N} \frac{z^2}{\sin \theta} \cdot f'(x) \cdot (1 + \tau) + \frac{f'(x)}{2R \sin \theta} \right]$$

Per il dente della ruota:

$$(28) \quad \frac{dp}{dt} = P_0 v \left[-\frac{6B}{A_{max}^2} \frac{P_0}{N} \frac{z^2}{\sin \theta} \cdot f'(x) \cdot (1 - \tau) + \frac{f'(x)}{2R \sin \theta} \right]$$

Per i casi particolari delle ruote uguali ($\tau = 1$) e della coppia rochetto-dentiera ($\tau = 0$), dalle (11) e (26) si ha rispettivamente:

$$\text{Per } \tau = 1: f(x) = \frac{1}{1 - x^2}; f'(x) = -\frac{2x}{(1 - x^2)^2}$$

$$\text{Per } \tau = 0: f(x) = \frac{1}{1 + x \sqrt{1 + 0,5x}}$$

$$f'(x) = \frac{5 + 3x}{4(1 + x)^2(1 + x/2)^{3/2}}$$

e le (27), (28) si semplificano conseguentemente.

Mediante le (10), (11), (7), (8), le (27) (28), possono scriversi nella forma $(5,794 = \frac{16 z^2}{A_{max} \sqrt{B}})$:

Per il dente del rochetto:

$$(27) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{P_0 v}{2R \sin \theta} \left[-5,794 \frac{z^2}{\sqrt{\sin 2\theta}} (1 + \tau) \cdot \sqrt{\frac{Q}{\mu v}} f'(x) (1 + \tau) + f'(x) \right]$$

Per il dente della ruota:

$$(28) \quad \frac{dp}{dt} = \frac{P_0 v}{2R \sin \theta} \left[-5,794 \frac{z^2}{\sqrt{\sin 2\theta}} (1 - \tau) \cdot \sqrt{\frac{Q}{\mu v}} f'(x) (1 - \tau) + f'(x) \right]$$

Il termine adimensionale $\sqrt{\frac{Q}{\mu v}}$ è di solito molto grande rispetto all'unità. Se perciò ci limitiamo, come già si è detto, a considerare ciò che accade quando è in presa un solo dente, nella parte centrale dell'arco d'azione, dove $f(x)$ e $f'(x)$ sono finite e dello stesso ordine di grandezza, si può trascurare, nelle (27'), (28'), il termine $f'(x)$.

Ne segue che le derivate della pressione rispetto al tempo nel punto $x = 0$ per il dente del rochetto e per quello della ruota, e più in generale nei punti in cui $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, cioè $\zeta = x$, non sono uguali, ma differiscono sensibilmente. Esse sono infatti circa proporzionali (se si trascurano, come prima detto, i termini $f'(x)$ nella (27'), (28')) alle lunghezze infinitesime degli archi di cui si sposta, nel tempo dt , il punto di contatto sui due profili e pertanto la $\frac{dp}{dt}$ risulta minore sulla superficie che va più adagio, cioè su quella per cui lo strisciamento specifico è negativo, e per la quale, come già si è detto, l'esperienza indica che la butteratura si produce con maggiore facilità.

Ciò potrebbe forse spiegarsi pensando che, se la $\frac{dp}{dt}$ è piccola, l'olio che ha raggiunto la pressione massima impiega un tempo maggiore per tornare alla pressione zero, cioè, in un dato punto, le pressioni massime agiscono più a lungo e quindi è più facile l'azione di incuneamento e di scalzamento dell'olio stesso.

Comunque, secondo i calcoli svolti, dovrebbe esistere una dipendenza della butteratura dalla velocità periferica v la quale fa variare, in base alle (9), (10), (27'), (28'), sia le p_{max} , sia le $\frac{dp}{dt}$. Uno studio sperimentale dell'effetto di v meriterebbe probabilmente maggiore attenzione di quanta gliene sia stata finora dedicata nelle ricerche sperimentali esistenti.

