d/ 624 (02) COR

22 NOV. 1979

BIBLIOTECA FACOLTA' DI ARCHITETTURA
CASTELLO DEL VALENTINO
10126 TORINO

74

L'ARTE

DI

FABBRICARE

CORSO COMPLETO

DI ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

per gl'Ingegneri, per gli Architetti, pei Periti in costruzione, pei Periti misuratori, per gl'Intraprenditori, pei Capomastri, e per quanti si trovano applicati o vogliono applicarsi all'esecuzione ed alla sorveglianza di costruzioni civili, stradali ed idrauliche

CON TAVOLE ILLUSTRATIVE

MECCANICA APPLICATA

ALLE

COSTRUZIONI

PER L'INGEGNERE

SILVIO CANEVAZZI

Professore nella Regia Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Bologna.

PARTE I

Teoria generale sulla resistenza dei materiali

TESTO

TORINO

Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO, Editore

4, Via Alfieri, 4

con Succursali in Roma, Napoli e Cagliari (per la Sardegna).

1891

La MECCANICA APPLICATA ALLE COSTRUZIONI
e Parti coi rispettivi atlanti di Tavole. - L'associazione è obbligatoria per tutta l'opera.
Prezzo della Parte prima (Testo e Tavole) Lire 16.

BIBLIOTECA
624 (02)
CAN
FAC. DI ARCHITETTURA
POLITECNICO - TORINO

Editore — AUGUSTO FEDERICO NEGRO — Torino
Roma - Napoli - Cagliari

MECCANICA APPLICATA

ALLE

COSTRUZIONI

LAVORO AD USO

degli Ingegneri, degli Architetti, dei Periti in costruzione
e degli studenti delle Regie Scuole d'applicazione per gli Ingegneri
e dei Corsi tecnici pei Periti in costruzione

PER L'INGEGNERE

SILVIO CANEVAZZI

Professore nella Regia Scuola d' applicazione per gli Ingegneri di Bologna

La pubblicazione del volume intitolato **Raccolta di progetti di costruzioni in legno ed in metallo** che avrebbe completato l'*Appendice* all'*Arte di fabbrica* del Professore Comm. Giovanni Curioni dovette rimanere in sospeso a cagione della morte di questo instancabile lavoratore. La di lui perdita fu una grave sventura per la scienza e per le scuole di ingegneria, perchè egli non solo avrebbe condotto a termine il suo colossale lavoro, ma si sarebbe altresì dedicato a rivedere e rifare quei volumi che avrebbero richiesto migliorie e modificazioni in rapporto col continuo progredire della scienza e dell'arte del costrurre.

Noi abbiamo però avuto la soddisfazione di trovare un saldo appoggio in un altro non meno valente scienziato, l' Ingegnere Cav. Silvio Canevazzi Professore nella Scuola di applicazione degli Ingegneri di Bologna, il quale si assunse l'incarico di allestire il volume tuttora mancante, e di ringiovanire gli altri volumi più bisognosi di essere riveduti o rinnovati.

Infatti essendosi esaurito il volume dell'*Arte di* [illegible] *sistenza dei materiali* e [illegible] giore [illegible] [illegible] *costruzioni*, trovò opportuno di sostituire a quel volume il corso di lezioni che svolge con ottimi risultati ai suoi allievi ingegneri. Egli si accinse perciò a riordinare le molte memorie che aveva raccolte e ha diviso il suo lavoro in due Parti, cioè **Teoria generale della resistenza dei materiali** e **Statica delle costruzioni**. La prima Parte già pubblicata di quest'opera ebbe una lusinghiera accoglienza, e attualmente abbiamo posto mano alla stampa della seconda Parte.

Per la revisione e compilazione degli altri volumi egli si assicurò la collaborazione di altri distinti Professori ed Ingegneri e punto non dubitiamo che l'**Arte del fabbricare** così rimodernata non potrà a meno di riuscire di molta utilità agli studenti ed agli studiosi.

La *Meccanica applicata alle costruzioni* consterà di due Parti, *Teoria generale della resistenza dei materiali* e *Statica delle costruzioni*, e verrà pubblicata nello stesso formato delle opere del Professore Giovanni Curioni. Essa sarà illustrata da molte tavole. L'associazione è obbligatoria per l'opera intiera.

È uscita la Parte prima con 18 tavole al prezzo di Lire 16.

624(02) CAN

L'ARTE

DI

FABBRICARE

CORSO COMPLETO DI ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

PER GLI INGEGNERI, PER GLI ARCHITETTI, PEI PERITI IN COSTRUZIONE,
PEI PERITI MISURATORI E PER QUANTI SI TROVANO APPLICATI ALLA DIREZIONE
ED ALLA SORVEGLIANZA DI COSTRUZIONI CIVILI, STRADALI ED IDRAULICHE

VERIFICA INVENT. N° 5-6-78
2306/B F.lo 9

MECCANICA

APPLICATA

ALLE COSTRUZIONI

LAVORO AD USO

degli Ingegneri, degli Architetti, dei Periti in costruzione
e degli studenti delle Regie Scuole d'Applicazione per gli Ingegneri
e dei Corsi tecnici pei Periti in costruzione

PER L'INGEGNERE

SILVIO CANEVAZZI

Professore nella Regia Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Bologna

---

TESTO



TORINO

Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO, Editore

4, Via Alfieri, 4.

1890

Proprietà letteraria ed artistica con riserva della traduzione

Torino — Tipografia, Stereotipia e Calcografia di A. F. Negro — 1890.

AL LETTORE

In causa della morte del Professore Comm. Giovanni Curioni, avvenuta il 1° febbraio 1887, essendo rimasta interrotta la pubblicazione dell'*Arte del fabbricare*, ebbi richiesta dall'Editore Cav. Augusto Federico Negro di Torino di voler rivedere e completare l'importante lavoro. Io rimasi dapprima assai incerto, temendo che l'impegno fosse superiore alle mie forze, e fu soltanto dopo autorevoli consigli e dopo l'affermazione fattami da alcuni egregi colleghi che essi mi avrebbero prestato la loro collaborazione in alcuni degli argomenti, di cui più specialmente si sono occupati, che mi decisi ad accettare l'onorevole proposta.

A chi ha letto l'opera del Professore Curioni, *L'Arte del Fabbricare*, non può essere sfuggito come il volume che tratta della *Resistenza dei materiali*, in causa dei progressi fatti ultimamente da questa scienza, non corrisponda a quel complesso di cognizioni che ora viene ordinariamente designato col nome di *Meccanica applicata alle costruzioni* o di *Scienza delle costruzioni*. D'altra parte la disposizione delle teorie relative ai diversi argomenti è tale che male si potrebbe con note od aggiunte render conto di varî procedimenti di calcolo ora diventati comuni, come, a cagion d'esempio, quelli basati sulle proprietà delle funzioni potenziali, sulle proprietà del poligono o del fascio funicolare, non che del-

l'intimo legame che passa tra la teoria ordinaria della resistenza dei materiali ed una scienza più rigorosa ed esatta, cioè la teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici.

Queste ragioni mi hanno deciso ad abbandonare il pensiero di fare delle semplici modificazioni o delle appendici al volume in discorso e a presentare un'opera originale sulla *Meccanica applicata alle costruzioni*, che sostituisca nell'*Arte di fabbricare* la parte relativa alla *Resistenza dei materiali*, già esistente, prendendo come schema il corso di lezioni che per dovere d'ufficio svolgo da alcuni anni nella Regia Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Bologna. Ho scelto quest'ordine nello svolgimento della materia perchè l'esperienza di varî anni d'insegnamento m'ha dimostrato che esso riesce adatto per chi vuole iniziarsi a questa scienza, e mi chiamerò fortunato se la lettura del presente lavoro potrà far sì che qualcuno prenda amore a questo ramo importantissimo dell'Arte dell'Ingegnere.

Bologna, 1889.

Silvio Canevazzi.

MECCANICA

APPLICATA

ALLE COSTRUZIONI

La *Meccanica applicata alle costruzioni* ha per oggetto di determinare le relazioni, che passano fra le forze che agiscono sopra un corpo o sopra un sistema di corpi e le forze interne agenti fra punto e punto e le deformazioni, che si sviluppano nel medesimo, allo scopo di poter determinare le dimensioni delle sue parti in guisa che esso possa resistere in modo permanente alle forze, che lo sollecitano. Da questa definizione risulta che la *meccanica applicata alle costruzioni* è scienza fondamentale nello studio dell'arte dell'ingegnere, poichè insegna a determinare le dimensioni delle diverse parti, che entrano a comporre una costruzione qualsivoglia, sia che si studino edifizî od opere di architettura civile, sia che si tratti di impianti meccanici od industriali; essa è complemento naturale della meccanica razionale e ne differisce specialmente perchè non si occupa dell'effetto delle forze considerando corpi perfettamente rigidi, inestensibili, ecc. che sono una pura astrazione, ma prende invece in esame i corpi quali si incontrano in natura.

La *Meccanica applicata alle costruzioni*, detta anche *Scienza delle costruzioni* o *Teoria della resistenza dei materiali*, ha un campo vastissimo d'applicazione nell'ingegneria, ed il suo studio si divide naturalmente in due parti.

La prima comprende la ricerca delle relazioni generali, che legano le forze interne e le deformazioni di un corpo colle forze esterne, che lo sollecitano, e delle condizioni, che assicurano la stabilità di una costruzione qualsiasi, e può chiamarsi col nome di *Teoria generale della resistenza dei materiali.*

La seconda comprende l'applicazione delle teorie generali alla risoluzione dei problemi speciali, che s'incontrano nell'arte dell'ingegnere, e vien detta *Statica delle costruzioni.*

A queste due parti faremo seguire come appendice una serie di applicazioni numeriche relative ai casi, che più comunemente s'incontrano nell'esercizio della professione dell'ingegnere.

PARTE PRIMA

TEORIA GENERALE

DELLA

RESISTENZA DEI MATERIALI

CAPITOLO I.

Movimento ed equilibrio dei sistemi.

1. Generalità. — Si dice *materia* tutto ciò che l'uomo avverte per mezzo dei sensi, *spazio* l'ambiente, nel quale si estrinsecano le diverse manifestazioni della materia, *corpo* una determinata porzione di materia e *volume* la parte di spazio da esso occupata. Se le dimensioni di un corpo diminuiscono fino a diventare più piccole di qualsiasi quantità assegnabile, ciò che rimane dicesi *punto materiale* o *molecola:* un corpo consta di infiniti punti materiali infinitamente vicini fra loro. Se una delle dimensioni di un corpo diventa infinitamente piccola rispetto alle altre due, esso prende il nome di *sistema superficiale di punti materiali* o *superficie materiale;* se invece due dimensioni del corpo diventano infinitamente piccole rispetto alla terza, allora esso dicesi *sistema lineare di punti materiali* od anche *linea materiale.*

La quantità di materia che compone un corpo si chiama *massa*, e *densità* il rapporto esistente fra la massa ed il volume, ossia la quantità di materia contenuta nell'unità di volume; il limite del valore di questo rapporto quando le dimensioni di un corpo diventano infinitamente piccole è ciò che si dice *densità del punto materiale*, a cui esso si riduce. Se tutti i punti di un corpo hanno uguale densità si dice che esso è *omogeneo*, *eterogeneo* nel caso contrario.

Se un corpo od un punto occupano successivamente posizioni diverse nello spazio si dice che essi sono *in movimento;* come

caso particolare il moto può esser nullo, cioè il corpo od il punto continuano ad occupare costantemente la stessa posizione. Il moto può essere *assoluto* o *relativo*, secondochè si considerano gli spostamenti assoluti nello spazio, oppure gli spostamenti relativi ad un corpo o ad un sistema, che si muove esso pure nello spazio; in natura noi non possiamo osservare che movimenti relativi. *La meccanica è la scienza del movimento ed ha per iscopo di determinare le leggi, che lo governano.*

Per *tempo* s'intende ciò che separa una determinata manifestazione di un corpo da un'altra antecedente o susseguente; ad esso in genere suolsi riferire il movimento e dicesi che il moto di un punto o di un corpo è noto qualora si sappia assegnare la posizione, che esso avrà nello spazio alla fine di ogni successivo istante, in cui si può intendere diviso il tempo. Se si riferisce lo spazio a tre assi coordinati ortogonali ox, oy, oz, il movimento di un punto è noto quando si sappia quali funzioni del tempo t siano le sue coordinate x, y, z, ossia quando si conoscano le tre funzioni $x=f_x(t)$, $y=f_y(t)$, $z=f_z(t)$; il moto poi di un corpo è noto quando si conosca il movimento di tutti i suoi punti. Il luogo delle successive posizioni di un punto mobile dicesi *traiettoria* od anche *spazio percorso* s quando si considera più particolarmente il fenomeno fra due istanti o punti determinati; la proiezione di s sugli assi coordinati porta il nome di *spazio percorso parallelamente agli assi;* questa proiezione corrisponde evidentemente all'incremento delle coordinate del punto in movimento.

2. Velocità. Accelerazione. Forza viva. — Vi sono alcune funzioni, che hanno un'intima relazione coll'espressione dello spazio percorso da un punto mobile nello spazio e parallelamente agli assi coordinati e che vengono designate con nomi speciali per la grande importanza che hanno nelle applicazioni. Sia s lo spazio percorso da un punto in movimento M avente x, y, z per coordinate rispetto a tre assi $O(x, y, z)$; si chiamano *velocità parallele agli assi* i limiti dei rapporti degli incrementi delle coordinate agli incrementi del tempo t, ossia le derivate delle coordinate prese rispetto al tempo. Se si indicano con V_x, V_y, V_z le velocità parallele agli assi delle x, y, z, sarà

$$\left.\begin{aligned} V_x &= \text{limite}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \qquad V_y = \text{limite}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} \\ V_z &= \text{limite}\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{dz}{dt} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Se con V si indica in ogni istante la grandezza del segmento, che ha per proiezione sugli assi tre lunghezze proporzionali a V_x,

V_y, V_z, e con α, β, γ, gli angoli, che esso fa cogli assi coordinati,

$$V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}.$$

Queste relazioni mostrano (*) che la direzione di V coincide colla tangente alla traiettoria del punto mobile e che la velocità V è uguale alla derivata dello spazio s rispetto al tempo t: i rapporti $\frac{\Delta s}{\Delta t}, \frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}$ prendono il nome di *velocità medie durante il tempo* Δt; la prima nello spazio s, le tre ultime nel senso dei tre assi coordinati.

Il limite del rapporto degli incrementi delle velocità parallele agli assi V_x, V_y, V_z, agli incrementi del tempo porta il nome di *accelerazione parallela agli assi coordinati*; se si indicano con W_x, W_y, W_z queste quantità

$$\left.\begin{aligned} W_x &= \text{limite}\frac{\Delta V_x}{\Delta t} = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \\ W_y &= \text{limite}\frac{\Delta V_y}{\Delta t} = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \\ W_z &= \text{limite}\frac{\Delta V_z}{\Delta t} = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

(*) Briot et Bouquet, *Geometria analitica.*

Se si rappresenta con W la grandezza del segmento, che in ogni istante ha per proiezioni sugli assi coordinati tre segmenti proporzionali a W_x, W_y, W_z, (W ∴ W_x, W_y, W_z) e con α_1, β_1, γ_1, gli angoli, che esso fa cogli assi stessi

$$W^2 = W_x^2 + W_y^2 + W_z^2$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{W_x}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}}$$

$$\cos\beta_1 = \frac{W_y}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}}$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{W_z}{\sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}}$$

$$W_x = W\cos\alpha_1 \qquad W_y = W\cos\beta_1 \qquad W_z = W\cos\gamma_1 .$$

La grandezza e la direzione della velocità V e dell'accelerazione risultante W sono necessariamente indipendenti dalla scelta degli assi: infatti se si indica con (O, x', y', z') un sistema d'assi coordinati diverso da (O, x, y, z), ma avente comune con esso l'origine, con $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, μ_1, μ_2, μ_3, ν_1, ν_2, ν_3 gli angoli, che i nuovi assi fanno rispettivamente coi vecchi, è noto che

$$x' = \cos\lambda_1 x + \cos\lambda_2 y + \cos\lambda_3 z ;$$

$$y' = \cos\mu_1 x + \cos\mu_2 y + \cos\mu_3 z ;$$

$$z' = \cos\nu_1 x + \cos\nu_2 y + \cos\nu_3 z .$$

Se si derivano queste espressioni rispetto a t e si indicano con V_x', V_y', V_z', W_x', W_y', W_z' le velocità e le accelerazioni parallele ai nuovi assi, si ottiene:

$$\frac{dx'}{dt} = \cos\lambda_1 \frac{dx}{dt} + \cos\lambda_2 \frac{dy}{dt} + \cos\lambda_3 \frac{dz}{dt} =$$
$$= \cos\lambda_1 V_x + \cos\lambda_2 V_y + \cos\lambda_3 V_z = V_x' ;$$

$$\frac{dy'}{dt} = \cos\mu_1 \frac{dx}{dt} + \cos\mu_2 \frac{dy}{dt} + \cos\mu_3 \frac{dz}{dt} =$$
$$= \cos\mu_1 V_x + \cos\mu_2 V_y + \cos\mu_3 V_z = V_y' ;$$

$$\frac{dz'}{dt} = \cos\nu_1 \frac{dx}{dt} + \cos\nu_2 \frac{dy}{dt} + \cos\nu_3 \frac{dz}{dt} =$$

$$= \cos\nu_1 V_x + \cos\nu_2 V_y + \cos\nu_3 V_z = V_z' .$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \cos\lambda_1 \frac{d^2x}{dt^2} + \cos\lambda_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \cos\lambda_3 \frac{d^2z}{dt^2} =$$

$$= \cos\lambda_1 W_x + \cos\lambda_2 W_y + \cos\lambda_3 W_z = W_x' ;$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = \cos\mu_1 \frac{d^2x}{dt^2} + \cos\mu_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \cos\mu_3 \frac{d^2z}{dt^2} =$$

$$= \cos\mu_1 W_x + \cos\mu_2 W_y + \cos\mu_3 W_z = W_y' ;$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = \cos\nu_1 \frac{d^2x}{dt^2} + \cos\nu_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \cos\nu_3 \frac{d^2z}{dt^2} =$$

$$= \cos\nu_1 W_x + \cos\nu_2 W_y + \cos\nu_3 W_z = W_z' .$$

Le espressioni di V_x', V_y', V_z' e di W_x', W_y', W_z' sono formate nello stesso modo di quelle di x', y', z', quindi i segmenti risultanti corrispondenti rimangono inalterati, come rimane inalterata la lunghezza di un segmento di linea retta fissa nello spazio, sebbene variino le sue proiezioni sui due sistemi di assi coordinati.

Il prodotto della massa m per la velocità v si indica col nome di *quantità di moto;* se si considera che la velocità esprime il modo nel quale il punto od il corpo si trasportano nello spazio, cioè il cammino percorso nell'unità di tempo, risulta evidente che dal punto di vista meccanico, lo stato di un corpo o di un punto materiale alla fine di un determinato istante è perfettamente rappresentato dal prodotto mv, come quello che è composto di due fattori, che esprimono uno la massa o quantità di materia in movimento, l'altro il modo, col quale essa viene trasportata nello spazio, e tale prodotto non potrà variare se nessuna causa esterna non viene a modificare il moto: questa proprietà di non poter cangiare il proprio stato o modo di movimento senza l'influenza di cause esterne è detta *inerzia della materia.* Se invece sul mobile agisce una *causa esterna* o *forza* (F) tale che parallelamente agli assi produca effetti rappresentati ordinatamente da X, Y, Z, le quantità di moto parallele agli assi non si conserveranno più costanti, ma varieranno al variare del tempo t e la loro variazione unitaria, ossia il limite del loro incremento all'in-

cremento del tempo darà la misura delle azioni esterne X, Y, Z, cioè sarà

$$\left.\begin{aligned} X &= \text{limite}\frac{\Delta m V_x}{\Delta t} = m\,\text{limite}\,\frac{\Delta V_x}{\Delta t} = m\frac{dV_x}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2} \\ Y &= \text{limite}\frac{\Delta m V_y}{\Delta t} = m\,\text{limite}\,\frac{\Delta V_y}{\Delta t} = m\frac{dV_y}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2} \\ Z &= \text{limite}\frac{\Delta m V_z}{\Delta t} = m\,\text{limite}\,\frac{\Delta V_z}{\Delta t} = m\frac{dV_z}{dt} = m\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \quad (3).$$

Se si vuole rappresentare la forza F per mezzo di un segmento di linea retta e si indicano con α, β, γ gli angoli, che essa fa cogli assi coordinati, X, Y, Z dovranno essere le proiezioni di questo segmento sugli assi, cioè dovrà essere

$$F^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 \qquad X = F\cos\alpha \qquad Y = F\cos\beta \qquad Z = F\cos\gamma\,.$$

X, Y, Z diconsi *forze componenti parallele agli assi*, F *forza risultante*, $\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$, $\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$, $\mathrm{m}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$ *componenti d'inerzia*, e le formole

$$X = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

si chiamano *equazioni del moto*, perchè servono a determinare le componenti X, Y, Z della forza F quando è conosciuto il movimento, oppure permettono, mediante una doppia integrazione, di determinare le coordinate $x = f_x(t)$, $y = f_y(t)$, $z = f_z(t)$ del punto mobile e quindi la sua posizione alla fine di ogni istante.

Finalmente si dà il nome di *forza viva* al semiprodotto della massa m per il quadrato della velocità V (*), quindi

$$\frac{mV^2}{2}$$

esprime la forza viva totale, ed

$$\frac{mV_x^2}{2}, \qquad \frac{mV_y^2}{2}, \qquad \frac{mV_z^2}{2}$$

(*) Molti autori chiamano invece forza viva il prodotto mV^2.

le forze vive misurate parallelamente agli assi coordinati. In causa della relazione $V^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$ sarà necessariamente anche

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mV_x^2}{2} + \frac{mV_y^2}{2} + \frac{mV_z^2}{2}.$$

Per un sistema di punti se si indica la forza viva con T sarà

$$T = \Sigma m \frac{V^2}{2}.$$

3. Forze attive e reazioni. Equazioni di Lagrange. — Le funzioni superiori sono quelle, che più comunemente si presentano nel trattare i problemi di meccanica e possono servire a determinare il movimento di un punto o di un corpo. È importante però di osservare che, quando sono date le accelerazioni, oppure le forze X, Y, Z, per risalire alle equazioni, che dànno le coordinate del punto in movimento, si introducono sei costanti indeterminate in causa delle sei integrazioni necessarie a passare dalle derivate seconde delle coordinate alle coordinate stesse. Può sembrare che ciò introduca una indeterminazione, ma è facile accorgersi che è l'esatta risoluzione del problema; infatti sotto l'influenza di forze determinate un punto percorrerà una certa traiettoria, ma a seconda del punto origine del movimento, essa potrà cambiare di posizione nello spazio. In altri termini la conoscenza delle forze motrici determina bensì la forma della traiettoria, ma non la sua posizione nello spazio, a precisare la quale occorrono, come è noto, sei condizioni, ossia la determinazione delle sei costanti di integrazione. In via generale per giungere alla determinazione delle costanti, che entrano in una o più equazioni algebriche, è necessario che siano noti i valori della funzione per uno o più valori della variabile, in guisa che le relazioni algebriche si cambino in vere equazioni numeriche ben determinate. Ordinariamente le condizioni, che servono per determinare le sei costanti arbitrarie, di cui si è fatto menzione superiormente, si ottengono ammettendo che siano note le coordinate del punto origine del movimento ed i valori iniziali delle velocità parallele agli assi.

Per l'uso delle formole superiori è pure importante notare che spesso i punti od i corpi in movimento debbono soddisfare a certe condizioni o vincoli, che impediscono il loro libero movimento. Analiticamente si sogliono rappresentare questi vincoli scrivendo che le coordinate di un punto in movimento debbono sempre soddisfare ad una o più equazioni, che è quanto dire che essi deb-

bono trovarsi su una o più superficie contemporaneamente. Ciò premesso è facile formarsi un concetto esatto dell'influenza, che questi vincoli possono avere sopra un corpo in moto; se questo nel suo movimento così si trasporta, che quei punti, che debbono rimanere su determinate superficie, vi restino effettivamente, i vincoli non agiranno sul corpo, perchè esso, indipendentemente da qualsiasi altra circostanza e sotto il solo impulso delle forze motrici, ottempera alle condizioni imposte; se invece i punti obbligati a rimanere su date superficie tendono a sortirne, allora il vincolo influenzerà il movimento agendo come causa modificatrice del medesimo.

Di qui una netta distinzione fra le forze o cause che producono il movimento; alcune agiscono sul mobile indipendentemente da qualsiasi altra considerazione e con un certo valore determinato da una data legge e queste diconsi *forze attive* o *forze motrici;* altre invece agiscono in quanto che si oppongono ad un certo movimento e l'impediscono, ma per loro natura non possono produrre un vero e proprio moto; esse diconsi *forze passive* o *reazioni* e debbono distruggere completamente l'effetto di quelle forze attive, che animano il corpo in un dato senso; esse agiscono soltanto se eccitate, e solo nella misura corrispondente alla causa che loro dà origine, (onde ne è venuto il principio di Hooke che *la reazione è uguale e contraria all'azione*). Queste forze necessariamente non debbono opporre resistenza al movimento del punto nella superficie, che rappresenta il vincolo (*), quindi avranno direzione normale alla medesima e non daranno luogo ad alcuna componente secondo il piano tangente. Se $L=0$, $M=0$, $N=0$..., sono le equazioni, che rappresentano le condizioni o vincoli imposti al sistema in movimento, e λ, μ, ν..., delle costanti da determinarsi, i coseni di direzione delle diverse reazioni saranno proporzionali a

$$\frac{dL}{dx}, \quad \frac{dL}{dy}, \quad \frac{dL}{dz};$$

$$\frac{dM}{dx}, \quad \frac{dM}{dy}, \quad \frac{dM}{dz};$$

$$\frac{dN}{dx}, \quad \frac{dN}{dy}, \quad \frac{dN}{dz},$$

. . . . . .

(*) Perchè fino ad ora non si è supposto che vi sia resistenza d'attrito al movimento sopra le superficie, che rappresentano i vincoli.

perchè esse sono dirette secondo le normali alle corrispondenti superficie $L=0$, $M=0$... Le reazioni totali saranno rappresentabili per mezzo delle formole

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{dL}{dx}\right)^2+\left(\frac{dL}{dy}\right)^2+\left(\frac{dL}{dz}\right)^2},$$

$$\mu\sqrt{\left(\frac{dM}{dx}\right)^2+\left(\frac{dM}{dy}\right)^2+\left(\frac{dM}{dz}\right)^2},$$

. . . . . .

e le equazioni del moto diventano

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+\lambda\frac{dL}{dx}+\mu\frac{dM}{dx}+\ldots$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+\lambda\frac{dL}{dy}+\mu\frac{dM}{dy}+\ldots$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+\lambda\frac{dL}{dz}+\mu\frac{dM}{dz}+\ldots$$

in cui $X\,Y\,Z$ esprimono per ogni punto le componenti parallele agli assi delle forze attive. Se si considera un sistema di più punti, per ciascuno di essi si dovranno verificare analoghe equazioni, che determineranno completamente il movimento del sistema. Queste equazioni sono fondamentali nello studio della meccanica (*) e prendono il nome di *equazioni del movimento* o di *Lagrange*.

4. Lavoro. Sue varie espressioni. — Si dice *lavoro di una forza* il prodotto della medesima per il cammino percorso dal suo punto d'applicazione proiettato sulla direzione della forza stessa. Siano δL il lavoro, F la forza, δs lo spostamento piccolissimo del suo punto d'applicazione, $\widehat{F\delta s}$ l'angolo compreso fra la direzione di F e di δs, ed $\alpha\beta\gamma$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ rispettivamente gli angoli che la direzione della forza e dello spostamento fanno cogli assi coordinati; per definizione

$$\delta L=F\delta s\cos\widehat{F\delta s}\,.$$

(*) LAGRANGE, *Meccanica analitica*.

Se invece di uno spostamento infinitesimo si considera un movimento finito allora per lavoro s' intende la somma di tutti i prodotti analoghi che si ottengono dividendo in parti infinitamente piccole lo spostamento totale del punto d'applicazione della forza, ossia l'integrale della espressione $F\delta s\cos\widehat{F\delta s}$. Se si indicano con X, Y, Z le componenti della forza F, con δx, δy, δz le proiezioni sugli assi coordinati dello spostamento δs,

$$X = F\cos\alpha \qquad Y = F\cos\beta \qquad Z = F\cos\gamma$$

$$\delta x = \delta s\cos\alpha_1 \qquad \delta y = \delta s\cos\beta_1 \qquad \delta z = \delta s\cos\gamma_1$$

$$\cos\widehat{F\delta s} = \cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1 \ ;$$

quindi

$$\begin{aligned}\delta L = F\delta\cos\widehat{F\delta s} &= F\delta s\,[\cos\alpha\cos\alpha_1 + \cos\beta\cos\beta_1 + \cos\gamma\cos\gamma_1] = \\ &= F\cos\alpha\,\delta s\cos\alpha_1 + F\cos\beta\,\delta s\cos\beta_1 + F\cos\gamma\,\delta s\cos\gamma_1 = \\ &= X\delta x + Y\delta y + Z\delta z \ ;\end{aligned}$$

e per un sistema di punti

$$\delta L = \Sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) \ ,$$

cioè *il lavoro prodotto da una o più forze è uguale alla somma dei lavori fatti dalle singoli componenti.*

Se le forze tendono a produrre una rotazione intorno ad un punto, e se si indica con ρ la distanza del punto d' applicazione dal centro di rotazione, con M il momento rispetto allo stesso punto della forza F, e con $\delta\theta$, la rotazione

$$\delta L = F\cos\widehat{F\delta}\cdot\delta s = F\cos\widehat{F\delta}\,s\rho\delta\theta = M\delta\theta \ ;$$

cioè in tal caso il lavoro è uguale al momento moltiplicato per la rotazione.

Se si considera un sistema di punti connessi invariabilmente fra loro in guisa che il corpo non possa mai mutare di forma, è noto che qualsiasi spostamento del medesimo in ogni suo punto può essere rappresentato col mezzo di sei quantità, e precisamente tre traslazioni parallele ai tre assi coordinati e tre rotazioni intorno ai medesimi assi. Se si indicano con a, b, c le traslazioni, con ψ_x, ψ_y, ψ_z le rotazioni relative agli assi delle x, y, z,

allora gli spostamenti $\delta x, \delta y, \delta z$ per un punto qualsiasi risultano espressi da

$$\delta x = a + z\psi_y - y\psi_z \qquad \delta y + b + x\psi_z - z\psi_x \qquad \delta z = c + y\psi_x - x\psi_y \ (*)$$

quindi

$$\delta L = \Sigma[(Xa + Yb + Zc) + \psi_x(Zy - Yz) + \psi_y(Xz - Zx) + \psi_z(Yx - Xy)] =$$
$$= a\Sigma X + b\Sigma Y + c\Sigma Z + \psi_x\Sigma(Zy - Yz) + \psi_y\Sigma(Xz - Zx) + \psi_z(Yx - Xy),$$

e ricordando che ΣX, ΣY, ΣZ sono le risultanti $\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z}$ parallele agli assi di tutte le forze del sistema e che $\Sigma(Zy - Yz)$ non è altro che il momento risultante di tutte le forze intorno all'asse delle x, M_x, ed analogamente

$$\Sigma(Xz - Zx) = M_y, \qquad \Sigma(Yx - Xy) = M_z,$$

risulta

$$\delta L = a\overline{X} + b\overline{Y} + c\overline{Z} + \psi_x M_x + \psi_y M_y + \psi_z M_z;$$

cioè per uno spostamento infinitesimo qualsiasi avvenuto in un corpo rigido il lavoro delle forze, che agiscono sul sistema, si compone della somma di sei termini, tre rappresentano i lavori delle risultanti parallele agli assi, in causa delle traslazioni elementari abc, e gli altri tre il lavoro dei momenti risultanti intorno agli assi in causa delle rotazioni $\psi_x \psi_y \psi_z$.

(*) Infatti se noi facciamo un quadro in cui siano notate le deformazioni parallele a ciascun asse prodotte da a, b, c, ψ_x, ψ_y, ψ_z, esso risulta formato nel modo seguente:

Indicazione degli Assi		Traslazioni			Rotazioni		
		a	b	c	ψ_x	ψ_y	ψ_z
Variazione secondo l'asse delle	x	a	o	o	o	$z\psi_y$	$-y\psi_z$
	y	o	b	o	$-z\psi_x$	o	$x\psi_z$
	z	o	o	c	$y\psi_x$	$-x\psi_y$	o

5. Principio d'Hamilton, di D'Alembert ed equazioni di Lagrange. — Superiormente si è trovato che

$$X=m\frac{d^2x}{dt^2}\,,\qquad Y=m\frac{d^2y}{dt^2}\,,\qquad Z=m\frac{d^2z}{dt^2}\,;$$

poniamo

$$T=\frac{1}{2}\Sigma mv^2=\frac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right];$$

e quindi

$$\delta T=\Sigma m\left[\frac{dx}{dt}\delta\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\delta\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}\delta\frac{dz}{dt}\right].$$

Osserviamo che è

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x\right)=\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+\frac{dx}{dt}d\frac{\delta x}{dt}$$

da cui si ricava alternando i simboli d e δ nell'ultimo termine del secondo membro

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}\delta x&=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x\right)-\frac{dx}{dt}\delta\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x\right)-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\\ \text{ed analogamente}\\ \frac{d^2y}{dt^2}\delta y&=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\delta y\right)-\frac{dy}{dt}\delta\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\delta y\right)-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\\ \frac{d^2z}{dt^2}\delta z&=\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\delta z\right)-\frac{dz}{dt}\delta\frac{dz}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\delta z\right)-\frac{1}{2}\delta\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\end{aligned}\right\}\quad(4).$$

In causa di queste relazioni l'espressione del lavoro si trasforma come segue:

$$\begin{aligned}\delta L=\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)&=\Sigma\left(m\frac{d^2x}{dt^2}\delta x+m\frac{d^2y}{dt^2}\delta y+m\frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)=\\ &=\Sigma m\frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}dy+\frac{dz}{dt}\delta z\right]-\\ &\quad-\Sigma m\left[\frac{dx}{dt}\delta\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}\delta\frac{dy}{dt}+\frac{dz}{dt}\delta\frac{dz}{dt}\right];\end{aligned}$$

e quindi

$$\delta L+\delta T=\frac{d}{dt}\Sigma m\left[\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}\delta z\right],$$

ed integrando rispetto al tempo

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta L+\delta T)\,dt=\left[\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}\delta z\right)\right]_{t_0}^{t_1}.$$

Il fattore $\frac{dx}{dt}\delta x+\frac{dy}{dt}\delta y+\frac{dz}{dt}\delta z$ è evidentemente proporzionale al coseno dell'angolo compreso fra la direzione dello spostamento δs e la velocità V; infatti le quantità

$$\delta x\,,\ \delta y\,,\ \delta z\,,\qquad \frac{dx}{dt}=V_x\,,\qquad \frac{dy}{dt}=V_y\,,\qquad \frac{dz}{dt}=V_z$$

sono rispettivamente proporzionali ai coseni degli angoli che queste due direzioni fanno cogli assi coordinati.

Se noi riteniamo che contemporaneamente per i valori t_0 e t_1 si annullino le variazioni δx, δy, δz, che è quanto dire, se si fissano i punti estremi della linea percorsa da ogni punto, allora l'equazione superiore diventa

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\delta L)\,dt=0$$

formola che contiene il teorema o principio detto di Hamilton, cioè che *la somma degli incrementi della forza viva e del lavoro durante un intervallo determinato di tempo è uguale a zero.*

Sostituendo in questa equazione ad

$$\frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,\qquad \frac{1}{2}\delta\left(\frac{dy}{dt}\right)^2,\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

i valori dati dalla (4) si ricava facilmente

$$0=\int_{t_0}^{t_1}\Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right].$$

Questa relazione dovendo verificarsi per qualsiasi intervallo di tempo, avrà luogo anche per un intervallo elementare, cioè considerando il principio e la fine di un istesso istante ; perciò basta supporre nulle le δx, δy, δz in tutto l'intervallo ad eccezione dell'istante che si considera ; quindi dovrà essere

$$\Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2_x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2_y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z+m\frac{d^2_z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0 \quad (5)$$

equazione che contiene il principio di D'Alembert, che cioè, *per ogni spostamento compatibile coi vincoli del sistema il lavoro delle differenze fra le forze motrici del sistema e le componenti d'inerzia deve essere nullo.*

Dall'equazione di D'Alembert si deducono facilmente le equazioni differenziali di Lagrange ; infatti le δx, δy, δz possono avere valori arbitrari, purchè compatibili coi vincoli del sistema; quindi se $L=0$, $M=0$... rappresentano i vincoli imposti al sistema dovranno essere soddisfatte le equazioni

$$\frac{dL}{dx}\delta x+\frac{dL}{dy}\delta y+\frac{dL}{dz}\delta z+\frac{dL}{dx_1}\delta x_1+\ldots=0\,;$$

$$\frac{dM}{dx}\delta x+\frac{dM}{dy}\delta y+\frac{dM}{dz}\delta z+\frac{dM}{dx_1}\delta x_1+\ldots=0\,;$$

. . . . . .

insieme all'equazione (5). Moltiplicando queste ultime equazioni per delle quantità indeterminate λ, μ, ν..., sommandole colla (5) ed uguagliando a zero i coefficienti delle $3n$ variazioni si ottiene

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+\lambda\frac{dL}{dx}+\mu\frac{dM}{dx}+\ldots$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=Y+\lambda\frac{dL}{dy}+\mu\frac{dM}{dy}+\ldots$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z+\lambda\frac{dL}{dz}+\mu\frac{dM}{dz}+\ldots$$

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}=X_1+\lambda\frac{dL}{dx_1}+\mu\frac{dM}{dx_1}+\ldots$$

. . . . . .

Eliminando le k indeterminate λ, μ, ν..., resteranno $3n-k$ equazioni, che congiunte alle k equazioni di condizione $L=0$, $M=0$..., serviranno a determinare le coordinate $x\,y\,z$, $x'\,y'\,z'$..., in funzione del tempo.

6. Relazione fra il lavoro prodotto dalle forze motrici e la forza viva. — In ogni corpo o sistema in movimento il lavoro prodotto dalle forze che agiscono sul medesimo è uguale all'incremento della forza viva. Infatti si è visto superiormente che è

$$\delta L=\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)$$

e che

$$X=m\frac{d^2x}{dt^2},\qquad Y=m\frac{d^2y}{dt^2},\qquad Z=m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

In queste equazioni sostituiamo agli spostamenti virtuali $\delta x, \delta y, \delta z$ gli spostamenti effettivi $dx\ dy\ dz$ durante il tempo dt, allora, considerando le $x\,y\,z$ come funzioni del tempo,

$$dL=\Sigma(X\,dx+Y\,dy+Z\,dz)=\Sigma m\left(\frac{dx^2}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{dy^2}{dt^2}\frac{dy}{dt}+\frac{dz^2}{dt^2}\frac{dz}{dt}\right)dt,$$

ed integrando

$$L=\Sigma\frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]_{t_0}^{t_1}=\Sigma\frac{mv_1^2}{2}-\Sigma\frac{mv_0^2}{2}=T_1-T_0$$

Nel caso che il sistema ammetta vincoli indipendenti dal tempo gli spostamenti effettivi $dx\ dy\ dz$..., sono ancora compatibili coi vincoli ed i calcoli precedenti saranno giusti anche se nelle $X\ Y\ Z$..., si sopprimono le forze dovute ai vincoli stessi, il cui lavoro è in tal caso nullo, quindi: *La variazione della forza viva durante un tempo dato per un sistema a vincoli indipendenti dal tempo, è uguale alla somma del lavoro totale delle forze che durante lo stesso tempo agiscono sul corpo, astrazione fatta da quelle che producono i vincoli.*

Se invece i vincoli dipendono dal tempo, allora i differenziali $dx\,dy$... debbono soddisfare le equazioni di condizione

$$\frac{dL}{dt}dt+\frac{dL}{dx}dx+\frac{dL}{dy}dy+\ldots=0$$

$$\frac{dM}{dt}dt+\frac{dM}{dx}dx+\frac{dM}{dy}dy+\ldots=0$$

. . . . . .

mentre le variazioni δx, δy... soddisfano alle relazioni

$$\frac{dL}{dx}\delta x+\frac{dL}{dy}\delta y+\ldots=0$$

$$\frac{dM}{dx}\delta x+\frac{dM}{dy}\delta y+\ldots=0$$

. . . . . .

I valori $dx\ dy$... non saranno quindi compatibili coi vincoli, le forze resistenti dovranno entrare nelle espressioni di X, Y, Z, ed il lavoro si comporrà di due parti, una L_a dovuta alle sole forze attive, l'altro L_r dovuta alle sole forze resistenti e sarà necessariamente $L_a - L_r = T_1 - T_0$, cioè: *L'incremento di forza viva in un sistema, che sia soggetto a vincoli dipendenti dal tempo, è uguale al lavoro prodotto dalle forze attive diminuito del lavoro prodotto dalle forze resistenti dovute ai vincoli.*

Osservazione. — Perchè le variazioni $\delta x\ \delta y$... possano coincidere coi differenziali $dx\ dy$... bisogna che nelle equazioni considerate siano

$$\frac{dL}{dt}=0,\quad \frac{dM}{dt}=0\ \ldots$$

ossia, che $L=0$, $M=0$... siano indipendenti dal tempo.

Teorema. — *Durante il movimento di un sistema di punti la forza viva totale del sistema può sempre dividersi in due parti: la prima risulta dalla metà del prodotto della massa totale del sistema per il quadrato della velocità del suo centro di gravità, e la seconda dalla somma delle forze vive di ogni punto considerato soltanto in rapporto al movimento relativo intorno allo stesso centro di gravità.*

Siano x, y, z le coordinate di un punto riferito ad un sistema di assi coordinati ortogonali $O(xyz)$, ξ, η, ζ le coordinate del centro di gravità G del sistema ed x', y', z' le coordinate di un punto qualsiasi rispetto a tre assi passanti pel centro di gravità G e paralleli agli assi $(Oxyz)$; v e v' le velocità relative agli assi

$(Oxyz)$ e $(Gx'y'z')$ ed ω la velocità del centro di gravità G; allora

$$x=\xi+x' \qquad y=\eta+y' \qquad z=\zeta+z'$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\xi}{dt}+\frac{dx'}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{d\eta}{dt}+\frac{dy'}{dt}, \qquad \frac{dz}{dt}=\frac{d\zeta}{dt}+\frac{dz'}{dt}$$

$$v^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \qquad v'^2=\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2,$$

$$\omega^2=\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2$$

e

$$T=\Sigma m\frac{v^2}{2}=\frac{1}{2}\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}+\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}+\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\xi}{dt}+\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\Sigma m\left[\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}\right)^2\right]+$$

$$+\frac{d\xi}{dt}\Sigma m\frac{dx'}{dt}+\frac{d\eta}{dt}\Sigma m\frac{dy'}{dt}+\frac{d\xi}{dt}\Sigma m\frac{dz'}{dt}$$

G essendo il centro di gravità del sistema

$$\Sigma mx'=0 \qquad \Sigma my'=0 \qquad \Sigma mz'=0,$$

quindi

$$\Sigma m\frac{dx'}{dt}=0 \qquad \Sigma m\frac{dy'}{dt}=0 \qquad \Sigma m\frac{dz'}{dt}=0,$$

e l'equazione superiore diventa

$$T=\frac{1}{2}\omega^2\Sigma m+\Sigma\frac{mv'^2}{2} \qquad \text{c. d. d.}$$

Questo teorema serve a spiegare alcuni fatti, nei quali a primo aspetto il teorema dell'eguaglianza degli incrementi del lavoro to-

tale a quelli della forza viva od energia cinetica del sistema sembrerebbe cadere in difetto. Infatti per ogni parte di un corpo o sistema la forza viva può scindersi in due parti, una relativa al movimento del suo centro di gravità, l'altra relativa al moto intorno allo stesso punto. Se si prendono in esame le minime particelle della materia il movimento intorno al centro di gravità delle medesime potrà non essere percettibile; non è a dirsi per questo che vi sia perdita di energia, essa potrà manifestarsi in altro modo e la teoria meccanica del calore stabilendo un rapporto costante tra il lavoro consumato ed il calore prodotto, ne è una prova manifesta. Non è qui il caso di esaminare la relazione che passa tra il lavoro, la forza viva e le altre energie fisiche; solo importa di mettere in evidenza il fatto che l'energia di un sistema può variare anche senza che vi sia apparentemente produzione di lavoro, affine di non essere tratti in errore nello studio dei problemi della resistenza dei materiali, come avverrebbe indubbiamente se non si tenesse conto, per es., dei cambiamenti di temperatura che possono influenzare una determinata costruzione.

7. Dell'equilibrio. — Si dice che *un corpo è in equilibrio* quando le forze che agiscono sul medesimo non producono lavoro alcuno; se sul corpo non opera alcuna forza, allora si dice che esso è *in quiete*. La condizione analitica dell'equilibrio è espressa da $\delta L = 0$, ossia $\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$, od anche da $\delta L \lesssim 0$ se gli spostamenti non sono reversibili, cioè tali che δx, δy, δz non possano essere cangiati in $-\delta x$, $-\delta y$, $-\delta z$.

Si chiama *momento virtuale di una forza* il prodotto della medesima per la proiezione di uno spostamento qualsiasi del suo punto d'applicazione sulla sua direzione; questo spostamento non reale, ma solo supposto e compatibile coi vincoli imposti, dicesi *virtuale*. La definizione di momento virtuale coincidendo con quella di lavoro, ne segue che, perchè un sistema sia in equilibrio, bisogna che sia nullo il suo momento virtuale. Questo concetto permette di enunciare in altro modo il principio di D'Alembert: infatti se ad x, y, z nell'equazione

$$\Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = 0$$

si sostituiscono ordinatamente le differenze

$$X - m\frac{d^2x}{dt^2}, \qquad Y - m\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad Z - m\frac{d^2z}{dt^2},$$

dette anche forze perdute, perchè esprimono le differenze fra le forze motrici e le componenti d'inerzia, s'ottiene:

$$\Sigma\left[\left(X-m\frac{d^2x}{dt^2}\right)\delta x+\left(Y-m\frac{d^2y}{dt^2}\right)\delta y+\left(Z-m\frac{d^2z}{dt^2}\right)\delta z\right]=0$$

che è appunto l'equazione che contiene il principio summentovato. Questa considerazione permette di ridurre le questioni di movimento a questioni di equilibrio, ed il principio di D'Alembert può essere espresso nel modo seguente: *In ogni corpo o sistema in movimento è nullo il momento virtuale delle forze perdute, ossia in ogni istante le forze perdute del sistema si fanno equilibrio.* Non bisogna però confondere gli spostamenti δx, δy, δz... coi differenziali dx, dy, dz... con cui non possono coincidere che quando i vincoli del sistema rappresentati dalle equazioni $L=0$, $M=0$... sono indipendenti dal tempo. Se i vincoli dipendono dal tempo, nell'applicazione di questo principio bisogna supporre che essi siano fissati, cioè mantenuti quali sono nell'istante che si considera, senza aver riguardo alla variazione che essi subiscono al variare del tempo.

Se si considera un sistema di forma invariabile sollecitato da forze, si è visto che

$$\delta L=\overline{X}\delta a+\overline{Y}\delta b+\overline{Z}\delta c+\delta\psi_x M_x+\delta\psi_y M_y+\delta\psi_z M_z$$

dove δa, δb, δc, $\delta\psi_x$, $\delta\psi_y$, $\delta\psi_z$ corrispondono ordinatamente alle quantità a, b, c, ψ_x, ψ_y, ψ_z del numero 4. Per l'equilibrio dovrà essere $\delta L=0$, ossia

$$\overline{X}\delta a+\overline{Y}\delta b+\overline{Z}\delta c+M_x\delta\psi_x+M_y\delta\psi_y+M_z\delta\psi_z=0$$

Ma le quantità δa, δb, δc, $\delta\psi_x$, $\delta\psi_y$, $\delta\psi_z$ possono assumere un valore qualsiasi compatibilmente coi vincoli del sistema; quindi perchè quella condizione sia verificata dovrà essere

$$\overline{X}=0 \qquad \overline{Y}=0 \qquad \overline{Z}=0 \qquad \text{(A)}$$

$$M_x=0 \qquad M_y=0 \qquad M_z=0 \qquad \text{(B)}$$

cioè *in un sistema di forma invariabile in equilibrio deve essere nulla la somma delle componenti parallele agli assi coordinati e nulla la somma dei momenti delle forze intorno agli stessi assi.* Le prime tre condizioni diconsi *equazioni di equi-*

librio alla traslazione, le ultime tre, *condizioni di equilibrio alla rotazione*. Se in un corpo si verificano in ogni punto le condizioni di equilibrio alla traslazione, sono soddisfatte anche le condizioni (A) e (B): infatti se in ogni punto

$$X=0 \qquad Y=0 \qquad Z=0$$

sarà necessariamente soddisfatta la

$$\Sigma(X\delta x+Y\delta y+Z\delta z)=0$$

e quindi saranno anche verificate le (A) e (B), che ne sono una conseguenza.

8. Diverse specie d'equilibrio. — Se sopra un corpo od un sistema agiscono forze variabili secondo leggi determinate possono aver luogo diverse specie di equilibrio; esso può essere *stabile*, *instabile* od *indifferente*. L'equilibrio dicesi stabile quando allontanando il corpo dalla posizione che occupa, esso tende a ritornarvi e vi ritorna effettivamente se si abbandona a se stesso. Instabile, se spostando il corpo dalla posizione d'equilibrio, esso tende ad allontanarsene maggiormente. Finalmente l'equilibrio dicesi indifferente, quando il corpo può rimanere in equilibrio in una qualsiasi delle nuove posizioni, che gli vengono assegnate mediante leggeri e successivi spostamenti. Se si ricorda la relazione fra forza viva e lavoro è facile determinare analiticamente la condizione caratteristica di ciascuna di queste tre specie d'equilibrio: infatti facendo subire uno spostamento alle diverse parti di un sistema in equilibrio sotto l'azione delle diverse forze che lo sollecitano, alcune di queste produrranno un lavoro positivo o motore, ed altre lavoro negativo o resistente, e l'incremento positivo o negativo della forza viva sarà uguale alla differenza fra quelle due quantità. Per l'equilibrio stabile bisogna che per qualsiasi spostamento il lavoro motore sia minore del lavoro resistente, in guisa che, se lo spostamento si vuole effettivamente produrre, sia necessario aggiungere nuove forze affinchè il corpo possa assumere una certa forza viva, ossia che si abbia

$$\delta L=\delta T<0$$

che è quanto dire che per uno spostamento infinitesimo del corpo l'incremento dell'energia cinetica sia negativo. Se il lavoro positivo supera per qualsiasi spostamento il lavoro negativo, allora quando il corpo è giunto nella nuova posizione le sue parti hanno assunto una certa forza viva $\delta T'$ per effetto della quale esse non

potranno arrestarsi nella nuova posizione e dovranno continuare nel loro movimento: in tal caso si ha l'equilibrio instabile, che viene caratterizzato dalla condizione

$$\delta L = \delta T > 0 .$$

Finalmente se per uno spostamento qualsiasi avvenuto nel sistema si verifica sempre

$$\delta L = \delta T = 0$$

allora il corpo non oppone alcuna resistenza al moto, come non può manifestare alcuna tendenza a continuarlo e rimarrà in equilibrio nella nuova posizione dando luogo al caso dell'equilibrio indifferente.

In qualche caso particolare per alcuni spostamenti $\delta L = \delta T$ è positivo e per altri negativo, l'equilibrio allora non è nè completamente stabile, nè completamente instabile, e si distingue col nome di *equilibrio indeterminato.*

9. Funzione potenziale e funzione ergale. — Dall'equazione

$$\delta L = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

si ricava che il lavoro delle forze che agiscono sopra un punto fra due istanti determinati t_0 e t_1 è

$$L = \int_{t_0}^{t_1} (X dx + Y dy + Z dz)$$

e per un sistema di punti

$$L = \Sigma \int_{t_0}^{t_1} (X dx + Y dy + Z dz) .$$

Per eseguire questa integrazione è necessario conoscere che funzioni del tempo t siano le quantità, che si trovano sotto il segno integrale. Se il tempo non entra esplicitamente in queste funzioni, allora basterà conoscere la traiettoria di ciascun punto ed i corrispondenti valori delle forze: vi è un caso però in cui basta conoscere le posizioni estreme occupate dal sistema. Questo

avviene quando esiste una funzione ϕ tale che in ogni punto si verifichino le uguaglianze

$$X=\frac{d\phi}{dx} \qquad Y=\frac{d\phi}{dy} \qquad Z=\frac{d\phi}{dz}$$

allora

$$dL=Xdx+Ydy+Zdz=\frac{d\phi}{dx}dx+\frac{d\phi}{dy}dy+\frac{d\phi}{dz}dz=d\phi$$

ed

$$L=\phi_1-\phi_0$$

indicando con ϕ_1 e ϕ_0 i valori della funzione ϕ corrispondenti alle posizioni estreme occupate dal corpo. La funzione ϕ, quando esiste, chiamasi *funzione potenziale* o *funzione di forze*, e si dice in tal caso che il sistema ammette una funzione potenziale.

Per definizione il lavoro è uguale al prodotto di una forza per lo spostamento del suo punto d'applicazione moltiplicato pel coseno dell'angolo compreso, cioè

$$dL=\delta s F\cos\widehat{Fds}$$

se esiste una fnnzione potenziale $dL=d\phi$, quindi

$$\frac{d\phi}{d\delta s}=\frac{dL}{d\delta s}=F\cos\widehat{F\delta s}\ ;$$

cioè: *La derivata della funzione potenziale presa rispetto allo spostamento di un punto è uguale alla forza che agisce sul punto nella direzione dello spostamento considerato.* Se si indica con c una costante, e si pone $\phi=c$ si rappresenta una famiglia di superficie dette *equipotenziali* o *di livello*, perchè per ciascuna di esse la funzione potenziale ha un valore costante; se si prende la derivata di ϕ rispetto ad una direzione tangente ad una superficie di livello in un punto qualsiasi preso sulla medesima, questa è necessariamente nulla, essendo ϕ costante, quindi in ogni punto della superficie di livello le forze sono dirette secondo la normale alla medesima. Due superficie di livello non possono intersecarsi; infatti se avessero punti comuni, le coordinate di questi dovrebbero far assumere alla funzione $\phi=c$ due valori diversi.

Perchè un sistema sia in equilibrio sotto l'azione di forze si deve verificare la condizione $\delta L = 0$. Se il sistema ammette una funzione potenziale $dL = d\phi$, $\delta L = \delta\phi$, quindi per l'equilibrio dovrà essere $\delta\phi = 0$. Sarà poi l'equilibrio stabile, instabile, od indifferente secondochè $dL = d\phi = dT$ sarà negativo, positivo od uguale a zero. In altri termini l'equilibrio è stabile se il valore della funzione potenziale, che corrisponde a quella posizione, è un massimo, instabile se è un minimo, e finalmente indifferente se la posizione del corpo corrisponde ad un intervallo, nel quale la funzione potenziale abbia un valore costante. L'incremento

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_0$$

della funzione potenziale per piccole variazioni può essere sviluppato in serie secondo le potenze ascendenti dello spostamento δs ed è dato dalla formola:

$$\Delta\phi = \Sigma\left(\frac{d\phi}{ds}\delta s + \frac{d^2\phi}{ds^2}\frac{\delta s^2}{2} + \frac{d^3\phi}{ds^3}\frac{\delta s^3}{3^1} + \ldots\right)$$

ma

$$\Sigma\left(\frac{d\phi}{ds}\delta s\right) = \Sigma(F\delta s\cos\widehat{Fds}) = \delta L$$

quindi se si indicano coll'indice o i valori di ϕ e dello spostamento s corrispondenti ad una posizione di equilibrio sarà

$$\phi_1 - \phi_0 = \Delta\phi_0 = \Sigma\left(\frac{d\phi}{ds}\delta s + \frac{d\phi^2}{ds^2}\frac{\delta s^2}{2^1} + \ldots\right)_{s=s_0}.$$

Ma per l'equilibrio

$$\Sigma\left(\frac{d\phi}{ds}\delta s\right)_{s=s_0} = \delta L = 0,$$

quindi il segno di $\Delta\phi$ e quello di $d\phi$ per uno spostamento infinitamente piccolo del sistema dipendono da quello della prima derivata di ϕ che non si annulla. Se essa è d'ordine pari l'equilibrio sarà stabile od instabile secondochè avrà segno negativo o positivo; se invece la prima derivata che non si annulla è d'ordine dispari, allora per alcuni valori $d\phi$ è positivo, per altri negativo; quindi l'equilibrio non è nè completamente stabile, nè completamente instabile, e, come si è già avvertito al numero 8, prende il nome di

equilibrio indeterminato. Per alcuni spostamenti il sistema oppone resistenza al moto, per altri invece appena in movimento esso tende ad allontanarsi sempre maggiormente dalla posizione d'equilibrio. Se tutte le derivate si annullano, si ha il caso dell'equilibrio indifferente.

Clausius ha introdotto la considerazione di un'altra funzione π che esso chiama *ergale* e che soddisfa alla condizione

$$dL = d\varphi = -d\pi .$$

Allora $L = \pi_0 - \pi_1$, cioè *il lavoro è uguale all'aumento dell'ergale*. Questa funzione essendo uguale e di segno contrario alla funzione potenziale nel caso dell'equilibrio stabile passerà per un valor minimo ed in quello dell'equilibrio instabile passerà invece per un massimo.

10. Sistemi di forze che ammettono sempre una funzione potenziale. — Se le forze che animano un sistema si riducono ad azioni mutue fra i punti che lo compongono e sono funzioni soltanto delle loro distanze, il sistema ammette sempre una funzione potenziale. Siano $A(xyz)$ e $B(x'y'z')$ due punti ed R (*) la forza che agisce fra i medesimi, funzione soltanto della loro distanza r, talchè sia $R = -f(r)$. Le componenti parallele agli assi dell'azione di A su B saranno (*Fig.* 1ª, *tav.* I)

$$R\frac{x'-x}{r}, \qquad R\frac{y'-y}{r}, \qquad R\frac{z'-z}{r},$$

e quelle di B su A

$$-R\frac{x'-x}{r}, \qquad -R\frac{y'-y}{r}, \qquad -R\frac{z'-z}{r}$$

perchè necessariamente uguali e di segno contrario (Num. 5). L'espressione del lavoro diventerà

$$\delta L = \Sigma(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) =$$
$$-R\left[\frac{x'-x}{r}(\delta x'-\delta x) + \frac{y'-y}{r}(\delta y'-\delta y) + \frac{z'-z}{r}(\delta z'-\delta z)\right].$$

(*) R può indifferentemente essere forza attrattiva o repulsiva, cioè positiva o negativa.

Se si ricorda che

$$r^2=(x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2$$

e quindi

$$\delta r=\frac{x'-x}{r}(\delta x'-\delta x)+\frac{y'-y}{r}(\delta y'-\delta y)+\frac{z'-z}{r}(\delta z'-\delta z)$$

si ricava subito

$$\delta L=-R\delta r=f(r)\delta r$$

e per tutto il sistema

$$\delta L=-\Sigma R\delta r=\Sigma(f(r)\delta r) \qquad (6).$$

Come caso particolare di questo teorema si può considerare quello, in cui un sistema è sollecitato da forze, che emanano da punti fissi nello spazio; in tal caso saranno uguali a zero le variazioni delle coordinate dei punti fissi, ma il metodo di dimostrazione non rimane per nulla cambiato.

Se $A\,(x, y, z)$ è il punto fisso

$$\left.\begin{aligned}\delta L=-R\left(\frac{x'-x}{r}\delta x'+\frac{y'-y}{r}\delta y'+\frac{z'-z}{r}\delta z'\right)=\\ =-R\delta r=f(r)\delta r\end{aligned}\right\} \qquad (7).$$

11. Energia potenziale. — Si dice che un corpo possiede *energia potenziale* quando abbandonato a se stesso ha l'attitudine a sviluppare un certo lavoro per giungere ad una posizione di equilibrio, e lo sviluppa effettivamente se nessun ostacolo si oppone al suo movimento. Se con ϕ s'indica la funzione potenziale di un sistema, con ϕ_m il suo valor massimo corrispondente alla posizione di equilibrio stabile e si rappresenta con I l'energia potenziale, per definizione è $I=\phi_m-\phi$. I è ciò di cui può aumentare la funzione potenziale (o diminuire la funzione ergale, espressione completamente equivalente) ed esprime il lavoro disponibile, di cui il sistema è ancora capace, od anche il lavoro, che possono sviluppare le forze nel passare dalla posizione attuale a quella corrispondente all'equilibrio stabile. Dall'equazione $I=\phi_m-\phi$ si ricava $dI=-d\phi$, ma le derivate della funzione potenziale prese rispetto agli spostamenti dànno le forze, che sollecitano i punti del sistema; quindi *le derivate dell'energia potenziale prese rispetto agli stessi spostamenti, essendo uguali e di segno con-*

trario alle prime, dànno le forze capaci di mantenere il sistema in equilibrio.

In un sistema, in cui alcune forze ammettono una funzione potenziale ϕ ed altre no, indicando con U il lavoro di queste ultime sarà

$$dT = dL = d\phi + dU = -dI + dU$$

e quindi

$$dU = dT + dI.$$

Se tutte le forze ammettono una funzione potenziale, allora $dU = 0$, ed indicando con A una costante d'integrazione si ottiene

$$dI + dT = 0,$$

ed

$$I + T = A \qquad (8).$$

Quando si verifica questa condizione il sistema si dice *conservativo* (*), e l'equazione (8) conduce al seguente teorema: *In ogni sistema conservativo la somma dell' energia potenziale e dell'energia attuale o cinetica è una quantità costante.*

12. L'energia potenziale per piccole deformazioni è una funzione omogenea di secondo grado degli spostamenti dei punti del sistema. — Se si considera un sistema di punti fra i quali agiscono forze, funzioni soltanto delle loro distanze, qualunque altra forza venga ad agire sui medesimi dicesi forza esterna, e queste secondo i casi possono o no ammettere una funzione potenziale. Se nessuna forza esterna agisce sopra il sistema, le azioni interne tendono a portarlo verso una posizione di equilibrio stabile, per la quale sarà nullo il suo momento virtuale, e quindi anche la risultante delle azioni, che ogni punto riceve da quelli che lo circondano; in tali condizioni si dice che il sistema o corpo è allo stato naturale di equilibrio, perchè è quello, verso cui esso tende naturalmente qualora venga abbandonato a se stesso. Se sopra un sistema od un corpo, che trovasi allo stato naturale, vengano ad agire forze esterne tali, che producano nel medesimo uno spostamento infinitamente piccolo, la sua energia potenziale (che trattandosi di corpi elastici chiamasi

---

(*) Thomson e Tait, *A treatise on natural philosophy.*

anche *lavoro di deformazione*), sarà espressa dall'incremento della funzione potenziale preso negativamente, cioè da (Num. 9)

$$I = -(\Delta\phi)_{s=s_0} = \phi_m - \phi = -\left[\Sigma\left(\frac{d\phi}{ds}\delta s + \frac{d^2\phi}{ds^2}\frac{\delta s^2}{2^1} + \ldots\right)\right]_{s=s_0} \quad (9).$$

Il termine $\left(\Sigma\frac{d\phi}{ds}\delta s\right)_{s=s_0}$ è necessariamente nullo, perchè rappresenta il momento virtuale del sistema (Num. 9), quindi l'energia potenziale per uno spostamento infinitesimo contato a partire dallo stato naturale è una quantità positiva ed in generale una funzione omogenea di secondo grado degli spostamenti, poichè i termini che contengono le potenze superiori degli spostamenti sono trascurabili come infinitesimi di ordine superiore. In qualche caso particolare in cui insieme alla prima derivata della funzione potenziale per $s=s_0$ si annullassero anche le derivate di ordine superiore, allora l'energia potenziale sarà una funzione dello spostamento, il cui grado è uguale all'ordine della prima derivata che non si annulla.

La forza che agisce in ogni punto è uguale e contraria alla derivata della funzione potenziale (Num. 11); quindi in generale nei diversi punti del corpo agiranno forze proporzionali agli spostamenti, e solo in qualche caso particolare si potrà verificare che esse siano proporzionali alle potenze superiori dello spostamento medesimo. L'osservazione e l'esperienza sono d'accordo nel dimostrare che nei corpi solidi della natura, per piccolissime deformazioni, gli sforzi sono direttamente proporzionali agli spostamenti dei punti, che li compongono; quindi per le applicazioni noi non dovremo prendere in considerazione che il caso generale, cioè che per piccole deformazioni l'energia potenziale sia una funzione omogenea di secondo grado degli spostamenti e le forze, che si sviluppano fra punto e punto, siano proporzionali agli spostamenti corrispondenti.

13. Relazione fra il lavoro delle forze interne e delle forze esterne. — Se in un sistema o corpo soggetto a forze interne funzione delle distanze fra i punti, che lo compongono, e ad altre forze, che chiameremo esterne, avvengono movimenti, per ogni spostamento o deformazione, che esso subisce, dovrà sempre verificarsi la relazione $dL = dT$. Se indichiamo con L_e il lavoro delle forze esterne, con L_i il lavoro delle forze interne, facendo l'ipotesi che queste ultime si oppongano alla deformazione del sistema, allora sarà

$$dT = dL = d(L_e - L_i).$$

Si possono presentare due casi diversi: nel primo le forze esterne variano nello stesso modo delle interne, in guisa che in ogni istante si ha $d(L_e - L_i) = 0$. Allora il corpo non acquista forza viva e può arrestarsi in ogni posizione in equilibrio, semprechè cessino di variare le forze esterne. Nel secondo invece le forze esterne variano in modo diverso, allora $d(L_e - L_i)$ non è zero e se in un dato istante il sistema arriva in una posizione di equilibrio, esso non vi si potrà arrestare perchè in generale avrà acquistata una certa forza viva, che sarà data da

$$T = \int_{s_0}^{s_1} d(L_e - L_i) = L_e - L_i$$

e seguiterà nel suo movimento finchè sia estinta tutta la sua energia cinetica. Arrivato a questa posizione, che in generale non sarà di equilibrio, esso incomincierà un nuovo movimento, e, se le forze tutte ammettono una funzione potenziale, la forza viva T ripasserà in senso inverso per gli stessi valori avuti durante il movimento di deformazione, il sistema oscillerà intorno alla posizione di equilibrio, e continuerebbe indefinitamente nel suo movimento se cause estranee non gli sottraessero energia: queste cause sono ordinariamente l'attrito, la resistenza dei mezzi, ecc.

Nel caso di un corpo leggermente deformato a partire dallo stato di equilibrio abbiamo visto nel numero 12 che le forze, che animano ciascun punto, sono proporzionali allo spostamento δs. Sia ε la costante di proporzionalità ed f la forza interna, δs_1 lo spostamento corrispondente alla posizione di equilibrio, sarà

$$f = \varepsilon \delta s\,, \qquad L_i = \Sigma \int_0^{\delta s} \varepsilon \delta s \, d\delta s = \Sigma \varepsilon \frac{\delta s^2}{2}\,.$$

Se le forze esterne sono costanti di intensità e direzione ed indichiamo con F il loro valore misurato nella direzione dello spostamento

$$L_e = \Sigma F \delta s,$$

e nella posizione di equilibrio, indicando con f_1 il valore delle forze interne, sarà

$$F = f_1 = \varepsilon \delta s_1 \qquad L_i = \Sigma \frac{\varepsilon \delta s_1^2}{2}$$

ed

$$L_e = \Sigma \varepsilon \delta s_1^2$$

ossia *il lavoro delle forze esterne è doppio del lavoro resistente delle forze interne.*

Questo teorema risulta anche dalla considerazione che l'energia potenziale $I = L_i$ è una funzione omogenea di secondo grado degli spostamenti e quindi per una nota proprietà delle funzioni omogenee (*) sarà

$$2I = \Sigma \frac{dI}{d\delta s} \delta s \qquad \text{ossia} \qquad I = \frac{1}{2} \Sigma \frac{dI}{d\delta s} \delta s ,$$

Ma superiormente si è dimostrato che $\frac{dI}{d\delta s}$ esprime in ogni punto la forza, che mantiene in equilibrio il corpo, cioè F.

Quindi

$$L_i = I = \frac{1}{2} \Sigma F \delta s = \frac{1}{2} L_e \qquad \Big\} (10).$$

Risulta da questo teorema che il sistema arriverà alla posizione di equilibrio acquistando una forza viva

$$T = L_e - L_i = \frac{1}{2} L_e ;$$

quindi i suoi punti continueranno a muoversi finchè sia estinta tutta la forza viva, che posseggono, ossia finchè sia

$$T = L_e - L_i = 0 ;$$

ma

$$L_e = \Sigma F \delta s = \Sigma \varepsilon \delta s_1 \delta s , \qquad L_i = \Sigma \frac{1}{2} \varepsilon \delta s^2 .$$

Quindi sarà $T = 0$ quando $\delta s = 2\delta s_1$, cioè quando la deformazione effettiva sarà doppia della deformazione corrispondente alla posizione d'equilibrio. Arrivato il corpo a questa posizione, non potrà mantenersi in equilibrio ed incomincierà un movimento retrogrado, pel quale la forza viva passerà in senso inverso pei valori antecedenti, ed il moto si riprodurrà indefinitamente, se non vi sono cause, che sottraggano energia al sistema, dando luogo al fenomeno delle vibrazioni.

(*) Serret, *Calcolo differenziale ed integrale.*

CAPITOLO II.

Equilibrio molecolare.

14. Sistema molecolare. Forze molecolari. — Abbiamo già visto che chiamasi *corpo* un sistema di punti materiali posti a distanze infinitamente piccole gli uni dagli altri; questi punti si indicano ordinariamente col nome di *molecole*, e diconsi *forze molecolari* le azioni meccaniche, che essi possono esercitare gli uni sugli altri. Lo spazio di forma poliedrica, che appartiene ad ogni molecola, e che la contiene sola, è detto *sistema molecolare* (*); nel caso dei corpi aventi una delle tre dimensioni infinitamente piccole rispetto alle altre due, si suol indicare collo stesso nome una sezione dello spazio molecolare fatta con un piano passante pel centro di figura di detto spazio e tangente nel punto, che si considera, alla superficie media del corpo, cioè a quella superficie, che contiene i centri di figura di tutti i sistemi molecolari, che lo compongono. Studiare l'equilibrio molecolare vuol dire cercare come agiscono e si distribuiscono intorno ad ogni elemento materiale o molecola le forze, che lo sollecitano, ed a quali condizioni esse vanno soggette. Quando si isola un elemento materiale, agli elementi superficiali, che lo limitano, si suppongono applicate delle forze, che rappresentano l'effetto dei punti vicini, cioè queste forze debbono essere eguali alle risultanti delle azioni, che le rimanenti molecole del corpo esercitano attraverso le stesse superficie elementari.

15. Equazioni di equilibrio dei corpi elastici. Equilibrio del parallelepipedo e del tetraedro elementare. — Perchè un corpo sia in equilibrio è necessario e sufficiente che siano in equilibrio tutti gli elementi materiali infinitamente piccoli, in cui esso può essere scomposto: ciò è quanto dire che in tutti i punti del corpo debbono verificarsi le condizioni, che assicurano l'equilibrio dei medesimi. Fra gli infiniti modi, coi quali un corpo può essere diviso nei suoi elementi, si scelgono quelli, pei quali riescono più semplici le espressioni delle equazioni di equilibrio; ordinariamente il corpo si suppone diviso in elementi infinitamente piccoli, aventi forma di parallelepipedo o tetraedro e qualche volta anche di sfera (sebbene con quest'ul-

---

(*) Canevazzi, *Sull'equilibrio molecolare* (Atti dell'Accademia dell'Istituto delle Scienze di Bologna, 1878).

tima forma non si possa riescire a prendere in considerazione tutto lo spazio occupato dal corpo). Se si immagina un sistema di terne di piani ortogonali e paralleli ai piani coordinati, esse decompongono il corpo nella parte interna in tanti parallelepipedi rettangoli cogli spigoli paralleli agli assi coordinati, e nella parte vicina alla superficie esterna in tanti tetraedri aventi pure tre spigoli paralleli agli assi coordinati ed una faccia coincidente con un elemento della superficie, che limita il corpo o superficie inviluppo. Affinchè sia assicurato l'equilibrio di tutti gli elementi, e quindi anche quello del corpo, si dovranno verificare nel suo interno le equazioni, che assicurano l'equilibrio di un parallelepipedo elementare ed in prossimità della superficie esterna quelle, che garantiscono l'equilibrio di un tetraedro pure infinitamente piccolo.

Equilibrio del parallelepipedo elementare. — Immaginiamo un parallelepipedo rettangolo AF (*Fig.* 2ª, *tav.* I) i cui spigoli siano paralleli agli assi ed infinitamente piccoli, talchè si possa ritenere $AD=dx$, $AB=dy$, $AH=dz$; le forze, che si esercitano attraverso le sue faccie, le indicheremo colla lettera p affetta da un primo indice corrispondente all'asse, cui dette faccie sono perpendicolari, e da un secondo (quando sia il caso) che indichi l'asse parallelamente al quale la forza viene misurata: con questa convenzione p_{xx} rappresenterebbe la componente parallela all'asse delle x della forza, che agisce sopra la faccia normale allo stesso asse. Nel caso che ora si considera sulla faccia $ABEH$ agirà la forza p_x per unità di superficie, che dà parallelamente agli assi le tre componenti $p_{xx}dydz$, $p_{xy}dydz$, $p_{xz}dydz$, e sulla faccia parallela $DCFG$ agirà ancora la forza p_x aumentata del suo differenziale $\frac{dp_x}{dx}dx$, e darà luogo a tre componenti

$$\left(p_{xx}+\frac{dp_{xx}}{dx}dx\right)dydz\,, \qquad \left(p_{xy}+\frac{dp_{xy}}{dx}dx\right)dydz\,,$$

$$\left(p_{xz}+\frac{dp_{xz}}{dx}dx\right)dydz\,.$$

Sulle due faccie normali all'asse delle y avremo in modo analogo

$$p_{yx}\,dx\,dz\,, \qquad p_{yy}\,dx\,dz\,, \qquad p_{yz}\,dx\,dz$$

$$\left(p_{yx}+\frac{dp_{yx}}{dy}dy\right)dx\,dz\,, \qquad \left(p_{yy}+\frac{dp_{yy}}{dy}dy\right)dx\,dz\,,$$

$$\left(p_{yz}+\frac{dp_{yz}}{dy}dy\right)dx\,dz$$

e su quelle perpendicolari all'asse delle z

$$p_{zx}\,dx\,dy\,, \qquad p_{zy}\,dx\,dy\,, \qquad p_{zz}\,dx\,dy$$

$$\left(p_{zx}+\frac{dp_{zx}}{dz}\,dz\right)dx\,dy\,, \qquad \left(p_{zy}+\frac{dp_{zy}}{dz}\,dz\right)dx\,dy\,,$$

$$\left(p_{zz}+\frac{dp_{zz}}{dz}\,dz\right)dx\,dy\,.$$

Se pel centro di gravità G (*Fig.* 3ª, *tav.* I) del parallelepipedo si fanno passare tre assi paralleli agli assi coordinati, per l'equilibrio dovranno essere uguale a zero le somme dei momenti delle forze intorno agli assi stessi. Se prendiamo in considerazione l'asse Gz' dovrà essere

$$p_{xy}\,dy\,dz\,\frac{dx}{2}+p_{xy}\,dy\,dz\,\frac{dx}{2}+\frac{dp_{xy}}{dx}\,dx\,dy\,dz\,\frac{dx}{2}=$$

$$=p_{yx}\,dx\,dz\,\frac{dy}{2}+p_{yx}\,dx\,dz\,\frac{dy}{2}+\frac{dp_{yx}}{dy}\,dy\,dx\,dz\,\frac{dy}{2}$$

perchè le altre forze, che agiscono sulle diverse faccie, incontrano tutte l'asse o gli sono parallele, e quelle che agiscono sulla materia, che compone il parallelepipedo, dànno luogo ad una risultante, che passa pel centro di figura G, perchè si potranno sempre supporre distribuite uniformemente entro l'estensione infinitamente piccola del parallelepipedo elementare. Se si trascurano gli infinitesimi di ordine superiore e si divide tutta l'equazione pel fattor comune $dx\,dy\,dz$ rimane

$$p_{xy}=p_{yx} \qquad (11).$$

Ripetendo un calcolo analogo per gli altri due assi Gy' e Gx' si ottiene, come è facile accorgersene sostituendo circolarmente fra loro x, y, z,

$$p_{xz}=p_{zx}\,, \qquad p_{yz}=p_{zy} \qquad (11)$$

cioè: *le componenti tangenziali su elementi superficiali ad angolo retto ed agenti nello stesso piano, sono uguali fra loro* (*):

(*) Grashof, *Theorie der Elasticität und Fertigkeit.* — Lamé, *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides.* — Barré de Saint-Venant, *Note* al corso di Navier, Appendice III, *Résumé des leçons*, etc.

questo teorema, più che una vera condizione di equilibrio, esprime una proprietà del medesimo.

Se si proiettano sugli assi coordinati le forze, che agiscono sul parallelepipedo elementare, si avranno le tre equazioni, che assicurano l'equilibrio di traslazione dell'elemento: indicando con ρ la densità nel punto, che si considera, si ottiene per l'asse delle x:

$$\left(-p_{xx}+p_{xx}+\frac{dp_{xx}}{dx}dx\right)dy\,dz+\left(-p_{yx}+p_{yx}+\frac{dp_{yx}}{dy}dy\right)dx\,dz+$$
$$+\left(-p_{zx}+p_{zx}+\frac{dp_{zx}}{dz}dz\right)dx\,dy+dx\,dy\,dz\rho X=0$$

ed altre due equazioni analoghe si ottengono per gli altri due assi, quelli delle y e delle z:

$$\left(-p_{yy}+p_{yy}+\frac{dp_{yy}}{dy}dy\right)dx\,dz+\left(-p_{zy}+p_{zy}+\frac{dp_{zy}}{dz}dz\right)dx\,dy+$$
$$+\left(-p_{xy}+p_{xy}+\frac{dp_{xy}}{dx}dx\right)dy\,dz+dx\,dy\,dz\rho Y=0$$

$$\left(-p_{zz}+p_{zz}+\frac{dp_{zz}}{dz}dz\right)dx\,dy+\left(-p_{xz}+p_{xz}+\frac{dp_{xz}}{dx}dx\right)dy\,dz+$$
$$+\left(-p_{yz}+p_{yz}+\frac{dp_{yz}}{dy}dy\right)dx\,dz+dx\,dy\,dz\rho Z=0\,.$$

Riducendo, dividendo per $dx\,dy\,dz$ fattor comune e tenendo conto che

$$p_{xy}=p_{yx}\,,\qquad p_{xz}=p_{zx}\,,\qquad p_{yz}=p_{zy}$$

si ricava:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{xz}}{dz}+X\rho=0\\&\frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz}+Y\rho=0\\&\frac{dp_{xz}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}+Z\rho=0\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

equazioni, che legano le forze X, Y, Z colle derivate parziali delle sei forze molecolari p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy}, p_{xz}, p_{yz}.

Equilibio del tetraedro elementare. — Consideriamo un tetraedro elementare $ABCD$ (*Fig.* 4ª, *tav.* I) avente tre faccie normali agli assi coordinati, l'area delle quali sia ordinatamente ω_x, ω_y, ω_z, e la quarta di area ω sia inclinata ai medesimi. Sia n la normale a questa faccia, e siano α, β, γ gli angoli, che essa fa cogli assi, λ, μ, ν gli angoli che la direzione p_n della forza agente sulla faccia di area ω fa cogli assi stessi. Perchè vi sia equilibrio di traslazione si dovranno verificare le tre seguenti equazioni:

$$p_{xx}\omega_x + p_{xy}\omega_y + p_{xz}\omega_z = p_n\omega\cos\lambda$$

$$p_{xy}\omega_x + p_{yy}\omega_y + p_{yz}\omega_z = p_n\omega\cos\mu$$

$$p_{xz}\omega_x + p_{yz}\omega_y + p_{zz}\omega_z = p_n\omega\cos\nu$$

perchè i termini che contengono $X\rho$, $Y\rho$, $Z\rho$ dovendo essere moltiplicati per il volume dell'elemento, che è un infinitamente piccolo di terzo ordine, possono essere trascurati in confronto dei termini infinitamente piccoli di secondo ordine, che contengono le aree infinitesime ω, ω_x, ω_y, ω_z.

Per un noto teorema sulla proiezione delle superficie $\omega_x = \omega\cos\alpha$, $\omega_y = \omega\cos\beta$, $\omega_z = \omega\cos\gamma$; quindi le equazioni precedenti si possono anche scrivere

$$\omega p_{xx}\cos\alpha + \omega p_{xy}\cos\beta + \omega p_{xz}\cos\gamma = \omega p_n\cos\lambda = \omega p_{nx}$$

$$\omega p_{xy}\cos\alpha + \omega p_{yy}\cos\beta + \omega p_{yz}\cos\gamma = \omega p_n\cos\mu = \omega p_{ny}$$

$$\omega p_{xz}\cos\alpha + \omega p_{yz}\cos\beta + \omega p_{zz}\cos\gamma = \omega p_n\cos\nu = \omega p_{nz}$$

e togliendo il fattor comune ω

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{xz}\cos\gamma &= p_{nx} \\ p_{xy}\cos\alpha + p_{yy}\cos\beta + p_{yz}\cos\gamma &= p_{ny} \\ p_{xz}\cos\alpha + p_{yz}\cos\beta + p_{zz}\cos\gamma &= p_{nz} \end{aligned}\right\} (13).$$

È opportuno avvertire che queste tre equazioni convengono anche al caso che si consideri un tetraedro nell'interno del corpo invece che alla superficie.

Osservazione. — Servendosi delle equazioni (12) e (13) è facile dimostrare che le forze, che agiscono sopra un sistema molecolare in equilibrio soddisfano alle sei condizioni generali per l'equilibrio

di un sistema (*). Moltiplicando le (12) per $dx\,dy\,dz$ ed integrando si ottiene:

$$\int_3 \frac{dp_{xx}}{dx}\,dx\,dy\,dz + \int_3 \frac{dp_{xy}}{dy}\,dx\,dy\,dz +$$

$$+ \int_3 \frac{dp_{xz}}{dz}\,dx\,dy\,dz + \int_3 X\rho\,dx\,dy\,dz = 0$$

$$\int_3 \frac{dp_{xy}}{dx}\,dx\,dy\,dz + \int_3 \frac{dp_{yy}}{dy}\,dx\,dy\,dz +$$

$$+ \int_3 \frac{dp_{yz}}{dz}\,dx\,dy\,dz + \int_3 Y\rho\,dx\,dy\,dz = 0$$

$$\int_3 \frac{dp_{xz}}{dx}\,dx\,dy\,dz + \int_3 \frac{dp_{yz}}{dy}\,dx\,dy\,dz +$$

$$+ \int_3 \frac{dp_{zz}}{dz}\,dx\,dy\,dz + \int_3 Z\rho\,dx\,dy\,dz = 0\ .$$

Indichiamo con ω_1 ed ω_2 gli elementi della superficie, che limita il corpo, all'estremità di una stessa retta parallela agli assi, con p'_{xx}, p''_{xx}, p'_{xy}, p''_{xy} ... i valori delle forze p_{xx}, p_{xy} ... in questi stessi due punti, con α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 ordinatamente gli angoli, che le normali n_1, n_2 di ciascuno di questi elementi fanno cogli assi coordinati. Allora

$$\left.\begin{aligned} &\int_3 \frac{dp_{xx}}{dx}\,dx\,dy\,dz = -\int_2 dy\,dz\,(p'_{xx} - p''_{xx}) = \\ &= \Sigma\,(p'_{xx}\omega_1 \cos\alpha_1 - p''_{xx}\omega_2 \cos\alpha_2) = \Sigma\, p_{xx}\omega \cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad (\varepsilon)$$

intendendo la sommatoria estesa a tutti gli elementi superficiali del contorno del corpo. Eseguendo una trasformazione analoga

---

(*) Lamé, Opera citata. Seconda edizione, pag. 22.

sugli altri integrali, che entrano nelle formole precedenti, si ottiene:

$$\Sigma(p_{xx}\cos\alpha+p_{xy}\cos\beta+p_{xz}\cos\gamma)\omega+\Sigma\rho X\,dx\,dy\,dz=0$$

$$\Sigma(p_{xy}\cos\alpha+p_{yy}\cos\beta+p_{yz}\cos\gamma)\omega+\Sigma\rho Y\,dx\,dy\,dz=0$$

$$\Sigma(p_{xz}\cos\alpha+p_{yz}\cos\beta+p_{zz}\cos\gamma)\omega+\Sigma\rho Z\,dx\,dy\,dz=0\,.$$

In causa delle (13) i termini fra parentesi esprimono le componenti parallele agli assi delle forze agenti alla superficie del corpo, quindi ponendo $dV=dx\,dy\,dz$

$$\Sigma p_{nx}\omega+\Sigma\rho X\,dV=0\,,\quad \Sigma p_{ny}\omega+\Sigma\rho Y\,dV=0\,,\quad \Sigma p_{nz}\omega+\Sigma\rho Z\,dV=0$$

equazioni, che assicurano l'equilibrio di traslazione di tutto il sistema.

Se si moltiplica la seconda delle equazioni (12) per z e la terza per y e si sottrae quest'ultima dalla precedente si ottiene

$$\left[\frac{d(zp_{xy}-yp_{xz})}{dx}\right]+\left[\frac{d(zp_{yy}-yp_{zy})}{dy}+p_{yz}\right]+$$
$$+\left[\frac{d(zp_{yz}-yp_{zz})}{dz}-p_{yz}\right]+\rho(zY-yZ)=0\,.$$

(Le quantità $+p_{yz}$ e $-p_{yz}$ sono state introdotte per mettere sotto forma di derivate il secondo e terzo termine dell'equazione). Moltiplicando per $dx\,dy\,dz$ ed integrando, avendo cura di eseguire una prima integrazione nel modo indicato precedentemente (Formola ε) si ottiene

$$\Sigma[(zp_{xy}-yp_{xz})\cos\alpha+(zp_{yy}-yp_{yz})\cos\beta+$$
$$+(zp_{yz}-yp_{zz})\cos\beta]\omega+\Sigma(zY-yZ)\,dV=0$$

od anche

$$\Sigma[z(p_{xy}\cos\alpha+p_{yy}\cos\beta+p_{yz}\cos\gamma)-$$
$$-y(p_{xz}\cos\alpha+p_{yz}\cos\beta+p_{zz}\cos\gamma)]\omega+\Sigma\rho(zY-yZ)\,dV=0\,.$$

Se si ricordano le equazioni (13) i termini fra parentesi non sono altro che le componenti parallele agli assi delle y e delle z delle forze p_n, quindi l'espressione superiore diventa

$$\Sigma(zp_{ny}-yp_{nz})\omega+\Sigma\rho(zY-yZ)\,dV=0$$

ed in modo analogo si ottengono le altre due equazioni

$$\Sigma(x p_{nz} - z p_{nx})\omega + \Sigma\rho(xZ - zX)dV = 0$$

$$\Sigma(y p_{nx} - x p_{ny})\omega + \Sigma\rho(yX - xY)dV = 0$$

che assicurano l'equilibrio di rotazione del sistema; se si aggiungono le sei condizioni, che stabiliscono l'immobilità di un elemento superficiale, allora sarà assicurata anche l'immobilità di tutto il sistema. Queste equazioni dimostrano che l'insieme delle forze, che agiscono sulla superficie esterna del corpo e di quelle, che agiscono all'interno nei diversi punti, costituiscono un sistema in equilibrio.

16. Teorema di reciprocità relativamente alle forze molecolari. — Le equazioni (13) debbonsi verificare in un corpo in equilibrio non solo alla superficie, ma anche nell'interno in un punto qualsiasi e potranno servire come le (12) a determinare le proprietà delle forze molecolari. Sia p_n la forza agente su un elemento piano preso nell'interno del corpo, la sua componente in una direzione s qualsiasi, colle convenzioni fatte relativamente ai simboli algebrici, sarà rappresentata da

$$p_{ns} = p_{nx}\cos\widehat{sx} + p_{ny}\cos\widehat{sy} + p_{nz}\cos\widehat{sz}\ .$$

Sostituendo a p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} i valori forniti dalle (13) ed indicando con $\widehat{nx}$, $\widehat{ny}$, $\widehat{nz}$ gli angoli, che la normale all'elemento piano corrispondente alla forza p_n fa cogli assi coordinati, si ottiene

$$\begin{aligned} p_{ns} = {} & p_{xx}\cos\widehat{nx}\cos\widehat{sx} + p_{yy}\cos\widehat{ny}\cos\widehat{sy} + p_{zz}\cos\widehat{nz}\cos\widehat{sz} + \\ & + p_{yz}[\cos\widehat{ny}\cos\widehat{sz} + \cos\widehat{nz}\cos\widehat{sy}] + \\ & + p_{xz}[\cos\widehat{nz}\cos\widehat{sx} + \cos\widehat{nx}\cos\widehat{sz}] + \\ & + p_{xy}[\cos\widehat{nx}\cos\widehat{sy} + \cos\widehat{ny}\cos\widehat{sx}] \end{aligned}$$

formola, che può servire per determinare le intensità delle forze molecolari componenti secondo tre assi coordinati quando siano note le componenti molecolari secondo altri tre assi ed i coseni di direzione dei nuovi assi rispetto ai vecchi (*).

Se nell'interno di un corpo si considerano due elementi superficiali, la componente della forza molecolare agente sul primo

---

(*) Non avendo questa ricerca grande interesse per le applicazioni veggasi NAVIER, *Résumé des leçons*, etc., colle *Note* di BARRÉ DE SAINT-VENANT, Appendice III.

presa parallelamente alla normale al secondo è uguale alla componente della forza agente sul secondo misurata parallelamente alla normale al primo elemento. — Infatti, se si prende in esame una qualsiasi delle equazioni (13) per es., la prima:

$$p_{nx} = p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{xz}\cos\gamma$$

la p_{nx} è la componente della forza agente sulla faccia n presa normalmente alla faccia x, e $p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{xz}\cos\gamma$ è la somma delle proiezioni sulla normale alla faccia n delle componenti parallele agli assi della forza, che agisce sulla faccia x. Questo teorema, dovuto a Cauchy, è conosciuto sotto il nome di *Principio* o *Teorema di reciprocità:* nel caso di due elementi superficiali ortogonali, esso si riduce ad un teorema già dimostrato, cioè che le componenti tangenziali delle forze, che agiscono sopra elementi ad angolo retto, sono uguali fra loro (Num. 15).

17. Superficie delle direzioni ed ellissoide delle intensità. — Se si indicano con σ e τ le componenti della forza p_n prese la prima normalmente e la seconda tangenzialmente alla faccia n (*Fig.* 5ª, *tav.* I), con ϕ l'angolo compreso fra la direzione della p_n e la direzione della normale n e se si conserva ai simboli introdotti nei numeri precedenti lo stesso valore

$$\cos\phi = \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu$$

e quindi

$$\sigma = p_n\cos\phi = p_n\cos\lambda\cos\alpha + p_n\cos\mu\cos\beta + p_n\cos\nu\cos\gamma$$

ma

$$p_n\cos\lambda = p_{nx}\,, \qquad p_n\cos\mu = p_{ny}\,, \qquad p_n\cos\nu = p_{nz}\,,$$

quindi in causa delle (13)

$$\begin{aligned}\sigma = {} & \cos\alpha\,(p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{xz}\cos\gamma) + \\ & + \cos\beta\,(p_{xy}\cos\alpha + p_{yy}\cos\beta + p_{yz}\cos\gamma) + \\ & + \cos\gamma\,(p_{xz}\cos\alpha + p_{yz}\cos\beta + p_{zz}\cos\gamma)\end{aligned}$$

e riducendo

$$\left.\begin{aligned}\sigma = {} & p_{xx}\cos^2\alpha + p_{yy}\cos^2\beta + p_{zz}\cos^2\gamma + \\ & + 2p_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2p_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + 2p_{yz}\cos\beta\cos\gamma\end{aligned}\right\} (14).$$

Se si suppone trasportata l'origine degli assi nel punto di mezzo O della faccia n (*Fig.* 6ª, *tav.* I) e si prende sulla direzione σ a partire

dall'origine O una lunghezza OQ proporzionale ad $\frac{1}{\sqrt{\pm\sigma}}$, se si indicano con x, y, z le coordinate del punto Q e si suppone la costante di proporzionalità uguale all'unità, allora

$$\cos\alpha = x\sqrt{\pm\sigma}\,, \qquad \cos\beta = y\sqrt{\pm\sigma}\,, \qquad \cos\gamma = z\sqrt{\pm\sigma}\,.$$

Sostituendo questi valori nella (14) e togliendo il fattor comune σ, rimane

$$1 = p_{xx}x^2 + p_{yy}y^2 + p_{zz}z^2 + 2p_{xy}xy + 2p_{xz}xz + 2p_{yz}yz \qquad (15)$$

equazione, che rappresenta una superficie di secondo grado avente il centro a distanza finita. Se mediante una rotazione si conducono gli assi coordinati a coincidere con quelli della superficie (15) dovranno necessariamente scomparire i termini, che contengono il rettangolo delle coordinate, cioè dovrà essere

$$p_{xy} = 0\,, \qquad p_{xz} = 0\,, \qquad p_{yz} = 0 \qquad (16).$$

Dunque: *in ogni punto di un corpo in equilibrio esistono sempre tre faccette piane od elementi superficiali ortogonali fra loro, pei quali sono uguali a zero le componenti tangenziali;* tali elementi diconsi *principali* e *tensioni* o *pressioni principali* le forze molecolari, che ai medesimi corrispondono: queste tre forze in seguito saranno sempre rappresentate colle lettere σ_1, σ_2, σ_3. Se si prendono come piani coordinati gli elementi principali e si indicano con x', y', z' le coordinate dell'estremo della forza p_n evidentemente $p_{nx} = x'$, $p_{ny} = y'$, $p_{nz} = z'$ e le (13) in causa delle (16) si riducono a

$$\left.\begin{aligned} x' &= p_{nx} = p_{xx}\cos\alpha = \sigma_1\cos\alpha \\ y' &= p_{ny} = p_{yy}\cos\beta = \sigma_2\cos\beta \\ z' &= p_{nz} = p_{zz}\cos\gamma = \sigma_3\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad (16^{bis})$$

da cui si ricava

$$\cos\alpha = \frac{x'}{\sigma_1}\,, \qquad \cos\beta = \frac{y'}{\sigma_2}\,, \qquad \cos\gamma = \frac{z'}{\sigma_3} \qquad (17).$$

Ma l'equazione del piano, su cui agisce la forza p_n, è data da

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0\,,$$

quindi sostituendo si ha

$$\frac{x x'}{\sigma_1} + \frac{y y'}{\sigma_2} + \frac{z z'}{\sigma_3} = 0 .$$

Se si ricorda che in una superficie di secondo grado riferita ai suoi assi ed avente per equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$$

la relazione che lega le estremità dei diametri di coordinate x', y', z' e i piani diametrali corrispondenti è

$$\frac{x x'}{a^2} + \frac{y y'}{b^2} + \frac{z z'}{c^2} = 0$$

si conclude facilmente che *in un corpo in equilibrio gli elementi corrispondenti (piani e forze) hanno direzioni tali, che dipendono le une dalle altre colla stessa legge, colla quale sono legate le direzioni dei diametri e dei piani diametrali in una superficie di secondo grado, che ha per semi assi* $\sqrt{\sigma_1}$, $\sqrt{\sigma_2}$, $\sqrt{\sigma_3}$ *e che è rappresentata dall'equazione*

$$\frac{x^2}{\sigma_1} + \frac{y^2}{\sigma_2} + \frac{z^2}{\sigma_3} = \pm 1 \qquad (18).$$

In causa di questa proprietà la superficie (18) dicesi *superficie delle direzioni* (*) e può essere un ellissoide od un sistema di due iperboloidi coniugati secondochè le forze σ_1, σ_2, σ_3 hanno tutte ugual segno o segno diverso, cioè secondochè sono tutte tre tensioni ovvero pressioni, oppure alcune tensioni ed altre pressioni. È evidente che gli assi di questa superficie coincidono colle direzioni delle forze principali σ_1, σ_2, σ_3 perchè esse sono normali agli elementi piani, cui corrispondono.

