

(Agosto) - 1951 - A. 8

# RASSEGNA TECNICA

La "Rassegna tecnica", vuole essere una libera tribuna di idee e, se del caso, saranno graditi chiarimenti in contraddittorio; pertanto le opinioni ed i giudizi espressi negli articoli e nelle rubriche fisse non impegnano in alcun modo la Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino

## ANALISI DIMENSIONALE

Si chiariscono i fondamenti concettuali sui quali si basa il procedimento, detto di analisi dimensionale, inteso a stabilire relazioni generali fra i parametri di misura di fenomeni fisici complessi, quali si incontrano nella meccanica dei fluidi e nella trasmissione del calore, nei casi in cui la soluzione analitica diretta del problema non risulta possibile.

Conferenza tenuta il 18 maggio 1949 al Centro Studi Metodologici

1. - La descrizione dei fenomeni naturali è nelle scienze fisiche integrata da operazioni di numerazione e di confronto fra taluni loro aspetti, allo scopo di giungere a valutazioni quantitative.

Queste valutazioni possono limitarsi a stabilire, con procedimenti *sogettivi* (non comparabili in generale mutando l'osservatore perchè costituiti da confronti fra sensazioni di uno stesso osservatore), o con procedimenti *oggettivi* (fondati su operazioni strumentali i cui risultati non mutano cambiando l'osservatore), delle successioni ordinate o *scale* (di durezza, di stati termici, di suoni, ecc), eventualmente numerate a scopo di riferimento, e traducibili in disuguaglianze del tipo:

$$a > b > c \dots \quad (1)$$

Risultati più determinati si ottengono con le *misure*, confronti oggettivi tendenti a stabilire rapporti numerici fra due o più termini, dei quali uno, mediante libera scelta, è assunto quale *unità*.

Oltre che mediante confronti *diretti*, si può giungere al risultato con valutazioni *indirette*, fondate sui legami che la proprietà in esame mostra con altre più facilmente accessibili.

La misura segue regole prefissate, si vale di dispositivi e strumenti e presuppone l'accettazione di convenzioni di carattere sia concettuale sia esecutivo; in particolare presuppone che si sia riusciti, con adatti artifici o utilizzando particolari situazioni, ad isolare sufficientemente il fenomeno che si vuole misurare su un dato oggetto, cioè a ridurre entro limiti ristretti l'influenza quantitativa che su di esso esercitano tutti i fenomeni rivelabili nello stesso oggetto con altre esperienze.

Il risultato di una misura è esprimibile mediante una uguaglianza del tipo:

$$x = y \pm \delta \quad (2)$$

nella quale si afferma che esso è uguale al numero  $y$ , ricavato dall'operazione sperimentale e dalla relativa elaborazione critica, a meno di un altro numero  $\delta$ , *incertezza* della misura, il cui valore relativo  $\delta/y$  può essere diminuito col perfezionamento della operazione, ma non annullato.

La misura fornisce quindi un *intorno*, non un numero, e in questo intorno influiscono tutte le

perturbazioni indotte dagli altri fenomeni e dalla stessa misura.

2. - Alla definizione operativa, in stretto senso fisico, di una *grandezza* si giunge considerando un procedimento di misura e l'insieme dei risultati che con esso si ottengono.

L'interpolazione e l'extrapolazione dei dati ottenuti sono effettuate con metodi matematici, trattando cioè i risultati delle misure come enti matematici, appartenenti a gruppi od a funzioni alle quali si attribuiscono certe proprietà, talvolta non verificabili sperimentalmente.

Si passa cioè dal campo fisico al campo fisico-matematico che opera sui numeri  $\beta$  e su loro combinazioni simboliche.

3. - Poichè l'esperienza permette di rilevare che le varie grandezze relative ai medesimi oggetti sono interdipendenti, si ricercano i legami fra di esse isolando quanto più è possibile quelle in esame dalle altre e stabilendo dapprima fra le misure di singole serie di esperimenti delle relazioni *empiriche* di carattere matematico.