Si osserva che, se si trascurano i termini $f'(x)$, il rapporto β fra le $\frac{dp}{dt}$ per il rochetto e per la ruota rispettivamente vale, nel punto $x = 0$:

$$(29) \quad \beta = \frac{1 + \tau}{1 - \tau} = \frac{1}{1 - \tau} = 1 - \tau^{-1}$$

essendo \bar{x} , \bar{x}' gli strisciamenti specifici rispettivamente per il rocchetto e per la ruota.

Nelle figure 2, 3 sono rappresentate, in funzione di α , e per vari valori di τ , le funzioni $F^2(\alpha) \cdot (1+\alpha)$, $F^2(\alpha) (1-\tau\alpha)$, cui sono proporzionali le $\frac{dp}{dt}$ nel punto $x=0$, rispettivamente per il rocchetto e per la ruota.

Se si applicano tali diagrammi ai tre casi studiati nelle esperienze di H. Glaubitz [6], si ottengono i risultati della tabellina seguente, in cui α' , α'' sono i valori di α corrispondenti agli estremi del tratto in cui è in presa un solo dente (α' in accenso, α'' in recesso), nei quali punti, secondo il Glaubitz, si inizia all'incirca la butteratura rispettivamente per il rocchetto e per la ruota.

		$f(\alpha)$	$F^2(\alpha) (1+\alpha)$	$F^2(\alpha) (1-\tau\alpha)$
$\tau = 0,91$	$\alpha' = -0,18$	1,06	0,90	1,28
	$\alpha'' = 0,21$	1,02	1,26	0,84
$\tau = 0,70$	$\alpha' = -0,21$	1,12	1,00	1,46
	$\alpha'' = 0,21$	0,95	1,10	0,78
$\tau = 0,37$	$\alpha' = -0,41$	1,60	1,46	2,81
	$\alpha'' = 0,41$	0,80	0,87	0,52

Si vede che per la ruota le $\frac{dp}{dt}$ nel punto α'' sono sempre molto minori che nel punto α' . Per il rocchetto accade l'inverso, fuorchè per il caso $\tau=0,37$, in cui però alla diminuzione della $\frac{dp}{dt}$ corrisponde una diminuzione percentuale ancora maggiore della $f(\alpha)$, cioè della pressione massima.

Si può tentare di valutare l'effetto simultaneo delle due variabili p_{max} e $\frac{dp}{dt}$ introducendo la variabile:

$$(30) \quad \gamma = \frac{p_{max}^2}{\left(\frac{dp}{dt}\right)_{x=0}}$$

che ha le dimensioni di un impulso per unità di superficie e vale, come risulta dalle (9), (10), (27'), (28')

Per il rocchetto:

$$(30') \quad \gamma = \frac{A^2_{max} \cdot 1}{4\sqrt{3} B \tau^2 \sin 2\theta v (1+\alpha)}$$

Per la ruota:

$$(30'') \quad \gamma = \frac{A^2_{max} \cdot 1}{4\sqrt{3} B \tau^2 \sin 2\theta v (1-\tau\alpha)}$$

Poichè le funzioni $1/(1+\alpha)$ e $1/(1-\tau\alpha)$ sono rispettivamente sempre decrescente e sempre crescente al crescere di α , il termine γ ha sempre un massimo, per il rocchetto, nel punto α' , e un massimo, per la ruota, nel punto α'' .

Conclusione. - Valendosi della teoria della lubrificazione degli ingranaggi precedentemente

svolta, si sono calcolati gli andamenti, secondo tale teoria, delle pressioni e delle loro derivate rispetto al tempo, nei vari punti dei profili dei denti del rocchetto e della ruota e nelle varie posizioni del contatto nella retta dei contatti, cercando di porre in relazione i risultati ottenuti coi dati sperimentali finora esistenti.