Se nella relazione $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ si sostituiscono i valori dati dalle (17) si ottiene

$$\frac{x'^2}{\sigma_1^2} + \frac{y'^2}{\sigma_2^2} + \frac{z'^2}{\sigma_3^2} = 1$$

(*) Lamé, Grashof, Barrè de Saint-Venant. Opere citate.

equazione, che rappresenta sempre un ellissoide conosciuto sotto il nome di *superficie od ellissoide delle intensità* od anche *delle pressioni*, poichè i suoi semidiametri sono proporzionali alle intensità delle forze molecolari unitarie, che agiscono nella loro direzione; infatti i punti di coordinate x', y', z' sono le estremità delle rette, che rappresentano l'intensità di una forza qualsiasi p_n.

Queste due superficie dànno una chiara idea della distribuzione delle forze molecolari intorno ad un punto e basandosi soltanto sulle proprietà delle superficie di secondo grado, che ammettono centro, senza bisogno di ulteriore dimostrazione si possono enunciare i seguenti *teoremi* (*).

I. Se un elemento piano contiene la retta d'azione d'una forza molecolare, l'elemento piano corrispondente a quest'ultima passa per la direzione della forza corrispondente al primo. Tali elementi diconsi *coniugati* ed ogni coppia di elementi (retta d'azione della forza ed elemento superficiale, cui essa corrisponde) può essere coniugata con infinite altre coppie.

II. Date due coppie di elementi coniugati ne esiste sempre una terza, per la quale sussiste la proprietà che ad ogni piano corrisponde la linea d'intersecazione degli altri due; tre coppie di elementi in queste condizioni formano un *triedro coniugato*, od anche una *terna di elementi coniugati*.

III. Gli elementi coniugati (rette e piani) presi nel loro insieme possono riguardarsi come una stella di rette e piani in involuzione, quindi godono di tutte le proprietà, che convengono a quelle forme proiettive.

IV. Esiste sempre una terna di elementi coniugati ad angolo retto, che portano il nome di elementi principali; se esiste più di una terna di elementi coniugati ortogonali, allora tutte le terne coniugate sono pure ortogonali e le superficie delle intensità e delle direzioni sono due sfere. Se una stessa retta forma con due diverse coppie di rette due terne coniugate ortogonali, allora ne esistono infinite e le superficie anzidette diventano di rivoluzione.

V. Tutte le tensioni e gli elementi corrispondenti sono distribuiti simmetricamente rispetto agli elementi principali, ed il diagramma polare delle tensioni o pressioni agenti intorno ad un punto è rappresentato da una superficie di secondo grado e precisamente da un ellissoide.

(*) Canevazzi, Memoria citata.

VI. Le pressioni o tensioni principali corrispondono necessariamente, come i diametri delle superficie di secondo grado, ad un massimo, ad un minimo, e ad un massimo o minimo intermedio, per cui per determinarle basterà cercare per quali valori di α, β, γ diventa massimo o minimo σ.

VII. Le tensioni o pressioni principali essendo normali agli elementi piani, cui corrispondono, non dànno luogo ad alcuna componente tangenziale, mentre invece questa si incontra sempre per gli altri elementi, ad eccezione del caso in cui tutte le terne coniugate od infinite fra esse siano ortogonali.

VIII. Se le forze principali hanno tutte ugual segno, la superficie delle direzioni è un'ellissoide ed intorno al punto non agiscono che sforzi di una sola natura (o tutte pressioni o tutte tensioni). Se invece una delle forze molecolari principali ha segno contrario alle altre due, una parte delle azioni molecolari, che agiscono intorno al punto, sono tensioni e le altre sono forze di compressione, e la superficie delle direzioni è rappresentata da due iperboloidi, uno ad una falda e l'altro a due. Secondochè la direzione di una forza prolungata incontra l'iperboloide ad una o a due falde essa è della specie delle due tensioni di ugual segno o di quella della forza principale di segno contrario alle altre due. Il passaggio dal positivo al negativo si fa per mezzo di quegli elementi, che contengono la retta, che loro corrisponde; come è noto, essi nel loro insieme inviluppano un cono assintotico ai due iperboloidi, la cui equazione è

$$\frac{x^2}{\sigma_1} + \frac{y^2}{\sigma_2} + \frac{z^2}{\sigma_3} = 0$$

e che vien detto *cono di scorrimento*, perchè su tutti gli elementi, che lo compongono, non agiscono che forze tangenziali; quando le forze principali hanno ugual segno non esistono elementi di scorrimento e la componente normale σ non è mai nulla.

18. Ricerca delle tensioni principali e dei massimi sforzi tangenziali. — Si è visto che la ricerca delle forze principali si riduce a trovare i valori massimi e minimi di σ al variare degli angoli di direzione α, β, γ. La (14) dà

$$\sigma = p_{xx}\cos^2\alpha + p_{yy}\cos^2\beta + p_{zz}\cos^2\gamma + \\ + 2p_{xy}\cos\alpha\cos\beta + 2p_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + 2p_{yz}\cos\beta\cos\gamma .$$

Inoltre dev'essere

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 .$$

Moltiplicando membro a membro le due equazioni si ottiene:

$$(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\,\sigma=p_{xx}\cos^2\alpha+p_{yy}\cos^2\beta+p_{zz}\cos^2\gamma+$$
$$+2p_{xy}\cos\alpha\cos\beta+2p_{xz}\cos\alpha\cos\gamma+2p_{yz}\cos\beta\cos\gamma\,.$$

Derivando rispetto alle variabili e ponendo le derivate uguali allo zero, si ottiene

$$\left.\begin{aligned}(p_{xx}-\sigma)\cos\alpha+p_{xy}\cos\beta+p_{xz}\cos\gamma&=0\\ p_{xy}\cos\alpha+(p_{yy}-\sigma)\cos\beta+p_{yx}\cos\gamma&=0\\ p_{xz}\cos\alpha+p_{yz}\cos\beta+(p_{zz}-\sigma)\cos\gamma&=0\end{aligned}\right\}\quad(19)\ (*)$$

equazioni, che sono lineari rispetto a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ e che non contengono termine indipendente: dunque dovrà essere

$$\begin{vmatrix} p_{xx}-\sigma, & p_{xy}, & p_{xz}\\ p_{xy}, & p_{yy}-\sigma, & p_{yz}\\ p_{xz}, & p_{yz}, & p_{zz}-\sigma\end{vmatrix}=0\,.$$

Sviluppando il determinante ed ordinando secondo le potenze discendenti di σ si ottiene

$$\left.\begin{aligned}&\sigma^3-(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz})\,\sigma^2+\\ &+(p_{xx}p_{yy}+p_{xx}p_{zz}+p_{yy}p_{zz}-p^2_{xy}-p^2_{xz}-p^2_{yz})\,\sigma-\\ &-p_{xx}p_{yy}p_{zz}+p_{xx}p^2_{yz}+p_{yy}p^2_{xz}+p_{zz}p^2_{xy}-2p_{xy}p_{xz}p_{yz}=0\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

equazione di terzo grado, le cui radici dànno in intensità e segno le forze principali.

Se si combina la seconda delle (19) colla terza, e questa colla prima, si ricava

$$\cos\alpha:\cos\beta::(p_{yy}-\sigma)(p_{zz}-\sigma)-p^2_{yz}:p_{yz}p_{xz}-p_{xy}(p_{zz}-\sigma)$$

$$\cos\alpha:\cos\beta::p_{yz}p_{xz}-p_{xy}(p_{zz}-\sigma):(p_{zz}-\sigma)(p_{xx}-\sigma)-p^2_{xz}\,.$$

(*) Le equazioni (19) si ricavano anche direttamente dalle (13) supponendo il problema della ricerca di σ massima risoluto, cioè $p_n=\sigma$, poichè allora $p_{nx}=\sigma\cos\alpha$, $p_{ny}=\sigma\cos\beta$, $p_{nz}=\sigma\cos\gamma$ e le (13) vengono a corrispondere identicamente alle (19).

Analogamente eliminando $\cos\alpha$ tra la terza e la prima delle equazioni (19) e tra la prima e la seconda, si ha

$$\cos\beta : \cos\gamma :: (p_{zz} - \sigma)(p_{xx} - \sigma) - p^2_{xz} : p_{xz}p_{xy} - p_{yz}(p_{xx} - \sigma)$$

$$\cos\beta : \cos\gamma :: p_{xz}p_{xy} - p_{yz}(p_{xx} - \sigma) : (p_{xx} - \sigma)(p_{yy} - \sigma) - p^2_{xy} .$$

Se si pone

$$A = (p_{yy} - \sigma)(p_{zz} - \sigma) - p^2_{yz} , \qquad B = (p_{xx} - \sigma)(p_{zz} - \sigma) - p^2_{xz} ,$$

$$C = (p_{xx} - \sigma)(p_{yy} - \sigma) - p^2_{xy} , \qquad S = A + B + C$$

moltiplicando termine a termine le proporzioni precedenti si ha

$$\cos^2\alpha : \cos^2\beta : \cos^2\gamma :: A : B : C$$

e quindi

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{A}{S}} \qquad \cos\beta = \pm\sqrt{\frac{B}{S}} \qquad \cos\gamma = \pm\sqrt{\frac{C}{S}}$$

formole, che dànno la direzione di una forza principale, qualora invece di σ si ponga in esse il valore di quella tensione o pressione, rispetto a cui si eseguisce la ricerca.

Ponendo	si hanno i valori corrispondenti di		
	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$
$\sigma = \sigma_1$	$\cos\alpha_1$	$\cos\beta_1$	$\cos\gamma_1$
$\sigma = \sigma_2$	$\cos\alpha_2$	$\cos\beta_2$	$\cos\gamma_2$
$\sigma = \sigma_3$	$\cos\alpha_3$	$\cos\beta_3$	$\cos\gamma_3$

Con un processo analogo si possono determinare i valori delle massime tensioni tangenziali: dalla relazione

$$p_n^2 = \sigma^2 + \tau^2$$

si ricava

$$\tau^2 = p_n^2 - \sigma^2 .$$

Se si prendono come assi coordinati le direzioni degli elementi principali in causa delle relazioni (16^{bis})

$$\tau^2 = p_n^2 - \sigma^2 = p_{nx}^2 + p_{ny}^2 + p_{nz}^2 - \sigma^2 =$$
$$\sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta + \sigma_3^2 \cos^2\gamma - (\sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma)^2$$

inoltre dovrà essere

$$\cos^2\alpha + {}^2\cos\beta + \cos^2\gamma = 1 .$$

Moltiplicando membro a membro le due equazioni si ottiene

$$\tau^2 \cos^2\alpha + \tau^2 \cos^2\beta + \tau^2 \cos^2\gamma = \sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta + \sigma_3^2 \cos^2\gamma -$$
$$- \sigma_1^2 \cos^4\alpha - \sigma_2^2 \cos^4\beta - \sigma_3^2 \cos^4\gamma - 2\sigma_1\sigma_2 \cos^2\alpha \cos^2\beta -$$
$$- 2\sigma_1\sigma_3 \cos^2\alpha \cos^2\gamma - 2\sigma_2\sigma_3 \cos^2\beta \cos^2\gamma .$$

Per ottenere i massimi valori di τ basterà porre uguale a zero le derivate dell'equazione superiore prese rispetto a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; oppure, il che torna lo stesso, rispetto a $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$, ossia porre

$$\sigma_1^2 - \tau^2 - 2(\sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma)\sigma_1 = 0$$
$$\sigma_2^2 - \tau^2 - 2(\sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma)\sigma_2 = 0$$
$$\sigma_3^2 - \tau^2 - 2(\sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma)\sigma_3 = 0 .$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ottiene

$$\sigma_1^2 - \sigma_2^2 = 2(\sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma)(\sigma_1 - \sigma_2)$$

e togliendo il fattor comune $\sigma_1 - \sigma_2$

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 2(\sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma) .$$

In modo analogo si ottengono le altre due equazioni

$$\sigma_1 + \sigma_3 = 2(\sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma)$$
$$\sigma_2 + \sigma_3 = 2(\sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma) .$$

Ora queste equazioni quando sono dati i valori di σ_1, σ_2, σ_3 non possono essere verificate che dai seguenti valori

$$\cos^2\gamma = 0 \qquad \cos^2\alpha = \cos^2\beta = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2\beta = 0 \qquad \cos^2\alpha = \cos^2\gamma = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2\alpha = 0 \qquad \cos^2\beta = \cos^2\gamma = \frac{1}{2}$$

ossia

$$\gamma = 90° \qquad \alpha = \beta = \pm 45°$$

$$\beta = 90° \qquad \alpha = \gamma = \pm 45°$$

$$\alpha = 90° \qquad \beta = \gamma = \pm 45° .$$

Se si sostituiscono questi valori ordinatamente nella formola, che dà la componente tangenziale τ, si ricava

$$\tau_3 = \sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2} - \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_2} = \pm\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

$$\tau_2 = \sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_3^2}{2} - \left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2} = \pm\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{\sigma_2^2+\sigma_3^2}{2} - \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2} = \pm\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2} .$$

Ossia *le componenti tangenziali diventano massime in sei piani diversi, i quali passano per una delle direzioni delle forze principali e dividono per metà l'angolo formato dalle altre due; le forze tangenziali, che corrispondono ai due piani passanti per la direzione di una stessa forza principale, hanno uguale intensità e segno diverso ed il loro valore è uguale alla semidifferenza dei valori delle altre due forze principali.*

19. Somma delle componenti normali delle forze agenti sopra tre elementi superficiali ortogonali. Diametri coniugati nell'ellissoide delle intensità. — Per una nota proprietà delle equazioni il coefficiente del secondo termine è uguale alla somma delle radici, quindi nell'equazione (20) sarà necessariamente

$$p_{xx} + p_{yy} + p_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 .$$

Da questa proprietà si deduce il seguente teorema: *in ogni punto di un corpo in equilibrio la somma delle componenti normali*

delle forze agenti sopra elementi ad angolo retto è costantemente uguale alla somma delle pressioni o tensioni principali.

Nell'ellissoide delle intensità sono diametri coniugati le direzioni delle forze agenti su tre elementi ad angolo retto; infatti prendendo come assi delle x, y, z le direzioni normali agli elementi ed indicando con x', y', z' le coordinate dell'estremo della forza p_n, le equazioni (13) dànno

$$p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{xz}\cos\gamma = p_{nx} = x'$$

$$p_{xy}\cos\alpha + p_{yy}\cos\beta + p_{yz}\cos\gamma = p_{ny} = y'$$

$$p_{xz}\cos\alpha + p_{yz}\cos\beta + p_{zz}\cos\gamma = p_{nz} = z' \ .$$

Se invece si prendono come direzioni degli assi coordinati x_1, y_1, z_1 le linee d'azione delle forze agenti sui tre elementi poc'anzi considerati, allora (*)

$$\cos\widehat{x'x} = \frac{p_{xx}}{p_x} \qquad \cos\widehat{x'y} = \frac{p_{xy}}{p_x} \qquad \cos\widehat{x'z} = \frac{p_{xz}}{p_x}$$

$$\cos\widehat{y'x} = \frac{p_{xy}}{p_y} \qquad \cos\widehat{y'y} = \frac{p_{yy}}{p_y} \qquad \cos\widehat{y'z} = \frac{p_{yz}}{p_y}$$

$$\cos\widehat{z'x} = \frac{p_{xz}}{p_z} \qquad \cos\widehat{z'y} = \frac{p_{yz}}{p_z} \qquad \cos\widehat{z'z} = \frac{p_{zz}}{p_z} \ .$$

Se si indicano con x_1', y_1', z_1' le coordinate dell'estremo della forza p_n riferita ai nuovi assi dovrà essere

$$p_n\cos\lambda = x_1'\cos\widehat{x'x} + y_1'\cos\widehat{y'x} + z_1'\cos\widehat{z'x} =$$

$$= p_{xx}\frac{x_1'}{p_x} + p_{xy}\frac{y_1'}{p_y} + p_{xz}\frac{z_1'}{p_z}$$

dunque in causa della prima delle equazioni (13)

$$\cos\alpha = \frac{x_1'}{p_x} \qquad \cos\beta = \frac{y_1'}{p_y} \qquad \cos\gamma = \frac{z_1'}{p_z}$$

e quindi

$$\left(\frac{x_1'}{p_x}\right)^2 + \left(\frac{y_1'}{p_y}\right)^2 + \left(\frac{z_1'}{p_z}\right)^2 = 1 \qquad (21)$$

(*) Grashof, Opera citata, pag. 9. — Lamé, Opera citata, pag. 55.

che è l'equazione dell'ellissoide delle intensità riferito a tre diametri coniugati.

20. Caso in cui una delle forze molecolari è uguale a zero. — Se in un punto di un corpo in equilibrio si verifica la condizione

$$p_{xx}p_{yy}p_{zz} - p_{xx}p_{yz}^2 - p_{yy}p_{xz}^2 - p_{zz}p_{xy}^2 + 2p_{xy}p_{xz}p_{yz} = 0$$

allora una delle radici dell'equazione (20) è lo zero ed una delle forze principali, per es., σ_3 ha un valor nullo. Se si suppone riferito il sistema a tre assi coincidenti colle direzioni principali, dalla terza delle equazioni (13) si ricava

$$p_n \cos\nu = p_{nz} = \sigma_3 \cos\gamma = 0$$

se è σ_3 che si suppone uguale a zero. Da questa equazione si ricava il seguente teorema: *In qualunque elemento piano passante per un punto, in cui una delle forze principali sia nulla, agisce una forza molecolare, che giace nel piano determinato dalle direzioni delle due azioni molecolari principali diverse da zero.* È evidente che in questo caso è sufficiente studiare il reggime di equilibrio nel piano determinato dalle tensioni o pressioni principali, poichè ad ogni forza corrisponde un elemento superficiale, che interseca ad angolo retto il piano poc'anzi considerato, e per determinarlo basterà avere la linea di intersezione dei due piani.

La corrispondenza esistente fra elementi piani e forze si ridurrà evidentemente ad una corrispondenza fra direzioni di forze ed intersecazioni di elementi piani col piano, che contiene le forze molecolari; le due superficie delle direzioni e delle intensità saranno sostituite da due curve giacenti nel piano determinato dalle direzioni delle forze principali e precisamente dalle due curve, che hanno per equazioni

$$\frac{x^2}{\sigma_1} + \frac{y^2}{\sigma_2} = \pm 1 \qquad \frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = 0$$

ed i teoremi generali enunciati al numero 17 si trasformeranno nel modo seguente (*):

I. Dato un elemento lineare e la direzione della forza, che gli corrisponde, sull'elemento coincidente colla direzione della forza

---

(*) Canevazzi, Memoria citata.

ha luogo un'azione molecolare, la cui direzione coincide coll'elemento prima considerato: tali elementi diconsi *coniugati*.

II. Gli elementi coniugati nel loro insieme costituiscono un fascio in involuzione e coincidono col fascio dei diametri coniugati in una conica di equazione $\frac{x^2}{\sigma_1} + \frac{y^2}{\sigma_2} = \pm 1$, che appunto per questa proprietà vien detta *conica* o *curva delle direzioni*.

III. Il diagramma delle intensità delle forze molecolari è sempre un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = 1$; le azioni molecolari sono proporzionali ai semidiametri, coi quali coincidono, e sono diametri coniugati le rette d'azione delle forze corrispondenti ad elementi ortogonali.

IV. Esistono sempre due elementi coniugati ad angolo retto; essi sono detti *principali*, e *forze principali* quelle, che agiscono sui medesimi. Se esiste più di una coppia di elementi coniugati ad angolo retto, ne esistono infinite, e la curva delle direzioni e quella delle intensità diventano due circoli.

V. Le forze principali, essendo normali agli elementi cui corrispondono, non dànno luogo ad alcun sforzo tangenziale, mentre invece le altre forze molecolari dànno sempre luogo ad una componente radente o tangenziale, eccezion fatta dal caso in cui tutte le coppie di elementi coniugati siano ortogonali.

VI. Se le forze principali hanno ugual segno, la curva delle direzioni è un'ellissi, il fascio degli elementi coniugati non ammette raggi doppi, quindi le forze molecolari non giacciono mai nell'elemento corrispondente, e gli elementi, che comprendono fra loro un angolo ψ minimo, od anche un angolo $\delta = 90^\circ - \psi$ massimo di deviazione dall'angolo retto, sono quelli che coincidono colle diagonali del rettangolo circoscritto all'ellissi delle direzioni ed avente i suoi lati paralleli agli assi. L'angolo δ massimo δ_{max} è determinato dalla relazione

$$\text{tang}\,\frac{90 - \delta_{max}}{2} = \frac{\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1}}$$

come risulta dalla figura 7ª (*Tav.* I).

Se le forze principali hanno segno diverso, la curva delle direzioni si trasforma in due iperboli coniugate, e il fascio degli elementi coniugati ammette raggi doppi; quindi esistono sempre due elementi, pei quali la direzione della forza molecolare giace nell'elemento, cui corrisponde, dando luogo solo ad uno sforzo tangenziale; tali elementi coincidono colle direzioni degli assin-

toti alle due iperboli coniugate, od anche colle diagonali del rettangolo determinato dalle tangenti ai vertici delle due iperboli.

VII. Le equazioni (12) di equilibrio interno diventano

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\rho X=0 \\ \frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\rho Y=0 \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

e quelle alla superficie

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}\cos\alpha+p_{xy}\cos\beta=p_{nx} \\ p_{xy}\cos\alpha+p_{yy}\cos\beta=p_{ny} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

e come conseguenza anche in questo caso ha luogo il principio di reciprocità.

21. Discussione di alcuni casi in cui $\sigma_3=0$. — Fra i diversi casi in cui può annullarsi l'ultimo termine dell'equazione (14) sono specialmente interessanti quelli, in cui

$$p_{yy}=0 \qquad p_{zz}=0 \qquad p_{yz}=0$$

oppure

$$p_{xx}=0 \qquad p_{xy}=0 \qquad p_{xz}=0\ .$$

Nel primo caso la (20) diventa

$$\sigma^2-p_{xx}\sigma-(p_{xy}^2+p_{xz}^2)=0 \quad (24)$$

da cui

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1=\frac{p_{xx}}{2}+\sqrt{\frac{p_{xx}^2}{4}+p_{xy}^2+p_{xz}^2}= \\ =\frac{p_{xx}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{p_{xx}^2+4(p_{xy}^2+p_{xz}^2)} \\ \sigma_2=\frac{p_{xx}}{2}-\sqrt{\frac{p_{xx}^2}{4}+p_{xy}^2+p_{xz}^2}= \\ =\frac{p_{xx}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{p_{xx}^2+4(p_{xy}^2+p_{xz}^2)} \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

inoltre in causa della (24)

$$A=(p_{yy}-\sigma)(p_{zz}-\sigma)-p_{yz}^2=\sigma^2$$

$$B=(p_{zz}-\sigma)(p_{xx}-\sigma)-p_{xz}^2=\sigma^2-p_{xx}\sigma-p_{xz}^2=p_{xy}^2$$

$$C=(p_{xx}-\sigma)(p_{yy}-\sigma)-p_{xy}^2=\sigma^2-p_{xx}\sigma-p_{xy}^2=p_{xz}^2$$

$$S=A+B+C=\sigma^2+p_{xy}^2+p_{xz}^2$$

quindi

$$\cos\alpha_1=\pm\frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1+p_{xy}^2+p_{xz}^2}} \qquad \cos\beta_1=\pm\frac{p_{xy}}{\sqrt{\sigma_1+p_{xy}^2+p_{xz}^2}}$$

$$\cos\gamma_1=\pm\frac{p_{xz}}{\sqrt{\sigma_1+p_{xy}^2+p_{xz}^2}}$$

$$\cos\alpha_2=\pm\frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_2+p_{xy}^2+p_{xz}^2}} \qquad \cos\beta_2=\pm\frac{p_{xy}}{\sqrt{\sigma_2+p_{xy}^2+p_{xz}^2}}$$

$$\cos\gamma_2=\pm\frac{p_{xz}}{\sqrt{\sigma_2+p_{xy}^2+p_{xz}^2}}$$

$$\cos\alpha_3=0 \qquad \cos\beta_3=\mp\frac{p_{xz}}{\sqrt{p_{xy}^2+p_{xz}^2}} \qquad \cos\gamma_3=\pm\frac{-p_{xy}}{\sqrt{p_{xy}^2+p_{xz}^2}}.$$

Cioè le forze principali σ_1 e σ_2 giacciono in un piano, il quale taglia ad angolo retto il piano yz e la linea d'intersecazione è determinata dai valori di $\cos\beta_3$, $\cos\gamma_3$.

Quando invece

$$p_{xx}=p_{xy}=p_{xz}=0$$

allora l'equazione (20) diventa

$$\sigma^2-(p_{yy}+p_{zz})\sigma+p_{yy}p_{zz}-p_{yz}^2=0$$

e quindi

$$\sigma_1=\frac{p_{yy}+p_{zz}}{2}+\sqrt{\left(\frac{p_{yy}+p_{zz}}{2}\right)^2+p_{yz}^2-p_{yy}p_{zz}}$$

$$\sigma_2=\frac{p_{yy}+p_{zz}}{2}-\sqrt{\left(\frac{p_{yy}+p_{zz}}{2}\right)^2+p_{yz}^2-p_{yy}p_{zz}}$$

Se

$$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=p_{xz}=p_{yz}=0$$

l'equazione (20) diventa

$$\sigma^2-p_{xy}{}^2=0$$

da cui

$$\sigma_1=p_{xy} \quad \sigma_2=-p_{xy} \quad \cos^2\alpha_1=\frac{1}{2}, \quad \cos^2\beta_1=\frac{1}{2}, \quad \cos\gamma_1=0$$

cioè *uno sforzo tangenziale unico agente sopra un elemento dà origine, ed è quindi equivalente, a due sforzi, uno di tensione e l'altro di pressione, uguali fra loro e formanti un angolo di* 45° *colla direzione dello sforzo tangenziale.*

Se

$$p_{yy}=p_{zz}=p_{xy}=p_{xz}=p_{yz}=0$$

e p_{xx} non è zero, allora dalla (20) si ricava

$$\sigma_1=p_{xx} \qquad \sigma_2=0 \qquad \sigma_3=0\,.$$

Ogni forza agisce nella direzione della forza principale σ_1; per un elemento piano n qualsiasi, che faccia un angolo α colla direzione di σ_1,

$$p_n=\pm\sigma_1\cos\alpha \qquad \sigma=\sigma_1\cos^2\alpha \qquad \tau=\pm\frac{1}{2}\sigma\operatorname{sen}2\alpha\,.$$

22. Circolo molecolare. — Le formole dei numeri precedenti permettono di risolvere tutti i problemi relativi all'equilibrio molecolare, problemi che possono anche essere risoluti geometricamente con processi noti approfittando delle proprietà delle superficie delle direzioni e delle intensità. Se non che le costruzioni geometriche riescono troppo complesse qualora le forze agiscano in tutte le direzioni, e soltanto si può pensare ad applicarle con qualche utilità quando una delle forze principali è nulla e le forze agiscono tutte in un piano. Anche in questo caso però l'uso delle curve delle direzioni e delle intensità risulta incomodo e non dà sufficienti garanzie d'esattezza in pratica in causa della necessità di tracciare delle ellissi o delle iperboli, per cui presenta un certo interesse per alcune applicazioni far dipendere la risoluzione geometrica dei problemi relativi all'equilibrio molecolare da costruzioni, che non richiedano altro che l'uso della linea retta e del circolo. Per questo

osserviamo che se il sistema è riferito a tre assi coincidenti colle direzioni delle forze principali, e se $\sigma_3 = 0$ anche $p_{nx} = 0$ e

$$p_n^2 = p_{nx}^2 + p_{ny}^2 , \qquad \cos\beta = \operatorname{sen}\alpha .$$

In causa delle relazioni (16^{bis})

$$p_{nx} = \sigma_1 \cos\alpha = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\cos\alpha + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos\alpha$$

$$p_{ny} = \sigma_2 \cos\beta = \sigma_2 \operatorname{sen}\alpha = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\operatorname{sen}\alpha - \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\operatorname{sen}\alpha$$

quindi

$$p_n^2 = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 \cos^2\alpha + \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \cos^2\alpha + 2\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\cos^2\alpha +$$

$$+ \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\alpha - 2\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\operatorname{sen}^2\alpha =$$

$$= \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)\cos 2\alpha$$

perchè

$$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \qquad \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \cos 2\alpha .$$

Nel caso che una delle forze principali sia uguale allo zero ($\sigma_3 = 0$) le (16^{bis}) diventano

$$\sigma_1 \cos\alpha = p_{nx} = x' \qquad \sigma_2 \cos\beta = p_{ny} = y'$$

da cui si ricava

$$\frac{y'}{x'}\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} .$$

Se si indicano con α' ed α'' gli angoli, che la direzione della forza p_n e quella dell'elemento, che le è coniugato, fanno colla direzione della forza σ_1

$$\cos\beta = \operatorname{sen}\alpha \qquad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{y'}{x'} \qquad \operatorname{tang}\alpha'' = \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$$

quindi l'equazione superiore diventa

$$\operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\alpha'' = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} .$$

Osservazione. — Questa formola si può anche dedurre dalla nota relazione, che passa fra le tangenti degli angoli, che due diametri coniugati fanno con uno degli assi e le lunghezze degli assi stessi in una curva di secondo grado che abbia centro, cioè in un'ellissi oppure in un'iperbole. Sia $ABCD$ (*Fig.* 8ª, *tav.* I) un'ellisse od una iperbole ed a e b le lunghezze dei suoi semiassi, α' α'' gli angoli, che due diametri coniugati cc', dd' fanno coll'asse BD; è noto che

$$\text{tang}\,\alpha' \,\text{tang}\,\alpha'' = \frac{a^2}{b^2}\,; \quad (*)$$

nella curva delle direzioni $a = \sqrt{\sigma_2}$ $b = \sqrt{\sigma_1}$ quindi per due elementi coniugati qualsivogliano sarà

$$\text{tang}\,\alpha' \,\text{tang}\,\alpha'' = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\,.$$

Al numero 20 si è dimostrato che le coppie di elementi coniugati (rette d'azione delle forze molecolari ed intersecazioni del piano che contiene le forze cogli elementi superficiali, cui esse corrispondono) costituiscono un fascio di rette in involuzione ed è noto che se si fa passare un circolo pel centro di un fascio di raggi in involuzione, le coppie di punti corrispondenti determinati dai raggi sul circolo sono tutte allineate con un punto fisso S', (*Fig.* 9ª e 10ª, *tav.* II), in guisa che esso può servire a determinare quante coppie si vogliono di punti corrispondenti, e quindi anche di raggi coniugati. Sia M il centro del fascio, $AMBT$ il circolo, R' e R due punti corrispondenti, S' il punto fisso dell'involuzione ed Mb, Mb' i raggi coniugati, che passano per R ed R'. Sul diametro $S'C$ si prenda un punto S tale che $SBS'A$ costituisca un gruppo armonico e si tirino SR, SR' per una nota proprietà del circolo $R'CB = R_1CB$; i raggi coniugati ad angolo retto sono immediatamente dati da Ma ed MB, l'angolo

$$bMA = \frac{1}{2}\,RCA = \alpha'$$

e l'angolo

$$b'_1MA = \frac{1}{2}\,R_1CA = \alpha''\,.$$

(*) Il prodotto $\text{tang}\,\alpha' \,\text{tang}\,\alpha''$ è positivo o negativo secondochè l'involuzione degli elementi coniugati ammette o no raggi doppi, ossia secondochè trattasi di un'iperbole o di un'ellisse.

Inoltre

$$R_1 C B = R' C B = 2\beta_1$$

ed

$$R S A = \frac{1}{2}(R C A - R_1 C B) = \frac{1}{2}(2\alpha_1 - 2\beta_1) = \alpha_1 - \beta_1 = \delta,$$

in cui δ esprime l'angolo, che la normale al primo elemento considerato fa colla direzione dell'elemento coniugato.

Per una proprietà caratteristica dell'involuzione

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2} A C R . \operatorname{tang}\frac{1}{2} R_1 C A = \operatorname{tang}^2 \frac{T C A}{2} \quad (*)$$

quindi

$$\operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\alpha'' = \operatorname{tang}\frac{1}{2} A C R \operatorname{tang}\frac{1}{2} R_1 C A = \operatorname{tang}^2 \frac{T C A}{2} =$$

$$= \operatorname{tang}^2 \frac{S C T}{2} = \frac{1 - \cos S C T}{1 + \cos S C T} = \frac{1 - \dfrac{T C}{S C}}{1 + \dfrac{T C}{S C}} = \frac{S C - T C}{S C + T C} = \frac{S B}{S A}$$

ma

$$\operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\alpha'' = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

dunque

$$\frac{S B}{S A} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

cioè *le due lunghezze SB ed SA sono proporzionali alle due forze principali* σ_2 *e* σ_1 .

La linea SR è proporzionale alla forza p_n , che agisce sull'elemento Mb; infatti dal triangolo SCR si ricava

$$S R^2 = S C^2 + C R^2 + 2 S C . C R \cos R C A =$$

$$= \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) \cos 2\alpha'$$

espressione, che coincide con quella trovata precedentemente per p_n; dunque SR è proporzionale a p_n e può servire a rappresentarla geometricamente in quella stessa guisa che SB ed SA possono rappresentare σ_2 e σ_1 .

(*) Housel, *Introduction à la géométrie supérieure.*

Dalla figura si ricava che la componente normale all'elemento è data da SR'' e la componente tangenziale τ da RR''. Infatti

$$SR''=SR\cos RSA=p_n\cos\delta=\sigma$$

$$RR''=SR\operatorname{sen}RSA=p_n\operatorname{sen}\delta=\tau\,.$$

D'altra parte

$$\tau=RR''=RC\operatorname{sen}2\alpha'=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\operatorname{sen}2\alpha'$$

cioè *le componenti tangenziali agli elementi variano come i raggi vettori della curva conosciuta col nome di rosone a quattro rami; essa ha quattro valori massimi, che corrispondono alle direzioni, che bissecano gli angoli compresi fra le direzioni delle forze principali indefinitamente prolungate.*

Indicando con δ_m il massimo valore, che può essere preso dall'angolo δ, quando S cade fuori del circolo esso è dato da TSC, si ricava dalla figura 9ª (*Tav.* II)

$$\operatorname{sen}\delta_m=\frac{TC}{SC}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}=\frac{1-\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}{1+\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}$$

da cui

$$\operatorname{tang}\frac{90-\delta_m}{2}=\frac{\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1}}$$

come si era già trovato precedentemente al numero 20 (VI).

Se il punto S' invece di cadere nell'interno del circolo $AMBR$ cade fuori, allora S cade dentro (*Fig.* 10ª, *tav.* II); le pressioni principali SA ed SB hanno segno diverso, cioè una è uno sforzo di tensione e l'altra uno sforzo di compressione, ma le proprietà della figura rimangono inalterate, perchè dipendono da rapporti di posizione, come del resto è facile accorgersene ripetendo per la figura 10ª (*Tav.* II) la discussione già fatta avendo in vista specialmente la figura 9ª (*Tav.* II), ove ai punti analoghi si sono conservate le stesse lettere (*).

Questo circolo, che permette di rappresentare le direzioni e le intensità delle forze molecolari agenti attorno ad un punto, chiamasi *cerchio* o *circolo molecolare* e si costruisce nel modo seguente:

(*) Canevazzi. Memoria citata.

Sopra una retta indefinita XY (*Fig.* 11ª, *tav.* II) a partire da un punto S si prendano due segmenti SA, SB che rappresentino in intensità e segniamo le due forze principali σ_1 e σ_2 e sulla AB come diametro si descriva un circolo; si determini S' in modo che $SBS'A$ sia un gruppo armonico, indi per A e per B si conducano due rette parallele alle direzioni principali ad intersecarsi in M sulla circonferenza del circolo. In tal modo tutto è determinato nella figura e per una direzione qualsiasi Mb si potranno immediatamente determinare tutti gli elementi di calcolo (angoli α', α'' e δ. intensità e direzione della forza, che agisce sull'elemento, ecc.) senza altro aiuto che la sola riga.

23. Problemi varî relativi all'equilibrio molecolare di un punto. —

I. *Date le componenti normali* p_{xx}, p_{yy} *sopra due elementi ad angolo retto e la componente tangenziale* p_{xy}, *determinare le forze principali.*

Ricorrendo alle formole del numero 21, le forze principali si ricavano immediatamente dalle relazioni (25) e seguenti. Servendosi invece del circolo molecolare si procederebbe come segue: su una retta indefinita (*Fig.* 12ª, *tav.* II) XY prendiamo due segmenti SN'', SR'' che rappresentino in intensità e senso p_{xx} e p_{yy}, per N'' ed R'' si elevino le perpendicolari alla XY e sopra di esse da diversa parte si misurino due segmenti $N''N$, $R''R$ proporzionali a p_{xy}, sulla NR considerata come diametro si descriva un circolo e per N ed R si conducano le parallele agli elementi dati ad incontrarsi in M sulla circonferenza, si trovi il punto S' coniugato armonico di S nel gruppo $SBS'A$ ed il circolo molecolare è completamente tracciato. Da esso si potranno desumere con facilità le due pressioni principali $SA = \sigma_1$ $SB = \sigma_2$, non che gli altri elementi di calcolo, che possano interessare.

II. *Date le intensità delle forze molecolari agenti sopra due elementi coniugati e l'angolo* δ *ad essi corrispondente, rappresentare l'equilibrio molecolare.*

Geometricamente questo problema si risolve con molta facilità: sulla XY si fissi un punto S e si tracci una retta Sr, che faccia colla XY un angolo uguale a δ, si prendano sulla Sr SR ed SR_1 rispettivamente proporzionali alle intensità delle forze molecolari date, indi si tracci il circolo, che passa per R_1 ed R e che ha il centro sulla XY; questo è il circolo molecolare che rappresenta in tutti i suoi particolari l'equilibrio del punto.

Tirando per R ed R', punto simmetrico di R_1 rispetto ad SA, due rette parallele alle direzioni coniugate note, queste s'incontreranno in un punto M posto sulla circonferenza, che sarà il centro del fascio di raggi in involuzione formato dalle direzioni delle

forze molecolari e degli elementi lineari coniugati; tutte le costruzioni e proprietà indicate superiormente sussisteranno anche in questo caso e potranno essere applicate senza alcuna difficoltà. Se si chiamano con p_1 e p_2 le intensità delle forze rappresentate da SR ed SR_1 (*Fig.* 14ª, *tav.* II) e dal punto C si conduce CN perpendicolare ad R_1R.

$$SR = SN + \sqrt{CR^2 - CN^2}$$

$$SN = SC\cos\delta$$

$$RC = \sqrt{RN^2 + CN^2}$$

quindi

$$p_1 = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\cos\delta + \sqrt{\left(\frac{\sigma_1-\sigma}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\delta}$$

$$p_2 = SR_1 = SN - NR_1 = SN - \sqrt{CR_1^2 - CN^2} =$$

$$= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\cos\delta - \sqrt{\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2\delta} =$$

$$= \frac{\sigma_1+\sigma_1}{2}\cos\delta - \sqrt{\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{p_1+p_2}{2}\right)^2 \operatorname{tang}^2\delta}$$

$$\cos 2\alpha' = \frac{2p_1\cos\delta - \sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2}$$

equazioni, che permettono di determinare σ_1 e σ_2 ed α' in funzione di p_1, p_2, δ. Dalla figura 14ª (*Tav.* II) risulta anche che

$$\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = \frac{p_1+p_2}{2}\frac{1}{\cos\delta}$$

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{(p_1-p_2)^2 + (p_1+p_2)^2\operatorname{tang}^2\delta}$$

quindi

$$\begin{matrix}\sigma_1 \\ \sigma_2\end{matrix} = \frac{p_1+p_2}{2\cos\delta} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(p_1-p_2)^2 + (p_1+p_2)^2\operatorname{tang}^2\delta}\ .$$

Si possono proporre molti altri problemi analoghi relativi all'equilibrio molecolare; in generale essi non presenteranno maggior difficoltà di quelli risoluti superiormente: ve ne è uno però che merita di essere esaminato in modo particolare perchè corrisponde ad un caso importantissimo nella pratica dell' ingegnere, cioè

all'equilibrio dei materiali minuti incoerenti, come terre o sabbie. Esso è il seguente:

III. *Dato il valore dell'angolo* $\delta = \delta_1$ *corrispondente a due elementi coniugati, l'intensità* p_1 *della forza agente su uno di essi ed il massimo valore* δ_{max}, *che può essere attribuito all'angolo di deviazione* δ, *determinare lo stato di equilibrio del corpo.*

In questo caso, in cui a δ_{max} si suppone un valore massimo determinato (diverso da 90°), le forze principali hanno necessariamente ugual segno ed il punto S cadrà fuori del circolo di equilibrio. Sulla retta XY (*Fig.* 15ª, *tav.* II) si prenda arbitrariamente il punto S, per esso si conducano Sz', Sz in modo che sia

$$z\,Sy = \delta_1 \qquad z'\,Sy = \delta_{max}$$

e si prenda SR_1 proporzionale a p_1. Il circolo d'equilibrio dovrà passare per R_1, avere il centro sulla XY e riescire tangente ad Sz'; il problema è evidentemente di secondo grado ed ammette due soluzioni, cioè vi sono due circoli, che soddisfano alle condizioni imposte, che è quanto dire che sono possibili due stati diversi di equilibrio.

I due punti T' e T'' di contatto dei due circoli si determinano facilmente prendendo R_2 simmetrico ad R_1 rispetto alla XY e prolungando la R_2R_1 ad incontrare in W la Sz'; allora WT' e WT'' sono tangenti a due circoli, di cui WR_1R_2 è una secante; quindi per una nota proprietà

$$WT' = WT'' = \sqrt{WR_1 \cdot WR_2}\ .$$

Se il valore δ_{max} non è dato in modo assoluto, ma piuttosto come limite, che non debba mai essere superato, allora sono possibili infinite coppie di circoli d'equilibrio, come sono infinite le rette Sz_1' che si possono condurre in modo che sia

$$z\,Sy < z_1'\,Sy < z'\,Sy.$$

Tutti questi circoli però sono compresi fra i due, che corrispondono al massimo valore di δ, δ_{max}, in modo che $\sigma_1 = SA''$ è il massimo valore possibile fra le pressioni principali maggiori, e $\sigma_2 = SB'$ è il minimo valore possibile fra le pressioni principali minori: tutti questi circoli rappresentano stati di equilibrio possibili.

Gli stati di equilibrio rappresentati dai circoli $A'T'B'$, $A''T''B''$ si dicono *stati limiti*, il primo *stato limite inferiore*, il secondo *stato limite superiore*, perchè il punto non può stare in equilibrio sotto l'influenza di sforzi minori di quelli rappresentati dal primo circolo, o maggiori di quelli rappresentati dal secondo.

Se si indicano con π' e π'' i valori della forza molecolare π corrispondente agli elementi coniugati pei quali $\delta = \delta_{max}$ nei due stati limiti di equilibrio, dalla figura 15ª (*Tav.* II) si ricava:

$$\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\pi}{\cos \delta_{max}}$$

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pi \operatorname{tang} \delta_{max} = \frac{\pi}{\cos \delta_{max}} \operatorname{sen} \delta_{max}$$

quindi

$$\sigma_1 = \frac{\pi}{\cos \delta_{max}} (1 + \operatorname{sen} \delta_{max})$$

$$\sigma_2 = \frac{\pi}{\cos \delta_{max}} (1 - \operatorname{sen} \delta_{max}) .$$

Il valore di π corrispondente ai due stati di equilibrio in funzione degli elementi dati risulta immediatamente dalla figura 15ª (*Tav.* II) ricordando che

$$WT' = WT'' = \sqrt{WR_1 . WR_2}$$

infatti

$$\pi = SW \pm WT' = SW \pm \sqrt{WR_1 . WR_2} = \frac{SR_1 \cos \delta}{\cos \delta_{max}} \pm$$

$$\pm \sqrt{SR_1 \cos \delta (\operatorname{tang} \delta_{max} - \operatorname{tang} \delta)[SR_1 \cos \delta (\operatorname{tang} \delta_{max} - \operatorname{tang} \delta) + 2SR_1 \operatorname{sen} \delta]} =$$

$$= \frac{p_1 \cos \delta}{\cos \delta_{max}} \pm$$

$$\pm \sqrt{p_1 \cos \delta (\operatorname{tang} \delta_{max} - \operatorname{tang} \delta)[p_1 \cos \delta (\operatorname{tang} \delta_{max} - \operatorname{tang} \delta) + 2p_1 \operatorname{sen} \delta]}$$

indicando con Δ il radicale di quest'espressione

$$\pi' = p_1 \frac{\cos \delta}{\cos \delta_{max}} - \Delta$$

$$\pi'' = p_1 \frac{\cos \delta}{\cos \delta_{max}} + \Delta$$

e quindi

$$\sigma_1' = \frac{\pi'}{\cos \delta_{max}} (1 + \operatorname{sen} \delta_{max}) \qquad \sigma_1'' = \frac{\pi''}{\cos \delta_{max}} (1 + \operatorname{sen} \delta_{max})$$

$$\sigma_2' = \frac{\pi'}{\cos \delta_{max}} (1 - \operatorname{sen} \delta_{max}) \qquad \sigma_2'' = \frac{\pi''}{\cos \delta_{max}} (1 - \operatorname{sen} \delta_{max}) .$$

CAPITOLO III.

Deformazioni infinitamente piccole dei corpi.

24. Deformazioni infinitamente piccole dei corpi. Loro rappresentazione. — Si dice che un corpo si deforma quando variano le distanze fra le sue molecole; se queste variazioni sono infinitamente piccole rispetto alle distanze primitive, in guisa che anche le variazioni di forma del corpo intero siano piccolissime rispetto alle sue dimensioni, gli elementi lineari, che si possono supporre tracciati nell'interno del corpo, subiscono variazioni soggette a leggi abbastanza semplici per essere facilmente espresse con formole analitiche. Noi limiteremo lo studio delle deformazioni al solo caso che esse siano infinitamente piccole; se questa condizione non si verifica, lo studio delle leggi di deformazioni costituisce un argomento molto più complesso, che non trova la sua applicazione diretta nello studio delle costruzioni stabili, dove i solidi che vengono impiegati debbono conservare la forma primitiva, o tutt'al più subire soltanto deformazioni piccolissime ed affatto trascurabili.

Consideriamo due punti M ed M' (*Fig.* 16ª, *tav.* III) molto vicini (*), di coordinate (x, y, z) $(x+dx, y+dy, z+dz)$ ed indichiamo con ds la lunghezza dell'elemento lineare MM'.

Sarà

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2 .$$

Se nel corpo avviene una variazione di forma qualsiasi infinitamente piccola, prendendo la variazione della forma superiore si ricava

$$ds\delta ds=dx\delta dx+dy\delta dy+dz\delta dz=dxd\delta x+dyd\delta y+dzd\delta z .$$

Se con u, v, w si indicano le variazioni δx, δy, δz delle coordinate di un punto, u, v, w saranno in generale funzioni continue di x, y, z; quindi

$$\left.\begin{aligned} ds\delta ds=dx\,du+dy\,dv+dz\,dw=dx^2\frac{du}{dx}+dy^2\frac{dv}{dy}+dz^2\frac{dw}{dz}+ \\ +\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)dx\,dy+\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)dx\,dz+\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)dy\,dz \end{aligned}\right\} (26).$$

(*) Betti, *Nuovo cimento*, 1872-73.

Dividendo quest'equazione per ds^2 rimane nel primo membro $\frac{\delta ds}{ds}$, che è l'allungamento unitario i_r, che, subisce un elemento lineare preso secondo una direzione qualsiasi r; nel secondo membro poi s'incontrano le quantità $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ che sono rispettivamente uguali a

$$\cos\alpha\,, \qquad \cos\beta\,, \qquad \cos\gamma\,,$$

se con α, β, γ s'indicano gli angoli, che l'elemento MM' fa cogli assi coordinati, e la (26) diventa

$$\frac{\delta ds}{ds}=i_r=\frac{du}{dx}\cos^2\alpha+\frac{dv}{dy}\cos^2\beta+\frac{dw}{dz}\cos^2\gamma+\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\cos\alpha\cos\beta+$$

$$+\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)\cos\alpha\cos\gamma+\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\cos\beta\cos\gamma\,.$$

Indichiamo con i_x, i_y, i_z le deformazioni nel senso degli assi x, y, z; se nell'equazione superiore si mettono in luogo di $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, i valori particolari corrispondenti agli assi si trova:

$$i_x=\frac{du}{dx}\,, \qquad i_y=\frac{dv}{dy}\,, \qquad i_z=\frac{dw}{dz}$$

come risulta dal quadro seguente:

Direzione dell'elemento lineare MM', di cui si cerca l'allungamento unitario	Valori di			Valori di i_r
	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	
Secondo l'asse delle x	1	0	0	$i_x=i_r=\frac{du}{dx}$
» » » y	0	1	0	$i_y=i_r=\frac{dv}{dy}$
» » » z	0	0	1	$i_z=i_r=\frac{dw}{dz}$

Le espressioni

$$\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}, \qquad \frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}, \qquad \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}$$

rappresentano i coseni degli angoli, che gli elementi primitivamente paralleli agli assi coordinati fanno fra loro dopo la deformazione, e prendono il nome di *strisciamenti* paralleli agli assi, perchè in certo qual modo per questa variazione piccolissima negli angoli gli elementi lineari vengono a strisciare od a spostarsi parallelamente a se stessi. Consideriamo il rettangolo elementare $OABC$ (*Fig.* 17ª, *tav.* III), dopo la deformazione esso sarà cangiato nel parallelogramma $OA'B'C'$: dalla figura risulta

$$\cos B'OA' = \operatorname{sen}(B'OB + A'OA) .$$

Trattandosi di angoli infinitamente piccoli il seno, l'arco, e la tangente possono sostituirsi indifferentemente, perchè sono quantità, che al limite hanno per rapporto l'unità; inoltre il seno della somma di due archi infinitesimi può ritenersi uguale alla somma dei loro seni. Quindi

$$\cos B'OA' = \operatorname{sen}(BOB' + AOA') = \operatorname{sen} BOB' + \operatorname{sen} AOA' =$$
$$= \operatorname{tang} BOB' + \operatorname{tang} AOA' = \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx} .$$

c. d. d.

Ad un risultato analogo si arriverebbe per gli altri assi; quindi se indichiamo colla lettera g uno strisciamento, segnando al piede l'indicazione degli assi o delle rette ortogonali, cui esso si riferisce, sarà

$$g_{xy} = \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}$$

$$g_{xz} = \frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}$$

$$g_{yz} = \frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}$$

e la formola (26) diventerà

$$\left.\begin{aligned} i_r = i_x\cos^2\alpha + i_y\cos^2\beta + i_z\cos^2\gamma + \\ + g_{xy}\cos\alpha\cos\beta + g_{xz}\cos\alpha\cos\gamma + g_{yz}\cos\beta\cos\gamma \end{aligned}\right\} (27).$$

Dalla stessa figura appare che per una deformazione qualunque, purchè essa sia infinitamente piccola, la rotazione r di un elemento lineare intorno ad un asse coordinato qualsiasi è dato da (*Fig.* 17ᵇ, *tav.* III)

$$r_x = \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}$$

$$r_y = \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}$$

$$r_z = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} .$$

Esaminando la formola (27) risulta evidente che per le deformazioni ha luogo il principio della *sovrapposizione degli effetti*. Infatti quella formola è omogenea lineare, senza termine indipendente dalle sei deformazioni elementari; quindi l'effetto finale è il medesimo, sia che si considerino le deformazioni successive e separate, o che si consideri una sola deformazione, che corrisponda alle deformazioni componenti somme di quelle considerate precedentemente; poichè mancando il termine indipendente, sia che si scrivano le formole relative ad ogni deformazione, e poi si sommino, oppure che si mettano nella formola (27) al posto delle deformazioni componenti le somme di tutte le deformazioni componenti, che si considerano, il risultato finale è il medesimo. Ciò non avverrebbe più se la formola (27) contenesse termini indipendenti, perchè sommando i risultati parziali, bisognerebbe considerare il termine indipendente, tante volte quante sono le equazioni, e nella seconda ipotesi invece questo termine entrerebbe una sola volta.

Come si è espresso i_r in funzione delle deformazioni componenti, così si può esprimere lo strisciamento qualsivoglia g_{rs} rispetto a due elementi lineari ortogonali r ed s. Questa formola non presentando grande utilità nelle applicazioni si tralascia, limitandoci a citare il Navier, dove essa trovasi riportata (*).

25. Variazione delle deformazioni intorno ad un punto. — Confrontando l'equazione (27) con quella, che dà il valore della componente normale della forza molecolare agente sopra un elemento superficiale, è facile accorgersi che esse differiscono soltanto perchè alle componenti normali p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} sono sostituite le dilatazioni i_x, i_y, i_z secondo i tre assi coordinati, ed al doppio delle forze tan-

---

(*) *Résumé des leçons*, etc., colle *Note* di Barré de Saint-Venant, Appendice III ed Appendice complementare.

genziali $2p_{xy}$, $2p_{xz}$, $2p_{yz}$, gli scorrimenti g_{xy}, g_{xz}, g_{yz}: quindi per le deformazioni dovranno verificarsi proprietà analoghe a quelle trovate nel capitolo precedente per le forze molecolari.

Se a partire dal punto M (*Fig.* 18ª, *tav.* III) si prende nella direzione qualsiasi MM' una lunghezza MN proporzionale a $\frac{1}{\sqrt{\pm i_r}}$, i_r essendo l'allungamento proporzionale nella direzione MM', e si indicano con x, y, z le coordinate dell'estremo N, sarà

$$\cos\alpha = x\sqrt{\pm i_r}\,, \qquad \cos\beta = y\sqrt{\pm i_r}\,, \qquad \cos\gamma = z\sqrt{\pm i_r}\,.$$

Sostituendo questi valori nella (27) e dividendo per i_r si ha:

$$i_x x^2 + i_y y^2 + i_z z^2 + g_{xy} xy + g_{xz} xz + g_{yz} yz = \pm 1 \qquad (28)$$

che rappresenta una superficie di secondo grado (*) avente il centro a distanza finita, e precisamente un'ellissoide se le tre dilatazioni i_x, i_y, i_z hanno tutte ugual segno, un sistema di due iperboloidi coniugati se hanno invece segno diverso.

Da questa proprietà si deducono subito le seguenti conseguenze:

I. Se si prendono per assi coordinati gli assi della superficie (28) si dovranno annullare i termini, che contengono il rettangolo delle coordinate, cioè dovrà essere

$$g_{xy} = 0\,, \qquad g_{xz} = 0\,, \qquad g_{yz} = 0$$

ossia *in ogni punto di un corpo, che ha subito una piccola deformazione a partire da uno stato anteriore qualsiasi, si possono sempre tirare tre rette ortogonali per le quali, considerandole due a due, non ha avuto luogo scorrimento, in guisa che gli angoli, prima retti, sono restati tali anche dopo la deformazione, ed hanno avuto luogo lungo queste rette soltanto dilatazioni o condensazioni.*

Queste direzioni si dicono *principali*, e dilatazioni principali le deformazioni, che loro corrispondono.

II. Se indichiamo con ε_1, ε_2, ε_3 le dilatazioni principali, è evidente che esse corrispondono ai massimi o minimi valori di i_r. Infatti i semidiametri della superficie (28) sono espressi da

$$MN = \frac{1}{\sqrt{\pm i_r}}$$

(*) Grashof, Navier, colle *Note* di Barré de Saint-Venant. Opere citate.

ed è notorio che gli assi di una superficie di secondo grado corrispondono ai massimi o minimi valori, che può avere la lunghezza di un diametro.

III. In generale, una deformazione si può sempre immaginare composta di una dilatazione nel senso normale all'elemento piano, che si considera, e di uno scorrimento o traslazione parallelamente al medesimo. Se però la equazione (28) rappresenta due iperboloidi coniugati, allora per tutti gli elementi piani tangenti al cono assintotico non hanno luogo che scorrimenti, e per questo esso viene anche detto *cono di scorrimento*. Se la detta equazione rappresenta invece una sfera, allora non ha luogo nessun scorrimento, e le dilatazioni sono uguali in tutti i sensi.

IV. Se si considera un parallelepipedo elementare, la cui diagonale sia uguale all'unità ed i lati paralleli o coincidenti colle direzioni principali, se x', y', z' rappresentano le coordinate dell'estremo della diagonale, ossia le lunghezze dei lati del parallelepipedo dopo la deformazione, prima della medesima esse erano necessariamente (*)

$$\frac{x'}{1+\varepsilon_1}, \qquad \frac{y'}{1+\varepsilon_2}, \qquad \frac{z'}{1+\varepsilon_3}$$

e per la nota formola che dà la lunghezza della diagonale di un cubo

$$\frac{x'^2}{(1+\varepsilon)^2}+\frac{y'^2}{(1+\varepsilon_2)^2}+\frac{z'^2}{(1+\varepsilon_2)^2}=1$$

equazione, che rappresenta sempre un'ellissoide, i cui assi coincidono colle direzioni principali e sono proporzionali alle deformazioni, che avvengono in queste direzioni.

Tale superficie dicesi *ellissoide di deformazione* e permette di enunciare il seguente teorema:

Durante una deformazione infinitesima di un corpo, le sfere elementari si cambiano in ellissoidi, i cui assi sono uguali a ciò che è diventato il raggio della sfera nel senso delle direzioni principali.

V. Le deformazioni che avvengono intorno ad un punto sono distribuite in modo simmetrico rispetto alle direzioni delle deformazioni principali.

(*) Grashof, Opera citata.

26. Ricerca delle deformazioni principali. — Per quanto è stato detto superiormente, per trovare i valori di ε_1, ε_2, ε_3 basterà cercare i massimi o minimi valori della funzione (*)

$$i_r = i_x \cos^2\alpha + i_y \cos^2\beta + i_z \cos^2\gamma +$$
$$+ g_{xy} \cos\alpha \cos\beta + g_{xz} \cos\alpha \cos\gamma + g_{yz} \cos\beta \cos\gamma \ .$$

Se si ricorda che

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

moltiplicando membro a membro queste due equazioni, si ottiene

$$\left.\begin{aligned} i_r \cos^2\alpha + i_r \cos^2\beta + i_r \cos^2\gamma = i_x \cos^2\alpha + i_y \cos^2\beta + i_z \cos^2\gamma + \\ + g_{xy} \cos\alpha \cos\beta + g_{xz} \cos\alpha \cos\gamma + g_{yz} \cos\beta \cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad (29).$$

Se si chiama con ε uno qualsivoglia dei massimi di i_r e si pongono uguali a zero le derivate dell'equazione (29) prese rispetto a $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ si ottiene

$$2(i_x - \varepsilon)\cos\alpha + g_{xy}\cos\beta + g_{xz}\cos\gamma = 0$$
$$g_{xy}\cos\alpha + 2(i_y - \varepsilon)\cos\beta - g_{yz}\cos\gamma = 0$$
$$g_{xz}\cos\alpha + g_{yz}\cos\beta + 2(i_z - \varepsilon)\cos\gamma = 0 \ .$$

Le equazioni essendo lineari senza termine indipendente, dovrà essere

$$\begin{vmatrix} 2(i_x - \varepsilon) & , & g_{xy} & , & g_{xz} \\ g_{xy} & , & 2(i_y - \varepsilon) & , & g_{yz} \\ g_{xz} & , & g_{yz} & , & 2(i_z - \varepsilon) \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Sviluppando il determinante ed ordinando i termini secondo le potenze discendenti di ε si ottiene

$$\left.\begin{aligned} 4\varepsilon^3 - 4(i_x + i_y + i_z)\varepsilon^2 + \\ + [4(i_x i_y + i_x i_z + i_y i_z) - g^2_{xy} - g^2_{xz} - g^2_{yz}]\varepsilon - \\ - 4 i_x i_y i_z + i_x g^2_{yz} + i_y g^2_{xz} + i_z g^2_{xy} - g_{xy} g_{xz} g_{yz} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

(*) Grashof, Opera citata.

equazione di terzo grado, le cui radici sono i valori delle tre deformazioni principali $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Se si pone

$$A' = 4(i_y - \varepsilon)(i_z - \varepsilon) - g^2_{yz}$$

$$B' = 4(i_z - \varepsilon)(i_x - \varepsilon) - g^2_{xz}$$

$$C' = 4(i_x - \varepsilon)(i_y - \varepsilon) - g^2_{xy}$$

$$S' = A' + B' + C'$$

collo stesso processo di calcolo applicato al numero 18 si ricava

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{A'}{S'}} \qquad \cos\beta = \pm\sqrt{\frac{B'}{S'}} \qquad \cos\gamma = \pm\sqrt{\frac{C'}{S'}}$$

che dànno le direzioni delle tre deformazioni principali quando nei valori di A', B', C', S' si abbia cura di porre successivamente invece di ε, ε_1, ε_2, ε_3.

Applicando lo stesso procedimento usato al numero 18 si trova facilmente che gli scorrimenti diventano massimi in sei piani così determinati che passano ciascuno per la direzione di una deformazione principale e bissecano l'angolo formato dalle altre due. Se si chiamano con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i valori dei massimi scorrimenti,

$$\gamma_1 = \pm\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2} \qquad \gamma_2 = \pm\frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{2} \qquad \gamma_3 = \pm\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_2}{2}.$$

27. Dilatazione cubica. — Dicesi *dilatazione cubica* il rapporto tra l'incremento del volume ed il volume primitivo (*): se si immaginano tre assi ortogonali passanti per un punto il volume dV dell'elemento di spazio è

$$dV = dx\,dy\,dz$$

che in causa di una deformazione diventerà

$$dV + \Delta dV = dx(1 + i_x)\,dy(1 + i_y)\,dz(1 + i_z).$$

Se si trascurano gli infinitamente piccoli di ordine superiore

$$\Delta dV = (i_x + i_y + i_z)\,dx\,dy\,dz$$

(*) Betti, Grashof, Opere citate.

e chiamando con e la dilatazione cubica

$$e=\frac{\Delta dV}{dV}=\frac{(i_x+i_y+i_z)dx\,dy\,dz}{dx\,dy\,dz}=i_x+i_y+i_z\,.$$

Per un noto teorema di algebra il coefficiente del secondo termine dell'equazione (30) deve essere uguale alla somma delle radici, quindi qualunque siano le direzioni x, y, z dovrà essere

$$e=i_x+i_y+i_z=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

cioè *qualunque siano le direzioni ortogonali, nelle quali viene misurata la dilatazione cubica, essa ha un valore costante, e precisamente è uguale alla somma delle dilatazioni principali.*

28. Caso in cui alcune deformazioni siano uguali a zero. — Nei casi particolari quando siano note le deformazioni secondo tre assi ed intorno ai medesimi, cioè tre dilatazioni e tre scorrimenti, coll'uso delle formole dei numeri precedenti si potranno determinare le deformazioni in una direzione qualsiasi, le deformazioni principali e gli scorrimenti.

I procedimenti di calcolo da seguire sono simili a quelli sviluppati nel capitolo precedente in causa dell'analogia, che nei due casi si riscontra per le formole, che reggono la distribuzione delle forze intorno ad un punto e quelle che rappresentano le leggi della deformazione; noi quindi ci limiteremo a studiare un caso solo, che ha una particolare importanza pratica. Supponiamo che sia

$$i_x=0 \qquad i_y=0 \qquad i_z=0 \qquad g_{xz}=0 \qquad g_{yz}=0$$

allora la (30) diventa (*)

$$4\varepsilon^3-g^2_{xy}\,\varepsilon=0 \tag{31}$$

da cui

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_1=\frac{g_{xy}}{2} \qquad \varepsilon_2=\frac{g_{xy}}{2} \qquad \varepsilon_3=0 \\ \text{e}\quad &\cos^2\alpha=\frac{A'}{S'}=\frac{4\varepsilon^2}{8\varepsilon^2}=\frac{1}{2} \qquad \cos^2\beta=\frac{B'}{S'}=\frac{4\varepsilon^2}{8\varepsilon^2}=\frac{1}{2} \\ &\cos^2\gamma=\frac{C'}{S'}=\frac{4\varepsilon^2-g^2_{xy}}{S'}=\frac{0}{S'}=0 \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

(*) Grashof, Opera citata.

perchè

$$A' = 4\varepsilon^2 \qquad B' = 4\varepsilon^2 \qquad C' = 4\varepsilon^2 - g^2_{xy} = 0$$

ed

$$S' = 12\varepsilon^2 - g^2_{xy} = 12\varepsilon^2 - 4\varepsilon^2 = 8\varepsilon^2 .$$

Infatti per l'equazione (31)

$$4\varepsilon^2 - g^2_{xy} = 0$$

cioè: *uno strisciamento unico equivale a due deformazioni lineari in due direzioni inclinate a* 45° *colla direzione dello strisciamento, una è una dilatazione e l'altra una condensazione, ed in valore assoluto sono entrambe uguali alla metà dello strisciamento.*

29. Equazione di compatibilità fra le espressioni delle deformazioni. — I valori delle i_x, i_y, i_z, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz} in funzione di x, y, z non possono essere scelti ad arbitrio in un dato corpo e non sono indipendenti fra loro; infatti bisogna che essi possano riguardarsi come le derivate di tre funzioni u, v, w, ciò importa che esistano fra essi alcune relazioni facilissime a determinarsi e che possono chiamarsi *equazioni di compatibilità* (*).

Ricordiamo che

$$i_x = \frac{du}{dx}, \qquad i_y = \frac{dv}{dy}, \qquad g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$$

da queste relazioni si ricava

$$u = \int i_x dx \qquad v = \int i_y dy$$

e quindi

$$g_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dy}\int i_x dx + \frac{d}{dx}\int i_y dy$$

da cui

$$\frac{d^2 g_{xy}}{dx\,dy} = \frac{d^2 i_x}{dy^2} + \frac{d^2 i_y}{dx^2}$$

ed analogamente

$$\frac{d^2 g_{xz}}{dx\,dz} = \frac{d^2 i_x}{dz^2} + \frac{d^2 i_z}{dx^2} \qquad \frac{d^2 g_{yz}}{dy\,dz} = \frac{d^2 i_y}{dz^2} + \frac{d^2 i_z}{dy^2} \qquad (33)$$

(*) Navier, colle *Note* di Barré de Saint-Venant, Opera citata.

equazioni che dànno le derivate degli scorrimenti in funzione delle derivate delle dilatazioni i_x, i_y, i_z.

Altre tre relazioni che dànno invece le derivate delle dilatazioni i_x, i_y, i_z in funzione delle derivate degli scorrimenti g_{xy}, g_{xz}, g_{yz} si determinano osservando che dalle equazioni

$$g_{xy}=\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx} \qquad g_{xz}=\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}$$

si ricava

$$u=\int g_{xy}dy-\int\frac{dv}{dx}dy \qquad u=\int g_{xz}dz-\int\frac{dw}{dx}dz$$

e quindi

$$i_x=\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\int g_{xy}dy-\frac{d}{dx}\int\frac{dv}{dx}dy\ ;$$

$$i_x=\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\int g_{xz}dz-\frac{d}{dx}\int\frac{dw}{dx}dz$$

e derivando due volte rispetto ad y ed a z

$$\frac{d^2i_x}{dy\,dz}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dg_{yx}}{dz}-\frac{d}{dz}\frac{dv}{dx}\right)$$

$$\frac{d^2i_x}{dy\,dz}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dg_{xz}}{dy}-\frac{d}{dy}\frac{dw}{dx}\right)$$

ossia

$$2\frac{d^2i_x}{dy\,dz}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dg_{xy}}{dz}+\frac{dg_{xz}}{dy}-\frac{dg_{yz}}{dx}\right)$$

ed analogamente

$$2\frac{d^2i_y}{dx\,dz}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dg_{xy}}{dz}+\frac{dg_{yz}}{dx}-\frac{dg_{xz}}{dy}\right)$$

$$2\frac{d^2i_z}{dx\,dy}=\frac{d}{dz}\left(\frac{dg_{xz}}{dy}+\frac{dg_{yz}}{dx}-\frac{dg_{xy}}{dz}\right)$$

(34)

equazioni, che mostrano come scelte tre delle sei funzioni, che rappresentano le deformazioni, le altre tre sono determinate; non

Io sono però completamente perchè in causa delle due integrazioni necessarie per passare dalle derivate seconde delle funzioni contenute nelle condizioni di compatibilità alle relazioni, che passano fra le funzioni stesse, si introducono tre somme di funzioni, della forma

$$\phi_1(x,y)+\psi_1(x,z)\ , \qquad \phi_2(y,z)+\psi_2(x,y)\ , \qquad \phi_3(x,z)+\psi_3(y,z)\ .$$

Se le sei funzioni i_x, i_y, i_z, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz} *sono note in tutti i punti e soddisfano alle condizioni di compatibilità, non vi può essere che un solo sistema di spostamenti* u, v, w *che vi corrisponda.*

Infatti se vi fossero due sistemi di spostamenti possibili, u', v', w' e u'', v'', w'' ponendo

$$u=u'-u'' \qquad v=v'-v'' \qquad w=w'-w''$$

sarebbe

$$(i_x)=\frac{du}{dx}=\frac{du'}{dx}-\frac{du''}{dx}=i'_x-i''_x=0$$

e analogamente

$$(i_y)=0 \qquad (i_z)=0 \qquad (g_{xy})=0 \qquad (g_{xz})=0 \qquad (g_{yz})=0$$

ossia per tutto il corpo

$$u=0 \qquad v=0 \qquad w=0$$

essendo da escludersi il caso in cui u, v, w abbiano valori costanti, che corrisponderebbero ad uno spostamento generale del corpo; ciò è quanto dire che

$$u'=u'' \qquad v'=v'' \qquad w'=w''. \qquad c.d.d.$$

30. Espressione delle deformazioni in un corpo a sezione trasversale infinitamente piccola. — Se si immagina un corpo, in cui due dimensioni siano infinitamente piccole rispetto alla terza, ossia un sistema lineare di punti materiali, e si suppone in esso tracciato un sistema di sfere infinitamente piccole, tutte a contatto fra loro ed aventi il centro sull'asse del corpo, per effetto di una deformazione infinitesima queste si cambieranno in ellissoidi, ed i piani tangenti nei punti di contatto si cambieranno in superficie tangenti alle dette sfere, poichè si ammette la continuità nel sistema, e quindi

in superficie, che avranno un elemento piano in comune col piano tangente agli ellissoidi nel punto di contatto dopo la deformazione.

Segue da ciò che se si suppone tutto il corpo rigido ad eccezione del tronco ds corrispondente ad una sfera elementare GG', lo spostamento di un punto dipende dalla deformazione della sfera e quindi dallo spostamento infinitesimo di un elemento piano $M'N'$ rispetto ad un altro MN, ossia da una traslazione e rotazione infinitesima della porzione del corpo congiunta invariabilmente con $M'N'$. Se si immaginano tre assi coordinati (O_1, x_1, y_1, z_1) ortogonali passanti pel punto di contatto G, i quali siano connessi invariabilmente all'elemento piano MN con direzione parallela a tre assi (O, x, y, z) ortogonali e fissi nello spazio, è noto che le variazioni delle coordinate prodotte da un movimento infinitesimo in un punto m' di coordinate x_1', y_1', z_1' sono esprimibili in funzione delle tre traslazioni parallele agli assi ads, bds, cds e delle tre rotazioni $\psi_x ds$, $\psi_y ds$, $\psi_z ds$ intorno ai medesimi, qualora si indichino con a, b, c, ψ_x, ψ_y, ψ_z gli spostamenti e le rotazioni riferiti all'unità di misura contati sull'arco s del solido.

Se si rappresentano con δ_x, δ_y, δ_z le variazioni delle coordinate del punto (x_1', y_1', z_1'), esse sono date dalle formole

$$\delta_x = a ds + z_1' \psi_y ds - y_1' \psi_z ds$$

$$\delta_y = b ds + x_1' \psi_z ds - z_1' \psi_x ds$$

$$\delta_z = c ds + y_1' \psi_x ds - x_1' \psi_y ds$$

e se (x', y', z') sono le coordinate rispetto al sistema (O, x, y, z) del punto m' e (x, y, z) quelle del punto G

$$x_1' = x' - x \qquad y_1' = y' - y \qquad z_1' = z' - z$$

perchè gli assi sono paralleli. Indicando quindi con $d\Delta x$, $d\Delta y$, $d\Delta z$ le variazioni δ_x, δ_y, δ_z, si ottiene

$$d\Delta x = \delta_x = a ds + \psi_y (z' - z) ds - \psi_z (y' - y) ds$$

$$d\Delta y = \delta_y = b ds + \psi_z (x' - x) ds - \psi_x (z' - z) ds$$

$$d\Delta z = \delta_z = c ds + \psi_x (y' - y) ds - \psi_y (x' - x) ds .$$

Se ora si considerano tutti gli altri infiniti tronchi $G'G''$, $G''G'''$... analoghi a GG', per ciascuno di essi si avrà in causa della de-

formazione relativa, una variazione nelle coordinate del punto qualsiasi m' espresse da formole analoghe alle precedenti; quindi, se si considera tutto il corpo, la deformazione totale sarà la somma, e trattandosi di elementi differenziali, l'integrale delle formole superiori, cioè sarà

$$\Delta x = \int_{S_0}^{S'} a\,ds + \int_{S_0}^{S'} (z'-z)\psi_y\,ds - \int_{S_0}^{S'} (y'-y)\psi_z\,ds$$

$$\Delta y = \int_{S_0}^{S'} b\,ds + \int_{S_0}^{S'} (x'-x)\psi_z\,ds - \int_{S_0}^{S'} (z'-z)\psi_x\,ds$$

$$\Delta z = \int_{S_0}^{S'} c\,ds + \int_{S_0}^{S'} (y'-y)\psi_x\,ds - \int_{S_0}^{S'} (x'-x)\psi_y\,ds.$$

Il punto m' può anche trasportarsi nello spazio indipendentemente dalle deformazioni, e solo per effetto del movimento, che può subire la linea materiale $G_0\,G_n$ come corpo rigido. Se si considera un elemento piano qualsiasi, per es.: il primo elemento piano M_0N_0 analogo ad MN, tangente alla prima sfera nel punto G_0, in cui essa è intersecata dall'asse del sistema, e si chiamano con a_0, b_0, c_0 le tre traslazioni parallele agli assi, con θ_{ox}, θ_{oy}, θ_{oz} le tre rotazioni intorno a tre rette parallele agli assi coordinati passanti pel suo centro G_0, che caratterizzano un movimento qualsiasi, con x_0, y_0, z_0 le coordinate del punto G_0, gli spostamenti paralleli agli assi del punto $m'(x'y'z')$ sono dati ordinatamente da

$$a_0 + (z'-z_0)\theta_{oy} - (y'-y_0)\theta_{oz}$$

$$b_0 + (x'-x_0)\theta_{oz} - (z'-z_0)\theta_{ox}$$

$$c_0 + (y'-y_0)\theta_{ox} - (x'-x_0)\theta_{oy}\,.$$

Finalmente se una causa esterna qualsiasi viene ad agire sul corpo in modo da produrre una modificazione uniforme in tutti i suoi punti, e più specialmente tale che l'asse del corpo si allunghi o s'accorci uniformemente (come sarebbe una variazione di temperatura, una compressione uniforme prodotta da azioni

meccaniche, ecc.) (*) e si indica con τ il coefficiente di variazione, con ds la lunghezza GG_1 si ha

$$d\Delta x' = \tau ds \frac{dx}{ds}, \qquad d\Delta y' = \tau ds \frac{dy}{ds}, \qquad d\Delta z' = \tau ds \frac{dz}{ds}$$

e quindi integrando a tutta l'estensione del corpo fra (x', y', z') ed (x_0, y_0, z_0)

$$\Delta x' = \int_{s_0}^{s'} \tau ds \frac{dx}{ds} = \int_{x_0}^{x'} \tau dx = \tau (x' - x_0)$$

$$\Delta y' = \int_{s_0}^{s'} \tau ds \frac{dy}{ds} = \int_{y_0}^{y'} \tau dy = \tau (y' - y_0)$$

$$\Delta z' = \int_{s_0}^{s'} \tau ds \frac{dz}{ds} = \int_{z_0}^{z'} \tau dz = \tau (z' - z_0) .$$

Se si sommano le espressioni delle variazioni delle coordinate secondo gli assi prodotte da queste diverse cause, si ottiene

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta x' = a_0 + (z' - z_0)\theta_{0y} - (y' - y_0)\theta_{0z} + \\
&+ \int_{s_0}^{s'} a\,ds + \int_{s_0}^{s'} (z' - z)\psi_y ds - \int_{s_0}^{s'} (y' - y)\psi_z ds + \tau (x' - x_0) \\
&\Delta y' = b_0 + (x' - x_0)\theta_{0z} - (z' - z_0)\theta_{0x} + \\
&+ \int_{s_0}^{s'} b\,ds + \int_{s_0}^{s'} (x' - x)\psi_z ds - \int_{s_0}^{s'} (z' - z)\psi_x ds + \tau (y' - y_0) \\
&\Delta z' = c_0 + (y' - y_0)\theta_{0x} - (x' - x_0)\theta_{0y} + \\
&+ \int_{s_0}^{s'} c\,ds + \int_{s_0}^{s'} (y' - y)\psi_x ds - \int_{s_0}^{s'} (x' - x)\psi_y ds + \tau (z' - z_0)
\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

(*) Bresse, *Cours de mécanique appliquée.*

e le rotazioni dell'elemento piano passante per m' e normale all'asse saranno date da

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \theta_{ox} + \int_{s_0}^{s'} \psi_x ds \\ \omega_y &= \theta_{oy} + \int_{s_0}^{s'} \psi_y ds \\ \omega_z &= \theta_{oz} + \int_{s_0}^{s'} \psi_z ds \,. \end{aligned}\right\} \quad (36).$$

Se l'asse del corpo, che si considera, giace tutto in un piano, che potremo sempre supporre quello delle xy, allora

$$z = z' = z_0 = 0$$

e le tre formole superiori diventano

$$\left.\begin{aligned} \Delta x' &= a_0 - (y' - y_0)\theta_{oz} + \int_{s_0}^{s'} a\,ds - \int_{s_0}^{s'} (y' - y)\psi_z ds + \tau(x' - x_0) \\ \Delta y' &= b_0 + (x' - x_0)\theta_{oz} + \int_{s_0}^{s'} b\,ds + \int_{s_0}^{s'} (x' - x)\psi_z ds + \tau(y' - y_0) \\ \Delta z' &= c_0 + (y' - y_0)\theta_{ox} - (x' - x_0)\theta_{oy} + \\ &+ \int_{s_0}^{s'} c\,ds + \int_{s_0}^{s'} (y' - y)\psi_x ds - \int_{s_0}^{s'} (x' - x)\psi_y ds \,. \end{aligned}\right\} \quad (37).$$

È facile vedere quali siano le condizioni perchè la deformazione sia piana, ossia perchè dopo la deformazione l'asse del solido si trovi ancora tutto nel piano, che lo conteneva prima; perchè ciò si verifichi dovrà essere per ogni punto

$$\Delta z' = 0 \,.$$

Il limite superiore dell'integrale, che entra nell'espressione di $\Delta z'$, essendo arbitrario, dovendo essere $c_0=0$ perchè anche la sezione iniziale non deve sortire dal piano delle x, y, e supponendo $c=0$ la condizione $\Delta z'=0$ si scinde nelle due seguenti

$$(y'-y_0)\theta_{ox}-(x'-x_0)\theta_{oy}=\int_{s_0}^{s'}\left(\theta_{ox}\frac{dy}{ds}-\theta_{oy}\frac{dx}{dy}\right)ds=0$$

$$(y'-y)\psi_x ds-(x'-x)\psi_y ds=0\ .$$

La prima congiunta colla condizione $c_0=0$ esprime che la sezione iniziale si muove parallelamente al piano xy quando θ_{ox} e θ_{oy} sono eguali a zero, oppure che l'asse deve essere rettilineo, cosa che è resa evidente dalla relazione lineare, che si deduce dall'equazione precedente

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\theta_{oy}}{\theta_{ox}}\ .$$

Se si indica con ψ la rotazione risultante di ψ_x, ψ_y, ψ e con λ, μ, ν gli angoli, che il suo asse fa con quelli delle x, y, z, la seconda condizione trovata superiormente diventa

$$\psi\ \{\ (y'-y)\cos\lambda-(x'-x)\cos\mu\ \}=0$$

essendo

$$\psi_x=\psi\cos\lambda\ ,\qquad \psi_y=\psi\cos\mu\ ,\qquad \psi_z=\psi\cos\nu\ .$$

Quest' ultima formola può essere verificata tutte le volte che sia

$$\psi=0\ ,$$

oppure

$$\cos\lambda=\cos\mu=0\ ,$$

o finalmente

$$\frac{y'-y}{x'-x}=\frac{\cos\mu}{\cos\lambda}\ .$$

Segue da ciò che la deformazione può esser piana

a) quando sia $\psi=0$ in tutti i punti dell'asse;

b) quando $\cos\lambda=\cos\mu=0$, cioè quando l'asse di rotazione sia in tutti i punti normale al piano, che contiene l'asse del corpo;

c) quanto alla terza condizione, essa è incompatibile coi dati del problema. Infatti, se si considera un punto di coordinate (x, y) come fisso, la relazione di primo grado esistente fra x' ed y' mostra che l'asse dovrebbe essere rettilineo (ritenute x' ed y' come coordinate correnti di un punto qualsivoglia dell'asse) e normale alla sezione trasversale del solido, fatta nel punto (x, y); esso farebbe un angolo di 90° coll'asse di rotazione e dovrebbe quindi avere luogo la relazione (*)

$$(x'-x)\cos\lambda+(y'-y)\cos\mu=0$$

che è incompatibile colla equazione

$$\frac{y'-y}{x'-x}=\frac{\cos\mu}{\cos\lambda}$$

poichè combinandola colla precedente, risulterebbe

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu=0\ .$$

Nei problemi dell'ingegnere si presenta quasi sempre il caso che l'asse del corpo a sezioni trasversali piccolissime rispetto alla lunghezza giaccia tutto in un piano, e che non si abbia a considerare che la deformazione piana; in tal caso non si dovranno considerare che le rotazioni ψ_z e θ_{oz} e le traslazioni a_o, b_o, a, b. Tralasciando per semplicità l'indice z nei diversi simboli algebrici, le formole superiori si riducono alle seguenti

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x' &= a_o-(y'-y_o)\theta_o+\int_{s_o}^{s'} a\,ds-\int_{s_o}^{s'}(y'-y)\psi\,ds+\tau(x'-x_o)\\
\Delta y' &= b_o+(x'-x_o)\theta_o+\int_{s_o}^{s'} b\,ds+\int_{s_o}^{s'}(x'-x)\psi\,ds+\tau(y'-y_o)\\
\omega &= \theta_o+\int_{s_o}^{s'}\psi\,ds
\end{aligned}\right\}\quad(38)$$

giacchè per ipotesi

$$\Delta z'=0 \qquad \omega_x=\theta_{ox}=0 \qquad \omega_y=\theta_{oy}=0.$$

(*) Bresse, Opera citata. Terza edizione, pag. 331.

Se l'asse del solido, oltrecchè giacere in un piano fosse rettilineo, allora, se si prende l'asse delle x coincidente con esso, $y'=y_0=y=0$, $\Delta y'$ si può ritenere uguale ad y, e le (38) diventano

$$\left.\begin{aligned} \Delta x' &= a_0+\int_{s_0}^{s'} a\,dx+\tau(x'-x_0) \\ y &= b_0+(x'-x_0)\theta_0+\int_{s_0}^{s'} b\,ds+\int_{s_0}^{s'}(x'-x)\psi\,ds \end{aligned}\right\} \quad (39).$$

Se si può trascurare il termine $\int b\,ds$ la seconda delle (33) differenziata due volte dà

$$\frac{dy}{dx}=\theta_0+\int_{x_0}^{x'}\psi\,dx=\omega \qquad (40)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\psi=\frac{d\omega}{dx} \qquad (41)$$

dalle quali per integrazione si risale immediatamente alle (39), per cui spesso per semplicità la formola per la determinazione delle deformazioni nelle travature ad asse rettilineo si richiama sotto quest'ultima forma

È cosa rarissima che si presenti nelle costruzioni il caso di usare le formole generali; in genere non occorrono che le (38) oppure le (39); quindi avviene che molti autori non si occupano che di queste ultime, e qualcuno fra essi invece che dedurle sommando le variazioni delle coordinate di un punto prodotte dalle deformazioni dovute ad ogni tronco infinitesimo del solido, cerca gli spostamenti corrispondenti all'estremità di un tronco infinitesimo $GG'=ds$, ed integrando in seguito per tutto il corpo, il cui asse si suppone giacere in un piano, ottiene le formole, che dànno le variazioni delle coordinate di un punto.

Sia ds (*) la lunghezza dell'arco elementare GG', ϕ l'angolo che esso fa coll'asse delle x, $dx=ds\cos\phi$, $dy=ds\,\mathrm{sen}\,\phi$, per una deformazione qualsiasi

$$\delta dx=\delta ds\cos\phi-ds\,\mathrm{sen}\,\phi\,\delta\phi=d\delta s\frac{dx}{ds}-dy\,\delta\phi$$

(*) Ceradini, *Stabilité des arcs métalliques et des voûtes.* (*Revue universelle des mines*, 1882).

$$\delta dy = \delta ds \operatorname{sen}\phi + ds\cos\phi\,\delta\phi = d\delta s\,\frac{dy}{ds} + dx\,\delta\phi\,.$$

Indicando con Δx e Δy gli spostamenti di un punto qualsiasi (1) dell'asse, i loro valori si otterranno integrando fra l'origine (0) dell'asse ed il punto (1) le formole precedenti

$$\Delta x = \int_0^1 \delta dx = \int_0^1 \frac{d\delta s}{ds}\,dx - \int_0^1 \delta\phi\,dy$$

$$\Delta y = \int_0^1 \delta dy = \int_0^1 \frac{d\delta s}{ds}\,dy + \int_0^1 \delta\phi\,dx$$

ed integrando per parti

$$\Delta x' = \int_0^1 \frac{\delta ds}{ds}\,dx - \left[y\delta\phi - \int \frac{d\delta\phi}{ds}\,y\,ds \right]_0^1$$

$$\Delta y' = \int_0^1 \frac{\delta ds}{ds}\,dy + \left[x\delta\phi - \int \frac{d\delta\phi}{ds}\,x\,ds \right]_0^1$$

formole, che coincidono colle precedenti (38) qualora si ponga

$$\frac{d\delta\phi}{ds} = \psi$$

e si aggiungano i termini dovuti ad un movimento della sezione iniziale e ad una variazione uniforme della lunghezza dell'arco.

Da queste formole si passa a quelle, che convengono alle deformazioni infinitamente piccole di un'asta rettilinea a sezione infinitesima, nello stesso modo indicato superiormente come caso particolare di deformazione di una linea materiale qualsiasi.

31. Metodi in uso pel calcolo delle deformazioni $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z, \omega_x, \omega_y, \omega_z$. — Le formole superiori sono generali e possono servire a risolvere qualunque problema di deformazione relativo a solidi aventi le dimensioni trasversali infinitamente piccole rispetto alla lunghezza, entro i limiti delle ipotesi ammesse.

Quanto poi al calcolo effettivo delle quantità Δx, Δy, Δz si possono seguire tre metodi diversi:

a) *Processo* o *metodo analitico*. Esso consiste nell'eseguire effettivamente in modo esatto i calcoli indicati dalle formole superiori, cioè esprimere in funzione di una variabile, ordinariamente l'arco s o l'ascissa x, le quantità tutte, che trovansi sotto il simbolo integrale, e quindi eseguire l'integrazione estendendola ai limiti assegnati e fare la somma algebrica dei diversi termini, che compongono ciascuna formola.

b) Il *processo aritmetico* o *tabellare*, od anche *per sommatorie od integrazione approssimata*. Esso consiste nel sostituire alle integrazioni esatte delle integrazioni approssimate col mezzo di somme semplici, oppure colla formola del Simpson

$$\sum_{1}^{n} y \Delta x = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \ldots + 4y_{4-1} + y_4)$$

per la quale, come è noto, può ritenersi in via abbastanza approssimata che sia

$$\int_0^1 y\,dx = \sum_{1}^{n} y \Delta x$$

in cui Δx esprime la differenza della variabile, ed $y_0, y_1, y_2 \ldots$ i successivi valori della funzione corrispondenti ai successivi aumenti Δx della variabile x. Per l'applicazione di questo metodo, allo scopo di evitare confusioni, soglionsi raccogliere i calcoli e risultati parziali in appositi quadri o tabelle, per cui gli è venuto anche il nome di *processo tabellare*. Questi quadri possono essere diversi di forma, importa però che siano chiari ed ordinati in guisa che si possano con facilità seguire e verificare tutti i calcoli eseguiti, per riscontrare gli errori, se ne avvennero, e per potere con certezza passare agli ulteriori calcoli, che possono necessitare per la soluzione del problema.

Dovendosi, per es., calcolare le Δx, Δy, Δz nelle formole precedenti, potrebbe convenire raccogliere i risultati parziali pel calcolo delle somme in una tabella analoga alla seguente.

Nel caso in cui si voglia impiegare la formola del Simpson, Δx dovrà essere costante, le ordinate dovranno essere dispari in numero, e, ad eccezione della prima ed ultima, andranno moltiplicate alternativamente per 4 e per 2 prima di eseguire la somma, e il risultato dovrà essere moltiplicato per $\frac{\Delta x}{3}$.

Numero d'ordine dei punti o sezioni distanti di un intervallo Δ	VARIAZIONI PRODOTTE DALLE					
	Traslazioni secondo gli assi delle			Rotazioni secondo gli assi delle		
	x	y	z	x	y	z
	$a\Delta s$	$b\Delta s$	$c\Delta s$	$(z'-z)\psi_y\Delta s-(y'-y)\psi_z\Delta s$	$(x'-x)\psi_z\Delta s-(z'-z)\psi_x\Delta s$	$(y'-y)\psi_x\Delta s-(x'-x)\psi_y\Delta s$
0						
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
.....						

c) Il *processo geometrico* o *grafico*. Esso consiste nel calcolare gli integrali o sommatorie come somme di prodotti di segmenti; per ciascuno di questi prodotti un segmento corrisponde al valore dell'elemento differenziale, e l'altro all'intervallo Δ.

Nel calcolo effettivo di queste somme si usano poi di preferenza il metodo del poligono funicolare, o quello del fascio funicolare, senza particolari modificazioni e quali risultano dalla teoria ordinaria del calcolo grafico.

32. Espressione delle deformazioni elementari nei solidi a sezione trasversale infinitamente piccola. — Pei solidi che hanno due dimensioni infinitamente piccole rispetto alla terza e l'asse rettilineo, o soltanto leggermente curvo, si può trovare facilmente una relazione tra le sei deformazioni elementari i_x, i_y, i_z, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz} in ogni punto e le quantità a, b, c, ψ_x, ψ_y, ψ_z, che entrano nelle formole generali, relazione di indole puramente cinematica e che sussiste indipendentemente dalla natura delle cause, che hanno prodotto la deformazione. Le i_x, i_y, ecc. sono date in funzione delle derivate di u, v, w prese rispetto ad x, y, z, il loro valore dipende dal valore di rapporti, che non saranno alterati sensibilmente qualora al numeratore od al denominatore si trascurino le quantità infinitamente piccole rispetto alle rimanenti. Se si considera un elemento di volume ed un elemento superficiale coincidente con una delle sue faccie o passante pel suo centro di figura, dopo la deformazione questo elemento avrà assunto una nuova posizione, e gli spostamenti dei diversi punti si comporranno di due termini, uno corrispondente allo spostamento dell'elemento come se fosse rigido, e l'altro dovuto alla deformazione nell'elemento dopo arrivato nella sua nuova posizione; cioè dette a, b, c le tre traslazioni, ω_x, ω_y, ω_z le tre rotazioni, ed u', v', w' gli spostamenti dovuti alla deformazione infinitesima nell'elemento, sarà

$$u = a + z\,\omega_y - y\,\omega_z + u'$$

$$v = b + x\omega_z - z\,\omega_x + v'$$

$$w = c + y\,\omega_x - x\omega_y + w'.$$

Ciò premesso, sia $G_0\,G_n$ (*Fig.* 20ª, *tav.* III) un solido che abbia due dimensioni infinitamente piccole rispetto alla terza; esso può evidentemente riguardarsi come una serie di sistemi, o spazi molecolari, aventi tutti il proprio centro di figura sulla retta asse del corpo.

Riferiamo questo corpo a tre assi ortogonali (G_0, ξ, η, ζ) prendendo l'asse delle ξ coincidente coll'asse del corpo; indichiamo con

A_0B_0 la sezione piana iniziale normale all'asse, con G_0 il suo centro di figura, e con $G\eta$ e $G\zeta$ gli altri due assi ortogonali, che dovranno giacere nel piano A_0B_0; indi si immagini una serie di piani A_kB_k, normali all'asse e vicinissimi fra loro, in modo da separare il corpo in tanti tronchi, ciascuno dei quali corrisponda ad uno dei sistemi molecolari, di cui la linea materiale si suppone composta, ossia ad una delle sfere elementari considerate al numero 30. In ciascuno di questi piani si suppongano tracciate due rette passanti pel centro di figura O_k della sezione, e tali da costituire coll'asse della trave una terna di assi ortogonali particolari al tronco O_kO_{k+1} limitato da due piani successivi. Finalmente rappresentino ξ, η, ζ le coordinate rispetto agli assi generali (G_0, ξ, η, ζ) di un punto m, ed x, y, z quelle dello stesso punto m rispetto agli assi particolari del tronco infinitesimo, che si considera. Si è visto come lo spostamento dí un punto rispetto agli assi passanti per la sezione del tronco si possa ritenere con sufficiente esattezza rappresentata da tre rotazioni $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ e tre traslazioni a_1, b_1, c_1 costanti per ogni tronco infinitesimo e variabili passando o da un tronco ad un altro, ossia variabili al variare di s, e da tre quantità infinitamente piccole rispetto alle dimensioni dell'elemento u', v', w'. Se si indicano con u, v, w gli spostamenti paralleli agli assi (O_k, x, y, z) sarà

$$u = a_1 + z\,\omega_y - y\,\omega_z + u'$$

$$v = b_1 + x\,\omega_z - z\,\omega_x + v'$$

$$w = c_1 + y\,\omega_x - x\,\omega_y + z'.$$

Se si indica con δ l'allungamento dell'asse del solido fra le due sezioni, che limitano il tronco (od anche fra i centri di figura di due tronchi successivi) con φ l'angolo compreso fra la posizione primitiva di O_kO_{k+1} e la posizione finale $O'_kO'_{k+1}$, e con ψ l'angolo, che la proiezione dell'asse $O'_kO'_{k+1}$ sul piano delle yz fa coll'asse delle y

$$a_1 = \delta\cos\varphi \qquad b_1 = (ds+\delta)\operatorname{sen}\varphi\cos\psi \qquad c_1 = (ds+\delta)\operatorname{sen}\varphi\cos\psi\,.$$

Se si suppone la deformazione infinitamente piccola, φ sarà un angolo infinitesimo, quindi si potrà porre

$$\operatorname{sen}\varphi = 0 \qquad \cos\varphi = 1$$

e le formole superiori diventano:

$$u = \delta + z\omega_y - y\omega_z + u'$$

$$v = x\omega_z - z\omega_x + v'$$

$$w = y\omega_x - x\omega_y + w'$$

nelle quali δ, ω_x, ω_y, ω_z sono tutte funzioni di s. (Effettivamente le coordinate di un punto in causa della deformazione saranno

$$x+u\,, \qquad y+v\,, \qquad z+w\,,$$

ma u, v, w in queste formole possono essere trascurati perchè infinitamente piccole rispetto alle x, y, z senza che sia alterato sensibilmente il risultato; d'altra parte l'aggiunta delle u', v', w' corregge, come già si è osservato, ciò che vi può essere di non completamente esatto in questa rappresentazione di u, v, w).