Un ulteriore passo si compie quando si passa a relazioni *teoriche*, basate su pochi principi e atte a inquadrare matematicamente numerose relazioni empiriche, possibilmente entro i limiti delle incertezze sperimentali.

Ma queste incertezze fanno sì che è possibile stabilire più relazioni teoriche per il coordinamento degli stessi fatti e ciò rende le scienze fisiche non congruenti in modo rigoroso colle scienze matematiche.

4. - Se per la misura delle grandezze fisiche si adottassero soltanto procedimenti diretti e non si ricercassero dei legami fra di esse si dovrebbero fissare tante unità indipendenti quante sono le grandezze e di ogni grandezza si direbbe che ha la sua propria *dimensione* alla quale competerebbe lo stesso nome che contrassegna la grandezza.

L'aver invece potuto stabilire delle relazioni teoriche fra varie grandezze permette di *scegliere* poche fra esse quali *fondamentali*, di definire le relative *unità di misura* mediante *campioni* scelti in modo da risultare per quanto possibile invariabili nel tempo, e di esprimere sia le altre grandezze sia le relative unità in funzione delle fondamentali

per mezzo di alcune fra le relazioni anzidette. Tali relazioni, se scritte fra le unità, sono dette *equazioni dimensionali* e definiscono, in senso lato, le dimensioni delle unità derivate. Esse stabiliscono in modo formale la *omogeneità dimensionale* di una grandezza con altre, mostrano come le loro unità dipendano da quelle fondamentali, e permettono di passare facilmente da un sistema ad un altro di « unità » fondamentali.

Ad esempio nel sistema usuale nel quale le grandezze fondamentali sono la massa (simbolo M), la lunghezza (simbolo L), il tempo (simbolo T) dire che la formula dimensionale (o semplicemente la dimensione) di una grandezza è  $M^a L^b T^c$  vuol dire che variando le unità fondamentali di massa, lunghezza, tempo rispettivamente nei rapporti  $\mu, \lambda, \tau$  l'unità di misura di tale grandezza varia nel rapporto  $\mu^a \lambda^b \tau^c$ .

Si passerà quindi dalla misura  $\Gamma$  relativa al primo sistema alla misura  $\Gamma'$  nel secondo sistema mediante la relazione:

$$\Gamma' = \mu^a \lambda^b \tau^c \Gamma \quad (3)$$

Le dimensioni delle unità derivate hanno pertanto un carattere doppiamente convenzionale poiché la libera scelta da cui traggono la loro origine è esercitata dapprima sul numero e sulla qualità delle grandezze fondamentali (che potrebbero anche essere ridotte ad una sola e ad una qualunque fra quelle in esame) e sulla definizione dei campioni unitari, poi sulle relazioni fisico-matematiche di collegamento, che pure poggiano su mutevoli ipotesi di partenza.

Questa impostazione toglie ogni base alle polemiche sorte sulla validità dei calcoli dimensionali.

5. - Nelle indagini relative alla istituzione di relazioni teoriche si può giungere a equazioni risolubili coi metodi matematici noti (ad esempio negli schemi basati sull'ipotesi della continuità a sistemi di equazioni differenziali integrabili) e allora studi di carattere dimensionale non aggiungono altro alla soluzione se non verifiche formali atte a individuare degli errori banali di deduzione.

Se non si riesce a costruire una soddisfacente teoria dei fatti esaminati il porre condizioni di carattere dimensionale non ha basi attendibili e costituisce un salto nel buio, perchè non si hanno ragioni sufficienti per stabilire quali sono le grandezze in giuoco.