Nel presente studio, senza avere naturalmente la pretesa di chiarire in modo sicuro le relazioni esistenti fra l'effetto della lubrificazione e il fenomeno della butteratura, si è voluto solo fornire una prima base teorica di orientamento che possa eventualmente essere utilizzata per la esecuzione di successive ricerche sperimentali, dalle quali soltanto l'interessante fenomeno può risultare chiarito in modo completo.

Renato Giovannozzi

BIBLIOGRAFIA

- EICHINGER A., *Das Problem der Abnutzung bei rollender und gleitender Reibung*, Diskussionsbericht n. 121 der Eidgen. Material prüfungs-und Versuchsanstalt, Zurigo, 1938.
Le conclusioni sono riportate da:
- KUNTZE W., in Z. VDI, Vol. 84, 1940, pagg. 541-542.
- FINK M. e HOFFMANN U., *Abnutzung von Zahnrädern*, Z. VDI, Vol. 77, 1933, pagg. 978-979.
- GIOVANNONZI R., *Teoria della lubrificazione negli ingranaggi*, Pubblicazioni della Scuola di Ingegneria di Pisa, n. 394, Ottava serie, 1939.
- GIOVANNONZI R., *Studio teorico della lubrificazione nelle dentature cilindriche*, Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, Serie seconda, Tomo 70, Parte I, 1940-1941.
- GLAUBITZ H., *Schlupfeinfluss auf die Walzenfestigkeit von Zahnflanken*, Frschg. Ing. Wes., Vol. 14, pagg. 24-25.
- KARAS F., *Werkstoffanstrengung beim Druck achsenparalleler Walzen nach den gebräuchlichen Festigkeitshypothesen*, Frschg. Ing. Wes., Vol. 11, 1940, pagg. 334-339.
- KARAS F., *Dauerfestigkeit von Laufflächen gegenüber Grübchenbildung*, Z. VDI, Vol. 85, 1941, pagg. 341-344.
- LANCHESTER F. W., in *Engineering*, Voi. III, 1921, pagg. 733-734.
- MELDHAL A., *Prüfung von Zahnradmaterial mit dem Brown Boverly Apparat*, Schweiz. Archiv angew. Wiss. Techn., Vol. 6, 1940, pagg. 285-289.
e:
The Brown Boverly Testing Apparatus for gear-wheel material, Engineering, Vol. 148, 1939, pagg. 63-66.
- NIEMANN G., *Walzenpressung und Grübchenbildung bei Zahnrädern*, Maschinenelemente - Tagung, Düsseldorf, Bericht über die Tagung des Fachauschusses für Maschinenelemente in Düsseldorf 1938, Berlino 1940, pagine 38-42.
- NISHIHARA T. e KOBAYASHI T., *Pitting of steel under lubricated rolling contact and allowable pressure on tooth profiles*, Trans. Soc. Mech. Engrs Japan, Vol. 3, 1937, pagg. 292-298.
- TUSCHY H., *Gleit-Wälz Versuche an Stahlrollen*, Dissertation Technische Hochschule Danzig, 1937.
- ULRICH M., *Verschleissversuche mit Zahnrädern für Kraftwagen*, Forschungsarbeiten für das Kraftfahrwesen, Versuchsbericht n. 4 Reichverband der Automobilindustrie, Berlino 1932.
- ULRICH M., *Zur Frage der Grübchenbildung bei Zahnrädern*, Z. VDI, Vol. 78, 1934, pagg. 53-55.
- WAY S., *Pitting due to rolling contact*, Transactions Americ. Soc. Mech. Engineers, Vol. 57, 1935, pagine A 49-58 e A 110-114.

Direttore responsabile: AUGUSTO CAVALLARI - MURAT

Autorizzazione Tribunale di Torino n. 41 del 19 Giugno 1948

STAMPERIA ARTISTICA NAZIONALE - TORINO