Le quantità u, v, w sono funzioni di $s+x$, quindi le loro derivate rispetto ad s sono uguali alle derivate rispetto ad x. È evidente che tanto cresce lo spostamento se si suppone di considerare un punto di coordinate $(x+dx, y, z)$ quanto se si immagina avanzata nel senso delle s positive la sezione base del tronco di una quantità $ds=dx$, mentre sono per ipotesi trascurabili $\frac{du'}{ds}$, $\frac{dv'}{ds}$, $\frac{dw'}{ds}$ perchè per ipotesi u', v', w' sono infinitamente piccoli rispetto alle dimensioni dell'elemento. Quindi

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dx} = \frac{du}{ds} = \frac{d\delta}{ds} + z\frac{d\omega_y}{ds} - y\frac{d\omega_z}{ds} + \frac{du'}{ds} &= i + z\theta_y - y\theta_z \\
\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{ds} = x\frac{d\omega_z}{ds} - z\frac{d\omega_x}{ds} + \frac{dv'}{ds} &= x\theta_z - z\theta_x \\
\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{ds} = y\frac{d\omega_x}{ds} - x\frac{d\omega_y}{ds} + \frac{dw'}{ds} &= y\theta_x - x\theta_y
\end{aligned}\right\} \quad (42)$$

in cui i, θ_x, θ_y, θ_z esprimono le derivate di δ, ω_x, ω_y, ω_z prese rispetto ad s, cioè le ragioni degli aumenti rispetto ad s della dilatazione nel senso dell'asse e delle rotazioni relative a ciascun tronco. Integrando ed indicando con v_1, u_1, w_1 delle funzioni arbitrarie di y e di z si ottiene

$$u = ix + zx\theta_z - xy\theta_z + u_1$$

$$v = \frac{x^2}{2}\theta_z - xz\theta_x + v_1$$

$$w = xy\theta_x - \frac{x^2}{2}\theta_y + w_1$$

e ricordando le formole, che dànno le deformazioni elementari

$$\left.\begin{aligned} i_x &= \frac{du}{dx} = i + z\theta_y - y\theta_z \\ i_y &= \frac{dv}{dy} = \frac{dv_1}{dy} \\ i_z &= \frac{dw}{dz} = \frac{dw_1}{dz} \\ g_{xy} &= \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = \frac{du_1}{dy} - z\theta_x \\ g_{xz} &= \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx} = \frac{du_1}{dz} + y\theta_x \\ g_{yz} &= \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \frac{dv_1}{dz} + \frac{dw_1}{dy} \end{aligned}\right\} \quad (43).$$

È necessario avvertire che questo calcolo suppone come condizione necessaria che il solido sia primitivamente rettilineo e che la deformazione sia piccola e continua senza alcun salto brusco nella forma e nella deformazione del sistema; se queste condizioni non si verificano, allora le formole superiori non possono più accettarsi, se ciò non avviene soltanto in alcuni punti dell'asse, allora le formole non varranno in vicinanza di quei punti, mentre potranno essere ancora accettate nei tronchi da essi limitati.

Le formole (42) sono lineari senza termine indipendente, quindi vale per esse il principio della sovrapposizione degli effetti. Ciò permette di concludere che queste formole convengono anche nel caso di un sistema lineare di punti materiali ad asse leggermente curvo; infatti qualunque deformazione avvenga in esso, purchè piccola e continua, senza salti o rapide modificazioni di forma, potrà sempre riguardarsi come la differenza di due distinte deformazioni, la prima caratterizzata dalle i', θ'_x, θ'_y, θ'_z che conduce l'asse ad essere rettilineo, la seconda caratterizzata dalle i'', θ''_x, θ''_y, θ''_z che conduce il corpo alla posizione finale.

Se si pone

$$i=i''-i', \qquad \theta_x=\theta''_x-\theta'_x, \qquad \theta_y=\theta''_y-\theta'_y, \qquad \theta_z=\theta''_z-\theta'_z$$

$$u_1=u''_1-u'_1, \qquad v_1=v''_1-v'_1, \qquad w_1=w''_1-w'_1$$

si ottiene immediatamente:

$$u=i''-i'+z(\theta''_y-\theta'_y)-y(\theta''_z-\theta'_z)+u''_1-u'_1=i_x+xz\theta_y-xy\theta_z+u_1$$

$$v=\frac{x^2}{2}(\theta''_z-\theta'_z)-xz(\theta''_x-\theta'_x)+v''_1-v'_1=\frac{x^2}{2}\theta_z-xz\theta_x+v_1$$

$$w=xy(\theta''_x-\theta'_x)-\frac{x^2}{2}(\theta''_y-\theta'_z)+w''_1-w'_1=xy\theta_x-\frac{x^2}{2}\theta_y+w_1$$

che è quanto volevasi dimostrare. A questo risultato si poteva giungere anche osservando che all'asse continuo dell'arco, quando il raggio di curvatura è molto grande, si può sostituire un sistema di corde di lunghezza finita inscritte nel medesimo, ed aventi gli estremi due a due sovrapposti, e che la linea materiale si può sempre riguardare senza errore sensibile come una serie di tronchi ad asse rettilineo aventi le dimensioni trasversali infinitesime rispetto alla sua lunghezza, quindi per ciascun tronco, e per conseguenza anche per tutta la trave, valgono con sufficiente approssimazione le formole (43).

33. Espressione delle deformazioni elementari nei solidi che hanno una dimensione infinitamente piccola rispetto alle altre due. — Una ricerca analoga può farsi per un corpo in cui una sola dimensione sia infinitamente piccola rispetto alle altre due, ossia per un sistema superficiale di punti materiali. Tale analisi però non avendo per ora un rapporto diretto colle applicazioni, che interessano l'ingegnere, non ci fermeremo a svilupparla, ma ci limiteremo ad indicare i libri nei quali questa questione è trattata molto diffusamente (*).

(*) Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides* (Traduzione di Barré de Saint-Venant e Flamant, pag. 632 e segg.). — Kirchhoff, *Die matematische Phisik*.

CAPITOLO IV.

Equilibrio dei corpi elastici.

34. Elasticità. Equilibrio dei corpi elastici. Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici. Teoria della resistenza dei materiali. — I corpi solidi tendono a conservare la propria forma, se una forza esterna viene ad agire sopra uno di essi, questo oppone una certa resistenza a deformarsi, e, se la deformazione non ha superato certi limiti, al cessare della causa deformatrice il solido riprende sensibilmente la forma primitiva: questa proprietà dicesi *elasticità*. Se la deformazione supera certi limiti variabili da sostanza a sostanza, al cessare della causa perturbatrice il corpo non riprende più la forma primitiva, allora dicesi che in esso hanno avuto luogo deformazioni permanenti, che è stato superato il limite di elasticità e che è incominciato lo snervamento della materia. Se si aumentano ancora le deformazioni, che il corpo subisce, cresce contemporaneamente l'importanza delle deformazioni permanenti e dello snervamento, finchè all'ultimo limite il solido si separa in diversi sistemi indipendenti dando luogo al fenomeno designato col nome di *rottura*.

L'osservazione e l'esperienza hanno dimostrato che questa proprietà appartiene in grado generalmente diverso a tutte le sostanze solide, che lo snervamento non è altro che uno stato particolare della materia predisponente alla rottura e finalmente che non esiste un vero limite di elasticità, prima del quale non si verifichi alcuna deformazione permanente, ma che questa espressione indica piuttosto quel grado di alterazione nella forma di un corpo, oltre al quale la deformazione permanente diventa una frazione sensibile della deformazione totale, mentre prima ne è una frazione talmente piccola da poter essere riguardata come inapprezzabile e considerata nei calcoli come un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla deformazione, che scompare al cessare delle cause perturbatrici, ossia rispetto alla deformazione elastica.

La teoria dell'equilibrio dei corpi elastici si occupa di determinare le relazioni, che passano tra le forze, che sollecitano un corpo e le deformazioni, che si manifestano nel medesimo, semprechè però non sia superato il limite di elasticità. Per la natura del problema, che si vuol risolvere, avviene che non si possono nel maggior numero di casi determinare completamente queste rela-

zioni e molto meno dar loro una forma semplice. Di qui derivano due modi o metodi di trattare le questioni relative all'equilibrio dei corpi elastici: uno che si propone di trovare soltanto relazioni esatte e che si arresta davanti un problema, che non giunge a risolvere completamente; esso costituisce un ramo importantissimo della fisica matematica conosciuto col nome di teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici. L'altro metodo invece non si preoccupa di conservare un'assoluto rigore matematico, ma cerca di risolvere il maggior numero di problemi, che si presentano comunemente in pratica introducendo ipotesi particolari o trascurando termini di secondaria importanza, in guisa da giungere sempre ad un risultato, che sarà bensì soltanto approssimato, ma che sarà utilissimo ogni qualvolta si possa dimostrare che l'errore, che si commette, è inferiore alle esigenze della pratica. Questo secondo modo di trattare l'equilibrio dei corpi elastici costituisce la teoria della resistenza dei materiali o scienza delle costruzioni od anche meccanica applicata alle costruzioni, ramo importantissimo e fondamentale della scienza dell'ingegnere ed ha per iscopo di dare all'ingegnere una guida sicura nella risoluzione dei problemi di resistenza e d'equilibrio, che si possono presentare nell'esercizio della sua professione.

35. Funzione potenziale, energia potenziale e lavoro di deformazione ne' corpi elastici. Teoremi relativi. — Nello studio dei corpi elastici si suole partire dall'ipotesi, confermata dall'esperienza, che fra le molecole dei corpi, semprecchè si mantenga costante la temperatura, agiscono forze tali, che per piccole deformazioni sono proporzionali agli spostamenti relativi dei suoi punti (*). Lo stesso argomento può anche essere studiato partendo da un altro concetto, sebbene fra i medesimi la differenza sia più apparente che reale e ben analizzati essi si corrispondano completamente, si può cioè studiare l'equilibrio elastico partendo dall'ipotesi, confermata essa pure dall'esperienza, che, conservando invariata la temperatura, il lavoro delle forze elastiche per piccole deformazioni non dipende che dalle posizioni estreme occupate dai diversi punti e quindi che il sistema ammette una funzione potenziale.

Al numero 12 si è dimostrato che per piccole deformazioni contate a partire da uno stato di equilibrio stabile l'energia potenziale è una funzione omogenea di secondo grado delle deformazioni e che le forze, che agiscono fra i diversi punti, sono uguali e di segno contrario alle derivate di questa funzione prese rispetto alle diverse deformazioni e quindi proporzionali alle medesime.

(*) Lamé, Opera citata.

Sia che si parta dall'uno o dall'altro concetto, il risultato è il medesimo, si ha come conseguenza che le forze elastiche sono proporzionali alle deformazioni se si ammette che il lavoro non dipenda che dalle posizioni estreme occupate dai diversi punti, oppure si ha come conseguenza quest'ultima proprietà se si parte dall'ipotesi che le forze siano proporzionali agli spostamenti, perchè, essendo forze centrali, ammettono necessariamente una funzione potenziale (*).

La tendenza dei diversi punti o molecole di un corpo elastico a conservare inalterate le loro distanze quando non avvengano variazioni di temperatura e non vi sia acquisto o perdita di energia sotto qualsiasi forma, mostra che fra le medesime agiscono cause permanenti o forze, che variano al variare delle distanze esistenti fra i diversi punti, capaci di opporre una resistenza bilaterale alle cause, che agiscono sul sistema. Se questo fatto si mette in rapporto col concetto che il lavoro di queste forze dipende soltanto dalle posizioni estreme occupate dai punti del corpo qualora la temperatura rimanga costante, in base a quanto è stato detto al capitolo I, si conclude che le forze agenti fra le diverse molecole debbono necessariamente ammettere una funzione potenziale ϕ (Num. 10). Se si indicano con ϕ_1 e ϕ_2 i valori della funzione potenziale corrispondenti a due posizioni diverse dei suoi punti il lavoro L fatto per passare dalla prima alla seconda sarà dato da

$$L = \phi_2 - \phi_1 .$$

Se sopra un corpo elastico deformato non agisce alcuna forza esterna in modo che esso rimanga abbandonato soltanto all'influenza delle azioni interne senza vincolo alcuno capace di impedire in un modo qualsiasi il movimento delle sue parti, le molecole del corpo dovranno muoversi verso una posizione di equilibrio stabile e spontaneo, per la quale sarà nullo il momento virtuale del sistema e quindi anche nulla la risultante delle azioni, che ogni punto riceve dai punti vicini, in tali condizioni dicesi che il corpo elastico trovasi allo *stato naturale* (Num. 12) di equilibrio. Se con f si indica una forza elastica qualsiasi e con δr lo spostamento del suo punto d'applicazione, lo stato naturale essendo stato di equilibrio, dovrà (Num. 7) essere

$$\Sigma f \delta r \cos \widehat{f \delta r} = 0.$$

(*) Il primo metodo fu seguìto dal Green e da molti scrittori inglesi; il secondo invece è stato impiegato in modo più particolare dal Navier e dagli scrittori francesi.

Lo stato naturale essendo stato d'equilibrio stabile, perchè per definizione il corpo tende a ritornarvi ogni qualvolta esso subisca deformazioni, che lo allontanino dal medesimo, purchè esse siano infinitamente piccole rispetto alle sue dimensioni, ne segue che esso (Num. 9) dovrà corrispondere ad un valore massimo della funzione potenziale oppure, il che torna lo stesso, ad un valor minimo della funzione ergale o dell'energia potenziale ($I = \varphi_m - \varphi$) (Num. 11 e 12).

Se si indica con φ_m il valor massimo della funzione potenziale, chiamasi *lavoro di deformazione* L nei corpi elastici il lavoro fatto dalle forze elastiche per passare dalla posizione attuale allo stato naturale, lavoro esattamente uguale al lavoro resistente sviluppato dalle reazioni elastiche durante la deformazione, esso è misurato dalla diminuzione della funzione potenziale contata a partire dal suo valor massimo, oppure all'incremento della funzione ergale contata a partire dal suo valor minimo e corrisponde esattamente alla definizione data in generale di energia potenziale; le due espressioni applicate ai corpi elastici sono equivalenti e soltanto possono differire di una costante corrispondente all'energia potenziale I_0 sviluppata in causa dei vincoli, che stabiliscono in certo qual modo la compagine del sistema elastico, che si considera.

Dalla definizione di lavoro di deformazione o di energia potenziale elastica per piccole deformazioni risulta in generale la relazione seguente:

$$L = I = -(\varphi_m - \varphi) = (\Delta\varphi)_{\varphi = \varphi_m}$$

$$= \Sigma\left[\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=r_0}\delta r + \frac{1}{1.2}\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}\right)_{r=r_0}\delta r^2 + \ldots\right]$$

dove r esprime la distanza fra due punti qualsiasi ed r_0 la loro distanza allo stato naturale. Lo stato naturale essendo stato d'equilibrio deve essere

$$\Sigma f\,dr\cos\widehat{f\delta r} = 0$$

ma per una nota proprietà della funzione potenziale

$$f\cos\widehat{f\delta r} = \left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=r_0}$$

quindi

$$\Sigma\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_{r=r_0}\delta r = 0$$

ed L in generale sarà una funzione omogenea di secondo grado e positiva degli spostamenti (lo stato naturale corrispondendo ad un minimo dell'energia potenziale) e la sua derivata presa rispetto alla deformazione sarà uguale e di segno contrario alla forza elastica, che agisce nel punto, che si considera, poichè è uguale e di segno contrario alla derivata della funzione potenziale, cioè sarà uguale alla forza esterna agente in quel punto e che lo mantiene in equilibrio

$$\frac{dL}{dr} = \left(\frac{d^2\phi}{dr^2}\right)_{r=r_0} \delta r .$$

Questa formola dimostra che quando si possano trascurare le potenze di grado superiore alla prima di δr le forze sono sempre proporzionali alle deformazioni ad eccezione del caso particolare in cui fosse $\left(\frac{d^2\phi}{dr^2}\right)_{r=r_0} = 0$. L'esperienza e l'osservazione confermando in tutti i casi questa legge, si dovrà concludere che $\left(\frac{d^2\phi}{dr^2}\right)_{r=r_0}$ non è mai nulla nei corpi elastici e che realmente per piccoli spostamenti nell' espressione del lavoro di deformazione e della forza elastica si possono trascurare tutti i termini, che contengono potenze di grado superiore di δr.

Da questi risultati apparę anche evidente la significazione del limite di elasticità; infatti i termini che contengono le potenze di grado superiore di δr possono realmente essere trascurati finchè δr è piccolissimo, se aumenta di valore allora essi non sono più trascurabili ed incominciano ad avere influenza sul risultato, influenza che crescendo δr potrà diventare predominante e condurrà a fenomeni affatto diversi da quelli, che si verificano quando si può accettare la legge semplicissima che le forze siano proporzionali agli spostamenti. Tutto quanto verrà detto in seguito suppone sempre che le deformazioni siano circoscritte entro il limite di elasticità a meno che non si avverta espressamente il contrario, ossia suppone che siano trascurabili le potenze superiori di δr. Sarebbe un errore applicare i risultati, ai quali si arriverà, oltre questo limite, perchè le formole sono dedotte ponendo come principio che la deformazione permanente δ_2 sia nulla o trascurabile rispetto alla deformazione elastica δ_1, che pure si suppone piccolissima rispetto alle dimensioni del corpo che si considera; se l'ipotesi non è verificata anche le conseguenze sono necessariamente erronee.

Dai risultati dell'osservazione e dell'esperienza e dalle considerazioni svolte in questo numero risultano i teoremi seguenti:

Le forze elastiche sono espresse linearmente in funzione delle deformazioni senza alcun termine indipendente, poichè s'annullano colle deformazioni.

Il lavoro di deformazione, entro il limite d'elasticità ed a temperatura costante, dipende unicamente dalle posizioni estreme occupate dai punti, che compongono il corpo, e non dal cammino da essi percorso per arrivare a quelle posizioni.

Il lavoro di deformazione è necessariamente una funzione omogenea positiva di secondo grado degli spostamenti dei diversi punti, che compongono il corpo, fintantochè questi spostamenti possono essere riguardati come infinitamente piccoli rispetto alle dimensioni del corpo stesso.

Le derivate del lavoro di deformazione prese rispetto agli spostamenti dei diversi punti danno le forze, che applicate a questi stessi punti, mantengono il corpo in equilibrio.

Osservazione. — Che il lavoro di deformazione nei corpi elastici (entro i limiti d'elasticità) debba essere una funzione omogenea di secondo grado degli spostamenti e sempre positiva appare anche dalle seguenti considerazioni (*):

a) Il lavoro di deformazione dipende solo dalle posizioni estreme occupate dal corpo, quindi è necessariamente funzione degli spostamenti dei suoi punti; inoltre essendo uguale alla differenza della funzione potenziale, per piccoli spostamenti esso sarà esprimibile col mezzo della *Serie del* Taylor.

b) Allo stato naturale di equilibrio il lavoro di deformazione deve esser nullo e poichè gli spostamenti si contano a partire da questo stato, così la sua espressione non dovrà contenere alcun termine indipendente dagli spostamenti.

c) Il termine di primo grado dell'espressione del lavoro di deformazione sviluppato in serie è uguale e di segno contrario al momento virtuale delle forze elastiche nella posizione di equilibrio naturale, quindi, essendo nei corpi elastici bilaterale la resistenza al moto, deve necessariamente essere uguale a zero.

d) Le derivate prime del lavoro di deformazione prese rispetto agli spostamenti dovendo essere uguali alle forze, che mantengono il corpo in equilibrio, e l'esperienza avendo dimostrato che queste sono proporzionali alle deformazioni, il primo termine che non s'annulla nell'espressione del lavoro di deformazione sarà quello, che contiene le potenze seconde degli spostamenti.

(*) Betti, Memoria citata.

e) Entro i limiti di elasticità gli spostamenti relativi dei diversi punti sono sempre quantità infinitamente piccole, quindi i termini, che contengono le potenze di grado superiore degli spostamenti, sono trascurabili rispetto a quelli, che contengono le potenze seconde delle stesse quantità.

f) Lo stato naturale essendo stato di equilibrio stabile, corrisponderà ad un valor massimo della funzione potenziale, quindi l'incremento che essa assume per piccoli spostamenti è necessariamente negativo ed il lavoro di deformazione, che è uguale e di segno contrario a questo incremento, sarà sempre positivo.

36. Principio della sovrapposizione degli effetti. — Si è dimostrato superiormente che le forze elastiche sono esprimibili in funzione delle deformazioni mediante relazioni lineari senza termine indipendente; segue da ciò che nello studio delle questioni relative all'equilibrio elastico vale il principio della sovrapposizione degli effetti, cioè *se si considerano due sistemi di spostamenti* ρ_1 e ρ_2 *relativi ai singoli punti di un corpo la somma delle forze* f_1 *ed* f_2, *che si sviluppano nel corpo, considerando ciascun sistema di spostamenti separatamente, è uguale alla forza che si sviluppa qualora si supponga che nel corpo abbia luogo in ogni punto un sistema di spostamenti* $\rho_1+\rho_2$ *uguale alla somma di quelli precedentemente considerati.* Infatti sia ε il coefficiente costante, pel quale moltiplicando lo spostamento si ottiene la forza elastica, allora

$$f_1=\varepsilon\rho_1 \quad f_2=\varepsilon\rho_2$$

sommando s'ottiene

$$f_1+f_2=\varepsilon(\rho_1+\rho_2).$$

Questa relazione essendo valida per un punto qualsiasi vale anche per tutto il sistema e dimostra il teorema enunciato: se invece di due sistemi di spostamenti ρ_1 e ρ_2 se ne considerassero n allora si avrebbe analogamente

$$f_1+f_2+f_3+\ldots f_n=\varepsilon(\rho_1+\rho_2+\rho_3+\ldots\rho_n).$$

Il principio della sovrapposizione degli effetti non avrebbe più luogo se nell'espressione della forza in funzione degli spostamenti entrasse un termine indipendente γ, in guisa che fosse in via generale

$$f=\varepsilon\rho+\gamma.$$

Infatti allora

$$f_1 = \varepsilon \rho_1 + \gamma \quad f_2 = \varepsilon \rho_2 + \gamma$$

ed

$$f_1 + f_2 = \varepsilon(\rho_1 + \rho_2) + 2\gamma$$

mentre invece supponendo avvenuto nel corpo uno spostamento $\rho_1 + \rho_2$ la forza $f = f^1$ sarebbe data da

$$f^1 = \varepsilon(\rho_1 + \rho_2) + \gamma.$$

Questo teorema della sovrapposizione degli effetti è utilissimo nelle applicazioni e permette di scindere in diverse parti le questioni, cioè di far dipendere la soluzione di un problema complesso dalle soluzioni di diversi casi più semplici, di cui esso può in certo qual modo esser considerato la somma ed il risultato.

37. Conseguenze del teorema relativo alle derivate del lavoro di deformazione prese rispetto alle deformazioni. — Il teorema relativo alle derivate del lavoro di deformazione prese rispetto agli spostamenti è di grande utilità nella risoluzione dei problemi, che si presentano nello studio dell'equilibrio dei corpi elastici. Bisogna però tener presente che le deformazioni di ogni singolo punto vanno considerate come variabili indipendenti nell'espressione del lavoro, in guisa che se vi fossero alcuni punti formanti un sistema tale che le loro deformazioni potessero essere espresse in funzione di altre quantità e si volessero prendere le derivate del lavoro rispetto a quest'ultime, bisognerebbe seguire la regola di derivazione conveniente alle funzioni di funzioni, cioè derivare rispetto agli spostamenti dei diversi punti, moltiplicare ciascuna di queste derivate per la derivata dello spostamento rispetto alle nuove variabili e sommare i risultati. Tenendo conto di questa osservazione si dimostrano alcuni teoremi di grande utilità nelle applicazioni.

Se in un corpo vi sono alcuni punti, che formino un sistema rigido o che si possa considerare come tale senza grave errore, come sarebbe, per esempio, un parallelepipedo elementare, un elemento di superficie o di linea, gli spostamenti dei suoi punti sono esprimibili in funzione di tre traslazioni a, b, c, parallele a tre assi coordinati e di tre rotazioni intorno a tre rette parallele agli assi coordinati e passanti pel centro di figura del sistema. Se si indicano con u, v, w gli spostamenti di un punto qualsiasi, è noto che

$$u = a + z\theta_y - y\theta_z$$

$$v = b + x\theta_z - z\theta_x$$

$$w = c + y\theta_x - x\theta_y.$$

In relazione a quanto è stato detto superiormente, indicando con Π_x, Π_y, Π_z le forze applicate in ogni punto del sistema e che lo mantengono in equilibrio, con X, Y, Z le loro risultanti parallele agli assi coordinati e con M_x, M_y, M_z i loro momenti intorno a tre rette passanti pel centro di figura del sistema e parallele agli assi stessi

$$\frac{dL}{da} = \Sigma \frac{dL}{du}\frac{du}{da} = \Sigma \Pi_x \frac{d(a + z\theta_y - y\theta_z)}{da} = \Sigma \Pi_x = X$$

$$\frac{dL}{db} = \Sigma \frac{dL}{dv}\frac{dv}{db} = \Sigma \Pi_y \frac{d(b + x\theta_z - z\theta_x)}{db} = \Sigma \Pi_y = Y$$

$$\frac{dL}{dc} = \Sigma \frac{dL}{dw}\frac{dw}{dc} = \Sigma \Pi_z \frac{d(c + y\theta_x - x\theta_y)}{dc} = \Sigma \Pi_z = Z$$

$$\frac{dL}{d\theta_x} = \Sigma \left(\frac{dL}{dv}\frac{dv}{d\theta_x} + \frac{dL}{dw}\frac{dw}{d\theta_x} \right) = \Sigma (-\Pi_y z + \Pi_z y) = M_x$$

$$\frac{dL}{d\theta_y} = \Sigma \left(\frac{dL}{du}\frac{du}{d\theta_y} + \frac{dL}{dw}\frac{dw}{d\theta_y} \right) = \Sigma (\Pi_x z - \Pi_z x) = M_y$$

$$\frac{dL}{d\theta_z} = \Sigma \left(\frac{dL}{du}\frac{du}{d\theta_z} + \frac{dL}{dv}\frac{dv}{d\theta_z} \right) = \Sigma (-\Pi_x y + \Pi_y x) = M_z.$$

Da queste equazioni si deduce il teorema seguente:

Se alcuni punti di un corpo elastico formano un sistema rigido o che possa considerarsi come tale (un parallelepipedo elementare, un elemento di superficie o di linea) le derivate del lavoro di deformazione del corpo prese rispetto agli spostamenti del suo centro di figura dànno le risultanti parallele agli assi delle forze, che lo mantengono in equilibrio, le derivate prese rispetto alle rotazioni intorno a tre rette passanti pel centro di figura e parallele agli assi coordinati dànno i momenti intorno alle rette stesse delle forze, che mantengono in equilibrio il sistema.

Se invece di riferirsi alle traslazioni e rotazioni componenti si considerano la traslazione risultante r e la rotazione risultante θ, allora *la derivata del lavoro di deformazione rispetto alla traslazione risultante dà la risultante* R *delle forze che animano il sistema nella direzione della traslazione stessa, e la derivata rispetto alla rotazione* θ *dà il loro momento risultante* M.

Infatti se si indica con r_1 lo spostamento di un punto qualsiasi del sistema, e con h la sua distanza dall'asse di rotazione e con r la traslazione costante di tutti i punti del sistema stesso

$$r_1 = r + h\theta$$

e quindi

$$\frac{dL}{dr} = \Sigma \frac{dL}{dr_1}\frac{dr_1}{dr} = \Sigma \Pi = R$$

$$\frac{dL}{d\theta} = \Sigma \frac{dL}{dr_1}\frac{dr_1}{d\theta} = \Sigma \Pi h = M$$

che è quanto volevasi dimostrare.

38. Espressione del lavoro di deformazione in funzione delle forze esterne. Teorema di Castigliano. Conseguenze. — Fra le forze f che mantengono in equilibrio un corpo elastico e le deformazioni δr in ogni punto passa una relazione lineare senza termine indipendente

$$f = \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}\right)_{r=r_0} \delta r \tag{44}$$

segue da ciò che il lavoro di deformazione L, che risulta espresso in funzione degli spostamenti, potrà essere anche espresso in funzione delle forze, che mantengono in equilibrio il corpo; infatti si avranno tante equazioni analoghe alla (44), quanti sono i punti, che compongono il sistema; ricavando da queste equazioni i valori di δr e sostituendoli nell'espressione del lavoro, questo risulterà espresso soltanto in funzione delle forze f, che mantengono il corpo in equilibrio, o più semplicemente L è funzione di funzioni delle forze, che mantengono il corpo in equilibrio. Se δr variasse in modo continuo, f varierebbe pure in modo continuo ed il lavoro sarebbe espresso in funzione dei valori della funzione continua, che rappresenta gli spostamenti oppure le forze corrispondenti. Sia Γ il lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze f che mantengono il corpo in equilibrio, o, come suol dirsi più brevemente, delle forze esterne: l'Ingegnere Castigliano ha enunciato il seguente teorema: *Le derivate del lavoro di deformazione* Γ *espresso in funzione delle forze esterne prese rispetto a queste stesse forze dànno gli spostamenti dei punti, cui esse sono applicate.*

Infatti ricordiamo che

$$L = \Gamma\,, \qquad f = \left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}\right)_{r=r_0} \delta r\,, \qquad \frac{d\,\delta r}{df} = \frac{1}{\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}\right)_{r=r_0}}$$

quindi

$$\frac{d\Gamma}{df}=\frac{dL}{d\delta r}\frac{d\delta r}{df}=\left(\frac{d^2\phi}{dr^2}\right)_{r=r_0}\delta r\times\frac{1}{\left(\frac{d^2\phi}{dr^2}\right)_{r=r_0}}=\delta r.$$

Questo teorema risulta anche dall'osservazione che L è funzione omogenea di secondo grado degli spostamenti e Γ è funzione pure omogenea di secondo grado delle forze esterne, quindi per una nota proprietà delle funzioni omogenee (*) sarà

$$L=\frac{1}{2}\Sigma\frac{dL}{d\delta r}\delta r$$

$$\Gamma=\frac{1}{2}\Sigma\frac{d\Gamma}{df}f$$

qualunque siano i valori corrispondenti di f e δr ed il numero di punti materiali, che si considerano, ma $\frac{dL}{d\delta r}$ è sempre uguale ad f quindi necessariamente $\frac{d\Gamma}{df}=\delta r$.

Se la deformazione corrispondente ad un punto è una rotazione intorno ad un punto o ad un asse in guisa che $\delta r=\theta h$ se si chiama con μ il momento fh della forza applicata al punto, che si considera la *derivata del lavoro* Γ *di deformazione espresso in funzione delle forze presa rispetto al momento* μ *di una di esse rispetto ad un punto dà la rotazione* θ *che gli corrisponde.*

Infatti applicando la regola di derivazione conveniente alle funzioni di funzioni

$$\frac{d\Gamma}{d\mu}=\frac{d\Gamma}{df}\frac{df}{d\mu}=\delta r\frac{df}{d\mu}=\frac{\delta r}{h}=\theta\frac{h}{h}=\theta.$$

Se alcuni punti del corpo costituiscono un sistema rigido oppure che possa essere con sufficiente approssimazione considerato come tale, se pel centro di gravità del medesimo si immaginano passare tre assi paralleli agli assi coordinati, *le derivate del lavoro di deformazione* Γ *espresso in funzione delle forze prese rispetto alle risultanti* X, Y, Z *parallele agli assi delle forze, che animano il sistema, dànno le traslazioni parallele agli stessi assi del suo centro di gravità; le derivate invece prese rispetto ai momenti intorno agli assi poco anzi considerati dànno le rotazioni intorno ai medesimi.*

(*) Serret, Opera citata, pag. 112.

Siano Π_x, Π_y, Π_z le componenti parallele agli assi delle forze, che agiscono sul sistema, μ_x, μ_y, μ_z i loro momenti rispetto agli stessi assi, si potrà sempre porre, trattandosi di un elemento di volume di superficie o di linea,

$$\Pi_x = \frac{X}{m} \quad \Pi_y = \frac{Y}{m} \quad \Pi_z = \frac{Z}{m}$$

quindi

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dX} &= \Sigma \frac{d\Gamma}{d\Pi_x}\frac{d\Pi_x}{dX} = \Sigma u \frac{1}{m} = \Sigma \frac{1}{m}(a + z\theta_y - y\theta_z) = a \\ \frac{d\Gamma}{dY} &= \frac{d\Gamma}{d\Pi_y}\frac{d\Pi_y}{dY} = \Sigma v \frac{1}{m} = \Sigma \frac{1}{m}(b + x\theta_z - z\theta_x) = b \\ \frac{d\Gamma}{dZ} &= \frac{d\Gamma}{d\Pi_z}\frac{d\Pi_z}{dZ} = \Sigma w \frac{1}{m} = \Sigma \frac{1}{m}(c + y\theta_x - x\theta_y) = c \end{aligned}\right\} \quad (45)$$

i termini $\Sigma \frac{x}{m}, \Sigma \frac{y}{m}, \Sigma \frac{z}{m}$ sono nulli perchè proporzionali al momento statico della figura rispetto ad assi passanti pel centro di gravità. Con un procedimento analogo si potrà porre

$$\mu_x = \alpha M_x \quad \mu_y = \beta M_y \quad \mu_z = \gamma M_z$$

essendo

$$\Sigma\alpha = 1 \quad \Sigma\beta = 1 \quad \Sigma\gamma = 1.$$

Si è visto superiormente che

$$\frac{d\Gamma}{d\mu_x} = \theta_x \quad \frac{d\Gamma}{d\mu_y} = \theta_y \quad \frac{d\Gamma}{d\mu_z} = \theta_z$$

quindi

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dM_x} &= \Sigma \frac{d\Gamma}{d\mu_x}\frac{d\mu_x}{dM_x} = \theta_x \Sigma \frac{d\mu_x}{dM_x} = \theta_x \Sigma\alpha = \theta_x \\ \frac{d\Gamma}{dM_y} &= \Sigma \frac{d\Gamma}{d\mu_y}\frac{d\mu_y}{dM_y} = \theta_y \Sigma \frac{d\mu_y}{dM_y} = \theta_y \Sigma\beta = \theta_y \\ \frac{d\Gamma}{dM_z} &= \Sigma \frac{d\Gamma}{d\mu_z}\frac{d\mu_z}{dM_z} = \theta_z \Sigma \frac{d\mu_z}{dM_z} = \theta_z \Sigma\gamma = \theta_z \end{aligned}\right\} \quad (46)$$

le sei equazioni precedenti dimostrano il teorema enunciato.

Se sopra alcuni punti di un corpo elastico si suppongono agire diverse forze p_1, p_2, p_3... tutte eguali fra loro ed uguali a p

e si indicano con r_1, r_2,... r_n gli spostamenti dei loro punti di applicazione, allora

$$\frac{dp_1}{dp}=1\,\frac{dp_2}{dp}=1\;\ldots\;\frac{dp_n}{dp}=1$$

$$\frac{d\Gamma}{dp}=\frac{d\Gamma}{dp_1}\frac{dp_1}{dp}+\frac{d\Gamma}{dp_2}\frac{dp_2}{dp}+\ldots+\frac{d\Gamma}{dp_n}\frac{dp_n}{dp}=$$

$$=\frac{d\Gamma}{dp_1}+\frac{d\Gamma}{dp_2}+\ldots+\frac{d\Gamma}{dp_n}=\sum_1^n r_k=r_1+r_2+\ldots+r_n$$

Se si suppone che il numero dei punti, a cui sono applicate le forze p_1, p_2... p_n aumenti in modo, che si debba considerare il carico p come distribuito uniformemente sopra una superficie o lungo una linea per ogni unità di misura, allora indicando con ω un elemento superficiale o lineare

$$\frac{d\Gamma}{dp}=\Sigma\,\frac{d\Gamma}{d(p\omega)}\,\frac{d(p\omega)}{dp}=\int\frac{d\Gamma}{d(p\omega)}\omega=\int r\,\omega$$

cioè la derivata del lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze esterne presa rispetto od un carico uniformemente distribuito sopra una linea od una superficie dà rispettivamente l'area od il volume generato dalla linea o dalla superficie durante la deformazione.

Osservazione. — In questi teoremi relativi al lavoro di deformazione s'incontra naturalmente il caso di funzioni che dipendono da altre funzioni studiate ultimamente dal Professor Volterra (*). In relazione all'indole elementare di questo corso non si è creduto conveniente introdurre uno studio più generale di questa classe di funzioni (**); per le applicazioni sarà sufficiente osservare che l'espressione generale del lavoro di deformazione risulta una somma di un numero infinito di termini (un'integrale) come infiniti sono i punti, che compongono il sistema. Nei casi pratici questa somma contiene comunemente soltanto un numero finito di termini perchè ad eccezione di un numero finito e determinato di punti sono uguali a zero le forze agenti su tutti gli altri, quindi s'annullano e scompaiono dall'espressione generale i termini corrispondenti. Per il calcolo delle deformazioni il procedimento di derivazione deve essere applicata alla formola generale, ma è

(*) *Rendiconti della Regia Accademia dei Lincei*, 1887.

(**) Donati, *Atti dell'Accademia delle Scienze* dell'Istituto di Bologna, 1888-89.

evidente che, ad eccezione del punto di cui si cerca lo spostamento, è indifferente di derivare l'espressione generale e poi nelle derivate porre uguali a zero le forze, che si sono supposte agire in tutti i varî punti nei quali non è applicata alcuna forza esterna, oppure trascurare fin da principio quei termini, che corrispondono a forze il cui valore è uguale allo zero. Il risultato è il medesimo e questo ultimo metodo sarà sempre preferibile nei calcoli perchè più semplice e suscettibile di essere applicato utilmente nella pratica; quindi in generale gli spostamenti di un punto sono determinati calcolando il lavoro di deformazione in funzione delle forze esterne date (diverse da zero) e di una forza P agente sul punto che si considera, derivando l'espressione del lavoro rispetto a questa forza e sostituendo nella derivata alla forza P il suo valore, che, nel caso di un punto, sul quale non agisca forza esterna alcuna, sarà lo zero: il risultato sarà l'espressione dello spostamento cercato valutato nella direzione (supposta o reale) della forza P. In modo affatto analogo si procede per determinare la rotazione di un elemento rispetto ad un asse.

39. Teorema di reciprocità del Betti. Conseguenze. Teorema dei fattori alterni. — *In un corpo elastico a due sistemi di forze applicate agli stessi punti e nelle stesse direzioni corrispondono due sistemi tali di spostamenti nelle direzioni delle forze che la somma dei prodotti delle forze del primo sistema per gli spostamenti prodotti dal secondo è uguale alla somma dei prodotti delle forze del secondo sistema per gli spostamenti analoghi prodotti dalle forze del primo* (*).

Dalle cose svolte nei paragrafi precedenti risulta che il lavoro di deformazione in un corpo elastico è una funzione omogenea di secondo grado degli spostamenti oppure delle forze, sotto l'influenza delle quali il corpo si mantiene in equilibrio. Se si indica con P una forza esterna qualsiasi con i e k due numeri variabili da 1 fino ad n, numero delle forze esterne applicate al corpo, con $a_{i,k}$ il coefficiente numerico di uno qualunque dei termini dell'espressione di Γ

$$\Gamma = a_{1,1}P_1^2 + a_{1,2}P_1P_2 + a_{1,3}P_1P_3 + \ldots + a_{1,k}P_1P_k + \ldots +$$
$$+ a_{1,n}P_1P_n + a_{2,2}P_2^2 + a_{2,3}P_2P_3 + a_{2,4}P_2P_4 + \ldots + a_{2,n}P_2P_n +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+ a_{n-1,n-1}P_{n-1}^2 + a_{n-1,n}P_{n-1}P_n + a_{n,n}P_n^2$$

(*) Betti, Opera citata.

se si rappresentano con p gli spostamenti dei punti di applicazione delle forze P nella direzione delle forze stesse applicando il teorema di CASTIGLIANO si ricava l'espressione generale dello spostamento di un punto qualsiasi

$$p_i = \frac{d\Gamma}{dP_i} = \frac{d\sum_1^n a_{i,k} P_i P_k}{dP_i}$$

ossia

$$\left.\begin{aligned}
p_1 &= 2a_{1,1}P_1 + a_{1,2}P_2 + a_{1,3}P_3 + \ldots + a_{1,k}P_k + \\
&\quad + \ldots + a_{1,n}P_n \\
p_2 &= a_{1,2}P_1 + 2a_{2,2}P_2 + a_{2,3}P_3 + \ldots + a_{2,n}P_n \\
p_3 &= a_{1,3}P_1 + a_{2,3}P_2 + a_{3,3}P_3 + \ldots + a_{3,n}P_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_i &= a_{1,i}P_1 + a_{2,i}P_2 + a_{3,i}P_3 + -2a_{i,i}P_i + \ldots + a_{i,n}P_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_n &= a_{1,n}P_p + a_{2,n}P_2 + a_{3,n}P_3 + \ldots\ldots + a_{n,n}P
\end{aligned}\right\} \quad (45).$$

Se invece delle forze P agissero sul sistema negli stessi punti e nelle medesime direzioni altre forze, che indicheremo col simbolo Q, queste produrrebbero spostamenti q tali, che sarebbero rappresentati dalla formola generale

$$q_i = \frac{d\Gamma}{dQ} = \frac{d\sum_1^n a_{i,k} Q_i Q_k}{dQ_i}$$

e precisamente sarebbe

$$\left.\begin{aligned}
q_1 &= 2a_{1,1}Q_1 + a_{1,2}Q_2 + a_{1,3}Q_3 + \ldots + a_{1,n}Q_n \\
q_2 &= a_{1,2}Q_1 + 2a_{2,2}Q_2 + a_{2,3}Q_3 + \ldots + a_{2,n}Q_n \\
q_4 &= a_{1,3}Q_1 + a_{2,3}Q_2 + 2a_{3,3}Q_3 + \ldots + a_{3,n}Q_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_n &= a_{1,n}Q_1 + a_{2,n}Q_2 + a_{3,n}Q_3 + \ldots + 2a_{n,n}Q_n
\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

se si moltiplicano ordinatamente le equazioni (45) per Q_1, Q_2, Q_3,... Q_n e si sommano avendo cura di mettere in evidenza i fattori P comuni a più termini risulta

$$Q_1 p_1 + Q_2 p_2 + Q_3 p_3 + \ldots + Q_n p_n = P_1 [2 a_{1,1} Q_1 + a_{1,2} Q_2 +$$

$$+ a_{1,3} Q_3 + \ldots + a_{1,n} Q_n] + P_2 [a_{1,2} Q_1 + 2 a_{2,2} Q_2 + a_{2,2} Q_3 +$$

$$+ \ldots + a_{2,n} Q_n] + \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots +$$

$$+ P_n [a_{1,n} Q_1 + a_{2,n} Q_2 + a_{3,n} Q_3 + \ldots + 2 a_{n,n} Q_n]$$

in causa delle relazioni (46) i polinomi compresi fra le parentesi non sono altro che gli spostamenti q corrispondenti alle forze Q quindi

$$Q_1 p_1 + Q_2 p_2 + Q_3 p_3 + \ldots + Q_n p_n = P_1 q_1 + P_2 q_2 + P_3 q_3 +$$

$$+ \ldots + P_n q_n$$

ossia

$$\Sigma P q = \Sigma Q p \qquad (47)$$

equazione, che contiene il teorema del BETTI enunciato superiormente.

Da questo teorema si deducono alcune conseguenze importantissime nelle applicazioni: Supponiamo

$$P_2 = 1, P_1 = P_3 = P_4 = P_5 = \ldots = P_n = 0$$

e

$$Q_1 = 1, Q_2 = Q_3 = Q_4 = \ldots = Q_n = 0$$

allora la (47) diventa

$$q_2 = p_1 \qquad (48)$$

cioè: *in un corpo o sistema elastico lo spostamento di un punto quando la forza è applicata ad un altro è uguale allo spostamento di quest'ultimo quando la stessa forza è applicata al primo.* (Principio di MAXWELL).

Se si suppone $Q_1 = 1$ e $Q_2 = Q_3 = Q_4 = \ldots = Q_n = 0$ dalla stessa equazione (47) si ricava

$$p_1 = q_1 P_1 + q_2 P_2 + q_3 P_3 + \ldots + Q_n P_n \qquad (49)$$

cioè: *Lo spostamento di un punto in un corpo elastico soggetto all'influenza di un sistema di forze* P *è uguale alla somma dei*

prodotti delle singole forze per gli spostamenti dei loro punti d'applicazione secondo la loro direzione calcolato nell'ipotesi che sul sistema non agisca che un solo sforzo uguale all'unità applicato nel punto, di cui si vuole cercare lo spostamento, ed agente nella direzione secondo la quale lo spostamento stesso deve essere misurato,

Indichiamo con L' e L il lavoro di deformazione prodotto rispettivamente dalle forze Q e dalle forze P allora (Num. 13)

$$L' - L = \frac{1}{2} \Sigma (Qq - Pp) \tag{50}$$

l'equazione (47) fornita del teorema di reciprocità può anche scriversi (*)

$$0 = \frac{1}{2} \Sigma Qp - \frac{1}{2} \Sigma Pq \tag{51}.$$

Componendo per somma e sottrazione la (50) colla (51) si ottiene

$$\left.\begin{aligned} L' - L &= \frac{1}{2} \Sigma (Qq + Qp - Pp - Pq) = \frac{1}{2} \Sigma (Q - P)(p + q) \\ L' - L &= \frac{1}{2} \Sigma (Qq - Qp - Pp + Pq) = \frac{1}{2} \Sigma (P + Q)(q - p) \end{aligned}\right\} \tag{52}.$$

Conveniamo di indicare il lavoro di deformazione coi simboli L, L e Γ secondo che è espresso in funzione delle deformazioni, delle forze e delle deformazioni e finalmente delle sole forze esterne, se si suppone di prendere in considerazione due sistemi di forze o di spostamenti corrispondenti infinitamente vicini in guisa che sia

$$P = R \quad Q = R + dR$$

$$p = r \quad q = r + dr$$

$$L' = L + dL$$

dalla equazione (51) si ottiene

$$\Sigma (R + dR) r = \Sigma R (r + dr)$$

e togliendo la parte comune ΣRr rimane

$$\Sigma R dr = \Sigma r dR \tag{53}$$

(*) Donati, *Lezioni di fisica tecnica.*

od anche in causa del teorema relativo alle derivate del lavoro di deformazione

$$\Sigma \frac{dL}{dr} dr = \Sigma \frac{d\Gamma}{dR} dR \qquad (54)$$

e dalle (52) si ricava trascurando i termini infinitamente piccoli di ordine superiore

$$\left.\begin{aligned} dL &= \frac{1}{2}\Sigma dR\,(2r + dr) = \Sigma r\,dR = \Sigma \frac{d\Gamma}{dR} dR \\ dL &= \frac{1}{2}\Sigma dr\,(2R + dR) = \Sigma R\,dr = \Sigma \frac{dL}{dr} dr \end{aligned}\right\} (55).$$

Confrontando la (53) colla (54) e le (55) si ricava il seguente teorema: *Se sopra un corpo elastico agisce un sistema di forze* R, *a cui corrispondono gli spostamenti* r, *e si prendono in esame piccolissime variazioni* dR *o* δR *nell'intensità delle forze, a cui corrispondono piccolissime variazioni* dr *o* δr *negli spostamenti, si verificano le seguenti eguaglianze:*

$$dL = \Sigma R dr = \Sigma r dR = \Sigma \frac{dL}{dr} dr = \Sigma \frac{d\Gamma}{dR} dR = d\Gamma \qquad (55)\ (*).$$

(*) Questa proprietà risulta anche dalle seguenti considerazioni

$$\frac{dL}{dr} = R \qquad L = \frac{1}{2}\Sigma \frac{dL}{dr} r = \frac{1}{2}\Sigma Rr = \frac{1}{2}\Sigma \int d(Rr)$$

$$dL = \frac{1}{2}\Sigma d(Rr) = \frac{1}{2}\Sigma R dr + \frac{1}{2}\Sigma r dR$$

ma

$$dL = \Sigma \frac{dL}{dr} dr = \Sigma R dr$$

quindi

$$\Sigma R dr = \frac{1}{2}\Sigma R dr + \frac{1}{2}\Sigma r dR$$

da cui

$$dL = \Sigma R dr = \Sigma \frac{dL}{dr} dr = \Sigma r dR = \Sigma \frac{d\Gamma}{dR} dR = d\Gamma.$$

(Canevazzi, *Teoria generale della resistenza dei materiali*, Politecnico, 1888-89).

Esaminando il gruppo delle equazioni (45) si vede che i coefficienti delle forze P della prima linea sono ordinatamente uguali a quelli della prima colonna, quelli della seconda linea a quelli della seconda colonna e così di seguito. Ciò dipende dal fatto che l'espressione del lavoro di deformazione essendo omogenea e di secondo grado rispetto alle forze P i coefficienti dei termini, che contengono i doppi prodotti dovranno necessariamente comparire in due diverse derivate e precisamente in quelle prese separatamente rispetto alle due forze, che compongono il prodotto. Segue da ciò che può enunciarsi il seguente teorema, che potrebbesi chiamare teorema dei fattori alterni. *Se* P_i *e* P_k *sono due qualunque delle forze esterne agenti sopra un corpo o sistema elastico e* p_i *e* p_k *gli spostamenti dei loro punti d'applicazione calcolati nella loro direzione, il coefficiente di* P_k *nell'espressione di* p_i *è uguale al coefficiente di* P_i *nella espressione di* p_k *quando tanto* p_i *che* p_k *siano espressi in funzione delle forze esterne* P.

Se il lavoro di deformazione si esprime in funzione degli spostamenti ed applicando il teorema delle derivate del lavoro si cercano le espressioni delle forze esterne P, che sollecitano il sistema, si dimostra nello stesso modo un teorema analogo, perchè il lavoro di deformazione essendo una funzione omogenea di secondo grado rispetto agli spostamenti, si verifica anche in questo caso che i coefficienti dei termini, che contengono i doppi prodotti dovranno necessariamente comparire nelle derivate prese separatamente rispetto agli spostamenti, che entrano nel termine che si considera. Ciò risulta anche risolvendo il sistema delle equazioni (45) (*). Infatti il determinante minore che moltiplica p_i nell'espressione di P_k è uguale al determinante minore, che moltiplica p_k nell'espressione di P_i. Se per brevità si considerano soltanto cinque forze e si pone $i=2$ $k=4$ indicando con D il determinante delle equazioni

$$P_2=\frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2a_{1,1} & p_1 & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{1,2} & p_2 & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{1,3} & p_3 & 2a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{1,4} & p_4 & a_{3,4} & 2a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{1,5} & p_5 & a_{3,5} & a_{4,5} & 2a_{5,5} \end{vmatrix}$$

(*) Castigliano, *Intorno ad una proprietà dei sistemi elastici.*

$$P_4 = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} 2a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & p_1 & a_{1,5} \\ a_{1,2} & 2a_{2,2} & a_{2,3} & p_2 & a_{2,5} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & 2a_{3,3} & p_3 & a_{3,5} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & p_4 & a_{4,5} \\ a_{1,5} & a_{2,5} & a_{3,5} & p_5 & 2a_{5,5} \end{vmatrix},$$

il determinante minore, che moltiplica p_2 nell'espressione di P_4, è

$$\begin{vmatrix} 2a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,5} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & 2a_{3,3} & a_{3,5} \\ a_{1,4} & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,5} \\ a_{1,5} & a_{2,5} & a_{3,5} & 2a_{5,5} \end{vmatrix}$$

uguale al determinante minore, che moltiplica P_4 nell'espressione di P_2

$$\begin{vmatrix} 2a_{1,1} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{1,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{1,3} & 2a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{1,5} & a_{3,5} & a_{4,5} & 2a_{5,5} \end{vmatrix}$$

Se nel sistema delle equazioni (47) si suppone $P_k = 1$ e tutte le altre forze P uguali allo zero allora i coefficienti della k^{esima} colonna risultano uguali agli spostamenti prodotti nei punti 1, 2, 3... n del sistema elastico dalla forza $P_k = 1$, che è quanto dire che i coefficienti a non sono altro che gli spostamenti dei diversi punti 1, 2, 3... n quando tutte le forze sono nulle ad eccezione di una, che si suppone uguale all'unità: questi spostamenti o coefficienti a si chiamano *spostamenti unitari* relativi al punto k. I coefficienti della k^{esima} linea essendo ordinatamente uguali a quelli della k^{esima} colonna si arriva immediatamente alla stessa conclusione ricavata in precedenza dal teorema di reciprocità, cioè *l'espressione di* p_k

risulta uguale alla somma dei prodotti delle forze applicate al sistema per gli spostamenti contati nella loro direzione, che subirebbero i loro punti d'applicazione nell'ipotesi che sul sistema non agisca che uno sforzo unitario nel punto k, *ossia alla somma dei prodotti delle forze per gli spostamenti unitari relativi al punto* k.

Se gli spostamenti p sono calcolati nell'ipotesi che tutte le forze P siano uguali allo zero ad eccezione di una P_k, che sia diversa dello zero e dall'unità, allora essi diconsi spostamenti multipli relativi al punto k ed il grado di moltiplicità è dato dal numero, che rappresenta l'intensità della forza (rapporto tra la forza data e l'unità di misura delle forze). Dividendo gli spostamenti multipli per il grado di moltiplicità si ottengono gli spostamenti unitari e quindi in ogni caso ed in qualsiasi ipotesi di carico si possono calcolare facilmente gli spostamenti, che subisce un determinato punto di un sistema elastico.

40. Teorema di Menabrea. — Il Generale Menabrea nel 1857 ed in seguito l'Ingegnere Castigliano nel 1873 enunciarono il seguente teorema: *In ogni corpo elastico in equilibrio il lavoro sviluppato sotto l'influenza di date forze esterne è un minimo.* — Questo teorema è una conseguenza della teoria delle energie e può servire molto utilmente nelle applicazioni perchè fa dipendere da una questione di minimo la determinazione delle forze incognite ed il metodo per il loro calcolo è uniforme in tutti i problemi, nei quali questo teorema è applicabile. È però necessario osservare che non si tratta di un minimo assoluto, ma soltanto relativo al fatto che si considerino solo certe determinate variazioni di forma o di intensità nelle forze, che agiscono sul corpo.

Sia L l'espressione del lavoro di deformazione in funzione delle deformazioni, Γ l'espressione dello stesso lavoro in funzione delle forze esterne, che agiscono sopra un sistema elastico, U il lavoro delle forze esterne, per l'equilibrio (Num. 7) dovrà essere

$$\delta L - \delta U = 0 \qquad (56).$$

Precedentemente si è dimostrato (Num. 39, form. 55) che:

$$\delta L = \frac{dL}{dr}\delta r = \delta\Gamma = \frac{d\Gamma}{dR}\delta R$$

quindi la (56) può anche scriversi

$$\delta\Gamma - \delta U = 0 \qquad (57).$$

Se il sistema delle forze esterne è tale da ammettere una funzione potenziale e si rappresenta con I la sua energia potenziale $\delta U = -\delta I$, la (56) e la (57) diventano

$$\delta L - \delta U = \delta L + \delta I = \delta (L + I) = 0 \qquad (58)$$

$$\delta \Gamma - \delta U = \delta \Gamma + \delta I = \delta (\Gamma + I) = 0 \qquad (59).$$

La (58) corrisponde alla condizione ordinaria d'equilibrio pei sistemi di forze, che ammettono una funzione potenziale (Legge del Dirichlet, num. 8) cioè che in un sistema in equilibrio stabile l'energia totale deve essere un minimo; se l'equilibrio fosse instabile allora l'energia totale sarebbe un massimo, ed avrebbe un valore costante in prossimità della posizione d'equilibrio, se si trattasse d'equilibrio indifferente. La (59) contiene ancora la stessa condizione, ma sotto una forma diversa e ciò in causa della natura speciale dei corpi elastici, nei quali le forze, che li mantengono in equilibrio, sono direttamente proporzionali alle deformazioni in guisa che l'energia elastica può indifferentemente essere espressa in funzione delle une o delle altre. Partendo da questo teorema non si può parlare di minimo del solo lavoro di deformazione a meno che non si ammetta implicitamente che si considerano soltanto quelle variazioni di forma e d'intensità, per le quali si verifica la condizione

$$\delta U = -\delta I = 0.$$

Segue da ciò che il teorema di Menabrea è un caso particolare del teorema ordinario del potenziale, la condizione di minimo importata da questo teorema dovrà intendersi in senso limitato e condizionato, cioè riferendosi a tutte quelle variazioni, che non importano estrinsecazione di energia, che è quanto dire che il lavoro di deformazione allo stato di equilibrio è un minimo (la derivata seconda è positiva) rispetto a tutti gli stati vicini tali, che il passaggio dall'uno all'altro possa avvenire senza sviluppo di energia esterna, ossia rimanendo

$$\delta U = -\delta I = 0.$$

Si avrà cioè un minimo determinato dalla condizione

$$\Sigma \frac{dL}{dr} \delta r = 0$$

oppure all'altra equivalente

$$\Sigma \frac{d\Gamma}{dR}\delta R = 0.$$

Se si prendono in esame le applicazioni della teoria delle energie, che si presentano comunemente nella scienza delle costruzioni, il caso generale è il seguente: sono date le forze attive, che agiscono sul sistema, ordinariamente costanti in intensità, direzione e senso e sono incognite le reazioni causate da vincoli imposti al sistema, che il più delle volte sono invariabili e quindi le reazioni corrispondenti non producono lavoro esterno. Rappresentando con R' una qualunque delle reazioni incognite, queste entreranno nell'espressione del lavoro di deformazione L, ma non in quella dell'energia esterna I (*) (o di U, se i vincoli sono invariabili), quindi dovendo essere in generale per l'equilibrio $L+I$ un minimo od un massimo rispetto alle quantità di cui $L+I$ è funzione, sarà:

$$d\frac{(L+I)}{dR'} = 0$$

ma $\frac{dI}{dR'} = 0$ perchè per ipotesi le R' non entrano nell'epressione di I, quindi:

$$d\frac{(L+I)}{dR'} = \frac{d\Gamma}{dR'} = 0 \qquad (60).$$

A questo risultato non si potrebbe più arrivare qualora i vincoli imposti al sistema fossero variabili e le reazioni corrispondenti producessero lavoro, come appunto potrebbe avvenire se alcuni punti fossero obbligati a mantenersi sopra superficie presentanti una resistenza d'attrito al loro movimento.

Da queste considerazioni si deduce che il teorema di Menabrea, detto anche *principio di elasticità* o *teorema del minimo lavoro*, in relazione alle applicazioni, che se ne fanno nella scienza delle costruzioni, sarebbe più convenientemente enunciato nel modo seguente: *In un corpo elastico od in un sistema di corpi elastici mantenuto in equilibrio sotto l'influenza di forze esterne e di reazioni incognite prodotte da vincoli o legami invariabili imposti al sistema, le derivate prime del lavoro di deformazione espresso in funzione di tutte le forze note ed incognite prese rispetto alle reazioni incognite debbono essere uguali*

(*) Canevazzi, *Sulla teoria dell'equilibrio delle travature*, 1886.

allo zero. — Volendo conservare a questo teorema la forma prima data da MENABREA e CASTIGLIANO, essa non avrà grande influenza nelle applicazioni, poichè se anche non si tratta realmente d'un minimo di tutta l'energia, nel caso dell'equilibrio le derivate prime della medesima debbono sempre essere uguali allo zero; è però indispensabile assicurarsi ogni volta che le reazioni incognite corrispondano realmente a vincoli invariabili e non producano lavoro esterno.

Il professore DONATI in una recentissima pubblicazione (*) osserva che se le reazioni incognite in un sistema elastico provengono da legami invariabili, esse non producono lavoro, quindi dovrà essere:

$$\Sigma R' r' = 0$$

$$\delta \Sigma R' r' = \Sigma R' \delta r' + \Sigma r' \delta R' = 0.$$

Il sistema essendo in equilibrio e le reazioni non producendo lavoro, $\Sigma R' \delta r' = 0$, quindi si verificherà anche $\Sigma r' \delta R' = 0$. In causa del teorema relativo alle derivate del lavoro di deformazione $r' = \frac{d\Gamma}{dR'}$ e la reazione precedente diventa

$$\Sigma \frac{d\Gamma}{dR'} \delta R' = 0$$

dalla quale si ricava come conseguenza il teorema superiormente enunciato. Se si prende in esame la formola

$$\delta L - \delta U = \delta (L + I) = 0$$

e si considerano quelle variazioni per le qnali $\delta U = -\delta I = 0$ essa si trasforma nella $\delta L = \delta \Gamma = 0$ ossia

$$\Sigma \frac{d\Gamma}{dR} \delta R + \Sigma \frac{d\Gamma}{dR'} \delta R' = 0$$

dalla quale si conclude facilmente che il lavoro L nello stato di equilibrio stabile sarà un minimo rispetto ad ogni stato vicino, che corrisponda ad una variazione delle forze sviluppate dai gami o vincoli invariabili del sistema rimanendo invariate le forze attive, ed il valore delle resistenze stesse sarà determinato dalla condizione di rendere un minimo il lavoro di deformazione,

(*) DONATI, *Il lavoro di deformazione nei sistemi elastici*, 1888.

cioè si conclude con facilità ad una condizione di minimo relativo o condizionato come precedentemente.

L'esame delle due formole:

$$\delta(L+I)=0 \qquad \delta(\Gamma+I)=0$$

conduce alle seguenti conclusioni:

Se le forze esterne hanno un valor nullo le due condizioni superiori si riducono $\delta L=0$ $\delta\Gamma=0$ ed in tal caso l'energia elastica o lavoro di deformazione deve realmente essere un minimo. Trattandosi di una quantità essenzialmente positiva potrebbe intendersi che dovesse essere $L=0$ ed il corpo ridursi allo stato naturale: ciò sarà vero tutte le volte che fra le diverse parti del sistema non esista alcun legame e che esse possano deformarsi liberamente; ma se il sistema presenta delle connessioni fra le sue parti (per esempio un sistema di barre di lunghezza data riunite in modi determinati) allora può avvenire che ogni singola parte sia impedita di ritornare allo stato naturale, e che tutto il sistema presenti una certa energia L_0, la quale in causa della relazione $\delta L=0$ dovrà essere un minimo, perchè corrispondente in via generale ad uno stato di equilibrio stabile, ed in base a questa condizione potranno essere determinati gli spostamenti dei diversi punti e le reazioni dei vincoli. Se delle forze esterne vengono ad agire sul corpo, queste produrranno lo sviluppo di una nuova energia elastica, che verrà a sommarsi alla precedente; nell'applicazione però dei teoremi relativi alle derivate del lavoro di deformazione si potrà riguardare L_0 come una qnantità costante, essa non avrà influenza sul risultato e si potrà, come si usa ordinariamente, prescindere dall'esistenza di una energia iniziale L_0 insita al sistema, dovuta alle sue connessioni interne; di questa energia non si dovrà tener conto in generale che quando si vogliono determinare le reazioni prodotte in causa dei vincoli intimi, che stabiliscono il sistema stesso.

Se tutte le forze esterne sono date, supponendo applicate forze di intensità zero nei punti, sui quali non agisce forza alcuna (in un calcolo algebrico dovranno quindi tutte le forze applicate ad ogni punto essere rappresentate con simboli speciali) allora in causa delle relazioni lineari, che passano fra le forze, che mantengono in equilibro un corpo elastico e le deformazioni dei punti, cui esse sono applicate, quest'ultime sono tutte determinate in modo unico e così pure riescono determinate le funzioni L ed Γ. Tutti i valori delle forze e delle deformazioni essendo determinati non sembra che in questo caso si possa parlare di minimo a meno

che non si prendano in considerazione variazioni ideali ed incompatibili col concetto di deformazione del corpo nel suo insieme, cioè che non soddisfano alle equazioni (33) e (34) del numero 29. In quest'ultima ipotesi non si considera più tutto il sistema colla propria compagine, ma le singole parti di esso si riguardano come sciolte, il lavoro di deformazione non rappresenta più un'energia dovuta alla deformazione del corpo soggetto alle connessioni, che lo caratterizzano, ma semplicemente una somma (od integrale) computata idealmente (*) pei diversi elementi considerati come indipendenti, ed allora il teorema del minimo lavoro (teorema di MENABREA, principio di elasticità) può essere enunciato nel modo seguente: *in un corpo od in un sistema di corpi elastici in equilibrio sotto l'influenza di forze esterne note hanno luogo spostamenti tali che il lavoro di deformazione riesce un minimo rispetto a qualsiasi altro sistema di piccoli spostamenti (non compatibili), pei quali rimanga invariato in ogni punto il valore delle azioni elastiche risultanti uguali e contrarie alle forze, sotto l'influenza delle quali i punti stessi debbono rimanere in equilibrio.*

Se finalmente fra le forze, che si suppongono agire sul corpo, alcune sono determinate ed altre no, allora si possono realmente considerare diversi sistemi di spostamenti e di forze corrispondenti compatibili, basta limitarsi a considerare queste variazioni e per l'equilibrio dovranno verificarsi le due relazioni equivalenti

$$\delta L - \delta U = \delta (L + I) = 0$$

$$\delta \Gamma - \delta U = \delta (\Gamma + I) = 0$$

che accennano ordinariamente ad una condizione di minimo, in base alla quale le quantità incognite potranno essere determinate. Nei problemi che si presentano all'ingegnere frequentemente si incontra questo caso (*Travature ad arco, travature continue, travature reticolari o combinate, ecc...*) ed è in queste condizioni che spesso torna utile l'applicazione del teorema di MENABREA.

Dalle cose dette superiormente appare come il teorema di MENABREA sia incluso e venga in certo qual modo a coincidere col teorema del potenziale (**). La forma particolare del suo enunciato dipende dall'applicazione speciale del predetto teorema generale all'equilibrio dei sistemi elastici assoggettati a vincoli invariabili.

41. Relazioni fra il lavoro di deformazione e quello prodotto dalle forze esterne. Vibrazioni. — *Se sopra un corpo elastico agiscono forze*

(*) DONATI, Memoria citata.

(**) CERRUTI, Opera citata.

esterne R *costanti in intensità, direzione e senso, il lavoro di deformazione corrispondente alla posizione di equilibrio è la metà del lavoro delle forze esterne.*

Sia L il lavoro di deformazione in funzione delle deformazioni, si è già osservato (Num. 13) che

$$L=\frac{1}{2}\Sigma\frac{dL}{dr}r=\frac{1}{2}\Sigma Rr \qquad (61).$$

Le forze esterne essendo costanti in intensità direzione e senso il lavoro U fatto dalle medesime sarà misurato dal prodotto di ciascuna di esse per lo spostamento r corrispondente (*)

$$U=\Sigma Rr \qquad (62)$$

confrontando la (61) colla (62) si ricava

$$L=\frac{1}{2}\Sigma\frac{dL}{dr}r=\frac{1}{2}\Sigma Rr=\frac{1}{2}U. \qquad \text{c. d. d.}$$

Al numero 6 si è dimostrato che la forza viva T è uguale alla differenza fra il lavoro motore U ed il lavoro resistente L quindi

$$T=U-L=U-\frac{1}{2}U=\frac{1}{2}U$$

cioè quando il corpo sarà arrivato alla posizione d'equilibrio le sue molecole saranno animate da un'energia di movimento, che per tutto il sistema è uguale alla metà del lavoro fatto dalle forze esterne, quindi non si potranno arrestare, ma continueranno nel loro movimento finchè arriveranno ad una posizione tale, che sia $T'=0$ ossia che sia estinta tutta la forza viva del sistema. Perchè sia $T'=0$ dovrà verificarsi:

$$\frac{1}{2}\Sigma\frac{dL}{dr}r=\Sigma Rr$$

i valori di r sono i medesimi in entrambe le sommatorie e l'eguaglianza dovrà sempre verificarsi qualunque siano i valori di R ed i punti considerati, quindi

$$\frac{dL}{dr}=2R$$

(*) È quasi inutile avvertire che r rappresenta lo spostamento proiettato nella direzione della forza.

ossia la forza elastica sarà doppia della forza esterna e quindi anche lo spostamento, a cui essa è proporzionale, sarà doppio dello spostamento corrispondente allo stato di equilibrio. (Vedi numero 13, dove questa stessa proprietà è stata dimostrata in altro modo).

Quando le molecole del corpo elastico saranno arrivate alla posizione in cui $T=0$ esse non potranno mantenersi in equilibrio ed inizieranno un movimento retrogrado pel quale T passerà in senso inverso per i valori precedenti ed oscilleranno intorno alla posizione d'equilibrio senza potervisi mai arrestare, se cause esterne (resistenze dei mezzi, attrito ecc...) non vengono ad assorbire la sua energia. Questa proprietà dei corpi elastici è causa del *fenomeno delle vibrazioni*, importantissimo nello studio della fisica in genere ed in modo particolare nella scienza delle costruzioni, dove ha grandissima importanza per determinare le condizioni di stabilità e resistenza delle diverse opere eseguite od in progetto.

42. Lavoro di deformazione del parallelepipedo elementare. — Consideriamo in un corpo elastico due punti vicini m ed m' originariamente distanti r e che per effetto della deformazione si allontanano o si avvicinano di una quantità $\rho=ri_r$, la forza elastica f dovendo essere proporzionale allo spostamento (Num. 35) sarà $f=\varepsilon\rho$ in cui ε esprime una costante di proporzionalità ed il lavoro l di deformazione sarà dato da (Vedi CASTIGLIANO, *Théorie de l'équilibre des systhèmes élastiques)*

$$l=\int_0^{ri_r} f\,d\rho=\int_0^{ri_r}\varepsilon\rho\,d\rho=\left[\frac{1}{2}\varepsilon\rho^2\right]_0^{ri_r}=\frac{\varepsilon r^2}{2}i_r^2\,.$$

Questa espressione del lavoro di deformazione poteva esser scritta anche *a priori*, poichè al numero 35 si è dimostrato che il lavoro di deformazione deve essere una funzione omogenea di secondo grado della deformazione senza termine indipendente; indicando con Π un coefficiente da determinarsi, $l=\Pi i^2_r$. Se si immagina (*Fig.* 21ª, *tav.* III) un parallelepipedo trirettangolo infinitamente piccolo ed una terna di assi avente l'origine nel centro di figura del parallelepipedo e paralleli ai lati del medesimo, se nell'interno di questo elemento di volume si considerano due punti vicini m ed m' di coordinate rispettivamente (x,y,z) ed (x',y',z') e si indicano con α,β,γ gli angoli che l'elemento lineare $mm'=r$ fa cogli assi delle x, delle y e delle z

$$\cos\alpha=\frac{x'-x}{r}=\frac{\Delta x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y'-y}{r}=\frac{\Delta y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z'-z}{r}=\frac{\Delta z}{r}$$

ed il lavoro l potrà essere espresso nel modo seguente:

$$l=\frac{\varepsilon r^2}{2}i^2_r=\frac{\varepsilon r^2}{2}[i_x\cos^2\alpha+i_y\cos^2\beta+i_z\cos^2\gamma+g_{xy}\cos\alpha\cos\beta+$$
$$+g_{xz}\cos\alpha\cos\gamma+g_{yz}\cos\beta\cos\gamma]^2=\frac{\varepsilon}{2r^2}[i_x\Delta^2x+ \tag{63}$$
$$+i_y\Delta^2y+i_z\Delta^2z+g_{xy}\Delta x\Delta y+g_{xz}\Delta x\Delta z+g_{yz}\Delta y\Delta z]^2$$

se si considerano tutte le coppie di punti analoghi ad m, m' e si rappresenta con I il lavoro di deformazione di tutto il parallelepipedo elementare riferito all'unità di volume

$$I=\frac{\Sigma l}{dxdydz}=\frac{1}{2}\Big[i_x\Sigma\frac{\sqrt{\varepsilon}}{r}\Delta^2x+i_y\Sigma\frac{\sqrt{\varepsilon}}{r}\Delta^2y+i_z\Sigma\frac{\sqrt{\varepsilon}}{r}\Delta^2z+$$
$$+g_{xy}\Sigma\frac{\sqrt{\varepsilon}}{r}\Delta x\Delta y+g_{xz}\Sigma\frac{\sqrt{\varepsilon}}{r}\Delta x\Delta z+g_{yz}\Sigma\frac{\sqrt{\varepsilon}}{r}\Delta y\Delta z\Big]^2=$$
$$=\frac{1}{2}\Big[i^2_x\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4x+i^2_y\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4y+i^2_z\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4z+g^2_{xy}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2x\Delta^2y+$$
$$+g^2_{xz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2x\Delta^2z+g^2_{yz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2y\Delta^2z+2i_xi_y\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2x\Delta^2y+$$
$$+2i_xi_z\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2x\Delta^2z+2i_yi_z\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2y\Delta^2z+2g_{xy}g_{xz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2x\Delta y\Delta z+ \tag{64}$$
$$+2g_{xy}g_{yz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta x\Delta^2y\Delta z+2g_{xz}g_{yz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta x\Delta y\Delta^2z+$$
$$+2i_xg_{xy}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^3x\Delta y+2i_xg_{xz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^3x\Delta z+2i_xg_{yz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2x\Delta y\Delta z+$$
$$+2i_yg_{xy}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta x\Delta^3y+2i_yg_{xz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta x\Delta^2y\Delta z+2i_yg_{yz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta y^3\Delta z+$$
$$+2i_zg_{xy}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta x\Delta y\Delta^2z+2i_zg_{xz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta x\Delta^3z+2i_zg_{yz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta y\Delta^3z\Big](*)$$

(*) Per brevità si è scritto $\Delta^k x$, $\Delta^k y$, $\Delta^k z$ invece di $(\Delta x)^k$, $(\Delta y)^k$, $(\Delta z)^k$.

Questa formola dà il lavoro di deformazione unitario corrispondente all'elemento di volume di un corpo, qualunque sia la sua composizione molecolare; essa consta di 21 termini, ma dei 21 coefficienti 15 soltanto sono realmente diversi, poichè dodici fra essi sono uguali due a due. Se pel centro di figura di ogni elemento di volume del corpo si può condurre una retta parallela ad una direzione fissa, per esempio l'asse delle x, in guisa che ogni piano passante per quella retta presenti la medesima composizione molecolare, allora dicesi che il corpo presenta un'asse di simmetria o di elasticità, Δy è uguale a Δz e tutte le Σ che contengono Δy o Δz ad una potenza dispari si annullano, perchè ad ogni valore positivo ne corrisponde un altro uguale e negativo; quindi

$$\left.\begin{aligned} I=\frac{1}{2}\Big[& i_x^2\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4 x+i_y^2\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4 y+i_z^2\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4 z+g^2_{xy}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 x\Delta^2 y+ \\ & +g^2_{xz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 x\Delta^2 z+g^2_{yz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 y\Delta^2 z+2i_x i_y\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 x\Delta^2 y+ \\ & +2i_x i_z\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 x\Delta^2 z+2i_y i_z\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 y\Delta^2 z\Big] \end{aligned}\right\} \quad (65)$$

espressione, che contiene soltanto quattro coefficienti realmente diversi.

Finalmente se si suppone che il corpo sia omogeneo e di elasticità costante od isotropo, cioè tale che una linea retta di lunghezza data intersechi un ugual numero di sistemi molecolari qualunque sia la sua direzione, che è quanto dire che esso abbia in tutti i sensi la stessa composizione molecolare, allora tutti i termini, che contengono le potenze dispari di $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ si annullano, perchè nelle Σ ad ogni valore positivo di Δx, Δy, Δz, ne corrisponde un altro uguale e negativo, inoltre $\Delta x=\Delta y=\Delta z$, quindi:

$$\left.\begin{aligned} I=\frac{1}{2}\Big[& i_x^2\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 x+i_y^2\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta y^2+i_z^2\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 z+g^2_{xy}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 x\Delta^2 y+ \\ & +g^2_{xz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 x\Delta^2 z+g^2_{yz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 y\Delta^2 z+2i_x i_y\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 x\Delta^2 y+ \\ & +2i_x i_z\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 x\Delta^2 z+2i_y i_z\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 y\Delta^2 z\Big] \end{aligned}\right\} \quad (66)$$

e ponendo

$$A=\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4 x=\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4 y=\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4 z,$$

$$G=\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta x^2\Delta y^2=\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 x\,\Delta^2 z=\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2 y\,\Delta^2 z$$

risulta

$$\left.\begin{aligned} I=\frac{1}{2}[&A i^2_x+A i^2_y+A i^2_z+2Gi_x i_y+2Gi_x i_z+2Gi_y i_z+\\ &+g^2_{xy}G+g^2_{xz}G+g^2_{yz}G] \end{aligned}\right\}\quad(67)$$

e quindi il lavoro di deformazione di tutto il sistema per un corpo isotropo sarà dato da:

$$\left.\begin{aligned} L=\frac{1}{2}\int[&A i^2_x+A i^2_y+A i^2_z+2Gi_x i_y+2Gi_x i_z+2Gi_y i_z+\\ &+Gg^2_{xy}+Gg^2_{xz}+Gg^2_{yz}]dx\,dy\,dz \end{aligned}\right\}\quad(68).$$

L'espressione generale del lavoro di deformazione (64) di un parallelepipedo elementare contiene 15 coefficienti realmente diversi: alcuni fisici partendo dal principio che il lavoro di deformazione deve essere una funzione di secondo grado delle deformazioni (Num. 35), hanno assunto per sua espressione una funzione omogenea delle sei quantità i_x, i_y, i_z, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz} e per conseguenza a 21 coefficienti indipendenti invece di 15. Non è il caso di richiamare le dotte ed accurate osservazioni del Barré de Saint-Venant (*) per dimostrare che i coefficienti si riducono sempre a 15 realmente diversi fra loro, perchè 12 sono uguali due a due, nè sembra conveniente entrare in questa discussione, poichè tale maggior generalità od indeterminazione del problema non è in modo alcuno necessaria per trattare le questioni relative alla resistenza dei materiali, anzi in generale basta considerare il caso particolare dei corpi isotropi o tutt'al più quello dei corpi aventi un asse di simmetria. Infatti all'ingegnere nell'esercizio della sua professione occorrono formole semplici e facilmente calcolabili, esso non ha bisogno di un'esattezza matematica ed assoluta, ma piuttosto di una precisione relativa ai mezzi di misura, ai coefficienti che impiega, alle circostanze ecc., per cui spesso si trascurano gli elementi, che avreb-

(*) Navier, Opera citata.

bero un'influenza secondaria collo scopo di arrivare a formole, che possano servire nella pratica: le espressioni algebriche soverchiamente complesse ben difficilmente potrebbero introdursi nell'uso generale. Se si considera che nella teoria della resistenza dei materiali si è forzati ad accettare alcune ipotesi più o meno approssimate relativamente alla forma delle deformazioni, che i coefficienti numerici sono determinati in base alle medie di numerose esperienze fatte bensì su corpi della stessa natura, ma non matematicamente uguali, e finalmente che i corpi in uso nelle costruzioni sono più specialmente i metalli, i legnami e le pietre naturali od artificiali, pei quali la composizione molecolare varia sempre leggermente da punto a punto, risulta evidente che per una prima approssimazione questi corpi si possono considerare come isotropi e soltanto per una maggior esattezza si potrà supporre una struttura tale, che ammetta un asse di simmetria, pei solidi a composizione molecolare fibrosa: ordinariamente è la prima ipotesi quella a cui si attengono gli ingegneri.

43. Espressione delle forze elastiche in funzione delle deformazioni. — Rappresenti $A\,B\,C\,D$ (*Fig.* 21ª, *tav.* III) la sezione fatta dal piano xy nel parallelepipedo elementare considerato al numero precedente. Al numero 36 è stato dimostrato che le derivate del lavoro di deformazione dànno le forze, che mantengono in equilibrio il corpo, quindi per avere le espressioni delle forze unitarie p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy}, p_{xz}, p_{yz} che mantengono in equilibrio il parallelepipedo (Num. 15) basterà derivare la formola (64), che dà il lavoro di deformazione rispetto alle deformazioni i_x, i_y, i_z, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz}, che possono avvenire nel parallelepipedo stesso. Nell'ipotesi che il corpo sia isotropo il lavoro di deformazione riferito all'unità di volume è dato da:

$$I=\frac{1}{2}[A i^2_x+A i^2_y+A i^2_z+2G i_x i_y+2G i_x i_z+2G i_y i_z+$$
$$+Gg^2_{xy}+Gg^2_{xz}+Gg^2_{yz}]$$

e derivando rispetto alle i_x, i_y, ecc., si ottengono le forze unitarie p_{xx}, p_{xy}, etc.

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}&=\frac{dI}{di_x}=Ai_x+Gi_y+Gi_z, & p_{xy}&=\frac{dI}{dg_{xy}}=Gg_{xy}\\ p_{yy}&=\frac{dI}{di_y}=Ai_y+Gi_z+Gi_x, & p_{xz}&=\frac{dI}{dg_{xz}}=Gg_{xz}\\ p_{zz}&=\frac{dI}{di_z}=Ai_z+Gi_x+Gi_y, & p_{yz}&=\frac{dI}{dg_{yz}}=Gg_{yz} \end{aligned}\right\} (69).$$

Se invece il corpo si suppone avere un asse di simmetria allora l'espressione del lavoro è la (65) e le forze elastiche prendono i valori seguenti:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}&=\frac{dI}{di_x}=i_x\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4x+i_y\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2x\Delta^2y+i_z\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2x\Delta^2z\\ p_{xy}&=\frac{dI}{dg_{xy}}=g_{xy}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2x\Delta^2y\\ p_{yy}&=\frac{dI}{di_y}=i_y\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4y+i_z\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2y\Delta^2z+i_x\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2x\Delta^2y\\ p_{xz}&=\frac{dI}{dg_{xz}}=g_{xz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2x\Delta^2z\\ p_{zz}&=\frac{dI}{di_z}=i_z\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4z+i_x\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2x\Delta^2z+i_y\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2y\Delta^2z\\ p_{yz}&=\frac{dI}{dg_{yz}}=g_{yz}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2y^2\Delta z. \end{aligned}\right\}\quad(70).$$

È importante osservare che fra i coefficienti A e G nel caso dei corpi isotropi passa una relazione facilmente determinabile: infatti per l'origine O degli assi (*Fig.* 21ª, *tav.* III) si conduca una retta Ox', che faccia coll'asse delle x e delle y un angolo di 45 gradi e si indichi con $\Delta x'=nn'$ la proiezione sull'asse OX' della distanza mm' fra due punti materiali o molecole del corpo, allora

$$\Delta x'=\Delta x\sqrt{\frac{1}{2}}+\Delta y\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta x'^4=\frac{1}{4}[\Delta^4x+4\Delta^3x\Delta y+6\Delta^2x\Delta^2y+4\Delta x\Delta^3y+\Delta^4y]$$

e quindi

$$\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4x'=\frac{1}{4}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4x+\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^3x\Delta y+\frac{6}{4}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^2x\Delta^2y+$$

$$+\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta x\Delta^3y+\frac{1}{4}\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4y.$$

Il corpo essendo isotropo cioè di uguale composizione in tutti i sensi

$$\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4x'=\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4x=\Sigma\frac{\varepsilon}{r^2}\Delta^4y=A$$

$$\Sigma \frac{\varepsilon}{r^2} \Delta^3 x \Delta y = 0 \qquad \Sigma \frac{\varepsilon}{r^2} \Delta x \Delta^3 y = 0$$

$$\Sigma \frac{\varepsilon}{r^2} \Delta^2 x \Delta^2 y = G$$

e la formola precedente diventa:

$$A = \frac{1}{4} A + \frac{6}{4} G + \frac{1}{4} A$$

ossia

$$A = 3\,G \tag{71}$$

Questa dimostrazione riposa sulla supposizione che il valore dei coefficienti A e G dipenda dalla composizione molecolare del corpo; essa non reggerebbe più qualora si fosse partito dal teorema che il lavoro di deformazione deve essere una funzione omogenea di secondo grado delle deformazioni elementari e non dalla considerazione del lavoro corrispondente ad una coppia di molecole, esteso in seguito a tutte le coppie molecolari, che entrano a formare il parallelepipedo elementare. Anche in questa ipotesi più generale si può però dimostrare la relazione che passa fra A e G. (Vedi l'osservazione in fine del numero seguente).

44. Espressione delle forze elastiche principali. Espressione delle forze elastiche in funzione della dilatazione cubica e delle dilatazioni. — Le formole che dànno le forze elastiche unitarie in funzione delle deformazioni sono pei corpi isotropi

$$\begin{aligned} p_{xx} &= A i_x + G i_y + G i_z & p_{xy} &= G g_{xy} \\ p_{yy} &= G i_x + A i_y + G i_z & p_{xz} &= G g_{xz} \\ p_{zz} &= G i_x + G i_y + A i_z & p_{yz} &= G g_{yz} \end{aligned}$$

se da queste equazioni si ricavano i valori delle deformazioni in funzione delle forze, che agiscono sulle faccie del parallelepipedo elementare, si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} i_x &= \frac{a}{D} p_{xx} - \frac{b}{D} p_{yy} - \frac{b}{D} p_{zz} & g_{xy} &= \frac{p_{xy}}{G} \\ i_y &= -\frac{b}{D} p_{xx} + \frac{a}{D} p_{yy} - \frac{b}{D} p_{zz} & g_{xz} &= \frac{p_{xz}}{G} \\ i_z &= -\frac{b}{D} p_{xx} - \frac{b}{D} p_{yy} + \frac{a}{D} p_{zz} & g_{yz} &= \frac{p_{yz}}{G} \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

in cui è (*)

$$a=A^2-G^2 \qquad b=AG-G^2 \qquad D=A^3-3AG^2+2G^3$$

se si pone

$$\frac{a}{D}=\frac{A^2-G^2}{A^3-3AG^2+2G^2}=\frac{A+G}{A^2+AG-2G^2}=\frac{1}{E}$$

$$\frac{b}{D}=\frac{AG-G^2}{A^3-3AG^2+2G^3}=\frac{G}{A^2+AG-2G^2}=\frac{1}{C}=\frac{1}{mE}$$

le equazioni superiori prendono la forma seguente:

$$\left.\begin{aligned} i_x&=\frac{p_{xx}}{E}-\frac{p_{yy}}{C}-\frac{p_{zz}}{C}=\frac{p_{xx}}{E}-\frac{p_{yy}}{mE}-\frac{p_{zz}}{mE} \qquad g_{xy}=\frac{p_{xy}}{G}\\ i_y&=-\frac{p_{xx}}{C}+\frac{p_{yy}}{E}-\frac{p_{zz}}{C}=-\frac{p_{xx}}{mE}+\frac{p_{yy}}{E}-\frac{p_{zz}}{mE} \qquad g_{xz}=\frac{p_{xz}}{G}\\ i_z&=-\frac{p_{xx}}{C}-\frac{p_{yy}}{C}+\frac{p_{zz}}{E}=-\frac{p_{xx}}{mE}-\frac{p_{yy}}{mE}+\frac{p_{zz}}{E} \qquad g_{yz}=\frac{p_{yz}}{G}\end{aligned}\right\} \quad (73).$$

E esprime il rapporto fra una delle forze dirette p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} e la corrispondente deformazione, quando le altre due forze aventi direzione perpendicolare alla prima considerata sono nulle, e porta il nome di *modulo di elasticità.*

G esprime il rapporto fra gli scorrimenti e le forze tangenziali; esso dicesi *coefficiente di elasticità trasversale.*

C esprime il rapporto fra una delle forze dirette p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, e gli allungamenti e gli accorciamenti in senso ad essa normale quando le altre due hanno un valor zero, esso suolsi indicare col nome di *coefficiente di elasticità laterale.*

m esprime il rapporto dell'allungamento od accorciamento secondo una delle forze dirette p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} alle deformazioni, che avvengono in senso ad essa normale, quando le altre due forze dirette sono nulle. Se $p_{yy}=p_{zz}=0$ dividendo la prima delle equaquazioni (73) per la seconda e per la terza si ottiene:

$$\frac{i_x}{i_y}=\frac{i_x}{i_z}=-\frac{\frac{p_{xx}}{E}}{\frac{p_{xx}}{mE}}=-m$$

(*) Rankine, *A Manual of applied mechanic*, pag. 278.

dalla relazione $C=mE$ si ricava che

$$m=\frac{A^2+AG-2G^2}{G}\times\frac{A+G}{A^2+AG-2G^2}=\frac{A+G}{G} \qquad (74)$$

ossia

$$A=(m-1)G \qquad (74\ ^{bis}).$$

Nel caso dei corpi solidi A e G sono necessariamente positivi perchè il lavoro di deformazione per piccolissimi spostamenti dei punti materiali, che compongono il corpo deve essere una quantità positiva, quindi m, pei corpi, che s'impiegano nelle costruzioni, ha un valore positivo, cioè ad un allungamento in un senso corrispondono accorciamenti in senso normale e viceversa; in causa di questa proprietà m porta il nome di *indice* o *coefficiente di contrattibilità laterale.*

Se si prendono in considerazione le formole (69) e (73) esse sono tutte senza termine indipendente e lineari, le prime rispetto alle deformazioni, le seconde rispetto alle forze elastiche, quindi *nella teoria dell'equilibrio dei corpi elastici vale il principio della sovrapposizione degli effetti.* (Come si è già dimostrato al numero 36).

Nei corpi isotropi le direzioni delle deformazioni principali ε_1, ε_2, ε_3 *coincidono con quelle delle forze principali* σ_1, σ_2, σ_3; infatti le deformazioni tangenziali essendo direttamente proporzionali agli sforzi trasversali, se $p_{xy}=p_{xz}=p_{yz}=0$, sarà pure $g_{xy}=g_{xz}=g_{yz}=0$, cioè le forze tangenziali si annullano contemporaneamente agli scorrimenti, che è appunto la condizione necessaria e sufficiente perchè si verifichi il teorema enunciato. Se nelle (73) ad i_x, i_y, i_z si sostituiscono ordinatamente ε_1, ε_2, ε_3, a p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, σ_1, σ_2, σ_3 e si fa $p_{xy}=p_{xz}=p_{yz}=0$, $g_{xy}=g_{xz}=g_{yz}=0$ si ottengono le formole seguenti:

$$\left.\begin{aligned} E\varepsilon_1&=\sigma_1-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{m} \qquad E\varepsilon_2=\sigma_2-\frac{\sigma_3+\sigma_1}{m}\\ E\varepsilon_3&=\sigma_3-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{m}\end{aligned}\right\} \qquad (75)$$

che legano le deformazioni e le forze elastiche principali nell'interno di un corpo isotropo deformato. Se nel determinare il lavoro di deformazione del parallelepipedo elementare si è partito dal concetto di considerarlo come l'insieme dei lavori dovuti alle coppie di punti materiali che lo compongono, i coefficienti A e G dipen-

dono necessariamente dalla costituzione molecolare del corpo e si è dimostrato che pei sistemi isotropi $A=3G$; se nella (74) si sostituisce ad A il suo valore, si ricava

$$m=\frac{A+G}{G}=\frac{3G+G}{G}=4 \qquad (76).$$

Osservazione. — Il valore di m può essere determinato indipendentemente dalla relazione $A=3G$: infatti dalla (74) si ricava $A=(m-1)G$ e sostituendo questo valore di A nella espressione di E si ottiene

$$\frac{E}{G}=\frac{(m-1)^2+(m-1)-2}{m} \qquad (77).$$

Nella teoria delle deformazioni infinitamente piccole dei corpi si dimostra che, quando ad un elemento piano passante per un punto corrisponde un solo scorrimento g, una delle dilatazioni principali ε_3 è uguale a zero, e le altre due sono rispettivamente:

$$\varepsilon_1=\frac{g}{2} \qquad \varepsilon_2=-\frac{g}{2}.$$

Analogamente nella teoria dell'equilibrio molecolare si dimostra che se sopra un elemento piano agisce soltanto uno sforzo tangenziale p_t una delle forze principali σ_3 è nulla e le altre due sono

$$\sigma_1=p_t \qquad \sigma_2=-p_t$$

se questi valori si sostituiscono nella prima delle (75)

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma_1}{E}-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{mE}$$

si ottiene:

$$\frac{g}{2}=\frac{p_t}{E}-\frac{-p_t}{mE}=\frac{m+1}{mE}p_t$$

ma gli scorrimenti sono direttamente proporzionali alle forze tangenziali, quindi $g=\frac{p_t}{G}$ e la formola superiore diventa (*)

$$\frac{p_t}{2G}=\frac{m+1}{mE}p_t \text{ od anche } \frac{E}{G}=\frac{2(m+1)}{m} \qquad (78)$$

(*) Grashof, Opera citata.

confrontando fra loro i due valori (77) e (78) del rapporto $\frac{E}{G}$ si ricava

$$\frac{2(m+1)}{m}=\frac{(m+1)^2+(m-1)-2}{m} \tag{79}$$

se si toglie il fattore comune $\frac{1}{m}$ resta l'equazione di secondo grado

$$2(m+1)=(m-1)^2+(m-1)-2$$

che ha per radici

$$m_1=4 \qquad m_2=-1.$$

La prima radice corrisponde al caso dei corpi solidi poichè per essi A e G sono necessariamente positivi ed m deve soddisfare alla relazione $m=\frac{A+G}{G}$. La seconda invece corrisponde al caso dei corpi gazosi, nei quali appunto le deformazioni sono uguali in tutti i sensi (in un gas perfetto per un aumento di volume la densità varia uniformemente in tutti i suoi punti ed in tutte le direzioni) (*). Da queste considerazioni risulta che se si scrive l'espressione del lavoro di deformazione del parallelepipedo elementare indipendentemente dalla sua composizione molecolare, riferendosi soltanto al teorema (Num. 35) che esso deve essere una funzione omogenea di secondo grado delle deformazioni, i due coefficienti A e G nei corpi isotropi hanno fra loro una relazione semplice e precisamente

$$A=(m-1)G=3G$$

come si è già trovato antecedentemente nell'ipotesi che i valori di A e di G dipendano dalla composizione molecolare del corpo.