Se invece possediamo un'inquadratura teorica che in casi particolari ha dato risultati accettabili pur opponendo in generale difficoltà matematiche insormontabili, un'analisi dimensionale del problema può risultare efficace. Tale analisi parte dalla condizione che la grandezza  $x_1$ , che in forza delle premesse teoriche è funzione delle grandezze  $x_2, x_3, \dots, x_n$ ,

$$x_1 = f(x_2, x_3, \dots, x_n) \quad (4)$$

deve essere funzione anche dimensionalmente omogenea delle stesse  $x$ .

Ciò significa che nel quadro del sistema di grandezze fondamentali  $G_1, G_2, \dots, G_m$  scelto per motivi di opportunità pratica, se si passa da un sistema

di unità di misura ad un altro in cui le unità fondamentali sono variate nei rapporti  $\mu, \lambda, \tau, \dots$  l'equazione (4) resta valida perchè ogni suo termine risulta moltiplicato per uno stesso fattore di conversione.

La (4), scritta nella forma:

$$1 = F(x_2, x_3, \dots, x_n) = F_{1,0}(x) = F_{1,n}(G_1^{\alpha_1} G_2^{\alpha_2} \dots G_m^{\alpha_m}) \quad (5)$$

sia ora sviluppata in serie di potenze

$$1 = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} u_{i_1, i_2, \dots, i_n} x_2^{i_1} x_3^{i_2} \dots x_n^{i_n} = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} u_{i_1, i_2, \dots, i_n} G_1^{2i_1 \alpha_1} G_2^{3i_2 \alpha_2} \dots G_m^{ni_n \alpha_m} \quad (6)$$

indicando con  $v$  dei fattori indeterminati e adimensionali (nelle cui formule dimensionali cioè le dimensioni si elidono algebricamente).

Ma debbono ovviamente risultare soddisfatte le  $m$  equazioni di 1° grado:

$$\sum v_i \alpha_i = \sum v_j \beta_j = \dots = \sum v_k \gamma_k = 0 \quad (7)$$

che permettono di esprimere  $m$  esponenti  $v_i$  in funzione degli altri, e, riunendo i fattori aventi lo stesso esponente, di scrivere:

$$1 = \sum v_n A_1^{v_1} A_2^{v_2} \dots A_{n-m}^{v_{n-m}} \quad (8)$$

cioè di raggruppare le  $n$  grandezze variabili  $x$  negli  $(n-m)$  monomi adimensionali  $A$  funzioni delle stesse  $x$ .

Si può mettere in evidenza una delle  $x$  (per es. la  $x_1$ ) e scrivere:

$$x_1 = A'_1 \varphi(A_2, A_3, \dots, A_{n-m}) \quad (9)$$

in cui  $A'_1$  è un monomio prodotto di potenze delle  $x_2, \dots, x_n$ , e dimensionalmente omogeneo colla  $x_1$  mentre  $\varphi$  è segno indeterminato di funzione.

Ovvio è il caso in cui risulta  $n=m$ ; all'esperienza rimane allora unicamente da determinare la forma di  $A'_1$ .

In generale se le  $x$  variano in modo da mantenere immutati i valori dei monomi  $A$ , se sono cioè rispettate le *condizioni di similitudine*, la soluzione può essere ricercata empiricamente nel modo più accessibile all'esperienza (*prove su modelli*) e poi estesa a casi meno agevoli.

L'esperienza ha in ogni modo una guida che semplifica i problemi riducendo il numero delle variabili e permettendo rappresentazioni grafiche più comprensive.

I risultati risentono della maggiore o minore adeguatezza della impostazione teorica alla realtà e in taluni casi si verificano forti dispersioni di osservazioni singole rispetto a possibili andamenti medi.

Molti problemi complessi, e nei campi più vari, (meccanica dei fluidi, termocinetica, ecc.) hanno tuttavia ricevuto delle soluzioni soddisfacenti, molto difficilmente raggiungibili per altre vie e ciò ha giovato sia al progresso delle scienze sperimentali, inteso al collegamento razionale dei fatti, sia al progresso tecnico, inteso alla trasformazione del mondo fisico.

Cesare Codegone