45. Espressione delle forze elastiche principali. Espressione delle forze elastiche in funzione della dilatazione cubica e delle dilatazioni. — Interessa qualche volta di avere le espressioni delle forze dirette p_{xx}, p_{yy},

(*) L'equazione (79) ha per terza radice lo zero; volendo dare un significato fisico a questa soluzione, essa corrisponde al caso dell'equilibrio indifferente, ossia dei liquidi.

p_{zz}, in funzione della corrispondente dilatazione e dell'aumento unitario di volume $e = i_x + i_y + i_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Riprendiamo le (75) (*)

$$E\varepsilon_1 = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{m}$$

$$E\varepsilon_2 = \sigma_2 - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{m}$$

$$E\varepsilon_3 = \sigma_3 - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{m}.$$

Sommando si ottiene

$$E(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = Ee = \frac{m-2}{m}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

d'altra parte

$$mE\varepsilon_1 = m\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$$

sommando e risolvendo rispetto a σ_1

$$\sigma_1 = \frac{m}{m+1} E\left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2}\right)$$

e sostituendo ad E il suo valore dato dalla (78)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= 2G\left(\varepsilon_1 + \frac{e}{m-2}\right) \\ \text{ed analogamente} \\ \sigma_2 &= 2G\left(\varepsilon_2 + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_3 &= 2G\left(\varepsilon_3 + \frac{e}{m-2}\right) \end{aligned}\right\} (80).$$

Supponiamo presi gli assi secondo le direzioni principali ed indichiamo con α, β, γ, gli angoli, che la normale ad un elemento piano qualsiasi fa cogli assi coordinati, sia σ la componente della forza elastica corrispondente all'elemento preso secondo questa normale, i la deformazione contata nello stesso senso; la teoria

(*) Lamè e Grashof, Opere citate.

dell'equilibrio molecolare e delle deformazioni infinitamente piccole dei corpi dà

$$i=\varepsilon_1\cos^2\alpha+\varepsilon_2\cos^2\beta+\varepsilon_3\cos^2\gamma\,,\quad \sigma=\sigma_1\cos^2\alpha+\sigma_2\cos^2\beta+\sigma_3\cos^2\gamma \tag{81}$$

si moltiplichino le (80) ordinatamente per $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$ e si sommino

$$\sigma_1\cos^2\alpha+\sigma_2\cos^2\beta+\sigma_3\cos^2\gamma=$$

$$=2G\left(\varepsilon_1\cos^2\alpha+\varepsilon_2\cos^2\beta+\varepsilon_3\cos^2\gamma+\frac{e}{m-2}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\right)$$

ricordando che $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, in causa delle (81) l'equazione precedente diventa:

$$\sigma=2G\left(i+\frac{e}{m-2}\right).$$

Se σ ed i si fanno successivamente uguali a p_{xx} ed i_x, p_{yy} ed i_y, p_{zz} ed i_z, si ottengono le equazioni cercate:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}&=2G\left(i_x+\frac{e}{m-2}\right)\\ p_{yy}&=2G\left(i_y+\frac{e}{m-2}\right)\\ p_{zz}&=2G\left(i_z+\frac{e}{m-2}\right)\end{aligned}\right\}(82).$$

46. Diverse espressioni del lavoro di deformazione unitario di un parallelepipedo elementare. — La formola che dà il lavoro di deformazione di un solido elastico isotropo è

$$I=\frac{1}{2}\left(A(i_x^2+i_y^2+i_z^2)+G(g_{xy}^2+g_{xz}^2+g_{yx}^2+2i_xi_y+2i_xi_z+2i_yi_z)\right) \tag{83}$$

che può anche scriversi

$$I=\frac{1}{2}\Big(i_x(Ai_x+Gi_y+Gi_z)+i_y(Ai_y+Gi_x+Gi_z)+$$

$$+i_z(Ai_z+Gi_x+Gi_y)+g_{xy}\cdot Gg_{xy}+g_{xz}\cdot Gg_{xz}+g_{yz}\cdot Gg_{yz}\Big)$$

superiormente si è trovato (Form. 69)

$$p_{xx} = A i_x + G i_y + G i_z \qquad p_{xy} = G g_{xy}$$

$$p_{yy} = A i_y + G i_x + G i_z \qquad p_{xz} = G g_{xz}$$

$$p_{zz} = A i_z + G i_x + G i_y \qquad p_{yz} = G g_{yz}$$

tenendo conto di queste equazioni l'espressione del lavoro diventa

$$I = \frac{1}{2}\left(p_{xx} i_x + p_{yy} i_y + p_{zz} i_z + p_{xy} g_{xy} + p_{xz} g_{xz} + p_{yz} g_{yz} \right) \qquad (84).$$

Se si ricordano le formole che dànno le deformazioni in funzione delle forze elastiche (Form. 73)

$$i_x = \frac{p_{xx}}{E} - \frac{p_{yy} + p_{zz}}{mE} \qquad g_{xy} = \frac{p_{xy}}{G}$$

$$i_y = \frac{p_{yy}}{E} - \frac{p_{xx} + p_{zz}}{mE} \qquad g_{xz} = \frac{p_{xz}}{G}$$

$$i_z = \frac{p_{zz}}{E} - \frac{p_{xx} + p_{yy}}{mE} \qquad g_{yz} = \frac{p_{yz}}{G}$$

e si sostituiscono nella (79), si ottiene:

$$I = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{E}(p_{xx}^2 + p_{yy}^2 + p_{zz}^2) - \frac{2}{mE}(p_{xx}p_{yy} + p_{xx}p_{zz} + p_{yy}p_{zz}) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{G}(p_{xy}^2 + p_{xz}^2 + p_{yz}^2) \right) \qquad (85).$$

Le formole (83), (84), (85) sono tre espressioni diverse del lavoro di deformazione od energia potenziale di un corpo elastico deformato, quindi:

a) *Il lavoro di deformazione di un corpo elastico è esprimibile soltanto in funzione delle deformazioni, che esso subisce, e risulta una funzione di secondo grado di queste quantità* (Num. 35);

b) *Il lavoro di deformazione di un corpo elastico è esprimibile per mezzo delle sole forze elastiche, che si intendono agire sulle faccie dei diversi parallelepipedi elementari, in cui*

può immaginarsi decomposto il corpo, e risulta una funzione di secondo grado delle forze stesse;

c) *Il lavoro di deformazione di un corpo elastico è esprimibile in funzione delle forze e deformazioni elastiche, e precisamente è la semisomma dei prodotti, che si ottengono moltiplicando le forze elastiche per le corrispondenti deformazioni.*

Se si ricorda che il lavoro fatto da una forza costante in intensità e direzione è uguale al prodotto della forza stessa moltiplicata per il cammino percorso dal suo punto d'applicazione proiettato sulla sua direzione, è evidente che il lavoro di deformazione è la metà di quello che si avrebbe qualora le forze elastiche conservassero durante la deformazione un valore costante.

47. Il valore del lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze elastiche è indipendente dalla direzione degli assi coordinati. — *Il lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze elastiche dipende soltanto dal valore delle forze principali agenti in ogni punto, ed è quindi assolutamente indipendente dalla direzione degli assi.* Infatti l'espressione (85) del lavoro di deformazione può trasformarsi come segue:

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E}(p_{xx}^{\,2}+p_{yy}^{\,2}+p_{zz}^{\,2})-\frac{2}{mE}(p_{xx}p_{yy}+p_{xx}p_{zz}+p_{yy}p_{zz})+\frac{1}{G}(p_{xy}^{\,2}+\right.$$

$$\left.+p_{xz}^{\,2}+p_{yz}^{\,2})\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E}(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz})^2-\frac{2}{E}(p_{xx}p_{yy}+p_{xx}p_{zz}+p_{yy}p_{zz})-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{mE}(p_{xx}p_{yy}+p_{xx}p_{zz}+p_{yy}p_{zz})+\frac{1}{G}(p_{xy}^{\,2}+p_{xz}^{\,2}+p_{yz}^{\,2})\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E}(p_{xx}+\right.$$

$$\left.+p_{yy}+p_{zz})^2-\frac{2(m+1)}{mE}(p_{xx}p_{yy}+p_{xx}p_{zz}+p_{yy}p_{zz})+\frac{1}{G}(p_{xy}^{\,2}+p_{xz}^{\,2}+p_{yz}^{\,2})\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{E}(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz})^2-\frac{1}{G}(p_{xx}p_{yy}+p_{xx}p_{zz}+p_{yy}p_{zz}-p_{xy}^{\,2}-p_{xz}^{\,2}-p_{yz}^{\,2})\right).$$

Perchè $\frac{2(m+1)}{mE}=\frac{1}{G}$ (Num. 44, form. 78). Se si pone

$$F=p_{xx}+p_{yy}+p_{zz} \qquad K=p_{xx}p_{yy}+p_{xx}p_{zz}+p_{yy}p_{zz}-p_{xy}^{\,2}-p_{xz}^{\,2}-p_{yz}^{\,2}$$

si ottiene

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{F^2}{E}-\frac{K}{G}\right) \qquad (86).$$

Nella teoria dell'equilibrio molecolare (Num. 18, form. 20) si dimostra che le forze principali σ_1, σ_2, σ_3 sono le radici dell'equazione di terzo grado

$$\sigma^3-(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz})\sigma^2+(p_{xx}p_{yy}+p_{xx}p_{zz}+p_{yy}p_{zz}-p_{xy}^2-p_{xz}^2-p_{yz}^2)\sigma-$$

$$-p_{xx}p_{yy}p_{zz}+p_{xx}p_{yz}^2+p_{yy}p_{xz}^2+p_{zz}p_{xy}^2-2p_{xy}p_{xz}p_{yz}=0$$

le quantità F e K sono precisamente i coefficienti del secondo e del terzo termine dell'equazione, quindi necessariamente sono uguali il primo alla somma delle radici $F=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$ ed il secondo alla somma dei prodotti, che si ottengono moltiplicando due a due le radici, $K=\sigma_1\sigma_2+\sigma_1\sigma_3+\sigma_2\sigma_3$ qualunque siano i valori delle p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy}, p_{xz}, p_{yz}. Se si rappresenta con L il lavoro totale di deformazione

$$L=\frac{1}{2}\int_3 dx\ dy\ dz\left(\frac{F^2}{E}-\frac{K}{G}\right) \qquad (87).$$

48. Il valore del lavoro di deformazione espresso soltanto in funzione delle deformazioni è indipendente dalla direzione degli assi coordinati. — *Il lavoro di deformazione espresso in funzione delle deformazioni dipende soltanto dalle dilatazioni o condensazioni principali qualunque siano le direzioni secondo le quali le* i_x, i_y, i_z, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz} *vengono misurate.* La dimostrazione di questo teorema può farsi in modo analogo alla precedente; l'espressione del lavoro si può trasformare come segue:

$$I=\frac{1}{2}\Big(A(i_x^2+i_y^2+i_z^2)+2G(i_xi_y+i_xi_z+i_yi_z)+G(g_{xy}^2+g_{xz}^2+g_{yz}^2)\Big)=$$

$$=\frac{1}{2}\Big(A(i_x+i_y+i_z)^2-2A(i_xi_y+i_xi_z+i_yi_z)+2G(i_xi_y+i_xi_z+i_yi_z)+$$

$$+G(g_{xy}^2+g_{xz}^2+g_{yz}^2)\Big)$$

ma (Num. 45)

$$A=(m-1)G=(4-1)G=3G$$

quindi

$$I=\frac{1}{2}\Big(A(i_x+i_y+i_z)^2-G(4(i_xi_y+i_xi_z+i_yi_z)-g_{xy}^2-g_{xz}^2-g_{yz}^2)\Big)$$

se si pone

$$F_1 = i_x + i_y + i_z \qquad K_1 = 4(i_x i_y + i_x i_z + i_y i_z) - g_{xy}^2 - g_{xz}^2 - g_{yz}^2$$

$$I = \frac{1}{2}(AF_1^2 - GK_1) \qquad L = \frac{1}{2}\int_3 dx\, dy\, dz\, (AF_1^2 - GK_1) \qquad (88).$$

Nella teoria delle deformazioni infinitesime dei corpi (Num. 26, form. 30) si dimostra che le tre dilatazioni o condensazioni principali ε_1, ε_2, ε_3 sono le radici dell'equazione di terzo grado:

$$\varepsilon^3 - (i_x + i_y + i_z)\varepsilon^2 + \frac{1}{4}(4i_x i_y + i_x i_z + i_y i_z - g_{xy}^2 - g_{xz}^2 - g_{yz}^2)\varepsilon -$$

$$- \frac{1}{4}(4i_x i_y i_z - i_x g_{yz}^2 - i_y g_{xz}^2 - i_z g_{xy}^2 + g_{xy} g_{xz} g_{yz}) = 0$$

nella quale il coefficiente del secondo termine è il valore di F_1 e quello del terzo è un quarto di K_1, quindi qualunque siano le direzioni degli assi sarà sempre

$$F_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \qquad K_1 = 4(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2 \varepsilon_3)\,.$$

49. Il lavoro di deformazione può prendere la forma di una somma di quadrati. — *L'espressione del lavoro di deformazione può essere messo sotto la forma di una somma di sei quadrati moltiplicati per coefficienti costanti indipendenti dalle forze* p_{xx}, p_{yy}, *ecc.;* infatti la formola (85) può scriversi (*)

$$I = \frac{1}{2}\left[p_{xx}\left(\frac{p_{xx}}{E} - \frac{p_{yy}}{C} - \frac{p_{zz}}{C}\right) + p_{yy}\left(\frac{p_{yy}}{E} - \frac{p_{xx}}{C} - \frac{p_{zz}}{C}\right) + \right.$$

$$\left. + p_{zz}\left(\frac{p_{zz}}{E} - \frac{p_{xx}}{C} - \frac{p_{yy}}{C}\right) + \frac{p_{xy}^2}{G} + \frac{p_{xz}^2}{G} + \frac{p_{yz}^2}{G} \right]$$

in questa formola gli ultimi tre termini sono già quadrati, per cui sarà sufficiente dimostrare che anche i primi tre possono prendere la stessa forma.

(*) Serret, Barré de Saint-Venant, *Note alla teoria della elasticità dei corpi solidi di* Clebsch e Boussinesq.

$$p_{xx}\left(\frac{p_{xx}}{E}-\frac{p_{yy}}{C}-\frac{p_{zz}}{C}\right)+p_{yy}\left(\frac{p_{yy}}{E}-\frac{p_{xx}}{C}-\frac{p_{zz}}{C}\right)+p_{zz}\left(\frac{p_{zz}}{E}-\frac{p_{xx}}{C}-\frac{p_{yy}}{C}\right)=$$

$$=\frac{p^2_{xx}}{E}+\frac{p^2_{yy}}{E}+\frac{p^2_{zz}}{E}-\frac{2}{C}p_{xx}p_{yy}-\frac{2}{C}p_{xx}p_{zz}-\frac{2}{C}p_{yy}p_{zz}=\frac{1}{E}\left(p^2_{xx}+\frac{E^2}{C^2}p^2_{yy}+\right.$$

$$\left.+\frac{E^2}{C^2}p^2_{zz}-\frac{2E}{C}p_{xx}p_{yy}-\frac{2E}{C}p_{xx}p_{zz}+2\frac{E^2}{C^2}p_{yy}p_{zz}\right)+p^2_{yy}\left(\frac{1}{E}-\frac{E}{C^2}\right)-$$

$$-2p_{yy}\left(\frac{E}{C^2}+\frac{1}{C}\right)+p_{zz}{}^2\left(\frac{1}{E}-\frac{E}{C^2}\right)=\frac{1}{E}\left(p_{xx}-\frac{E}{C}p_{yy}-\frac{E}{C}p_{zz}\right)^2+$$

$$+\left(\frac{1}{E}-\frac{E}{C^2}\right)\left[p_{yy}-\frac{\frac{E}{C^2}+\frac{1}{C}}{\frac{1}{E}-\frac{E}{C^2}}p_{zz}\right]+\left[\left(\frac{1}{E}-\frac{E}{C^2}\right)-\frac{\left[\frac{E}{C^2}+\frac{1}{C}\right]^2}{\frac{1}{E}-\frac{E}{C^2}}\right]p^2_{zz}=$$

$$=\frac{1}{E}\left(p_{xx}-\frac{E}{C}p_{yy}-\frac{E}{C}p_{zz}\right)^2+\frac{1}{A}\left(p_{yy}-\frac{A}{D}p_{zz}\right)^2+\frac{1}{B}p^2_{zz}$$

in cui indicando con m l'*indice di contrattibilità laterale* (Num. 44, form. 74)

$$\frac{1}{A}=\frac{1}{E}-\frac{E}{C^2}=\frac{C^2-E^2}{EC^2}=\frac{m^2-1}{m^2E}\;;\quad\frac{1}{D}=\frac{E}{C^2}+\frac{1}{C}=\frac{E+C}{C^2}=\frac{m+1}{m^2}\,\frac{1}{E}$$

$$\frac{1}{B}=\left(\frac{1}{E}-\frac{E}{C^2}\right)-\frac{\left[\frac{E}{C^2}+\frac{1}{C}\right]^2}{\frac{1}{E}-\frac{E}{C^2}}=\frac{C^2-E^2}{EC^2}-\frac{\left[\frac{EC+C^2}{C^3}\right]^2}{\frac{C^2-E^2}{EC^2}}=$$

$$=\frac{m^2-1}{m^2E}-\frac{\left(\frac{m+1}{m^2E}\right)^2}{\frac{m^2-1}{m^2E}}=\frac{m^2-1}{m^2E}-\frac{(m+1)^2}{(m^2-1)m^2E}=\frac{m^4-3m^2-2m}{m(m^2-1)E}$$

e l'espressione del lavoro diventa

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{E}\left(p_{xx}-\frac{E}{C}p_{yy}-\frac{E}{C}p_{zz}\right)^2+\frac{1}{A}\left(p_{yy}-\frac{A}{D}p_{zz}\right)^2+\frac{1}{B}p^2_{zz}+\frac{1}{G}p^2_{xy}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{G}p^2_{xz}+\frac{1}{G}p^2_{yz}\right]\qquad(89).$$

Se si ricorda il valore dell'indice di contrattibilità laterale m, i coefficienti $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{D}$, $\frac{1}{B}$ sono necessariamente quantità positive, quindi il lavoro di deformazione è sempre positivo qualunque siano i valori delle forze elastiche e può esser messo sotto la forma di una somma di sei quadrati, che è quanto si voleva dimostrare.

Osservazione. — Le considerazioni seguenti possono pure servire a dimostrare che i coifficienti $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{D}$ sono quantità positive:

a) Se tutte le forze sono nulle ad eccezione di p_{xx}, il lavoro di deformazione per piccoli valori di p_{xx} dovendo essere positivo, $\frac{1}{E}$ sarà una quantità positiva;

b) Se si fa $p_{xx}=\frac{E}{C}p_{yy}$ e $p_{zz}=p_{xy}=p_{xz}=p_{yz}=0$ il primo termine si annulla ed $\frac{1}{A}$ dovrà essere positivo per il teorema richiamato poc'anzi;

c) Si dimostra analogamente che $\frac{1}{B}$ deve essere positivo disponendo dei valori delle forze elastiche in modo che si annullino tutti i termini ad eccezione di $\frac{p_{zz}^2}{B}$;

d) Finalmente se si annullano tutte le forze elastiche ad eccezione di una delle componenti tangenziali; $\frac{1}{G}$ deve essere positivo perchè (Num. 35) per piccoli valori delle deformazioni o delle forze elastiche il lavoro di deformazione deve essere una quantità positiva.

50. Proprietà del lavoro di deformazione del parallelepipedo elementare. — *Le derivate prese rispetto alle deformazioni del lavoro di deformazione di un parallelepipedo elementare espresso in funzione di queste quantità dànno le forze, che mantengono in equilibrio l'elemento di volume. Le derivate prese rispetto alle forze del lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze dànno le deformazioni, che corrispondono alle forze stesse.* — La prima parte di questo teorema è già stata dimostrata al numero 42, essa è una conseguenza necessaria del fatto che le derivate del lavoro di deformazione sono uguali e di segno contrario alle derivate della funzione potenziale delle forze elastiche, e basandosi su questa proprietà si sono determinate al numero 43 le espressioni delle forze elastiche.

Ricordiamo ora le formole (73) che dànno le deformazioni in funzione delle forze

$$\left.\begin{aligned} i_x &= \frac{1}{E}p_{xx} - \frac{1}{mE}p_{yy} - \frac{1}{mE}p_{zz} & g_{xy} &= \frac{1}{G}p_{xy} \\ i_y &= \frac{1}{E}p_{yy} - \frac{1}{mE}p_{zz} - \frac{1}{mE}p_{xx} & g_{xz} &= \frac{1}{G}p_{xz} \\ i_z &= \frac{1}{E}p_{zz} - \frac{1}{mE}p_{xx} - \frac{1}{mE}p_{yy} & g_{yz} &= \frac{1}{G}p_{yz} \end{aligned}\right\} \quad (73)$$

e l'espressione del lavoro di deformazione in funzione delle forze elastiche (Num. 47, form. 85)

$$\left.\begin{aligned} I = \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{E}(p_{xx}^2 + p_{yy}^2 + p_{zz}^2) - \frac{2}{mE}(p_{xx}p_{yy} + p_{xx}p_{zz} + p_{yy}p_{zz}) + \\ + \frac{1}{G}(p_{xy}^2 + p_{xz}^2 + p_{yz}^2)\Big] \end{aligned}\right\} \quad (85).$$

Se si deriva questa formola successivamente rispetto alle sei forze, che essa contiene, tenendo conto delle relazioni (73), si ottengono le sei equazioni

$$\frac{dI}{dp_{xx}} = \frac{1}{E}p_{xx} - \frac{1}{mE}p_{yy} - \frac{1}{mE}p_{zz} = i_x \qquad \frac{dI}{dp_{xy}} = \frac{1}{G}p_{xy} = g_{xy}$$

$$\frac{dI}{dp_{yy}} = \frac{1}{E}p_{yy} - \frac{1}{mE}p_{zz} - \frac{1}{mE}p_{xx} = i_y \qquad \frac{dI}{dp_{xz}} = \frac{1}{G}p_{xz} = g_{xz}$$

$$\frac{dI}{dp_{zz}} = \frac{1}{E}p_{zz} - \frac{1}{mE}p_{xx} - \frac{1}{mE}p_{yy} = i_z \qquad \frac{dI}{dp_{yz}} = \frac{1}{G}p_{yz} = g_{yz}$$

che contengono la seconda parte del teorema enunciato.

Se invece di considerare il lavoro di deformazione, le forze e le deformazioni riferite all'unità di misura, si prendono in esame i loro valori relativi ad un parallelepipedo avente per lati dx, dy, dz allora conviene modificare alquanto la forma del teorema. Supponiamo riferito il parallelepipedo elementare a tre assi ortogonali aventi l'origine nel suo centro di figura e paralleli ai suoi lati, sia $ABCD$ (*Fig.* 21ª, *tav.* III) la sezione dell'elemento di volume

fatta col piano delle xy, a, b, c le quantità, di cui effettivamente si allontanano od avvicinano le coppie di faccie rispettivamente normali all'asse x, delle y e delle z; in causa delle definizioni di dilatazione o contrazione unitaria

$$a=i_x dx \qquad b=i_y dy \qquad c=i_z dz \tag{90}$$

Se si indicano X, Y, Z le forze totali, che agiscono sulle faccie del parallelepipedo e precisamente con

X la forza, che agisce sopra una delle faccie normali all'asse delle x e parallela al medesimo;

Y la forza, che agisce sopra una delle faccie normali all'asse delle y e ad esso parallela;

Z la forza, che agisce sopra una delle faccie normali all'asse delle z e parallela al medesimo;

sarà:

$$X=p_{xx} dy dz \qquad Y=p_{yy} dx dz \qquad Z=p_{zz} dx dy \tag{91}$$

finalmente se si indica con U il lavoro di deformazione di tutto il parallelepipedo, I essendo il lavoro unitario, sarà:

$$U=I dx dy dz.$$

Le derivate del lavoro di deformazione espresso in funzione delle deformazioni prese rispetto alle dilatazioni o contrazioni totali, dànno le forze risultanti normali alle faccie corrispondenti del parallelepipedo elementare. Le derivate del lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze prese rispetto alle forze risultanti normali agenti sulle faccie dànno le dilatazioni o contrazioni totali, che a quelle faccie corrispondono. Infatti se si prendono le derivate di U tenendo conto delle relazioni (90) e (91) si ottiene

$$\left.\begin{aligned} \frac{dU}{da}=\frac{dU}{di_x}\frac{di_x}{da}=d\frac{(I dx dy dz)}{di_x}\frac{d\left(\frac{a}{dx}\right)}{da}=p_{xx} dx dy dz \frac{1}{dx}=p_{xx} dy dz=X \\ \frac{dU}{db}=\frac{dU}{di_y}\frac{di_y}{db}=d\frac{(I dx dy dz)}{di_y}\frac{d\left(\frac{b}{dy}\right)}{db}=p_{yy} dx dy dz \frac{1}{dy}=p_{yy} dx dz=Y \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dU}{dc}=\frac{dU}{di_z}\frac{di_z}{dc}=d\frac{(Idxdydz)}{di_z}\frac{d\left(\frac{c}{dz}\right)}{dc}=p_{zz}dxdydz\frac{1}{dz}=p_{zz}dxdy=Z\\
&\frac{dU}{dX}=\frac{dU}{dp_{xx}}\frac{dp_{xx}}{dX}=d\frac{(Idxdydz)}{dp_{xx}}\frac{d\left(\frac{X}{dydz}\right)}{dX}=i_z dxdydz\frac{1}{dydz}=i_x dx=a\\
&\frac{dU}{dY}=\frac{dU}{dp_{yy}}\frac{dp_{yy}}{dY}=d\frac{(Idxdydz)}{dp_{yy}}\frac{d\left(\frac{Y}{dxdz}\right)}{dY}=i_y dxdydz\frac{1}{dxdz}=i_y dy=b.\\
&\frac{dU}{dZ}=\frac{dU}{dp_{zz}}\frac{dp_{zz}}{dZ}=d\frac{(Idxdydz)}{dp_{zz}}\frac{d\left(\frac{Z}{dxdy}\right)}{dZ}=i_z dxdydz\frac{1}{dxdy}=i_z dz=c
\end{aligned}\right\}(92).$$

Se si prendono ora in esame gli strisciamenti, uno di questi, per esempio: g_{xy}, esprime di quanto ha variato (*Fig.* 22ª, *tav.* III) l'angolo originariamente retto eOf per la rotazione positiva dell'asse delle x intorno all'asse delle z considerando l'asse delle y come fisso, oppure di quanto ha variato lo stesso angolo per la rotazione negativa dell'asse delle y intorno a quello delle z, considerando come fisso l'asse delle x; se si indica con θ_z questa variazione dell'angolo eOf ($fOf'=eOe'$) e con θ_y e θ_x le quantità analoghe rispetto agli altri due assi

$$\theta_x=\pm g_{yz} \qquad \theta_y=\pm g_{xz} \qquad \theta_z=\pm g_{xy} \tag{85}$$

nelle quali si dovrà prendere il segno + od il segno — a seconda dell'asse, che si prende come origine delle misure degli angoli, e quindi come asse fisso. Se si considerano le forze tangenziali, che agiscono sopra le faccie del parallelepipedo elementare (*Fig.* 2ª, *tav.* I) esse dànno luogo intorno ad ogni asse a due coppie eguali e di segno contrario e precisamente rispetto all'asse delle x

$$(p_{yz}dxdz, -p_{yz}dxdz) \quad \text{e} \quad (p_{zy}dydx, -p_{zy}dydx)=-(p_{yz}dxdz, -p_{yz}dxdz)$$

rispetto all'asse delle y

$$(p_{xz}dydz, -p_{xz}dydz) \quad \text{e} \quad (p_{zx}dxdy, -p_{zx}dxdy)=-(p_{xz}dydz, -p_{xz}dydz)$$

rispetto all'asse delle z

$$(p_{xy}dydz, -p_{xy}dydz) \quad \text{e} \quad (p_{yx}dxdz, -p_{yx}dxdz) = -(p_{xy}dydz, -p_{xy}dydz)$$

e di queste coppie relative ad ogni asse una va riguardata come attiva e l'altra invece come reazione dei vincoli, che legano il volume elementare alla rimanente porzione del corpo, in modo analogo a quello che si è usato relativamente alle forze $X, -X$, $Y, -Y$, ecc., di cui una deve essere considerata come attiva e l'altra come risultante delle reazioni elastiche. Rappresentiamo con M queste coppie segnando al piede l'indicazione dell'asse, al quale esse si riferiscono, allora

$$M_x = \pm p_{yz}dxdydz \quad M_y = \pm p_{xz}dxdydz \quad M_z = \pm p_{xy}dxdydz \quad (93)$$

avendo cura di scegliere il segno + od il segno — a seconda che si considera come attiva l'una piuttosto che l'altra delle coppie relative a ciascun asse.

Se si prendono le derivate del lavoro di deformazione espresso in funzione delle deformazioni rispetto alle rotazioni $\theta_x = \pm g_{yz}$, $\theta_y = \pm g_{xz}$, $\theta_z = \pm g_{xy}$, *si ottengono i momenti* M_x, M_y, M_z; *se invece si prendono le derivate del lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze rispetto ai momenti* M_x, M_y, M_z, *si ottengono le rotazioni* θ_x, θ_y, θ_z. Infatti se si prendono le derivate di U tenendo conto delle relazioni (85, pag. 144) e (93) si ottiene

$$\frac{dU}{d\theta_x} = \pm d\frac{(I dx dy dz)}{dg_{zy}} = \pm p_{zy}dxdydz = M_x$$

$$\frac{dU}{d\theta_y} = \pm d\frac{(I dx dy dz)}{dg_{xz}} = \pm p_{xz}dxdydz = M_y$$

$$\frac{dU}{d\theta_z} = \pm d\frac{(I dx dy dz)}{dg_{xy}} = \pm p_{xy}dxdydz = M_z$$

$$\frac{dU}{dM_x}=\frac{dU}{dp_{yz}}\frac{dp_{yz}}{dM_x}=d\frac{(Idxdydz)}{dp_{xy}}\frac{d\left(\frac{\pm M_x}{dxdydz}\right)}{dM_x}=$$

$$=\pm g_{yz}dxdydz\frac{1}{dxdydz}=\pm g_{yz}=\theta_x$$

$$\frac{dU}{dM_y}=\frac{dU}{dp_{xz}}\frac{dp_{xz}}{dM_y}=d\frac{(Idxdydz)}{dp_{xz}}\frac{d\left(\frac{\pm M_y}{dxdydz}\right)}{dM_y}=$$

$$=\pm g_{xz}dxdydz\frac{1}{dxdydz}=\pm g_{xz}=\theta_y$$

$$\frac{dU}{dM_z}=\frac{dU}{dp_{xy}}\frac{dp_{xy}}{dM_z}=d\frac{(Idxdydz)}{dp_{xy}}\frac{d\left(\frac{\pm M_z}{dxdydz}\right)}{dM_z}=$$

$$=\pm g_{xy}dxdydz\frac{1}{dxdydz}=\pm g_{xy}=\theta_z\,.$$

51. Equazioni dell'equilibrio e del moto dei corpi elastici. — Le forze agenti fra i diversi punti materiali, che compongono un corpo elastico, debbono necessariamente soddisfare alle equazioni (12) e (13) che assicurano l'equilibrio di un sistema molecolare. Siano X, Y, Z, le componenti parallele agli assi delle forze esterne agenti in un punto qualsiasi del solido S, p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}, quelle delle forze p_n agenti alla sua superficie inviluppo σ, dS e $d\sigma$ gli elementi di spazio e di superficie corrispondenti ad S ed a σ, ρ la densità di un punto qualsiasi del corpo ed u, v, w gli spostamenti, che esso subisce in causa della deformazione; finalmente siano α, β, γ gli angoli, che la normale in un punto qualunque della superficie inviluppo diretta verso l'interno del corpo fa cogli assi coordinati. Se si indica come nei numeri precedenti con ϕ la funzione potenziale delle forze elastiche e con L il lavoro di deformazione, per l'equilibrio dovrà esser nullo il momento virtuale del sistema, ossia

$$\left.\begin{aligned}\int_3\rho(X\delta u+Y\delta v+Z\delta w)dS+\int_2(p_{nx}\delta u+p_{ny}\delta v+\\ +p_{nz}\delta w)d\sigma-\delta L=0\end{aligned}\right\}\quad(94)$$

ricordando che (Num. 35 e 50)

$$L=\int_3 I\,dx\,dy\,dz=\int_3 I\,dS \qquad dL=-d\phi$$

ed impiegando un noto procedimento (*) d'analisi l'equazione superiore può anche scriversi

$$\int_3 dS\left\{\left(\frac{d}{dx}\frac{dI}{di_x}+\frac{d}{dy}\frac{dI}{dg_{xy}}+\frac{d}{dz}\frac{dI}{dg_{xz}}\right)\delta u+\left(\frac{d}{dx}\frac{dI}{dg_{xy}}+\frac{d}{dy}\frac{d}{di_y}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{d}{dz}\frac{dI}{dg_{yz}}\right)\delta v+\left(\frac{d}{dx}\frac{dI}{dg_{xz}}+\frac{d}{dy}\frac{dI}{dg_{yz}}+\frac{d}{dz}\frac{dI}{di_z}\right)\delta w\Big\}+$$

$$+\int_3 dS\left(\rho X\delta u+\rho Y\delta v+\rho Z\delta w\right)+\int_2 d\sigma\left\{\left(\frac{dI}{di_x}\cos\alpha+\frac{dI}{dg_{xy}}\cos\beta+\right.\right.$$

$$+\frac{dI}{dg_{xz}}\cos\gamma\Big)\delta u+\left(\frac{dI}{dg_{xy}}\cos\alpha+\frac{dI}{di_y}\cos\beta+\frac{dI}{dg_{yz}}\cos\gamma\right)\delta v+$$

$$\left.+\left(\frac{dI}{dg_{xz}}\cos\alpha+\frac{dI}{dg_{yz}}\cos\beta+\frac{dI}{di_z}\cos\gamma\right)\delta w\right\}+\int_2 d\sigma\left(p_{nx}\delta u+\right.$$

$$\left.+p_{ny}\delta v+p_{nz}\delta w\right)=0$$

(*) Ognuno dei termini della variazione dell'integrale $\frac{dI}{di_x}\delta i_x \quad \frac{dI}{di_y}\delta i_y \ldots$ si trasforma nel modo seguente:

$$\frac{dI}{di_x}\delta i_x=\frac{dI}{di_x}\delta\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dI}{di_x}\delta u\right)-\delta u\,\frac{d}{dx}\frac{dI}{di_x}$$

$$\frac{dI}{di_y}\delta i_y=\frac{dI}{di_y}\delta\frac{dv}{dy}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dI}{di_y}\delta v\right)-\delta v\,\frac{d}{dy}\frac{dI}{di_y}$$

indi l'integrale di spazio corrispondente ai termini della forma $\frac{d}{dx}\left(\frac{dI}{di_x}\delta u\right)$, $\frac{d}{dy}\left(\frac{dI}{di_y}\delta v\right)$ . . . si sostituisce con un'integrale di superficie mediante la nota formola

$$\int\frac{dF}{dx}dx\,dy\,dz=-\int F\,dy\,dz=-\int F\,d\sigma\cos\alpha$$

Se si ricorda che le derivate del lavoro di deformazione sono uguali e di segno contrario a quelle della funzione potenziale, ossia alle forze elastiche, e si uguagliano a zero i coefficienti delle variazioni δu, δv, δw, si ottiene nell'interno del corpo (*).

$$\left.\begin{aligned} \frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{xz}}{dz}+\rho X=0 \\ \frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz}+\rho Y=0 \\ \frac{dp_{xz}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}+\rho Z=0 \end{aligned}\right\} \quad (95)$$

ed alla superficie

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}\cos\alpha+p_{xy}\cos\beta+p_{xz}\cos\gamma=p_{nx} \\ p_{xy}\cos\alpha+p_{yy}\cos\beta+p_{yz}\cos\gamma=p_{ny} \\ p_{xz}\cos\alpha+p_{yz}\cos\beta+p_{zz}\cos\gamma=p_{nz} \quad (**) \end{aligned}\right\} \quad (96)$$

che coincidono colle formole trovate al numero 15, in cui è stato studiato l'equilibrio del tetraedro e del parallelepipedo elementare.

Se in luogo delle forze molecolari si mettono i loro valori in funzione delle deformazioni elementari e queste si esprimono per mezzo delle u, v, w, le tre equazioni (95) serviranno a determinare le espressioni generali di u, v e w in funzione delle forze esterne e le tre equazioni di equilibrio alla superficie (96) permetteranno la determinazione delle funzioni arbitrarie introdotte dall'integrazione delle (95). Le equazioni (95) e (96) assicurano l'equilibrio del corpo e se a queste si aggiungono le condizioni di immobilità di un elemento piano nell'interno del medesimo, cioè (Num. 24)

$$u=0,\ v=0,\ w=0\quad \frac{du}{dy}-\frac{dv}{dx}=0\quad \frac{du}{dz}-\frac{dw}{dx}=0\quad \frac{dv}{dz}-\frac{dw}{dy}=0$$

---

in cui F esprime una funzione qualsiasi, $d\sigma$ un elemento della superficie, che limita il solido, $\cos\alpha$ il coseno compreso fra la normale a questo elemento e l'asse, rispetto al quale è stata eseguita l'integrazione.

(*) Betti, Opera citata.

(**) Per la chiara intelligenza dei segni vedi l'*Osservazione* nella pagina seguente.

il corpo non subirà movimento alcuno. Determinate le u, v e w si possono calcolare immediatamente le forze e le deformazioni elastiche ed il lavoro di deformazione servendosi delle formole sviluppate nei numeri precedenti.

Osservazione. — Nello studio dell'equilibrio dei corpi elastici bisogna tener distinto in ogni punto od elemento di volume le forze esterne agenti sul medesimo e l'azione per la quale il punto od elemento di volume vi resiste. Questa specie di molla elastica od elaterio ha segno diverso, ma valore assoluto uguale in ogni punto alle forze esterne, che mantengono il corpo in equilibrio. Nelle direzioni degli assi coordinati questi elateri saranno quindi rappresentati nell'interno del corpo (elateri interni) da

$$\Pi_x = \frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz}$$

$$\Pi_y = \frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{yz}}{dz}$$

$$\Pi_z = \frac{dp_{xz}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz}$$

ed alla superficie, che limita il corpo (elateri superficiali) da

$$\omega_x = p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{xz}\cos\gamma$$

$$\omega_y = p_{xy}\cos\alpha + p_{yy}\cos\beta + p_{yz}\cos\gamma$$

$$\omega_z = p_{xz}\cos\alpha + p_{yz}\cos\beta + p_{zz}\cos\gamma.$$

I teoremi esposti ai numeri 35,36,37,38,39,40 intorno alle relazioni esistenti fra il lavoro di deformazione, le deformazioni e le forze esterne, se a queste ultime si sostituiscono i corrispondenti elateri (interni o superficiali) diventano necessariamente teoremi analoghi risguardanti le relazioni esistenti fra il lavoro di deformazione, le deformazioni e gli elateri. La considerazione degli elateri invece delle forze esterne corrisponde meglio allo stato di tensione del corpo (*) e dà alle formole un significato più intrinseco e più generale, che permette di sviluppare ampie considerazioni intorno ai teoremi relativi alle derivate del lavoro di deforma-

(*) Donati, *Atti dell'Accademia delle Scienze* dell'Istituto di Bologna, 1888-89.

zione ed al teorema di MENABREA, e di farne meglio apprezzare il significato. La corrispondenza esistente fra forza esterna ed elaterio permette di poter facilmente scambiare queste quantità e di passare dalle une alle altre. Malgrado i vantaggi, che presenta la considerazione degli elateri elastici, in questo corso si è sempre parlato di forze esterne perchè si hanno specialmente in vista le applicazioni della teoria dell'equilibrio dei corpi elastici alla ricerca della stabilità delle costruzioni, dove interessano specialmente queste ultime quantità, mentre invece può essere molto utile introdurre la considerazione degli elateri in uno studio di pura fisica fatto col solo scopo di rendersi conto, per quanto è possibile, delle proprietà intime della materia.

Se nelle formole, che assicurano l'equilibrio di un corpo elastico

$$\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{xz}}{dz}+\rho X=0$$

$$\frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz}+\rho Y=0$$

$$\frac{dp_{xz}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}+\rho Z=0$$

in luogo di ρX, ρY, ρZ si pongono le differenze fra le forze X, Y, Z e le componenti d'inerzia

$$\rho\left(X-\frac{d^2u}{dt^2}\right) \quad \rho\left(Y-\frac{d^2v}{dt^2}\right) \quad \rho\left(Z-\frac{d^2w}{dt^2}\right)$$

allora si avranno le equazioni del moto dei corpi elastici; se questa sostituzione si fa nella formola (94) s'ottiene l'equazione di D'ALEMBERT relativa al movimento dei corpi.

Se si pone

$$\delta U=\int_3 \rho(X\delta u+Y\delta v+Z\delta w)dS+\int_2 (p_{nx}\delta u+p_{ny}\delta v+p_{nz}\delta w)d\sigma$$

e

$$\delta T=\int \rho\left(\frac{d^2u}{dt^2}\delta u+\frac{d^2v}{dt^2}\delta v+\frac{d^2w}{dt^2}\delta w\right)dS$$

l'equazione (94) diventa

$$\delta U-\delta T-\delta L=0.$$

Se il corpo è in equilibrio e non possiede energia cinetica, $\delta T=0$ e rimane

$$\delta U-\delta L=0.$$

Se le forze esterne ammettono una funzione potenziale e si indica con W l'energia potenziale $\delta U=-\delta W$ e le due equazioni prendono la nota forma

$$\delta T+\delta W+\delta L=0 \tag{97}$$

$$\delta W+\delta L=0 \tag{98}.$$

52. Le equazioni del numero precedente determinano completamente l'equilibrio di un corpo elastico. — Le formole (95) e (96) oppure l'altro equivalente

$$\delta U-\delta L=0$$

per un corpo in equilibrio determinano completamente lo stato del medesimo, ossia vi è un solo sistema di valori u, v, w, che soddisfi alle equazioni di equilibrio. Infatti supponiamo che vi siano due sistemi di spostamento $u', v', w', u'', v'', w''$ tali da soddisfare alle equazioni di equilibrio (95) e (96) e poniamo $u=u'-u''$, $v=v'-v''$, $w=w'-w''$. Le u, v, w dovrebbero soddisfare alle equazioni d'equilibrio facendo nelle medesime uguale a zero le forze esterne, come appare evidente sostituendo in esse le u', v', w' e le u'', v'', w'' e sottraendo, cioè le u, v, w sarebbero gli spostamenti corrispondenti al caso, in cui le forze esterne fossero tutte uguali a zero. Per ipotesi questo stato è quello, da cui si incominciano a contare gli spostamenti, dunque

$$u=v=w=0$$

ossia

$$u'=u'',\ v'=v'',\ w'=w''.$$

53. Teorema di Clapeyron. — L'espressione del lavoro totale L di deformazione è data da (Num. 50 e 46)

$$2L=\int I\,dx\,dy\,dz=\int dS\left(p_{xx}\frac{du}{dx}+p_{xy}\frac{du}{dy}+p_{xz}\frac{du}{dz}+p_{yy}\frac{dv}{dy}+\right.$$

$$\left.+p_{xy}\frac{dv}{dx}+p_{yz}\frac{dv}{dz}+p_{zz}\frac{dw}{dz}+p_{xz}\frac{dw}{dx}+p_{yz}\frac{dw}{dy}\right).$$

Se si trasforma l'integrale ponendo

$$p_{xx}\frac{du}{dx}=\frac{d(p_{xx}u)}{dx}-u\frac{dp_{xx}}{dx} \qquad p_{xy}\frac{dv}{dx}=\frac{d(p_{xy})v}{dy}-v\frac{dp_{xy}}{dx}$$

. . . . . .

e sostituendo, come al numero 51, nell'integrale dei termini analoghi a $\frac{d(p_{xx}u)}{dx}$, $\frac{d(p_{xy}v)}{dy}$... esteso a tutto il corpo un'integrale di superficie s'ottiene:

$$2L=-\int\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{xz}}{dz}\right)u\\ \left(\frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz}\right)v\\ \left(\frac{dp_{xz}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}\right)w\end{array}\right\}dS-$$

$$-\int\left\{\begin{array}{l}(p_{xx}\cos\alpha+p_{xy}\cos\beta+p_{xz}\cos\gamma)u\\ (p_{xy}\cos\alpha+p_{yy}\cos\beta+p_{yz}\cos\gamma)v\\ (p_{xz}\cos\alpha+p_{yz}\cos\beta+p_{zz}\cos\gamma)w\end{array}\right\}d\sigma$$

in cui α, β, γ sono come precedentemente gli angoli, che la normale in un punto qualsiasi della superficie, che limita il corpo, fa cogli assi coordinati. Se si ricordano le (95) e (96) i termini fra parentesi sono uguali alle componenti delle forze esterne con segno cambiato (*), quindi, detto U il lavoro delle forze esterne,

$$2L=\int\rho\,(Xu+Yv+Zw)\,dS+\int(p_{xx}u+p_{xy}v+p_{xz}w)d\sigma=U$$

e finalmente ricordando le (87) e (88)

$$U=\int\left(\frac{F^2}{E}-\frac{K}{G}\right)dx\,dy\,dz=\int(AF_1^2-GK_1)dx\,dy\,dz=2L \qquad (99)$$

relazione che contiene il teorema di Clapeyron, cioè il teorema che il lavoro delle forze elastiche è la metà del lavoro delle forze esterne supposte costanti di intensità, direzione e senso nella sua

(*) Vedi numero 51, *Osservazione*, pag. 149.

forma più generale, poichè la formola (99) è applicabile indifferentemente a tutto il sistema o soltanto ad una sua parte. Nel caso che si voglia considerare soltanto una porzione di corpo elastico in equilibrio allora saranno contate come forze esterne quelle, che si trasmettono attraverso la superficie, che limita la porzione considerata.

54. Problema di elasticità. Metodi di risoluzione. — I teoremi dimostrati nei numeri precedenti mostrano la via da seguire per risolvere le questioni relative all'equilibrio dei corpi elastici. Le equazioni (95) e (96) servono a determinare in funzione delle forze esterne le u, v, w e quindi anche le deformazioni elementari, le forze elastiche ed il lavoro di deformazione; applicando i teoremi relativi alle derivate del lavoro di deformazione si possono determinare le forze esterne o le deformazioni derivando l'espressione del lavoro rispetto agli spostamenti subìti dai diversi punti oppure rispetto alle forze che li sollecitano. Si presenta però spesso il caso che fra le forze esterne ve ne siano alcune incognite in intensità oppure anche in direzione; ciò avviene particolarmente quando oltre alle forze note agenti sul corpo si debbono prendere in considerazione anche reazioni prodotte da vincoli imposti al sistema. Se il numero delle incognite non supera quello delle condizioni generali di equilibrio di un corpo rigido, cioè sei nello spazio e tre nel piano, la statica dei sistemi di forma invariabile permette sempre di determinarle, e sebbene esse si presentino come quantità incognite, tuttavia non si possono realmente considerare come tali nei problemi dell'equilibrio dei corpi elastici, perchè il loro valore può venire assegnato con un calcolo abbastanza semplice ed affatto indipendente dalla teoria matematica dell'elasticità. Quando il numero delle incognite supera quello delle condizioni generali d'equilibrio, la statica dei sistemi di forma invariabile fornisce bensì delle relazioni fra queste quantità, ma lascia indeterminato il problema e precisamente si dovranno cercare tante quantità quante sono le incognite diminuite del numero delle condizioni di equilibrio (sei nello spazio e tre nel piano). Questa indeterminazione però scompare ricorrendo alla teoria dei corpi elastici, infatti se si esprime il lavoro di deformazione in funzione delle forze esterne note ed incognite, rappresentando queste ultime con simboli algebrici, si otterrà una funzione di secondo grado rispetto alle forze; se si prendono le derivate del lavoro di deformazione rispetto alle forze incognite (avendo riguardo alle relazioni importate dalle condizioni generali di equilibrio) esse saranno funzioni lineari di queste ultime quantità e dovranno essere uguali alle deformazioni imposte dai vincoli; si avranno quindi tante equazioni di primo grado quante sono le

incognite ed il problema sarà univocamente determinato. Se invece vi sono alcune deformazioni incognite uguagliando le derivate del lavoro prese rispetto a queste deformazioni alle forze applicate ai punti, cui esse corrispondono, si ottengono in modo affatto analogo a quello esposto precedentemente tante equazioni lineari quante ne occorrono per determinare in modo unico le incognite della questione. Invece di derivare l'espressione del lavoro di deformazione si potrebbero calcolare le deformazioni in funzione delle forze esterne note ed incognite col mezzo delle equazioni di equilibrio (Num. 51) ed uguagliandole alle deformazioni permesse dai vincoli si ricaverebbero tante equazioni lineari quante ne occorrono per determinare le incognite. Il primo processo può chiamarsi *metodo delle derivate del lavoro*, il secondo *metodo delle deformazioni:* entrambi conducono evidentemente allo stesso risultato, poichè appunto le deformazioni sono le derivate del lavoro di deformazione prese rispetto alle forze esterne, la differenza dei due metodi sta nel modo di calcolare l'espressione degli spostamenti e delle rotazioni. In ultima analisi questa differenza si riduce ad una trasposizione dei due simboli d ed $\int$.

Vi è però un caso in cui la determinazione delle forze incognite può farsi dipendere da una questione di massimo e minimo. Al (Num. 40) è stato esposto il teorema di Menabrea ed il modo nel quale esso deve essere inteso in rapporto alle applicazioni, che si incontrano nella scienza delle costruzioni. Se si presenta il caso di un sistema elastico sollecitato da forze attive note e da reazioni incognite in numero superiore alle condizioni generali di equilibrio convenienti ai sistemi indeformabili, e se queste reazioni dipendono da vincoli invariabili e sono tali che non possono produrre lavoro esterno, allora si è visto che il lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze esterne note ed incognite deve essere un minimo, o, più esattamente, che le sue derivate prese rispetto alle forze incognite debbono essere uguali allo zero. Riconosciuto che le condizioni del sistema siano tali che questo teorema possa essere applicato, si esprima il lavoro di deformazione in funzione delle forze esterne note ed incognite (comprendendo fra le forze esterne anche le reazioni, che saranno rappresentate mediante simboli algebrici, quando sono incognite) e le sue derivate, prese rispetto alle forze incognite tenendo conto delle relazioni generali d'equilibrio fornite dalla statica dei corpi rigidi, si pongano uguali allo zero. Si avranno tante relazioni lineari (il lavoro di deformazione essendo di secondo grado rispetto alle forze esterne) quante sono le incognite, cioè il numero necessario e sufficiente per determinare in modo unico la questione.

Se le reazioni incognite sono tali da dar luogo ad un lavoro esterno, cioè se dipendono da vincoli variabili, come appunto sarebbe il caso quando nel sistema vi fossero punti obbligati a strisciare sopra superficie capaci di sviluppare una resistenza d'attrito, allora il teorema di MENABREA non ha più luogo e per determinare le forze o reazioni incognite bisogna ricorrere al metodo delle derivate del lavoro od a quello delle deformazioni, come è stato indicato superiormente.

55. Equazione di coesione. — Chiamasi equazione di coesione o di stabilità la condizione, che deve verificarsi in ogni punto di un corpo, perchè esso possa resistere in modo permanente agli sforz a cui è soggetto senza che venga alterata la sua intima natura o composizione. I fisici non sono completamente d'accordo intorno a questo argomento, alcuni riconoscono questa condizione nell'essere la massima dilatazione ε_1 uguale od inferiore ad un limite dato i determinato dall'esperienza e variabile da corpo a corpo; altri invece la riconoscono nell'essere la massima forza elastica σ_1 uguale od inferiore ad un valore determinato R, variabile pure al variare della materia, di cui il corpo si compone. Molto probabilmente la deformazione permanente e la rottura dipenderanno non solo dal valor massimo della deformazione o dello sforzo elastico, ma anche dal modo col quale intorno ad ogni punto le forze elastiche e le deformazioni sono distribuite. Se si considera che le forze elastiche dipendono direttamente dagli spostamenti delle molecole, sembra naturale riguardare come condizione di stabilità $\varepsilon_1 < i$ piuttosto che $\sigma_1 \leq R$; BARRÉ DE SAINT-VENANT, GRASHOF, ecc. hanno accettato il primo criterio, CLEBSH invece il secondo. Il fenomeno delle vibrazioni prodotte da forze di direzione ed intensità costante duplicando le deformazioni (Num. 41), sarà in generale buona regola prendere il limite delle deformazioni inferiore o tutt'al più uguale alla metà della deformazione, per la quale incominciano ad essere sensibili le deformazioni permanenti. Se occorre prendere in esame il caso di carichi mobili, di sforzi ripetuti od oscillanti fra due limiti dati, di urti, ecc., allora a fissare l'equazione di coesione ed i massimi sforzi unitari ammissibili entrano anche altre considerazioni, la cui importanza è stata recentemente messa in evidenza specialmente per opera di WÖHLER e SPANNGEBERG, e che esamineremo nel capitolo speciale destinato allo studio dei risultati delle esperienze eseguite sui diversi materiali, che si impiegano nelle costruzioni.

Il professore BELTRAMI (*) nel 1885 ha fatto osservare in rela-

(*) BELTRAMI, *Sulle condizioni di resistenza dei corpi solidi* (Rendiconti del Regio Istituto Lombardo, serie II, vol. XVIII, fasc. XIV, 1885).

zione a quanto si è avvertito superiormente, che nè le dilatazioni isolatamente, nè le forze massime possono dare la giusta misura della coesione. Esso pensa che questa possa aversi molto più razionalmente limitando il valor massimo I_0 che può avere in ogni punto il lavoro di deformazione unitario (Num. 46) cioè $I \gtrless I_0$ poichè quest'ultima quantità ha un significato dinamico perfettamente noto, rappresentando l'energia, che il corpo elastico possiede in vicinanza del punto, che si considera. Essa è essenzialmente positiva, cioè non si annulla se non si annullano contemporaneamente le sei deformazioni o le sei forze elastiche elementari e si mantiene maggior di zero per ogni altra sestupla di valori reali di queste variabili. Finalmente con questo concetto entro certi limiti si viene a tener conto del modo, nel quale le deformazioni e le forze elastiche sono distribuite intorno ad ogni punto.

56. In un corpo elastico a sezione trasversale infinitamente piccola sollecitato da forze soltanto sulle basi estreme tre forze elastiche sono nulle. — *In un corpo ad asse rettilineo ed a sezione trasversale costante ed infinitesima, sollecitato soltanto da forze agenti sulle sue sezioni estreme o basi, tre delle forze elastiche sono nulle e precisamente sono quelle, la cui direzione è normale agli elementi lineari dell'asse dell'asta e corrispondono a faccie piane parallele ai medesimi elementi, le altre forze in generale hanno valori diversi da zero.* Se si prendono gli assi coordinati in modo che l'asse delle x coincida coll'asse del solido, che si considera, e gli altri due abbiano direzione normale, allora

$$p_{yy}=0 \qquad p_{zz}=0 \qquad p_{yz}=0.$$

Infatti le equazioni di equilibrio trovate ai numeri 15 e 51 sono nell'interno del corpo

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{xz}}{dz}+X=0 \qquad \frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz}+Y=0 \\ &\frac{dp_{xz}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}+Z=0 \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(12)\\ \text{e}\\ (95)\end{matrix}$$

ed alla superficie

$$\left.\begin{aligned} &p_{xx}\cos\alpha+p_{xy}\cos\beta+p_{xz}\cos\gamma=p_{nx} \\ &p_{xy}\cos\alpha+p_{yy}\cos\beta+p_{yz}\cos\gamma=p_{ny} \\ &p_{xz}\cos\alpha+p_{yz}\cos\beta+p_{zz}\cos\gamma=p_{nz} \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(13)\\ \text{e}\\ (96).\end{matrix}$$

Se il corpo si suppone isotropo (Num. 42) $p_{xy}=Gg_{xy}$, $p_{xz}=Gg_{xz}$ e se a g_{xy} e g_{xz} si sostituiscono i valori, che convengono ai solidi a sezione infinitesima leggermente deformati (Num. 32, form. 43)

$$p_{xy}=Gg_{xy}=G\left(\frac{du_1}{dy}-z\theta_x\right)$$

$$p_{xz}=Gg_{xz}=G\left(\frac{du_1}{dz}+y\theta_x\right)$$

derivando rispetto ad x

$$\frac{dp_{xy}}{dx}=0 \qquad \frac{dp_{xz}}{dx}=0$$

e le due ultime equazioni del gruppo (12) o (95) diventano

$$\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz}+Y=0 \qquad \frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}+Z=0.$$

Se si moltiplicano queste due equazioni, la prima per U e la seconda per V, essendo U e V due quantità arbitrarie, di cui si potrà disporre in seguito, e si integrano rispetto all'elemento piano $dy\,dz$ trasversale all'asse del solido, si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}
&\int dy\,dz\left[U\frac{dp_{yy}}{dy}+U\frac{dp_{yz}}{dz}\right]+\int UY\,dy\,dz=\int dy\,dz\left[\frac{dUp_{yy}}{dy}-\right.\\
&\left.-p_{yy}\frac{dU}{dy}+\frac{dUp_{yz}}{dz}-p_{zz}\frac{dU}{dz}\right]+\int UY\,dy\,dz=0\\
&\int dy\,dz\left[V\frac{dp_{yz}}{dy}+V\frac{dp_{zz}}{dz}\right]+\int VZ\,dy\,dz=\int dy\,dz\left[\frac{dVp_{yz}}{dy}-\right.\\
&\left.-p_{yz}\frac{dV}{dy}+\frac{dVp_{zz}}{dz}-p_{zz}\frac{dV}{dz}\right]+\int VZ\,dy\,dz=0
\end{aligned}\right\}\ (100).$$

Se si indica con σ l'arco della linea di contorno della sezione (*Fig* 23ª, *tav.* III) $dy=d\sigma\cos\gamma$, $dz=d\sigma\cos\beta$, quindi

$$\int dy\,dz\,\frac{dUp_{yy}}{dy}=\int dz\,Up_{yy}=\int Up_{yy}\cos\beta\,d\sigma$$

ed analogamente

$$\int dy\,dz\frac{dUp_{yz}}{dz}=\int Up_{yz}\cos\gamma\,d\sigma\,;\qquad \int dy\,dz\frac{dVp_{yz}}{dy}=\int Vp_{yz}\cos\beta\,d\sigma$$

$$\int\frac{dVp_{zz}}{dz}dy\,dz=\int Vp_{zz}\cos\gamma\,d\sigma$$

per cui

$$\left.\begin{aligned}\int dy\,dz\left[\frac{dUp_{yy}}{dy}+\frac{dUp_{yz}}{dz}\right]&=\int U(p_{yy}\cos\beta+p_{yz}\cos\gamma)\,d\sigma\\ \int dy\,dz\left[\frac{dVp_{yz}}{dy}+\frac{dVp_{zz}}{dz}\right]&=\int V(p_{yz}\cos\beta+p_{zz}\cos\gamma)\,d\sigma\end{aligned}\right\}\ (101).$$

Per ipotesi al contorno della sezione non agisce sforzo alcuno e l'asse delle x è normale al piano della sezione, quindi

$$p_{nx}=0\qquad p_{ny}=0\qquad p_{nz}=0\qquad \cos\alpha=0$$

e le due ultime equazioni del gruppo (96) diventano

$$p_{yy}\cos\beta+p_{yz}\cos\gamma=0\qquad p_{yz}\cos\beta+p_{zz}\cos\gamma=0$$

sostituendo questi valori nelle (101) si ottiene

$$\int dy\,dz\left[\frac{dUp_{yy}}{dy}+\frac{dUp_{yz}}{dz}\right]=0\qquad \int dy\,dz\left[\frac{dVp_{yz}}{dy}+\frac{dVp_{zz}}{dz}\right]=0$$

e le equazioni (100) si riducono a

$$\int dy\,dz\left[p_{yy}\frac{dU}{dy}+p_{yz}\frac{dU}{dz}\right]-\int dy\,dz\,UY=0,$$

$$\int dy\,dz\left[p_{yz}\frac{dV}{dy}+p_{zz}\frac{dV}{dz}\right]-\int dy\,dz\,VZ=0.$$

Se in queste ultime formole (*) si fanno U e V successivamente uguali ad y, z, yz, y^2, z^2, e si osserva che in tale ipotesi $\int YU\,dy\,dz$ ed $\int ZV\,dy\,dz$ diventano trascurabili rispetto agli inte-

(*) Boussinesq, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1871-1879.

grali di $\frac{dU}{dy}$, $\frac{dU}{dz}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dz}$, perchè le U e V hanno valori infinitesimi che in generale le loro derivate non avranno, ponendo $d\omega = dy\,dz$ si ottiene

$$\left.\begin{array}{llll} \int p_{yy}\,d\omega = 0 & \int p\,d_{yz}\omega = 0 & \int p_{yy}\,y\,d\omega = 0 & \int p_{zz}\,z\,d\omega = 0 \\ \int p_{zz}\,d\omega = 0 & \int p_{yz}\,y\,d\omega = 0 & \int p_{yz}\,z\,d\omega = 0 & \\ \int (p_{yy}z + p_{yz}y)\,d\omega = 0 & \int (p_{yz}z + p_{zz}y)\,d\omega = 0\,. & & \end{array}\right\} \quad (102)$$

finalmente facendo $U = v$, $V = w$, v e w essendo gli spostamenti paralleli agli assi delle y e delle z, e sommando le due equazioni si ricava

$$\left.\begin{array}{l} \int dy\,dz\left[p_{yy}\frac{dv}{dy} + p_{zz}\frac{dw}{dz} + p_{yz}\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)\right] = \\ = \int dy\,dz\,(p_{yy}i_y + p_{zz}i_z + p_{yz}g_{yz}) = 0\,. \end{array}\right\} \quad (103).$$

Al numero 49 è stato dimostrato che l'espressione del lavoro di deformazione può sempre esser messa sotto forma di una somma di sei quadrati e precisamente si è trovato

$$\frac{1}{2}(p_{xx}i_x + p_{yy}i_y + p_{zz}i_z + p_{xy}g_{xy} + p_{xz}g_{xz} + p_{yz}g_{yz}) = \left[\frac{1}{E}\left(p_{xx} - \frac{E}{C}p_{yy} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{E}{C}p_{zz}\right)^2 + \frac{1}{A}\left(p_{yy} - \frac{A}{D}p_{zz}\right)^2 + \frac{1}{B}p_{zz}^2 + \frac{1}{G}p_{xy}^2 + \frac{1}{G}p_{xz}^2 + \frac{1}{G}p_{yz}^2\right]$$

le formole (73) danno

$$E\,i_x = p_{xx} - \frac{E}{C}p_{yy} - \frac{E}{C}p_{zz} \qquad g_{xy} = \frac{1}{G}p_{xy} \qquad g_{xz} = \frac{1}{G}p_{xz}$$

e l'equazione superiore può anche essere scritta nel modo seguente

$$\frac{1}{2}\left[p_{xx}i_x + p_{yy}i_y + p_{zz}i_z + p_{yz}g_{yz} + \frac{1}{G}p^2_{xy} + \frac{1}{G}p^2_{xz}\right] = \frac{1}{2}\left[i_x\left(p_{xx} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{E}{C}p_{yy} - \frac{E}{C}p_{zz}\right) + \frac{1}{A}\left(p_{yy} - \frac{A}{D}p_{zz}\right)^2 + \frac{1}{B}p^2_{zz} + \frac{1}{G}p^2_{xy} + \frac{1}{G}p^2_{xz} + \frac{1}{G}p^2_{yz}\right]$$

togliendo i termini comuni rimane

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{E}{C}p_{yy}+\frac{E}{C}p_{zz}\right)i_x+p_{yy}i_y+p_{zz}i_z+p_{yz}g_{yz}=\\&=\frac{1}{A}\left(p_{yy}-\frac{A}{D}p_{zz}\right)^2+\frac{1}{B}p^2_{zz}+\frac{1}{G}p^2_{yz}\end{aligned}\right\}\quad(104)$$

in luogo di i_x si metta il suo valore $i_x=i+z\theta_y-y\theta_z$ (Num. 32, form. 42) e si integri rispetto alla sezione trasversale, avendo riguardo alle relazioni (102) e (103): gli integrali dei termini, che compongono il primo membro della (104) danno una somma uguale a zero, quindi sarà necessariamente

$$\int dy\,dz\left[\frac{1}{A}\left(p_{yy}-\frac{A}{D}p_{zz}\right)^2+\frac{1}{B}p^2_{zz}+\frac{1}{G}p^2_{yz}\right]=0.$$

I coefficienti A, D, B, G sono positivi, quindi l'integrale della somma dei quadrati compresi entro le grandi parentesi non potrà essere zero a meno che in tutti i punti del corpo non siano uguali a zero i quadrati stessi, cioè dovrà essere in tutti i punti del solido

$$p_{yy}=0\qquad p_{zz}=0\qquad p_{yz}=0$$

che è quanto volevasi dimostrare.

Il teorema sussiste ancora se il solido non è perfettamente cilindrico, ma a sezione variabile, purchè la variazione sia continua ed infinitamente piccola rispetto alla distanza delle due sezioni, che si considerano, perchè esso potrà sempre essere riguardato con sufficiente approssimazione come una serie di tronchi cilindrici di lunghezza finita sollecitati da forze agenti soltanto nelle sezioni estreme di ciascuno di essi. Finalmente lo stesso teorema sussiste anche quando prima della deformazione l'asse del corpo è leggermente inflesso o contorto, perchè anche in questo caso $i_x=i+z\theta_y-y\theta_z$ (Num. 32). Ciò appare anche dal fatto che un tale solido con sufficiente esattezza può essere considerato come composto di una serie di tronchi ad asse rettilineo, di lunghezza finita e sollecitati soltanto da forze agenti nelle loro sezioni estreme.

Osservazione. — Barré de Saint-Venant (*) osserva che Kirchhoff

(*) Barré de Saint-Venant, Appendice complementare alle lezioni sulla resistenza dei corpi solidi di Navier.

ha dimostrato che studiando il caso dell'equilibrio dei solidi elastici a sezione infinitesima sollecitati da forze agenti solo alle loro estremità si soddisfano a tutte le condizioni imposte ponendo in tutto il corpo $p_{yy}=0$, $p_{zz}=0$, $p_{yz}=0$.

Infatti se nelle equazioni che danno p_{yz}, p_{yy}, p_{zz} si pongono per p_{yy}, p_{zz} e p_{yz} questi valori, e per i_x la sua espressione $i_x=i+z\theta_y-y\theta_z$ si ricavano per i_y, i_z e g_{yz} delle formole lineari rispetto ad y e z e quindi tali da soddisfare all'equazione di compatibilità (Num. 29, form. 33)

$$\frac{d^2 i_y}{dz^2}+\frac{d^2 i_z}{dy^2}=\frac{d^2 g_{yz}}{dy\,dz}$$

per cui i valori supposti di p_{yy}, p_{zz} e p_{yz} costituiscono una soluzione particolare del problema dei corpi elastici pel caso speciale studiato in questo paragrafo.

57. Espressione delle forze molecolari nei solidi a sezione trasversale infinitamente piccola in funzione delle risultanti e dei momenti risultanti delle forze esterne ad ogni sezione. — Le considerazioni fatte nel numero precedente mostrano che in un corpo elastico a sezione infinitesima e ad asse originariamente rettilineo o leggermente incurvato, sollecitato da forze agenti soltanto sulle sue basi, le tre forze elastiche p_{yy}, p_{zz}, p_{yz} sono uguali allo zero e le deformazioni sono date dalle (43) (Num. 32, pag. 94).

In tal caso le formole, che legano le deformazioni alle forze (Num. 44, form. 73) diventano

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}=E i_x=E\left[i+z\theta_y-y\theta_z\right] \qquad p_{xy}=G g_{xy}=G\left[\frac{du_1}{dy}-z\theta_x\right] \\ p_{xz}=G g_{xz}=G\left[\frac{du_1}{dz}+y\theta_x\right] \end{aligned}\right\} \quad (105)$$

e l'espressione del lavoro (Num. 46, form. 85)

$$\left.\begin{aligned} L=\int dx\,dy\,dz\left[\frac{p^2_{xx}}{E}+\frac{p^2_{xy}}{G}+\frac{p^2_{yz}}{G}\right]= \\ =\int dx\,dy\,dz\,[E i^2_x+G g^2_{xy}+G g^2_{xz}] \end{aligned}\right\} \quad (105)$$

u_1 è una funzione di y e di z ed esprime di quanto ogni punto della sezione $A_k\ B_k$ (*Fig.* 25ª, *tav.* IV) base del tronco che si considera, si è allontanato dal piano yz nel senso parallelo all'asse delle x. La deformazione dovendo essere piccolissima e le sezioni essendo infinitesime, si potrà accettare come valore sufficientemente approssimato per u_1 una funzione lineare di y e di z, cioè supporre $u_1 = c + g_1\ y + g_2 z$ e quindi

$$\frac{du_1}{dy} = g_1 \qquad \frac{du_1}{dz} = g_2$$

in cui g_1 e g_2 sono coefficienti costanti, che rappresentano gli strisciamenti corrispondenti al centro della sezione base $A_k\ B_k$ misurati rispetto all'asse delle y e delle z. Ciò equivale a considerare invece della vera superficie deformata il piano, che le è tangente nel punto, che prima della deformazione era il centro della sezione: trattandosi di zone infinitesime, la sostituzione del piano tangente alla superficie deformata non può influenzare molto notevolmente i risultati. In questa ipotesi le formole (105) diventano:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= E i_x = E i + E\theta_y z - E\theta_z y \\ p_{xy} &= G g_{xy} = G g_1 - G\theta_x z \\ p_{xz} &= G g_{xz} = G g_2 + G\theta_x y \end{aligned}\right\} \quad (106)$$

$$\left.\begin{aligned} L = \frac{1}{2}\int dx\,dy\,dz \left(\frac{p^2_{xx}}{E} + \frac{p^2_{xy}}{G} + \frac{p^2_{xz}}{G}\right) = \int dx\,dy\,dz\,[E i^2_x + \\ + G g^2_{xy} + G g^2_{xz}] = \frac{1}{2}\int dx\,dy\,dz\,[E(i + z\theta_y - y\theta_z)^2 + \\ + G(g_1 - z\theta_x)^2 + G(g_2 + y\theta_x)^2] = \frac{1}{2}\int dx\,dy\,dz \Big[E(i^2 + z^2\theta^2_y + \\ + y^2\theta^2_z + 2i\theta_y z - 2i\theta_z y - 2\theta_y\theta_z yz) + G\,[g^2_1 + g^2_2 + \theta^2_x(y^2 + \\ + z^2) - 2g_1\theta_x z + 2g_2\theta_x y] \Big] \end{aligned}\right\} \quad (107).$$

Se si integra questa espressione rispetto alla sezione e si conviene di prendere gli assi delle y e delle z non solo passanti pel centro

di gravità di ogni sezione, ma anche coincidenti cogli assi principali d'inerzia della medesima

$$\int y\,dy\,dz=\int y\,d\omega=0 \qquad \int z\,dy\,dz=\int z\,d\omega=0$$

perchè sono i momenti statici della figura rispetto a due assi passanti pel suo centro di gravità

$$\int yz\,dy\,dz=\int yz\,d\omega=0$$

perchè è il prodotto d'inerzia della sezione rispetto agli assi principali. Finalmente se si indica con A l'area della sezione, con I_x, I_y, I_z i suoi momenti d'inerzia presi rispetto ai tre assi delle x, delle y e delle z, rappresentando con r la distanza di un punto qualsiasi della sezione dal centro di gravità,

$$\int dy\,dz=\int d\omega=A \qquad \int z^2\,dy\,dz=\int z^2\,d\omega=I_y$$

$$\int y^2\,dy\,dz=\int y^2\,d\omega=I_z \qquad \int (y^2+z^2)\,dy\,dz=\int r^2\,d\omega=I_x$$

e l'espressione del lavoro di deformazione (107) diventa

$$\left.\begin{aligned} L=\frac{1}{2}\int dx[EA\,i^2+EI_y\theta_y^{\,2}+EI_z\theta_z^{\,2}+ \\ +GA\,g_1^{\,2}+GA\,g_2^{\,2}+GI_x\theta_x^{\,2}] \end{aligned}\right\} (108).$$

Se col mezzo di una sezione σ_k piana normale all'asse del corpo si suppone divisa la linea materiale (*Fig.* 24ª, *tav.* III) in due parti, l'effetto di una di queste sull'altra potrà sempre essere rappresentato da tre forze X, Y, Z parallele agli assi $(O_k xyz)$ e passanti pel punto O_k e da tre momenti M_x, M_y, M_z intorno agli stessi assi. Se il solido elastico a sezione infinitesima è in equilibrio, queste quantità dovranno essere uguali e di segno contrario alle risultanti ed ai momenti risultanti delle forze elastiche p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}, che agiscono nella sezione σ_k, e per un teorema dimostrato al numero 37

esse debbono essere uguali alle derivate del lavoro di deformazione prese rispetto alle deformazioni cui corrispondono, quindi

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{d\left(\frac{dL}{dx}\right)}{di} = EA\,i & M_x &= \frac{d\left(\frac{dL}{dx}\right)}{d\theta_x} = GI_x\theta_x \\ Y &= \frac{d\left(\frac{dL}{dx}\right)}{dg_1} = GA\,g_1 & M_y &= \frac{d\left(\frac{dL}{dx}\right)}{d\theta_y} = EI_y\theta_y \\ Z &= \frac{d\left(\frac{dL}{dx}\right)}{dg_2} = GA\,g_2 & M_z &= \frac{d\left(\frac{dL}{dx}\right)}{d\theta_z} = EI_z\theta_z \end{aligned}\right\} \quad (109).$$

Da queste equazioni si ricavano per le deformazioni i valori seguenti

$$\left.\begin{aligned} i &= \frac{X}{EA} & \theta_x &= \frac{M_x}{GI_x} \\ g_1 &= \frac{Y}{GA} & \theta_y &= \frac{M_y}{EI_y} \\ g_2 &= \frac{Z}{GA} & \theta_z &= \frac{M_z}{EI_z} \end{aligned}\right\} \quad (110)$$

che sostituiti nell'espressione (108) del lavoro di deformazione danno

$$L = \frac{1}{2}\int dx\left(\frac{X^2}{EA} + \frac{Y^2}{GA} + \frac{Z^2}{GA} + \frac{M^2_x}{GI_x} + \frac{M^2_y}{EI_y} + \frac{M^2_z}{EI_z}\right) \quad (111)$$

formola, che contiene soltanto i momenti e le risultanti delle forze esterne. Se quest' ultima espressione del lavoro di deformazione si deriva rispetto alle forze esterne, come si è già dimostrato al numero 38, si ottengono le deformazioni; infatti

$$\frac{d\left(\frac{dL}{dx}\right)}{dX} = \frac{X}{EA} = i \qquad \frac{d\left(\frac{dL}{dx}\right)}{dM_x} = \frac{M_x}{GI_x} = \theta_x \quad (112)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\left(\frac{dL}{dx}\right)}{dY}&=\frac{Y}{GA}=g_1 & \frac{d\left(\frac{dL}{dx}\right)}{dM_y}&=\frac{M_y}{EI_y}=\theta_y \\ \frac{d\left(\frac{dL}{dx}\right)}{dZ}&=\frac{Z}{GA}=g_2 & \frac{d\left(\frac{dL}{dx}\right)}{dM_z}&=\frac{M_z}{EI_z}=\theta_z \end{aligned}\right\} \quad (112)$$

ed in causa delle (106) le forze elastiche prendono i valori seguenti:

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}&=Ei_x=Ei+E\theta_y z-E\theta_z y=\frac{X}{A}+\frac{M_y}{I_y}z-\frac{M_z}{I_z}y & p_{yy}&=0 \\ p_{xy}&=Gg_{xy}=Gg_1-G\theta_x z=\frac{Y}{A}-\frac{M_x}{I_x}z & p_{zz}&=0 \\ p_{xz}&=Gg_{xz}=Gg_2+G\theta_x y=\frac{Z}{A}+\frac{M_x}{I_x}y & p_{yz}&=0 \end{aligned}\right\} \quad (113).$$

Queste formole sono soltanto approssimate perchè alle funzioni $\frac{du_1}{dy}$ e $\frac{du_1}{dz}$ si sono sostituite le costanti g_1 e g_2; se si vuole che oltre ai valori di p_{xx}, siano esatti anche quelli di p_{xy} e p_{xz}, allora bisogna determinare u_1 col mezzo delle equazioni (95) e (96) numero 51. Nel caso particolare, che ora studiamo $p_{yy}=0$, $p_{zz}=0$, $p_{yz}=0$ in tutti i punti, $p_{nx}=0$, $p_{ny}=0$, $p_{nz}=0$ per tutta la superficie laterale, inoltre $\cos\alpha=0$ (o può ritenersi sensibilmente come tale quando la forma della sezione varî leggermente da punto a punto nelle condizioni ammesse al numero precedente) quindi le equazioni di equilibrio nell'interno del corpo si riducono a

$$\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{xz}}{dz}=0 \quad (114)$$

e quelle relative alla superficie a

$$p_{xy}\cos\beta+p_{xz}\cos\gamma=0 \quad (115).$$

L'asse delle x essendo normale alla sezione (*Fig.* 23ª, *tav.* III)

$$\cos\gamma=\operatorname{sen}\beta \qquad tg\beta=-\frac{dy}{dz}$$

e la (115) può scriversi

$$p_{xy}dz - p_{xz}dy = 0.$$

In generale i, θ_x, θ_y, θ_z varieranno leggermente con s (lunghezza dell'arco misurata sull'asse), quindi in un tronco molto corto di asta potranno esser considerate come costanti, per cui l'equazione (114) diventa

$$\frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = 0.$$

Se il corpo si suppone isotropo

$$p_{xy} = Gg_{xy} = G\left(\frac{du_1}{dy} - z\theta_x\right) \qquad p_{xz} = Gg_{xz} = G\left(\frac{du_1}{dz} + y\theta_x\right)$$

e le equazioni (114) e (115) diventano

$$\frac{d^2u_1}{dy^2} + \frac{d^2u_1}{dz^2} = 0$$

$$\left(\frac{du_1}{dy} - z\theta_x\right)dz - \left(\frac{du_1}{dy} + y\theta_x\right)dy = 0$$

che sono le equazioni trovateda Barré de Saint-Venant, Kirchhoff, ecc., per la determinazione del valore della funzione u_1.

Se si suppone che il corpo abbia un asse di simmetria, allora (Num. 43) si ha ancora

$$p_{xy} = G_1 g_{xy} = G_1\left(\frac{du_1}{dy} - z\theta_x\right) \qquad p_{xz} = G_1 g_{xz} = G_1\left(\frac{du_1}{dz} + y\theta_x\right).$$

Se il corpo ha tre assi di simmetria, di cui uno tangente all'asse del solido, allora i due coefficienti G (*) sono diversi

$$p_{xy} = G_1\left(\frac{du_1}{dy} - z\theta_x\right) \qquad p_{xz} = G_2\left(\frac{du_1}{dz} + y\theta_x\right)$$

(*) $G_1 = \Sigma \frac{\varepsilon}{r^2} \Delta^2 y \Delta^2 x$, $G_2 = \Sigma \frac{\varepsilon}{r^2} \Delta^2 z \Delta^2 x$ (Num. 43, pag. 128).

e le formole (114) e (115), che servono a determinare u_1, diventano

$$G_1\frac{d^2u_1}{dy^2}+G_2\frac{d^2u_1}{dz^2}=0$$

$$G_1\left(\frac{du_1}{dy}-z\,\theta_x\right)dz-G_2\left(\frac{du_1}{dz}+y\,\theta_x\right)dy=0.$$

Se non si ammette che in via approssimativa u_1 possa ritenersi una funzione lineare di y e z e si vuole determinarla rigorosamente ricorrendo alle equazioni (114) e (115), allora nella ricerca del lavoro di deformazione corrispondente al tronco infinitesimo della linea materiale A_0B_0, A_nB_n (*Fig.* 25ª, *tav.* IV) compreso fra le due sezioni infinitamente vicine A_kB_k, $A_{k+1}B_{k+1}$ $\frac{du_1}{dy}$, $\frac{du_1}{dz}$ risulteranno in generale per ogni sezione normale all'asse della linea variabili da punto a punto, quindi negli integrali estesi a tutta una sezione (Form. 107), non potranno più essere portate fuori del simbolo $\int$ come fattori costanti. In questo caso le espressioni del lavoro in funzione delle forze esterne Y, Z e del momento M_x non saranno più $\frac{Y^2}{2GA}dx$, $\frac{Z^2}{2GA}dx$, $\frac{M_x^2}{2GI_x}dx$ ma dovranno essere moltiplicate per un coefficiente di correzione V dipendente dalla sezione e da determinarsi separatamente per ciascuna forma di sezione. Se si indica con V il coefficiente di correzione corrispondente allo sforzo radente o tagliante Y, $V=\frac{G\int\left(\frac{du_1}{dy}\right)^2dy\,dz}{\frac{Y^2}{GA}}$ ed in modo analogo si possono determinare i coefficienti di correzione corrispondenti al caso che abbia luogo soltanto lo sforzo Z, oppure il momento M_x, e finalmente quando tutte queste azioni abbiano luogo contemporaneamente. È importante avvertire che supporre di poter sostituire $\frac{du_1}{dy}$ e $\frac{du_1}{dz}$ con due costanti g_1 e g_2 come risultato finale equivale ad accettare l'ipotesi, ordinariamente in uso fra gli ingegneri, che le deformazioni corrispondenti ai diversi punti di una sezione normale all'asse di una linea materiale coincidano con quelle, che si avrebbero qualora la sezione stessa rimanendo indeformata si fosse leggermente spostata dalla posizione primitiva. Questa osser-

vazione rende manifesto che tale supposizione, comunemente detta *ipotesi della conservazione delle sezioni piane*, conduce a risultati abbastanza esatti per l'espressione di i_x nel caso di linee materiali infininitamente sottili, mentre invece dà risultati soltanto approssimati per gli scorrimenti g_{xy} e g_{xz}. Per sè stessa questa ipotesi non condurrebbe al risultato $p_{yy}=p_{zz}=p_{yz}=0$, poichè la nullità delle deformazioni i_y, i_z, g_{yz} in base alle formole generali, che danno le forze elastiche in funzione delle deformazioni (Num. 43) non implica la nullità delle forze p_{yy}, p_{zz}, p_{xz}; gli ingegneri quindi completano la ipotesi della conservazione delle sezioni piane accettando il principio che gli sforzi elastici nelle direzioni degli assi delle x, y, z, siano direttamente proporzionali alle deformazioni, che avvengono in quelle direzioni. Senza essere esatte, queste due ipotesi in certo qual modo si completano e si compensano perchè per ipotesi essendo nulle le tre deformazioni in i_y, i_z, g_{yz}, riescono nulle anche le forze corrispondenti p_{yy}, p_{zz}, p_{yz}, come appunto si è dimostrato nel numero precedente. Questa osservazione fa comprendere come per uno studio di prima approssimazione tali ipotesi possano essere accettate per la grande semplicità, colla quale partendo da esse si possono determinare le relazioni fra le forze elastiche agenti in una data sezione e le forze esterne alla sezione stessa.

Se $p_{xx}=0$ e p_{xy} e p_{xz} sono funzione lineari in y e z, le equazioni (114) e (115) sono completamente verificate nel caso di una composizione molecolare qualsiasi quando la curva, che limita la sezione σ_k sia di secondo grado (*).

58. Influenza delle forze e dei momenti delle forze esterne ad ogni sezione nelle espressioni degli sforzi unitari subiti dal materiale. Problema di Barré de Saint-Venant. — L'espressione del lavoro di deformazione in funzione delle forze esterne ad ogni sezione è (111)

$$L=\frac{1}{2}\int dx\left[\frac{X^2}{EA}+\frac{Y^2}{GA}+\frac{Z^2}{GA}+\frac{M^2_x}{GI_x}+\frac{M^2_y}{EI_y}+\frac{M^2_z}{EI_z}\right]$$

trattandosi di sezioni di area piccolissima i momenti d'inerzia I_x, I_y, I_z potranno riguardarsi come infinitesimi di ordine superiore rispetto all'area A, perchè sono di quarto grado rispetto alle dimensioni della sezione, quindi tutte le volte che i valori delle X, Y, Z sono comparabili con quelli di M_x, M_y, M_z, ossia tutte le volte che colle ordinarie unità di misura essi sono rappresentati da numeri aventi un rapporto finito, l'influenza dei termini, che

(*) Barré de Saint-Venant, Opera citata, pag. 606.

contengono X, Y, Z, è trascurabile nel calcolo del lavoro rispetto a quella dei termini, che contengono M_x, M_y, M_z e per una ricerca di prima approssimazione può essere sufficiente tener calcolo soltanto delle coppie M_x, M_y, M_z. Bisogna però ricordare che ciò è soltanto permesso quando sia constatato che in tutte le sezioni le coppie e le forze hanno valori comparabili; se in qualche sezione il momento diventa piccolissimo, oppure le forze diventano grandissime, allora l'effetto delle X, Y, Z, non può più essere trascurato. Se le coppie M_x, M_y, M_z hanno un valor zero, allora il lavoro di deformazione sarà dovuto soltanto all'influenza delle risultanti delle forze esterne prese parallelamente agli assi, cioè ai termini che contengono X, Y, Z.

Le formole (113) che danno i valori di p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} sono state determinate supponendo divisa la linea materiale A_1 A_n in due tronchi S e D col mezzo di sezioni σ_k normali all'asse (*Fig.* 24ª, *tav.* III): questo processo è applicabile fino alle sezioni adiacenti alle basi estreme, quindi esse converranno per tutta la lunghezza del solido ad eccezione di due tronchi infinitesimi, cioè aventi una lunghezza comparabile alle dimensioni trasversali delle sezioni e corrispondenti ciascuno alle basi del corpo. In questi due tronchi le formole (113) non potranno dare che valori largamente approssimati ed il massimo errore potrà essere raggiunto in corrispondenza delle basi, sulle quali appunto si suppone una distribuzione qualsiasi delle forze sollecitanti. Appena però la distanza fra una delle basi e la sezione σ_k, che si considera, diventa considerevole rispetto alle sue dimensioni trasversali, i valori delle p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} debbono essere riguardati come corrispondenti entro i limiti della teoria svolta e l'influenza della distribuzione delle forze sulle basi estreme non si fa sentire in modo apprezzabile.

Osservazione. — Dalle cose dette sulle forze e le deformazioni elastiche sembra che si possa enunciare senza ulteriore dimostrazione il seguente lemma: *Se sopra due corpi simili e della stessa materia agiscono nei punti omologhi forze aventi valori proporzionali, saranno simili anche le deformazioni totali subìte dai due corpi e le deformazioni unitarie e le forze elastiche unitarie, che ne dipendono, avranno i medesimi valori in entrambi i sistemi* (*). Un cilindro o prisma retto potrà sempre esser considerato come simile ad un tronco molto corto della linea materiale poc'anzi studiata: se si suppone che la sua superficie laterale non sia sollecitata da nessuna forza e che soltanto sulle basi estreme agiscano

(*) Barré de Saint-Venant, Opera citata, pag. 836.

forze tali, che la loro componente normale abbia per espressione generale

$$p_{xx} = Ei + Ez\theta_y - Ey\theta_z = \frac{X}{A} + \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y \qquad (116)$$

e le componenti tangenziali

$$\left.\begin{aligned} p_{xy} &= G\left(\frac{du_1}{dy} - z\theta_x\right) \\ p_{xz} &= G\left(\frac{du_1}{dz} + y\theta_x\right) \end{aligned}\right\} \qquad (116)$$

la funzione u_1 essendo determinata dall'insieme delle due equazioni

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} = 0 \qquad (114)$$

$$\left(\frac{du_1}{dy} - z\theta_x\right)dz - \left(\frac{du_1}{dy} + y\theta_x\right)dy = 0 \qquad (117)$$

le deformazioni unitarie saranno le stesse, che si verificano nel solido a sezione infinitesima studiato al numero precedente, le tre forze elastiche p_{yy}, p_{zz}, p_{yz} avranno in tutto il corpo il valor zero e le p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} i valori dati dalle (116). Le condizioni (116) e (114) congiunte alla nullità delle forze sulla superficie laterale sono appunto quelle trovate da Barré de Saint-Venant nella risoluzione di questo problema, che prende il nome da Lui, perchè primo vinse le difficoltà che presentava (*). Se le forze agenti sulle basi estreme sono distribuite in modo diverso da quello importato dalle formole (116), purchè le forze ed i momenti risultanti abbiano gli stessi valori, in causa delle osservazioni fatte alla fine del paragrafo i valori delle forze elastiche e delle deformazioni nell'interno del solido non saranno sensibilmente variati, e solo in vicinanza delle basi per due tronchi aventi una lunghezza comparabile alle dimensioni trasversali della sezione le formole (113) potranno dare valori, che si allontanino sensibilmente dal vero.

(*) Barré de Saint-Venant, Opera citata.

59. Discussione intorno ai limiti d'approssimazione corrispondenti alle formole trovate nei numeri precedenti. — Le formole

$$\left.\begin{aligned}
&p_{xx}=Ei_x=Ei+E\theta_y z-E\theta_z y=\frac{X}{A}+\frac{M_y}{I_y}z-\frac{M_z}{I_z}y \qquad p_{yy}=0\\
&p_{xy}=Gg_{xy}=Gg_1-G\theta_x z=\frac{Y}{A}-\frac{M_x}{I_x}z \qquad p_{zz}=0\\
&p_{xz}=Gg_{xz}=Gg_2+G\theta_x y=\frac{Z}{A}+\frac{M_x}{I_x}y \qquad p_{xz}=0\\
&L=\frac{1}{2}\int dx\,dy\,dz\left(\frac{p^2_{xx}}{E}+\frac{p^2_{xy}}{G}+\frac{p^2_{xz}}{G}\right)=\frac{1}{2}\int dx\,dy\,dz\,[E(i+\\
&+z\theta_y-y\theta_z)^2+G(g_1-z\theta_x)^2+G(g_2+y\theta_x)^2]
\end{aligned}\right\} \quad (118)$$

danno valori esatti rispetto a p_{xx} e soltanto approssimati rispetto a p_{xy} e p_{xz}, perchè le due funzioni $\frac{du_1}{dy}$ e $\frac{du'}{dz}$ sono state sostituite colle costanti g_1 e g_2; l'errore che si commette sarà in generale dovuto per la maggior parte al momento M_x, poichè si è dimostrato che l'influenza delle forze nel calcolo del lavoro è trascurabile rispetto a quella dei momenti, ad eccezione di casi particolari già esaminati.

L'integrazione delle (114) e (115) mostra che per una sezione limitata al suo contorno da una linea di 2° grado, i valori di p_{xy} e p_{xz} corrispondono sufficientemente, poichè si ottengono per g_{xy} e g_{xz} funzioni lineari in y e z, mentre invece ciò non avviene od avviene molto meno, se le sezioni sono limitate da linee continue o tronchi di linee di diversa natura. Se lungo l'asta agiscono forze isolate (*Fig.* 26ª, *tav.* IV) P_1, P_2, P_3..., nelle sezioni ν_1, ν_2, ν_3..., in cui esse agiscono e negli adiacenti tronchi infinitesimi dell'asta (*tronchi, la cui lunghezza sia comparabile alle dimensioni trasversali della sezione*) le formole (118) non daranno che valori largamente approssimati ed il massimo errore si raggiungerà nelle sezioni ν_1, ν_2, ν_3..., mentre invece le stesse formole saranno applicabili e daranno risultati attendibili negli intervalli compresi fra ν_1 e ν_2, ν_2 e ν_3..., perchè ciascuno di questi tronchi potrà essere riguardato come un solido a sezione trasversale infinitesima sollecitato da forze alle estremità. Un' osservazione analoga si presenta per quelle sezioni σ di una trave AB (*Fig.* 27ª, *tav.* IV) in

cui vi è un brusco cambiamento di forma, in questi punti vi è soluzione di continuità ed i tronchi Av e vB a sinistra ed a destra dei medesimi vanno considerati come solidi diversi a sezione infinitesima sollecitati da forze soltanto alle basi estreme.

Finalmente le formole (106), (113) e (118) potranno ancora riguardarsi come sufficientemente approssimate quando lungo la superficie o nell'interno della linea materiale agiscono delle forze, purchè il loro valore sia molto piccolo in confronto di quelle applicate alle sezioni estreme. Infatti il lavoro di deformazione, e quindi anche le deformazioni e le forze molecolari prodotte dalle prime forze, saranno molto piccole in confronto di quelle prodotte dalle seconde: segue da ciò che non si commetterà errore sensibile se idealmente si sostituiscono le forze distribuite lungo il solido con altre staticamente equivalenti rispetto alle varie sezioni ed applicate alle sezioni estreme della linea materiale considerata ritenendo i valori delle forze e delle deformazioni elastiche ottenuti in questa ipotesi come corrispondenti al sistema di forze date: per quanto è stato detto superiormente la differenza fra questi valori ipotetici ed i valori reali sarà piccolissima e praticamente trascurabile.

Riassumendo le formole (118) danno risultati sufficientemente esatti nei diversi punti del corpo considerato, nelle sezioni singolari per forma o per carico danno valori notevolmente diversi dal vero, nei tronchi adiacenti per una lunghezza comparabile alle dimensioni trasversali delle sezioni danno valori soltanto largamente approssimati. Queste stesse conclusioni si possono ritenere sufficientemente approssimate anche quando lungo l'asse del solido agiscono delle forze, purchè esse siano molto piccole in confronto di quelle agenti nelle sezioni estreme della linea materiale, o che si considerano come tali perchè sezioni singolari per forma o per carico.

60. Solidi elastici nei quali una sola dimensione è infinitamente piccola rispetto alle altre due. Difficoltà che si incontrano cercando una soluzione generale di questa questione. — I corpi elastici in cui una delle tre dimensioni è infinitamente piccola rispetto alle altre due si indicano col nome generale di superficie elastiche. Non è difficile dimostrare nel caso delle lamine piane sollecitate in modi determinati da forze agenti solo al loro contorno che tre forze molecolari sono nulle, e precisamente sono quelle, che hanno direzione normale alla superficie media della superficie elastica considerata (ogni elemento materiale della superficie elastica può essere considerato come un piccolo prisma non sollecitato da forza alcuna sulle sue basi estreme). Non è però facile trovare delle relazioni generali

semplici (*) anche solo approssimate, fra le forze esterne e le forze elastiche interne, poichè facendo una sezione nella superficie non si ha modo di determinare per ogni elemento della sezione la forza ed il momento risultante equivalenti all'effetto prodotto dalle forze esterne, e quindi non si possono determinare relazioni generali fra esse e le derivate del lavoro, che permettano di determinare le forze elastiche.

Ciò non potrà farsi che in casi particolari, in cui, in causa della simmetria di forma e di carico, che si presenta nella superficie elastica, si possono, *a priori*, determinare in ogni punto gli sforzi meccanicamente equivalenti all'effetto delle forze esterne: trattandosi di poche soluzioni particolari relative alle sfere, ai cilindri, alle vôlte a cupola, non sembra che essi possano trovar posto in questa parte generale della *Teoria dei corpi elastici applicata alla scienza delle costruzioni*, e che invece debbono collocarsi nella seconda parte di questo corso, dove appunto saranno ordinatamente risolute le principali questioni particolari, che si possono presentare all'ingegnere.

CAPITOLO V.

Formole approssimate della resistenza dei materiali.

61. Classificazione dei corpi resistenti, che si incontrano nelle costruzioni. — Dalle cose dette nel capitolo precedente appare come il problema d'elasticità non possa essere risoluto in modo generale; solo in certi casi speciali è possibile determinare alcune relazioni particolari dipendentemente dalla forma del corpo e dalla natura delle forze, che agiscono sul medesimo. All'ingegnere occorrono formole che possano convenire ai casi, che si presentano ordinariamente nella pratica; non è indispensabile che esse siano esatte, è sufficiente che siano abbastanza approssimate per non dar luogo ad errori sensibili nelle applicazioni, ossia che gli errori siano più piccoli delle quantità, che sono ritenute come apprezzabili. Quindi l'ingegnere nei calcoli relativi alla stabilità e resistenza delle costruzioni può spesso trascurare certe quantità, che hanno importanza secondaria, ed introdurre anche ipotesi spe-

---

(*) Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides avec des notes de* Barré de Saint-Venant.

ciali sulla forma delle deformazioni e sulla natura e distribuzione degli sforzi, purchè ciò sia fatto razionalmente e con discernimento, cioè riferendosi ai teoremi ed ai criteri forniti dalla teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici ed ai risultati dell'osservazione e dell'esperienza. È poi indispensabile verificare ogni volta che si debba risolvere una determinata questione, se realmente hanno luogo le condizioni richieste per poter introdurre legittimamente le semplificazioni superiormente accennate.

Se si considerano i solidi in uso nelle costruzioni è facile accorgersi che essi possono classificarsi in tre grandi categorie:

a) Solidi in cui una dimensione è prevalente sulle altre due (in cui due dimensioni sono molto piccole rispetto alla terza) che gli ingegneri indicano col nome generale di *travature;*

b) Solidi in cui una dimensione è piccola in confronto delle altre due: tali sono le vôlte, le pareti in muratura od in metallo e le superficie resistenti in genere;

c) Corpi in cui le tre dimensioni sono comparabili, ossia i cui rapporti sono dati da numeri che non si allontanano molto dall'unità, come appunto avviene nei grandi ammassi, che spesso si debbono considerare nei lavori in terra.

In base a questo concetto volendo studiare i problemi reali, che si presentano all'ingegnere, ammettendo di accettare anche soluzioni approssimate, purchè l'errore non superi limiti determinati, si suole dividere questa trattazione in tre parti o sezioni:

a) *Teoria dell'equilibrio delle travature;*

b) *Teoria dell'equilibrio delle superficie resistenti;*

c) *Teoria dell'equilibrio dei sistemi in cui nessuna dimensione è prevalente sulle altre.*

In causa delle osservazioni fatte al numero 60 non è possibile fare una teoria generale dell'equilibrio delle superficie, e molto meno dei corpi o sistemi in genere senza alcuna dimensione prevalente, dedotta razionalmente dalle formole del capitolo IV anche in via soltanto approssimata, estendendo le formole convenienti alle superficie elastiche leggermente deformate in modo analogo a quello usato ai numeri 57, 58, 59 per le linee materiali elastiche ad asse rettilineo o leggermente curvo. Riservando quindi alla statica delle costruzioni lo studio dei pochi casi particolari in cui il problema dell'equilibrio e delle deformazioni dei corpi appartenenti alla seconda o terza sezione è solubile non solo, ma anche facilmente solubile con formole suscettibili di entrare nella pratica, ci occuperemo ora soltanto della teoria generale dell'equilibrio delle travature determinando le formole in uso fra gli ingegneri per la soluzione dei problemi relativi a questi corpi.

Teoria dell'equilibrio delle travature.

62. Travatura. Sua definizione. Travature composte. — Se si immagina nello spazio (*Fig.* 27ª, *tav.* IV) una linea AB senza soluzione di continuità, cuspidi e punti doppî, che abbia una piccola curvatura e variabile lentamente da punto a punto e si suppone in un piano σ normale a questa curva tracciata una figura m tale, che il suo centro di gravità O cada sulla AB e che la sua massima dimensione trasversale sia piccola in confronto del raggio di curvatura in O, dicesi travatura il solido generato dalla figura m, mentre il piano σ si muove lungo la linea AB nell'ipotesi che durante il movimento siano sempre verificate le condizioni enunciate e che nel passaggio del piano σ da una posizione ad un'altra vicina, la figura m varî debolmente in confronto della distanza fra le due posizioni considerate contata sulla linea AB: AB dicesi asse longitudinale della travatura e fibra la linea generata da uno qualsiasi dei punti della sezione σ (*): la fibra generata dal punto O coincide coll'asse AB e dicesi anche fibra media. È evidente che se la figura m invece di avere la massima dimensione trasversale piccola in confronto del raggio di curvatura fosse tale che tutte le sue dimensioni trasversali fossero quantità infinitesime, la definizione di travatura coinciderebbe con quella del solido studiato ai numeri 56, 57 e seguenti e che quest'ultimo può riguardarsi come il limite di una travatura, nella quale le dimensioni trasversali delle sezioni normali all'asse vanno diminuendo fino a diventare quantità infinitamente piccole. L'ingegnere non ha bisogno dell'esattezza matematica, ma soltanto di un'approssimazione tale che l'errore sia minore delle quantità, che in pratica si riguardano come apprezzabili; egli può ritenere come un infinitamente piccolo ciò che è soltanto molto piccolo in confronto dell'unità, a cui si riferiscono le misure, e può riguardare come esatte in vicinanza del limite quelle formole che non lo sarebbero rigorosamente che quando si verificasse quest'ultima supposizione e come approssimate quelle, che rigorosamente applicate darebbero risultati non molto diversi dal vero. Segue da queste considerazioni che le formole (106), (113) e (118) che converrebbero ad un solido a sezione trasversale infinitesima sollecitato da forze applicate alle sue basi estreme e che potrebbero essere estese con sufficiente approssimazione anche al caso che vi siano delle forze applicate alla superficie laterale e lungo l'asse del corpo, purchè queste siano abbastanza piccole in confronto

(*) Bresse, Opera citata.

di quelle applicate all'estremità del tronco che si considera, possono essere riguardate dall'ingegnere pei bisogni delle applicazioni al calcolo dalla resistenza delle travature come formole esatte quando le sezioni trasversali hanno dimensioni molto piccole in confronto della lunghezza dell'asse della trave, e come formole approssimate, quando le dimensioni delle sezioni trasversali sono una frazione notevole della lunghezza dell'asse: l'approssimazione è tanto maggiore quanto più piccolo è il rapporto fra queste quantità. Tanto nell'un caso come nell'altro le formole (106) e (113) ecc. non potranno dare che risultati inesatti o solo largamente approssimati nelle sezioni e nei piccoli tronchi singolari per forma o per carico (*tronchi di travatura aventi lunghezza comparabile alle dimensioni della sezione trasversale*).

Se più travi sono riunite fra loro in un modo qualsiasi il sistema che ne risulta chiamasi *travatura composta.*

63. Ipotesi fondamentali della resistenza delle travature. — Nello studio dell'equilibrio delle travature gli ingegneri sogliono partire dalle ipotesi seguenti:

a) Tutti i punti, che si trovano in una sezione piana normale all'asse della travatura prima della deformazione, vi si trovano anche dopo e la sezione può considerarsi come spostata nello stesso modo di un corpo rigido;

b) Le forze molecolari sono direttamente proporzionali alle deformazioni parallele o normali all'asse riferite all'unità di lunghezza contata sull'asse stesso.

Siano (*Fig.* 28ª, *tav.* IV) $A_k B_k$, $A_{k+1} B_{k+1}$ due sezioni normali all'asse della travatura ed abbastanza vicine per poter essere riguardate come parallele, O_k, x, y, z, O_{k+1}, x, y, z due terne di assi aventi le origini nei centri di gravità O_k ed O_{k+1} delle due sezioni, l'asse delle x normale al loro piano e quindi tangente all'asse del solido, gli assi delle y e delle z giacenti nei piani delle corrispondenti sezioni. Partendo dalle ipotesi superiori qualsiasi deformazione o spostamento di un punto m della sezione $A_{k+1} B_{k+1}$ potrà essere espresso in funzione di tre traslazioni a, b, c, secondo i tre assi O_{k+1}, x, y, z e di tre rotazioni ω_x, ω_y, ω_z intorno agli assi medesimi. Se si indicano con u, v, w, i tre spostamenti paralleli agli assi del punto m e si osserva che $x = 0$ per tutti i punti della $A_{k+1} B_{k+1}$

$$\left.\begin{aligned} u &= a + z\omega_y - y\omega_z \\ v &= b - z\omega_x \qquad\qquad w = c + y\omega_x \end{aligned}\right\} \quad (119)$$

in cui u, v, w sono le deformazioni totali nel senso dell'asse ed in senso ad esso normale, che subiscono le estremità delle fibre del tronco infinitesimo $A_k B_k$, $A_{k+1}\ B_{k+1}$.

Se si indicano con δ_x l'allungamento unitario parallelamente all'asse della trave, con δ_y e δ_z gli spostamenti unitari in senso normale all'asse (*trasversale alla sezione*) e corrispondenti al punto O_k e si pone $O_k O_{k+1} = \Delta s$ e

$$\left.\begin{array}{ll} \text{limite}\dfrac{a}{\Delta s} = i & \text{limite}\dfrac{\omega_x}{\Delta s} = \theta_x \\ \text{limite}\dfrac{b}{\Delta s} = g_1 & \text{limite}\dfrac{\omega_y}{\Delta s} = \theta_y \\ \text{limite}\dfrac{c}{\Delta s} = g_2 & \text{limite}\dfrac{\omega_z}{\Delta s} = \theta_z \end{array}\right\} \quad (120)$$

dalle (119) si ricava immediatamente

$$\left.\begin{array}{l} \delta_x = \text{limite}\dfrac{u}{\Delta s} = \text{limite}\dfrac{a}{\Delta s} + z\,\text{limite}\dfrac{\omega_y}{\Delta s} - y\,\text{limite}\dfrac{\omega_z}{\Delta s} = \\ \qquad = i + z\theta_y - y\theta_z \\ \delta_y = \text{limite}\dfrac{v}{\Delta s} = \text{limite}\dfrac{b}{\Delta s} - z\,\text{limite}\dfrac{\omega_x}{\Delta s} = g_1 - z\theta_x \\ \delta_z = \text{limite}\dfrac{w}{\Delta s} = \text{limite}\dfrac{c}{\Delta s} + y\,\text{limite}\dfrac{\omega_x}{\Delta s} = g_2 + y\theta_x \end{array}\right\} \quad (121).$$

Le forze elastiche dovendo essere proporzionali agli spostamenti unitari, $p_{yy} = 0$, $p_{zz} = 0$, $p_{yz} = 0$ perchè in quelle direzioni per ipotesi non avviene deformazione alcuna; le altre tre forze elastiche invece avranno i valori seguenti, in cui E e G sono due coefficienti da determinare coll'esperienza,

$$\left.\begin{array}{l} p_{xx} = E\delta_x = Ei + E\theta_y z - E\theta_z y \\ p_{xy} = G\delta_y = Gg_1 - G\theta_x z \\ p_{xz} = G\delta_z = Gg_2 + G\theta_x y \end{array}\right\} \quad (122)$$

e l'espressione del lavoro di deformazione L risulta

$$\left.\begin{aligned} L &= \int dx\,dy\,dz \int \left(p_{xx}\,d\delta_x + p_{xy}\,d\delta_y + p_{xz}\,d\delta_z \right) = \\ &= \int dx\,dy\,dz \int \left(p_{xx}\frac{dp_{xx}}{E} + p_{xy}\frac{dp_{xy}}{G} + p_{xz}\frac{dp_{xz}}{G} \right) = \\ &= \frac{1}{2}\int dx\,dy\,dz \left(\frac{p_{xx}^2}{E} + \frac{p_{xy}^2}{G} + \frac{p_{xz}^2}{G} \right) = \frac{1}{2}\int dx\,dy\,dz \left(E\delta_x^2 + \right. \\ &\left. + G\delta_y^2 + G\delta_z^2 \right) = \frac{1}{2}\int dx\,dy\,dz \left(E(i + z\theta_y - y\theta_z)^2 + \right. \\ &\left. + G(g_1 - z\theta_x)^2 + G(g_2 + y\theta_x)^2 \right) . \end{aligned}\right\} \quad (123).$$

Le formole che danno p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}, L e quindi anche quelle, che danno le relazioni tra le forze esterne e le forze elastiche e le deformazioni, che si possono ottenere derivando l'espressione del lavoro (123), ricavate partendo dalle due ipotesi *a*) e *b*) corrispondono esattamente a quelle ottenute con metodo più rigoroso al numero 57 e seguenti; esse quindi potranno servire nello stesso modo nelle applicazioni relative alla resistenza delle travature e daranno quella stessa approssimazione, che abbiamo già visto (Num. 58 e 59) potersi sperare da quelle formole.

Le deformazioni che avvengono in una trave in generale non saranno mai tali da lasciar indeformata la sezione trasversale, nè si può accettare a priori che tre delle sei forze molecolari siano nulle e le altre tre siano ciascuna direttamente proporzionale ad una delle deformazioni δ_x, δ_y, δ_z, poichè la teoria dell'equilibrio dei corpi elastici prova bensì che le forze sono funzioni lineari delle deformazioni, ma non che ciascuna forza dipenda da una sola deformazione; anche nel caso più semplice dei corpi isotropi (Num. 43, form. 69) si trova:

$$p_{xx} = A i_x + G i_y + G i_z \qquad p_{yy} = G i_x + A i_y + G i_z$$

$$p_{zz} = G i_x + G i_y + A i_z$$

Però l'insieme di queste due ipotesi conducendo allo stesso risultato, al quale si arriva coll'uso delle formole esatte, convenienti ai solidi a sezione infinitamente piccola rispetto alla lunghezza estese in via approssimata al caso delle travature, esse possono essere ritenute come un mezzo semplice e facile a ricordare per ricavare

le formole relative all'equilibrio di questi corpi, sebbene non interpretino esattamente il modo, nel quale avvengono le deformazioni, nè la vera ragione della nullità di tre delle forze elastiche. Da questo punto di vista l'ipotesi della conservazione delle sezioni piane può riescire grandemente utile; non bisogna però dimenticare che essa è accettabile soltanto perchè conduce agli stessi risultati della teoria esatta applicata alla soluzione approssimata dei problemi relativi all'equilibrio delle travature, ricordando che le formole alle quali essa conduce, sufficientemente esatte nei problemi dell'ingegnere per le travature in generale, non lo sono più per le sezioni singolari per forma o per carico e che esse danno valori soltanto largamente approssimati nei piccoli tronchi adiacenti a queste sezioni. Bisogna inoltre aver presente che in causa della sostituzione delle costanti g_1 e g_2 alle funzioni $\frac{du_1}{dy}$ e $\frac{du_1}{dz}$ i risultati di questa teoria corrispondono meglio alla realtà quando si debbono considerare soltanto le forze p_{xx}, cioè le deformazioni i, θ_y, θ_z, oppure la forza esterna X ed i momenti M_y ed M_z, che quando si debbono prendere in esame anche le forze tangenziali p_{xy} e p_{xz} ossia le deformazioni g_1, g_2, θ_x, oppure le forze esterne Y e Z ed il momento M_x. L'errore prodotto da questa maggiore inesattezza può specialmente diventare importante in causa del momento M_x o della rotazione θ_x (Num. 58) ad eccezione del caso in cui la sezione sia circolare (*), che per una fortunata combinazione è quasi il solo, che si presenti in pratica. Finalmente non bisogna dimenticare che l'approssimazione, che si ottiene con queste formole, diventa tanto minore quanto più grande è il rapporto fra la massima dimensione trasversale della sezione e la lunghezza dell'asse della trave, di cui si studia l'equilibrio. Tutte le volte che l'ingegnere s'incontra in un caso in cui la teoria cade più o meno in difetto (*sezioni o piccoli tronchi singolari per forma o per carico, travature molto corte*), allora egli dovrà considerare le formole della resistenza dei materiali soltanto come utili criteri, e dovrà correggerne i risultati confrontandoli a costruzioni analoghe in buone condizioni di resistenza, oppure impiegando opportuni coefficienti di correzione.

64. Formole di elasticità, di resistenza e di rottura. — Se si deriva l'espressione del lavoro di deformazione (123) rispetto alle deformazioni i, $g_1, g_2, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ e si pongono le successive derivate parziali uguali rispettivamente ad X, Y, Z, M_x, M_y, M_z con un processo uguale a quello sviluppato al numero 57 si ottengono le formole,

(*) In generale *limitata da una curva di secondo grado* (Num. 57, pag. 168).

che legano le forze esterne risultanti X, Y, Z, ed i momenti risultanti M_x, M_y, M_z, alle forze interne ed alle deformazioni. Queste formole si possono anche ricavare uguagliando le risultanti delle forze elastiche parallele agli assi ed i loro momenti intorno ai medesimi assi alle risultanti ed ai momenti risultanti delle forze esterne; se si indica con ω l'elemento di area di una sezione, per l'equilibrio deve essere (*Fig.* 29ª, *tav.* IV) (Num. 7, pag. 27).

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma p_{xx}\omega=\Sigma E\delta_x\omega=\Sigma Ei\omega+\Sigma E\theta_y z\omega-\Sigma E\theta_z y\omega=X\\
&\Sigma p_{xy}\omega=\Sigma G\delta_y\omega=\Sigma Gg_1\omega-\Sigma G\theta_x z\omega=Y\\
&\Sigma p_{zx}\omega=\Sigma G\delta_z\omega=\Sigma Gg_2\omega+\Sigma G\theta_x y\omega=Z\\
&\Sigma(-p_{xy}z+p_{xz}y)=\Sigma G(\delta_z y-\delta_y z)\omega=\Sigma Gg_2 y\omega-\Sigma Gg_1 z\omega+\\
&\qquad+\Sigma G\theta_x y^2\omega+\Sigma G\theta_x z^2\omega=M_x\\
&\Sigma p_{xx}z\omega=\Sigma E\delta_x z\omega=\Sigma Eiz\omega+\Sigma E\theta_y z^2\omega-\Sigma E\theta_z yz\omega=M_y\\
&-\Sigma p_{xx}y\omega=-\Sigma E\delta_x y\omega=-\Sigma Eiy\omega-\Sigma\theta_y zy\omega+\Sigma E\theta_z y^2\omega=M_z
\end{aligned}\right\}(124).$$

In queste formole E, G, i, g_1, g_2, θ_x, θ_y, θ_z sono quantità costanti nella sezione (E e G soltanto se si suppone uniforme la qualità della materia, di cui si compone la trave), quindi possono portarsi come cofficienti al simbolo Σ, inoltre se gli assi delle y e z si suppongono in ogni sezione coincidenti cogli assi principali d'inerzia e si indicano con A, I_x, I_y, I_z, l'area ed i momenti d'inerzia della sezione rispetto agli assi delle x, y, z, ponendo $r=\sqrt{y^2+z^2}$

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\omega=A\quad\Sigma\omega y^2+\Sigma\omega z^2=\Sigma\omega(y^2+z^2)=\Sigma\omega r^2=I_x\\
&\Sigma\omega z^2=I_y\quad\Sigma\omega y^2=I_z\quad\Sigma\omega y=0\quad\Sigma\omega z=0\quad\Sigma\omega yz=0
\end{aligned}\right\}(124^{bis})$$

e le formole superiori diventano

$$\begin{aligned}
&X=\Sigma p_{xx}\omega=EAi\qquad &&M_x=\Sigma(p_{xz}y-p_{xy}z)\omega=G\theta_x I_x\\
&Y=\Sigma p_{xy}\omega=GAg_1\qquad &&M_y=\Sigma p_{xx}z\omega=E\theta_y I_y\\
&Z=\Sigma p_{xz}\omega=GAg_2\qquad &&M_z=-\Sigma p_{xx}y\omega=E\theta_z I_z
\end{aligned}$$

dalle quali si ricava

$$\left.\begin{array}{lll} i=\dfrac{X}{EA} & g_1=\dfrac{Y}{GA} & g_2=\dfrac{Z}{GA} \\ \theta_x=\dfrac{M_x}{GI_x} & \theta_y=\dfrac{M_y}{EI_y} & \theta_z=\dfrac{M_z}{EI_z} \end{array}\right\} (125).$$

Se si indicano con R gli sforzi unitari normali alla sezione qualsiasi $A_k B_k$, e con S quelli tangenziali, con δ l'allungamento unitario parallelo all'asse della trave, con g lo strisciamento o scorrimento unitario parallelamente al piano della sezione, per ipotesi $R=E\delta$, $S=Gg$, quindi

$$\left.\begin{array}{ll} R_1=E\delta=Ei=\dfrac{X}{A} & S_3=Gg=G\theta_x r=\dfrac{M_x}{I_x}r \\ S_1=Gg=Gg_1=\dfrac{Y}{A} & R_2=E\delta=E\theta_y z=\dfrac{M_y}{I_y}z \\ S_2=Gg=Gg_2=\dfrac{Z}{A} & R_3=E\delta=E\theta_z y=\dfrac{M_z}{I_z}y \end{array}\right\} (126)$$

in cui R_1, R_2, R_3, S_1, S_2, S_3, sono gli sforzi unitari dovuti a ciascuna delle sei deformazioni. Queste formole ordinariamente si scrivono sotto la forma seguente:

$$\begin{array}{lll} X=RA & Y=SA & Z=SA \\ M_x=\dfrac{SI_x}{r} & M_y=\dfrac{RI_y}{z} & M_z=\dfrac{RI_z}{y} \end{array}$$

nelle prime tre i valori di R e di S sono costanti per tutta la sezione, nelle altre tre invece dipendono dalla distanza, che la fibra che si considera ha dall'asse di rotazione e precisamente le sono proporzionali. Se si indicano con r', u', v' i valori di r, z, y corrisopondenti alla fibra rispettivamente più lontana dall'asse delle x, delle y e delle z e si sostituiscono questi valori nelle (126) si ottiene

$$\left.\begin{array}{lll} X=RA & Y=SA & Z=SA \\ M_x=\dfrac{SI_x}{r'} & M_y=\dfrac{RI_y}{u'} & M_z=\dfrac{RI_z}{v'} \end{array}\right\} (127).$$

Finalmente ricordando le (122) e le (125) si ottengono le formole

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} = R = \frac{X}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y \\ p_{xy} = S = \frac{Y}{A} - \frac{M_x}{I_x} z \\ p_{xy} = S = \frac{Z}{A} + \frac{M_x}{I_x} y \end{aligned}\right\} \quad (128)$$

che danno gli sforzi unitarî in un punto qualsiasi della sezione.

Le formole (125) che collegano le forze esterne coi valori delle deformazioni diconsi *formole di elasticità*, le formole (126) che danno le forze elastiche unitarie in funzione delle forze esterne si chiamano *formole di resistenza*, e finalmente le formole (127) diconsi *di rottura*, perchè danno lo sforzo unitario sulla fibra più affaticata in funzione dei momenti risultanti e delle risultanti delle forze esterne. È importante osservare che ogni deformazione corrisponde ad una delle forze X, Y, Z, o dei momenti M_x, M_y, M_z e s'annulla con essi; lo stesso avviene per gli sforzi unitari R_1, R_2, R_3, S_1, S_2, S_3 (*).

Se si integra l'espressione del lavoro (123) avendo riguardo alle relazioni (124^{bis}) e si sostituiscono alle deformazioni i loro valori dati dalle (125) si ottengono le due seguenti espressioni del lavoro di deformazione, una in funzione delle deformazioni e l'altra delle forze esterne e dei loro momenti

$$L = \frac{1}{2}\int dx \left[EAi^2 + GAg^2{}_1 + GAg^2{}_2 + GI_x\theta_x{}^2 + EI_y\theta_y{}^2 + EI_z\theta_z{}^2 \right] \quad (129)$$

$$L = \frac{1}{2}\int dx \left[\frac{X^2}{EA} + \frac{Y^2}{GA} + \frac{Z^2}{GA} + \frac{M^2{}_x}{GI_x} + \frac{M^2{}_y}{EI_y} + \frac{M^2{}_z}{EI_z} \right] \quad (130).$$

Osservazione. — Non si riportano i calcoli necessari per arrivare a queste due formole perchè il loro sviluppo coincide con quello usato al numero 57 per la ricerca delle stesse formole pei solidi a sezione trasversale infinitesima, ad asse rettilineo o leggermente curvo, sollecitati soltanto da forze agenti sulle loro sezioni estreme.

(*) Qui è stato trattato il caso generale in cui si suppongono esistere tutte le deformazioni; i casi particolari si risolvono facilmente nello stesso modo supponendo uguali a zero alcune delle quantità i, g_1, g_2, θ_x, θ_y, θ_z oppure delle X, Y, Z, M_x, M_y, M_z.

65. Analisi dell'effetto prodotto dagli sforzi esterni ad ogni sezione, loro composizione, caso della sollecitazione a flessione obbliqua o deviata. — La forza X corrisponde alla deformazione i, essa ha per effetto di allontanare od avvicinare le sezioni e per questo dicesi sforzo di tensione o compressione; tutte le fibre subiscono allungamenti od accorciamenti i uguali e sforzi unitari R pure uguali.

Le due forze Y e Z corrispondono rispettivamente alle deformazioni g_1 e g_2, esse hanno per effetto di far muovere una sezione nel proprio piano parallelamente agli assi delle y e delle z, e chiamansi sforzi taglianti o di rescissione; tutte le fibre subiscono strisciamenti uniformi g_1 e g_2 e sforzi radenti unitari S_1 ed S_2 pure uniformi. Se si indica con F la risultante delle due forze Y e Z, con g lo strisciamento risultante di g_1 e g_2 e finalmente con S lo sforzo radente unitario risultante di S_1 ed S_2

$$F=\sqrt{Y^2+Z^2}=\sqrt{(GAg_1)^2+(GAg_2)^2}=GA\sqrt{g^2_1+g^2_2}=GAg \quad (131)$$

$$S=\sqrt{S^2_1+S^2_2}=\sqrt{\frac{Y^2}{A^2}+\frac{Z^2}{A^2}}=\frac{1}{A}\sqrt{Y^2+Z^2}=\frac{F}{A} \quad (132).$$

Le due formole, una di elasticità $F=GAg$ e l'altra di resistenza $F=SA$, esprimono lo strisciamento g e lo sforzo radente S in funzione dell'area della sezione A e della risultante tangenziale F delle forze esterne; esse equivalgono alle quattro formole trovate antecedentemente

$$Y=S_1A \qquad Y=GAg_1$$

$$Z=S_2A \qquad Z=GAg_2.$$

Il momento M_x corrisponde alla rotazione θ_x e tende a far ruotare la sezione intorno all'asse delle x: questa deformazione viene distinta col nome di torsione, M_x è il momento di torsione delle forze esterne, $E\theta_x I_x$ il momento delle forze molecolari resistenti alla torsione e le fibre subiscono strisciamenti g e sforzi unitari S proporzionali alla loro distanza dal centro O di gravità *(Fig.* 29ª, *tav.* IV); infatti

$$g=\theta_x r=\frac{M_x}{GI_x}r \qquad S=Gg=G\theta_x r=\frac{M_x}{I_x}r.$$

I due momenti M_y ed M_z corrispondono alle deformazioni θ_y e θ_z e tendono a far ruotare la sezione intorno a rette giacenti nel

suo piano; questa deformazione dicesi flessione, M_y ed M_z diconsi momenti inflettenti ed $E\theta_y I_y$, $E\theta_z I_z$ momenti delle forze elastiche resistenti alla flessione od anche momenti di inflessibilità, $\frac{I_y}{u'}$, $\frac{I_z}{v'}$ momenti di resistenza della sezione e le diverse fibre subiscono allungamenti od accorciamenti δ e sforzi unitari R rappresentati dalle

$$\left.\begin{aligned} \delta = \theta_y z = \frac{M_y}{EI_y} z \qquad & R = E\delta = E\theta_y z = \frac{M_y}{I_y} z \\ \delta = \theta_z y = \frac{M_z}{EI_z} y \qquad & R = E\delta = E\theta_z y = \frac{M_z}{I_z} y \end{aligned}\right\} (133).$$

Sia (*Fig.* 30ª, *tav.* IV) $A\,B\,C\,D$ la sezione della trave riferita agli assi delle y e delle z passanti pel centro di gravità O e coincidenti cogli assi principali d'inerzia, M il momento risultante di M_y ed M_z, θ la rotazione risultante di θ_y e θ_z, $O\,L$ una retta giacente nel piano della figura e normale all'asse $f\,O\,f'$ della rotazione θ, $mp = w$ la distanza di un punto m qualsiasi della sezione dall'asse $f\,O\,f'$, $mm_1 = y$, $m_1 O = z$, OE l'asse di sollecitazione, ossia la retta secondo la quale il piano del momento M interseca la sezione $ABCD$, δ l'angolo fOE compreso dall'asse di flessione e da quello di sollecitazione, e finalmente sia $\phi = EOy$, $\psi = LOy$. Dalla figura si ricava

$$w = z\,\mathrm{sen}\,\psi + y\cos\psi$$

d'altra parte

$$M_y = M\,\mathrm{sen}\,\phi \qquad \theta_y = \theta\,\mathrm{sen}\,\psi$$

$$M_z = M\cos\phi \qquad \theta_z = \theta\cos\psi$$

sostituendo questi valori nelle formole di elasticità si ottiene

$$M\,\mathrm{sen}\,\phi = E\theta I_y\,\mathrm{sen}\,\psi$$

$$M\cos\phi = E\theta I_z\cos\psi$$

dividendo membro a membro le due equazioni

$$\mathrm{tang}\,\phi = \frac{I_y}{I_z}\,\mathrm{tang}\,\psi = \frac{A\rho_y^2}{A\rho_z^2}\,\mathrm{tang}\,\psi = \frac{\rho_y^2}{\rho_z^2}\,\mathrm{tang}\,\psi = \frac{\rho_y^2}{\rho_z^2}\cot\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right)$$

in cui ρ_y e ρ_z sono i raggi di girazione dalla figura intorno agli assi delle y e delle z. Questa relazione mostra che l'asse di flessione e quello di sollecitazione sono diametri coniugati nell'ellisse centrale d'inerzia; infatti se si indicano con a e b i semiassi di un'ellisse e con α e β gli angoli, che due diametri coniugati fanno con uno degli assi, questi sono legati dalla nota relazione (Num. 22, *Osservazione*, pag. 62).

$$\operatorname{tang}\alpha' \operatorname{tang}\alpha'' = \frac{a^2}{b^2}.$$

Moltiplicando la prima delle equazioni superiori per $\operatorname{sen}\psi$, e la seconda per $\cos\psi$ e sommando si ottiene

$$M(\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\psi + \cos\phi\cos\psi) = E\theta(I_y \operatorname{sen}^2\psi + I_z\cos^2\psi).$$

Ma

$$I_y \operatorname{sen}^2\psi + I_z\cos^2\psi = I_f$$

momento d'inerzia della sezione intorno all'asse fOf' di flessione,

$$\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\psi + \cos\phi\cos\psi = \cos(\phi - \psi) = \operatorname{sen}\delta,$$

quindi la formola precedente può anche scriversi come segue

$$M\operatorname{sen}\delta = E\theta I_f \quad (*) \qquad (134).$$

Se invece le stesse equazioni si quadrano e si sommano, si ricava

$$\frac{M^2}{E^2}\left[\frac{\operatorname{sen}^2\phi}{I_y^2} + \frac{\cos^2\phi}{I_z^2}\right] = \theta^2(\operatorname{sen}^2\psi + \cos^2\psi) = \theta$$

ossia

$$\theta = \frac{M}{E}\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\phi}{I_y^2} + \frac{\cos^2\phi}{I_z^2}}.$$

Lo sforzo unitario R per ipotesi si ottiene moltiplicando per E l'allungamento od accorciamento δ corrispondente ad ogni fibra, quindi:

$$R = E\delta = E\theta w = E\theta(y\cos\psi + z\operatorname{sen}\psi) \qquad (135).$$

(*) Bresse, Opera citata, pag. 39.

Da questa equazione si ricava $\theta = \frac{R}{Ew}$ e sostituendo a θ questo valore nelle relazioni

$$M \operatorname{sen} \phi = E\theta I_y \operatorname{sen} \psi \qquad M \cos \phi = E\theta I_z \operatorname{sen} \psi$$

si ottiene

$$M \operatorname{sen} \phi = \frac{R}{w} I_y \operatorname{sen} \psi \qquad M \cos \phi = \frac{R}{w} I_z \cos \psi .$$

Moltipiicando la prima per $\frac{z}{I_y}$ e la seconda per $\frac{y}{I_z}$ e sommando

$$M\left[\frac{z \operatorname{sen} \phi}{I_y} + \frac{y \cos \phi}{I_z}\right] = \frac{R}{w}(z \operatorname{sen} \psi + y \cos \psi)$$

ma $w = z \operatorname{sen} \psi + y \cos \psi$ quindi

$$M = \frac{R}{\frac{z \operatorname{sen} \phi}{I_y} + \frac{y \cos \phi}{I_z}} \quad (*) \qquad (136).$$

Se invece di y e di z si mettono le coordinate u' ed v' corrispondenti alla fibra più lontana dall' asse di flessione, e quindi a quella per cui R è massimo, si ottiene la formola di rottura

$$M = \frac{R}{\frac{u' \operatorname{sen} \phi}{I_y} + \frac{v' \cos \phi}{I_z}} \qquad (137).$$

Se l'asse di sollecitazione coincide con uno degli assi principali d'inerzia per esempio Oy, l'asse di flessione è normale a quello di sollecitazione, la flessione dicesi retta, $\cos \phi = 1$ e $\operatorname{sen} \phi = 0$ e la formola superiore diventa

$$M_z = \frac{R I_z}{v'} \qquad M_z = E I_z \theta_z .$$

Se l'asse della trave giace tutto in un piano, il quale sia anche piano di sollicitazione, ed in tutte le sezioni ha luogo la flessione retta, allora sono verificate le condizioni necessarie perchè dopo la deformazione dovuta alla sola flessione, cioè alla rotazione θ_z

(*) Barré de Saint-Venant, *Note* ecc., Opera citata, pag. 123.

(Num. 30) l'asse della trave rimanga nel piano di sollecitazione. Se si indicano con ρ' e ρ'' i raggi di curvatura della fibra media longitudinale od asse della travatura in un punto prima e dopo la deformazione $\theta_z = \frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho''}$ quindi

$$M_z = \frac{R I_z}{v'} \qquad M = E I \theta_z = E I \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho''} \right).$$

In tutti gli altri casi la flessione dicesi obbliqua, l'asse di flessione non è normale al piano del momento sollecitante ed i punti della sezione descrivono, in causa della deformazione, tanti archi di circolo aventi il centro sull'asse $f O f'$ di flessione e tali che i loro piani fanno un angolo costante col piano del momento inflettente.

L'asse di rotazione di ciascuna sezione, considerando i momenti flettenti separatamente dalla componente X, non subisce alcun sforzo normale p_{xx} e dicesi asse neutro della sezione, gli sforzi unitari R variano con legge lineare ed in ogni punto sono proporzionali alla distanza del medesimo dall'asse neutro od asse di flessione: nel caso della flessione retta l'asse neutro coincide con un asse principale d'inerzia della sezione stessa.

Le due formole

$$M \operatorname{sen} \delta = E \theta I_f \qquad M = \frac{R}{\frac{z \operatorname{sen} \phi}{I_y} + \frac{y \cos \phi}{I_z}}$$

la prima di elasticità e la seconda di resistenza comprendono ed in certo qual modo equivalgono alle quattro trovate superiormente (126) e (128)

$$M_y = E \theta_y I_y \qquad M_y = \frac{R I_y}{z}$$

$$M_z = E \theta_z I_z \qquad M_z = \frac{R I_z}{y}$$

ed esprimono la rotazione totale θ e lo sforzo unitario R in funzione del momento d'inerzia della sezione intorno all'asse di flessione $f O f'$ od agli assi principali d'inerzia e del momento flettente M delle forze esterne. Le fibre della trave subiscono in corrispondenza della sezione, che si considera, allungamenti od accorciamenti δ e sforzi unitari R rappresentati dalle

$$\delta = \theta w = \frac{M \operatorname{sen} \delta}{E I_f} w \qquad R = E \delta = E \theta w = \frac{M \operatorname{sen} \delta}{I_f} w \qquad (138).$$

Dalle formole (128) e (132) appare evidente che in una trave sollecitata a tensione o compressione oppure a sforzo tagliante la forma della sezione non ha influenza sulla resistenza, mentre invece nel caso della flessione e della torsione, compatibilmente colle necessità costruttive, l'ingegnere dovrà scegliere sezioni, che presentino grandi momenti d'inerzia rispetto agli assi, ai quali corrisponde il momento, a cui la sezione stessa deve resistere.

66. Formola di elasticità e resistenza nelle travature ad asse curvilineo tenendo conto dell'influenza della curvatura dell'asse. — Qualche autore trattando il caso dell'equilibrio delle travature ad asse curvilineo ha creduto cosa troppo inesatta accettare l'ipotesi che due sezioni infinitamente vicine si possano riguardare come parallele ed ha determinato le equazioni di equilibrio in base al concetto che due sezioni normali vicine s'incontrino secondo un asse passante pel centro di curvatura dall'asse della trave. Supponiamo una trave $A_0 B_0, A_k B_k$ (*Fig.* 31ª, *tav.* IV) ad asse curvilineo giacente tutto nel piano delle x, y e sollecitata da forze agenti pure nello stesso piano: se si prende in considerazione il tronco di fibra mn e si chiama con ds il tronco $G_k G_{k+1}$, con r il raggio di curvatura, con O il corrispondente centro di curvatura e con $d\phi$ l'angolo $G_k O G_{k+1}$, la sua lunghezza è data da $mn = ds + v\,d\phi$, in cui v esprime la distanza della fibra considerata dall'asse normale al piano della figura e passante pel centro di gravità G_{k+1} della sezione. Indichiamo con i_0 l'allungamento unitario dell'asse nel tronco $G_k G_{k+1}$ e con i_v quello della fibra mn, se nella trave avviene una deformazione qualsiasi, purchè infinitamente piccola, e tale che ogni punto di una sezione rimanga sempre in un piano parallelo a quello, che contiene l'asse della trave stessa, sarà

$$\Delta(mn) = \Delta ds + \Delta v\,d\phi = \Delta ds + v\Delta d\phi$$

e quindi

$$i_v = \frac{\Delta(mn)}{mn} = \frac{\Delta ds + v\Delta d\phi}{ds + v\,d\phi}$$

e ricordando che

$$ds = r\,d\phi$$

si ricava

$$i_v = \frac{\Delta ds + v\Delta d\phi}{ds + \frac{v\,ds}{r}} = \left(\frac{\Delta ds}{ds} + v\frac{\Delta d\phi}{ds}\right)\frac{r}{r+v}.$$

Se si pone

$$\frac{\Delta d\phi}{ds}=\frac{\Delta d\phi}{d\phi}\frac{d\phi}{ds}=k\frac{d\phi}{ds}=\frac{k}{r}$$

e si osserva che $i_0=\frac{\Delta ds}{ds}$

$$i_v=\left(i_0+\frac{vk}{r}\right)\frac{r}{r+v}=i_0+(k-i_0)\frac{v}{r+v} \qquad (139).$$

Se si indicano con R lo sforzo unitario per unità di superficie nei diversi punti della sezione normale, con E il modulo d'elasticità, con X ed M la componente normale alla sezione ed il momento delle forze esterne, con $d\omega$ l'elemento di area e con A l'area della sezione $A_{k+1}B_{k+1}$

$$R=Ei_v=E\left(i_0+\frac{vk}{r}\right)\frac{r}{r+v}=Ei_0+E(k-i_0)\frac{v}{r+v}$$

ed

$$\left.\begin{aligned} X&=\int R\,d\omega=E\int i_0\,d\omega+E(k-i_0)\int\frac{v}{r+v}d\omega \\ M&=\int Rv\,d\omega=Ei_0\int v\,d\omega+E(k-i_0)\int\frac{v^2}{r+v}d\omega \end{aligned}\right\} (140).$$

Ma $\int d\omega=A$, $\int v\,d\omega=0$ (*) e se si pone $\int\frac{v}{r+v}\,d\omega=-\alpha A$ dove α sarà un coefficiente positivo o negativo da determinarsi

$$\int\frac{v^2\,d\omega}{r+v}=\int v\,d\omega-\int\frac{vr}{r+v}d\omega=\alpha Ar$$

e le due equazioni (140) diventano

$$X=EA\left(i_0-\alpha(k-i_0)\right)$$

$$M=EA\alpha r(k-i_0)$$

(*) Perchè $\int v\,d\omega$ è il momento statico della figura rispetto ad un asse passante pel suo centro di gravità.

da cui si ricava

$$\left.\begin{aligned} i_0 &= \frac{1}{EA}\left(X+\frac{M}{r}\right)=\frac{X_0}{EA} \\ k &= \frac{1}{EA}\left(X+\frac{M}{r}+\frac{M}{\alpha r}\right)=\frac{1}{EA}\left(X_0+\frac{M}{\alpha r}\right) \end{aligned}\right\} \quad (141)$$

quindi

$$R=\frac{1}{A}\left(X+\frac{M}{r}+\frac{M}{\alpha r}\,\frac{v}{r+v}\right)=\frac{1}{A}\left(X_0+\frac{M}{\alpha r}\,\frac{v}{r+v}\right) \quad (142).$$

Se si pone

$$\int \frac{r v^2}{r+v} d\omega = T$$

si ottiene

$$\int \frac{r}{r+v} d\omega = \int d\omega \left(1-\frac{v}{r}+\frac{v^2}{r(r+v)}\right)=A+\frac{T}{r^2}$$

$$\int \frac{v}{r+v} d\omega = \int d\omega \left(\frac{v}{r}-\frac{v^2}{r(r+v)}\right)=-\frac{T}{r^2}=-\alpha A$$

quindi $\alpha=\dfrac{T}{Ar^2}$ e l'espressione di R può anche scriversi come segue

$$R=\frac{1}{A}\left(X+\frac{M}{r}\right)+\frac{Mrv}{T(r+v)}=\frac{X_0}{A}+\frac{Mrv}{T(r+v)}=\frac{X_0}{A}+\frac{Mv}{T}\,\frac{r}{r+v} \quad (143).$$

od anche

$$R=\frac{1}{A}\left(X+\frac{M}{r}\right)+\frac{Mv}{T}\left(1-\frac{v}{r}+\frac{v^2}{r^2}\ldots\right)$$

Risulta da questa formola che lo sforzo $p_{xx}=R$ normale agli elementi piani della sezione non varia linearmente come abbiamo trovato nell'ipotesi che le sezioni normali all'asse della trave siano o si possano considerare come parallele, ma con legge tale che se si rappresentano i valori di R geometricamente con ordinate sulla traccia del piano della sezione si ottiene un arco di iperbola. Lo sforzo unitario R si annulla per

$$v=-\frac{\dfrac{X}{A}+\dfrac{M}{Ar}}{\dfrac{X}{A}+\dfrac{M}{Ar}+\dfrac{Mr}{T}}\,r \quad (144).$$

Se $X=0$ allora

$$v=-\frac{T}{T+A r^2}r$$

cioè l'asse neutro non passa mai pel baricentro della sezione.

Se si sviluppano in serie i rapporti $\frac{r v^2}{r+v}$, $\frac{r v}{r+v}$ si ricava

$$\frac{r v^2}{r+v}=v^2-\frac{v^3}{r}+\frac{v^4}{r^2}-\frac{v^5}{r^3}+\ldots$$

$$\frac{r v}{r+v}=v-\frac{v^2}{r}+\frac{v^3}{r^2}-\frac{v^4}{r^3}+\ldots$$

e quindi

$$\int\frac{r v^2}{r+v}d\omega=T=\int d\omega\, v^2-\frac{1}{r}\int d\omega\, v^3\left(1-\frac{v}{r}+\frac{v^2}{r^2}-\ldots\right)$$

$$\int\frac{r v}{r+v}d\omega=N=\int d\omega\ v-\frac{1}{r}\int d\omega\cdot v^2\left(1-\frac{v}{r}+\frac{v^2}{r^2}-\ldots\right).$$

Se con I si indica il momento d'inerzia della sezione

$$T=I-\frac{1}{r}\int d\omega\cdot v^3\left(1-\frac{v}{r}+\frac{v^2}{r^2}-\ldots\right)$$

$$N=-\frac{1}{r}\int d\omega\cdot v^2\left(1-\frac{v}{r}+\frac{v^2}{r^2}-\ldots\right)$$

e quindi ricordando che

$$\alpha=-\frac{1}{A}\int\frac{v}{r+v}d\omega=-\frac{1}{A r}\int\frac{r v}{r+v}d\omega$$

risulta

$$-\alpha=\frac{N}{A r}=-\frac{1}{A r^2}\int v^2 d\omega\left(1-\frac{v}{r}+\frac{v^2}{r^2}-\ldots\right).$$

Se la sezione è simmetrica gli integrali delle potenze dispari di v si annullano e rimane

$$-\alpha=-\frac{1}{A r^2}\int d\omega\cdot v^2\left(1+\frac{v^2}{r^2}+\frac{v^4}{r^4}+\ldots\right).$$

Nel caso di sezioni simmetriche in via ordinaria si potrà ritenere con sufficiente approssimazione

$$T=I+\frac{1}{r^2}\int v^4 d\omega \qquad -\alpha=-\frac{1}{Ar^2}\int v^2 d\omega=-\frac{I}{Ar^2}.$$

Per una sezione rettangolare (*Fig.* 32ª, *tav.* IV) avente per lato a e b

$$\int v^4 d\omega=\int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} v^4 a\, d\omega=\frac{2a}{5}\left(\frac{b}{2}\right)^5=\frac{ab^5}{80}$$

per un ferro a doppio **T** simmetrico (*Fig.* 33ª, *tav.* IV) in cui a, b, a' e b' hanno il significato indicato sulla figura

$$\int v^4 d\omega=\frac{1}{80}(ab^5-a'b'^5).$$

Se nelle formole superiori, che danno i_0 e k si pone $r=\infty$, ossia si suppongono le sezioni parallele, si ricava:

$$i=i_0=\frac{X}{A} \qquad \theta=\frac{\Delta d\phi}{ds}=\frac{k}{r}=\frac{M}{EI} \quad \text{ed} \quad R=\frac{X}{A}+\frac{Mv}{I}$$

come nel numero precedente.

Non sembra necessario instituire una ricerca analoga per gli sforzi unitari S agenti tangenzialmente ad ogni sezione (*) poichè questi hanno sempre pochissima importanza rispetto agli sforzi normali prodotti dal momento flettente (Num. 58), e nelle travature ad arco spesso anche rispetto a quelli prodotti dalla componente normale; si potrà quindi sempre ritenere di aver raggiunto un'esattezza sufficiente valutandoli colle formole trovate ai numeri 64 e 65 supponendo le sezioni trasversali parallele fra loro.

Osservazione. — Per determinare lo sforzo unitario R la formola (142) non è molto usata fino ad ora dagli ingegneri, o tutt'alpiù si può impiegare nel caso, in cui il raggio di curvatura dell'arco sia abbastanza piccolo rispetto alle dimensioni trasversali della trave, come può accadere in certi archi ed anche in certe vôlte per ponti in muratura (**) e finalmente in costruzioni affatto speciali.

(*) Grashof, Opera citata.

(**) Ceradini, Opera citata.

67. Formole generali per calcolare le deformazioni corrispondenti ad un punto dell'asse o ad una sezione normale di una travatura sommando l'effetto delle deformazioni elementari. — Le formole dei numeri 64 e 65 permettono di determinare le forze unitarie e le deformazioni in una sezione trasversale qualsiasi di una travatura tutte le volte che siano note le forze normali e tangenziali ed i momenti che rappresentano l'effetto delle forze esterne sulla sezione stessa. Da queste si può facilmente passare alle determinazioni degli spostamenti totali $\Delta x', \Delta y', \Delta z'$ subìti dal centro di gravità $G(x'\,y'\,z')$ di una sezione qualsivoglia σ della trave e delle rotazioni $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, avvenuti in causa della deformazione nella sezione che si considera, rispetto a tre assi passanti pel suo centro di gravità, due coincidenti cogli assi principali d'inerzia della sezione ed uno normale alla medesima. Richiamiamo le espressioni generali delle deformazioni convenienti alle linee materiali leggermente deformate trovate al numero 30 (*Fig.* 19ª, *tav.* III), conservando alle diverse lettere lo stesso significato, che avevano in quelle formole

$$
\begin{aligned}
\Delta x' &= a_0 + (z'-z_0)\,\theta_{oy} - (y'-y_0)\,\theta_{oz} + \int_{s_0}^{s'} a\,ds + \\
&+ \int_{s_0}^{s'} (z'-z)\,\psi_y\,ds - \int_{s_0}^{s'} (y'-y)\,\psi_z\,ds + \tau\,(x'-x_0) \\
\Delta y' &= b_0 + (x'-x_0)\,\theta_{oz} - (z'-z_0)\,\theta_{ox} + \int_{s_0}^{s_0} b\,ds + \\
&+ \int_{s_0}^{s_0} (x'-x)\,\psi_z\,ds - \int_{s_0}^{s'} (z'-z)\,\psi_x\,ds + \tau\,(y'-y_0) \\
\Delta z' &= c_0 + (y'-y_0)\,\theta_{ox} - (x'-x_0)\,\theta_{oy} + \int_{s_0}^{s'} c\,ds + \\
&+ \int_{s_0}^{s'} (y'-y)\,\psi_x\,ds - \int_{s_0}^{s'} (x'-x)\,\psi_y\,ds + \tau\,(z'-z_0)
\end{aligned}
\qquad (35)
$$

$$\omega_x=\theta_{ox}+\int_{s_0}^{s'}\psi_x ds \qquad \omega_y=\theta_{oy}+\int_{s_0}^{s'}\psi_y ds \qquad \omega_z=\theta_{oz}+\int_{s_0}^{s'}\psi_z ds \tag{36}$$

Le quantità $a, b, c, \psi_x, \psi_y, \psi_z$. sono facilmente esprimibili in funzione delle deformazioni i, g, θ, θ_x (Num. 65) e quindi anche delle forze esterne X, F e dei momenti M_x ed M. Siano per una sezione qualsiasi α, β, γ gli angoli, che la direzione dello scorrimento risultante g fa cogli assi coordinati, λ, μ, ν quelli che l'asse di flessione fOf' (Num. 65) fa cogli assi stessi, la direzione della deformazione i e dell'asse di torsione coincidendo colla tangente alla fibra media nel punto, che si considera, farà cogli assi coordinati angoli tali, che i loro coseni saranno rappresentati da $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$.
Se si ricordano le formole (125), (131) e (134) decomponendo le deformazioni secondo le direzioni degli assi O, x, y, z si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}
a&=i\frac{dx}{ds}+g\cos\alpha=\frac{X}{EA}\frac{dx}{ds}+\frac{F}{GA}\cos\alpha\\
b&=i\frac{dy}{ds}+g\cos\beta=\frac{X}{EA}\frac{dy}{ds}+\frac{F}{GA}\cos\beta\\
c&=i\frac{dz}{ds}+g\cos\gamma=\frac{X}{EA}\frac{dz}{ds}+\frac{F}{GA}\cos\gamma\\
\psi_x&=\theta_x\frac{dx}{ds}+\theta\cos\lambda=\frac{M_x}{GI_x}\frac{dx}{ds}+\frac{M\operatorname{sen}\delta\cos\lambda}{EI_f}\\
\psi_y&=\theta_x\frac{dy}{ds}+\theta\cos\mu=\frac{M_x}{GI_x}\frac{dy}{ds}+\frac{M\operatorname{sen}\delta\cos\mu}{EI_f}\\
\psi_z&=\theta_x\frac{dz}{ds}+\theta\cos\nu=\frac{M_x}{GI_x}\frac{dz}{ds}+\frac{M\operatorname{sen}\delta\cos\nu}{EI_f}
\end{aligned}\right\}\tag{145}$$

e sostituendo questi valori nelle formole (35) e (36)

$$\Delta x'=a_o+(z'-z_o)\theta_{oy}-(y'-y_o)\theta_{oz}+\int_{x_o}^{x'}\frac{X}{EA}dx+ \tag{146}$$

$$+\int_{s_0}^{s'}\frac{F}{GA}\cos\alpha\,ds+\int_{s_0}^{s'}(z'-z)\left(\frac{M_x}{GI_x}\frac{dy}{ds}+\frac{M\operatorname{sen}\delta\cos\mu}{EI_f}\right)ds-$$

$$-\int_{s_0}^{s'}(y'-y)\left(\frac{M_x}{GI_x}\frac{dz}{ds}+\frac{M\operatorname{sen}\delta\cos\nu}{EI_f}\right)ds+\tau(x'-x_0)$$

$$\Delta y'=b_0+(x'-x_0)\theta_{0z}-(z'-z_0)\theta_{0x}+\int_{y_0}^{y'}\frac{X}{EA}dy+$$

$$+\int_{s_0}^{s'}\frac{F}{GA}\cos\beta\,ds+\int_{s_0}^{s'}(x'-x)\left(\frac{M_x}{GI_x}\frac{dz}{ds}+\frac{M\operatorname{sen}\delta\cos\nu}{EI_f}\right)ds-$$

$$-\int_{s_0}^{s'}(z'-z)\left(\frac{M_x}{GI_x}\frac{dx}{ds}+\frac{M\operatorname{sen}\delta\cos\lambda}{EI_f}\right)ds+\tau(y'-y_0)$$

$$\Delta z'=c_0+(y'-y_0)\theta_{0x}-(x'-x_0)\theta_{0y}+\int_{z_0}^{z'}\frac{X}{EA}dz+ \qquad (146).$$

$$+\int_{s_0}^{s'}\frac{F}{GA}\cos\gamma\,ds+\int_{s_0}^{s'}(y'-y)\left(\frac{M_x}{GI_x}\frac{dx}{ds}+\frac{M\operatorname{sen}\delta\cos\lambda}{EI_f}\right)ds-$$

$$-\int_{s_0}^{s'}(x'-x)\left(\frac{M_x}{GI_x}\frac{dy}{ds}+\frac{M\operatorname{sen}\delta\cos\mu}{EI_f}\right)ds+\tau(z'-z_0)$$

$$\omega_x=\theta_{0x}+\int_{s_0}^{s'}\left(\frac{M_x}{GI_x}\frac{dx}{ds}+\frac{M\operatorname{sen}\delta\cos\lambda}{EI_f}\right)ds$$

$$\omega_y=\theta_{0y}+\int_{s_0}^{s'}\left(\frac{M_x}{GI_x}\frac{dy}{ds}+\frac{M\operatorname{sen}\delta\cos\mu}{EI_f}\right)ds$$

$$\omega_z=\theta_{0z}+\int_{s_0}^{s'}\left(\frac{M_x}{GI_x}\frac{dz}{ds}+\frac{M\operatorname{sen}\delta\cos\nu}{EI_f}\right)ds$$

Queste formole coincidono con quelle trovate dal Bresse (Pag. 105); esse sono generalissime e servono per determinare le deformazioni in una travatura qualsiasi sollecitata da forze agenti comunque sulla medesima, sotto l'influenza di possibili variazioni nella temperatura e nella posizione della sezione iniziale. È bene avvertire che le costanti a_0, b_0, c_0, θ_{0x}, θ_{0y}, θ_{0z} non introducono un'indeterminazione nel problema, esse servono a fissare la posizione della travatura nello spazio e nei casi particolari o saranno date, o saranno sempre facilmente determinabili. Qualunque sia la questione che si può presentare, le formole superiori permettono di distinguere la parte di spostamento $\Delta x'$, $\Delta y'$, ecc., dovuta alla deformazione elastica da quella dovuta ad un movimento generale della travatura nello spazio o ad un cambiamento di temperatura.

Se la fibra media od asse della travatura giace tutto in un piano, che si potrà supporre quello delle x, y, allora $z=0$, $z'=0$, $z_0=0$, ed i valori di $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$, diventano

$$
\begin{aligned}
\Delta x' &= a_0 - (y'-y_0)\theta_{0z} + \int_{x_0}^{x'} \frac{X}{EA}\,dx + \int_{s_0}^{s'} \frac{F}{GA}\cos\alpha\,ds - \\
&- \int_{s_0}^{s'} (y'-y)\left(\frac{M_x}{GI_x}\frac{dz}{ds} + \frac{M\,\mathrm{sen}\,\delta\cos\nu}{EI_f}\right)ds + \tau(x'-x_0) \\
\Delta y' &= b_0 + (x'-x_0)\theta_{0z} + \int_{y_0}^{y'} \frac{X}{EA}\,dy + \int_{s_0}^{s'} \frac{F}{GA}\cos\beta\,ds + \\
&+ \int_{s_0}^{s'} (x'-x)\left(\frac{M_x}{GI_x}\frac{dz}{ds} + \frac{M\,\mathrm{sen}\,\delta\cos\nu}{EI_f}\right)ds + \tau(y_0-y_1) \qquad (147). \\
\Delta z' &= c_0 + (y'-y_0)\theta_{0x} - (x'-x_0)\theta_{0y} + \int_{z_0}^{z'} \frac{X}{EA}\,dz + \\
&+ \int_{s_0}^{s'} \frac{F}{GA}\cos\gamma\,ds + \int_{s_0}^{s'} (y'-y)\left(\frac{M_x}{GI_x}\frac{dx}{ds} + \frac{M\,\mathrm{sen}\,\delta\cos\lambda}{EI_f}\right)ds - \\
&- \int_{s_0}^{s'} (x'-x)\left(\frac{M_x}{GI_x}\frac{dy}{ds} + \frac{M\,\mathrm{sen}\,\delta\cos\mu}{EI_f}\right)ds
\end{aligned}
$$

Se le forze esterne giaciono tutte nel piano che contiene la fibra media, che supponiamo essere quello delle x, y, allora la sollecitazione dicesi *piana*

$$M_x = 0,\ \gamma = \frac{\pi}{2},\ \cos\alpha = \pm\frac{dy}{ds},\ \cos\beta = \mp\frac{dx}{ds}$$

perchè lo scorrimento avviene in senso normale alla tangente all'asse della travatura, e le (147) diventano

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x' &= a_0 - (y'-y_0)\,\theta_{sz} + \int_{x_0}^{x'} \frac{X}{EA}\,dx - \int_{y_0}^{y'} \frac{F}{GA}\,dy - \\
&\quad - \int_{s_0}^{s'} (y'-y)\,\frac{M \operatorname{sen}\delta \cos\nu}{E I_f}\,ds + \tau(x'-x_0) \\
\Delta y' &= b_0 + (x'-x_0)\,\theta_{oz} + \int_{y_0}^{y'} \frac{X}{EA}\,dy + \int_{x_0}^{x'} \frac{F}{GA}\,dx + \\
&\quad + \int_{s_0}^{s'} (x'-x)\,\frac{M \operatorname{sen}\delta \cos\nu}{E I_f}\,ds + \tau(y'-y_0) \\
\Delta z' &= c_0 + (y'-y_0)\,\theta_{ox} - (x'-x_0)\,\theta_{oy} + \\
&\quad + \int_{s_0}^{s'} \frac{M \operatorname{sen}\delta}{E I_f}\Big((y'-y)\cos\lambda - (x'-x)\cos\mu\Big)\,ds \\
\omega_0 &= \theta_{ox} + \int_{s_0}^{s'} \frac{M \operatorname{sen}\delta \cos\lambda}{E I_f}\,ds \qquad \omega_y = \theta_{oy} + \int_{s_0}^{s'} \frac{M \operatorname{sen}\delta \cos\mu}{E I_f}\,ds \\
\omega_z &= \theta_{oz} + \int_{s_0}^{s'} \frac{M \operatorname{sen}\delta \cos\nu}{E I_f}\,ds
\end{aligned}\right\} \quad (148).$$

La deformazione dicesi *piana* quando la fibra media dopo la deformazione giace ancora tutta nel piano di sollecitazione: perchè

ciò avvenga, bisogna che per tutti i punti dell'asse sia $\Delta z' = 0$ ossia

$$c_0 + (y' - y_0)\theta_{ox} - (x' - x_0)\theta_{oy} +$$

$$+ \int_{s_0}^{s'} \frac{M \operatorname{sen}\delta}{EI_f} \Big((y' - y)\cos\lambda - (x' - x)\cos\mu \Big) ds = 0.$$

Se nessun punto dell'asse deve sortire dal piano delle x, y sarà necessariamente $c_0 = 0$, inoltre potendosi scrivere identicamente

$$(y' - y_0)\theta_{ox} - (x' - x_0)\theta_{oy} = \int_{s_0}^{s'} \left[\theta_{ox} \frac{dy}{ds} - \theta_{oy} \frac{dx}{ds} \right] ds$$

la condizione precedente diventa

$$\int_{s_0}^{s'} \left\{ \theta_{ox} \frac{dy}{ds} - \theta_{oy} \frac{dx}{ds} + \frac{M \operatorname{sen}\delta}{EI_f} \Big((y' - y)\cos\lambda - (x' - x)\cos\mu \Big) ds = 0. \right.$$

Il limite superiore di questo integrale essendo variabile non solo, ma arbitrario, come pure arbitrario può considerarsi anche il limite inferiore, l'equazione superiore non può verificarsi a meno che non sia

$$\theta_{ox} \frac{dy}{dx} - \theta_{oy} \frac{dx}{ds} + \frac{M \operatorname{sen}\delta}{EI_f} \Big((y' - y)\cos\lambda - (x' - x)\cos\mu \Big) = 0.$$

L'ultimo termine

$$\frac{M \operatorname{sen}\delta}{EI_f} \Big((y' - y)\cos\lambda - (x' - x)\cos\mu \Big)$$

dipende dal punto di cordinate (x', y') che si considera, quindi la condizione precedente si scinde (come fu già avvertito al num. 30, pag. 85) nelle due seguenti

$$\theta_{ox} \frac{dy}{ds} - \theta_{oy} \frac{dx}{ds} = 0 \qquad M \Big((y' - y)\cos\lambda - (x' - x)\cos\mu \Big) = 0$$

poichè $\dfrac{\operatorname{sen}\delta}{EI_f}$ non può essere zero.

La prima esprime che tutti i punti della sezione iniziale si debbono muovere parallelamente al piano di sollecitazione se $\theta_{ox}=0$ *e* $\theta_{oy}=0$, *oppure che l'asse della trave è rettiiineo ed è asse della rotazione risultante di* θ_{ox} *e* θ_{oy} *se* $\frac{\theta_{oy}}{\theta_{ox}}=\frac{dy}{dx}$.

La seconda può essere soddisfatta

a) *Quando* $M=0$ *ossia quando le sezioni non sono sollecitate che a tensione o compressione ed a scorrimento;*

b) *Quando* $\cos\lambda=0$ *e* $\cos\mu=0$ *ossia quando l'asse di flessione è normale al piano di sollecitazione ed in tutte le sezioni ha luogo la flessione retta;*

c) *Quando* $\frac{y'-y}{x'-x}=\frac{\cos\mu}{\cos\lambda}$ *Questa relazione è incompatibile coi dati del problema ed è da scartarsi; infatti se si considera il punto di coordinate* (x', y') *come mobile sulla fibra media od asse della trave mantenendo fisso il punto di coordinate* (x, y), *la relazione lineare esistente fra* x' *ed* y' *mostra che l'asse della trave deve essere rettilineo e quindi normale all'asse di flessione, ciò che importa che sia verificata la relazione*

$$(x'-x)\cos\lambda+(y'-y)\cos\mu=0$$

che è incompatibile coll'equazione

$$(y'-y)\cos\lambda+(x'-x)\cos\mu=0$$

poichè combinandole risulterebbe

$$\frac{\cos\mu}{\cos\lambda}=-\frac{\cos\lambda}{\cos\mu}$$

ossia

$$\cos^2\lambda+\cos^2\mu=0.$$

Nei problemi dell'ingegneria si presenta quasi sempre il caso che le forze esterne o agiscono tutte in un piano, oppure si possono scomporre in tanti gruppi, le cui risultanti parziali giaciono tutte in un piano, il quale contiene l'asse della travatura. Inoltre per ragioni di estetica, di simmetria di forma e di deformazione, di facilità di calcolo, esecuzione e posa, si fanno le sezioni delle travi in modo, che il piano di sollecitazione le intersechi tutte secondo un asse principale d'inerzia, che ordinariamente è anche asse di simmetria della figura. In pratica le rotazioni θ_{ox} e θ_{oy} non esistono o soltanto eccezionalmente nei solidi ad asse rettilineo,

ed in tal caso sono costanti per tutto il corpo, quindi si potrà prescindere da esse nei calcoli e scrivere θ_0 invece di θ_{oz}, I invece di I_f; inoltre la sollecitazione dovendo essere retta $\operatorname{sen}\delta = 1$ e le (148) si trasformano nelle seguenti, che convengono al caso della sollecitazione e deformazione piana

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x' &= a_0 - (y' - y_0)\,\theta_0 + \int_{x_0}^{x'} \frac{X}{EA}\,dx - \int_{y_0}^{y'} \frac{F}{GA}\,dy - \\
&\quad - \int_{s_0}^{s'} (y' - y)\,\frac{M}{EI}\,ds + \tau(x' - x_0) \\
\Delta y &= b_0 + (x' - x_0)\,\theta_0 + \int_{y_0}^{y'} \frac{X}{EA}\,dy + \int_{x_0}^{x'} \frac{F}{GA}\,dx + \\
&\quad + \int_{s_0}^{s'} (x' - x)\,\frac{M}{EI}\,ds + \tau(y' - y_0) \\
\omega &= \theta_0 + \int_{s_0}^{s'} \frac{M}{EI}\,ds
\end{aligned}\right\} \qquad (149)$$

poichè essendo $\cos\lambda = 0$, $\cos\mu = 0$ risulta $\omega_x = \theta_{ox}$, $\omega_y = \theta_{oy}$.

In generale quando si parla di sollecitazione piana s'intende che siano anche verificate le condizioni necessarie perchè sia piana anche la deformazione, a meno che non si avverta il contrario.

68. Formole generali per calcolare le deformazioni corrispondenti ad un punto dell'asse o ad una sezione normale di una travatura dedotte derivando l'espressione generale del lavoro di deformazione. — Superiormente è stato dimostrato (Num. 38) che le derivate del lavoro di deformazione prese rispetto alle forze esterne danno gli spostamenti dei loro punti d'applicazione nella direzione, in cui esse agiscono, e che le derivate rispetto alle coppie danno le rotazioni, che alle medesime corrispondono. Da questo teorema si deduce un metodo semplice per determinare le deformazioni corrispondenti ad una sezione σ in una travatura; si suppongano applicate al centro di gravità O della sezione tre forze p_x, p_y, p_z parallele agli assi coordinati e s'immagini la sezione stessa influenzata da tre coppie, i cui mo-

menti intorno a tre rette parallele agli assi e passanti per O siano ordinatamente μ_x, μ_y, μ_z, indi si calcoli il lavoro di deformazione L in funzione delle forze esterne e dei momenti

$$L=\frac{1}{2}\int_{s_0}^{s'} ds\left[\frac{X^2}{EA}+\frac{Y^2}{GA}+\frac{Z^2}{GA}+\frac{M^2_x}{GI_x}+\frac{M^2_y}{EI_y}+\frac{M^2_z}{EI_z}\right]$$

si otterrà una funzione di secondo grado rispetto a p_x, p_y, p_z, μ_x, μ_y, μ_z; se si prendono le sue derivate rispetto a queste quantità, le tre prime danno gli spostamenti $\Delta x'$, $\Delta y'$, $\Delta z'$, le altre tre le rotazioni ω_x, ω_y, ω_z. In queste formole poi in luogo di p_x, p_y, p_z, μ_x, μ_y, μ_z bisogna porre i valori, che loro corrispondono, quindi se essi sono simboli posti ad indicare forze o momenti per poter applicare il processo generale, ma che in realtà nella sezione non agiscono nè forze, nè momenti, allora in loro vece bisognerà mettere lo zero. Questo metodo di calcolo è generalissimo, e può essere sempre impiegato per determinare le traslazioni in una direzione qualunque e la rotazione di una sezione della trave intorno ad una retta qualsiasi passante pel suo centro di gravità.

È facile vedere che i risultati, che si ottengono applicando questo procedimento coincidono con quelli, a cui si arriva componendo gli effetti delle deformazioni dei successivi tronchi infinitamente corti, in cui si può supporre scomposta la trave. Infatti sia O_0 O_n una travatura (*Fig.* 34ª, *tav.* IV) e per semplicità supporremo che l'asse sia tutto contenuto in un piano, che tutte le forze esterne agiscano in questo stesso piano e finalmente che tutte le sezioni siano intersecate dal piano di sollecitazione secondo un asse principale d'inerzia. Siano M', X', F', il momento flettente, la componente normale e la componente tangenziale delle forze esterne rispetto ad una sezione qualsiasi, M, X, F, le medesime quantità calcolate senza tener conto delle forze e dei momenti, rispetto ai quali si vuole eseguire la derivazione, p_x e p_y due forze parallele agli assi ed applicate al centro di gravità O_m della sezione σ_m che si considera, μ un momento inflettente agente sulla medesima, x' ed y' le coordinate del punto O_m, x ed y le coordinate di un punto qualsiasi O_k dell'asse della trave. Dalla figura risulta

$$M'=M+\mu-p_x(y'-y)+p_y(x'-x)$$

$$X'=X+p_x\frac{dx}{ds}+p_y\frac{dy}{ds} \qquad F'=F-p_x\frac{dy}{ds}+p_y\frac{dx}{ds}.$$

L'espressione del lavoro in funzione delle forze esterne in questo caso è

$$L=\frac{1}{2}\int_{s_0}^{s'} ds\left[\frac{X'^2}{EA}+\frac{F'^2}{GA}+\frac{M'^2}{EI}\right]$$

ed applicando il teorema relativo alle derivate del lavoro di deformazione (teorema di CASTIGLIANO, num. 38) si hanno gli spostamenti $(\Delta x')$ $(\Delta y')$ e la rotazione (ω) dovuti alla sola deformazione elastica

$$\left.\begin{aligned}
(\Delta x')&=\left(\frac{dL}{dp_x}\right)_{p_x=o}=\int_{s_0}^{s'}\left(\frac{X'}{EA}\frac{dX'}{dp_x}+\frac{F'}{GA}\frac{dF'}{dp_x}+\frac{M'}{EI}\frac{dM'}{dp_x}\right)ds=\\
&=\int_{x_0}^{x'}\frac{X}{EA}dx-\int_{y_0}^{y'}\frac{F}{GA}dy-\int_{s_0}^{s'}\frac{M}{EI}(y'-y)\,ds\\
(\Delta y')&=\left(\frac{dL}{dp_y}\right)_{p_y=o}=\int_{s_0}^{s'}\left(\frac{X'}{EA}\frac{dX'}{dp_y}+\frac{F'}{GA}\frac{dF'}{dp_y}+\frac{M'}{EI}\frac{dM'}{dp_y}\right)ds=\\
&=\int_{y_0}^{y'}\frac{X}{EA}dy+\int_{x_0}^{x'}\frac{F}{GA}dx+\int_{s_0}^{s'}\frac{M}{EI}(x'-x)\,ds\\
(\omega)&=\left(\frac{dL}{d\mu}\right)_{\mu=o}=\int_{s_0}^{s'}\left(\frac{M'}{EI}\frac{dM'}{d\mu}\right)ds=\int_{s_0}^{s'}\frac{M}{EI}ds
\end{aligned}\right\}\quad(150).$$

Se a queste espressioni si aggiungono gli spostamenti e rotazioni dovute ad un movimento parallelo al piano di sollecitazione della sezione iniziale e ad un cambiamento di temperatura si ottengono le formole (149), che è quanto volevasi dimostrare.

69. Formole generali per calcolare le deformazioni di un punto dell'asse o di una sezione normale di una travatura ad asse rettilineo soggetta a sollecitazione retta. — Se si suppone che la travatura abbia l'asse ret-

tilineo e che esso coincida coll'asse delle y, $y'=y_0=0$ e le formole di deformazione (149) diventano

$$\left.\begin{aligned}\Delta x' &= a_0+\int_{x_0}^{x'}\frac{X}{EA}\,dx+\tau(x'-x_0)\\ \Delta y' &= b_0+(x'-x_0)\theta_0+\int_{x_0}^{x_1}\frac{F}{GA}dx+\int_{x_0}^{x_1}(x'-x)\frac{M}{EI}dx\\ \omega &= \theta_0+\int_{x_0}^{x_1}\frac{M}{EI}dx\end{aligned}\right\}\quad(151)$$

$\Delta y'$ per un punto qualsiasi dell'asse non è altro che l'ordinata della fibra media deformata, se l'indichiamo con y' e si trascura (Num. 58) l'effetto dovuto allo sforzo di taglio F

$$y'=b_0+(x'-x_0)\theta_0+\int_{x_0}^{x'}(x'-x)\frac{M}{EI}dx\qquad(152)$$

derivando

$$\frac{dy'}{dx}=\theta_0+\int_{x_0}^{x'}\frac{M}{EI}dx=\omega\qquad\frac{d^2y'}{dx^2}=\frac{M}{EI}=\theta\qquad(153)$$

cioè: in una travatura ad asse rettilineo sollecitata da forze agenti in un piano, che contenga l'asse della trave e tagli tutte le sezioni secondo un asse principale d'inerzia, la derivata prima della deformazione normale all'asse dà la rotazione totale della sezione, che si considera, la derivata secondo invece dà la rotazione unitaria. Se si indica con ρ il raggio di curvatura della fibra media deformata, questo teorema appare anche dalla seguente trasformazione della formola di elasticità per la flessione $M_z=EI_z\theta_z$ (Form. 125) trovata al numero 64

$$M=EI\theta=\frac{EI}{\rho}=EI\frac{\dfrac{d^2y'}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy'}{dx}\right)^2\right]^{\frac{2}{3}}}=EI\frac{d^2y'}{dx^2}\qquad(154)$$

perchè la deformazione y' per ipotesi si suppone piccolissima e quindi $\left(\frac{dy'}{dx}\right)^2$ in una travatura ad asse rettilineo risulta trascurabile rispetto all'unità; integrando

$$\frac{dy'}{dx} = \left(\frac{dy'}{dx}\right)_{x=o} + \int_{x_0}^{x'} \frac{M}{EI} dx = \theta_0 + \int_{x_0}^{x'} \frac{M}{EI} dx$$

ed integrando una seconda volta si ottiene la (152). Di qui si ricava il seguente teorema. *In una travatura ad asse rettilineo sollecitata da forze dirette normalmente all'asse ed agenti in un piano, che contenga l'asse della trave e tagli tutte le sezioni secondo un asse principale d'inerzia, la derivata prima della deformazione in senso normale all'asse presa rispetto alla ascissa variabile* x *dà la rotazione totale corrispondente alla sezione, che si considera, e la derivata seconda dà la rotazione unitaria relativa alla sezione stessa.* Quando gli ingegneri risolvono questioni, che hanno rapporto colle deformazioni delle travature ad asse rettilineo, in generale preferiscono richiamare la formola (154) ed eseguire la doppia integrazione, piuttosto che partire dalla (152) poichè essa è più facile a ricordarsi e si ricava immediatamente dalla formola di elasticità $M = EI\vartheta$; le due formole, deducendosi l'una dall'altra per derivazione od integrazione, si equivalgono completamente.

È importante avvertire che le formole che danno $\Delta x', \Delta y', \Delta z', \omega_x, \omega_y, \omega_z$ sono funzioni lineari senza termine indipendente delle forze esterne e del coefficiente τ di dilatazione, quindi nel calcolo delle deformazioni di una travatura vale il principio della sovrapposizione degli effetti.

70. Formole di deformazione delle travature ad arco tenendo conto della convergenza delle sezioni vicine. — Se per calcolare le deformazioni di una trave ad arco si vuol tenere conto anche dell'influenza, che può avere la sua curvatura e quindi la mancanza di parallelismo fra le sezioni normali alla trave ed infinitamente vicine, nel caso abbastanza generale per la pratica della sollecitazione e deformazione piana bisogna calcolare le deformazioni elementari corrispondenti ad ogni sezione col mezzo delle formole del numero 66.

Supponiamo conservato ai varî simboli algebrici il significato che è stato loro attribuito in quel paragrafo, inoltre per brevità d'esposizione supponiamo fissa la sezione iniziale della trave e

gli assi coordinati passanti pel suo centro di gravità, allora dalla formola (141)

$$i_0 = \frac{d\Delta s}{ds} = \frac{1}{EA}\left(X + \frac{M}{r}\right) = \frac{X_0}{EA}$$

si ricava

$$\Delta s = \frac{1}{E}\int_0^s \left(\frac{X}{A} + \frac{M}{Ar}\right) ds \qquad (155)$$

e se si vuol tener conto anche di una possibile variazione di temperatura da t' a t'' gradi, detto α il coefficiente di dilatazione,

$$\Delta s = \frac{1}{E}\int \left(\frac{X}{A} + \frac{M}{Ar}\right) ds + \alpha (t'' - t')s. \qquad (155^{bis}).$$

Dalla formola (141)

$$k = \frac{1}{EA}\left(X + \frac{M}{r} + \frac{M}{\alpha r}\right)$$

ricordando che $ds = r\,d\varphi$ e che $k = \frac{d\Delta\varphi}{d\varphi} = \frac{d\Delta\varphi}{ds} r$ si ricava

$$\frac{d\Delta\varphi}{ds} = \frac{k}{r} = \frac{1}{E}\left(\frac{X}{Ar} + \frac{M}{Ar^2} + \frac{M}{A\alpha r^2}\right)$$

e poichè

$$\alpha = \frac{T}{Ar^2} \qquad \frac{1}{E}\left(\frac{X}{A} + \frac{M}{Ar}\right) = \frac{X_0}{EA}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{E}\int_0^s \left(\frac{X}{Ar} + \frac{M}{Ar^2} + \frac{M}{T}\right) ds = \frac{1}{E}\int_0^s \left(\frac{X_0}{Ar} + \frac{M}{T}\right) ds \qquad (156).$$

Se il raggio di curvatura ha un valor costante

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{r} + \frac{1}{E}\int_0^s \frac{M}{T} ds$$

per r grandissimo in via approssimativa può ritenersi $\frac{\Delta s}{r}$ come trascurabile ed allora

$$\Delta\varphi = \frac{1}{E}\int \frac{M}{T}\,ds.$$

Se la sezione iniziale non è fissa allora in queste formole invece di $\Delta\varphi$ bisogna introdurre $\Delta\varphi - \Delta\varphi_0$, ove $\Delta\varphi_0$ è la variazione corrispondente alla sezione iniziale, per la quale $\varphi = \varphi_0 = 0$.

Considerando l'elemento ds dell'arco prima e dopo la deformazione (*Fig.* 31ª, *tav.* IV) ed indicando con r_1 il suo raggio di curvatura dopo che la deformazione ha avuto luogo

$$r\,d\varphi = ds \qquad r_1(d\varphi + \Delta d\varphi) = ds + \Delta ds$$

da cui si ricava

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{d\varphi + \Delta d\varphi}{ds + \Delta ds} - \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\frac{d\varphi}{ds} + \frac{\Delta d\varphi}{ds} - \frac{d\varphi}{ds} - \frac{d\varphi}{ds}\frac{\Delta ds}{ds}}{1 + \frac{\Delta ds}{ds}}$$

e ricordando che

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r}$$

e che $\frac{\Delta ds}{ds}$ è in generale molto piccolo e quindi può essere trascurato al denominatore senza incorrere in errore grave

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{\frac{\Delta d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\frac{\Delta ds}{ds}}{1 + \frac{\Delta ds}{ds}}$$

ed in via approssimata

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{\Delta d\varphi}{ds} - \frac{1}{r}\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{M}{ET} \qquad (157).$$

Finalmente le formole, che danno le variazioni delle coordinate di un punto qualsiasi dell'asse della trave, si ricavano dalle (38)

oppure dalle altre equivalenti, determinate pure allo stesso numero 30,

$$\Delta x' = \int_0^1 \frac{\delta ds}{ds} dx - \left[y \delta\phi - \int \frac{d\delta\phi}{ds} y ds \right]_0^1$$

$$\Delta y' = \int_0^1 \frac{\delta ds}{ds} dy + \left[x \delta\phi - \int \frac{d\delta\phi}{ds} x ds \right]_0^1$$

ponendo in esse invece di $\frac{\delta ds}{ds}$ e $\frac{d\delta\phi}{ds}$ i valori trovati al numero 66 e $\delta s = -r\delta\phi$ per uniformarsi alle convenzioni, a cui queste formole corrispondono

$$\frac{\delta ds}{ds} = i_0 = \frac{X}{EA} + \frac{M}{EAr}$$

$$\frac{d\delta\phi}{ds} = \frac{X}{EAr} + \frac{M}{EAr^2} + \frac{M}{\alpha EAr^2} = \frac{1}{EAr}\left(X + \frac{M}{r} \right) + \frac{M}{ET} = \frac{i_0}{r} + \frac{M}{ET}$$

si ottiene

$$\left.\begin{aligned} \Delta x' &= \int E i_0 dx - y\Delta\phi + \int \frac{i_0}{r} y ds + \int \frac{My}{ET} ds = \\ &= -y\Delta\phi + \int i_0 \left(\frac{y}{r} + \frac{dx}{ds} \right) ds + \frac{1}{E} \int \frac{My}{T} ds \\ \Delta y' &= \int E i_0 dy + x\Delta\phi - \int \frac{i_0}{r} x ds - \int \frac{Mx ds}{ET} = x\Delta\phi - \\ &\quad - \int i_0 \left(\frac{x}{r} - \frac{dy}{ds} \right) ds - \frac{1}{E} \int \frac{Mx}{T} ds \end{aligned}\right\} (158).$$

In generale si potrà sempre in pratica sostituire la quantità T col valore I del momento d'inerzia della sezione (Num. 66) quindi

$$\left.\begin{aligned} \Delta x' &= -y\Delta\phi + \int i_0 \left(\frac{y}{r} ds + \frac{dx}{ds} \right) ds + \frac{1}{E} \int \frac{My}{I} ds = \\ &= -y\phi\Delta + \int i_0 \left(dx - y d\phi \right) + \int \frac{My ds}{EI} \end{aligned}\right\} (159)$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta y' = x\Delta\phi - \int i_0\left(\frac{x}{r}ds - \frac{dy}{ds}\right)ds - \frac{1}{E}\int\frac{Mx\,ds}{I} = x\Delta\phi + \\ + \int i_0\left(dy - x\,d\phi\right) - \int\frac{Mx\,ds}{EI}.\end{aligned}\right\} \quad (159).$$

Finalmente se il raggio r diventa molto grande in guisa che si possa supporre $r = \infty$ che è quanto dire se si considera una trave ad asse rettilineo od a debolissima curvatura le formole precedenti diventano

$$\Delta x' = -y\Delta\phi + \int\frac{My\,ds}{EI} + \int\frac{X}{EA}dx$$

$$\Delta y' = x\Delta\phi - \int\frac{Mx\,ds}{EI} + \int\frac{X}{EA}dy$$

$$\Delta\phi - \Delta\phi_0 = \int_{s_0}^{s'}\frac{M\,ds}{EI}$$

che coincidono colle (149) trovate al numero precedente qualora si aggiungano le variazioni, che possono verificarsi nelle coordinate di un punto per un movimento della sezione iniziale o per un cambiamento di temperatura.

71. Proprietà relative alle travature simmetriche. — Se una trave è simmetrica relativamente ad un piano, ma non è caricata in modo simmetrico rispetto al medesimo, in causa del principio della sovrapposizione degli effetti hanno luogo alcune proprietà, che possono riescire utilissime nella risoluzione dei problemi particolari.

Supponiamo l'asse delle x (*Fig.* 35ª, *tav.* V) diretto normalmente al piano di simmetria e quello delle y e delle z giacenti in questo piano, e siano $m(x,y,z)$ ed $m'(x',y',z')$ due punti simmetrici, Δx, $\Delta y, \Delta z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ e $\Delta x', \Delta y', \Delta z', \theta_x', \theta_y', \theta_z'$ le sei quantità, che determinano la deformazione in ciascuno dei due punti m ed m'. Indichiamo con (P) il sistema di carichi, che agisce sulla trave ed immaginiamo di renderlo simmetrico aggiungendo le forze, che mancano perchè divenga tale; siano $\Delta_1 x, \Delta_1 y, \Delta_1 z, \theta_{1x}, \theta_{1y}, \theta_{1z}$, le deformazioni componenti della sezione normale passanti per m, nel punto simmetrico m' si avranno necessariamente le deformazioni $-\Delta_1 x, \Delta_1 y, \Delta_1 z, \vartheta_{1x}, -\theta_{1y}, -\theta_{1z}$. Se invece si suppone di rendere simmetrico il carico togliendo quelle forze, a cui non ne corri-

sponde alcun'altra simmetrica, allora nel punto m si avranno le deformazioni $\Delta_1 x, \Delta_2 y, \Delta_2 z, \theta_{2x}, \theta_{2y}, \theta_{2z}$, e nel punto m_1', $-\Delta_2 x, \Delta_2 y$ $\Delta_2 z, \theta_{2x}, -\theta_{2y}, -\theta_{2z}$. Se si indicano con (P_1) e (P_2) i sistemi simmetrici di carico così ottenuti si vede che passando da (P_2) a (P) nelle deformazioni componenti del punto m si hanno le variazioni seguenti

$$\Delta x - \Delta_2 x,\ \Delta y - \Delta_2 y,\ \Delta z - \Delta_2 z, \qquad \theta_x - \theta_{2x},\ \theta_y - \theta_{2y},\ \theta_z - \theta_{2z} \tag{160}$$

che rappresentano le deformazioni dovute al sistema di forze $(P)-(P_2)$ (Num. 36). Analogamente passando dal sistema (P) al sistema (P_1) nel punto m' si hanno le variazioni seguenti nelle deformazioni componenti

$$\left.\begin{aligned} &-\Delta_1 x - \Delta x',\ \Delta_1 y - \Delta y',\ \Delta_1 z - \Delta z', \\ &\theta_{1x} - \theta_x',\ -\theta_{1y} - \theta_y',\ -\theta_{1z} - \theta_z' \end{aligned}\right\} \tag{161}$$

che rappresentano le deformazioni dovute al sistema di forze $(P_1)-(P)$. Il sistema di forze $(P)-(P_2)$ è evidentemente simmetrico al sistema $(P_1)-(P)$ quindi le deformazioni rappresentate dalla (160) dovranno essere simmetriche a quelle rappresentate dalle (161) cioè sarà

$$\left.\begin{aligned} \Delta x - \Delta_2 x &= \Delta_1 x + \Delta x' & \theta_x - \theta_{2x} &= \theta_{1x} - \theta_x' \\ \Delta y - \Delta_2 y &= \Delta_1 y - \Delta y' & \theta_y - \theta_{2y} &= \theta_{1y} + \theta_y' \\ \Delta z - \Delta_2 z &= \Delta_1 z - \Delta z' & \theta_z - \theta_{2z} &= \theta_{1z} + \theta_z' \end{aligned}\right\} \tag{162}.$$

Se si rappresentano con $X, Y, Z, M_x, M_y, M_z, X', Y', Z', M_x', M_y', M_z'$ le forze parallele agli assi ed i momenti agenti rispettivamente nelle sezioni normali simmetriche passanti per m ed m' e colle stesse lettere cogli indici 1 e 2 le quantità corrispondenti quando sulla trave agiscono i sistemi (P_1) e (P_2), in un modo affatto analogo al precedente si dimostra che

$$\left.\begin{aligned} X - X_2 &= X_1 + X' & M_x - M_{2x} &= M_{1x} - M_x' \\ Y - Y_2 &= Y_1 - Y' & M_y - M_{2y} &= M_{1y} + M_y' \\ Z - Z_2 &= Z_1 - Z' & M_z - M_{2z} &= M_{1z} + M_z' \end{aligned}\right\} \tag{163}.$$

Lo stesso ragionamento può ripetersi per un sistema di travi simmetriche rispetto ad un dato piano e le formole, che se ne deducono, possono riescire utili perchè fanno dipendere il valore delle deformazioni o delle forze da due casi, in cui la travatura è caricata in modo simmetrico, e la condizione d'essere un carico disposto simmetricamente sulla trave per sua natura è tale da facilitare i calcoli. Se la trave giace tutta in un piano, per es. quello delle y,x, allora le (162) e le (163) diventano

$$\left.\begin{array}{l} \Delta x - \Delta_2 x = \Delta_1 x + \Delta x', \ \Delta y - \Delta_2 y = \Delta_1 y - \Delta y', \ \theta_z - \theta_{2z} = \theta_{1z} + \theta_z' \\ X - X_2 = X_1 + X', \ Y - Y_2 = Y_1 - Y', \ M_z - M_{2z} = M_{1z} + M_z' \end{array}\right\} \quad (164).$$

Pe dimostrare l'uso che si può fare di queste formole supponiamo di considerare una trave ad arco ACB (*Fig.* 36ª, *tav.* V) caricata da un peso P nel punto D. Siano Q e Q' le reazioni opposte dai sostegni simmetrici B ed A, Q_1 e $-Q_1$, Q_2 e $-Q_2$ ciò che diventano queste spinte quando si renda simmetrico il carico aggiungendo le forze che mancano per renderlo tale, oppure togliendo quelle forze a cui non ne corrisponde alcuna simmetrica. In causa delle equazioni (164) sarà $Q - Q_2 = Q_1 + Q'$, od anche

$$Q_1 + Q_2 = Q - Q' \quad (165).$$

Se sull'arco agiscono delle forze p, che facciano un angolo α coll'asse delle x (che supporremo orizzontale) per l'equilibrio dovrà essere

$$Q + Q' + \Sigma p \cos\alpha = 0.$$

Se sulla trave non agiscono che pesi, allora $\Sigma p \cos\alpha = 0$ e rimane $Q = -Q'$: sostituendo a Q' questo valore nella (165) si ottiene

$$2Q = Q_1 + Q_2 \quad (166)$$

ossia *la spinta* Q *è la media aritmetica delle due spinte* Q_1 *e* Q_2.

Se sulla trave non agisce che il solo carico P allora $Q_2 = 0$ e rimane

$$Q = \frac{Q_1}{2}. \quad (167).$$

72. Varî metodi in uso per il calcolo delle forze esterne ad ogni sezione di una trave e delle deformazioni. — Abbiamo già avuto occasione di osservare (Cap. III) che il calcolo delle deformazioni può farsi

con tre procedimenti diversi e precisamente con procedimento *analitico*, *aritmetico* o *tabellare* e finalmente con procedimento *grafico*, ed in quella occasione venne indicato l'andamento generale delle operazioni da eseguire nei diversi casi. Riprendiamo ora la stessa questione aggiungendo un esempio per ciascuno dei processi indicati.

Metodo o procedimento analitico.

Questo metodo consiste nell'eseguire effettivamente le integrazioni indicate nelle formole, che danno le deformazioni ed introdurvi i limiti corrispondenti al caso particolare di cui si tratta. Rappresenti la retta AB (*Fig.* 37ª, *tav.* V) l'asse di una trave disposta orizzontalmente sopra due appoggi A e B caricata per metro corrente da un peso p distribuito uniformemente sulla sua lunghezza, siano AX l'asse della x, AY quello delle y, S e D le reazioni agenti in A e B, l la lunghezza della trave, σ una sezione normale qualsiasi, σ_c una sezione normale determinata, nella quale agisce un carico isolato Q distante a dall'appoggio A e b dall'appoggio B. Le reazioni incognite S e D, essendo in numero uguale a quello delle condizioni di equilibrio per un sistema piano di forze parallele, possono essere determinate indipendentemente dalla teoria dell'equilibrio dei corpi elastici ricorrendo soltanto alla statica dei corpi rigidi. Prendendo come polo dei momenti il punto B per l'equilibrio di rotazione dovrà essere

$$Sl = \frac{pl^2}{2} + Qb \text{ da cui } S = \frac{pl}{2} + Q\frac{b}{l}$$

per l'equilibrio di traslazione (Num. 7, pag. 27) deve verificarsi $\Sigma Y = 0$ ossia

$$S + D - pl - Q = 0$$

da cui si ricava

$$D = pl + Q - S = pl + Q - \frac{pl}{2} - Q\frac{b}{l} = \frac{pl}{2} + Q\frac{a}{l}.$$

Se $Q = 0$ allora $S = D = \frac{pl}{2}$: in causa della uniformità e simmetria del carico, che agisce sulla trave, questo ultimo risultato poteva essere enunciato *a priori* senza bisogno di alcuna dimostrazione. Il sistema essendo in equilibrio il momento delle forze esterne

ad una sezione qualsiasi posto a sinistra della sezione medesima è necessariamente uguale a quello delle forze poste a destra della sezione stessa; indicando con M questo valore e supponendo $Q=0$ dalla figura si ricava

$$M=\frac{pl}{2}x-\frac{px^2}{2}$$

ed anche considerando il tronco di trave, che trovasi a destra della sezione σ

$$M=\frac{pl}{2}(l-x)-p\frac{(l-x)^2}{2}=\frac{pl}{2}x-\frac{px^2}{2}.$$

Nell'equazione $EI\frac{d^2y}{dx^2}=M$ (Num. 69) sostituendo ad M questo valore si ottiene

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{pl}{2}x-p\frac{x^2}{2}$$

ed integrando due volte

$$EI\frac{dy}{dx}=pl\frac{x^2}{4}-p\frac{x^3}{6}+C_1$$

$$EIy=pl\frac{x^3}{12}-p\frac{x^4}{24}+C_1x+C_2.$$

Essendovi nella trave AB simmetria di forma e di carico rispetto ad una retta parallela all'asse delle y passante pel punto di mezzo della retta AB, sarà simmetrica anche la deformazione, cioè per $x=\frac{l}{2}$ dovrà essere $\frac{dy}{dx}=0$ ossia $\frac{pl^3}{16}-\frac{pl^3}{48}+C_1=0$ da cui si ricava

$$C_1=-\frac{pl^3}{24}.$$

Per $x=0$, $y=0$ quindi $C_2=0$ ed il valore di y vien dato dalla

$$y=\frac{1}{EI}\left(pl\frac{x^3}{12}-p\frac{x^4}{24}-\frac{pl^3}{24}x\right).$$

Se si ricorda che per $x=\frac{l}{2}$, $\frac{dy}{dx}=0$ ne segue che per quel valore di x, y assumerà un valore massimo; questo massimo valore

di y suole indicarsi col nome di *freccia* della trave inflessa e denotandolo con f sarà

$$f=\frac{1}{EI}\left(p\frac{l^4}{96}-p\frac{l^4}{384}-p\frac{l^4}{48}\right)=p\frac{l^4}{EI}\left(\frac{4-1-8}{384}\right)=-\frac{5}{384}p\frac{l^4}{EI}.$$

Se oltre al carico uniformemente distribuito p sulla trave agisse anche il carico isolato Q, allora in C vi è soluzione di continuità nella distribuzione del carico e quindi anche nella formola, che dà il momento inflettente; nel tronco AC il momento sarà espresso da

$$M=\frac{pl}{2}x-\frac{px^2}{2}+\frac{Qb}{l}x$$

e nel tronco CB da

$$M=\frac{pl}{2}x-\frac{px^2}{2}+\frac{Qb}{l}x-Q(x-a).$$

Se sulla trave agissero diversi carichi isolati $P_1, P_2, P_3 \ldots$ fra le sezioni $C_1, C_2, C_3 \ldots$ alle quali sono applicati i carichi si avrebbero tante espressioni diverse del momento flettente quanti sono i tronchi $AC_1, C_1C_2, C_2C_3 \ldots C_nB$.

Nel caso preso in considerazione il lavoro di deformazione (trascurando l'influenza degli sforzi di taglio F) è dato da

$$L=\frac{1}{2}\int\frac{M^2}{EI}dx$$

essendovi in C soluzione di continuità nella espressione di M, bisognerà scindere l'integrale e quindi, supponendo I costante,

$$\left.\begin{aligned}L=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{M^2}{EI}dx&=\frac{1}{2EI}\int_A^C M^2dx+\frac{1}{2EI}\int_C^B M^2dx=\\&=\frac{1}{2EI}\left[\int_A^C\left(p\frac{l}{2}x-p\frac{x^2}{2}+Q\frac{b}{l}x\right)^2dx+\right.\\&\left.+\int_C^B\left(p\frac{l}{2}x-p\frac{x^2}{2}+Q\frac{b}{l}x-Q(x-a)\right)^2dx\right]=\\=Q^2\frac{a^2b^2}{6EIl^2}(a+b)&+Qp\frac{a}{24EIl}(a^3l-2a^2l^2+l^4)+p^2\frac{l^5}{240EI}\end{aligned}\right\}(168).$$

In causa del teorema sulle derivate del lavoro, (Num, 38) derivando la espressione superiore rispetto alla forza $(-Q)$ (*) si ottiene il valore della deformazione y nel punto in cui la forza $(-Q)$ è applicata

$$y=\frac{dL}{d(-Q)}=-Q\frac{a^2b^2}{3EIl}-p\frac{a}{24EIl}(a^3l-2a^2l^2+l^4) \qquad (169).$$

Se Q è applicata nel punto di mezzo della trave $a=b=\frac{l}{2}$ quindi

$$y=f=-Q\frac{l^3}{48EI}-\frac{5}{384}p\frac{l^4}{EI}. \qquad (170).$$

Se si fa $Q=0$ si ottiene come precedentemente

$$f=-\frac{5}{384}p\frac{l^4}{EI} \qquad (170^{bis}).$$

Se la trave AB fosse vincolata nelle sezioni estreme corrispondente agli appoggi A e B allora oltre alle due reazioni S e D bisognerebbe prendere in considerazione anche le due coppie M_1 ed M_2 agenti in A ed in B e che si oppongono alla libera rotazione delle due sezioni normali all'asse della trave passanti per quei punti. In tal caso indicando con τ_x il momento dei soli carichi agenti sulla trave preso rispetto alla sezione determinata dalla ascissa x e con τ_d lo stesso momento preso rispetto alla sezione estrema passante per B, il momento flettente rispetto ad una sezione qualsiasi sarebbe dato da

$$M=M_1+Sx-\tau_x$$

e sull'appoggio B da

$$M_2=M_1+Sl-\tau_d$$

da cui si ricava

$$S=\frac{M_2-M_1}{l}+\frac{\tau_d}{l}$$

e quindi

$$M=M_1\left(\frac{l-x}{l}\right)+M_2\frac{x}{l}+\frac{\tau_d}{l}x-\tau_x$$

(*) Si pone in evidenza il segno negativo della forza Q diretta dall'alto al basso per ottenere le formole ricavate precedentemente collo stesso segno.

e lo sforzo di taglio F, indicando con ΣP i carichi attivi agenti sulla trave, sarà dato da

$$F=S-\Sigma P=\frac{M_2-M_1}{l}+\frac{\tau_d}{l}-\Sigma P\,.$$

Se le sezioni estreme della trave non sono impedite di ruotare $M_1=M_2=0$ ed allora si ottiene lo stesso risultato ricavato a pagina 211 e 212 sotto forma più particolare per il caso di un carico p distribuito uniformemente sopra l'asse di una trave a fibra media rettilinea riposante liberamente ai suoi estremi sopra due appoggi, cioè

$$M=\mu=\frac{\tau_d}{l}x-\tau_x \qquad\qquad F=\phi=\frac{\tau_d}{l}-\Sigma P$$

quindi si può enunciare il seguente teorema. *In una trave soggetta a carichi, ad asse rettilineo, appoggiata agli estremi e sollecitata da coppie, o momenti resistenti agenti sulle sezioni estreme, il momento flettente e lo sforzo di taglio in una sezione qualsiasi si compongono della somma di due parti, la prima rappresenta il momento o lo sforzo di taglio prodotto soltanto dall'azione delle coppie o momenti agenti sulle sezioni estreme e la seconda rappresenta il momento μ, o lo sforzo di taglio ϕ, che avrebbero luogo sotto l'influenza dei carichi agenti sulla trave nell'ipotesi che essa riposasse liberamente ai suoi estremi sopra due punti d'appoggio.*

$$M=M_1\frac{l-x}{l}+M_2\frac{x}{l}+\mu \qquad\qquad F=-M_1\frac{1}{l}+M_2\frac{1}{l}+\phi \qquad (171).$$

Se, oltre gli sforzi precedentemente considerati, in un punto C qualunque dall'asse della trave AB (*Fig.* 37ª, *tav.* V) agisce un carico $-Q$ distante a dall'appoggio A e b dall'appoggio B, in questo punto vi è soluzione di continuità nell'espressione del momento flettente M' e dello sforzo di taglio F', che risultano espressi, in causa del principio della sovrapposizione degli effetti (Num. 36), a sinistra del punto C da

$$M'=M_1\frac{l-x}{l}+M_2\frac{x}{l}+\mu+Q\frac{l-a}{l}x=M+Q\frac{l-a}{l}x$$

$$F'=-M_1\frac{1}{l}+M_2\frac{1}{l}+\phi+Q\frac{l-a}{l}=F+Q\frac{l-a}{l}$$

ed a destra del punto C da

$$M' = M_1 \frac{l-x}{l} + M_2 \frac{x}{l} + \mu + Q\frac{a}{l}(l-x) = M + Q\frac{a}{l}(l-x)$$

$$F' = -M_1 \frac{1}{l} + M_2 \frac{1}{l} + \varphi - Q\frac{a}{l} = F - Q\frac{a}{l}.$$

Il lavoro di deformazione della trave (Num. 64) sarà dato da

$$L = \frac{1}{2}\int_A^C \left(\frac{M'^2}{EI} + \frac{F'^2}{GA}\right)dx + \frac{1}{2}\int_C^B \left(\frac{M'^2}{EI} + \frac{F'^2}{GA}\right)dx$$

e la deformazione corrispondente al punto C, in cui è applicato il carico $(-Q)$, in causa del teorema di Castigliano (Num. 38) è data da

$$y_c = \frac{dL}{d(-Q)} = \int_A^C \left(\frac{M'}{EI}\frac{dM'}{d(-Q)} + \frac{F'}{GA}\frac{dF'}{d(-Q)}\right)dx +$$

$$+ \int_C^B \left(\frac{M'}{EI}\frac{dM'}{d(-Q)} + \frac{F'}{GA}\frac{dF'}{d(-Q)}\right)dx$$

e facendo $(-Q)=0$

$$y_c = \left(\frac{dL}{d(-Q)}\right)_{(-Q)=0} = -\frac{l-a}{l}\left[\int_A^C \frac{Mx}{EI}dx + \int_A^C \frac{F}{GA}dx\right] - \left.\right\}$$

$$- \frac{a}{l}\left[\int_C^B \frac{M(l-x)}{EI}dx - \int_C^B \frac{F}{GA}dx\right] \left.\right\} \quad (172)\ (*)$$

(*) Questa formola è stata data dall'Ingegnere Castigliano nel 1879 (*Théorie des systèmes élastiques*, pag. 219). In detta formola lo sforzo di taglio F però è moltiplicato per un coefficiente A, che dipende dalla forma della sezione e corrisponde al coefficiente di correzione V, di cui si è parlato al numero 57.

che è l'espressione più generale della deformazione corrispondente ad un punto di ascissa a di una trave caricata in un modo qualsiasi e vincolata comunque nelle sezioni corrispondenti agli appoggi. Non si è creduto necessario introdurre e mettere in evidenza il coefficiente di correzione V (Num. 57) per l'espressione del lavoro di deformazione prodotto dallo sforzo di taglio perchè questo ha sempre poca importanza nei casi pratici rispetto a quello prodotto dal momento flettente: volendo introdurre questa maggiore approssimazione i termini della formola (172) che contengono F dovrebbero essere moltiplicati per un coefficiente V da determinarsi nei casi particolari volta per volta a seconda della forma della sezione trasversale della trave (Num. 57 e 74).

$$y_c = \frac{dL}{d(-Q)}_{-Q=0} = -\frac{l-a}{l}\left[\int_A^C \frac{Mx}{EI}dx + \int_A^C \frac{VF}{GA}dx\right] - \left| \right. \quad (172^{bis})$$

$$\left. -\frac{a}{l}\left[\int_C^B \frac{M(l-x)}{EI}dx - \int_C^B \frac{VF}{GA}dx\right]\right.$$

Finalmente a determinare la deformazione corrispondente ad un punto può servire convenientemente in molti casi il teorema del Betti. Infatti (Num. 39, form. 47) l'equazione

$$\sum_1^n Pq = \sum_1^n Qp \qquad (47)$$

se si fa

$$P_1 = 1 \quad P_2 = P_3 = P_4 = \ldots = P_n = 0$$

diventa

$$q_1 = Q_1p_1 + Q_2p_2 + Q_3p_3 + \ldots + Q_np_n$$

in cui $p_1, p_2, \ldots p_n$ sono le deformazioni prodotte dal carico $P_1 = 1$ in corrispondenza dei punti d'applicazione delle forze Q_1, $Q_2 \ldots Q_n$, e, calcolate le deformazioni od il diagramma di deformazione per $P_1 = 1$, questa equazione ci permette di determinare immediatamente in qualsiasi ipotesi di carico mediante una somma di prodotti la deformazione corrispondente al punto considerato.

Se invece di carichi isolati Q agisse sulla trave un peso g distri-

buito con legge continua la sommatoria si cangia in un integrale e la deformazione y nel punto in cui si suppone applicata la forza $P_1=1$ è data da

$$y=\int_0^l gp\,dx.$$

Se g è costante ossia se il carico è distribuito uniformemente lungo l'asse della trave allora

$$y=\int_0^l gp\,dx=g\int_0^l p\,dx.$$

Nel caso di un carico $P_1=1$ applicato nel punto di mezzo della trave AB appoggiata liberamente agli estremi $a=\frac{l}{2}$ e la formola (172) dà, trascurando l'effetto dovuto allo sforzo di taglio (Num. 58), per la trave di sinistra

$$p=\left(\frac{dL}{d(-Q)}\right)_{\substack{P_1=1\\Q=0}}=\left[-\frac{l-a}{l}\int_0^a\frac{Mx}{EI}\,dx-\frac{a}{l}\int_a^l\frac{M(l-x)}{EI}\,dx\right]_{P_1=1}=$$

$$=-\frac{1}{48EI}\left(3l^2a-4a^3\right)$$

e quindi per un carico uniformemente distribuito g in causa della simmetria della trave

$$q_1=-g\int_0^{\frac{l}{2}}2\,\frac{3l^2a-4a^3}{48EI}\,da=-\frac{5}{384}\,\frac{gl^4}{EI}$$

come è già stato trovato precedentemente (Form. 170 ^{bis}).

Metodo aritmetico o tabellare.

Il metodo aritmetico o tabellare consiste nel sostituire all'integrazione esatta l'integrazione approssimata col mezzo di sommatorie semplici, oppure impiegando la formola di Simpson. Questo procedimento si applica tutte le volte che non si sanno eseguire

le integrazioni indicate nelle formole di deformazione, oppure quando non si vogliono eseguire perchè si giudicano troppo complesse per la natura delle funzioni da integrare e finalmente perchè è necessario scindere in un numero troppo grande di parti l'integrale in causa delle numerose soluzioni di continuità, che si incontrano nelle funzioni da integrare. Questo metodo ha il vantaggio di essere estremamente uniforme nella sua applicazione qualunque sia la natura e la forma della trave e la distribuzione del carico, contemporaneamente ha l'inconveniente di condurre a calcoli numerici lunghi e laboriosi in sè stessi e per le operazioni di verifica, in guisa che se può riescire utilissimo nelle grandi amministrazioni dove ogni ufficio ha a sua disposizione numerosi calcolatori non può dirsi che presenti sempre uguale utilità per l'ingegnere, che da solo deve attendere ad eseguire in breve tempo progetti completi. È noto che indicando con h una funzione qualsiasi e con ds il differenziale della variabile, da cui essa dipende, con molta apppprossimazione può scriversi

$$\int_{s_0}^{s_0} h\,ds = \sum_{0}^{n} h \Delta S$$

e più esattamenta usando della formola di Simpson

$$\int_{s_0}^{s'} h\,ds = \frac{\Delta s}{3}\left[h_0 + 4h_1 + 2h_2 + 4h_3 + \ldots 2h_{n-2} + 4h_{n-1} + h_n\right]$$

n essendo un numero pari. Per calcolare poi i termini della sommatoria si può usare il procedimento seguente: si divide la travatura (*Fig.* 38ª, *tav.* V) in tanti tronchi mediante sezioni normali all'asse $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$; queste sezioni dovranno essere tanto più vicine, quanto più varia è la distribuzione del carico e la forma delle sezioni vicine, ed in modo speciale se sonvi sezioni singolari per forma o per carico, se si vuole impiegare la formola di Simpson i piccoli tronchi di trave compresi fra due sezioni vicine dovranno avere tutti uguale lunghezza ed essere in numero pari (in condizioni ordinarie la distanza Δs fra due sezioni potrà variare da due a tre volte la massima dimensione trasversale delle sezioni stesse ed anche più se non si richiede una grande esattezza) indi si raccolgono tutti gli elementi del calcolo: aree, momenti d'inerzia,

forze esterne, momenti, ecc., sezione per sezione in un quadro analogo al seguente:

Sezioni della Trave	Valori di A	Valori di I	Valori di X	Valori di F	Valori di M	Valori dei termini h delle sommatorie		
						h'	h''	. . .
σ_0	A_0	I_0	X_0	F_0	M_0	h_0'	h_0''	. . .
σ_1	A_1	I_1	X_1	F_1	M_1	h_1'	h_1''	. . .
σ_2	A_2	I_2	X_2	F_2	M_2	h_2'	h_2''	. . .
σ_3	A_3	I_3	X_3	F_3	M_3	h_3'	h_3''	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

I valori necessarî a riempire questo quadro potranno essere calcolati in base ai dati del problema, o mediante misure prese sopra un disegno fatto in scala conveniente, oppure impiegando un processo completamente grafico. Finalmente servendosi del quadro superiore si passa al calcolo numerico delle sommatorie

$$\sum_{0}^{n} h\Delta s \text{ oppure } \frac{\Delta s}{3}\,(h_0+4h_1+2h_2+4h_3+\ldots 4h_{n-1}+h_n)$$

necessarie a dare il risultato cercato. Questo metodo richiedendo l'uso di un quadro e di sommatorie porta anche il nome di processo tabellare, per sommatorie o per integrazione approssimata. Ogni maggiore spiegazione sarebbe superflua ed inutile senza un esempio numerico, che sarà sviluppato al numero 78 togliendolo dai moduli pubblicati dall'Ufficio d'arte della Società delle Ferrovie dell'Alta Italia.

Applicando questo procedimento al calcolo della freccia in chiave in un arco elastico caricato da pesi facendo uso del teorema delle derivate del lavoro s'arriva ad una formola abbastanza semplice e che può essere usata convenientemente dagli ingegneri.

Sia (*Fig.* 38ª, *tav.* V) ACB un arco elastico appoggiato in A ed in B soggetto a sollecitazione piana e retta riferito a due assi ortogonali aventi l'origine nel punto di mezzo O della corda AB e diretti secondo OB (asse della x) e OC (asse delle y) e per semplicità di calcolo supponiamo che esso sia caricato in modo sim-

metrico rispetto all'asse delle y; ciò permette di considerare solo la metà dell'arco invece di tutta la trave (Num. 71). Sia P un carico applicato in C (chiave dell'arco) e si divida il semiarco CB in sei tronchi uguali mediante le sezioni $\sigma_0, \sigma_1, \ldots \sigma_6$, siano $G_0, G_1, G_2 \ldots G_6$ i centri di gravità delle successive sezioni aventi per coordinate rispettivamente $(x_0 y_0), (x_1 y_1) \ldots (x_6 y_6)$, X_0, Y_0, M_0, $X_1, Y_1, M_1 \ldots X_6, Y_6, M_6$ la componente normale, la componente tangenziale ed il momento flettente delle forze esterne a ciascuna delle sezioni $\sigma_0, \sigma_1 \ldots \sigma_6$ facendo astrazione del carico P, X_0', Y_0', M_0', X_1', Y_1', $M_1' \ldots X_6'$, Y_6', M_6' le stesse quantità tenendo conto anche della forza P, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots (\alpha_6 = 0)$ gli angoli, che le successive sezioni fanno coll'asse delle y. Dall'esame della figura risulta

$$X_0' = X_0 + P\operatorname{sen}\alpha_0, \quad F_0' = F_0 + P\cos\alpha_0, \quad M_0' = M_0 + Px_0$$

$$X_1' = X_1 + P\operatorname{sen}\alpha_1, \quad F_1' = F_1 + P\cos\alpha_1, \quad M_1' = M_1 + Px_1$$

$$X_2' = X_2 + P\operatorname{sen}\alpha_2, \quad F_2' = F_2 + P\cos\alpha_2, \quad M_2' = M_2 + Px_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$X_5' = X_5 + P\operatorname{sen}\alpha_5, \quad F_5' = F_5 + P\cos\alpha_5, \quad M_5' = M_5 + Px_5$$

$$X_6' = X_6 \qquad F_6' = F_6 + P \qquad M_6' = M_6 + P \cdot 0 = M_6.$$

Sostituendo questi valori nell'espressione generale del lavoro ed usando la formola di Simpson si ottiene

$$L = \frac{1}{2}\sum_0^6 \frac{M'^2}{EI}\Delta s + \frac{1}{2}\sum_0^6 \frac{X'^2}{EA}\Delta s + \frac{1}{2}\sum_0^6 \frac{F'^2}{GA} =$$

$$= \frac{\Delta s}{6E}\left[\frac{M_0^2 + 2M_0 x_0 P + P^2 x_0^2}{I_0} + 4\frac{M_1^2 + 2M_1 x_1 P + P^2 x_1^2}{I_1} + \right.$$

$$\left. + 2\frac{M_2^2 + 2M_2 x_2 P + P^2 x_2^2}{I_2} + \ldots\right] +$$

$$+ \frac{\Delta s}{6E}\left[\frac{X_0^2 + 2X_0 \operatorname{sen}\alpha_0 P + P^2 \operatorname{sen}^2\alpha_0}{A_0} + \right.$$

$$+ 4\frac{X_1^2 + 2X_1 \operatorname{sen}\alpha_1 P + P^2 \operatorname{sen}^2\alpha_1}{A_1} + 2\frac{X_2^2 + 2X_2 \operatorname{sen}\alpha_2 P + P^2 \operatorname{sen}^2\alpha_2}{A_2} + $$

$$\left. + \ldots\right] + \frac{\Delta s}{6G}\left[\frac{F_0^2 + 2F_0 \cos\alpha_0 P + P^2 \cos^2\alpha_0}{A_0} + \right.$$

$$+4\frac{F_1^2+2F_1\cos\alpha_1 P+P^2\cos^2\alpha_1}{A_1}+$$

$$+2\frac{F_2^2+2F_2\cos\alpha_2 P+P^2\cos^2\alpha_2}{A_2}+\ldots\Big].$$

Applicando il teorema di CASTIGLIANO sulle derivate del lavoro, la freccia f di deformazione in chiave sarà data dalla derivata del lavoro di deformazione rispetto a P, nella quale si porrà $P=0$ se, come accade ordinariamente, in chiave non agisce carico isolato alcuno; sarà quindi

$$\left.\begin{aligned} f=\left(\frac{dL}{dP}\right)_{P=0}&=\frac{\Delta s}{3E}\left(\frac{M_0x_0}{I_0}+4\frac{M_1x_1}{I_1}+2\frac{M_2x_2}{I_2}+\ldots\right)+\\ &+\frac{\Delta s}{3E}\left(\frac{X_0\operatorname{sen}\alpha_0}{A_0}+4\frac{X_1\operatorname{sen}\alpha_1}{A_1}+2\frac{X_2\operatorname{sen}\alpha_2}{A_2}+\ldots\right)+\\ &+\frac{\Delta s}{3G}\left(\frac{F_0\cos\alpha_0}{A_0}+4\frac{F_1\cos\alpha_1}{A_1}+2\frac{F_2\cos\alpha_2}{A_2}+\ldots\right)\end{aligned}\right\}\quad(173).$$

La stessa formola può servire anche per le travature ad asse rettilineo disposte orizzontalmente sovra due appoggi A e B (*Fig.* 37ª, *tav.* V) basta per questo porre nella medesima $\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\ldots=0$ e $\Delta s=\Delta x$.

Metodo grafico.

Se si calcolano le formole dei numeri 67 e 68 con processi geometrici, e più specialmente gli integrali mediante valutazioni di aree, oppure col mezzo di somme di segmenti ricorrendo alle proprietà del poligono delle forze e del poligono funicolare od a quelle del fascio funicolare, allora si dice che i calcoli sono fatti con metodo grafico. Al diverso uso di questi procedimenti geometrici ed alla loro combinazione corrisponde la moltiplicità dei metodi grafici proposti dagli studiosi per la soluzione dei diversi problemi di resistenza dei materiali, che si presentano nella scienza dell'ingegnere (*).

Non sembra opportuno sviluppare ora un esempio di integrazione grafica, poichè non sarebbe che una semplice applicazione del calcolo grafico senza alcuna difficoltà speciale ed inoltre nella

(*) CANEVAZZI, *Sulla teoria dell'equilibrio delle travature*, 1886.

seconda parte di questo corso si presenterà frequentemente il caso d'impiegare questi procedimenti. Ci limitiamo quindi ad esporre una notevole proprietà del poligono funicolare, che lo rende adattissimo al calcolo delle deformazioni delle travi ad asse rettilineo, sollecitate da forze normali all'asse ed agenti in un piano passante pel medesimo, ed il metodo della curva delle pressioni per la determinazione degli sforzi e dei momenti agenti nelle diverse sezioni di una trave, il cui asse giaccia tutto nel piano delle forze, che la sollecitano.

I° L'equazione dell'asse neutro longitudinale deformato in una trave ad asse originariamente rettilineo (asse che supporremo disposto orizzontalmente) soggetta a sollecitazione piana e retta in causa di forze agenti normalmente al suo asse è (Num. 69)

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI}=\frac{\left(\frac{M}{I}\right)}{E} \qquad (174).$$

È noto che l'equazione della curva d'equilibrio di una fune soggetta ad un carico verticale p per unità di lunghezza in proiezione orizzontale sotto l'influenza di una tensione orizzontale Q è una funicolare avente per equazione

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{p}{Q} \qquad (175).$$

Confrontando l'equazione (174) colla (175) si ricava il seguente teorema. *La forma che prende dopo la deformazione l'asse originariamente rettilineo di una trave soggetta a sollecitazione retta coincide con quella che prenderebbe una fune in equilibrio sotto l'influenza di un carico per unità di lunghezza in proiezione orizzontale* $\mathrm{p}=\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{I}}$ *e di una tensione orizzontale* $\mathrm{Q}=\mathrm{E}$.

Da questa proprietà si deduce un metodo grafico semplicissimo per la costruzione dell'asse longitudinale di una trave dopo la deformazione.

a) Disegnato in iscala l'asse della trave, si tracci il diagramma dei momenti inflettenti. Questo diagramma potrà essere costruito determinando l'espressione analitica del momento (per un carico p uniformemente distribuito per metro corrente di trave abbiamo già trovato $M=\frac{pl}{2}x-\frac{px^2}{2}$) ed in seguito dando

ad x valori diversi si tracci la linea (od il sistema di linee) che corrisponde all'espressione del momento, considerando le x sull'asse della trave come ascisse ed i valori di M come ordinate. Se $M=\frac{pl}{2}x-\frac{px^2}{2}$ il diagramma dei momenti (*Fig.* 39ª, *tav.* V) risulta una parabola ad asse verticale passante per A e per B, è quindi facilmente tracciabile quando si conosca un altro punto, che ordinariamente si determina facendo $x=\frac{l}{2}$, allora $M=\frac{pl^2}{8}$ e corrisponde al vertice della parabola ossia al massimo valore di M; infatti ponendo $\frac{dM}{dx}=\frac{pl}{2}-px=0$ si ricava $x=\frac{l}{2}$ quale valore della variabile, che rende massima la funzione M.

Questo diagramma può anche essere tracciato per punti nel modo seguente: sull'asse della trave (*Fig.* 40ª, *tav.* V) si fissino alcuni punti 0, 1, 2, . . . n e con misure di lunghezze e valori desunti dai dati del problema o rilevati sul disegno, si calcolino i momenti flettenti rispetto alle sezioni normali passanti pei punti 0, 1, 2, . . . n e quindi si portino come ordinate in corrispondenza dei punti medesimi dei segmenti proporzionali al valore dei momenti trovati; riunendo con tronchi rettilinei o con una curva tracciata a mano gli estremi delle ordinate si ottiene il diagramma cercato: più le ordinate sono vicine e più esatta risulta la rappresentazione geometrica della variazione dei momenti.

Finalmente il diagramma dei momenti flettenti può essere costruito tracciando un poligono funicolare, che colleghi le forze $P_1, P_2, P_3, \ldots$ (*Fig.* 41ª, *tav.* V) che agiscono sulla trave e conducendo nel medesimo la retta di chiusura $A'B'$, poichè è noto che l'ordinata η condotta al contorno del poligono funicolare partendo dalla retta di chiusura $A'B'$ moltiplicata per la base H del poligono delle forze è uguale al momento delle forze esterne alla sezione normale σ tracciata nella direzione η, quindi il contorno 0, *I*, *II*, *III*, *IV*, *V* è realmente il diagramma dei momenti flettenti riferito alla retta $A'B'$ come asse dal quale si debbono contare le lunghezze delle ordinate.

b) Si costruisca il diagramma dei valori di I. Ciò potrà farsi come precedentemente cercando (quando si può) l'espressione analitica di I in funzione di x e quindi tracciare per punti il diagramma, oppure scegliendo un certo numero di sezioni (*Fig.* 42ª, *tav.* V) $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ abbastanza vicine, per ciascheduna di esse calcolare numericamente o graficamente il momento d'inerzia e portare in corrispondenza di ogni sezione un segmento proporzionale al valore trovato come ordinata: riunendo con tratti retti-

linei o con una curva a mano gli estremi delle ordinate si ottiene il diagramma cercato i_0, i_1, i_2 . . . i_{n-1}, i_n.

c) Finalmente si costruisca il diagramma dei valori $\frac{M}{I}$. Se I ha un valor costante in tutta la lunghezza della trave allora il diagramma $\frac{M}{I}$ è una figura affine al diagramma dei valori di M, quindi quest'ultimo può considerarsi come diagramma dei valori di $\frac{M}{I}$ purchè si abbia cura di moltiplicare le sue ordinate per il fattore costante $\frac{1}{I}$, od anche, se H è la base di riduzione dei momenti, interpretare il diagramma come se la base di riduzione fosse $\frac{H}{I}$. Se I ha un valore variabile da sezione a sezione, in generale riesce difficile esprimere mediante una funzione abbastanza semplice di x il rapporto $\frac{M}{I}$ quindi generalmente, scelto un certo numero di sezioni normali abbastanza vicine (*Fig.* 42ª, *tav.* V) si calcoli per ciascuna di esse il valore $\frac{M}{I}$ numericamente o geometricamente, costruendo una quarta proporzionale dopo i segmenti, che rappresentano i valori di M, I, ed un segmento costante d, da riguardarsi come base di riduzione comune dei valori $\frac{M}{I}$, ed in corrispondenza di ogni sezione si portino come ordinate i segmenti rappresentanti il valore di $\frac{M}{I}$ nella sezione stessa; riunendo con tratti rettilinei o con una curva a mano gli estremi delle ordinate si ottiene il diagramma 0, I_1, II_1, III_1, . . . che rappresenta la variazione del rapporto $\frac{M}{I}$.

Il Professore Winkler osserva che se si pone

$$I_m = \int_0^l \frac{I dx}{l}$$

l'equazione

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

può scriversi anche

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI_m} \times \frac{MI_m}{I}.$$

Ciò evidentemente equivale a considerare una curva funicolare in cui la tensione orizzontale Q è EI_m ed il carico unitario per unità di lunghezza in proiezione orizzontale è $p = \frac{MI_m}{I}$, ossia a prendere come base d di riduzione una quantità proporzionale al valore medio I_m del momento d'inerzia della trave. Se I ha un valore costante, $I_m = I$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{EI} \times M$, il diagramma dei valori di $\frac{MI_m}{I}$ coincide col diagramma dei valori di M e la tensione orizzontale $Q = EI_m$ diventa $Q = EI$.

d) Tracciato il diagramma dei valori di $\frac{MI_m}{I}$ oppure $\frac{M}{I}$ si costruisca un poligono funicolare considerando l'area del diagramma $A_1, I_1, II_1, III_1 \ldots B$ (*Fig.* 42ª, *tav.* V) come area pesante, cioè rappresentante un carico distribuito su tutta l'estensione della trave e prendendo come distanza polare nel poligono delle forze una retta proporzionale rispettivamente ad EI_m oppure ad E, il poligono funicolare $A \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n B$ è circoscritto alla funicolare, che coincide colla forma, che prende l'asse neutro longitudinale della trave dopo la deformazione. E è un numero molto grande e le deformazioni y dell'asse della trave sono piccolissime, quindi queste quantità sarebbero male rappresentabili su un foglio di disegno; approfittando del teorema che il prodotto della base di riduzione per l'ordinata momento del poligono funicolare è costante si ripara a questo inconveniente nel poligono delle forze prendendo come distanza polare una lunghezza c uguale a $\frac{EI_m}{n}$ od a $\frac{E}{n}$, allora le ordinate del poligono funicolare risultano n volte più grandi del vero e possono essere facilmente rappresentate: ordinariamente si fa $n = 100$ od $n = 1000$.

La determinazione effettiva della forma dell'asse neutro longitudinale della trave dopo la deformazione, o come suol dirsi la determinazione della curva elastica si fa nel modo seguente.

Sia AB la trave (*Fig.* 43ª, *tav.* VI) ed ACB il diagramma dei valori di $\frac{MI_m}{I}$, si divida l'area del diagramma in tante parti elementari col mezzo di ordinate condotte per i punti $0, 1, 2, 3 \ldots, n$

scelti sull'asse della trave ad arbitrio più o meno vicini a seconda della maggiore o minore precisione, che si vuole portare nella ricerca, si determini il baricentro V di ciascuna area elementare ed al medesimo si supponga applicata una forza P proporzionale all'area stessa. Si costruisca il poligono delle forze parallele P e presa come distanza polare una lunghezza c proporzionale ad $\frac{EI_m}{n}$ si deduca un poligono funicolare a collegare le forze P e, prolungati i lati estremi ad incontrare in A' e B' le verticali passanti per gli appoggi, si conduca la retta di chiusura $A'B'$; la funicolare inscritta in questo poligono è una linea affine alla curva elastica e l'ordinata momento η rappresenta alla scala del disegno la deformazione y dell'asse della trave moltiplicata per il coefficiente costante n.

Nelle (*Fig.* 44ª e 45ª, *tav.* VI) sono rappresentate tutte le operazioni necessarie per determinare la curva elastica in due travi ad asse rettilineo, una incastrata in A e libera all'estremo B (*Fig.* 44ª, *tav.* VI) e l'altra riposante liberamente agli estremi sopra due appoggi A e B posti allo stesso livello (*Fig.* 45ª, *tav.* VI): i varî diagrammi sono indicati colle stesse lettere usate superiormente nella trattazione generale.

Osservazione. — La condizione fisica d'*incastro* corrisponde al vincolo *sezione impedita di ruotare* e quindi ad un insieme di reazioni molecolari, che danno luogo ad una coppia o momento resistente, mentre invece l'appoggio, impedendo soltanto la traslazione del centro della sezione in una determinata direzione, è causa che si sviluppi una forza di reazione uguale e contraria all'azione della trave sull'appoggio stesso in quella particolare direzione.

Nelle figure 44 e 45 il calcolo è fatto interamente mediante operazioni grafiche. Il diagramma dei momenti M è ottenuto costruendo il poligono funicolare A_1, I_1, II_1, ... B_1 che collega le forze P agenti sulla trave, questo poligono porta il nome di *I° poligono funicolare*. Si è costruito in seguito il diagramma i_0, i_1, i_2, ... i_n dei valori di I ed il diagramma A'_1, I'_1, II'_1, ... B'_1 dei valori di $\frac{MI_m}{I}$, e, riguardando l'area di quest'ultimo diagramma come area pesante, si è costruito il poligono delle forze corrispondenti O_2, 0_2, 1_2... n_2 prendendo come base $c=\frac{EI_m}{n}$ e si è dedotto il corrispondente poligono funicolare, che porta il nome di *II° poligono funicolare;* la funicolare inscritta in questo secondo po-

ligono A_2, I_2, II_2, ... B_2 rappresenta la curva elastica, cioè le sue ordinate η sono uguali ad n volte y, $\eta = ny$ e quindi in ogni punto della trave può essere determinata immediatamente la deformazione.

II° Il poligono funicolare e quello delle forze applicati alla ricerca delle forze e dei momenti flettenti sulle travature soggette a sollecitazione piana e retta conducono ad un metodo conosciuto col nome di *procedimento* o *metodo della curva delle pressioni.* Sia $A_0 A_n$ (*Fig.* 46ª, *tav.* VI) una travatura qualsiasi avente il suo asse contenuto nel piano di sollecitazione, supponiamola divisa in tanti tronchi $A_0 A_1$, $A_1 A_2$ ... $A_{n-1} A_n$ mediante le sezioni σ_0, σ_1, σ_2 ... σ_n abbastanza vicine perchè il tronco compreso fra due sezioni possa considerarsi come molto corto (in generale non dovrà superare in lunghezza due o tre volte la massima dimensione della sezione trasversale della trave), ed indichiamo con P_1, P_2, P_3 ... P_n le risultanti parziali delle forze agenti esternamente alla trave sopra ciascun tronco della medesima.

Si costruisca il poligono delle forze agenti sulla trave (avendo cura di seguire l'ordine stesso col quale s'incontrano percorrendo l'asse della trave da A_0 verso A_n) conducendo il segmento $L0$ equipollente ad S_0, 01 equipollente a P_1, 12 a P_2 ecc.... indi, preso come polo il punto L origine del poligono delle forze, si costruisca un poligono funicolare, che colleghi le forze P prendendo come primo lato la linea d'azione della forza S_0; il poligono così ottenuto chiamasi *poligono delle risultanti* poichè ogni suo lato coincide colla direzione della risultante delle forze precedenti agenti sulla trave, cioè poste alla destra del lato, che si considera, mentre l'intensità e la direzione di questa risultante vengono date dal raggio corrispondente nel poligono delle forze. Il punto O_k in cui il lato k^{esimo} del poligono delle risultanti incontra la sezione σ_k, che separa le forze già collegate dal poligono funicolare da quelle, che ancora rimangono da collegarsi, porta il nome di centro di pressione, perchè è il punto per cui passa la risultante delle forze esterne alla sezione stessa, e, se si uniscono con linee rette i successivi punti O, si ottiene un poligono che porta il nome di *poligono dei centri di pressione.* Se dagli estremi di un raggio qualsiasi Lk del poligono delle forze si conducono due rette, una parallela e l'altra normale alla direzione della sezione corrispondente σ_k, si ottiene un triangolo rettangolo, nel quale l'ipotenusa Lk è equipollente alla risultante delle forze esterne alla sezione σ_k ed i due cateti sono rispettivamente equipollenti, uno (kV_k) alla componente normale X_k e l'altro (LV_k) alla componente tangenziale F_k. Se la componente normale X_k si

moltiplica per la lunghezza δ_k, che misura la distanza fra il centro di pressione O_k ed il centro di gravità A_k, si ottiene il momento flettente delle forze esterne alla sezione, poichè la componente F_k, passando pel centro di gravità A_k, non dà luogo a momento alcuno. Ripetendo la stessa costruzione per tutte le sezioni fatte lungo l'asse della trave si possono determinare agevolmente la componente normale X, la componente tangenziale F ed il momento flettente M per ogni sezione.

Questa costruzione è eseguita nella (*Fig.* 46ª, *tav.* VI) $L, 0, 1, 2, 3 \ldots k \ldots$ è il poligono delle forze $S_0, I_1, II_1 \ldots K_1 \ldots$ è il poligono delle risultanti, le lunghezze δ sono date dalle distanze OA, le componenti normali X dalle linee $0V_0$, $1V_1 \ldots kV_k \ldots nV_n$, le compoponenti tangenziali F dalle linee LV_0, $LV_1 \ldots LV_k \ldots LV_n$ ed i momenti flettenti dai rettangoli $0V_0 \cdot \delta_0$, $1V_1 \cdot \delta_1$, $2V_2 \cdot \delta_2 \ldots kV_k \cdot \delta_k \ldots nV_n \cdot \delta_n$.

Da quanto precede risulta che se sono note tutte le forze esterne agenti sulla trave (oppure se si possono determinare immediatamente senza ricorrere alla teoria dell'equilibrio dei corpi elastici perchè il numero delle forze incognite non supera quello delle condizioni di equilibrio per i sistemi di forma invariabile) si può sempre tracciare il poligono delle forze e quello delle risultanti, determinare il centro di pressione in ogni sezione e quindi passare al calcolo geometrico delle componenti normali e tangenziali delle risultanti delle forze esterne ad ogni sezione, ed a quello del momento flettente da esse prodotto. Con procedimento inverso se sono dati per ogni sezione i valori di X, F ed M, si possono calcolare i valori di $\delta = \frac{M}{X}$, determinare per ogni sezione il centro di pressione e tracciare il poligono dei centri di pressione, e volendo, cosa però che in generale non avrà grande interesse, costruire il poligono delle forze agenti sulla trave ed il poligono delle risultanti.

Se il numero delle sezioni σ aumenta, aumenta pure il numero dei lati del poligono dei centri di pressione ed al limite, cioè quando il numero delle sezioni è infinitamente grande e quindi riescono infinitamente vicine fra loro, si ottiene una linea, ordinariamente curva, che chiamasi *curva delle pressioni*. Contemporaneamente avviene che in generale aumenta anche il numero dei lati del poligono delle risultanti, e, se il carico è distribuito sulla trave con legge di continuità, al limite si ottiene una curva, che può chiamarsi *curva delle risultanti*, poichè le direzioni di queste ultime rette le sono tangenti. È importante avvertire, che aumentando indefinitamente il numero delle sezioni σ non sempre al limite

la curva delle pressioni e quella delle risultanti coincidono in una unica linea. Sia A_{k-1} A_k (*Fig.* 47ª e 48ª, *tav.* VII) uno dei tronchi della trave considerata poc'anzi e precisamente quello compreso fra la sezione σ_{k-1} e la sezione σ_k, se il lato K_1—1, K_1 del poligono delle risultanti incontra prima la forza P_k e poi la sezione σ_k allora il punto O_k cade sul lato K_1, K_1+1 del poligono delle risultanti, se questa condizione si verifica in tutti i tronchi, in cui la trave può intendersi divisa, il poligono dei centri di pressione è inscritto nel poligono delle risultanti ed aumentando il numero delle sezioni, al limite i due poligoni coincidono in un'unica curva.

Se invece il lato K_1-1, K_1 incontra prima la sezione σ_k e poi la forza P_k (*Fig.* 48ª, *tav.* VII) allora il punto O_k cade sul prolungamento dellato K_1+1, K_1 del poligono delle risultanti, i due poligoni non si possono più considerare come inscritti o circoscritti nel senso ristretto della parola (cioè i vertici cadono sui prolungamenti dei lati e non sui lati stessi) ed aumentando il numero delle sezioni al limite si avranno due curve distinte; esse però dipendono sempre una dall'altra ed hanno fra loro un'intima relazione. Dall'esame delle (*Fig.* 47ª e 48ª, *tav.* VII) risulta che il primo caso ha luogo tutte le volte che la direzione e la posizione della forza P_k coincide con quella della bissetrice dell'angolo compreso dalle due sezioni normali σ_{k-1} e σ_k od almeno non è molto diversa da essa. Se questa condizione non si verifica allora i centri di pressione *O possono* venir a cadere sui prolungamenti dei lati del poligono delle risultanti e la curva delle pressioni *può* essere diversa da quella delle risultanti.

Si è visto superiormente che la formola $p = \Sigma P q$ (Num. 39, form. 49) permette di determinare le deformazioni di un punto qualsiasi di una travatura quando siano note le deformazioni che produce un carico unitario, che agisce sopra questo punto, in tutti gli altri punti della trave stessa. Nel caso ordinario di travature soggette all'azione di pesi, il calcolo dell'abbassamento di un punto si può fare geometricamente nel modo seguente: si tracci in scala conveniente il diagramma degli abbassamenti prodotti da un carico unitario applicato nel punto che si considera, cioè la linea, le cui ordinate sono uguali o proporzionali agli abbassamenti dei punti dell'asse della trave, che trovansi sull'ordinata stessa prolungata, e che suol chiamarsi diagramma unitario di deformazione o degli abbassamenti relativo al punto considerato: si segnino sul disegno le linee d'azione delle diverse forze agenti sulla trave a seconda dell'ipotesi di carico ammessa. L'abbassamento o freccia della trave nel punto preso in esame (dipenden-

temente dalla scala usata nel disegno del diagramma unitario di deformazione) è uguale o proporzionale alla somma dei prodotti delle intensità delle diverse forze per l'ordinata corrispondente del diagramma di deformazione.

73. Correlazione fra le forze esterne ed interne e le deformazioni nei sistemi elastici soggetti successivamente all'influenza di due diversi sistemi di forze. — Le considerazioni svolte nel numero precedente mostrano come nei sistemi staticamente determinati, ossia in quelli in cui sono note tutte le forze esterne attive e passive (od almeno sono determinabili col solo aiuto dei teoremi della statica dei sistemi di forma invariabile) sia abbastanza facile la determinazione delle caratteristiche meccaniche di ogni sezione, cioè della componente normale e tangenziale alla sezione e dei momenti risultanti rispetto ad assi passanti pel suo baricentro delle forze esterne alla medesima, non che quella delle deformazioni corrispondenti alle medesime. Lo stesso calcolo riesce invece in generale notevolmente più complesso quando il sistema non è staticamente determinato, e sotto questo aspetto può essere interessante in molti casi far dipendere la determinazione delle deformazioni dal valore che assumono le caratteristiche meccaniche di ogni sezione in determinate ipotesi di carico. Combinando l'equazione delle velocità virtuali (Num. 7) col teorema di reciprocità del Betti (Num. 39) si ricava una proprietà dei sistemi elastici, che permette di arrivare facilmente a questo risultato. Indicando con P (P_1, P_2, . . . P_n) un sistema di forze agenti sovra un corpo o sistema di corpi elastici, con δ, (δ_1, δ_2, . . . δ_n) gli spostamenti dei punti d'applicazione delle forze P misurati secondo la loro direzione, con u, v, w gli spostamenti elastici paralleli agli assi di un punto qualsiasi del sistema, con p_{xx}, p_{xy}, . . . ecc., t_x, t_y, ecc., le forze e le deformazioni elastiche componenti (Num. 15 e 24) in un punto qualsiasi, con U il lavoro delle forze esterne P, con L il lavoro di deformazione, con I il lavoro unitario di deformazione in ogni punto, l'equazione di Clapeyron (Num. 53, form. 99), tenendo conto delle trasformazioni algebriche eseguite allo stesso numero 53, dà

$$U=\Sigma P\delta=2L=-\int\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{dp_{xx}}{dx}+\dfrac{dp_{xy}}{dy}+\dfrac{dp_{xz}}{dz}\right)u+\\ +\left(\dfrac{dp_{xy}}{dx}+\dfrac{dp_{yy}}{dy}+\dfrac{dp_{yz}}{dz}\right)v+\\ +\left(\dfrac{dp_{xz}}{dx}+\dfrac{dp_{yz}}{dy}+\dfrac{dp_{zz}}{dz}\right)w\end{array}\right\}dx\,dy\,dz- \qquad (99^{bis})$$

$$\left.\begin{aligned} -\int \left\{ \begin{aligned} &(p_{xx}\cos\alpha + p_{xy}\cos\beta + p_{xz}\cos\alpha)u + \\ &+(p_{xy}\cos\alpha + p_{yy}\cos\beta + p_{yz}\cos\gamma)v + \\ &+(p_{xz}\cos\alpha + p_{yz}\cos\beta + p_{zz}\cos\gamma)w \end{aligned} \right\} d\sigma = \\ = \int dx\,dy\,dz\,(p_{xx}i_x + p_{yy}i_y + p_{zz}i_z + \\ + p_{xy}g_{xy} + p_{xz}g_{xz} + p_{yz}g_{yz}) = \int I\,dx\,dy\,dz \end{aligned}\right\} \quad (99^{bis}).$$

Se invece di considerare gli spostamenti reali δ, u, v, w si prendono in esame altri spostamenti infinitesimi e compatibili fra loro e coi vincoli del sistema, l'equazione superiore non rappresenta più un lavoro reale, ma virtuale, e coincide con quella importata dal principio delle velocità virtuali (Num. 7) e che deve sempre verificarsi in un sistema in equilibrio.

Siano P', $(P'_1, P'_2, \ldots P'_n)$ e P'' $(P''_1, P''_2, \ldots P''_k \ldots P''_n)$ due sistemi di forze esterne agenti successivamente sopra un corpo o sistemi di corpi elastici

δ' $(\delta'_1, \delta'_2, \ldots \delta'_k \ldots \delta_n)$ e δ'' $(\delta''_1, \delta''_2, \ldots \delta_k \ldots \delta''_n)$ rispettivamente gli spostamenti dei punti d'applicazione delle forze P' e P'' misurati secondo le loro direzioni

u', v', w', e u'', v'', w'' gli spostamenti elastici paralleli agli assi coordinati prodotti rispettivamente dalle forze P' e P''

p'_{xx}, p'_{xy}, ... ecc., p''_{xx}, p''_{xy}, ... ecc., i'_x, i'_y, i'_z, g'_{xy}, ... i''_x, i''_y, ... le forze e le deformazioni elastiche componenti, che si sviluppano in ogni punto in causa dei sistemi di forze P' e P''.

I due sistemi di spostamenti δ', u', v', w', e δ'', u'', v'', w'' sono necessariamente compatibili fra loro e coi vincoli del sistema perchè corrispondono a due stati di equilibrio, e sono infinitamente piccoli perchè per ipotesi sono spostamenti elastici, quindi, applicando alle forze P' e P'' il principio delle velocità virtuali e tenendo conto della trasformazione nell'espressione degli spostamenti interni paralleli agli assi coordinati indicata nella (99^{bis}) risulta, indicando con dS o ΔS l'elemento di spazio

$$\Sigma P'\delta'' = \Sigma(p'_{xx}i''_x + p'_{yy}i''_y + p'_{zz}i''_z + p'_{xy}g''_{xy} + p'_{xz}g''_{xz} + p'_{yz}g''_{yz})\Delta S$$

$$\Sigma P''\delta' = \Sigma(p''_{xx}i'_x + p''_{yy}i'_y + p''_{zz}i'_z + p''_{xy}g'_{xy} + p''_{xz}g'_{xz} + p''_{yz}g'_{xz})\Delta S.$$

In causa del teorema di reciprocità del Betti dimostrato al numero 39

$$\Sigma P'\delta'' = \Sigma P''\delta'$$

quindi

$$\left.\begin{aligned}\Sigma P'\delta'' &= \Sigma(p'_{xx}i''_x + p'_{yy}i''_y + p'_{zz}i''_z + p'_{xy}g''_{xy} + \\ &+ p'_{xz}g''_{xz} + p'_{yz}g''_{yz})\Delta s = \int (p'_{xx}i''_x + p'_{yy}i''_y + \\ &+ p'_{zz}i''_z + p'_{xy}g''_{xy} + p'_{xz}g''_{xz} + p'_{yz}g''_{yz})\,dS = \Sigma P''\delta''\end{aligned}\right\} (176).$$

Da questa equazione si ricava il seguente teorema, che chiameremo di *correlazione* per distinguerlo da quello di reciprocità (Num. 39) col quale ha moltissima affinità.

Se sovra un sistema elastico agiscono successivamente due sistemi di forze la somma dei prodotti delle forze del primo sistema (P') *per gli spostamenti* (δ'') *dei loro punti d'applicazione prodotti dalle forze del secondo* (P'') *è uguale alla somma* (*integrale*) *delle forze elastiche corrispondenti alle forze del secondo sistema* (P'') *per le deformazioni elastiche corrispondenti al primo* (P') *o viceversa* (*).

Le forze e le deformazioni elastiche sono legate fra loro da relazioni lineari senza termine indipendente (Num. 42, 43, 44) quindi nella (176) si possono mettere in evidenza soltanto le forze elastiche, oppure solo le deformazioni. Limitandoci al caso dei corpi elastici isotropi, si è trovato (Num. 44, form. 73) che in generale è

$$i_x = \frac{p_{xx}}{E} - \frac{p_{yy}}{mE} - \frac{p_{zz}}{mE} \qquad g_{xy} = \frac{p_{xy}}{G}$$

$$i_y = \frac{p_{yy}}{E} - \frac{p_{xx}}{mE} - \frac{p_{zz}}{mE} \qquad g_{xz} = \frac{p_{xz}}{G}$$

$$i_z = \frac{p_{zz}}{E} - \frac{p_{xx}}{mE} - \frac{p_{yy}}{mE} \qquad g_{yz} = \frac{p_{yz}}{G}$$

(*) La (99bis) mostra che può essere enunciato un teorema analogo prendendo in considerazione gli elateri interni e superficiali (*Osservazione*, pag. 149) e gli spostamenti dei diversi punti.

La dimostrazione di questo teorema è stata svolta in relazione a quanto è stato detto in precedenza ed al metodo elementare costantemente seguito in questo corso. Essa può facilmente servire anche direttamente per i casi particolari di travature semplici e composte, che qui sono considerati come casi

quindi sostituendo alle deformazioni le loro espressioni in funzione delle corrispondenti forze elastiche la (176) diventa

$$\left.\begin{aligned}\Sigma P''\delta' = \Sigma\Big[& p'_{xx}\frac{p''_{xx}}{E} + p'_{yy}\frac{p''_{yy}}{E} + p'_{zz}\frac{p''_{zz}}{E} - \frac{1}{mE}[p'_{xx}p''_{yy} + \\ & + p'_{xx}p''_{zz} + p'_{yy}p''_{zz} + p'_{yy}p''_{xx} + p'_{zz}p''_{xx} + p'_{zz}p''_{yy}] + \\ & + \frac{1}{G}[p'_{xy}p''_{xy} + p'_{xz}p''_{xz} + p'_{yz}p''_{yz}]\Big]\Delta S = \Sigma P'\delta''\end{aligned}\right\} \quad (177)$$

ed una formola analoga ed equivalente si può ottenere mettendo in evidenza le deformazioni. Se il sistema di forza P'' si riduce ad una sola forza $P''_k = 1$ agente nel punto k e si indicano con (p_{xx}^k), (p_{yy}^k) ecc., i valori delle forze elastiche corrispondenti a questa ipotesi la (177) diventa

$$\left.\begin{aligned}\delta'_k = \Sigma\Big[& \frac{1}{E}\Big(p'_{xx}(p_{xx}^k) + p'_{yy}(p_{yy}^k) + p'_{zz}(p_{zz}^k)\Big) - \\ & - \frac{1}{mE}[p'_{xx}(p_{yy}^k) + p'_{xx}(p_{zz}^k) + p'_{yy}(p_{zz}^k) + p'_{yy}(p_{xx}^k) + \\ & + p'_{zz}(p_{xx}^k) + p'_{zz}(p_{yy}^k)] + \\ & \frac{1}{G}[p'_{xy}(p_{xy}^k) + p'_{xz}(p_{xz}^k) + p'_{yz}(p_{yz}^k)]\Big]\Delta S\end{aligned}\right\} \quad (178)$$

che dà la deformazione δ'_k in un punto k qualsiasi del corpo. È evidente che i valori (p_{xx}^k) (p_{yy}^k) . . . sono numeri, che dipendono dalla forma del corpo, dalla posizione del punto k e dalla direzione, nella quale gli spostamenti δ sono misurati, e non hanno alcuna relazione col valore delle forze P' agenti sul sistema.

---

derivati dalla formola generale (176) (Canevazzi, *Contributo alla teoria dei sistemi elastici*, Atti della Regia Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, 1890). Tanto questo teorema che quello di Betti, Castigliano, ecc., si collegano colla teoria delle forme e precisamente sono in intima relazione colle proprietà delle funzioni omogenee di secondo grado. Veggasi la nota *A* in fine di questa parte sui teoremi fondamentali della scienza delle costruzioni.

Se il sistema P' si riduce ad una sola forza $P'_r=1$ agente nel punto r allora $p'_{xx}=(p_{xx}^r)$, $p'_{yy}=(p_{yy}^r)$ . . . e

$$\delta_k'=\Sigma\left[\frac{1}{E}\left((p_{xx}^r)(p_{xx}^k)+\ldots\right)-\frac{1}{mE}\left[(p_{xx}^r)(p_{yy}^k)+\ldots\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{G}\left((p_{xy}^r)(p_{xy}^k)+\ldots\right)\right]\Delta S=\delta''_r$$

che mette in evidenza il principio di MAXWELL già dimostrato al numero 39, (Pag. 111), poichè in un prodotto il valore essendo indipendente dall'ordine dei fattori, si possono scambiare fra loro le lettere r ed s.

Applicando queste formole alle travature e limitando per semplicità la trattazione al caso (generalissimo per la pratica) della sollecitazione piana e retta, nel quale oltre essere $p_{yy}=0$, $p_{zz}=0$, $p_{yz}=0$ anche $p_{xz}=0$, le due formole (177) e (178) diventano

$$\left.\begin{aligned}\Sigma P''\delta'&=\Sigma\left[\frac{p'_{xx}p''_{xx}}{E}+\frac{p'_{xy}p''_{xy}}{G}\right]\Delta S=\\&=\int\left(\frac{p'_{xx}p''_{xx}}{E}+\frac{p'_{xy}p''_{xy}}{G}\right)dS\end{aligned}\right\}\quad(179)$$

$$\left.\begin{aligned}\delta_k'&=\Sigma\left[p'_{xx}\frac{(p_{xy}^k)}{E}+p'_{xy}\frac{(p_{xy}^k)}{G}\right]\Delta S=\\&=\int\left(\frac{p'_{xx}(p_{xx}^k)}{E}+\frac{p'_{xy}(p_{xy}^k)}{G}\right)dS\end{aligned}\right\}\quad(180).$$

In causa delle relazioni (122), pag. 177

$$\frac{p'_{xx}}{E}=\delta'_x=i'-\theta'_z y\qquad\frac{p'_{xy}}{G}=g'_1$$

$$\frac{p''_{xx}}{E}=\delta''_x=i''-\theta''_z y\qquad\frac{p''_{xy}}{G}=g''_1$$

$$\frac{(p_{xx}^k)}{E}=(\delta_x^k)=(i^k)-(\theta_z^k)y\qquad\frac{(p_{xy}^k)}{G}=(g_1^k).$$

Sostituendo questi valori nelle relazioni superiori (conservando alle lettere il significato solito usato nei numeri precedenti coll'avvertenza che gli apici indicano il sistema di forze, a cui le

varie quantità si riferiscono, e la parentesi che si tratta di una sola forza unitaria applicata nel punto indicato dalla lettera inclusa nella parentesi stessa) e trasportando fuori del simbolo Σ i fattori costanti le (179) e (180) diventano

$$\Sigma P''\delta' = \Sigma \Delta x \left[i'' \Sigma p'_{xx} \Delta\omega - \theta''_z \Sigma p'_{xx} y \Delta\omega + g''_1 \Sigma p'_{xy} \Delta\omega \right] \qquad (181)$$

$$\delta'_k = \Sigma \Delta x \left[(i^k) \Sigma p'_{xx} \Delta\omega - (\theta_z^k) \Sigma p'_{xx} y \Delta\omega + (g_1^k) \Sigma p'_{xy} \Delta\omega \right] \qquad (182)$$

in cui $\Delta\omega$ esprime l'elemento d'area in una sezione trasversale della trave. Le formole (124) a pagina 180, danno

$$\Sigma p'_{xx} \Delta\omega = X' \qquad -\Sigma p'_{xx} y \Delta\omega = M'_z = M' \qquad \Sigma p'_{xy} \Delta\omega = F'$$

le formole (125) a pagina 181

$$i'' = \frac{X''}{EA} \qquad \theta''_z = \frac{M''}{EI} \qquad g_1'' = \frac{F''}{GA}$$

$$(i^k) = \frac{(X^k)}{EA} \qquad (\theta_z^k) = \frac{(M^k)}{EI} \qquad (g_1^k) = \frac{(F^k)}{GA}$$

quindi le due formole precedenti, osservando che colle convenzioni fatte $\Delta x = \Delta s$, prendono la forma

$$\left.\begin{aligned} \Sigma P''\delta' &= \Sigma \Delta s \left[\frac{X'X''}{EA} + \frac{F'F''}{GA} + \frac{M'M''}{EI} \right] = \\ &= \int \left[\frac{X'X''}{EA} + \frac{F'F''}{GA} + \frac{M'M''}{EI} \right] ds \end{aligned} \right\} \qquad (183)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_k' &= \Sigma \Delta s \left[\frac{X'(X^k)}{EA} + \frac{F'(F^k)}{GA} + \frac{M'(M^k)}{EI} \right] = \\ &= \int \left[\frac{X'(X^k)}{EA} + \frac{F'(F^k)}{GA} + \frac{M'(M^k)}{EI} \right] ds \end{aligned} \right\} \qquad (184).$$

La (183) esprime il teorema di correlazione nel caso particolare delle travature, la (184) permette di determinare la deformazione in un punto qualsiasi quando siano note le caratteristiche meccaniche di ogni sezione corrispondenti ai carichi, che sollecitano la trave e nell'ipotesi che sulla trave non agisca che un

carico solo unitario applicato nel punto, di cui si cerca la deformazione. Quanto al calcolo effettivo di queste formole, esso potrà essere fatto con uno qualsiasi dei tre metodi indicati al numero precedente: si potrà usare il metodo analitico quando le quantità sotto il segno d'integrazione siano esprimibili mediante funzioni dell'arco o dell'ascissa facilmente integrabili, in caso diverso si potrà ricorrere all'integrazione approssimata col mezzo di sommatorie, oppure all'uso di costruzioni geometriche. Come esempio proponiamoci di determinare la freccia f d'incurvamento di una trave appoggiata agli estremi in A e B (*Fig.* 39ª, *tav.* V) e caricata da un peso p uniformemente distribuito per metro corrente. In tal caso $X=0$ e, trascurando l'effetto dello sforzo di taglio, la (184) dà pel punto di mezzo della trave in causa della simmetria di forma e di carico (Num. 71)

$$\delta_k = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M'(M^k)}{EI}dx$$

in cui l rappresenta la lunghezza della trave AB. Se nel punto di mezzo C della trave si suppone agire un carico d'intensità 1 e diretto dall'alto al basso (cioè con segno negativo) il momento (M^k) fra $x=0$ ed $x=\frac{l}{2}$ è dato da

$$(M^k)=\frac{1}{2}x$$

ed M' da

$$M=\frac{pl}{2}x-\frac{px^2}{2}$$

quindi

$$-\delta_k = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\left(\frac{pl}{2}x-\frac{px^2}{2}\right)}{EI}\frac{1}{2}x\,dx = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{plx^2}{4}-\frac{px^3}{4}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{EI}\left[\frac{plx^3}{12}-\frac{px^4}{16}\right]_0^{\frac{l}{2}} = \frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI}$$

da cui si ricava come precedentemente (Form. 170 *bis*)

$$f=-(-\delta_k)=-\frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI}.$$

La formola (184) può mettersi anche sotto un'altra forma, che permette di distinguere l'influenza dovuta a ciascuno dei carichi agenti sulla trave e che in certi casi può perciò riescire molto utile nelle applicazioni. Conveniamo di indicare con $(\delta'_k)_{P_i}$ la deformazione che subisce il punlo k quando il sistema di forze P' si riduce ad un'unica forza agente nel punto i qualsiasi, allora, in causa del principio della sovrapposizione degli effetti, le caratteristiche meccaniche in ogni sezione saranno quelle che si avrebbero se nel punto i agisse una forza uguale all'unità moltiplicate per l'intensità della forza P'_i, quindi la (184) diventa

$$\left.\begin{aligned}(\delta'_k)_{P_i} &= \int\left(\frac{P'_i(X^i)(X^k)}{EA}+\frac{P'_i(F^i)(F^k)}{GA}+\frac{P'_i(M^i)(M^k)}{EI}\right)ds = \\ &= P'_i\int\left(\frac{(X^i)(X^k)}{EA}+\frac{(F^i)(F^k)}{GA}+\frac{(M^i)M^k)}{EI}\right)\end{aligned}\right\}(185).$$

Se si conviene di indicare con $(\delta_k)_i$ la deformazione del punto k quando il sistema delle forze P' si riduce ad un'unica forza di intensità 1 agente nel punto i^{esimo} la (185) diventa

$$(\delta'_k)_{P_i} = P'_i(\delta_k)_i .$$

Applicando ora il principio della sovrapposizione degli effetti la deformazione δ'_k del punto k quando sul sistema agiscono tutte le forze P' sarà

$$\left.\begin{aligned}\delta'_k = \sum_{i=1}^{i=n}(\delta'_k)_{P_i} = \sum_{i=1}^{i=n}P'_i(\delta_k)_i = \sum_{i=o}^{i=n}P'_i\sum\Delta s\left[\frac{(X^i)(X^k)}{EA}+\right.\\ \left.+\frac{(F^i)(F^k)}{GA}+\frac{(M^i)(M^k)}{EI}\right]\end{aligned}\right\}(186).$$

Evidentemente i coefficienti delle forze P'_i sono numeri affatto indipendenti dall'intensità delle forze P' e che dipendono solo dalla forma della travatura e dai punti i e k che si considerano; essi potranno essere determinati per ogni travatura in precedenza come coefficienti da servire poi nei calcoli successivi per valutare l'effetto delle diverse forze.

Se tutti i carichi P' sono uguali allo zero ad eccezione di P_i, che si supponga uguale all'unità, della (186) risulta $(\delta_k)_i = (\delta_i)_k$

equazione, che mette in evidenza il principio di MAXWELL per le travature.

Le equazioni (177) e (178) sono state determinate nell'ipotesi generalissima di un corpo elastico qualunque o di un sistema di corpi elastici fra loro connessi soggetti a forze esterne, quindi le equazioni (183) e (184) saranno pure generali e valide sia che si consideri una semplice trave, sia che si prendano in esame sistemi di più travi fra loro congiunte in modo invariabile, ed in questo ultimo caso le sommatorie o gli integrali dovranno intendersi estesi a tutte le singole travi componenti il sistema. S'incontrano spesso nella pratica sistemi composti di travi ad asse rettilineo riunite a cerniera, (o che si suppongono riunite a cerniera) nelle loro sezioni estreme, che si indicano col nome di travature reticolari e che ordinariamente sono assoggettate a carichi agenti soltanto nei punti d'unione delle varie travi o nodi. Supponendo le unioni a cerniera ogni trave componente o membratura del sistema non può sopportare che sforzi di tensione o compressione diretti secondo il suo asse, quindi nelle formole (183) e (184) scompariranno i termini, che contengono il momento flettente e lo sforzo di taglio (si prescinde dai fenomeni di *pressoflessione*, che possono sempre essere evitati scegliendo opportunamente la forma della sezione trasversale di ogni membratura: vedi nella parte seconda, *Solidi soggetti a compressione sotto l'azione di sforzi diretti secondo l'asse*), e si ridurranno ad avere la forma seguente

$$\Sigma P'' \delta' = \Sigma \Delta s \frac{X' X''}{EA} = \int \frac{X' X''}{EA} ds \qquad (187)$$

$$\delta_k' = \Sigma \frac{X'(X^k)}{EA} \Delta s = \int \frac{X'(X^k)}{EA} ds \qquad (188).$$

Siano (*Fig.* 64, *tav.* IX) $1, 2, 3, \ldots k \ldots p, q \ldots r \ldots n$ i nodi o punti di concorso delle varie membrature

$A_{pq}, E_{pq}, l_{pq}, \lambda_{pq}, T_{pq}$ rispettivamente l'area resistente, il modulo di elasticità, la lunghezza, l'allungamento elastico totale e lo sforzo corrispondenti alla membratura pq (cioè quella che unisce il punto p col punto q)

$T''_{pq}, \lambda'_{pq}, T''_{pq}, \lambda''_{pq}$ rispettivamente gli sforzi ed allungamenti totali corrispondenti al sistema di forze P' o P'' agenti nei singoli nodi

(T_{pq}^{1}) (λ_{pq}^{1}) (T_{pq}^{k}) (λ_{pq}^{k}) gli sforzi e gli allungamenti relativi alla

barra $p\,q$ quando sul sistema non agisce che un carico unitario nel punto i, oppure nel punto k.

Per ipotesi si suppone che in tutta la lunghezza di una barra $p\,q$ $X' = T'_{pq}$, $X'' = T''_{pq}$, E_{pq}, A_{pq} abbiano un valore costante quindi in ogni membratura

$$\Sigma \Delta s \frac{X' X''}{EA} = \Sigma \Delta l_{pq} \frac{T'_{pq} T''_{pq}}{E_{pq} A_{pq}} = \frac{T'_{pq} T''_{pq}}{E_{pq} A_{pq}} \Sigma \Delta l_{pq} = \frac{T' T'' l_{pq}}{E_{pq} A_{pq}}$$

$$\Sigma \Delta s \frac{X'(X^k)}{EA} = \Sigma \Delta l_{pq} \frac{T'_{pq}(T_{pq}^{\,k})}{E_{pq} A_{pq}} = \frac{T'_{pq}(T_{pq}^{\,k})}{E_{pq} A_{pq}} \Sigma \Delta l_{pq} = \frac{T'_{pq}(T_{pq}^{\,k}) l_{pq}}{E_{pq} A_{pq}}$$

e le (187) e (188) diventano

$$\Sigma P'' \delta' = \Sigma \frac{T'_{pq} T''_{pq} l_{pq}}{E_{pq} A_{pq}} \tag{189}$$

$$\delta'_k = \Sigma \frac{T_{pq}(T_{pq}^{\,k}) l_{pq}}{E_{pq} A_{pq}} \tag{190}.$$

Se si ricorda che l'allungamento od accorciamento totale di una membratura è dato da

$$\lambda_{pq} = \Sigma i \Delta l_{pq} = \Sigma \frac{T_{pq}}{E_{pq} A_{pq}} \Delta l_{pq} = \frac{T_{pq}}{E_{pq} A_{pq}} \Sigma \Delta l_{pq} = \frac{T_{pq} l_{pq}}{E_{pq} A_{pq}}$$

appare evidente che la (189) contiene il teorema di correlazione nel caso particolare delle travature reticolari (*). La (190) poi permette di determinare la deformazione δ'_k qualsiasi che subisce uno dei nodi della travatura reticolare quando sulla medesima agisce nei nodi un sistema qualsivoglia di forza P' nella supposizione che siano note le sezioni trasversali, le lunghezze delle diverse membrature e gli sforzi agenti sulle medesime in due diverse ipotesi di carico, cioè sotto l'influenza dei carichi dati, e nell'ipotesi di un solo carico unitario agente nel nodo, di cui si cerca lo spostamento, e nella direzione secondo la quale lo spostamento stesso è misurato.

Se le forze P' si riducono ad un unico carico P_i agente sul

(*) Infatti $\Sigma P'' \delta' = \Sigma T'_{pq} \lambda''_{pq} = \Sigma T''_{pq} \lambda'_{pq} = \Sigma P' \delta''$.

nodo i^{esimo} allora, secondo le convenzioni fatte e tenendo conto del principio della sovrapposizione degli effetti

$$(\delta_k)_{P_i} = P_i \Sigma \frac{(T_{pq}{}^i)(T_{pq}{}^k)}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq} = P_i (\delta_k)_i$$

e quindi considerando tutti i carichi esterni P', che possono agire sul sistema e tenendo conto del suddetto principio della sovrapposizione degli effetti

$$\delta_k' = \sum_{i=1}^{i=n} P_i' \Sigma \frac{(T_{pq}{}^i)(T_{pq}{}^k)}{E_{pq} A_{qq}} l_{pq} = \sum_{i=1}^{i=n} P_i' (\delta_k)_i \qquad (191).$$

Evidentemente le quantità $(\delta_k)_i$ sono coefficienti, che dipendono solo dalla forma della travatura e per nulla dai carichi e che potranno essere in ogni caso particolare calcolati in precedenza per passare in seguito allo studio dell'effetto prodotto da ciascuno dei carichi P'.

Se le forze P' ci riducono ad un sol carico $P_i = 1$ allora la (191) diventa

$$(\delta_k)_i = \Sigma \frac{(T_{pq}{}^i)(T_{pq}{}^k)}{E_{pq} A_{pq}} = (\delta_i)_k$$

che mette in evidenza anche per le travature reticolari il principio di Maxwell (Num. 39).

Disponendo opportunamente dell'intensità e della direzione delle forze componenti il sistema P' e P'' si possono rendere evidenti varie proprietà dei sistemi elastici. Non sembra opportuno estendersi maggiormente su questo argomento potendo facilmente lo studioso eseguire da solo simili esercizî.

Osservazione. — Le formole (178), (184) e (190) si possono ricavare facilmente anche ricorrendo al teorema di Castigliano. Supponiamo un corpo elastico sul quale agisce un sistema di forze P' ed una forza unica Q applicata nel punto k, accettando i simboli impiegati superiormente il lavoro di deformazione L sarà espresso da

$$L = \frac{1}{2} \int dx\,dy\,dz \left[\frac{1}{E} \left(p'_{xx} + Q(p_{xx}{}^k) \right)^2 + \left(p'_{yy} + Q(p_{yy}{}^k) \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(p'_{zz} + Q(p_{zz}{}^k) \right)^2 - \frac{2}{mE} \left(p'_{xx} + Q(p_{xx}{}^k) \right) \left(p'_{yy} + Q(p_{yy}{}^k) \right) + \right.$$

$$+\left(p'_{xx}+Q(p_{xx}^{k})\right)\left(p'_{zz}+Q(p_{zz}^{k})\right)+\left(p'_{yy}+$$

$$+Q(p_{yy}^{k})\right)\left(p'_{zz}+Q(p_{zz}^{k})\right)\Big]+\frac{1}{G}\Big[\left(p'_{xy}+Q(p_{xy}^{k})\right)^{2}+$$

$$+\left(p_{xz}+Q(p_{xz}^{k})\right)^{2}+\left(p_{yz}+Q(p_{yz}^{k})\right)^{2}\Big]$$

e quindi pel teorema di CASTIGLIANO

$$\left.\begin{aligned}\delta'_{k}=\left(\frac{dL}{dQ}\right)_{Q=0}=\int dx\,dy\,dz\Big[&\frac{1}{E}[p'_{xx}(p_{xx}^{k})+p'_{yy}(p_{yy}^{k})+\\&+p'_{zz}(p_{zz}^{k})]-\frac{1}{mE}[p'_{xx}(p_{yy}^{k})+p'_{yy}(p_{xx}^{k})+p'_{xx}(p_{zz}^{k})+\\&+p'_{zz}(p_{xx}^{k})+p'_{yy}(p_{zz}^{k})+p'_{zz}(p_{yy}^{k})]+\\&+\frac{1}{G}[p'_{xy}(p_{xy}^{k})+p'_{xz}(p_{xz}^{k})+p'_{yz}(p_{yz}^{k})]\Big]\end{aligned}\right\}\quad(178^{bis})$$

formola che coincide colla (178) determinata superiormente con altro metodo.

Nel caso delle travature l'espressione del lavoro di deformazione dovuta alle forze P' ed alla forza Q applicata nel punto k pel principio della sovrapposizione degli effetti (Num. 36) risulta

$$L=\frac{1}{2}\int\left(\frac{[X'+Q(X^{k})]^{2}}{EA}+\frac{[F'+Q(F^{k})]^{2}}{GA}+\frac{[M'+Q(M^{k})]^{2}}{EI}\right)ds$$

e quindi pel teorema delle derivate del lavoro (Num. 38)

$$\delta'_{k}=\left(\frac{dL}{dQ}\right)_{Q=0}=\int\left(\frac{X'(X^{k})}{EA}+\frac{F'(F^{k})}{GA}+\frac{M'(M^{k})}{EI}\right)ds\quad(184^{bis})$$

formola identica alla (184).

Se nella sezione normale all'asse della travatura passante pel punto k (che supporremo ora sull'asse della medesima) agisse un momento μ, allora, indicando con $(\overline{X}^{k})$, $(\overline{F}^{k})$, $(\overline{M}^{k})$ le caratteristiche meccaniche prodotte da una coppia di intensità unitaria agente in quella sezione, l'espressione del lavoro di deformazione corrispondente alle forze P' ed alla coppia μ sarebbe dato da

$$L=\frac{1}{2}\left(\frac{[X'+\mu(\overline{X}^{k})]^{2}}{EA}+\frac{[F'+\mu(\overline{F}^{k})]^{2}}{GA}+\frac{[M'+\mu(\overline{M}^{k})]^{2}}{EI}\right)ds$$

ed in causa del teorema di Castigliano (Num. 38), chiamando con θ_k la rotazione della sezione normale passante pel punto k, sarebbe

$$\theta_k = \left(\frac{dL}{d\mu}\right)_{\mu=o} = \int \left(\frac{X'(\overline{X}^k)}{EA} + \frac{F'(\overline{F}^k)}{GA} + \frac{M'(\overline{M}^k)}{EI} \right) ds \qquad (192).$$

Se le forze P' si riducessero ad un'unica coppia di momento 1 agente nella sezione normale passante pel punto i, la (192), ritenendo le convenzioni simboliche stabilite superiormente, diventa

$$(\theta_k)_i = \int \left(\frac{(\overline{X}^i)(\overline{X}^k)}{EA} + \frac{(\overline{F}^i)(\overline{F}^k)}{GA} + \frac{(\overline{M}^i)(\overline{M}^k)}{EI} \right) ds = (\theta_i)_k \qquad (192^{bis})$$

perchè il valore di un prodotto non dipende dall'ordine dei suoi fattori, quindi si può enunciare il seguente teorema. *La rotazione che avviene in una sezione di una travatura soggetta all'azione di una coppia agente in un'altra è uguale alla rotazione che avviene nella seconda quando nella prima sezione agisce una coppia di momento uguale a quella primitivamente considerata.*

Finalmente anche la formola (190) può ottenersi direttamente applicando alle travature reticolari il teorema di Castigliano. Coi simboli algebrici accettati superiormente sotto l'influenza del sistema di forze P' e di una forza Q applicata nel nodo k il lavoro di deformazione di tutto il sistema è dato da

$$L = \frac{1}{2} \Sigma \frac{[T_{pq}' + Q(T_{pq}^k)]^2}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq}$$

poichè per ciascuna membratura pq il lavoro di deformazione L_{pq} è espresso da

$$L_{pq} = \frac{1}{2} \Sigma \frac{[T_{pq}' + Q(T_{pq}^k)]^2}{E_{pq} A_{pq}} \Delta l_{pq} = \frac{1}{2} \frac{[T_{pq}' + Q(T_{pq}^k)]^2}{E_{qq} A_{pp}} \Sigma \Delta l_{qq} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{[T_{pq}' + Q(T_{pq}^k)]^2}{E_{pq} A_{qq}} l_{pq}$$

quindi applicando il teorema delle derivate del lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze (Num. 38)

$$\delta'_k = \left(\frac{dL}{dQ}\right)_{Q=0} = \Sigma \frac{T_{pq}'(T_{pq}^k)}{E_{pq} A_{qq}} l_{pq} \qquad (190^{bis})$$

formola esattamente uguale alla (190) trovata superiormente con altro metodo per la risoluzione dello stesso problema.

74. Formole di coesione per le travature. — Al numero 55 si è visto che il maggior numero di trattatisti prendono quale equazione di coesione $\varepsilon_1 \leq i$, in cui ε_1 è la massima dilatazione o condensazione principale in un punto qualsiasi di un corpo, i la massima dilatazione o condensazione ammissibile nel materiale, che si considera. Nelle travature tre delle sei forze molecolari sono uguali a zero e precisamente, accettando i soliti simboli, $p_{yy}=0$, $p_{zz}=0$, $p_{yz}=0$, quindi l'equazione di terzo grado, che ha per radici le forze principali,

$$\sigma^3-(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz})\sigma^2+(p_{xx}p_{yy}+p_{xx}p_{zz}+p_{yy}p_{zz}-p_{xy}^2-p_{xz}^2-$$

$$-p_{yz}^2)\sigma-p_{xx}p_{yy}p_{zz}+p_{xx}p_{yz}^2+p_{yy}p_{xz}^2+p_{zz}p_{xy}^2-2p_{xy}p_{xz}p_{yz}=0$$

diventa

$$\sigma^3-p_{xx}\sigma^2-(p_{xy}^2+p_{xz}^2)\sigma=0$$

che ha per radici (Num. 21)

$$\sigma_1=\frac{p_{xx}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{p_{xx}^2+4(p_{xy}^2+p_{xz}^2)}$$

$$\sigma_2=\frac{p_{xx}}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{p_{xx}^2+4(p_{xy}^2+p_{xz}^2)}$$

$$\sigma_3=0.$$

La dilatazione principale ε_1, ricordando le formole (75), prende la forma

$$\varepsilon_1=\frac{\sigma_1}{E}-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{mE}=\frac{p_{xx}}{2E}+\frac{1}{2E}\sqrt{p_{xx}^2+4(p_{xy}^2+p_{xz}^2)}-\frac{p_{xx}}{2mE}+$$

$$+\frac{1}{2mE}\sqrt{p_{xx}^2+4(p_{xy}^2+p_{xz}^2)}=$$

$$=\frac{m-1}{2mE}p_{xx}+\frac{m+1}{2mE}\sqrt{p_{xx}^2+4(p_{xy}^2+p_{xz}^2)}$$

e l'equazione di coesione per le travature diventa

$$i\geq\frac{m-1}{2mE}p_{xx}+\frac{m+1}{2mE}\sqrt{p_{xx}^2+4(p_{xy}^2+p_{xz}^2)}\,.$$

Se invece di p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} si mettono i loro valori in funzione

delle forze esterne, dell'area e dei momenti d'inerzia della sezione ottenuti al numero 64, formola (128)

$$p_{xx}=\frac{X}{A}+\frac{M_y z}{I_y}-\frac{M_z}{I_z}y$$

$$p_{xy}=\frac{Y}{A}-\frac{M_x}{I_x}z \qquad\qquad p_{xz}=\frac{Z}{A}+\frac{M_x}{I_x}y$$

conservando ai diversi simboli algebrici lo stesso valore, che avevano al numero 64, la formola superiore diventa

$$\left.\begin{aligned} i\geq\frac{m-1}{2mE}\left(\frac{X}{A}+\frac{M_y}{I_y}z-\frac{M_z}{I_z}y\right)+ \\ +\frac{m+1}{2mE}\sqrt{\left(\frac{X}{A}+\frac{M_y}{I_y}z-\frac{M_z}{I_z}y\right)^2+4\left[\left(\frac{Y}{A}-\frac{M_x}{I_x}z\right)^2+\left(\frac{Z}{A}+\frac{M^x}{I_x}y\right)^2\right]}\end{aligned}\right\} \quad (193)$$

nella quale invece di y e z bisognerà porre le coordinate v' ed u' dei punti che sopportano maggior sforzo, ossia che sono più lontani dagli assi, rispetto ai quali sono presi i momenti.

Ordinariamente nelle costruzioni non si presenta il caso di dover prendere in esame contemporaneamente per ogni sezione le tre forze esterne X, Y, Z ed i tre momenti M_x, M_y, M_z, ma soltanto una componente normale X, uno sforzo tangenziale F ed un momento flettente M prodotti da forze agenti tutte in un piano, che contiene anche l'asse della travatura e taglia tutte le sezioni trasversali secondo un asse principale d'inerzia, e qualche rara volta anche una coppia di torsione M_x, per cui la formola (193) diventa

$$\left.\begin{aligned} i\geq\frac{1}{E}\left[\frac{m-1}{2m}\left(\frac{X}{A}+\frac{Mv}{I}\right)+\right. \\ \left.+\frac{m+1}{2m}\sqrt{\left(\frac{X}{A}+\frac{Mv}{I}\right)^2+4\left[\left(\frac{F}{A}\right)^2+\left(\frac{M_x r}{I_x}\right)^2\right]}\right] \text{ (*)}\end{aligned}\right\} \quad (194)$$

che può riguardarsi come generale per i casi che si possono presentare nella risoluzione dei problemi dell'ingegneria.

(*) A seconda del punto che si considera si scriverà $\left(\frac{F}{A}+\frac{M_x}{I_x}\right)$ oppure $\left[\left(\frac{F}{A}\right)^2+\left(\frac{M_x r}{I_x}\right)^2\right]$.

Se nella sezione si sviluppano soltanto forze normali p_{xx} allora

$$Ei \geq \frac{m-1}{2m}\left(\frac{X}{A}+\frac{Mv}{I}\right)+\frac{m+1}{2m}\left(\frac{X}{A}+\frac{Mv}{I}\right)=\frac{X}{A}+\frac{Mv}{I}$$

per ipotesi $R=Ei$ quindi

$$R \geq \frac{X}{A}+\frac{Mv}{I} \qquad (195).$$

Se invece nella sezione si sviluppano soltanto forze tangenziali, allora l'equazione di coesione diventa

$$Ei=2\frac{m+1}{2m}\left(\frac{F}{A}+\frac{M_x r}{I_x}\right)$$

e ricordando che (Num. 44, form. 78)

$$\frac{m}{2(m+1)}E=G \qquad S=Gg \qquad i=\frac{g}{2}$$

e che la massima ditalazione ε_1 corrispondente ad uno scorrimento g è $\varepsilon_1=\frac{g}{2}$ (Num. 28, form. 32) risulta

$$S=Gg=2i\frac{m}{2(m+1)}E$$

e l'equazione di coesione diventa

$$S \geq \frac{F}{A}+\frac{M_x r}{I_x} \qquad (196)$$

R ed S diconsi rispettivamente limiti dei carichi permanenti a tensione o compressione ed allo sforzo tagliante, la formola (194) equazione di coesione per la sollecitazione composta, la (195) equazione di coesione per la tensione o compressione e flessione e finalmente la (196) equazione di coesione per lo scorrimento e la torsione. L'equazione (194) s'impiega quasi unicamente quando la sezione della trave è contemporaneamente sollecitata a tensione o compressione e scorrimento, oppure a flessione e torsione, poichè nel caso che esistano momenti ed uno degli sforzi X od F e non sia il caso di servirsi delle formole (195) o (196), abbiamo già visto (Num. 58) che l'effetto di questi ultimi è in generale trascurabile rispetto a quello prodotto dai primi e spesso gli ingegneri sogliono non tenerne conto, specialmente per calcoli di prima approssimazione.

Se si debbono prendere in considerazione soltanto i momenti M ed M_x la (194) prende la forma

$$Ei \geq \frac{m-1}{2m}\frac{Mv}{I}+\frac{m+1}{2m}\sqrt{\left(\frac{Mv}{I}\right)^2+\left(2\frac{M_x r}{I_x}\right)^2}$$

se inoltre la sezione è circolare allora $I_x=2I$, $v=r$ e quindi

$$Ei\frac{I}{v}=\frac{m-1}{2m}M+\frac{m+1}{2m}\sqrt{M^2+M_x^2}$$

ma $R=Ei$, e, se si pone

$$M_i=\frac{m-1}{2m}M+\frac{m+1}{2m}\sqrt{M^2+M_x^2}, \quad v=v'$$

si ottiene

$$\frac{RI}{v'}=M_i=\frac{m-1}{2m}M+\frac{m+1}{2m}\sqrt{M^2+M_x^2} \qquad (197)$$

in cui m è l'indice di contrattibilità laterale, che nei corpi isotropi è uguale a 4 (Num. 44). Alcuni costruttori invece di prendere per m questo valore, dato dalla teoria dell'equilibrio dei corpi elastici omogenei di elasticità costante in tutte le direzioni, preferiscono riferirsi alla media dei risultati delle esperienze eseguite sui corpi ordinariamente usati e pongono $m=3$; in entrambi i modi le formole, che si ottengono non sono molto diverse fra loro: facendo $m=4$

$$i=\frac{3}{8}\frac{p_{xx}}{E}+\frac{5}{8E}\sqrt{p_{xx}^2+4(p_{xy}^2+p_{xz}^2)} \qquad (198)$$

e facendo $m=3$

$$i=\frac{1}{3}\frac{p_{xx}}{E}+\frac{2}{3E}\sqrt{p_{xx}^2+4(p_{xy}^2+p_{xz}^2)} \qquad (199).$$

Se invece si prende come equazione di coesione la condizione proposta dal Professore Beltrami, cioè che il lavoro unitario I di deformazione sia uguale od inferiore ad un determinato valore I_0, l'equazione di coesione prende la forma (Num. 47)

$$I_0 \geq \frac{(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz})^2}{2E}-\frac{p_{xx}p_{yy}+p_{xx}p_{zz}+p_{yy}p_{zz}-p_{xy}^2-p_{xz}^2-p_{yz}^2}{2G} \qquad (200).$$

Nelle travature $p_{yy}=p_{zz}=p_{yz}=0$ inoltre abbiamo trovato che $G=\frac{m}{2(m+1)}E$, quindi la (200) diventa

$$I_0 \geq \frac{p_{xx}^2}{2E}+\frac{p_{xy}^2+p_{xz}^2}{2G}=\frac{p_{xx}^2}{2E}+\frac{m+1}{m}\frac{p_{xy}^2+p_{xz}^2}{E}$$

e ponendo $\tau^2=p_{xy}^2+p_{xz}^2$

$$I_0 \geq \frac{p_{xx}^2}{2E}+\frac{m+1}{m}\frac{\tau^2}{E} \qquad (201).$$

Se con R ed S si indicano i massimi valori della tensione unitaria ammissibile quando non vi siano che sforzi normali (p_{xx}) o sforzi tangenziali (τ), dalla (201) si deducono le due equazioni seguenti

$$2EI_0=R^2 \qquad EI_0=\frac{m+1}{m}S^2$$

ed eliminando I_0 fra le medesime si ricava

$$S=\sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}R \qquad (202)$$

relazione sensibilmente diversa da quella trovata da Barré de Saint-Venant, Grashof, ed altri

$$S=Gg=G\cdot 2i=\frac{2m}{2(m+1)}Ei=\frac{m}{m+1}R \qquad (203).$$

Se si pone $m=4$, accettando il concetto proposto dal Professore Beltrami per stabilire l'equazione di coesione, risulta

$$S=\sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}R=\sqrt{\frac{4}{10}}\ R=\sqrt{\frac{2}{5}}\ R=0{,}63\,R\cdot$$

e quindi con molta approssimazione si potrà ritenere $S=\frac{3}{5}R$.

Se si pone $m=3$ risulta $S=0{,}61\ R$ ed approssimatamente ancora $S=\frac{3}{5}R$.

Dall'equazione

$$I_0 \geq \frac{p_{xx}^2}{2E}+\frac{m+1}{m}\frac{\tau^2}{E}$$

si ricava

$$\frac{p_{xx}^2}{2EI_0}+\frac{m+1}{m}\frac{\tau^2}{EI_0}\leqq 1$$

e ricordando che

$$EI_0=\frac{R^2}{2}=\frac{m+1}{m}S^2$$

si ottiene la formola generale dell'equazione di coesione per le travature

$$\frac{p_{xx}^2}{R^2}+\frac{\tau^2}{S^2}\leqq 1$$

ed impiegando i simboli usati superiormente per rappresentare il valore di p_{xx}^2 e di $\tau^2=p_{xy}^2+p_{xz}^2$ si ha finalmente per lo stesso modo di sollecitazione corrispondente alla formola (194) come formola di coesione per le travature

$$\frac{1}{R^2}\left(\frac{X}{A}+\frac{Mv'}{I}\right)^2+\frac{1}{S^2}\left[\left(\frac{F}{A}\right)^2+\left(\frac{M_x r'}{I_x}\right)^2\right]\leqq 1\ (*) \qquad (204).$$

Osservazione. — Alcuni costruttori, specialmente nel calcolo dei collegamenti sollecitati a sforzi di taglio, hanno fissato il valore di S in modo che risulti uguale $\frac{3}{4}R=0{,}75\,R$; come appare dall'analisi superiore, esso corrisponde ad un valore intermedio tra il valore

$$S=\frac{m}{m+1}R=\frac{4}{5}R=0{,}80\,R$$

dato dal Barré de Saint-Venant, e quello dato dal Professore Beltrami

$$S=\sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}R=\sqrt{\frac{2}{5}}R=0{,}63\,R.$$

Se nella formola $S=\frac{m}{m+1}R$ in luogo di m si mette il numero 3, come approssimatamente risulterebbe da molte esperienze eseguite,

$$S=\frac{3}{4}R=0{,}75\,R.$$

(*) Essendo $p_{xy}=\frac{F}{A}$ e $p_{xz}=\frac{M_x r'}{I_x}$ (Vedi la nota a pag. 245).

75. Formole approssimate di elasticità e resistenza relativa alle grandi travature soggette a flessione retta; casi in cui possono essere applicate. Formola del Perissé. Sforzi di taglio, loro distribuzione. — Nei problemi della resistenza dei materiali si presenta quasi sempre il caso della sollecitazione e deformazione piana; in tali condizioni $M_x = 0$ e sulle sezioni trasversali della trave non agiscono che il momento flettente M, lo sforzo normale X e lo sforzo tangenziale F. Questi ultimi due in generale hanno nei calcoli un'influenza assai debole in confronto del momento M (Num. 58) e nelle travi ad asse rettilineo spesso $X=0$, quindi gli ingegneri in una ricerca di prima approssimazione frequentemente non tengono conto che del momento flettente e scelgono la forma della sezione della trave in modo che essa sia specialmente atta a resistere alla flessione. La formola $M=\frac{RI}{v}$ mostra che una determinata estensione superficiale resiste tanto meglio alla flessione quanto più essa è lontana dall'asse di rotazione della sezione, quindi i costruttori sogliono ordinariamente raccogliere la materia resistente in due nuclei ω ed ω' (*Fig.* 49ª, *tav.* VII) riuniti da una parete di collegamento. La forma dei nuclei e la loro distanza dipende dalle necessità costruttive; comunemente l'area ω è uguale od equivalente all'area ω' e nel maggior numero di casi la sezione a doppio T soddisfa bene a tutte le esigenze e viene preferita dagli ingegneri. Siano (*Fig.* 49ª, *tav.* VII) N ed N' i centri di gravità delle due figure ω, ω', $f'Of$ l'asse di rotazione della sezione e cd ed eg due rette parallele all'asse di flessione passanti per N ed N', I_1 ed I_2 i momenti d'inerzia delle aree ω ed ω' intorno a cd e ad eg, ρ_1 e ρ_2 i corrispondenti raggi di girazione, I il momento d'inerzia delle due aree ω ed ω' intorno all'asse $f'Of$, h' la distanza NN' ed h l'altezza totale della trave (cioè la distanza fra la fibra estrema superiore ed inferiore). Se si trascura la parete di collegamento, perchè in genere non ha grande importanza e di più le sue fibre non danno luogo ad un grande momento d'inerzia, perchè sono molto più vicine all'asse neutro delle fibre, che compongono i due nuclei ω ed ω', la formola di resistenza a flessione diventa

$$M=\frac{RI}{v'}=R\frac{I_1+I_2+2\omega\frac{h'^2}{4}}{\frac{h}{2}}=R\omega\frac{2(\rho_1^2+\rho_2^2)+h'^2}{h}$$

nei casi pratici ρ_1 e ρ_2 sono piccolissimi ed h' differisce molto poco da h, quindi la formola superiore in via approssimata può scriversi come segue

$$M=R\omega h \qquad (205)$$

e tale viene impiegata dai costruttori nel calcolo delle grandi travi soggette a flessione. La differenza fra la formola esatta $M=\frac{RI}{v'}$ e la formola approssimata

$$M=R\omega h$$

per grandi travi con sezione in forma di doppio T od altra forma analoga (cioè composta di due nuclei resistenti di ugual area riuniti da una parete di collegamento) è molto piccola e non ha influenza in pratica, specialmente nel caso ordinario di travature con parete reticolata od a graticcio, quindi in generale gli ingegneri si servono della formola

$$M=R\omega h$$

per calcolare la sezione resistente delle travi quando la loro altezza supera $1^m,00$ oppure $1^m,50$, e spesso l'impiegano anche per altezze minori, come quella che è assai semplice e di uso facile: in ogni caso poi può servire con vantaggio per un calcolo di prima approssimazione.

L'Ingegnere Perissé ha cercato di rendere possibile l'uso della stessa formola anche nel caso di travi di piccola altezza, quali si impiegano nei solai, tettoie ed altre costruzioni correnti e per raggiungere tale scopo introduce un coefficiente Q di correzione tale che sia in ogni caso

$$M=\frac{RI}{v'}=QR\omega h.$$

Pel facile uso poi di questa formola esso ha calcolato una tavola, in cui sono inscritti i valori di Q per le sezioni a doppio T più comunemente usate nelle travi di piccola altezza. Dalla formola

$$M=QR\omega h$$

si ricava

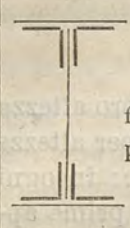
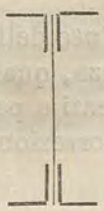
$$\omega=\frac{1}{QR}\frac{M}{h}=K\frac{M}{h} \qquad (206)$$

cioè l'area resistente ω si ottiene col mezzo di due sole operazioni numeriche con approssimazione certamente sufficiente per un calcolo di massima ed anche per un calcolo definitivo, quando si stia rigorosamente entro i limiti, pei quali la tabella dei valori di Q e di K è stata calcolata.

Riportiamo la tavola data dal Perissé per la determinazione dei

coefficienti Q e K convenienti ai diversi casi nell'ipotesi che il limite R dei carichi permanenti a tensione o compressione sia $R=6$ ed $R=7{,}2$ chilogrammi per millimetro quadrato.

Tabella dei valori dei coefficienti Q e K
per il calcolo delle travi in ferro a doppio T

NATURA DELLA TRAVE	ALTEZZA delle travi in metri	VALORE del coefficiente Q	Valore del coefficiente K	
			Per $R=6$ Kg. per mmq.	Per $R=7{,}20$ Kg. per mmq.
 1ª Parete piena, ferri d'angolo e piattabande.	0,35 a 0,50	0,820	0,200	0,170
	0,55 a 0,70	0,900	0,185	0,155
	0,75 a 0,95	0,970	0,170	0,140
	1,00 a 1,20	1,040	0,160	0,130
	1,20 a 2,00	1,111	0,150	0,125
 2ª Parete piena e ferri d'angolo senza piattabande.	0,30 a 0,40	0,800	0,205	0,170
	0,45 a 0,55	0,900	0,185	0,155
	0,55 a 0,70	0,980	0,170	0,140
 3ª Parete a traliccio con anima longitudinale in alto ed in basso, con ferri d'angolo con o senza piattabande.	0,80 a 1,50	1,010	0,165	0,135
	1,60 in su	1,080	0,155	0,130
 4ª Parete a traliccio con soli ferri d'angolo.	0,25 a 0,40	0,810	0,205	0,170
	0,45 a 1,00	0,870	0,190	0,160

La parete verticale *ab* (*Fig.* 49ª, *tav.* VII) nelle grandi travature ad asse rettilineo soggette a forze dirette normalmente all'asse

della trave ed agenti in un piano passante pel medesimo e che taglia tutte le sezioni secondo un asse principale d'inerzia ordinariamente viene calcolata nell'ipotesi che essa debba resistere al solo sforzo di taglio. Questa consuetudine degli ingegneri può essere legittimata dalle considerazioni seguenti:

a) Lo sforzo normale $R=p_{xx}$ prodotto dalla flessione cresce proporzionalmente alla distanza v della fibra, che si considera, dall'asse di rotazione della sezione, $p_{xx}=\frac{M}{I}v$, per cui la resistenza della materia, che trovasi vicina all'asse fOf è piccola e quindi trascurabile rispetto a quella opposta dai nuclei ω ed ω'. Inoltre l'area resistente della parete verticale (specialmente nelle grandi travi a parete reticolata od a graticcio) ha in generale minor imimportanza dell'area dei nuclei ω ed ω' resistenti alla flessione.

b) Lo sforzo tangenziale unitario $S=p_{xy}$ prodotto dallo sforzo di taglio F concomitante alla flessione varia nella sezione e nel senso dell'asse delle v secondo le ordinate di una parabola, e precisamente è nullo sulla fibra estrema e massimo in corrispondenza del centro di gravità.

Siano AB e CD (*Fig.* 50ª, *tav.* VII) due sezioni vicine in una travatura, $abcd$ un elemento di volume avente una faccia a_1b sulla AB e l'altra cd sulla CD, S_1 ed S gli sforzi tangenziali sulle faccie ab, cd e bc, da, trascurando gli incrementi infinitesimi delle forze nel passare da un elemento piano ad un altro infinitamente vicino, dx la distanza delle due sezioni, $du\,dv$ l'elemento d'area misurato nella sezione; per l'equilibrio di rotaziona deve essere $S_1 dx\,du\,dv = S\,du\,dv\,dx$ ossia $S_1=S$, cioè gli sforzi tangenziali sui due elementi piani ortogonali ab e bc sono uguali, come risulta anche applicando il principio di reciprocità dimostrato al numero 16, capitolo II.

Per l'equilibrio di traslazione parallelamente all'asse delle x deve essere

$$\frac{dS_1}{dv}dv\,dx\,du=\frac{dR}{dx}dx\,du\,dv$$

da cui ricavasi, osservando che $\frac{d\left(\frac{M}{I}\right)}{dx}$ è indipendente da v,

$$S=S_1=\int\frac{dR}{dx}dv+C=\int\frac{d\left(\frac{M}{I}\right)}{dx}v\,dv+C=\frac{d\left(\frac{M}{I}\right)}{dx}\int v\,dv+C$$

Alla superficie di contorno, cioé per $v=v'$, $S=0$ per ipotesi, quindi

$$S=\frac{d\frac{M}{I}}{dx}\int v\,dv+C=-\frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{M}{I}\right)}{dx}(v^2-v'^2) \qquad (207)$$

ossia S varia secondo le ordinate di una parabola. Questa formola congiunta alla $R=\frac{M}{I}v$ serve a giustificare il modo, col quale gli ingegneri calcolano le grandi travi e fa vedere che si commette un errore molto piccolo trascurando la resistenza alla flessione della parete ab e la resistenza allo sforzo di taglio opposta dai due nuclei ω ed ω'; ciò appare anche meglio se si costruiscono i diagrammi (*Fig.* 51ª, *tav.* VII) degli sforzi unitarî R ed S e si esamina il loro modo di variare corrispondentemente alle diverse fibre.

Se I è costante, oppure varia così lentamente che per un piccolo tronco si possa ritenere come costante

$$\frac{d\left(\frac{M}{I}\right)}{dx}=\frac{1}{I}\frac{dM}{dx}$$

e la formola precedente può scriversi

$$S=\frac{1}{I}\frac{dM}{dx}\int v\,dv+C=-\frac{1}{2I}\frac{dM}{dx}(v^2-v_1^2).$$

Nel caso delle travature ad asse rettilineo soggette a sollecitazione piana e retta da forze dirette normalmente al loro asse $\frac{dM}{dx}=F$; infatti siano P_1, P_2, P_3 . . ., gli sforzi che agiscono a sinistra della sezione σ_k (*Fig.* 52ª, *tav.* VII) determinata dalla distanza x_k dall'estremità A della trave, siano a_1, a_2, a_3 . . ., le distanze dei carichi P_1, P_2, P_3 . . ., dell'estremo A, per definizione

$$M=\sum_1^k P(x-a) \qquad\qquad F=\sum_1^k P$$

se si deriva M rispetto x si ottiene

$$\frac{dM}{dx}=\frac{d}{dx}\sum_1^k P(x-a)=\sum_1^k P=F \qquad (208).$$

Se il carico è distribuito con legge continua sulla trave, allora

$$F=\int_0^x p\,dx \quad \text{e quindi} \quad \frac{dF}{dx}=p \tag{209}$$

cioè: *In una trave ad asse rettilineo, sollecitata da forze agenti nelle condizioni supposte superiormente, in ogni sezione la derivata del momento flettente è uguale allo sforzo di taglio e, se il carico è distribuito sulla trave con legge continua, la derivata dello sforzo di taglio dà il carico unitario normale all'asse, che gravita sulla medesima* (*).

Tenendo conto di queste proprietà la formola (207) per le travature ad asse rettilineo ed a sezione costante o leggermente variabile diventa

$$S=-\frac{F}{2I}[v^2-v_1^2].$$

Ammessa questa distribuzione dello sforzo di taglio in una sezione trasversale di larghezza u costante, ne segue che la sezione stessa dopo la deformazione non può essere rimasta piana. Infatti per effetto dello sforzo di taglio S l'elemento lineare ad (*Fig.* 53ª, *tav.* VII) primitivamente parallelo all'asse della trave $A_k\ A_{k+1}$ in causa dello sforzo tangenziale S, ruoterà di un angolo

$$g_v=\frac{S}{G}=-\frac{F}{2GI}(v^2-v_1^2)$$

inoltre l'aumento dello sforzo normale R passando dalla sezione AB alla sezione CD produrrà una contrazione laterale η data da

$$\eta=\frac{1}{m}\frac{dR}{E}dv=\frac{1}{m}\frac{dM}{dx}dx\int_0^v\frac{v\,dv}{EI}=\frac{1}{2m}\frac{F\,dx}{EI}v^2$$

(*) Il teorema è evidentemente vero anche per una travatura ad asse curvilineo quando, considerando due sezioni infinitamente vicine, le forze applicate nel tronco da esse compreso agiscono normalmente all'asse oppure producono rispetto all'asse di flessione un momento piccolissimo ed affatto trascurabile, cosa che può quasi sempre riguardarsi come vera approssimativamente pei solidi a sezione trasversale molto piccola. Tale travatura infatti potrà sempre

e per conseguenza una rotazione γ dell'elemento bd misurata dà

$$\text{tang}\,\gamma = \frac{\eta}{dx}$$

quindi la rotazione totale ψ sarà data dalla somma delle rotazioni causate dalle due deformazioni precedentemente considerate. Trattandosi di angoli infinitamente piccoli la tangente potrà ritenersi uguale all'arco e la somma delle due tangenti uguale alla tangente della somma delle due rotazioni, quindi

$$\text{tang}\,\Psi = \Psi = -\frac{F}{2GI}(v^2 - v_1^2) + \frac{Fv^2}{2EIm}\ (*).$$

Contemporaneamente l'elemento lineare ab normale ad ad avrà preso rispetto all'asse delle v un' inclinazione χ tale che sarà $\text{tang}\,\chi = \text{tang}\,\psi$ e, se si indica con ξ l'ordinata rispetto all'asse delle v della curva, secondo la quale si deforma la retta AB, sarà

$$\text{tang}\,\chi = \frac{d\xi}{dv} = -\frac{F}{2GI}(v^2 - v_1^2) + \frac{Fv^2}{2mEI}.$$

Se si ricorda che

$$G = \frac{m}{2(m+1)}E \qquad m = 4$$

e che per una sezione rettangolare avente per lati a e b

$$I = \frac{1}{12}ab^3 \qquad v_1 = \frac{b}{2}$$

la formola precedente diventa

$$\frac{d\xi}{dv} = \frac{6F}{Gab^3}\left(\frac{b^2}{4} - 0{,}9\,v^2\right)$$

ed integrando fra $v = 0$ e $v = v$

$$\xi = \frac{3}{2}\frac{F}{Ga}\frac{v}{b} - \frac{5{,}4Fv^3}{3Gab^3} = \frac{3}{2}\frac{F}{Ga}\left(\frac{v}{b} - 1{,}2\left(\frac{v}{b}\right)^3\right) \qquad (210)$$

---

essere riguardata con molta approssimazione come una serie di piccoli tronchi ad asse rettilineo riuniti nelle loro sezioni estreme (Veggasi *Archi elastici* nella parte seconda di quest'opera).

(*) Navier, Opera citata, pag. 213.

che è l'equazione della curva $A' A_k B'$ secondo la quale si dispone la retta AB dopo la deformazione. Se invece di considerare una striscia verticale della larghezza costante du si prende in esame una sezione avente una larghezza variabile u funzione di v allora

$$Su = \frac{d\left(\frac{M}{I}\right)}{dx} \int_v^{v'} uvdv$$

e nell'ipotesi che la sezione della trave sia costante o possa ritenersi come tale

$$S = \frac{dM}{dx}\frac{1}{Iu}\int_v^{v'} vudv = \frac{dM}{dx}\frac{U_v}{Iu} = \frac{FU_v}{Iu} \qquad (211)$$

indicando con U_v il momento statico della porzione di sezione compresa fra la fibra estrema e la striscia parallela all'asse delle u, che si considera.

La differenza fra questo risultato e l'ipotesi ordinariamente ammessa che lo sforzo tangenziale abbia un valore costante in tutta la sezione dipende dal fatto, che ordinariamente si ammette, che alla funzione $\frac{du_1}{dy}$, studiata ai numeri 57 e seguenti, si possa sostituire uno scorrimento g costante. Accettando per lo sforzo tangenziale unitario il valore $S = \frac{FU_v}{Iu}$ l'espressione del lavoro di deformazione non è più $\frac{F^2}{2GA}dx$ ma

$$dL = \int_{-v'}^{v'} \frac{S^2(udv)^2}{2Gudv}dx = \frac{F^2}{2G}dx\int_{-v'}^{+v'} \frac{U_v^2 dv}{I^2 u} = \frac{V}{A}\frac{F^2}{2G}dx \qquad (212)$$

in cui $\frac{V}{A} = \int_{-v'}^{+v'} \frac{U_v^2 dv}{I^2 u}$, A è l'area della sezione e V (*) un coeffi-

(*) Calcolando il valore di questi coefficienti, l'Ingegnere Castigliano trova per la sezione rettangolare $V = \frac{6}{5}$ e per la sezione ellittica $V = \frac{10}{9}$ (Vedi *Flessione e sforzi di taglio* nella parte seconda di quest'opera).

ciente numerico dipendente dalla forma della sezione (Num. 57) ed il lavoro di deformazione per tutta la trave, dovuto al momento flettente M ed allo sforzo di taglio F, è dato dalla formola

$$L=\int_0^{\lambda}\left(\frac{M^2}{2EI}+\frac{VF^2}{2GA}\right)dx \qquad (213).$$

76. Osservazioni sulle formole relative alla resistenza delle travature. — In causa della sostituzione dei valori costanti g_1 e g_2 alle funzioni $\frac{du'}{dy}, \frac{du'}{dz}$ (Num. 57) studiando l'equilibrio di una trave sollecitata alla torsione si trova che la formola approssimata

$$M_x = GI_x\theta_x$$

va corretta mediante un coefficiente V_1 analogo al coefficiente V e che dipende dalla forma di sezione; per una sezione quadrata Barré de Saint-Venant ha trovato $V_1=0{,}8435$ in guisa che la formola di elasticità risulta

$$M = V_1\theta_x G_x I_x = 0{,}8435\, G I_x \theta_x \qquad (214)$$

e soltanto per una sezione circolare $V_1=1{,}00$.

Si è già dimostrato (Num. 58) che lo sforzo F ha poca importanza rispetto al momento flettente M, quindi rimane giustificata la pratica ora generalmente in uso fra gli ingegneri, di trascurare il coefficiente V. Il Bresse poi aggiunge che se la teoria elementare della torsione può condurre a risultati molto inesatti quando le sezioni si scostano assai dalla forma circolare (es., rettangolo a lati disuguali) tuttavia ciò non ha gran conseguenza in pratica, poichè i solidi esposti a sforzi di torsione si fanno sempre in modo che risultino cilindri a sezione circolare o prismi aventi per base un poligono regolare.

Barré de Saint-Venant ha dimostrato (Num. 58) che se sopra un prisma agiscono delle forze solo sulle sue basi estreme distribuite con una certa legge, che esso definisce completamente (che però non si verifica mai nella pratica) sono nulle le tre componenti p_{yy}, p_{zz}, p_{yz} e le altre tre sono espresse in funzione delle forze e dei momenti delle forze esterne ad ogni sezione.

L'Ingegnere Castigliano poi seguendo il metodo di Barré de

Saint-Venant ha trovato che le tre forze p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}, sono esprimibili mediante le formole seguenti

$$\left.\begin{aligned} p_{xx} &= \frac{X}{A} + \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z} \\ p_{xy} &= a_1 \frac{Y}{A} + b_1 \frac{Z}{A} + c_1 \frac{Mr}{I_x} \\ p_{xz} &= a_2 \frac{Y}{A} + b_2 \frac{Z}{A} + c_2 \frac{Mr}{I_x} \end{aligned}\right\} \quad (215)$$

dove a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 sono funzioni di y e z, dipendenti quindi dalla forma della sezione ed indipendenti dalle forze esterne, ed il lavoro di deformazione risulta espresso da (Num. 57, form. 105)

$$L = \frac{1}{2} \int_3 dx\, dy\, dz \left(\frac{p_{xx}^2}{E} + \frac{p_{xy}^2}{G} + \frac{p_{xz}^2}{G} \right).$$

Barré de Saint-Venant trattando dei casi, in cui le forze esterne non sono distribuite sulle basi estreme come esso suppone precedentemente, avverte che ciò non può avere grande influenza sul risultato (ad eccezione di due tronchi molto corti in vicinanza delle basi). Finalmente l'Ingegnere Castigliano (*) osserva che le stesse formole possono servire con sufficiente esattezza anche quando l'asse del solido è leggermente curvo e quando sulla superficie laterale del solido agiscano forze distribuite in modo continuo, oppure forze isolate (poichè queste ultime si possono considerare come agenti all'estremità del tronco di trave compreso fra le medesime) e determina, servendosi delle formole (215), l'espressione del lavoro nel caso della sollecitazione piana, che risulta

$$L = \frac{1}{2} \int \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{X^2}{EA} + \frac{VF^2}{GA} \right) ds$$

e che differisce solo nel coefficiente V da quelle trovate ai numeri precedenti. La differenza sarebbe più sensibile se si dovesse tener conto anche della torsione, ma si è osservato che questo caso in generale non si presenta che per sezioni circolari, per le quali la formola approssimata per una fortunata circo-

(*) Castigliano, *Théorie de l'équilibre des sistèmes élastiques.*

stanza dà risultati esatti. Quanto poi allo sforzo di taglio, esso ha generalmente poca influenza in confronto del momento flettente talchè spesso viene trascurato nei calcoli, specialmente quando si tratta di determinare le reazioni incognite, quindi a più forte ragione può accettarsi la pratica in uso di trascurare il coefficiente V. In generale le formole approssimate soddisfano sufficientemente nella pratica; è però bene aver presente che le formole, che si riferiscono alla tensione o compressione e flessione danno risultati più esatti che quelle relative allo sforzo di taglio ed alla torsione e sapere in quali casi queste ultime danno soltanto risultati largamente approssimati od anche affatto inesatti. Se in qualche caso particolare sarà necessaria o si vorrà apportare nei calcoli una maggiore approssimazione, allora si potranno introdurre nelle formole i coefficienti V e V_1, il cui valore numerico dipende dalla forma della sezione e che determineremo nella parte seconda di quest'opera agli articoli *Sforzi taglianti* e *Torsione*.

77. Problema del costruttore. — Il problema del costruttore, o problema della scienza delle costruzioni, nell'equilibrio delle travature non è altro che il problema generale dell'equilibrio elastico, esposto al numero 54, applicato a questa questione particolare. Le forze elastiche e le corrispondenti deformazioni essendo fra loro legate da una relazione, questo problema non può prendere che una delle tre forme seguenti:

a) Date le dimensioni di una travatura e le deformazioni o gli sforzi unitarî, che può subire, determinare gli sforzi ai quali essa può resistere in ciascuna sezione (operazioni per perizie e garanzia di stabilità).

b) Date le forze esterne, che agiscono sopra una travatura e le sue dimensioni, determinare in ogni punto gli sforzi elastici unitarî e le deformazioni (operazioni di collaudo e prove di stabilità).

c) Date le forze esterne, che agiscono sopra una travatura e le deformazioni o gli sforzi elastici unitarî ammissibili (ossia l'equazione di coesione) determinare le dimensioni che alla medesima convengono e le deformazioni totali, che essa subisce (operazioni per progetto).

La prima forma sotto la quale può presentarsi il problema del costruttore, non ha bisogno di alcuna spiegazione circa al modo di condurre i calcoli, le formole di elasticità e di resistenza trovate ai numeri 64 e 65, risolvono immediatamente la questione, poichè danno per ogni sezione della trave i valori di X, Y, Z, M_x, M_y, M_z, ai quali essa può resistere. Le altre due forme richieggono che vengano determinati in ogni sezione i va-

lori di X, Y, Z, M_x, M_y, M_z in funzione delle forze esterne prima di poter applicare le formole di elasticità e resistenza e quelle, che danno le deformazioni totali di un punto dell'asse o di una sezione della travatura. Nell'eseguire questo calcolo possono presentarsi due casi diversi:

Primo caso. — *Le forze esterne sono tutte note, oppure se fra esse ve ne sono alcune incognite in intensità e direzione, il numero delle incognite non supera quello delle condizioni di equilibrio della travatura considerata come un sistema di forma invariabile* (se le incognite sono reazioni opposte da vincoli, ciò equivale a dire che il numero di questi non supera quello necessario ad assicurare l'immobilità della trave considerata come un corpo rigido). In questo caso si può ritenere che tutte le forze esterne siano note *a priori*, poichè un calcolo in generale abbastanza semplice e dipendente soltanto dai teoremi relativi alla statica dei sistemi di forma invariabile permette di determinare quelle forze, che potessero essere incognite, ed il problema è solubile senza ricorrere in modo alcuno alle proprietà dell'equilibrio dei corpi elastici. Determinate in intensità, direzione e senso tutte le forze esterne (attive e passive o reazioni) il calcolo delle quantità X, Y, Z, M_x, M_y, M_z, per una travatura qualsiasi (nel caso ordinario della sollecitazione piana non si dovranno calcolare che X, F, M), richiede le operazioni seguenti:

a) Riduzione di tutte le forze esterne ad ogni sezione al centro di gravità della sezione stessa.

b) Decomposizione della risultante in tre forze X, Y, Z, dirette secondo tre assi passanti pel centro di gravità O della sezione e diretti il primo Ox normalmente al piano della sezione e gli altri due Oy ed Oz secondo i suoi assi principali d'inerzia.

c) Decomposizione del momento risultante in tre momenti o coppie M_x, M_y, M_z, intorno ai tre assi Ox, Oy, Oz, scelti precedentemente per la ricerca delle X, Y, Z.

Questi calcoli possono esser fatti con processi analitici o geometrici conosciuti, ed il loro risultato può essere rappresentato in tre modi diversi:

1° Se è possibile esprimere le forze ed i momenti in ciascuna sezione in funzione di una variabile atta a determinare la sezione, a cui il calcolatore si riferisce (ordinariamente l'arco s dell'asse della trave o l'ascissa del baricentro della sezione) la rappresentazione delle forze e dei momenti dicesi fatta con metodo analitico. Di questo metodo è stato dato un esempio al numero 72, in cui si è trovato il valore del momento M e dello sforzo di taglio F in una trave $A\ B$ (*Fig.* 37ª, *tav.* V) riposante liberamente agli

estremi sopra due appoggi A e B e caricata di un peso p per metro corrente uniformemente distribuito lungo l'asse della trave

$$M = \frac{pl}{2} x - \frac{px^2}{2}$$

$$F = \frac{pl}{2} - px.$$

2° Se non si può o non si vuole calcolare queste funzioni, allora si determinano le X, Y, Z, M_x, M_y, M_z, per un certo numero di sezioni σ_0, σ_1, σ_2, . . . σ_n, scelte sulla travatura, ordinariamante equidistanti, più o meno vicine secondochè si vuole maggiore o minore esattezza nel calcolo e dipendentemente dal fatto di essere più o meno varia la distribuzione delle forze o di esistere o no sezioni singolari per forma o per carico, indi si raccolgono i risultati di questo calcolo in un quadro analogo al seguente:

Sezioni della trave	Valori di					
	X	Y	Z	M_x	M_y	M_z
σ_0	X_0	Y_0	Z_0	M_{x0}	M_{y0}	M_{z0}
σ_1	X_1	Y_1	Z_1	M_{x1}	M_{y1}	M_{z1}
σ_2	X_2	Y_2	Z_2	M_{x2}	M_{y2}	M_{z2}
σ_3	X_3	Y_3	Z_3	M_{x3}	M_{y3}	M_{z3}
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .

e la rappresentazione dei valori di X, Y, Z, M_x, M_y, M_z, dicesi fatta con metodo aritmetico, tabellare o discontinuo. Il calcolo poi dei valori X_0, X_1, . . . Y_0, Y_1, . . . può esser fatto coi metodi della statica analitica o grafica, calcolando le diverse quantità o desumendole da un disegno eseguito in scala conveniente.

3° Se la variazione dei valori di X, Y, Z, M_x, M_y, M_z, si determina col mezzo di diagrammi, siano essi curve continue

o spezzate, allora la rappresentazione dicesi fatta con metodo geometrico o per diagrammi. Per le travature ad asse rettilineo servono bene il poligono funicolare delle forze, che la sollecitano, oppure il fascio funicolare; per le travature ad arco il poligono delle risultanti e la curva delle pressioni. In via generale si può osservare che le curve continue corrispondono alle funzioni considerate all'inciso 1° sviluppando il metodo analitico, le spezzate invece al quadro del processo aritmetico o tabellare, e precisamente le ordinate ai vertici rappresentano i valori contenuti nel quadro medesimo.

Secondo caso. — *Le forze esterne non sono tutte note in intensità e direzione ed il numero delle incognite supera quello delle condizioni necessarie ad assicurare l'equilibrio della travatura considerata come un corpo rigido.* In tal caso prima di passare per ogni sezione al calcolo ed alla rappresentazione delle qualità X, Y, Z, M_x, M_y, M_z, bisogna determinare le forze incognite in intensità o direzione cercando le equazioni sufficienti nelle condizioni generali di equilibrio dei corpi indeformabili e nelle proprietà dell'equilibrio dei corpi elastici. Al numero 54 si è visto come questo problema sia sempre solubile in modo unico e come si possa giungere alla determinazione delle incognite in modi diversi :

a) Ponendo le espressioni delle deformazioni in funzione delle forze esterne note ed incognite (queste ultime rappresentate mediante simboli algebrici) uguali alle deformazioni imposte dai vincoli del sistema; si ottengono così tante equazioni lineari (perchè le deformazioni sono funzioni lineari delle forze esterne, numero 67) quante sono le incognite, ed il problema è univocamente determinato.

b) Calcolando l'espressione del lavoro di deformazione in funzione delle forze esterne note ed incognite (quest'ultime rappresentate col mezzo di simboli algebrici)

$$L=\frac{1}{2}\int_{S_0}^{S'}\left(\frac{X^2}{EA}+\frac{Y^2}{GA}+\frac{Z^2}{GA}+\frac{M_x^2}{GI_x}+\frac{M_y^2}{EI_y}+\frac{M_z^2}{EI_z}\right)ds=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_1^n\left(\frac{X^2}{EA}+\frac{Y^2}{GA}+\frac{Z^2}{GA}+\frac{M_x^2}{GI_x}+\frac{M_y^2}{EI_y}+\frac{M_z^2}{EI_z}\right)\Delta s \ (*)$$

(*) Si usa l'una o l'altra espressione del lavoro secondo che si fa l'integrazione esatta od approssimata.

e ponendo le sue derivate rispetto alle forze ed ai momenti incogniti uguali alle deformazioni importate dai vincoli corrispondenti. L'espressione del lavoro di deformazione essendo di secondo grado rispetto alle forze esterne, le derivate saranno di primo e si avranno tante equazioni lineari, quante ne occorrono per determinare in modo unico la questione. È importante richiamare quanto fu già detto al numero 54, cioè che i due metodi conducono necessariamente agli stessi risultati, perchè (Num. 38 e 68) le derivate del lavoro di deformazione in funzione delle forze esterne e dei loro momenti prese rispetto a queste ultime quantità danno le deformazioni, che alle medesime corrispondono. La differenza fra i due metodi sta in uno scambio dei due simboli d ed $\int$; infatti derivando l'espressione del lavoro di deformazione di un tronco della travatura si ottiene il differenziale $d\Delta x, d\Delta y, \ldots$ della deformazione totale, la quale si calcola sommando tutte le deformazioni, dovute ai singoli tronchi della travatura, ossia integrando l'espressione elementare della deformazione; nel secondo metodo la deformazione vien calcolata derivando l'espressione del lavoro totale di deformazione, ossia l'integrale del lavoro elementare corrispondente ad un tronco infinitamente corto della travatura.

c) Quando le forze esterne ammettono un ergale (è il caso che si presenta ordinariamente nei problemi relativi all'equilibrio delle travature) cioè quando sono tali che il loro lavoro dipenda unicamente dalle posizioni estreme occupate dal loro punto d'applicazione e non dal cammino percorso nel passare dalla posizione iniziale alla posizione finale, e più particolarmente quando i vincoli, a cui il sistema è soggetto, sono invariabili e danno luogo solo a reazioni, che non producono lavoro esterno, allora (Num. 40 e 54, teorema di Menabrea) le forze ed i momenti incogniti si possono determinare osservando che essi debbono avere valori tali da rendere in generale un minimo il lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze esterne e dei loro momenti, o, più esattamente, che essi debbono avere valori tali, che annullino le derivate del lavoro di deformazione prese rispetto alle forze ed ai momenti incogniti tenendo conto delle relazioni generali d'equilibrio relative ai corpi rigidi. Il lavoro di deformazione essendo una funzione di secondo grado rispetto alle forze esterne, le sue derivate saranno di primo e si avranno quindi tante equazioni lineari, quante sono le incognite, ed il problema sarà univocamente determinato.

I calcoli necessarî a determinare le forze incognite sono più

o meno prolissi a seconda dei casi, ma il procedimento è sempre lo stesso; molte volte essi non sono effettuabili in modo esatto col metodo, che abbiamo chiamato analitico, specialmente perchè non sempre sono integrabili le funzioni, che si trovano sotto il segno $\int$, possono però sempre essere eseguite col metodo aritmetico o tabellare (impiegato specialmente dall'Ingegnere Castigliano) cioè facendo uso dell'integrazione approssimata con sommatorie semplici o col mezzo della formola del Simpson, ottenendo una precisione tanto grande, quanto può interessare nella pratica. Il metodo geometrico fino ad ora non è molto impiegato dagli ingegneri per la ricerca delle forze e dei momenti incogniti tenendo conto della proprietà dell'equilibrio elastico, non perchè esso non sia suscettibile di essere applicato vantaggiosamente alla soluzione di questa questione, ma perchè esso richiede grande abilità e precisione di disegno nel calcolatore, senza di che non dà molte garanzie di esattezza in causa delle numerose e complicate operazioni geometriche, necessarie anche nei casi più semplici, come quello delle travature ad asse rettilineo riposanti sopra più di due appoggi e quello degli archi elastici simmetrici caricati da pesi (*): il metodo grafico o geometrico però può sempre rendere utili servigi come processo di verifica pei calcoli eseguiti con uno degli altri due metodi. Spesso il calcolo di una determinata costruzione non si fa tutto con un unico metodo, ma si usa ora l'uno ora l'altro a seconda che meglio si prestano per eseguire le varie operazioni necessarie per la risoluzione del problema; da ciò deriva una grande quantità di procedimenti diversi pel calcolo dei varî sistemi in uso nelle costruzioni e che ordinariamente vengono distinti col nome dell'autore, che primo li propose.

78. Travatura ad asse rettilineo riposante sopra n appoggi disposta orizzontalmente e caricata di pesi P agenti nel piano verticale, che contiene l'asse e taglia tutte le sezioni secondo un asse principale d'inerzia. — Supponiamo preso l'asse delle x orizzontale, quello delle y verticale, l'origine nel punto 1, siano $(x_2\, y_2)$, $(x_3\, y_3)$, . . . le coordinate degli appoggi (*Fig.* 54ª, *tav.* VII); in ognuno di questi vi sarà una rea-

(*) Vedi Mohr, Winkler, Kulmann, Opere citate, ecc. La reputatissima officina di Savigliano ha però calcolato alcune delle opere, che essa ha costruito, con metodi grafici od almeno che sono in intima relazione con quelli proposti dagli autori, che si sono specialmente occupati della risoluzione grafica dei problemi della resistenza dei materiali, e come esempio ricordiamo che il grande viadotto di Paderno sull'Adda è stato calcolato dal chiarissimo Ingegnere Röthlisberger col metodo del Kulmann.

zione incognita da determinare. La statica dei sistemi di forma invariabile dà due equazioni $\Sigma Y_t=0$, $\Sigma M_t=0$, intendendo con ΣY_t la somma delle componenti delle forze esterne parallelamente all'asse delle y e con ΣM_t la somma dei momenti di tutte le forze esterne rispetto ad un punto qualsiasi; ΣX_t è naturalmente uguale a zero perchè tutte le forze sono perpendicolari all'asse delle x. Le incognite essendo n mancano $n-2$ equazioni per determinarle, applicando il metodo delle deformazioni queste sono date dall'osservazione che sugli appoggi sono note le deformazioni della trave, in guisa che (Num. 69, form. 151) se (trascurando lo sforzo di taglio F) nella

$$y=b_0+(x'-x_0)\theta_0+\int_{x_0}^{x'}(y'-y)\frac{M}{EI}dx$$

si fa $b_0=0$, $x_0=0$ ed x' successivamente uguale ad x_2, x_3, . . . x_n; per y si debbono avere i valori corrispondenti y_2, y_3, . . . y_n ossia

$$\left.\begin{aligned} y_2&=x_2\theta_0+\int_0^{x_2}(x_2-x)\frac{M}{EI}dx\\ y_3&=x_3\theta_0+\int_0^{x_3}(x_3-x)\frac{M}{EI}dx\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n&=x_n\theta_0+\int_0^{x_n}(x_n-x)\frac{M}{EI}dx \end{aligned}\right\}\quad(216)$$

queste $n-1$ equazioni congiunte alle due date dalla statica dei corpi rigidi servono a determinare le n reazioni incognite e la rotazione iniziale θ_0: applicando successivamente la relazione

$$\omega=\theta_0+\int_{x_0}^{x'}\frac{M}{EI}dx$$

si possono avere le rotazioni $\omega_2, \omega_3, \ldots \omega_n$ corrispondenti ai diversi appoggi.

Questo metodo riesce lungo: in generale si preferisce prendere come incognite i momenti M sugli appoggi, in funzione dei quali le reazioni sono facilmente esprimibili. Sia T_k la reazione di un appoggio qualsiasi k, T_{ks}, T_{kd} le porzioni di reazione dovuta ai tronchi di trave posti a sinistra ed a destra dell'appoggio k in guisa che $T_k = T_{ks} + T_{kd}$, τ'_k e τ''_{k+1} i momenti delle forze esterne attive agenti sopra una travata o tronco di trave compreso fra due appoggi presi rispetto all'appoggio di sinistra o di destra, τ_k il momento delle stesse forze rispetto ad una sezione qualsiasi considerando la travata come una trave riposante liberamente ai suoi estremi, per l'equilibrio della k^{esima} travata dovrà essere $M_{k+1} = M_k + T_{kd}(x_{k+1} - x_k) - \tau''_{k+1}$ da cui

$$T_{kd} = \frac{M_{k+1} - M_k}{x_{k+1} - x_k} + \frac{\tau''_{k+1}}{x_{k+1} - x_k}$$

e per analogia

$$T_{ks} = \frac{M_{k-1} - M_k}{x_k - x_{k-1}} + \frac{\tau'_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$$

e ponendo

$$l_k = x_{k+1} - x_k, \quad l_{k-1} = x_k - x_{k-1}$$

$$T_k = \frac{\tau'_{k-1}}{l_{k-1}} + \frac{\tau''_{k+1}}{l_k} + \frac{M_{k-1}}{l_{k-1}} - M_k\left(\frac{1}{l_{k-1}} + \frac{1}{l_k}\right) + \frac{M_{k+1}}{l_k}.$$

Applicando il metodo delle derivate del lavoro, la rotazione sull'appoggio k si può ottenere derivando il lavoro di deformazione L rispetto ad M_k; d'altra parte questa deformazione, trattandosi d'angoli piccolissimi, può essere espressa (*Fig.* 54ª, *tav.* VII) dalla differenza dei rapporti fra i dislivelli di due appoggi e la loro distanza orizzontale in due travate successive, quindi

$$\left.\begin{aligned} &\frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} - \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \frac{dL}{dM_k} = \\ &= \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{M}{EI}\frac{dM}{dM_k}\,dx + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{M}{EI}\frac{dM}{dM_k}\,dx \end{aligned}\right\} \quad (217)$$

pel primo integrale (Num. 72, form. 171) a pagina 215

$$M = M_{k-1} + \frac{M_k - M_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} (x - x_{k-1}) + \tau_{k-1}$$

pel secondo

$$M = M_k + \frac{M_{k+1} - M_k}{x_{k+1} - x_k} (x - x_k) + \tau_k.$$

È inutile prendere in considerazione gli altri integrali, corrispondenti alle altre travate, che compongono l'espressione del lavoro, perchè essi non contenendo M_k darebbero per derivata lo zero. La proprietà contenuta nell'equazione (217) chiamasi *teorema dei tre momenti*, ed applicando questo teorema alle $n-2$ coppie di travate successive si hanno tante equazioni numeriche quante sono le incognite da determinare, poichè sul primo e sull'ultimo appoggio i momenti sono nulli non essendovi alcun impedimento alla libera rotazione delle sezioni estreme.

Nei casi che si presentano ordinariamente all'ingegnere, i carichi, che agiscono sulla trave, sono rappresentati da un peso p per metro corrente uniformemente distribuito lungo l'asse della medesima. Se indichiamo con 1, 2, 3 tre appoggi successivi di una travatura, con p_1 e p_2 i carichi unitarî sulla prima e la seconda travata, con l_1 ed l_2 la lunghezza di queste due travate, con M_1, M_2, M_3, R_1, R_2, R_3, i momenti e le reazioni corrispondenti ad ogni appoggio, con T'' e T' le porzioni di reazione dovute alla travata di sinistra e di destra, che riposano sopra uno stesso appoggio, nella prima travata si verifica la relazione

$$M = M_1 + T'_1 x - \frac{p x^2}{2}$$

per $x = l$, $M = M_2$ ossia

$$M_2 = M_1 + T'_1 l_1 - \frac{p_1 l_1^2}{2}$$

da cui si ricava

$$T'_1 = \frac{M_2 - M_1}{l_1} + \frac{p_1 l_1}{2}$$

e sostituendo questo valore di T'_1 nell'espressione di M si ricava

$$M = M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l_1} x + \frac{p_1 l_1}{2} x - \frac{p_1 x^2}{2}$$

ed analogamente per la seconda travata si otterrebbe

$$M = M_2 + \frac{M_3 - M_2}{l_2} x + \frac{p_2 l_2}{2} x - \frac{p_2 x^2}{2}.$$

Supponiamo che gli appoggi siano di livello, come appunto si verifica ordinariamente, allora

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0$$

e l'equazione (217) dei tre momenti diventa

$$0 = \frac{d}{dM_2}\left(\int_1^2 \frac{M^2}{2EI}\,dx + \int_2^3 \frac{M^2}{2EI}\,dx\right) =$$

$$= \int_1^2 \frac{M}{EI}\frac{dM}{dM_2}\,dx + \int_2^3 \frac{M}{EI}\frac{dM}{dM_2}\,dx.$$

Se si suppone che la sezione della trave sia costante o possa riguardarsi come tale, EI rimane fattore comune e può togliersi, quindi

$$0 = \int_1^2 M\frac{dM}{dM_2}\,dx + \int_2^3 M\frac{dM}{dM_2}\,dx.$$

Sostituendo nei due integrali ad M i valori precedentemente trovati l'equazione superiore diventa

$$\left.\begin{aligned} 0 = &\int_1^2 \left(M_1 + \frac{M_2 - M_1}{l_1} x + \frac{p_1 l_1}{2} x - \frac{p_1 x^2}{2}\right)\left(\frac{x}{l_1}\right) dx + \\ &+ \int_2^3 \left(M_2 + \frac{M_3 - M_2}{l_2} x + \frac{p_2 l_2}{2} x - \frac{p_2 x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{l_2}\right) dx = \\ &= M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 + \frac{1}{4} p_1 l_1^3 + \frac{1}{4} p_2 l_2^3 \end{aligned}\right\} \quad (218)$$

che è la forma ordinaria dell'equazione (o teorema) dei tre momenti.

Supponiamo ora di considerare il caso particolare di una trave riposante sopra tre appoggi di livello ed equidistanti, in guisa che sia $l_1=l_2=l'=\frac{l}{2}$ ed inoltre sia $p_1=p_2=p$ allora $M_1=M_3=0$ e l'equazione (218) dei tre momenti diventa

$$0=2M_2(l'+l')+\frac{1}{4}pl'^3+\frac{1}{4}pl'^3$$

da cui si ricava

$$M_2=-\frac{1}{8}pl'^2=-\frac{1}{32}pl^2 \qquad (219)$$

e le reazioni sugli appoggi si ottengono immediatamente dalle relazioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} R_1=T'_1&=\frac{M_2-M_1}{l'}+\frac{pl'}{2}=-\frac{1}{8}pl'+\frac{pl'}{2}=\frac{3}{8}pl'=\frac{3}{16}pl \\ R_2=T'_2+T''_2&=-\frac{M_2-M_1}{l'}+\frac{pl'}{2}+\frac{M_3-M_2}{l'}+\frac{pl'}{2}= \\ &=pl'+\frac{2}{8}pl'=\frac{10}{8}pl'=\frac{10}{16}pl \\ R_3=T''_3&=-\frac{M_3-M_2}{l'}+\frac{pl'}{2}=-\frac{1}{8}pl'+\frac{pl'}{2}=\frac{3}{8}pl'=\frac{3}{16}pl \end{aligned}\right\} (220).$$

Se la trave riposa sopra quattro appoggi di livello in modo che $l_1=l_2=l_3=l'=\frac{l}{3}$, $p_1=p_2=p_3=p$ l'equazione dei tre momenti applicata prima agli appoggi 1, 2, 3 ed in seguito agli appoggi 2, 3, 4 dà le due equazioni seguenti:

$$2M_2(l'+l')+M_3l'=-\frac{1}{4}(p_1l'^3+p_2l'^3)=-\frac{1}{2}pl'^3$$

$$M_2l'+2M_3(l'+l')=-\frac{1}{4}(pl'^3+pl'^3)=-\frac{1}{2}pl'^3$$

poichè

$$M_1=M_4=0.$$

Da queste due relazioni si ricava

$$M_2=-\frac{1}{10}pl'^2=-\frac{1}{90}pl^2 \qquad M_3=-\frac{1}{10}pl'^2=-\frac{1}{90}pl^2 \qquad (221)$$

$$R_1=\frac{4}{30}pl, \qquad R_2=\frac{11}{30}pl, \qquad R_3=\frac{11}{30}pl, \qquad R_4=\frac{4}{30}pl \qquad (222).$$

Se la trave riposa sopra cinque appoggi di livello in modo che sia $l_1=l_2=l_3=l_4=l'=\frac{l}{4}$, $p_1=p_2=p_3=p_4$, allora $M_1=M_5=0$ e l'equazione dei tre momenti applicata successivamente agli appoggi 1, 2, 3, — 2, 3, 4, — 3, 4, 5 dà luogo alle tre equazioni seguenti:

$$2M_2(l'+l')+M_3l'=-\frac{1}{2}pl'^3$$

$$M_2l'+2M_3(l'+l')+M_2l'=-\frac{1}{2}pl'^3$$

$$M_3l'+2M_4(l'+l')=-\frac{1}{2}pl'^3$$

da cui si ricava

$$\left.\begin{aligned} M_2&=-\frac{3}{28}pl'^2=-\frac{3}{448}pl^2 \\ M_3&=-\frac{1}{14}pl'^2=-\frac{1}{224}pl^2 \\ M_4&=-\frac{3}{28}pl'^2=-\frac{3}{448}pl^2 \end{aligned}\right\} \quad (223)$$

$$\left.\begin{aligned} R_1&=\frac{11}{112}pl, \quad R_2=\frac{32}{112}pl, \quad R_3=\frac{26}{112}pl, \\ R_4&=\frac{32}{112}pl, \quad R_5=\frac{11}{112}pl \end{aligned}\right\} \quad (224).$$

Determinati i momenti incogniti e le reazioni, l'espressione del momento M e quella dello sforzo di taglio F non contengono che quantità note, quindi sono noti i loro valori in tutte le sezioni della trave e si può passare alla determinazione della sezione resistente in un punto qualsiasi mediante le formole di resistenza (127) e (205)

$M=\frac{RJ}{v'}=R\omega h$ ed $F=SA$ ed in seguito al calcolo delle deformazioni mediante le formole dei numeri 69 o 70.

Le due formole

$$M=M_1+\frac{M_2-M_1}{l}x+\frac{pl}{2}x-\frac{px^2}{2} \qquad (225)$$

$$F=\frac{M_2-M_1}{l}+\frac{pl}{2}-px \qquad (226)$$

costituiscono la soluzione analitica del problema della determinazione degli sforzi esterni ad ogni sezione, interessa spesso averne anche la soluzione geometrica. A questo scopo basta tracciare i due diagrammi corrispondenti alle due equazioni (225) e (226); ciò può farsi per punti, come è stato indicato al numero 72 dando ad x diversi valori, portando come ordinate i valori di M ed F in una scala determinata e riunendo quindi con tratti rettilinei o con una curva a mano gli estremi di queste ordinate. Nel caso particolare (generalissimo nella pratica) che il carico sia uniformemente distribuito il momento M è dato dalla (225), che rappresenta una parabola ad asse verticale facile a costruirsi quando se ne conoscano tre punti e l'asse, e lo sforzo di taglio F è dato dalla (226), che rappresenta una retta, e può tracciarsi quando siano noti due dei suoi punti: per $x=0$ $F'_1=\frac{M_2-M_1}{l}+\frac{pl}{2}$ per $x=l$ $F''_2=\frac{M_2-M_1}{l}-\frac{pl}{2}$. Lo sforzo di taglio essendo rappresentato dalla derivata del momento flettente (Num. 75) il punto in cui $F=0$ corrisponderà al massimo di M, cioè al vertice della parabola dei momenti e per esso passerà l'asse (verticale) della parabola stessa: la determinazione di questo punto s'ottiene ponendo

$$F=\frac{dM}{dx}=\frac{pl}{2}-px+\frac{M_2-M_1}{l}=0$$

e questo valore di x sostituito nella (225) dà il valore del massimo momento.

Sia AB (*Fig.* 55ª, *tav.* VII) una delle travate di una travatura e rappresentino i segmenti AA_1, BB_1, i momenti M_1 ed M_2, i segmenti AA_2, BB_2 gli sforzi di taglio

$$F_1'=\frac{M_2-M_1}{l}+\frac{pl}{2} \text{ e } F''_2=\frac{M_2-M_1}{l}-\frac{pl}{2},$$

C il punto nel quale $F=0$ e CD l'asse della parabola dei momenti. Il punto N, estremo dell'ordinata che rappresenta il momento massimo, può anche determinarsi nel modo seguente: siano E e G i punti simmetrici rispetto all'asse CD dei punti A_1 e B_1, i punti A_1 E, B_1G sono i vertici di un quadrangolo inscritto nella parabola dei momenti, quindi il vertice N sarà il punto di mezzo del segmento d'asse intercetto fra la retta B_1A_1 e la retta B_1E. Determinato il vertice della parabola essa può sempre essere costruita coi metodi dati della geometria ed il diagramma dei momenti flettenti e degli sforzi di taglio per la travata AB può considerarsi come tracciato. Ripetendo la stessa operazione per le altre travate della travatura si avranno rappresentate geometricamente in tutta l'estensione della trave la variazione dei momenti flettenti e degli sforzi di taglio passando da una ad un'altra sezione.

Il diagramma dei momenti flettenti può anche tracciarsi costruendo un poligono funicolare, che colleghi le forze attive note agenti sulla travatura e le reazioni determinate in precedenza colle formole superiori. Il diagramma degli sforzi di taglio può ricavarsi dal poligono delle forze portando come ordinata in corrispondenza di ogni sezione il segmento somma delle forze che trovansi alla sinistra od alla destra della medesima, e riunendo le estremità di queste ordinate con tratti rettilinei o con una curva tracciata a mano, dipendentemente dal modo, col quale il carico è distribuito sulla trave. Nel caso di un carico p distribuito uniformemente sulla trave il diagramma dei valori di F in ogni travata è una retta, quindi basterà determinarne due punti (ordinariamente all'estremità della medesima).

La determinazione delle reazioni incognite T_k opposte dagli appoggi riposa sul principio che le forze applicate nel punto, in cui agisce il vincolo, rendono la deformazione uguale a quella permessa dal vincolo stesso, e nel nostro caso particolare uguale allo zero. Le deformazioni potendo essere calcolate col mezzo del teorema del Betti (Num. 39) ne segue che da esso si può ricavare un procedimento, finora però non molto usato, pel calcolo delle reazioni incognite T_k, che si sviluppano sugli appoggi intermedî di una travatura continua. Supponiamo la trave $1, 2, 3, \ldots n-1, n$ (*Fig.* 54ª, *tav.* VII) liberamente appoggiata alle sue estremità facendo astrazione dai sostegni intermedî $2, 3, \ldots n-1$, e rappresentiamo con (y_k) la deformazione che si produrrebbe in un punto qualsiasi della medesima se su di essa agisse solo uno sforzo $Q_k=1$ nell'appoggio k^{esimo} e con $(y_k)_i$ la deformazione corrispondente all'appoggio i^{esimo} in questa speciale ipotesi di carico. In causa del teorema del Betti lo spostamento $(\delta_k)_P$ prodotto in

corrispondenza dell'appoggio k^{esimo} dai carichi attivi P agenti sulla trave $1, 2, 3, \ldots n$, considerata come riposante liberamente ai suoi estremi, (se il carico fosse distribuito con legge continua allora bisognerebbe considerare in ogni punto il carico unitario p) supponendo tutti gli sforzi $Q=o$ ad eccezione di Q_k che si ritiene uguale all'unità, è dato (Form. 49, pag. 111) da

$$(\delta_k)_P = \sum Pq = \sum P(y_k) = \int p(y_k)dx.$$

Per la stessa ragione lo spostamento $(\delta_k)_T$ prodotto dalle reazioni intermedie T sarà dato da

$$(\delta_k)_T = \sum_{i=2}^{i=n-1} T_i (y_k)_i.$$

Lo spostamento totale δ_k pel principio della sovrapposizione degli effetti deve risultare uguale alla somma di $(\delta_k)_P$ e $(\delta_k)_T$; d'altra parte, l'appoggio essendo invariabile, δ_k deve essere uguale a zero cioè $(\delta_k)_P = (\delta_k)_T$, ossia secondo che si abbiano carichi isolati P od un carico continuo p

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=2}^{i=n-1} T_i (y_k)_i &= \sum P(y_k) \\ \sum_{i=2}^{i=n-1} T_i (y_k)_i &= \int_1^n p(y_k)dx \end{aligned}\right\} (227).$$

Ad ogni appoggio intermedio 2, 3, 4, ... $(n-1)$ dipendentemente dal modo, col quale è distribuito il carico, corrisponde un'equazione analoga ad una delle (227) e che si ricava da essa dando a k il valore, che corrisponde al numero d'ordine dell'appoggio, che si considera, quindi, aggiungendo le due formole fornite dalla statica dei sistemi di forma invariabile, si avranno sempre n relazioni lineari fra le n reazioni T incognite, cioè quante ne occorrono per determinare in modo unico la questione.

È evidente che impiegando le formole del numero 73 derivanti dal teorema di correlazione si possono determinare le reazioni incognite degli appoggi con un procedimento analogo al precedente, cioè scrivendo che in corrispondenza di ciascun appoggio deve essere uguale allo zero la somma delle deformazioni prodotte

dai carichi agenti sulla trave e dalle reazioni incognite (rappresentate nelle formole mediante simboli algebrici) che si sviluppano nei varî appoggi (*).

79. — Travatura a fibra media circolare riposante in A ed in B sopra due appoggi di livello (*Fig.* 56ª, *tav.* VII) **e caricata da pesi P applicati al suo asse.** — Supponiamo verificate le condizioni della sollecitazione e deformazione piana, sia $A\,B$ l'asse delle x, $A\,Y$ quello delle y, $2\,a$ la corda, f la freccia dell'arco; le forze incognite sono quattro, cioè le due reazioni verticali in A ed in B, V ed S e le reazioni orizzontali negli stessi punti Q' e Q. Le condizioni di equilibrio pei corpi rigidi sono, ritenendo i soliti simboli

$$\Sigma X_t=0 \qquad \Sigma Y_t=0 \qquad \Sigma M_t=0$$

ossia nel nostro caso

$$Q+Q'=0 \qquad \sum_1^n P-V-S=0 \qquad \sum_1^n Px-2Va=0$$

la quarta equazione necessaria per determinare le incognite si dovrà cercare nella teoria dell'equilibrio dei corpi elastici (Num. 54 e 77). Ricorrendo al metodo delle deformazioni essa vien data dall'osservazione che il punto B è fisso, quindi per $x=2a$, $\Delta x=0$ ossia, essendo $x_0=0$, $y_0=0$, $y'=0$, dovrà essere (Num. 67, form. 149, pag. 200), trascurando l'effetto dello sforzo di taglio F (Num. 58),

$$\int_0^{2a} \frac{My}{EI}\frac{ds}{dx}dx+\int_0^{2a}\frac{X}{EA}dx+\tau(x'-x_0)=0.$$

Se per una sezione qualsiasi si indicano con M' ed X' il momento e la componente normale alla sezione dovuti soltanto alle forze note esterne alla sezione stessa

$$M=M'-Qy \qquad X=X'-Q\frac{dx}{ds}.$$

(*) In questo problema, come in quelli che seguiranno, non riporteremo per brevità di esposizione la soluzione della questione ottenuta usando successivamente tutti i singoli metodi e teoremi esposti nei numeri precedenti, ma ci limiteremo nei varî casi a mutare procedimento di calcolo, ritenendo che ciò sia sufficiente per la chiara intelligenza del loro uso nella risoluzione del problema del costruttore, e più particolarmente nella determinazione delle reazioni incognite opposte dai vincoli, a cui il sistema è soggetto.

Sostituendo nell'equazione precedente questi valori di M e di X e risolvendo rispetto a Q si ricava

$$\left.\begin{aligned} Q=\frac{\displaystyle\int_0^{2a}\frac{M'y}{EI}\frac{ds}{dx}dx+\int_0^{2a}\frac{X'}{EA}dx+2\tau a}{\displaystyle\int_0^{2a}\frac{y^2}{EI}\frac{ds}{dx}dx+\int_0^{2a}\frac{1}{EA}\frac{dx}{ds}dx} \end{aligned}\right\} \quad (228)$$

che congiunta alle tre precedenti, serve a determinare le quattro incognite V, S, Q', Q.

Le forze esterne essendo tali che il loro lavoro dipende soltanto dalle posizioni estreme occupate dai loro punti d'applicazione e non dal cammino percorso, e le reazioni non producendo lavoro esterno, sussiste il teorema di Menabrea (Num. 40) e l'incognita Q potrà ottenersi uguagliando a zero la derivata del lavoro di deformazione L presa rispetto a Q. Trascurando il lavoro dovuto ad una variazione di temperatura ed allo sforzo di taglio e ritenendo ancora

$$M=M'-Qy$$

$$X=X'-Q\frac{dx}{ds}$$

sarà

$$L=\frac{1}{2}\int_0^{2a}\frac{M^2}{EI}\frac{ds}{dx}dx+\int_0^{2a}\frac{X^2}{EA}\frac{ds}{dx}dx$$

e quindi pel teorema di Menabrea

$$\frac{dL}{dQ}=\int_0^{2a}\frac{M}{EI}\frac{dM}{dQ}\frac{ds}{dx}dx+\int_0^{2a}\frac{X}{EA}\frac{dX}{dQ}dx=$$

$$=\int_0^{2a}\frac{(M'-Qy)}{EI}(-y)\frac{ds}{dx}dx+\int_0^{2a}\frac{X'-Q\dfrac{dx}{ds}}{EA}\left(-\frac{dx}{ds}\right)ds=0$$

da cui ricavasi come precedentemente

$$Q=\frac{\displaystyle\int_0^{2a}\frac{M'y}{EI}\frac{ds}{dx}dx+\int_0^{2a}\frac{X'}{EI}dx}{\displaystyle\int_0^{2a}\frac{y^2}{EI}\frac{ds}{dx}dx+\int_0^{2a}\frac{1}{EA}\frac{dx}{ds}dx}\qquad(229).$$

Se la trave oltre all'essere appoggiata in A ed in B, fosse anche incastrata nelle sezioni iniziali e finali, allora oltre all'incognita Q vi sarebbe anche da determinare un momento d'incastro μ. La nuova equazione necessaria per cercare i valori delle incognite sarebbe data, applicando il metodo delle deformazioni, dall'osservazione che la sezione trasversale della trave in B non può subire alcuna rotazione, ossia che per $x=2a$, $\omega=0$. Per ipotesi anche la sezione in A è incastrata, quindi $\theta_0=0$; inoltre in una sezione qualsiasi usando le notazioni precedenti

$$M=M'+\mu-Qy\qquad\qquad X=X'-Q\frac{dy}{dx}$$

e, trascurando lo sforzo di taglio F, le equazioni, che risolvono il problema, sono le tre date dalla statica dei corpi rigidi e le due seguenti

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{2a}\frac{M'y}{EI}\frac{ds}{dx}dx+\int_0^{2a}\frac{X'}{EA}dx+\mu\int_0^{2a}\frac{y}{EI}\frac{ds}{dx}dx-\\&\quad-Q\int_0^{2a}\frac{y^2}{EI}\frac{ds}{dx}dx-Q\int_0^{2a}\frac{1}{EA}\frac{dx}{ds}dx=0\\&\int_0^{2a}\frac{M'}{EI}\frac{ds}{dx}dx+\mu\int_0^{2a}\frac{1}{EI}\frac{ds}{dx}dx-Q\int_0^{2a}\frac{y}{EI}\frac{ds}{dx}dx=0\end{aligned}\right\}\qquad(230)$$

che si ricavano dalle formole (149) avendo riguardo ai valori di M, X, θ_0 ed y'.

Anche in questo caso sussiste il teorema di MENABREA; se si calcola quindi l'espressione del lavoro di deformazione, qualunque sia il metodo impiegato, essa deve risultare una funzione di secondo grado delle forze e dei momenti incogniti, quindi avrà la forma

$$L=\alpha Q^2+\beta\mu^2+\gamma Q\mu+\delta Q+\varepsilon\mu+\eta$$

in cui α, β, γ, δ, ε, η sono coefficienti numerici dipendenti dal valore e dalla posizione delle forze esterne e dalle dimensioni della trave. Per l'equilibrio le derivate di L rispetto a Q ed a μ dovranno essere uguali allo zero, quindi

$$\frac{dL}{dQ}=2\alpha Q+\gamma\mu+\delta=0 \qquad \frac{dL}{d\mu}=2\beta\mu+\gamma Q+\varepsilon=0 \qquad (231)$$

e risolvendo le due equazioni (231) si avranno i valori delle incognite Q e μ cercate.

Se il calcolo del lavoro di deformazione si fa sostituendo gli integrali con sommatorie ed usando la formola di SIMPSON, questo metodo corrisponde a quello usato specialmente dall'Ingegnere CASTIGLIANO nel suo trattato sull'equilibrio dei sistemi elastici.

Se i punti A e B fossero riuniti da un tirante avente una sezione ω, l'equazione che dà il valore di Q si otterrebbe uguagliando lo spostamento $\Delta x'$ del punto B all'allungamento $\lambda=\frac{2Qa}{E\omega}$, che si verifica nel tirante; essa risulta, ritenendo i soliti simboli,

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{2a}\frac{M'y}{EI}\frac{ds}{dx}dx+\int_0^{2a}\frac{X'}{EA}dx-Q\int_0^{2a}\frac{y^2}{EI}\frac{ds}{dx}dx-\\&-Q\int_0^{2a}\frac{1}{EA}\frac{dx}{ds}dx=\frac{2Qa}{E\omega}.\end{aligned}\right\} \qquad (232).$$

Alla stessa formola si sarebbe giunti derivando l'espressione del lavoro di deformazione rispetto a Q e ponendo la derivata uguale a zero.

Se le estremità A e B della trave invece di essere fisse potessero muoversi sopra determinate superficie vincendo l'attrito, che queste oppongono, allora nella risoluzione dei problemi relativi all'equilibrio elastico della trave si potrebbe ancora ricorrere al

metodo delle deformazioni oppure a quello delle derivate del lavoro, ma non al teorema del minimo lavoro, poichè in questo caso il lavoro delle forze esterne non è più indipendente dal cammino percorso dai loro punti d'applicazione e le reazioni producono lavoro. Questo teorema non si potrebbe applicare che quando si fosse prima constatato che l'attrito è tanto forte da impedire il movimento dei due punti A e B, in guisa che essi possono essere considerati come punti fissi. Il movimento è impedito tutte le volte che la resistenza d'attrito è maggiore della componente diretta nel senso del movimento trovata supponendo il punto fisso.

Come esempio del metodo di determinazione delle forze e momenti incogniti ricorrendo al teorema di Castigliano sulle derivate del lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze esterne servendosi pei calcoli del procedimento aritmetico o tabellare riportiamo dalla pubblicazione fatta dall' Ufficio d'arte della Ferrovia dell'Alta Italia (Servizio della manutenzione e lavori) il seguente calcolo, che si riferisce ad un *ponte in ferro* ad archi con imposte piane; ciò che equivale a supporli incastrati alle loro estremità, poichè in tutti i punti delle sezioni estreme possono subire le reazioni delle superficie d'appoggio.

Se una parte della sezione estrema fosse soggetta a sforzi di tensione, questi non potrebbero aver luogo trattandosi di un semplice appoggio, l'ipotesi ammessa non sarebbe vera e quindi bisognerebbe ricominciare il calcolo considerando la sezione d'appoggio estesa soltanto a quella porzione, che dal primo calcolo risulta come resistente a compressione, e così continuare per successive approssimazioni fintantochè il risultato del calcolo verifichi esattamente e con abbastanza approssimazione l'ipotesi ammessa.

PONTE IN FERRO AD ARCHI CON IMPOSTE PIANE

Estratto dalle applicazioni pratiche della teoria sui sistemi elastici. — Studio dell'Ufficio d'arte delle Strade ferrate dell'Alta Italia. — Milano, 1878.

1° **Dati generali** (*Fig.* 57ª e 58ª, *tav.* VIII)

Luce netta fra le spalle.	metri	45,00
Corda dell'intradosso	»	45,00
Saetta »	»	5,50
Raggio »	»	48,773
Ampiezza dell'arco d'intradosso	54°	56′ 42″
Altezza » alla chiave	metri	1,50
» » alle imposte	»	2,00
Corda dell'estradosso	»	46,846

Saetta »	metri	5,226
Raggio »	»	55,102
Ampiezza »	50° 18′ 42″	
Distanza fra le travi trasversali.	metri	1,760
Larghezza	»	4,50

2° Carichi

I. Carico permanente per ogni metro lineare di ponte

Rotaie ed accessorî	Kg.	39 × 2 =	78
Lungheroni di quercie	»	40 × 2 =	80
Legname per marciapiedi	»	60 × 2 =	120
Lamiera di ferro	»		30
Parapetti	»		32
Travi trasversali e sottolungheroni di ferro .	»		500
Archi, montanti, architrave superiore e controventi	»		1000
TOTALE del peso permanente	Kg.		1840

II. Sopraccarico per ogni metro lineare di binario

Si prende lo stesso sopraccarico come per una travata rettilinea della stessa luce	Kg.	5200
Carico totale per ogni metro lineare di ponte e per un solo arco	»	7040
Carico permanente per ogni metro lineare . . .	»	920
Sopraccarico	»	2600
TOTALE	Kg.	3520

3° Denominazioni e formole generali nel caso che non si tenga conto del peso permanente e si supponga il sopraccarico soltanto sulla metà sinistra del ponte.

Come si vede nella (*Fig.* 58ª, *tav.* VIII) l'asse della metà sinistra dell'arco è stata divisa in sei tronchi eguali, ciascuno dei quali ha la lunghezza di metri 3,964. Dai punti di divisione si sono condotte le normali al detto asse, ossia i raggi, e dai punti d'incontro di questi raggi coll'estradosso si sono elevate le verticali. Si suppone che ciascun tronco dell'arco porti oltre il proprio peso, il peso della parte d'impalcatura e di sopraccarico compresa fra le verticali elevate alle estremità del suo estradosso; e che ciascuno dei detti due pesi sia uniformemente distribuito rispetto alla proiezione orizzontale di questo arco di estradosso, cosicchè il suo centro di gravità cada esattamente nel mezzo di detta proiezione.

L'arco è terminato alle estremità da piani normali all'intradosso, coi quali s'appoggia a cuscinetti di ghisa fissi alle spalle (*Fig.* 61ª, *tav.* VIII), esso dovrebbe premere sulle spalle con tutta l'ampiezza delle sue faccie d'appoggio precisamente come se vi fosse incastrato. Perciò nel calcolo bisognerà riguardar l'arco come incastrato alle estremità; ma se dal calcolo risulterà che alle imposte

tenda a prodursi tensione verso l'estradosso, ne seguirà che una parte delle sezioni d'imposta si stacca dalle spalle, e che perciò l'ipotesi fatta non si avvera.

Si prenderanno qui per incognite del problema, le seguenti:

M = momento di flessione alla chiave
P = pressione normale id.
S = sforzo di taglio id.

in funzione delle quali è facile esprimere il momento di flessione, la pressione normale e lo sforzo di taglio per una sezione qualunque tanto a destra quanto a sinistra della chiave. Difatti, supponendo tagliato l'arco alla chiave, non si turberà l'equilibrio delle due metà dell'arco, purchè alla chiave di ciascuna si applichino le due forze P, S nel centro della sezione, ed una coppia di momento M: cosicchè per la sezione 4 a sinistra per es., tutte le forze applicate a destra della medesima sono le due P, S applicate al centro della sezione in chiave, il momento di flessione M, e il peso di Kg. 2600 per ogni metro lineare sulla proiezione orizzontale dell'estradosso dei due tronchi 4, 5 e 5, 6; quindi, per esprimere il momento di flessione M_4, la pressione normale P_4 e lo sforzo di taglio S_4 nella sezione considerata si avranno le formole seguenti (*):

$$M_4 = M - 0{,}60 \cdot Q - 7{,}86 \cdot S + 2600 \times 7{,}99 \times \left(7{,}86 - \frac{7{,}99}{2}\right)$$

$$P_4 = 0{,}990 \cdot Q - 0{,}160 \cdot S + 2600 \times 7{,}99 \times 0{,}160$$

$$S_4 = 0{,}160 \cdot Q + 0{,}990 \cdot S - 2600 \times 7{,}99 \times 0{,}990.$$

Per la sezione 4 del semiarco di destra il momento di flessione, la pressione normale e lo sforzo di taglio si esprimono colle formole precedenti cambiandovi il segno ai termini in S e tralasciando i termini noti provenienti dal carico sull'arco; cosicchè si ha

$$M_4^1 = M - 0{,}60 \cdot Q + 7{,}86 \cdot S$$

$$P_4^1 = 0{,}990 \cdot Q + 0{,}160 \cdot S$$

$$S_4^1 = 0.160 \cdot Q - 0.990 \cdot S.$$

Si formano così le due tabelle seguenti:

(*) I valori dei seni e coseni degli angoli delle varie sezioni sono dati geometricamente dalla figura 60 considerando il diametro verticale del circolo uguale all'unità.

Sezioni 1	Momenti di flessione 2	Pressioni normali 3	Sforzi di taglio 4
	I. Mezzo arco a sinistra della chiave		
0	$M_0 = M - 5{,}36 \cdot Q - 22{,}96 \cdot S + 685035$	$P_0 = 0{,}894 \cdot Q - 0{,}460 \cdot S + 28010$	$S_0 = 0{,}460 \cdot Q + 0{,}894 \cdot S - 54437$
1	$M_1 = M - 3{,}72 \cdot Q - 19{,}33 \cdot S + 485831$	$P_1 = 0{,}926 \cdot Q - 0{,}388 \cdot S + 19863$	$S_1 = 0{,}388 \cdot Q + 0{,}926 \cdot S - 47406$
2	$M_2 = M - 2{,}38 \cdot Q - 15{,}59 \cdot S + 315868$	$P_2 = 0{,}954 \cdot Q - 0{,}315 \cdot S + 12989$	$S_2 = 0{,}315 \cdot Q + 0{,}954 \cdot S - 39339$
3	$M_3 = M - 1{,}35 \cdot Q - 11{,}76 \cdot S + 179735$	$P_3 = 0{,}976 \cdot Q - 0{,}237 \cdot S + 7370$	$S_3 = 0{,}237 \cdot Q + 0{,}976 \cdot S - 30350$
4	$M_4 = M - 0{,}60 \cdot Q - 7{,}86 \cdot S + 80395$	$P_4 = 0{,}990 \cdot Q - 0{,}160 \cdot S + 3324$	$S_4 = 0{,}160 \cdot Q + 0{,}990 \cdot S - 20566$
5	$M_5 = M - 0{,}15 \cdot Q - 3{,}94 \cdot S + 20176$	$P_5 = 0{,}999 \cdot Q - 0{,}082 \cdot S + 853$	$S_5 = 0{,}082 \cdot Q + 0{,}999 \cdot S - 10390$
6	$M_6 = M$	$P_6 = 1{,}000 \cdot Q$	$S_6 = \ldots\ldots 1{,}000 \cdot S$
	II. Mezzo arco a destra della chiave		
0	$M_0^1 = M - 5{,}36 \cdot Q + 22{,}96 \cdot S$	$P_0^1 = 0{,}894 \cdot Q + 0{,}460 \cdot S$	$S_0^1 = 0{,}460 \cdot Q - 0{,}894 \cdot S$
1	$M_1^1 = M - 3{,}72 \cdot Q + 19{,}33 \cdot S$	$P_1^1 = 0{,}926 \cdot Q + 0{,}388 \cdot S$	$S_1^1 = 0{,}388 \cdot Q - 0{,}926 \cdot S$
2	$M_2^1 = M - 2{,}38 \cdot Q + 15{,}59 \cdot S$	$P_2^1 = 0{,}954 \cdot Q + 0{,}315 \cdot S$	$S_2^1 = 0{,}315 \cdot Q - 0{,}954 \cdot S$
3	$M_3^1 = M - 1{,}35 \cdot Q + 11{,}76 \cdot S$	$P_3^1 = 0{,}976 \cdot Q + 0{,}237 \cdot S$	$S_3^1 = 0{,}237 \cdot Q - 0{,}976 \cdot S$
4	$M_4^1 = M - 0{,}60 \cdot Q + 7{,}86 \cdot S$	$P_4^1 = 0{,}990 \cdot Q + 0{,}160 \cdot S$	$S_4^1 = 0{,}160 \cdot Q - 0{,}990 \cdot S$
5	$M_5^1 = M - 0{,}15 \cdot Q + 3{,}94 \cdot S$	$P_5^1 = 0{,}999 \cdot Q + 0{,}082 \cdot S$	$S_5^1 = 0{,}082 \cdot Q - 0{,}999 \cdot S$
6	$M_6^1 = M -$	$P_6^1 = 1{,}000 \cdot Q$	$S^1 = \ldots\ldots - 1{,}000 \cdot S$

4° Determinazione del valore delle incognite.

I due mezzi archi, considerati separatamente, si deformano sotto l'azione delle forze loro applicate; ma le deformazioni devono essere tali, che la sezione alla chiave dell'uno combaci sempre colla sezione alla chiave dell'altro. Perciò si hanno le tre condizioni geometriche seguenti:

1ª e 2ª. — *Gli spostamenti orizzontali e verticali del centro della chiave del semiarco a sinistra devono essere rispettivamente uguali e di segno contrario agli spostamenti analoghi del centro della chiave pel semiarco a destra.*

3ª — *La rotazione della sezione alla chiave pel semiarco di sinistra deve essere uguale e di segno contrario alla rotazione della sezione alla chiave pel semiarco di destra.*

Si trovano i valori delle incognite M, S, Q, che soddisfano a queste tre condizioni, esprimendo il lavoro di deformazione di tutto l'arco in funzione delle dette incognite ed uguagliandone a zero le tre derivate rispettto alle medesime.

Ora, se si chiamano

E il coefficiente di elasticità del ferro

$\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_6$ le aree delle sezioni 0, 1, 2, ... 6 dell'arco

$I_0, I_1, I_2, \ldots I_0$ i momenti d'inerzia delle medesime

e si rammenta che la lunghezza di ciascun tronco misurata sull'asse dell'arco è di metri 3,964, si ha, per esprimere il lavoro di deformazione dell'arco intiero (trascurando come pochissimo influente la parte dovuta allo scorrimento trasversale) la formola seguente

$$\frac{3,964}{2E}\frac{1}{3}\left(\frac{M_0^2+M'^2_0}{I_0}+4\frac{M_1^2+M'^2_1}{I_1}+2\frac{M_2^2+{}_2M'^2}{I_2}+4\frac{M_3^2+M'^2_3}{I_3}+\right.$$

$$\left.+2\frac{M_4^2+{}_4M'^2}{I_4}+4\frac{M_5^2+M'^2_5}{I_5}+\frac{M_6^2+M'^2_6}{I_6}\right)$$

$$+\frac{3,964}{2E}\left(\frac{1}{2}\frac{P_0^2+P'^2_0}{\Omega_0}+\frac{P_1^2+P'^2_2}{\Omega_1}+\frac{P_2^2+P'^2_2}{\Omega_2}+\frac{P_3^2+P'^2_3}{\Omega_3}+\right.$$

$$\left.+\frac{P_4^2+P'^2_4}{\Omega_4}+\frac{P_5^2+P'^2_5}{\Omega_5}+\frac{1}{2}\frac{P_6^2+P'^2_6}{\Omega_6}\right)$$

ossia dividendola pel fattor numerico $\frac{3,964}{2E}$, il che non altera le equazioni, che se ne otterranno in seguito uguagliandone a zero le derivate rispetto ad M, Q, S

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{3}\left(\frac{M_0^2+M'_0{}^2}{I_0}+4\frac{M_1^2+M'_1{}^2}{I_1}+2\frac{M_2^2+M'_2{}^2}{I_2}+4\frac{M_3^2+M'_3{}^2}{I_3}+\right.\\
&\left.+2\frac{M_4^2+M'_4{}^2}{I_4}+4\frac{M_5^2+M'_5{}^2}{I_5}+\frac{M_6^2+M'_6{}^2}{I_6}\right)+\\
&+\left(\frac{1}{2}\frac{P_0^2+P'_0{}^2}{\Omega_0}+\frac{P_1^2+P'_1{}^2}{\Omega_1}+\frac{P_2^2+P'_2{}^2}{\Omega_2}+\frac{P_3^2+P'_3{}^2}{\Omega_3}+\right.\\
&\left.+\frac{P_4^2+P'_4{}^2}{\Omega_4}+\frac{P_5^2+P'_5{}^2}{\Omega_5}+\frac{1}{2}\frac{P_6^2+P'_6{}^2}{\Omega_6}=\right.\\
&=\sum\frac{M^2+M'^2}{I}+\sum\frac{P^2+P'^2}{\Omega}\ (*)
\end{aligned}\right\}\ (233).$$

L'altezza delle sezioni dell'arco (*Fig.* 58ª e 59ª, *tav.* VIII) diminuisce dalle imposte verso la chiave, ma all'infuori dell'anima le cui altezze nelle sezioni 0, 1, 2,. . . 6, sono scritte nella figura, tutti gli altri ferri componenti l'arco corrono tutto lungo il medesimo sempre colle stesse dimensioni.

Nella seguente tabella si hanno i valori tanto delle aree quanto dei momenti d'inerzia delle sezioni sopradette, ed inoltre i logaritmi dei loro reciproci, i quali servono pel calcolo della formola (233).

Sezione	Aree delle Sezioni	Momenti d'inerzia delle Sezioni	Complementi logaritmici delle aree	Complementi logaritmici dei momenti d'inerzia
1	2	3	4	5
0	$\Omega_0=0{,}039\,024$	$I_0=0{,}022\,582$	1,408 668 2	1,646 237 6
1	$\Omega_1=0{,}037\,224$	$I_1=0{,}018\,779$	1,429 177 0	1,726 327 5
2	$\Omega_2=0{,}035\,666$	$I_2=0{,}015\,822$	1,447 745 6	1,860 738 6
3	$\Omega_3=0{,}034\,464$	$I_3=0{,}013\,754$	1,462 634 3	1,861 571 0
4	$\Omega_4=0{,}033\,624$	$I_4=0{,}012\,409$	1,473 350 6	1,906 263 2
5	$\Omega_5=0{,}033\,144$	$I_5=0{,}011\,675$	1,479 595 1	1,932 743 1
6	$\Omega_6=0{,}033\,024$	$I_6=0{,}011\,498$	1,481 170 3	1,939 377 7

(*) La seconda sommatoria non è fatta colla formola del Simpson, ma calcolando l'integrale col metodo della semisomma delle ordinate alle estremità

Sostituendo ora nella formola (233) ad M_0, M_0'; M_1, M_1', ecc., P_0, P_0'; P_1, P_1', ecc.: i loro valori in funzione di M, Q, S dati dalle tabelle 1ª e 2ª del paragrafo 3, e ad I_0, I_1, ... Ω_0, Ω_1, ... i loro valori numerici contenuti nella precedente, ed eseguendo tutte le operazioni numeriche, nel che si ottiene molta regolarità e semplicità coll'uso dei logaritmi, si ha (i termini indipendenti dalle incognite si possono trascurare perchè scomparirebbero eseguendo la derivazione)

$$\Sigma\frac{M^2+M'^2}{I}=\frac{1}{3}\left(\frac{M_0^2+M_0'^2}{I_0}+4\frac{M_1^2+M_1'^2}{I_1}+\ldots+\frac{M_6^2+M_6'^2}{I_6}\right)=$$

$$=843{,}51\cdot M^2-1\,247{,}51\cdot 2MQ+81\,961\,733\cdot 2M+3\,686{,}7\cdot Q^2-$$

$$-240\,653\,093\cdot 2Q+126\,101\,S^2-1\,354\,367\,066\cdot 2S$$

$$\Sigma\frac{P^2+P'^2}{\Omega}=\frac{1}{2}\frac{P_0^2+P_0'^2}{\Omega_0}+\frac{P_1^2+P_1'^2}{\Omega_1}+\ldots+\frac{1}{2}\frac{P_6^2+P_6'^2}{\Omega_6}=$$

$$=322{,}5\cdot Q^2+1\,494\,668\cdot 2Q+24\cdot S^2-555\,444\cdot 2S$$

onde la formola (233) diventa

$$\left.\begin{aligned}&843{,}51\cdot M^2-1\,247{,}51\cdot 2MQ+81\,961\,733\cdot 2M+\\&+4\,009{,}2\cdot Q^2-239\,158\,425\cdot 2Q+\\&+126\,125\cdot S^2-1\,354\,922\,510\cdot 2S\end{aligned}\right\}(234).$$

Uguagliando a zero le derivate di quest'espressione rispetto ad M, Q, S, si ottengono le tre equazioni seguenti:

$$843{,}51\cdot M-1\,247{,}51\cdot Q+81\,961\,733=0$$

$$-1\,247{,}51\cdot M+4\,009{,}2\cdot Q-239\,158\,425=0$$

$$126\,125\cdot S-1\,354\,922\,510=0$$

ove è da notare che le due prime contengono soltanto le due incognite M e Q, e la terza contiene soltanto la S.

---

di ogni intervallo elementare. Nella *Théorie des systèmes élastiques* di Castigliano invece è stato usato il metodo di Simpson. I due libri, trattando lo stesso caso, portano gli stessi risultati, sebbene il metodo di calcolo sia alquanto diverso.

Da queste tre equazioni si ricava

$$M=-16\ 527 \qquad Q=54\ 523 \qquad S=10\ 743.$$

5° Curva delle pressioni, massimi sforzi del ferro per metro quadrato e abbassamento alla chiave tenendo conto del peso permanente e del sopraccarico tanto a sinistra quanto a destra della chiave.

In questo caso il carico essendo simmetrico si ha $S=0$ di più, se si prescinde dal peso permanente e si tien conto del solo sopraccarico su tutto il ponte, si ha alla chiave

$$M=-16\ 527\times 2=-33\ 054$$

$$Q=54\ 523\times 2=109\ 046.$$

Ora, il solo sopraccarico è di Kg. 2600 per metro lineare, mentre il carico completo compreso il peso permanente è di Kg. 3520, quindi per quest'ultimo caso si ha

$$M=-33\ 054\times\frac{3520}{6200}=-44\ 749;$$

$$Q=109\ 046\times\frac{3520}{2600}=147\ 626.$$

Conoscendo così il momento di flessione e la spinta alla chiave nel caso considerato ed inoltre il peso distribuito sul ponte, è facile calcolare il momento di flessione, la pressione normale e lo sforzo di taglio in ciascuna delle sezioni 0, 1, 2, ... 6. Dividendo i momenti di flessione per le corrispondenti pressioni normali si ottengono le distanze dei centri di pressione dai centri delle sezioni (Num. 72); infine per mezzo della formola (195) a pagina 246,

$$\frac{P}{\Omega}\pm\frac{Mv}{I}$$

nella quale P, M rappresentano la pressione normale ed il momento di flessione in una sezione qualunque, ed Ω, I, v l'area, il momento d'inerzia e la semialtezza della sezione medesima, si ottengono le massime pressioni per metro quadrato all'intradosso e all'estradosso nelle sezioni 0, 1, 2, ... 6. Tutti questi risultati sono raccolti nella seguente tabella:

Sezioni 1	Momenti di flessione 2	Pressioni normali 3	Sforzi di taglio 4	Curva delle pressioni 5	Pressioni per mq. all'intrad. 6	Pressioni per mq. all'estrad. 7
0	+91 387	169 924	—5 788	0,538	8 401 300	307 500
1	+63 807	163 657	—6 901	0,390	7 539 600	1 253 600
2	+31 527	158 444	—6 755	0,199	6 155 900	2 728 700
3	— 719	154 082	—6 101	—0,005	4 428 467	4 513 133
4	—24 626	150 673	—4 223	—0,163	2 943 300	6 018 900
5	—39 584	148 656	—1 961	—0,266	1 925 300	7 044 900
6	—44 755	147 648	0	—0,303	1 551 700	7 390 300

Se si vuole trovare l'abbassamento dell'arco alla chiave, si farà uso della formola (173) (Num. 72, pag. 222)

$$\eta=\frac{3,964}{E}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{M_0x_0}{I_0}+4\frac{M_1x_1}{I_1}+2\frac{M_2x_2}{I_2}+\ldots+4\frac{M_5x_5}{I_5}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{2}\frac{P_0\operatorname{sen}\phi_0}{\Omega_0}+\frac{P_1\operatorname{sen}\phi_1}{\Omega_1}+\ldots+\frac{P_5\operatorname{sen}\phi_5}{\Omega_5}\right)\right]\text{(*)}$$

in cui $x_0, x_1, x_2, \ldots x_5$ sono le distanze orizzontali dei centri delle sezioni 0, 1, 2, ... 5 dal piano verticale passante per la chiave; e $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots \phi_5$ sono gli angoli di quelle sezioni con questo piano.

Sostituendo in questa formola ai momenti di flessione $M_0, M_1, M_2, \ldots$ e alle pressioni normali $P_0, P_1, P_2, \ldots$ i loro valori contenuti nell'ultima tabella, ad $x_0, x_1, x_2, \ldots$ $\operatorname{sen}\phi_0, \operatorname{sen}\phi_1, \operatorname{sen}\phi_2, \ldots$ i loro valori risultanti dalla figura, e infine ad $I_0, I_1, I_2, \ldots$ $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \ldots$ i loro valori sopra riportati, si ottiene

$$\frac{1}{3}\left(\frac{M_0x_0}{I_0}+4\frac{M_1x_1}{I_1}+2\frac{M_2x_2}{I_2}+\ldots+4\frac{M_5x_5}{I_5}\right)=110\ 212\ 000$$

$$\frac{1}{2}\frac{P_0\operatorname{sen}\phi_0}{\Omega_0}+\frac{P_1\operatorname{sen}\phi_1}{\Omega_1}+\ldots+\frac{P_5\operatorname{sen}\phi_5}{\Omega_5}=6\ 220\ 000$$

quindi, prendendo $E=18\ 000\ 000\ 000$, risulta $\eta=0^m, 0\ 26$.

(*) Per la seconda sommatoria vale l'osservazione fatta precedentemente a pagina 284.

6° Curva delle pressioni e massimi sforzi del ferro per metro quadrato tenendo conto del peso permanente e supponendo il sopraccarico soltanto sulla metà sinistra del ponte.

In questo caso il valore di M, Q, S sono le somme di quelli che si avrebbero pel solo carico permanente e pel solo sopraccarico sulla metà sinistra del ponte. Ora pel solo carico permanente si avrebbe

$$M = -33\,054 \times \frac{920}{2600} = -11\,696$$

$$Q = 109\,046 \times \frac{920}{2600} = 38\,585$$

$$S = 0$$

e pel solo sopraccarico sulla sinistra si avrebbero i valori trovati nel numero 4, dunque, nel caso che qui si considera, si avrà

$$M = -11\,696 - 16\,527 = -28\,223$$

$$Q = 38\,585 + 54\,523 = 93\,108$$

$$S = 10\,743.$$

Conoscendosi ora il momento di flessione, la pressione normale e lo sforzo di taglio alla chiave, è facile calcolare le tre quantità analoghe per le sezioni 0, 1, 2 . . . ; e dividendo i momenti di flessione per le pressioni normali corrispondenti si otterranno le distanze dei centri di pressione dai centri delle sezioni (Num. 72). Si compongono così le seguenti tabelle:

I. Mezzo arco di sinistra

Sezioni 1	Momenti di flessione 2	Pressioni normali 3	Sforzi di taglio 4	Curva delle pressioni 5
0	+153 498	116 223	—21 257	1,321
1	+ 75 498	109 001	—18 112	0,693
2	+ 10 336	103 045	—13 681	0,100
3	— 36 924	98 322	— 8 538	—0,375
4	— 59 725	94 976	— 2 311	—0,629
5	— 57 206	93 307	+ 4 300	—0,612
6	— 28 228	93 125	+10 743	—0,303

II. Mezzo arco di destra

Sezioni 1	Momenti di flessione 2	Pressioni normali 3	Sforzi di taglio 4	Curva delle pressioni 5
0	— 38 218	98 112	+13 964	—0,389
1	+ 4 991	97 444	+ 9 467	0,051
2	+ 29 434	96 824	+ 5 160	0,304
3	+ 36 017	96 044	+ 842	0,375
4	+ 28 660	95 090	— 3 016	0,301
5	+ 7 273	94 215	— 6 774	0,077
6	— 28 228	93 125	—10 743	—0,303

Confrontando questa tabella con quella data al numero precedente vedesi che i massimi momenti di flessione sono molto minori nel caso del sopraccarico da ambedue le parti, che nel caso del sopraccarico da una parte sola. La massima pressione del ferro per metro quadrato è in questo ultimo caso

$$\frac{116223}{0{,}039024}+\frac{153498\times 1{,}00}{0{,}022582}=9\ 775\ 000,$$

valore notevolmente maggiore di quello ottenuto pel caso del sopraccarico completo.

La massima tensione tangenziale ha luogo nella sezione 0 a sinistra ove lo sforzo di taglio ha il massimo valore. Avendosi per tale sezione

$$G_0=\frac{1}{8}\Big(0{,}250\times 2{,}024^2-0{,}038\times 2{,}000^2-0{,}176\times 1{,}976^2-$$

$$-0{,}024\times 1{,}80^2\Big)=0{,}013397\ (*)$$

$$I_0=0{,}022\ 582$$

la massima tensione tangenziale per metro quadrato nella sezione 0 sarà

$$\frac{21257\times 0{,}013397}{0{,}022582\times 0{,}012}=1\ 050\ 900.$$

7° Effetti delle variazioni di temperatura.

Supponiamo che l'arco sia stato messo in opera alla temperatura t, alla quale esso aveva esattamente le dimensioni necessarie per potersi posare sulle spalle senza che nascessero altre forze elastiche all'infuori di quelle provenienti dal proprio peso e dai carichi.

Se fosse libero alla temperatnra t', è chiaro che l'arco avrebbe una forma *geometricamente simile* a quella iniziale, cosicchè l'angolo delle due sezioni estreme sarebbe esattamente lo stesso nei due casi, ma la distanza fra i centri delle sezioni medesime invece di essere = metri $\frac{45{,}000+46{,}846}{2}=45{,}923$, come

(*) Momento statico dell'area resistente formante il nucleo superiore od inferiore della sezione trasversale della trave (Num. 75, pag. 254)

è la distanza fra i centri dei piani d'imposta, presenterebbe un eccesso = metri $\frac{45{,}923}{82500}(t'-t)$, essendo $\frac{1}{82500}$ il coefficiente di dilatazione del ferro. Quindi se l'arco dovesse essere messo in opera alla temreratura t', ciò non potrebbe farsi senza che si generassero nell'arco delle forze elastiche, indipendenti dal peso proprio e dai carichi, dovute unicamente all'aumento di temperatnra $t'-t$.

Ora il lavoro di deformazione dell'arco, dovuto al momento di flessione M ed alle forze Q, S applicate alla chiave, è dato dalla formola (234) del paragrafo 4; moltiplicandola per $\frac{3{,}964}{2E}$ e sopprimendovi i termini di primo grado rispetto ad M, Q, S, i quali dipendono dai carichi, ossia esso è espresso dalla formola

$$\frac{3{,}964}{2E}\left(843{,}51\cdot M^2-1247{,}51\cdot 2MQ+4009{,}2\cdot Q^2+126125\cdot S^2\right).$$

Per trovare i valori di M, Q, S, dovuti unicamente all'aumento $t'-t$ della temperatura, bisogna aggiungere a quest'espressione del lavoro di deformazione il termine $-\frac{45{,}923}{82500}(t'-t)\cdot Q$, e poscia uguagliare a zero le derivate rispetto ad M, Q, S. Moltiplicando le tre equazioni, che così si ottengono, pel fattor numerico

$$\frac{E}{3{,}964}$$

ed avvertendo che se si prende

$$E=18\ 000\ 000\ 000$$

si ha

$$\frac{E}{3{,}964}\times\frac{45{,}923}{82500}=2\ 534\ 000$$

le tre equazioni sopradette diventano

$$843{,}51\cdot M-1247{,}51\cdot Q=0$$

$$-1\ 247{,}51\cdot M+4\ 009{,}2\cdot Q=2\ 534\ 000\ (t'-t)$$

$$126\ 125\cdot S=0.$$

Dall'ultima di queste tre equazioni si ha subito $S=0$, il che potevasi prevedere, giacchè le variazioni di temperatura, producendo lo stesso effetto nelle due metà dell'arco, non possono dar luogo ad alcuno sforzo di taglio nella sezione alla chiave.

Dalle altre due equazioni si trae

$$M=1743\,(t'-t)$$

$$Q=1171\,(t'-t).$$

Ottenuti così i valori di M, Q, S si sostituiranno nella tabella seconda del paragrafo 3, cioè in quella relativa al mezzo arco scarico, e si troverà il momento di flessione, la pressione normale e lo sforzo di taglio per ciascuna delle sezioni 0, 1, 2 . . . Si compone così la seguente tabella:

Sezioni	Momenti di flessione	Pressioni normali	Sforzi di taglio
1	2	3	4
0	$M_0^1=-4\,533\cdot(t'-t)$	$P_0^1=1\,047\cdot(t'-t)$	$S_0^1=539\cdot(t'-t)$
1	$M_1^1=-2613\cdot(t'-t)$	$P_1^1=1\,084\cdot(t'-t)$	$S_1^1=454\cdot(t'-t)$
2	$M_2^1=-1\,044\cdot(t'-t)$	$P_2^1=1\,117\cdot(t'-t)$	$S_2^1=369\cdot(t'-t)$
3	$M_3^1=\ 163\cdot(t'-t)$	$P_3^1=1\,143\cdot(t'-t)$	$S_3^1=277\cdot(t'-t)$
4	$M_4^1=-1\,040\cdot(t'-t)$	$P_4^1=1\,159\cdot(t'-t)$	$S_4^1=187\cdot(t'-t)$
5	$M_5^1=\ 1\,567\cdot(t'-t)$	$P_5^1=1\,170\cdot(t'-t)$	$S_5^1=\ 96\cdot(t'-t)$
6	$M_6^1=-1\,743\cdot(t'-t)$	$P_6^1=1\,171\cdot(t'-t)$	$S_6^1=\ 0$

Se la temperatura media alla quale l'arco è stato messo in opera è di 15°, e se i limiti entro i quali la temperatura può variare sono di $+40°$ e $-10°$, è chiaro che volendo considerare questi due casi estremi bisognerà nel primo porre

$$t'-t=40-15=25$$

e nel secondo

$$t'-t=-10-15=-25.$$

Basterà qui esaminare quest'ultimo, giacchè allora i momenti di flessione sono positivi presso le imposte e negativi presso la chiave, come quelli ottenuti nel caso del sopraccarico completo, o per la metà a sinistra del ponte, quando questa sola è sopraccarica.

Ponendo dunque

$$t' - t = -25$$

e sommando i risultati con quelli ottenuti nel paragrafo 6 per la metà sinistra del ponte, si compone la tabella seguente:

Mezzo arco di sinistra

Sezioni	Momenti di flessione	Pressioni normali	Sforzi di taglio	Curva delle pressioni
1	2	3	4	5
0	267 923	90 048	— 34 732	+ 2,975
1	140 823	81 901	— 29 522	+ 1,719
2	36 436	75 120	— 22 906	+ 0,484
3	— 40 999	69 747	— 15 463	— 0,587
4	— 85 725	66 001	— 6 986	— 1,298
5	— 96 331	64 057	+ 1 900	— 1,503
6	— 72 803	63 850	+ 10 743	— 1,124

Si vede da questa tabella quanto sia grande l'influenza delle variazioni di temperatura nei ponti in ferro ad imposte piane. Il momento di flessione alle imposte, che è di Kg. 153498 alla temperatura media, sale a Kg. 267923 nella stessa ipotesi di sopraccarico quando la temperatura discende a —10°. La massima pressione del ferro per metro quadrato ha luogo all'intradosso nella sezione d'imposta ed è di Kg.

$$\frac{90\ 048}{0{,}039\ 024} + \frac{266\ 823 \times 1{,}00}{0{,}022\ 582} = 14\ 122\ 000$$

onde segue che l'arco dovrebbe essere rinforzato all'intradosso presso le imposte.

La pressione massima dell'estradosso nella stessa sezione è

$$\frac{90\ 048}{0{,}039\ 024} - \frac{266\ 823 \times 1{,}00}{0{,}022\ 582} = -9\ 508\ 000$$

ossia una forte tensione.

8° **Conclusione.**

Segue da questi risultati che l'arco tende a staccarsi dalle spalle presso l'estradosso, e tutta la pressione tende portarsi sullo spigolo d'intradosso. Quindi, affinchè il ponte si comportasse come incastrato nelle spalle, bisognerebbe produrre artificialmente l'incastro, il che non è punto facile, se si tien conto del grande valore del momento di flessione alle imposte.

Intanto quel che importa osservare si è che gli archi di piccola monta ad imposte piane, i quali nella mente dei costruttori dovrebbero comportarsi come archi incastrati alle imposte, in generale non si comportano come tali, ma si staccano dalle spalle presso l'estradosso e tutta la pressione si porta presso l'intradosso, ove le murature riescono perciò facilmente schiacciate. Ciò spiega perchè gli ingegneri inglesi, che han fatto più di tutti uso di simili archi, si son trovati costretti ad abbandonarli, specialmente a cagione del rapido deperimento della muratura delle spalle. Perciò ora gli archi in ferro si fanno generalmente con imposte cilindriche.

Finalmente le formole del numero 73 possono servire a determinare in una travatura le forze incognite in generale, e, nel caso particolare di un arco fissato agli appoggi mediante cerniere, permettono di calcolare facilmente il valore della spinta orizzontale Q, che si sviluppa nelle medesime. Impiegando i simboli usati al numero 73 lo spostamento orizzontale del punto B (*Fig.* 56ª, *tav.* VII) dell'arco ADB, qualora esso fosse libero di muoversi nel senso AB sotto l'influenza dei carichi esterni P', sarebbe dato da

$$\delta'_B = \sum \Delta s \left[\frac{X'(X^B)}{EA} + \frac{F'(F^B)}{GA} + \frac{M'(M^B)}{EI} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} P_i (\delta_B)_i = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \sum \Delta s \left[\frac{(X^i)(X^B)}{EA} + \frac{(F^i)(F^B)}{GA} + \frac{(M^i)(M^B)}{EI} \right].$$

Sotto l'influenza della sola spinta orizzontale Q la deformazione $(\delta_B)_Q$ sarebbe data da

$$(\delta_B)_Q = Q(\delta_B)_B = Q \sum \left[\frac{(X^B)^2}{EA} + \frac{(F^B)^2}{GA} + \frac{(M^B)^2}{EI} \right] \Delta s.$$

In causa del vincolo imposto la somma delle due deformazioni deve essere uguale allo zero quindi $\delta'_B = -(\delta_B)_Q$, ossia

$$\left.\begin{aligned} -Q = \frac{\sum \Delta s \left[\frac{X'(X^B)}{EA} + \frac{F'(F^B)}{GA} + \frac{M'(M^B)}{EI}\right]}{\sum \Delta s \left[\frac{(X^B)^2}{EA} + \frac{(F^B)^2}{GA} + \frac{(M^B)^2}{EI}\right]} = \\ = \sum_{i=1}^{i=n} P_i \frac{(\delta_B)_i}{(\delta_B)_B} = \sum_{i=1}^{i=n} P_i V_i \end{aligned}\right\} \quad (235)$$

in cui V_i sono coefficienti indipendenti dai carichi, che hanno relazione soltanto colla forma della trave e coi punti i e B che si considerano, e che possono quindi essere calcolati prima di passare a studiare l'effetto dei varî carichi agenti sulla travatura.

La stessa formola può essere ottenuta applicando il teorema di Menabrea, che in questo caso sussiste perchè si debbono considerare vincoli indipendenti, nei quali si sviluppano reazioni che non producono lavoro. Usando ancora i simboli indicati al numero 73 il lavoro di deformazione L di tutto il sistema sotto l'influenza dei carichi P' e della spinta Q è dato da

$$L = \frac{1}{2} \sum \Delta s \left[\frac{[X' + Q(X^B)]^2}{EA} + \frac{[F' + Q(F^B)]^2}{GA} + \frac{[M' + Q(M^B)]^2}{EI}\right].$$

Pel teorema di Menabrea dovendo essere allo stato di equilibrio $\frac{dL}{dQ} = o$ si ricava la seguente equazione

$$\sum \Delta s \left[\frac{X'(X^B)}{EA} + \frac{F'(F^B)}{GA} + \frac{M'(M^B)}{EI}\right] +$$

$$+ Q \sum \Delta s \left[\frac{(X^B)^2}{EA} + \frac{(F^B)^2}{GA} + \frac{(M^B)^2}{EI}\right] = o$$

da cui

$$-Q = \frac{\sum \left[\frac{X'(X^B)}{EA} + \frac{F'(F^B)}{GA} + \frac{M'(M^B)}{EI}\right] \Delta s}{\sum \left[\frac{(X^B)^2}{EA} + \frac{(F^B)^2}{GA} + \frac{(M^B)^2}{EI}\right] \Delta s} \quad (235)$$

espressione uguale a quella ottenuta superiormente applicando il teorema di correlazione.

In modo analogo si determinerebbero i momenti di incastro se le sezioni estreme dell'arco fossero incastrate in *A* ed in *B*. È quasi inutile aggiungere che la risoluzione di questi problemi può ottenersi anche ricorrendo al teorema di reciprocità oppure al principio di MAXWELL ed a quello della sovrapposizione degli effetti (*); quanto è stato detto nei numeri precedenti non lascia alcun dubbio sul modo, col quale i predetti teoremi debbono essere applicati.

80. Travature composte. — Due o più travature rese solidali e riunite fra loro in un modo qualsiasi formano un sistema, che prende il nome di travatura composta (Num. 62), si dicono poi travi componenti o membrature i varî solidi, che la costituiscono. Se le membrature sono riunite mediante articolazioni o cerniere il sistema prende il nome di travatura composta articolata od anche semplicemente di sistema articolato; se invece le unioni sono rigide allora dicesi che il sistema è ad incastro: se in un sistema si usano i due modi di congiunzione allora esso dicesi ad unioni miste. Le travature composte poi, siano esse articolate od incastrate, si distinguono nelle seguenti categorie:

a) Si dicono *travature combinate* quando le diverse membrature sono così congiunte fra loro che le deformazioni dei punti dell'una sono solidali con quelle dei punti dell'altra (*Fig.* 62ª e 63ª, *tav.* IX) oppure quando questa condizione si verifica per molte sezioni delle membrature medesime.

b) Si dicono *travature composte a connessione semplice* o *semplicemente connesse* quei sistemi, nei quali ogni membratura è congiunta per le sue sezioni estreme soltanto ad un'altra membratura (*Fig.* 65ª, 66ª e 67ª, *tav.* IX). Tali travature prendono anche il nome di *catene di travi* o *di sbarre* e, secondo il modo di unione, si dicono rigide oppure articolate.

c) Si chiamano *travature composte a connessione multipla* od anche *travature reticolari* quei sistemi, in cui le varie membrature sono ancora riunite soltanto nelle loro sezioni estreme, ma in ogni punto d'unione o *nodo* concorrono più di due membrature (*Fig.* 64ª, *tav.* IX): secondo il modo col quale sono fatte le unioni

---

(*) MÜLLER-BRESLAU, *Die neuren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen.* — CERADINI, *Annali della Società degli ingegneri ed architetti italiani*, Anno IV, 1889, fasc. VI. Alla fine del numero 78 è stato risoluto con questo metodo il problema della determinazione delle reazioni incognite in una travatura continua.

delle varie membrature la travatura reticolare dicesi articolata oppure ad unioni o nodi rigidi.

d) Finalmente se un sistema di travi presenta varie od anche tutte le modalità accennate superiormente allora esso prende il nome di *travatura composta complessa* od anche semplicemente di *travatura complessa.*

Se si pone mente alla difficoltà (e per certi materiali potrebbe quasi dirsi all'impossibilità) di ottenere unioni perfettamente rigide e che rimangano tali per molto tempo anche sotto l'influenza della variazione degli sforzi provocata da condizioni diverse di carico, ed alla maggiore complicazione portata nei calcoli di resistenza per la considerazione di un numero maggiore di elementi, cioè i momenti d'incastro, si comprende facilmente perchè gli ingegneri sogliono di preferenza considerare sistemi articolati. Nella costruzione effettiva dei sistemi calcolati come articolati non sempre si fanno nei nodi delle vere cerniere (giunti sferici nello spazio), ma sovente le varie membrature si innestano oppure si inchiodano le une colle altre. Ciò però in generale non recherà danno della stabilità del sistema, poichè il momento d'incastro ordinariamente non ha un grande valore, oppure, funzionando come coppia resistente o passiva, spesso tenderà a diminuire le deformazioni e quindi dà garanzie di maggior stabilità (*). Nei casi poi in cui il momento d'incastro possa avere un'influenza attiva predominante e dannosa allora bisognerà tenerne conto oppure costruire effettivamente le unioni ad articolazione (**).

Il calcolo di una travatura composta riesce in generale più prolisso di quello di una trave semplice, esso però si conduce cogli stessi criterî. Se il sistema è staticamente determinato, cioè se il numero delle reazioni incognite provenienti dai vincoli interni (importati dalla compagine del sistema) od esterni (punti o sezioni fisse od obbligate a muoversi in modi determinati) non supera il numero delle condizioni imposte dalla statica dei corpi rigidi, allora esse possono essere determinate indipendentemente dalla teoria dell'equilibrio dei corpi elastici e quindi anche dalle dimensioni, che avranno le varie membrature, che compongono il sistema. Calcolate le forze incognite, colle formole del numero 64 e tenendo presente quanto è stato detto ai numeri 72 e 77 si potranno rappresentare le caratteristiche meccaniche nelle sezioni delle varie

---

(*) Winkler, *Vorträge über Brückenbau.* Seconda edizione, cap. VI.

(**) Un esempio si avrebbe considerando una travatura continua riposante sopra colonne elastiche ed unita ad incastro colle medesime. Vedi la seconda parte di quest'opera.

travi componenti e quindi passare ad assegnare le dimensioni convenienti ad ogni membratura in base ad un determinato valore delle costanti, dipendenti dalla natura del materiale, che entrano nell'equazione di coesione (Num 74). Determinati gli sforzi agenti in ogni sezione di ogni singola membratura le formole dei numeri 67, 68, 69 permettono di valutare le deformazioni e risolvere completamente la questione. La determinazione delle deformazioni di un punto può esser ottenuta anche dal teorema sulle derivate del lavoro (Num. 38), basterà per questo supporre applicato nel punto, di cui si cerca la deformazione, una forza arbitraria Q, calcolare il lavoro di deformazione di tutto il sistema sotto l'influenza delle forze date e della forza ausiliaria Q, indi prenderne la derivata rispetto a questa stessa forza Q; il valore di questa funzione, quando in essa si sia fatto $Q=o$, dà la deformazione cercata.

Finalmente la deformazione di un punto si può ottenere immediatamente col mezzo delle formole (184), (190) e (191) dedotte dal teorema di correlazione (Num. 73), che permettono di calcolare lo spostamento δ'_k di un punto qualsiasi del sistema, ed anche applicando a questi sistemi il teorema di reciprocità (Num. 39), specialmente per la determinazione delle deformazioni quando si debbono considerare diverse ipotesi di carico.

Se il numero delle reazioni incognite sviluppate dai vincoli interni od esterni imposti al sistema supera quello delle condizioni di equilibrio fornite dalla statica dei corpi rigidi, ossia se il sistema non è staticamente determinato, allora prima di passare al calcolo degli sforzi agenti nelle sezioni trasversali delle varie membrature bisogna determinare il valore delle forze incognite. Ciò si fa come già si è indicato al numero 77 applicando il metodo delle deformazioni, cioè ponendo la somma delle deformazioni prodotte dalle forze agenti sul sistema (note ed incognite, esprimendo quest'ultime col mezzo di simboli algebrici) uguale al valore della deformazione permessa dai vincoli, sia che tali deformazioni siano state calcolate sommando le deformazioni elementari (Num. 67, 68, 69) oppure col mezzo delle formole (184), (190) e (191) dedotta dal teorema di correlazione (Num. 73), oppure cercando le equazioni necessarie nelle proprietà del lavoro di deformazione, le cui derivate rispetto alle forze incognite (simboleggiate con lettere) debbono essere uguali alla deformazione permessa nel punto, in cui esse sono applicate. Finalmente si potrà ricorrere al teorema di Menabrea (Num. 40 e 54) tutte le volte che si verificano le condizioni necessarie e sufficienti perchè esso abbia luogo.

Se le sezioni delle varie membrature sono date non vi è difficoltà alcuna a fare questi calcoli, che ordinariamente hanno per scopo

operazioni di verifica di stabilità, o di collaudo. La cosa riesce alquanto più difficile quando si tratti di risolvere problemi relativi ad operazioni per progetto, poichè allora sono appunto incognite le aree trasversali delle varie sezioni ed i loro momenti d'inerzia, che sarebbe necessario conoscere per la determinazione delle forze incognite. Nel caso delle travature semplici si fa un calcolo di prima approssimazione supponendo la sezione costante ed in base ai risultati di questo si assegnano le sezioni resistenti, che si correggono in seguito mediante successive approssimazioni, finchè due risultati consecutivi differiscono meno delle quantità, che si ritengono apprezzabili (in un progetto di massima può bastare il primo calcolo; raramente si va oltre al secondo). Altre volte si assumono le sezioni della travatura in base ai risultati dell'esperienza, al senso pratico del costruttore e finalmente procedendo per confronto con costruzioni analoghe, che si trovino nelle stesse condizioni, e partendo da questi dati si fa un primo calcolo, che se dà risultati analoghi a quelli scelti si riguarda come definitivo, se conduce invece a risultati notevolmente diversi, allora si applica il metodo delle successive approssimazioni come precedentemente. Per le travature composte si può evidentemente seguire lo stesso procedimento, se non chè la soverchia lunghezza dei calcoli necessarî per risolvere tali problemi sconsiglia in generale gli ingegneri dal ricorrere all'uso dei sistemi composti staticamente indeterminati, ciò va inteso specialmente pel caso in cui l'indeterminazione è dovuta a vincoli interni e non sono possibili ipotesi abbastanza approssimate, che permettano di determinare le forze incognite col solo uso della statica dei sistemi. Essi non usano in genere tali sistemi senza evidente necessità o convenienza, anche per evitare costruzioni troppo complesse, e spesso, per semplificare i calcoli, accettano ipotesi attendibili ed opportune che diano garanzia di non condurre ad errori superiori ai limiti tollerati. Tali appunto sono le ipotesi, che si fanno circa la distribuzione degli sforzi nel calcolo delle pareti a graticcio delle grandi travi in ferro ed in quello dei sistemi reticolati multipli (Vedi nella parte seconda i capitoli relativi a questi argomenti).

81. Travature combinate. — Come applicazione delle cose dette nel numero precedente alla determinazione delle forze incognite nelle travature combinate riportiamo due esempi svolti nella supposizione che si voglia fare un calcolo di prima approssimazione.

Supponiamo il caso di un canape flessibile attaccato in A ed in B (*Fig.* 62ª, *tav.* IX) e di una travatura ad asse rettilineo, riposante in C ed in D sopra due appoggi fissi, ed immaginiamo che

i due sistemi siano collegati fra loro mediante aste verticali v_1, v_2, v_3, ... v_n, che per brevità di esposizione supporremo indeformabili.

Sia Ω l'area della sezione del canape nel punto più basso F, ed $\Omega' = \Omega \frac{ds}{dx}$ la sua area in un punto qualsiasi del canape, siano CD e CA gli assi delle x e delle y, I il momento d'inerzia di una sezione della trave CD, M_p il momento delle forze, che gravitano su CD, M_q il momento delle forze, che agiscono nei tiranti v_1, v_2, v_3, ... v_n, presi rispetto ad una determinata sezione d'ascissa x, η l'ordinata dell'asse del canape AFB rispetto alla orizzontale AB, α l'angolo che la tangente all'asse del canape fa all'asse delle x, Q la tensione orizzontale nel canape, T la tensione in un punto qualsiasi del medesimo, M il momento di tutte le forze, che agiscono sopra la trave CD. Per una nota proprietà dei poligoni funicolari

$$M_q = Q\eta, \qquad T = Q\frac{ds}{dx}$$

quindi

$$M = M_p - M_q = M_p - Q\eta$$

ed il lavoro di deformazione di tutto il sistema, trascurando l'effetto degli sforzi taglianti, sarà dato da (Num. 64, form. 130)

$$L = \frac{1}{2}\left[\int_0^{2a} \frac{Q^2 \sec^2\alpha}{E\Omega \frac{ds}{dx}} \frac{ds}{dx} dx + \int_0^{2a} \frac{M^2}{EI} dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{2a} \frac{Q^2 \sec^2\alpha}{E\Omega} dx + \int_0^{2a} \frac{(M_p - Q\eta)^2}{EI} dx\right].$$

Le reazioni non producendo lavoro esterno, per l'equilibrio dovrà essere $\frac{dL}{dQ} = 0$, ossia L prendere un valor minimo in corrispondenza dello stato di equilibrio (teorema di Menabrea, Num. 40 e 54) quindi

$$Q\int_0^{2a} \frac{\sec^2\alpha}{E\Omega} dx + Q\int_0^{2a} \frac{\eta^2}{EI} = \int_0^{2a} \frac{M_p \eta}{EI} dx \qquad (236)$$

equazione dalla quale si può ricavare il valore dell'incognita Q.

Allo stesso risultato si arriva impiegando il metodo delle deformazioni, ossia ponendo la variazione $\Delta\eta$ dell'ordinata η del canape uguale all'abbassamento y' della trave ad asse rettilineo CD (*). Infatti dalla relazione $ds^2=dx^2+d\eta^2$ prendendo la variazione risulta

$$d\Delta x=d(\Delta s)\frac{ds}{dx}-d(\Delta\eta)\frac{d\eta}{dx} \qquad (237).$$

La solidarietà fra le due travature importa che sia $\Delta\eta=y'$, inoltre le formole (125) (Num. 64) e (154) (Num. 69) danno

$$d(\Delta s)=ids=\frac{Q\frac{ds}{dx}}{E\Omega\frac{ds}{dx}}\frac{ds}{dx}dx$$

$$\frac{d^2y'}{dx^2}=\frac{M}{EI}=\frac{M_p-Q\eta}{EI}$$

quindi integrando la (237) ed osservando che $\int_0^{2a} d(\Delta x)$ è necessariamente zero perchè i punti A, B, C, D sono fissi, rimane

$$\int_0^{2a} d(\Delta s)\frac{ds}{dx}=\int_0^{2a} dy'\frac{d\eta}{dx}=dy'(-\eta)-\int_0^{2a}(-\eta)\frac{d^2y'}{dx^2}dx$$

$dy'\eta\Big\}_0^{2a}$ è evidentemente uguale allo zero, perchè i punti C e D sono fissi, quindi, sostituendo ai simboli algebrici i loro valori in funzione delle forze,

$$\int_0^{2a}\frac{Q\left(\frac{ds}{dx}\right)^2}{E\Omega}dx=\int_0^{2a}\frac{(M_p-Q\eta)\eta}{EI}dx$$

e poichè

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=\sec^2\alpha$$

(*) Müller-Breslau, *Gazzetta della Società degli ingegneri ed architetti d'Annover*, 1881.

si ottiene come precedentemente

$$Q\int_0^{2a}\frac{\sec^2\alpha}{E\Omega}dx+Q\int_0^{2a}\frac{\eta^2}{EI}dx=\int_0^{2a}\frac{M_p\eta}{EI}dx. \qquad (236)$$

e finalmente

$$Q=\frac{\displaystyle\int_0^{2a}\frac{M_p\eta}{EI}dx}{\displaystyle\int_0^{2a}\frac{\eta^2}{EI}dx+\int_0^{2a}\frac{\sec^2\alpha}{E\Omega}dx} \qquad (238).$$

Supponiamo ora che una trave ad asse rettilineo (*Fig.* 63ª, *tav.* IX) riposante liberamente sugli appoggi C e D sia riunita con aste verticali v_1, v_2, . . . v_n, che per semplicità supporremo indeformabili, ad una trave ad arco AFB fissata con cerniere ai suoi estremi in A ed in B. Sia $AB=2a$ la corda dell'arco, la direzione AB l'asse delle x ed AC quello delle y, A_1 ed I_1 l'area ed il momento d'inerzia di una sezione nella trave CD, A_2 ed I_2 le stesse quantità relativamente ad una sezione dell'arco, M il momento flettente nella trave CD, μ quello dell'arco AFB, M_p il momento delle forze attive sulla trave, M_q il momento delle reazioni, che si sviluppano nelle aste v_1, v_2, . . . v_n, Q la reazione orizzontale in A ed in B; dalla figura appare che $M=M_p-M_q$, $\mu=M_q-Qy$.

Le forze che agiscono sul sistema ammettono un'ergale e le reazioni non producono lavoro esterno, quindi nel caso dell'equilibrio stabile, il lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze esterne dovrà essere un minimo e saranno uguali a zero le sue derivate rispetto a Q e ad M_q. L'arco AFB in generale sarà ribassato e si potrà ritenere con sufficiente approssimazione $ds=dx$, quindi il lavoro di deformazione risulta, trascurando l'effetto dello sforzo di taglio F e della componente normale X (Num. 58)

$$L=\frac{1}{2}\left[\int_0^{2a}\frac{M^2}{EI_1}dx+\int_0^{2a}\frac{\mu^2}{EI_2}dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2a}\frac{M_p^2-2M_pM_q+M_q^2}{EI_1}dx+\frac{1}{2}\int_0^{2a}\frac{M_q^2-2QM_qy+Q^2y^2}{EI_2}dx$$

da cui derivando

$$\frac{dL}{dM_q}=-\int_0^{2a}\frac{M_p}{EI_1}dx+\int_0^{2a}\frac{M_q}{EI_1}dx+\int_0^{2a}\frac{M_q}{EI_2}dx-Q\int_0^{2a}\frac{y}{EI_2}dx=0$$

$$\frac{dL}{dQ}=-\int_0^{2a}\frac{M_q y}{EI_2}dx+Q\int_0^{2a}\frac{y^2}{EI_2}dx=0.$$

La prima equazione $\frac{dL}{dM_q}=0$ si deve verificare tanto se si considera tutta la trave come un tronco qualsiasi, quindi sarà

$$\frac{M_q}{EI_1}+\frac{M_q}{EI_2}=\frac{M_p}{EI_1}+Q\frac{y}{EI_2}$$

da cui

$$M_q=\frac{I_2}{I_1+I_2}M_p+\frac{I_1}{I_1+I_2}Qy$$

e quindi

$$M=\frac{I_1}{I_1+I_2}(M_p-Qy)\qquad \mu=\frac{I_2}{I_1+I_2}(M_p-Qy).$$

Nella equazione $\frac{dL}{dQ}=0$ sostituendo ad M_q il suo valore si ottiene, considerando I_1 ed I_2 come costanti,

$$\frac{I_2}{I_1+I_2}\int_0^{2a}\frac{M_p y}{EI_2}dx-\frac{I_1}{I_1+I_2}Q\int_0^{2a}\frac{y^2}{EI_2}dx+Q\int_0^{2a}\frac{y^2}{EI_2}dx=0$$

e finalmente

$$Q=\frac{E\frac{1}{(I_1+I_2)}\int_0^{2a}M_p y\,dx}{E\frac{1}{(I_1+I_2)}\int_0^{2a}y^2dx}=\frac{\int_0^{2a}M_p y\,dx}{\int_0^{2a}y^2dx}\qquad (239).$$

Lo stesso risultato si sarebbe ottenuto applicando il metodo delle deformazioni, oppure quello delle derivate del lavoro (*).

Se si volesse tener conto anche dell'effetto della componente normale X allora la formola che dà Q riesce alquanto più complessa, ma il modo di ricavarla è ancora il medesimo; è facile dimostrare che la spinta Q_1, che si ottiene, è uguale alla spinta Q data dalla (239) moltiplicata per un coefficiente di correzione dipendente dalla forma delle travature, che compongono il sistema; basta per questo nell'espressione di Q_1 mettere in evidenza il fattore

$$Q = \frac{\int_0^{2a} M_p y\,dx}{\int_0^{2a} y^2\,dx}.$$

82. Travature composte semplicemente connesse. — Difficilmente si incontrano in pratica sistemi composti appartenenti a questa categoria colle unioni rigide o ad incastro formati di molte membrature. In generale non è facile che sia superato il numero di tre membrature ed ordinariamente se ne incontrano soltanto due, come avviene appunto nelle incavallature a semplici puntoni e negli archi a sesto acuto. Ciascuna delle membrature, che compongono uno di questi sistemi, può e deve essere riguardata come una trave semplice vincolata nelle sue sezioni estreme, e le caratteristiche meccaniche per ogni sezione vanno calcolate tenendo conto dei momenti e sforzi, che nella sezione estrema rappresentano l'effetto della connessione. Se tutte le forze esterne attive e passive agenti sul sistema sono staticamente determinate, allora, incominciando da una estremità della travatura, sarà facile calcolare per ogni sezione di ciascuna membratura le caratteristiche meccaniche con uno dei procedimenti svolti al numero 72 e quindi valutare la sezione resistente necessaria per ogni trave componente e le deformazioni impiegando rispettivamente le formole dei numeri 63 e 64 e quelle dei numeri 67, 68 e 69 o 73.

Se il sistema non è staticamente determinato, ossia se è necessario ricorrere alle proprietà dell'equilibrio dei corpi elastici per determinare alcune delle forze esterne, e più precisamente alcune delle reazioni sviluppate in causa dei vincoli imposti alla travatura,

(*) Müller-Breslau, *Civilingenieur*, 1883.

allora bisogna applicare uno qualsiasi dei procedimenti generali indicati al numero 80. Rappresentate mediante simboli algebrici le forze incognite, si ponga l'espressione della deformazione del punto vincolato, calcolata colle formole del numero 67 o meglio con quelle del numero 73, uguale alla deformazione effettivamente permessa dal vincolo, ricavandone così tante equazioni lineari quante sono le incognite, ossia il numero necessario e sufficiente per risolvere la questione. Si potrà anche ricorrere al metodo delle derivate del lavoro di deformazione, oppure al teorema di MENABREA, quando si verificano le condizioni necessarie perchè esso sussista nel caso preso in esame, determinando le incognite coi procedimenti già ripetutamente esposti. Non sembra necessario di dare un esempio numerico relativo al calcolo di questi sistemi, non presentando esso nessuna particolarità notevole. Se si dovessero eseguire i calcoli relativi alla determinazione delle condizioni di resistenza e delle deformazioni di un arco a sesto acuto (*Fig.* 65ª, *tav.* IX) volendo applicare il metodo di CASTIGLIANO essi verrebbero condotti in modo analogo a quello indicato nell'esempio numerico riportato a pagina 279. Prese come incognite il momento flettente, la componente normale e la componente tangenziale corrispondente alla sezione σ_6, si determinerebbero in modo analogo le caratteristiche meccaniche delle altre sezioni $\sigma_0, \sigma_1 \ldots \sigma_5, \sigma'_0, \sigma'_1 \ldots \sigma'_5$ e, calcolata l'espressione del lavoro di deformazione, si ricaverebbe il valore delle incognite dalle tre equazioni, che si ottengono ponendo uguali allo zero le derivate del lavoro stesso prese rispetto a queste tre quantità.

Un'osservazione che bisogna sempre aver presente nel calcolo di questi sistemi è quella che le sezioni, in cui sono fatte le unioni ad incastro delle diverse membrature, debbono essere riguardate come sezioni singolari e quindi tali che in esse, e nel tronco di trave adiacente per una lunghezza comparabile alle sue dimensioni trasversali, le formole di elasticità e resistenza danno risultati poco esatti e solo largamente approssimati, e che nella sezione d'unione possono essere anche sensibilmente lontani dal vero (Num. 62). Sarà quindi prudente nel progettare questi sistemi rinforzare notevolmente le sezioni, in cui sono fatte le unioni, prendendo norma dal senso pratico del costruttore, da dati empirici e sopra tutto dal confronto con altre costruzioni analoghe in buone condizioni di resistenza (*).

(*) Mancando altri criterî potrà sempre servire utilmente quello di prendere in questi punti per le formole di resistenza (Num. 64) il limite dei carichi permanenti sensibilmente inferiore a quello assunto per la travatura in corrispondenza alle sezioni poste in condizioni ordinarie.

Se invece il sistema è articolato, supponendo le articolazioni senza attrito, il momento della resistenza è nullo, e nullo dovrà essere quindi il momento delle forze agenti sul sistema rispetto all'articolazione, cioè la risultante di queste forze dovrà passare per l'articolazione stessa. Se si numerano progressivamente le varie articolazioni, la risultante di tutte le forze agenti sulle membrature, che s'incontrano prima dell'articolazione k^{esima}, dovrà passare per lo stesso nodo k; ne risulta come conseguenza che, se si costruisce il poligono delle risultanti delle forze agenti sulle varie membrature, il poligono articolato formato dalle travi elementari componenti il sistema dovrà essere inscritto nel poligono delle risultanti (*Fig.* 66ª, *tav.* IX).

Questo criterio è sufficiente per risolvere il seguente problema: *Date le forze* P ($P_1, P_2, \ldots P_n$) *agenti sui lati di una catena articolata e la lunghezza dei suoi lati trovare la forma del poligono allo stato di equilibrio.* Sia R_1 (*Fig.* 66ª, *tav.* IX) la risultante delle forze agenti sul primo lato del poligono articolato, sulla medesima si scelga arbitrariamente la posizione dell'estremo B del primo lato AB, poi colla lunghezza data BC come raggio si descriva un circolo (una sfera nello spazio), che tagli in C la risultante di R_1 e delle forze P_2 agenti sul secondo lato, BC sarà il secondo lato del poligono articolato e così di seguito si potrà tracciare la posizione di tutti gli altri lati. È evidente che potendo scegliere ad arbitrio la posizione del punto B e del primo lato, il problema ammette infinite soluzioni; non vi è che il caso, in cui i lati del poligono articolato siano soltanto due e vincolati ad essere articolati a due punti fissi A e B (*Fig.* 67ª, *tav.* IX), che il problema ammette due sole soluzioni (quando però la somma delle distanze da nodo a nodo sia superiore alla distanza fra i due punti fissi A e B) perchè in un sistema di coordinate bipolari due punti corrispondono agli stessi raggi vettori. È però raro in pratica che la questione si presenti nel modo posto superiormente e quindi la soluzione del problema non è così facile. Avviene spesso che le forze esterne dipendono dalla posizione dei lati del poligono invece di essere assolutamente determinate, esse possono comprendere anche reazioni di punti fissi, la cui ricerca si legherebbe con quella della forma del poligono stesso. Le ipotesi potendo variare all'infinito ci limiteremo a riportare un esempio solo, che è quello che quasi unicamente interessa l'ingegnere, cioè considereremo una catena di travi a membrature rettilinee, giacente tutta in un piano verticale, soggetta a carichi pure verticali ed agenti nello stesso piano, fissata a cerniera in A e B ai suoi estremi in due punti determinati;

finalmente supporremo i carichi distribuiti in modo uniforme rispetto alla proiezione orizzontale della catena stessa.

Siano S e D le reazioni verticali sviluppate nei punti A e B

Q e Q' le reazioni orizzontali sviluppate negli stessi punti

x ed y le coordinate di un nodo qualsiasi rispetto a due assi ortogonali passanti per A e diretti l'uno verticalmente e l'altro in senso orizzontale (*Fig.* 68ª, *tav.* IX)

$2a$ la distanza misurata nel senso dell'asse delle x del punto A dal punto B.

Le equazioni della statica dei corpi rigidi danno

$$\Sigma P - S - D = o \qquad Q + Q' = o \qquad \Sigma P x - 2Da = o$$

cioè le reazioni verticali S e D sono le stesse, che si avrebbero in una trave orizzontale caricata dei pesi P e riposante liberamente sovra due punti A e B distanti fra loro $2a$, e le reazioni orizzontali Q e Q' sono uguali e di segno contrario. L'equazione poi d'equilibrio alla rotazione riferita ad un nodo qualsiasi di coordinate x ed y dà

$$Dx - Qy - \frac{1}{2} p x^2 = o \tag{240}$$

da cui si conclude che i vertici o nodi della catena si trovano tutti sopra una medesima parabola rappresentata dall'equazione (240). La determinazione della costante Q, necessaria per conoscere completamente la parabola (240) dipende da altri dati particolari della questione, ordinariamente dalla conoscenza di un nodo per cui essa debba passare.

Se il numero dei lati della catena aumenta, diminuendo contemporaneamente la loro lunghezza, al limite essa viene a coincidere con un canape flessibile, e, poichè i vertici o nodi della catena (in questo caso infinitamente vicini) debbono sempre cadere sul poligono delle risultanti, la curva d'equilibrio verrà a coincidere colla funicolare o curva delle risultanti, la cui teoria viene svolta completamente nei trattati ordinarî di statica grafica ed analitica. Nel caso studiato superiormente essa verrebbe a coincidere colla parabola corrispondente alla equazione (240).

I calcoli relativi alla resistenza e deformazione di ogni membratura in generale riesciranno assai facili, poichè, essendo note tutte le forze ed il poligono delle risultanti, ognuna di essa si trova nelle condizioni di una trave semplice soggetta a forze determinate, quindi il problema rientra in uno dei casi studiati precedentemente (Num. 72). Nell'ipotesi particolare che i carichi

siano applicati ai nodi il poligono articolato coincide evidentemente con quello delle risultanti, poichè allo stato d'equilibrio il primo deve essere inscritto nel secondo, ed ogni membratura non sopporta che sforzi di tensione oppure di compressione. Questa circostanza si verifica sempre nel caso dell'equilibrio di canapi flessibili soggetti a carichi determinati.

83. Travature composte a connessione multipla. Sistemi articolati. — Questi sistemi, ordinariamente detti travature reticolari, sono molto usati dagli ingegneri e constano di travi componenti quasi sempre ad asse rettilineo, dette *barre* od *aste*, riunite per le loro estremità nei punti di concorso, che si distinguono col nome di *nodi*. La figura, che risulterebbe considerando le linee assi delle membrature componenti ed i loro punti di concorso, porta il nome di *schema geometrico* della travatura reticolare. Se le unioni delle varie membrature fossero rigide, qualunque fosse il numero delle medesime, la travatura sarebbe indeformabile; colle unioni articolate non può dirsi la stessa cosa e, se la posizione di ogni nodo non è ben fissata e geometricamente determinata, le varie parti della medesima sono suscettibili di prendere posizioni relative notevolmente diverse, dando origine a quei sistemi, che si dicono *deformabili*.

L'elemento noto o che si suole assegnare nelle travature reticolari (direttamente od indirettamente fissando la posizione dei nodi) è la lunghezza delle sue barre ed a seconda del numero delle medesime il sistema dicesi

a barre deficienti se il loro numero non basta ad impedire gli spostamenti relativi delle varie parti della travatura

a barre sufficienti se esso comprende il numero di membrature strettamente necessario per assicurare l'indeformabilità del sistema

a barre sovrabbondanti quando esistono membrature in più di quelle richieste per assicurare l'indeformabilità della travatura.

Ad eccezione di pochi casi, in cui si sogliono impiegare i canapi o le catene (per es., i ponti sospesi), agli ingegneri occorrono ordinariamente strutture, che abbiano forma ben determinata e stabile, quindi le travature della prima categoria non sono usate, ed è interessante conoscere i criterî, che fanno distinguere se ad un determinato schema geometrico corrisponde una travatura reticolare deformabile od indeformabile. Sia m il numero dei nodi, che compongono lo schema; perchè la posizione di ciascuno di essi sia determinata relativamente a punti o superficie date fisse nello spazio o mobili è necessario che per ognuno di essi siano note tre coordinate, od in generale tre quantità, quindi per m punti ne dovranno essere date $3m$. Se non chè i punti sono tutti connessi fra loro per ipotesi, per cui, a fissare la posizione del sistema

nello spazio occorreranno sei condizioni (3 nel piano) quindi *perchè una travatura reticolare sia a barre sufficienti è necessario che il numero delle medesime sia* $3m-6$ ($2m-3$ *nel piano*) *se* m *è il numero dei suoi nodi.*

Questa condizione però espressa così non è sufficiente a garantire l'indeformabilità della travatura, infatti (*Fig.* 69ª, *tav.* IX) supponiamo divisa in due parti la travatura mediante una sezione σ, in modo che k nodi restano alla sua sinistra e $(m-k)$ a destra. Se il numero delle barre che congiungono i k punti di sinistra fosse $3k-6+i$ ($2k-3+i$ nel piano) e quello delle barre, che riuniscono gli $(m-k)$ punti di destra $3(m-k)-6-i$ $\big(2(m-k)-$ $-3-i$ nel piano)$\big)$ è evidente che, tenendo conto del numero di condizioni necessarie a fissare la posizione del sistema, il numero totale delle barre è $3m-6$ ($2m-3$ nel piano), ma che la travatura non è indeformabile, perchè una sua parte conterrebbe i barre sovrabbondanti ed all'altra mancherebbero i barre per fissare la posizione di tutti i nodi. Questa considerazione mette in evidenza che il criterio per distinguere se una travatura reticolare è a barre sufficienti deve riconoscersi nella condizione *che il numero delle barre, che la compongono, sia* $3m-6$ ($2m-3$ *nel piano*) *indicando con* m *il numero dei nodi che essa contiene, e che separando dalla medesima con una sezione una sua porzione qualsiasi anche per questa, considerata come travatura reticolare indipendente, si verifichi la stessa condizione.*

Se il numero delle barre che compongono la travatura supera $3m-6$ ($2m-3$ nel piano) il sistema dicesi a barre sovrabbondanti, e precisamente si dice che contiene k barre sovrabbondanti se il numero delle medesime è $3m-6+k$ ($2m-3+k$ nel piano): più particolarmente poi diconsi sovrabbondanti quelle barre, che possono essere tolte dal sistema senza che esso cessi di essere indeformabile. La lunghezza di queste barre non può evidentemente essere scelta arbitrariamente, poichè debbono riunire due punti, la cui posizione relativa è già determinata e potrà sempre essere espressa in funzione delle lunghezze delle barre necessarie a fissare la posizione dei nodi. Se supponiamo una mensola composta di tre barre $B_1O=l_1$, $B_2O=l_2$, $B_3O=l_3$ (*Fig.* 70ª, *tav.* X) fissate nei punti B_1, B_2, B_3 ad una parete resistente in modo che $B_1B_2=B_2B_3=a$ e che B_1O sia orizzontale, è evidente chè una di queste barre è sovrabbondante e la sua lunghezza è esprimibile in funzione degli altri elementi, infatti dai triangoli B_1OB_2 B_2OB_3 si ricava

$$l_1^2=a^2+l_2^2-2al_2\cos A_1A_2O \qquad l_3^2=a^2+l_2^2+2al_2\cos A_1A_2O$$

e sommando si ottiene

$$2l_2^2+2a^2=l_1^2+l_3^2. \qquad (241).$$

In generale è noto che scelti cinque punti nello spazio (*) la loro posizione relativa è determinata quando siano note le lunghezze di $3m-6=9$ linee congiungenti i medesimi a due a due. Una decima congiungente l_{pq} qualsiasi ha necessariamente una lunghezza determinata esprimibile in funzione delle lunghezze delle nove barre necessarie ed è espressa dalla formola data da CAYLEY

$$\begin{vmatrix} 0, & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1, & l_{1,1}^2 & l_{1,2}^2 & l_{1,3}^2 & l_{1,4}^2 & l_{1,5}^2 \\ 1, & l_{2,1}^2 & l_{2,2}^2 & l_{2,3}^2 & l_{2,4}^2 & l_{2,5}^2 \\ 1, & l_{3,1}^2 & l_{3,2}^2 & l_{3,3}^2 & l_{3,4}^2 & l_{3,5}^2 \\ 1, & l_{4,1}^2 & l_{4,2}^2 & l_{4,3}^2 & l_{4,4}^2 & l_{4,5}^2 \\ 1, & l_{5,1}^2 & l_{5,2}^2 & l_{5,3}^2 & l_{5,4}^2 & l_{5,5}^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (242)$$

in cui $l_{p,q}$ esprime la lunghezza della barra, che unisce il punto p col punto q: naturalmente p e q sono numeri corrispondenti a quelli, coi quali si sono distinti i cinque punti, $l_{p,p}=0$ e $l_{pq}=-l_{q,p}$. Questa relazione fa comprendere la funzione fisica delle barre sovrabbondanti sulla compagine del sistema. Se non vi sono che le barre sufficienti e necessarie a stabilire l'indeformabilità della travatura, la lunghezza di una qualsiasi di queste può variare ed il sistema la segue liberamente. Ma se vi sono barre sovrabbondanti, ciò non può più farsi, perchè le lunghezze delle barre dipendono le une dalle altre, ne può farsi variare una sola barra senza renderla incompatibile con quelle, dalla lunghezza delle quali essa dipende. Le barre sovrabbondanti rappresentano quindi dei vincoli imposti al libero movimento dei nodi al variare della lunghezza dei lati dello schema della travatura, e li diremo vincoli interni o dipendenti dalla compagine del sistema, per distinguerli dai vincoli esterni, cioè dall'obbligo imposto a certi nodi di rimanere fissi o di muoversi su superficie determinate.

(*) CERRUTI, *Sistemi elastici articolati*, pag. 30.

Stabiliti questi concetti è facile vedere quando una travatura reticolata sia calcolabile col solo uso della statica dei corpi rigidi o, come suol dirsi, quando sia staticamente determinata, e quando invece sia necessario ricorrere alla teoria dell'equilibrio dei corpi elastici. Per applicare il principio delle velocità virtuali, (che, come è noto, contiene in sè tutti i teoremi della statica) (Num. 7) alla determinazione delle reazioni elastiche o sforzi agenti lungo le membrature di una travatura reticolare è necessario che, tolta questa membratura e sostituita con due forze applicate ai nodi, che essa riuniva, sia possibile dare nuovi spostamenti al sistema nei quali figuri il momento della forza corrispondente alla membratura tagliata (*). È evidente che se, levata la barra pq, i due nodi hanno ancora una posizione ben determinata e non possono allontanarsi od avvicinarsi, cioè se pq era una barra sovrabbondante, non è possibile dar al sistema spostamenti nuovi, nei quali entri il momento della reazione incognita T_{pq} opposta dalla barra pq, quindi la statica dei corpi rigidi non è sufficiente a determinare T_{pq}. Se invece la barra pq è una barra necessaria a mantenere l'indeformabilità del sistema, in guisa chè togliendola i punti p e q possono essere avvicinati od allontanati, allora la forza T'_{pq} entra nell'espressione del momento virtuale e può essere determinata ricorrendo soltanto alla statica ordinaria dei sistemi di forma invariabile. Da queste considerazioni risulta il teorema seguente:

Gli sforzi agenti sulle barre di una travatura reticolare articolata possono sempre essere determinati col solo uso della statica dei sistemi quando essa è a barre sufficienti, bisogna invece ricorrere alle proprietà dell' equilibrio elastico tutte le volte che la travatura stessa contiene membrature sovrabbondanti.

Ciò è reso evidente anche dalla considerazione seguente: ogni nodo per l'equilibrio dà luogo a tre condizioni (2 nel piano), per m punti si avranno $3m$ condizioni e, poichè 6 di queste servono ad assicurare l'equilibrio di tutto il sistema, restano disponibili $3m-6$ ($2m-3$ pel piano) condizioni od equazioni per determinare gli sforzi incogniti.

Superiormente si è trovato che il numero delle barre sufficienti ad assicurare l'indeformabilità di una travatura reticolare, che contenga m nodi, è $3m-6$ ($2m-3$ nel piano), (purchè questa relazione si verifichi in tutta la travatura ed in ogni sua parte)

(*) Levy, *La statique graphique et ses applications aux constructions*, Nota II.

quindi avendosi tante equazioni lineari quante sono le incognite, il problema sarà solubile in modo unico e può concludersi anche in base a questa considerazione che una travatura reticolare a barre sufficienti è sempre determinata staticamente.

84. Calcolo delle deformazioni e delle forze incognite nelle travature reticolari articolate. — Se la travatura reticolare è a barre sufficienti abbiamo visto che la statica dei sistemi permette di determinare tutte le forze agenti nelle varie barre. La sezione resistente conveniente a queste barre si assegna facilmente ricorrendo alle formole del numero 64 ed a completare la risoluzione del problema non resta che a determinare le deformazioni elastiche e più particolarmente gli spostamenti dei nodi e gli allungamenti ed accorciamenti delle singole barre. Ordinariamente le forze esterne si suppongono applicate nei nodi, in guisa che gli sforzi agenti lungo le barre hanno valore costante e quindi è anche costante la sezione trasversale delle medesime.

Siano

$1, 2, 3, \ldots k, i, \ldots p, q, \ldots n$ i nodi della travatura

$P(P_1, P_2, \ldots P_n)$, $P'(P'_1, P'_2, \ldots P'_n)$ e $P''(P''_1, P''_2, \ldots P''_n)$ tre sistemi diversi di forze agenti nei nodi della travatura e sotto l'influenza dei quali essa può rimanere in equilibrio

$u_p, v_p, w_p, u'_p, v'_p, w'_p, u''_p, v''_p, w''_p$ gli spostamenti paralleli agli assi coordinati di un nodo p qualsiasi sotto l'influenza del sistema P, oppure dei sistemi di forze P' e P''

l_{pq}, E_{pq}, A_{pq} la lunghezza, il modulo di elasticità e l'area resistente della barra pq, che unisce il punto o nodo p col nodo q; p e q possono avere tutti i valori da 1 fino ad n

$T_{pq}, T'_{pq}, T''_{pq}, \lambda_{pq}, \lambda'_{pq}, \lambda''_{pq}$ gli sforzi e le deformazioni corrispondenti ordinatamente alla barra pq sotto l'influenza delle forze P, P' e P''

(T_{pq}^{k}) (λ_{pq}^{k}) gli sforzi e le deformazioni corrispondenti alla barra pq quando sul sistema non agisce che una sola forza esterna unitaria nel nodo k^{esimo}

$\delta_k, \delta'_k, \delta''_k$ rispettivamente gli spostamenti del nodo k nella direzione della forza P_k, P'_k, P''_k

$(\delta_k)_{P_i}$ e $(\delta_k)_i$ gli spostamenti del nodo k quando sul sistema non agisce che un carico P_i oppure un carico unitario nel nodo i^{esimo}

x_p, y_p, z_p le coordinate del nodo p

$\alpha_{pq}, \beta_{pq}, \gamma_{pq}$ gli angoli che la direzione dell'asta o barra pq fa cogli assi coordinati

ε_{pq} il valore dell'espressione $\dfrac{E_{pq}A_{pq}}{\lambda_{pq}}$

e_{pq} il valore del prodotto $E_{pq}A_{pq}$.

È noto che la lunghezza l_{pq} della barra, che unisce il punto p col punto q, è espressa in funzione delle coordinate di questi due punti mediante la formola

$$l_{pq}=\sqrt{(x_q-x_p)^2+(y_q-y_p)^2+(z_q-z_p)^2}$$

dopo la deformazione l'asta pq avrà assunta la lunghezza

$$l_{pq}+\lambda_{pq}=\sqrt{[(x_q-x_p)+(u_q-u_p)]^2+[(y_q-y_p)^2+(v_q-v_p)]^2+}$$
$$+\overline{[(z_q-z_p)+(w_q-w_p)]^2}$$

da cui si ricava, trascurando i termini che contengono le potenze superiori delle differenze degli spostamenti perchè quantità infinitamente piccole,

$$l_{pq}+\lambda_{pq}=l_{pq}\sqrt{\left[1+2(u_q-u_p)\frac{x_q-x_p}{l_{pq}}+2(v_q-v_p)\frac{y_q-y_p}{l_{pq}}+\right.}$$
$$\left.+2(w_q-w_p)\frac{z_q-z_p}{l_{pq}}\right]$$

sviluppando in serie l'espressione compresa sotto il simbolo radicale, trascurando i termini che contengono le potenze superiori delle differenze degli spostamenti e togliendo il termine l_{pq} comune ai due membri, rimane

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{pq}&=(u_q-u_p)\frac{x_q-x_p}{l_{pq}}+(v_q-v_p)\frac{y_q-y_p}{l_{pq}}+(w_q-w_p)\frac{z_q-z_p}{l_{pq}}=\\&=(u_q-u_p)\cos\alpha_{pq}+(v_q-v_p)\cos\beta_{pq}+(w_q-w_p)\cos\gamma_{pq}\end{aligned}\right\}(243).$$

La formola di elasticità (Num. 64, form. 125) dà

$$i=\frac{d\delta s}{ds}=\frac{X}{EA}$$

$\frac{X}{EA}$ essendo costante per ipotesi in tutta la lunghezza della membratura si ricava

$$i=\frac{\delta ds}{ds}=\frac{X}{EA}=\frac{\lambda_{pq}}{l_{pq}}$$

e sostituendo ad X il valore corrispondente alla barra, che si considera

$$\left.\begin{aligned} T_{pq} = \frac{E_{pq} A_{pq}}{l_{pq}} \lambda_{pq} = \frac{E_{pq} A_{pq}}{l_{pq}} \Big[(u_q - u_p) \cos \alpha_{pq} + \\ + (v_q - v_p) \cos \beta_{pq} + (w_q - w_p) \cos \gamma_{pq} \Big] \end{aligned}\right\} \quad (244).$$

La formola poi di resistenza $X = RA$ permette di determinare le sezioni resistenti in tutte le sbarre, basta per questo porre

$$T_{pq} = R A_{pq} \quad (245).$$

Col mezzo di queste due formole, nel caso di travature a barre sufficienti, si può risolvere completamente il problema costruttivo, poichè la (245) permette di assegnare le dimensioni delle varie parti, e l'insieme delle equazioni analoghe alla (244) danno gli spostamenti componenti paralleli agli assi di ciascun nodo. Infatti le equazioni analoghe alla (244) sono $3m-6$ nello spazio e $2m-3$ nel piano e tutte lineari; effettivamente gli spostamenti dovrebbero essere $3m$ nello spazio e $2m$ nel piano, ma poichè essi entrano nelle formole per le loro differenze e che è necessario fissare la posizione del sistema dopo la deformazione, così sei di essi nello spazio e tre nel piano possono essere scelti ad arbitrio ed il numero delle vere incognite si riduce a $3m-6$ nello spazio e $2m-3$ nel piano; cioè a tante quante sono le equazioni ed il problema è solubile ed univocamente solubile.

Invece di ricorrere al gruppo di equazioni analoghe alla (244), che in generale conducono a calcoli lunghi e laboriosi si possono adoperare per la determinazione delle deformazioni le formole (190) e (191) ricavate al numero 73 e che derivano dal teorema di correlazione. Si è infatti trovato che colle convenzioni fatte la deformazione δ'_k prodotta in un senso determinato dalla direzione, che si fissa ad una forza unitaria applicata al nodo k, e corrispondente ad un sistema P' di carichi è data da

$$\delta'_k = \sum \frac{T'_{pq} (T_{pq}^{k})}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq} = \sum_{i=1}^{i=n} P_i (\delta_k)_i \quad (246)$$

quindi, valutati gli sforzi nelle barre nelle due ipotesi di carico oppure i coefficienti $(\delta_k)_i$, il calcolo della deformazione δ'_k riesce oltremodo facile, richiedendo poche e semplici operazioni numeriche.

Finalmente si potrà supporre applicata nel punto k una forza arbitraria Q e calcolare l'espressione del lavoro L di deformazione che, indicando con a, b, c dei coefficienti numerici, riescirà $L=aQ^2+bQ+c$ ed allora lo spostamento δ'_k sarà dato da

$$\delta'_k=\left(\frac{dL}{dQ}\right)_{Q=o}=\left(2aQ+b\right)_{Q=o}=b \qquad (247).$$

Le deformazioni di una travatura reticolare possono facilmente essere ottenute anche componendo i movimenti dovuti alle deformazioni corrispondenti alle diverse barre che la compongono con formole analoghe a quelle determinate per le travature semplici ai numeri 30 e 67. Supponiamo per semplicità che la travatura reticolare abbia gli assi di tutte le sue membrature giacenti nel piano, in cui agiscono le forze che la sollecitano, sia (*Fig.* 72ª, *tav.* X) O_1x ed O_1y due assi coordinati ortogonali e rappresentino A e B due sistemi qualsiansi riuniti fra loro in modo invariabile mediante barre articolate alle loro estremità; per quanto è stato detto al numero 83 esse saranno necessariamente tre (una quarta sarebbe sovrabbondante) $r\,s$, $t\,v$, $p\,q$. Se ad una di queste barre, per es. $p\,q$, si fa subire un leggero aumento o diminuzione di lunghezza λ, supposto fisso il sistema A, il sistema B prova un leggero spostamento che si riduce ad una rotazione infinitesima intorno al centro di istantanea rotazione O. Il centro O è necessariamente il punto d'incontro delle altre due barre $r\,s$, $t\,v$ convenientemente prolungate, perchè le barre $r\,s$ e $t\,v$ non potendo avere altro movimento che di rotazione intorno ai punti r e t sono necessariamente normali alle traiettorie percorse dai loro punti estremi s e v. Conveniamo di indicare il punto O col nome di polo corrispondente alla barra $p\,q$ ed indichiamo con h la lunghezza della normale condotta dal polo O alla direzione dell'asse della barra pq, con ds_q l'arco descritto dal punto q durante il movimento infinitesimo portandosi in q'. Si tiri pq' e sia $pq_1=pq$ e q_2 il piede della perpendicolare abbassata dal punto q sulla direzione della $p\,q'$, le lunghezze $q\,q'$ e $q\,q_1$ essendo infinitamente piccole si potrà sostituire all'arco la corda, e, detto α l'angolo che ds_q fa colla direzione $p\,q$, risulta

$$q_1q_2=pq\,\text{sen}\,\widehat{qpq'}\,\text{tang}\,\widehat{qpq'}$$

$$q'q_2=\frac{qq_2}{\text{tang}\,\alpha}=\frac{pq\,\text{sen}\,\widehat{qpq'}}{\text{tang}\,\alpha}.$$

Queste formole dimostrano come $q_1 q_2$ sia trascurabile rispetto a $q' q_2$, quindi si potrà scrivere con sufficiente approssimazione

$$\lambda = q' q_1 = q' q_1 + q_1 q_2 = q' q_2 = d s_q \cos \alpha .$$

Detta ρ la distanza del punto q dal polo O, la rotazione infinitesima θ è data da

$$\theta = \frac{q q'}{\rho} = \frac{d s_q}{\rho} = \frac{\lambda}{r \cos \alpha} = \frac{\lambda}{h}.$$

Se si indicano con x ed y le coordinate del polo, con x', y' le coordinate di un punto qualsiasi (nodo) del sistema B, con $\Delta x'$, $\Delta y'$ i suoi spostamenti paralleli agli assi, con ω la rotazione di un elemento lineare mn passante pel punto (x', y') in causa delle osservazioni fatte al numero 30 intorno alla composizione dei movimenti infinitesimi dei sistemi dovrà essere

$$\Delta(\Delta x') = -(y' - y)\frac{\lambda}{h}$$

$$\Delta(\Delta y') = (x' - x)\frac{\lambda}{h}$$

$$\Delta \omega = \frac{\lambda}{h}.$$

Se si suppone ora che subiscano variazioni di lunghezza λ_{pq} tutte le barre del sistema, ed inoltre che un punto (nodo) A_0 $(x_0 y_0)$ del sistema A in causa di un movimento generale impresso alla travatura subisca degli spostamenti u_0 e v_0 paralleli agli assi delle x e delle y e che una retta passante per A_0 (una barra) ruoti per lo stesso motivo di un angolo θ_0, gli spostamenti totali paralleli agli assi coordinati e la rotazione totale ω corrispondenti al punto (x', y') ed all'elemento lineare mn saranno dati come al numero 30 da

$$\left.\begin{aligned} \Delta x' &= u_0 - (y' - y_0)\theta_0 - \Sigma (y' - y)\frac{\lambda}{h} \\ \Delta y' &= v_0 + (x' - x_0)\theta_0 + \Sigma (x' - x)\frac{\lambda}{h} \\ \omega &= \theta_0 + \Sigma \frac{\lambda}{h}. \end{aligned}\right\} \quad (248).$$

In queste formole le sommatorie vanno estese a tutte le barre, che si trovano da una stessa parte di una sezione fatta in vicinanza del punto che si considera diretta in modo che tagli le barre, per le quali il punto stesso è reso solidale (direttamente od indirettamente) con una delle estremità della trave, e che variando di lunghezza farebbero variare la posizione del punto rispetto alla estremità della travatura. Infatti se il punto subisce spostamenti essi saranno dovuti alle barre, che stanno fra un estremo fisso della travatura ed il punto stesso, e non alle deformazioni delle barre che vengono in seguito.

Gli allungamenti od accorciamenti λ delle barre si compongono di due termini, uno dovuto alla deformazione elastica e rappresentato da $\lambda_{pq}=\frac{T_{pq}\,l_{pq}}{E_{pq}\,A_{pq}}$, l'altro dovuto alle variazioni di temperatura rappresentato da $\tau\,l_{pq}$, se si conviene di indicare con τ il coefficiente di dilatazione unitario del materiale di cui è composta ogni barra per una determinata variazione di temperatura, per cui

$$\lambda_{pq}=\left(\frac{T_{pq}}{E_{pq}\,A_{pq}}+\tau_{pq}\right)l_{pq}\,.$$

Se si sostituisce a λ questo valore nelle (248) si ottiene

$$\left.\begin{aligned}
\Delta x' &= u_0-(y'-y_0)\theta_0-\Sigma(y'-y)\left(\frac{T_{pq}}{E_{pq}\,A_{pq}}+\tau_{pq}\right)l_{pq}\\
\Delta y' &= v_0+(x'-x_0)\theta_0+\Sigma(x'-x)\left(\frac{T_{pq}}{E_{pq}\,A_{pq}}+\tau_{pq}\right)l_{pq}\\
\omega &= \theta_0+\Sigma\left(\frac{T_{pq}}{E_{pq}\,A_{pq}}+\tau_{pq}\right)l_{pq}
\end{aligned}\right\}\qquad(249)$$

in cui p e q corrispondono agli estremi di una barra qualsiasi. La direzione degli assi essendo arbitraria, si può avere facilmente l'allungamento od accorciamento subìto da una barra rs facendo coincidere col suo asse la direzione dell'asse delle x. In tale ipotesi

$$y'=y_0=0,\qquad \theta_0=0$$

e rimane, detto λ_{rs} l'allungamento cercato,

$$\lambda_{rs}=\Delta x'-u_0=\Sigma\left(\frac{T_{pq}}{E_{pq}\,A_{pq}}+\tau_{pq}\right)y\,l_{pq}.\qquad(250).$$

La formola (249) dando gli spostamenti paralleli agli assi di un punto qualsiasi e la rotazione di un determinato elemento lineare, permettono di risolvere qualsiasi problema relativo alle deformazioni elastiche nel piano ed alla variazione di lunghezza delle barre quando siano note le dimensioni delle varie barre, gli sforzi agenti nelle medesime, la natura del materiale, le variazioni di temperatura e le costanti E_{pq}, u_o, v_o e θ_o; nei problemi particolari, come si è già osservato al numero 67 (Pag. 196) queste ultime (direttamente od indirettamente) sono sempre determinate.

Passando ad esaminare una travatura reticolare in cui il numero delle reazioni incognite non sia staticamente determinato distinguiamo due casi:

a) Le reazioni incognite provengono da vincoli interni

b) Le reazioni incognite provengono da vincoli esterni.

Nel primo caso il problema può essere risoluto nei seguenti modi:

Se nelle $3m-6$ equazioni fornite dalla statica dei corpi rigidi (Num. 83) in luogo delle reazioni T_{pq} si pongono i loro valori in funzione degli spostamenti dei nodi

$$T_{pq}=\varepsilon_{pq}\lambda_{pq}=\varepsilon_{pq}[(u_q-u_p)\cos\alpha_{pq}+(v_q-v_p)\cos\beta_{pq}+(w_q-w_p)\cos\gamma_{pq}]$$

si possono determinare gli spostamenti di tutti i nodi, e quindi i volori λ_{pq} degli allungamenti delle singole barre, da cui poi si ricavano immediatamente i valori degli sforzi agenti nelle barre per mezzo della relazione

$$T_{pq}=\frac{E_{pq}A_{pq}}{l_{pq}}\lambda_{pq}=\varepsilon_{pq}\lambda_{pq}. \qquad (251).$$

Si è visto al numero precedente che la lunghezza di una barra sovrabbondante è funzione della lunghezza delle barre necessarie ad assicurare l'indeformabilità del sistema; supponiamo che vi siano k barre sovrabbondanti, allora si avranno k equazioni di relazione fra le lunghezze delle barre del sistema. Siano

$$F_1=0 \quad F_2=0 \quad \ldots \quad F_k=0$$

queste equazioni; in causa delle deformazioni elastiche le lunghezze l delle varie barre subiscono una variazione λ infinitesima, le funzioni superiori subiranno pure una variazione; ma poichè il sistema è connesso anche dopo la deformazione, così quelle

relazioni sussisteranno anche dopo che i valori l_{pq} siano stati cangiati in $l_{pq}+\lambda_{pq}$, cioè sarà

$$\frac{dF_1}{d\lambda_{1,2}}\lambda_{1,2}+\frac{dF_1}{d\lambda_{1,3}}\lambda_{1,3}+\ldots=0$$

$$\frac{dF_2}{d\lambda_{1,2}}\lambda_{1,2}+\frac{dF_2}{d\lambda_{1,3}}\lambda_{1,3}+\ldots=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dF_k}{d\lambda_{1,2}}\lambda_{1,2}+\frac{dF_2}{d\lambda_{1,3}}\lambda_{1,3}+\ldots=0.$$

Se in queste equazioni in luogo di λ_{pq} si mette il suo valore in funzione delle reazioni T_{pq} ricavato dalla (251), ossia se si pone in esse

$$\lambda_{1,2}=\frac{T_{1,2}}{E_{1,2}A_{1,2}}l_{1,2} \qquad \lambda_{1,3}=\frac{T_{1,3}}{E_{1,3}A_{1,3}}l_{1,3}$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_{pq}=\frac{T_{pq}}{E_{pq}A_{pq}}l_{pq}.$$

Si ottengono k equazioni di primo grado, che congiunte alle $3m-6$ equazioni fornite dalla statica, danno in totale $3m-6+k$ equazioni lineari fra le forze esterne e le $3m-6+k$ reazioni elastiche, che si sviluppano nelle membrature della travatura, cioè tante quante ne occorrono per risolvere il problema proposto.

La formola (190) del numero 73 permette pure di risolvere il problema della determinazione degli sforzi agenti in una barra sovrabbondante. Infatti supponiamo che sia rs la barra sovrabbondante, applichiamo in r ed in s due forze di intensità 1 e dirette nel senso della barra rs, allora

$$\delta'_r=\Sigma\frac{T'_{pq}(T_{pq}{}^r)}{E_{pq}A_{pq}}l_{pq}=\sum_{i=1}^{i=n}P_i(\delta_r)_i$$

$$\delta'_s=\Sigma\frac{T'_{pq}(T_{pq}{}^s)}{E_{pq}A_{pq}}l_{pq}=\sum_{i=1}^{i=n}P_i(\delta_s)_i.$$

D'altra parte l'accorciamento od allungamento λ_{rs} è dato da

$$-\lambda_{rs}=\delta'_r+\delta'_s=-\frac{T_{rs}}{E_{rs}A_{rs}}l_{rs}$$

quindi, uguagliando i due valori di λ_{rs}, si ricava la seguente equazione per la determinazione della forza incognita T_{rs}

$$-\frac{T_{rs}}{E_{rs}A_{rs}}l_{rs}=\Sigma\frac{T'_{pq}[(T_{pq}{}^r)+(T_{pq}{}^s)]}{E_{pq}A_{pq}}l_{pq}=\sum_{i=1}^{i=n}P_i[(\delta_r)_i+(\delta_s)_i] \qquad (252)$$

e delle equazioni analoghe se ne possono scrivere tante, quante sono le membrature sovrabbondanti.

La stessa formola può ricavarsi applicando il teorema di Castigliano: infatti l'allontanamento o l'avvicinamento λ_{rs} di due nodi rs sotto l'influenza di due forze uguali e contrarie Q agenti in r ed s, coi simboli usati superiormente, è dato da

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{rs}=-\frac{T_{rs}}{E_{rs}A_{rs}}l_{rs}=\left(\frac{dL}{dQ}\right)_{Q=o}=\\ =\frac{1}{2}\frac{d}{dQ}\left[\Sigma\frac{T'^2_{pq}+2T'_{pq}Q[(T_{pq}{}^r)+(T_{pq}{}^s)]+Q^2[(T_{pq}{}^r)+(T_{pq}{}^s)]^2}{E_{pq}A_{pq}}l_{pq}\right]_{Q=o}=\\ =\Sigma\frac{T'_{pq}[(T_{pq}{}^r)+(T_{pq}{}^s)]}{E_{pq}A_{pq}}l_{pq}\end{aligned}\right\} \qquad (253)$$

come precedentemente.

Finalmente si può valutare numericamente in base agli elementi della figura il valore del lavoro di deformazione in funzione delle forze note ed incognite, e poichè si tratta di vincoli indipendenti sussiste il teorema di Menabrea e dovrà essere

$$\frac{dL}{dT_{rs}}=o$$

e di tali equazioni se ne avranno tante, quante sono le barre sovrabbondanti, cioè quante ne occorrono perchè congiunte con quelle fornite dalla statica dei corpi rigidi il problema sia risoluto ed univocamente determinato. Applicando il teorema di Me-

NABREA all'espressione del lavoro valutato come nella formola (253) si ottiene

$$-Q=-T_{rs}=\frac{\Sigma\frac{T'_{pq}[(T_{pq}{}^{r})+(T_{pq}{}^{s})]}{E_{pq}A_{pq}}l_{pq}}{\Sigma\frac{[(T_{pq}{}^{r})+(T_{pq}{}^{s})]^2}{E_{pq}A_{pq}}l_{pq}} \quad (254)$$

che permette di determinare la forza incognita T_{rs} quando si sappiano gli sforzi provocati nelle barre del sistema sotto l'influenza dei carichi P', e di due carichi unitarî applicati nel senso della barra sovrabbondante in r ed in s. Questa medesima formola (254) può ottenersi uguagliando il valore (252) di λ_{rs} ricavato dal teorema di correlazione alla somma degli spostamenti nel senso rs dei punti r ed s sotto l'azione di una forza o reazione incognita T_{rs} calcolati colle formole, che dipendono dallo stesso teorema.

A complemento delle indicazioni date per la determinazione degli sforzi incogniti agenti nelle barre sovrabbondanti riportiamo un esempio applicando quei metodi, che per la loro natura non si riassumono in una formola precisa come le (251), (252) e (254), proponendoci di determinare gli sforzi agenti nelle tre membrature B_1O, B_2O e B_3O della mensola studiata al numero 83 sotto l'influenza di un carico P applicato in O e diretto verticalmente (*Fig.* 70ª, *tav.* X).

Siano T_1, T_2, T_3 le tensioni agenti nelle tre barre, $\alpha_2=B_2OB_1$, $\alpha_3=B_3OB_1$, A_1, A_2, A_3 le aree resistenti delle tre barre, E il loro modulo di elasticità.

Detto L il lavoro di deformazione in funzione delle forze

$$L=\frac{1}{2E}\left[\frac{T_1^2l_1}{A_1}+\frac{T_2^2l_2}{A_2}+\frac{T_3^2l^2}{A_3}\right]$$

la statica dei corpi rigidi dà due relazioni fra le forze T_1, T_2, T_3 e P, che si ottengono ponendo uguale allo zero la somma delle proiezioni delle forze secondo due rette scelte arbitrariamente nel piano. Supponendo che una di queste sia orizzontale e l'altra verticale

$$\left.\begin{aligned} T_2\operatorname{sen}\alpha_2+T_3\operatorname{sen}\alpha_3&=-P \\ T_2\cos\alpha_2+T_3\cos\alpha&=-T_1 \end{aligned}\right\} \quad (255)$$

da cui ricavasi

$$\left.\begin{aligned} T_2 &= \frac{-P\cos\alpha_3 + T_1\operatorname{sen}\alpha_3}{\operatorname{sen}\alpha_2\cos\alpha_3 - \operatorname{sen}\alpha_3\cos\alpha_2} = \frac{P\cos\alpha_3 - T_1\operatorname{sen}\alpha_3}{\operatorname{sen}(\alpha_3-\alpha_2)} \\ T_3 &= \frac{-T_1\operatorname{sen}\alpha_2 + P\cos\alpha_2}{\operatorname{sen}\alpha_2\cos\alpha_3 - \operatorname{sen}\alpha_3\cos\alpha_2} = \frac{T_1\operatorname{sen}\alpha_2 - P\cos\alpha_2}{\operatorname{sen}(\alpha_3-\alpha_2)} \end{aligned}\right\} \quad (256)$$

e quindi l'espressione del lavoro di deformazione diventa

$$L = \frac{1}{2E}\left[\frac{T_1^2 l_1}{A_1} + \frac{(P\cos\alpha_3 - T_1\operatorname{sen}\alpha_3)^2}{\operatorname{sen}^2(\alpha_3-\alpha_2)}\frac{l_2}{A_2} + \frac{(T_1\operatorname{sen}\alpha_2 - P\cos\alpha_2)^2}{\operatorname{sen}^2(\alpha_3-\alpha_2)}\frac{l_3}{A_3}\right].$$

Applicando il principio di MENABREA si ricava l'equazione che determina T_1 uguagliando a zero la derivata di L presa rispetto a questa forza. Trascurando il fattore comune $\frac{1}{E}$ risulta

$$\frac{T_1 l_1}{A_1} - \frac{P\cos\alpha_3 - T_1\operatorname{sen}\alpha_3}{\operatorname{sen}(\alpha_3-\alpha_2)}\frac{l_2}{A_2}\frac{\operatorname{sen}\alpha_3}{\operatorname{sen}(\alpha_3-\alpha_2)} +$$

$$+\frac{T_1\operatorname{sen}\alpha_2 - P\cos\alpha_2}{\operatorname{sen}(\alpha_3-\alpha_2)}\frac{l_3}{A_3}\frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{\operatorname{sen}(\alpha_3-\alpha_2)} = 0$$

od anche in causa delle (256) che danno i valori di T_2 e T_3

$$\frac{T_1 l_1}{A_1} + \frac{T_3 l_3}{A_3}\frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{\operatorname{sen}(\alpha_3-\alpha_2)} = \frac{T_2 l_2}{A_2}\frac{\operatorname{sen}\alpha_3}{\operatorname{sen}(\alpha_3-\alpha_2)} \quad (257).$$

Dalla figura si ricava che

$$\operatorname{sen}\alpha_2 = \frac{a}{l_2} \qquad \operatorname{sen}\alpha_3 = \frac{2a}{l_3}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{l_1}{l_2} \qquad \cos\alpha_3 = \frac{l_1}{l_3}$$

quindi

$$\operatorname{sen}(\alpha_3-\alpha_2) = \operatorname{sen}\alpha_3\cos\alpha_2 - \operatorname{sen}\alpha_2\cos\alpha_3 = \frac{2a l_1}{l_2 l_3} - \frac{a l_1}{l_2 l_3} = \frac{a l_1}{l_2 l_3}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha_2}{\operatorname{sen}(\alpha_3-\alpha_2)} = \frac{a}{l_2}\times\frac{l_2 l_3}{a l_1} = \frac{l_3}{l_1} \qquad \frac{\operatorname{sen}\alpha_3}{\operatorname{sen}(\alpha_3-\alpha_2)} = \frac{2a}{l_3}\times\frac{l_2 l_3}{a l_1} = \frac{2 l_2}{l_1}$$

e sostituendo questi valori nella (257) si ottiene l'equazione

$$\frac{T_1 l_1^2}{A_1}+\frac{T_3 l_3^2}{A_3}=2\frac{T_2 l_2^2}{A_2} \qquad (258)$$

che congiunta alle due formole (255) fornite dalla statica dei corpi rigidi serve a determinare le tre forze incognite T_1, T_2, T_3.

Si può giungere a questo stesso risultato ricordando che le lunghezze delle tre barre B_1O, B_2O, e B_3O, dovendo esse concorrere nel punto O, sono legate fra loro dalla relazione (Num. 83, form. 241)

$$l_1^2+l_3^2=2a^2+2l_2^2 \qquad (241)$$

trovata al numero precedente, e che, tenendo conto delle variazioni della lunghezza delle dette barre, questa stessa relazione deve necessariamente verificarsi anche dopo la deformazione. Se quindi si indicano con λ_1, λ_2, λ_3 ordinatamente gli allungamenti od accorciamenti elastici delle tre aste, dovrà essere soddisfatta l'equazione

$$(l_1+\lambda_1)^2+(l_3+\lambda_3)^2=2a^2+2(l_2+\lambda_2)^2 \qquad (259).$$

Trascurando i quadrati delle deformazioni, perchè infinitamente piccoli rispetto alle prime potenze delle medesime, e sottraendo la (241) dalla (259) risulta

$$l_1\lambda_1+l_3\lambda_3=2l_2\lambda_2$$

e, sostituendo in quest'ultima equazione agli allungamenti od accorciamenti elastici λ le loro espressioni in funzione delle forze T, si ottiene come precedentemente

$$\frac{T_1 l_1^2}{A_1}+\frac{T_3 l_3^2}{A_3}=2\frac{T_2 l_2^2}{A_2}.$$

Se le reazioni provengono da vincoli esterni, esse si determinano in modo perfettamente analogo a quello indicato per le reazioni agenti nelle barre sovrabbondanti. Si possono cioè ricavare le equazioni che mancano dalle formole, che legano le forze esterne cogli spostamenti paralleli agli assi (Form. 244) o, meglio, dalle formole del numero 73, che danno lo spostamento di un nodo qualsiasi in una direzione determinata, ponendo questa espressione uguale alla deformazione effettivamente permessa dal vincolo,

oppure ricorrere al teorema di CASTIGLIANO od a quello di MENABREA, se le condizioni della questione sono tali, che sussista quest'ultimo teorema.

Consideriamo il caso di un arco reticolato fissato a cerniera in A e B (*Fig.* 71ª, *tav.* X) soggetto all'azione di carichi esterni P' e di una reazione orizzontale incognita Q, che rappresenta l'effetto del vincolo. Se supponiamo il punto B libero di muoversi orizzontalmente nel senso AB, il suo spostamento sotto l'effetto dei carichi P' coi simboli accettati è dato da

$$\delta'_B = \Sigma \frac{T'_{pq}(T_{pq}^B)}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq} = \Sigma P'_i \Sigma \frac{(T_{pq}^i)(T_{pq}^B)}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq} = \sum_{i=1}^{i=n} P_i (\delta_B)_i .$$

Sotto l'influenza di un carico Q agente in B la deformazione

$$(\delta_B)_Q = Q \Sigma \frac{(T^B)^2}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq} = Q (\delta_B)_B .$$

Il punto B essendo fisso, la comma delle due deformazioni

$$\delta'_B + (\delta_B)_Q$$

dovrà essere uguale a zero, ossia dovrà essere

$$-Q = \frac{\Sigma \frac{T'_{pq}(T_{pq}^B)}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq}}{\Sigma \frac{(T_{pq}^B)^2}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq}} = \sum_{i=1}^{i=n} P'_i \frac{(\delta_B)_i}{(\delta_B)_B} = \sum_{i=1}^{i=n} P'_i V_i \qquad (260)$$

in cui le quantità V_i sono coefficienti indipendenti dai carichi P' agenti sulla travatura e che possono essere calcolati in precedenza, cioè prima di passare alla determinazione della spinta incognita Q dovuta a carichi P'

La stessa spinta Q può determinarsi ricorrendo al teorema di MENABREA, che in questo caso sussiste (Num. 40), oppure a quello di CASTIGLIANO. Il lavoro L di deformazione del sistema sotto l'azione dei carichi P' e della spinta incognita Q è dato da

$$L = \frac{1}{2} \Sigma \frac{[T'^2_{pq} + 2 T'_{pq} Q (T_{pq}^B) + Q^2 (T_{pq}^B)^2]}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq} .$$

In causa del teorema di MENABREA dovrà essere $\frac{dL}{dQ}=0$ ossia

$$-Q=\frac{\Sigma\frac{T'_{pq}(T_{pq}{}^{B})}{E_{pq}A_{pq}}l_{pq}}{\Sigma\frac{(T_{pq}{}^{B})^{2}}{E_{pq}A_{pq}}l_{pq}} \qquad (260^{bis})$$

formola che coincide con quella trovata precedentemente e che come quella può essere messa sotto la forma

$$-Q=\sum_{i=1}^{i=n}P_{i}\frac{(\delta_{B})_{i}}{(\delta_{B})_{B}}=\sum_{i=1}^{i=n}P_{i}V_{i}\,.$$

Se si volessero determinare le forze incognite create dai vincoli esterni in un arco AC, BO incastrato nella muratura delle imposte nel modo indicato nella (*Fig.* 72ª, *tav.* X) si potrebbe seguire il procedimento seguente.

È chiaro che l'arco AC, BD sarebbe una travatura reticolare staticamente determinata quando si riguardasse il punto A come fisso e come invariabile la direzione AB e si togliessero le barre $3C$ e $11D$, in cui agiranno in causa dei vincoli le reazioni U e V, e si lasciasse il punto B libero di muoversi lungo la retta $1B$, movimento che è impedito dalla reazione orizzontale Q opposta dal punto B.

Indichiamo con l_u, l_v, λ_u e λ_v le lunghezzze e le deformazioni delle barre 2, 3 e 11, 13 in cui agiscono rispettivamente le forze incognite U e V, in causa dei vincoli imposti al sistema sarà $\delta_B=0$ e nel senso delle barre 3, 2 ed 11, 13 si dovranno verificare le relazioni

$$\delta_3=\lambda_u=\frac{T_u}{E_u A_u}l_u \qquad \delta_{11}=\lambda_v=\frac{T_v}{E_v A_v}l_v\,.$$

Quindi applicando a questo caso le formole (190) del numero 73 e tenendo conto del senso d'azione delle reazioni Q, U e V

$$\left.\begin{aligned}\delta_B=0=\Sigma\frac{T'_{pq}(T_{pq}{}^{B})}{E_{pq}A_{pq}}l_{pq}-Q\Sigma\frac{(T_{pq}{}^{B})^{2}}{E_{pq}A_{pq}}l_{pq}-\\ -U\Sigma\frac{(T_{pq}{}^{3})(T_{pq}{}^{B})}{E_{pq}A_{pq}}l_{pq}-V\Sigma\frac{(T_{pq}{}^{11})(T_{pq}{}^{B})}{E_{pq}A_{pq}}l_{pq}\end{aligned}\right\} \qquad (261)$$

$$\left.\begin{aligned}
\delta_8 &= \frac{T_u l_u}{E_u A_u} = \Sigma \frac{T'_{pq}(T_{pq}^3)}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq} - Q\Sigma \frac{(T_{pq}^B)(T_{pq}^3)}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq} - \\
&\quad - U\Sigma \frac{(T_{pq}^3)^2}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq} - V\Sigma \frac{(T_{pq}^{11})(T_{pq}^3)}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq} \\
\delta_{11} &= \frac{T_v l_v}{E_v A_v} = \Sigma \frac{T'_{pq}(T_{pq}^{11})}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq} - Q\Sigma \frac{(T_{pq}^B)(T_{pq}^{11})}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq} - \\
&\quad - U\Sigma \frac{(T_{pq}^3)(T_{pq}^{11})}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq} - V\Sigma \frac{(T^{11})^2}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq}
\end{aligned}\right\} \quad (261)$$

che permettono di determinare le tre forze incognite Q, U, V.

Applicando il teorema di CASTIGLIANO si ottengono le stesse formole calcolando l'espressione L del lavoro di deformazione e ponendo

$$\frac{dL}{dQ} = 0 \qquad \frac{dL}{dU} = \frac{T_u l_u}{E_u A_u} \qquad \frac{dL}{dV} = \frac{T_v l_v}{E_v A_v} \qquad (262).$$

In modo analogo si risolverebbe qualunque altro problema relativo alla determinazione delle forze o reazioni incognite provocate da vincoli esterni imposti ad una travatura reticolare.

Finalmente si possono determinare le forze incognite col mezzo delle formole (249), infatti per ogni vincolo imposto al sistema si avrà un valore determinato delle deformazioni $\Delta x'$, $\Delta y'$, ω corrispondenti al punto od all'elemento vincolato. Se nelle formole generali si rappresentano le reazioni incognite con lettere, oltre le equazioni date dalla statica dei sistemi si avranno tante relazioni fra le deformazioni note e le forze incognite quanti sono i vincoli eccedenti quelli necessarî a fissare la posizione del sistema, ossia tante equazioni lineari quante ne occorrono perchè il problema sia univocamente determinato.

È opportuno avvertire che in certi casi potrà essere assai utile il teorema di reciprocità per la determinazione delle forze incognite e delle deformazioni; ciò specialmente avviene quando si debbono considerare per una stessa travatura diverse ipotesi di carico, poichè, costruito il diagramma unitario degli spostamenti (Num. 39), si possono facilmente e con operazioni semplicissime dedurre le deformazioni corrispondenti alle varie ipotesi di carico (Num. 39 e 72).

85. Travature composte a connessione multipla rigida. — Se le unioni delle diverse membrature di una travatura sono fatte ad incastro,

allora (astrazione fatta dalle deformazioni elastiche) essa riesce sempre indeformabile, poichè ogni trave elementare ha almeno tutta una sezione vincolata sia alla traslazione, che alla rotazione. Le unioni essendo ad incastro, gli sforzi trasmessi ad ogni membratura non saranno più solo sforzi assiali, ma in ciascuna di esse (limitandoci al caso della sollecitazione piana) si potranno verificare momenti d'inflessione e sforzi tangenziali, quindi l'espressione del lavoro di deformazione di tutto il sistema, usando gli stessi simboli impiegati ai numeri precedenti ed al numero 73, sarà dato da

$$L=\frac{1}{2}\sum \Sigma \Delta s\left[\frac{M^2}{EI}+\frac{X^2}{EA}+\frac{F^2}{GA}\right]$$

e lo spostamento δ'_k e la rotazione θ_k corrispondenti ad un punto k o ad una sezione σ_k passante per k, potranno essere ottenute coll'uso delle formole (184), (192) (Num. 73)

$$\delta'_k=\sum \Sigma \Delta s\left[\frac{M'(M^k)}{EI}+\frac{X'(X^k)}{EA}+\frac{F'(F^k)}{GA}\right]$$

$$\theta_k=\sum \Sigma \Delta s\left[\frac{M'(\overline{M}^k)}{EI}+\frac{X'(\overline{X}^k)}{EA}+\frac{F'(\overline{F}^k)}{GA}\right]$$

oppure derivando l'espressione del lavoro di deformazione rispetto ad una forza o ad un momento applicati al punto k od alla sezione σ_k, e ponendo poi nella derivata queste quantità uguali allo zero. Finalmente si possono calcolare le deformazioni delle sezioni d'incastro colle formole generali del numero 67 considerandole come appartenenti successivamente a membrature diverse, e scrivendo che queste deformazioni debbono essere uguali a quelle che il vincolo permette si ricavano tante equazioni quante ne occorrono per determinare i momenti e gli sforzi incogniti nelle sezioni d'incastro. In generale però questo processo di calcolo è estremamente lungo e quando si debbano fare calcoli di questo genere è spesso conveniente di applicare alla determinazione delle incognite il teorema di Menabrea quando le condizioni del sistema sono tali, che questo teorema abbia luogo. Il vantaggio di questo metodo è la sua grande uniformità, qualunque sia il sistema elastico, e la facilità colla quale mediante derivazioni semplicissime si possono ottenere tutte le equazioni necessarie a risolvere il problema. Simboleggiate le reazioni ed i momenti incogniti mediante lettere, si calcoli membratura per membratura il lavoro di deforma-

zione in funzione degli elementi noti ed incogniti con uno qualunque dei procedimenti indicati al numero 72, e si sommino le diverse espressioni. Si scrivano in seguito le equazioni fornite dalla statica dei corpi rigidi, le quali permetteranno di eliminare dall'espressione del lavoro tante incognite quanto è il loro numero. Si derivi la formola algebrica risultato di questa eliminazione rispetto agli elementi incogniti, che essa ancora contiene, e si pongano queste derivate uguali allo zero, si avranno tante equazioni lineari (il lavoro essendo di secondo grado) quante sono le incognite ed il problema sarà risoluto.

Se però questa questione non presenta difficoltà alcuna dal lato algebrico, è facile accorgersi che praticamente la soluzione numerica di simili problemi riesce oltremodo lunga e complessa. D'altra parte realizzare un incastro quale la teoria lo suppone, cioè che le due sezioni a contatto siano completamente solidali, per certi materiali è difficile e quasi impossibile, per altri è più semplice, ma obbliga però a fare l'attacco delle diverse membrature molto resistente e con sezioni trasversali molto forti se si vuole che esso sia capace di sviluppare una notevole resistenza ai momenti d'incastro. Inoltre le sezioni in cui sono fatte le unioni delle travi componenti il sistema debbono evidentemente essere considerate come sezioni singolari per forma e per carico, e quindi tali che la teoria della resistenza dei materiali dà bensì pel loro calcolo utili criterî, ma non risultati esatti (Num. 62). Tutte queste circostanze fanno comprendere perchè in generale gli ingegneri nei loro calcoli non considerino che sistemi articolati, e se anche al momento della costruzione non eseguiscono sempre delle vere cerniere, ma incastrano od inchiodano i varî pezzi fra loro in modo che vi sia lo spazio sufficiente per mettervi il numero di chiodi o caviglie necessarie a resistere allo sforzo trasmesso dalla membratura, ciò non avrà alcuna conseguenza sui risultati. Infatti non avendo rinforzato le sezioni in cui avviene l'unione con disposizioni speciali non si potrà in genere ritenere che i momenti d'incastro abbiano valori notevoli. Si è poi già osservato al numero 80 che questi momenti vanno spesso riguardati come vantaggiosi alla resistenza della travatura (Winkler (*) valuta in qualche caso l'aumento di resistenza dovuto a questa causa a quasi un terzo) e non come dannosi, per cui resta legittimata la pratica di calcolare sempre i sistemi reticolati come articolati, a meno che non si diano circostanze affatto speciali e che non si siano prese disposizioni particolari nella costruzione della travatura perchè il momento sviluppato

(*) Winkler, Opera citata, cap. VI

dall'incastro sotto l'influenza dei carichi esterni in certe determinate sezioni abbia un valore molto notevole. Non sembra necessario riportare un esempio di calcolo relativo a queste travature, sia perchè quanto è stato detto fin qui può ampiamente servire a mostrare la via da seguire nella risoluzione di una simile questione, sia anche perchè (eccezione fatta di pochissimi casi, che saranno trattati nella seconda parte) l'ingegnere deve quasi sempre calcolare soltanto travature reticolari articolate.

86. Travature reticolari simmetriche. Effetti delle variazioni di temperatura. — Se una travatura composta in genere ed in modo speciale una travatura reticolare è simmetrica rispetto ad un piano abbiamo già avvertito al numero 71 che i teoremi dimostrati per le travi semplici erano estensibili anche alle travi composte ed ai sistemi di travi, perchè essi richieggono per essere veri soltanto simmetria di forma e non ipotesi speciali circa la forma stessa, quindi senza bisogno di ulteriore dimostrazione può enunciarsi il seguente teorema.

La tensione in una membratura di una travatura reticolare simmetrica nel caso di un peso permanente e di un sopraccarico agente nella metà di sinistra s'ottiene togliendo dalla tensione, che avrebbe il medesimo tirante nel caso del sopraccarico agente su tutta la trave, quella che avrebbe il tirante simmetrico quando il sopraccarico occupa soltanto la metà di sinistra.

Questa proprietà torna molto utile quando si presenta il caso di calcolare una travatura reticolare simmetrica facendo diverse ipotesi intorno alla posizione, che può prendere il sopraccarico.

Un'avvertenza indispensabile nel calcolo delle travature reticolari è quella di tener conto dei cambiamenti di temperatura a cui la trave può andare soggetta. Ricorrendo al metodo delle deformazioni si tien conto degli sforzi prodotti dalle variazioni di temperatura aggiungendo alle forze, sotto l'influenza delle quali il sistema è in equilibrio, quelle che sono prodotte pel fatto che certe determinate deformazioni sono impedite, e ciò riesce assai facile, poichè se sono incognite le forze, sono però note le deformazioni impedite e dalle formole, che danno le deformazioni in funzione delle forze, si ricavano sempre tante equazioni numeriche lineari, quante sono le incognite da determinare.

Se invece si ricorre al teorema di Menabrea per la determinazione degli sforzi incogniti, allora è necessario fare le seguenti osservazioni. Nelle membrature, che possono dilatarsi liberamente, in causa delle variazioni di temperatura non ha luogo alcun sforzo, perchè in esse non è impedita in modo alcuno l'espansione molecolare (oppure la condensazione) prodotta dal calore.

In quelle membrature invece, che non possono deformarsi liberamente in causa dei vincoli imposti al sistema, se ha luogo una variazione di temperatura si svilupperanno sforzi di tensione T oppure di compressione, di taglio e momenti flettenti C, F ed M e, se per un istante si suppone tagliata la barra, le derivate del lavoro di deformazione rispetto alla quantità T, C, F, M, darebbero le deformazioni corrispondenti ai punti, ai quali esse dovrebbero essere applicate per ristabilire la forma del sistema. Se con λ si indica la deformazione corrispondente a T e con ξ, η e θ quelle corrispondenti rispettivamente a C, F ed M, (prodotte dalle variazioni di temperatura e quindi note) le derivate del lavoro di deformazione rispetto a T, C, F, M essendo ordinatamente uguali a λ, ξ, η, θ, nel caso dell'equilibrio dovranno essere uguali a zero le derivate della funzione

$$L - \Sigma T\lambda - \Sigma(M\theta - C\xi + F\eta) \qquad (263).$$

Cioè (*) *le forze elastiche, che hanno luogo in un sistema considerato alla temperatura* t' *sono quelle che rendono un minimo, o meglio che annullano le derivate prima del lavoro di deformazione del sistema, diminuito di tanti termini simili a* $T\lambda$ *quante sono le membrature tese, che possono esser tolte, oppure tanti termini simili a* $M\theta - C\xi + F\eta$ *quante sono le membrature compresse od incastrate, che possono essere tagliate in una sezione, senza che il sistema cessi di essere di forma invariabile.*

Questa proprietà è resa evidente anche dal teorema di correlazione: infatti, considerando soltanto la forza T agente nel baricentro B della sezione σ_B, dalla (190) del numero 73 risulta

$$\lambda = T\Sigma \frac{(T_{pq}{}^B)^2}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq}.$$

Il lavoro prodotto dalla sola forza T sarebbe

$$L = \frac{1}{2} T^2 \Sigma \frac{(T_{pq}{}^B)^2}{E_{pq} A_{pq}} l_{pq}$$

quindi il valore di T si ottiene realmente ponendo uguale allo zero la derivata presa rispetto a T della funzione $L - T\lambda$.

La stessa osservazione può farsi per gli altri elementi, che entrano nella formola generale riportata superiormente.

(*) Castigliano, Opera citata, pag. 304-309.

Da quanto è stato detto in questo e nei numeri precedenti risulta che il calcolo delle travature composte in genere, e più particolarmente quello delle travature reticolari, non presenta alcuna difficoltà qualunque siano la loro forma, le ipotesi di carico e le variazioni di temperatura a cui esse sono soggette. Come le travature semplici anche queste strutture possono essere assoggettate a calcoli condotti con metodo analitico, aritmetico o geometrico od anche con metodo misto, combinando fra loro i tre precedenti a seconda delle operazioni da eseguirsi. Dopo quanto è stato detto al numero 72 intorno a questi procedimenti di calcolo sembra superfluo fermarsi a dare ulteriori indicazioni di ordine generale intorno ai medesimi. I numerosi casi particolari, che saranno svolti e discussi nella parte seconda di quest'opera permetteranno di farne apprezzare meglio la loro natura, l'utilità relativa e la convenienza di ricorrere all'uno od all'altro dipendentemente dal problema, che si vuole risolvere.

Superficie resistenti e vôlte.

87. Sistemi elastici superficiali di rivoluzione. — Al numero 60 sono state esposte le ragioni per le quali lo svolgimento ordinato di uno studio relativo all'equilibrio ed alle deformazioni dei sistemi elastici superficiali non ha grande interesse per l'ingegnere, esso infatti allo stato attuale delle cognizioni non potrebbe condurre a nessun risultato d'ordine generale, che in modo più o meno esatto sia suscettibile di essere tradotto in procedimenti di calcolo atti ad entrare facilmente nell'uso comune. Atteso l'indole puramente tecnica di questo trattato si è quindi creduto opportuno di omettere tale trattazione, rinviando il lettore, che desideri acquistare ampie cognizioni su questo argomento, alle opere classiche di Lamé, Clebsh, ecc., ed ai lavori di Barrè de Saint-Venant e Boussinesq, limitandoci a mostrare come si trasformino le equazioni generali dell'equilibrio dei corpi elastici quando si considerano sistemi elastici superficiali simmetrici e sollecitati da sforzi distribuiti simmetricamente, perchè in qualche caso particolare esse riescono integrabili e conducono a risultati pratici importanti. Se si immagina in un piano oz, (*Fig.* 74ª, *tav.* X) passante per l'asse di una linea materiale, tracciato un asse ox e che la linea materiale suddetta ruoti intorno all'asse ox, chiamasi sistema elastico superficiale di rivoluzione od anche superficie elastica di rivoluzione il luogo geometrico generato durante questo movimento dalla sezione piana longitudinale B_0C_0, C_nB_n della

linea materiale, e superficie media il luogo geometrico delle successive posizioni dell'asse $A_0 A_n$. Volendo assoggettare ad uno studio analitico corpi di questa natura è opportuno scegliere un sistema di coordinate miste, in modo che in ogni parallelo una di esse abbia un valor costante. Stabiliamo quindi che l'asse di rivoluzione sia l'asse delle x, l'asse delle z lo supporremo mobile col piano che contiene la linea generatrice della superficie, in guisa che la z dà il raggio dei varî circoli o paralleli generati dai punti della linea $B_0 C_0$, $B_n C_n$ e finalmente indichiamo con ϕ l'angolo, che il piano $x\,o\,z$ nel suo movimento fa con un piano meridiano fisso. Per poter poi utilizzare le relazioni trovate ai capitoli II, III e IV fra le forze e le deformazioni corrispondenti ad elementi superficiali ortoganali stabiliamo di ritenere ogni parallelepipedo rettangolo elementare del sistema riferito a tre assi passanti pel suo centro di figura e precisamente, se si conduce il piano mobile $x\,o\,z$ a passare pel centro m di figura di questo elemento di volume, gli assi delle x e delle z particolari all'elemento di volume considerato passeranno pel punto m e saranno paralleli ad ox ed oz e l'asse my sarà normale alla posizione del piano mobile $x\,o\,z$ e quindi tangente al parallelo generato dal punto m. Le varie lettere e simboli u, v, w, p_{xx}, p_{xy}, $\ldots$ i_x, i_{yx}, $\ldots$ σ_1, σ_2, σ_3, ε, ε, ecc., usati parlando dell'equilibrio dei corpi elastici ai capitoli II, III e IV conserveranno anche qui lo stesso significato.

È evidente che se in un corpo elastico esistono superficie o linee, che si trovino nelle stesse condizioni di sollecitazione e di deformazione, ciò stabilisce delle relazioni fra i valori di u, v e w nei diversi punti di queste superficie e linee permettendo di modificare e semplificare alquanto le equazioni generali dell'equilibrio (Num. 51). Nelle superficie elastiche di rivoluzione gli anelli, ossia le porzioni di superficie comprese fra due piani infinitamente vicini e normali all'asse ox, quando il carico sia distribuito in modo simmetrico in tutti i sensi intorno all'asse ox, sono precisamente in queste condizioni. In causa delle formole che stabiliscono la dipendenza tra le forze e le deformazioni essendo permesso di concludere che quando è simmetrica la forma e la sollecitazione sono simmetriche anche le deformazioni, l'aumento o deformazione unitaria i_y nella direzione della tangente alla linea media dell'anello in un suo punto qualsiasi sarà uguale, per una nota proprietà del circolo, al rapporto fra l'aumento del raggio ed il raggio stesso, quindi

$$i_x = \frac{du}{dx} \qquad i_y = \frac{w}{z} \qquad i_z = \frac{dw}{dz} \tag{264}.$$

Per la stessa ragione due dei tre scorrimenti, e precisamente g_{xy} e g_{yz}, saranno uguali allo zero rimanendo solo lo scorrimento

$$g_{xz}=\gamma=\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right) \qquad (265).$$

Se la superficie di rivoluzione come caso particolare fosse una sfera, questa potrebbe riguardarsi come superficie di rivoluzione rispetto ad uno qualsiasi dei suoi diametri e, se le forze fossero pure distribuite simmetricamente rispetto ad ogni diametro, cioè di intensità costante e dirette nel senso dei raggi, allora qualsiasi circolo massimo si trova nelle condizioni degli anelli studiati superiormente, quindi l'aumento unitario in un punto qualunque in senso tangenziale alla superficie sferica media sarà necessariamente uguale all'aumento unitario del raggio della superficie, che gli corrisponde, quindi

$$i_x=i_y=\frac{w}{z} \qquad i_z=\frac{dw}{dz} \qquad (266)$$

ed i tre scorrimenti sono tutti uguali allo zero.

Avendo scelto un sistema d'assi semipolare l'elemento di volume non ha più la forma di un parallelepipedo, ma quella di un solido limitato da due piani normali all'asse delle x (*Fig.* 75ª, *tav.* X) da due piani passanti per l'asse ox e che comprendono un angolo $d\phi$ e finalmente da due superficie cilindriche a sezione retta circolare coll'asse coincidente con ox ed aventi per raggio rispettivamente z e $(z+dz)$ ed il volume dell'elemento sarà dato da $dx\,dz\,z\,d\phi$. In causa della simmetria di forma e di carico le forze esterne non daranno che due componenti, una X parallela all'asse ox ed una Z diretta in ogni punto secondo il raggio del parallelo, che passa pel medesimo. Se si conviene di indicare con

$$-\sigma_x \quad \text{e} \quad \sigma_x+\frac{d\sigma_x}{dx}dx$$

$$-\sigma_y \quad \text{e} \quad \sigma_y+\frac{d\sigma_y}{d\phi}d\phi$$

$$-\sigma_z \quad \text{e} \quad \sigma_z+\frac{d\sigma_z}{dz}dz$$

le componenti nel senso dell'asse delle x, delle tangenti ai pa-

ralleli e radiali delle forze agenti sulle sei faccie dell' elemento di volume, e con

$$-t_{xz} \text{ e } t_{xz}+\frac{dt_{xz}}{dx}dx \qquad -t_{zx} \text{ e } t_{zx}+\frac{dt_{zx}}{dz}dz$$

le componenti della forza tangenziale corrispondente allo scorrimento $g_{xz}=\gamma$, che solo si verifica in questi corpi, le condizioni di equilibrio alla traslazione in senso longitudinale (parallello all'asse delle x) tangenziale ai paralleli e radiale, conducono alle tre seguenti equazioni

$$\left.\begin{aligned}
&\left(-\sigma_x+\sigma_x+\frac{d\sigma_x}{dx}dx\right)+\left(-t_{zx}+t_{zx}+\frac{dt_{zx}}{dz}dz\right)+Xzdzdxd\phi=o\\
&\left(-\sigma_y+\sigma_y+\frac{d\sigma_y}{d\phi}d\phi\right)=o\\
&\left(-\sigma_z+\sigma_z+\frac{d\sigma_z}{dz}dz\right)-2\sigma_y\operatorname{sen}\frac{d\phi}{2}+\left(-t_{xz}+t_{xz}+\frac{dt_{xz}}{dx}dx\right)+\\
&\qquad +Zzdz\,d\phi\,dx=o\ (*)
\end{aligned}\right\}(267).$$

La seconda di queste equazioni non dà una vera condizione di equilibrio per le superficie elastiche sollecitate da carichi distribuiti simmetricamente, perchè non stabilisce una relazione fra la forza σ_y e le altre forze, ma ne esprime una proprietà, cioè che *la tensione agente negli anelli ha un valore costante in tutti i punti di uno stesso anello.* Le altre due invece, contenendo le forze interne e le forze esterne, sono vere condizioni di equilibrio e si possono facilmente trasformare in modo che in esse siano messe in evidenza le forze molecolari unitarie p_{xx}, p_{yy}, ecc. . . . studiate al capitolo II. Dalla figura risulta, tenendo conto di quanto è stato detto sulla direzione degli assi $mxyz$ corrispondenti ad ogni elemento di volume,

$$\sigma_x=p_{xx}zd\phi dz \qquad \sigma_y=p_{yy}dxdz \qquad \sigma_z=p_{zz}zd\phi dx$$

$$t_{zx}=\tau zd\phi dx \qquad t_{xz}=\tau zdzd\phi.$$

(*) $\frac{d\sigma_y}{d\varphi}=0$ in causa della seconda delle equazioni (267).

Sostituendo questi valori nelle (267) si ottengono le equazioni di equilibrio convenienti nelle superficie elastiche di rivoluzione soggette a forze distribuite simmetricamente intorno all'asse, cioè

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{1}{z}\frac{d(z\tau)}{dz}+X=0 \\ &\frac{1}{z}\frac{d(zp_{zz})}{dz}-\frac{p_{yy}}{z}+\frac{d\tau}{dx}+Z=0. \end{aligned}\right\} \quad (268).$$

Tenendo conto delle osservazioni fatte superiormente intorno al valore delle deformazioni i_x, i_y, i_z e dello scorrimento γ (Form. 264 e 265) le equazioni (82) del numero 45 (Pag. 135) pei corpi isotropi diventano

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}&=2G\left(i_x+\frac{e}{m-2}\right)=\frac{2G}{m-2}\left((m-1)\frac{du}{dx}+\frac{w}{z}+\frac{dw}{dz}\right) \\ p_{yy}&=2G\left(i_y+\frac{e}{m-2}\right)=\frac{2G}{m-2}\left(\frac{du}{dx}+(m-1)\frac{w}{z}+\frac{dw}{dz}\right) \\ p_{zz}&=2G\left(i_z+\frac{e}{m-2}\right)=\frac{2G}{m-2}\left(\frac{du}{dx}+\frac{w}{z}+(m-1)\frac{dw}{dz}\right) \\ \tau&=G\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right) \end{aligned}\right\} \quad (269).$$

Se si sostituiscono questi valori di p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, τ nelle (268) si potranno ottenere mediante integrazione le funzioni u, w, che dipenderanno soltanto dalle coordinate x e z determinando le funzioni arbitrarie introdotte dall'integrazione mediante le condizioni imposte ai limiti della superficie materiale considerata.

Se una delle forze p_{xx} o p_{zz} è uguale allo zero, per esempio, se $p_{xx}=0$ allora dalle (269) ricordando i valori di e, i_x, i_y, i_z, risulta

$$i_x=-\frac{i_y+i_z}{m-1} \qquad e=\frac{m-2}{m-1}(i_y+i_z)$$

e quindi

$$p_{yy}=\frac{2G}{m-1}(mi_y+i_z) \qquad p_{zz}=\frac{2G}{m-1}(i_y+mi_z).$$

Essendo nulle due componenti tangenziali (p_{xy} e p_{yz}) l'equazione (20) del numero 18 (Pag. 51) diventa

$$(p_{xx}-\sigma)(p_{yy}-\sigma)(p_{zz}-\sigma)-(p_{yy}-\sigma)\tau=0 \qquad (270)$$

che si scinde nelle due

$$(p_{yy}-\sigma)=0 \qquad \sigma^2-(p_{xx}+p_{zz})\sigma+p_{xx}p_{zz}-\tau^2=0$$

da cui si ricavano immediatamente i valori delle forze principali σ_1, σ_1, σ_3

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=\frac{p_{xx}+p_{zz}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(p_{xx}-p_{zz})^2+4\tau^2}\\ \sigma_2&=p_{yy}\\ \sigma_3&=\frac{p_{xx}+p_{zz}}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(p_{xx}-p_{zz})^2+4\tau^2}.\end{aligned}\right\}(271).$$

Queste relazioni fanno vedere che p_{yy} è sempre una delle forze principali, mentre σ_1 e σ_3 non sono rispettivamente uguali a p_{xx} e p_{zz} che quando s'annulli lo sforzo tangenziale τ e quindi anche lo scorrimento γ (pei corpi isotropi).

In modo analogo l'equazione (30) del numero 26 (Pag. 75) essendo nulli i due scorrimenti g_{xy} e g_{yz} si scinde nelle due

$$i_y-\varepsilon=0 \qquad \varepsilon^2-(i_x+i_z)\varepsilon+i_x i_y-\frac{\gamma}{4}=0$$

da cui si ricava

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{i_x+i_z}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(i_x-i_z)^2+\gamma^2}\\ \varepsilon_2&=i_y\\ \varepsilon_3&=\frac{i_x+i_z}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{(i_x-i_y)^2+\gamma^2}.\end{aligned}\right\}(272).$$

Quindi i_y è sempre una dilatazione principale, questa proprietà non si verifica per i_x ed i_z altro che se $\gamma=0$. Finalmente l'espressione del lavoro di deformazione è data da

$$\left.\begin{aligned}L=\frac{1}{2}\int dx\,dy\,dz\left(\frac{1}{E}\left[(p_{xx}{}^2+p_{yy}{}^2+p_{zz}{}^2)-\frac{2}{m}(p_{xx}p_{yy}+\right.\right.\\ \left.\left.+p_{xx}p_{zz}+p_{yy}p_{zz})\right]-\frac{1}{G}\tau^2\right)\end{aligned}\right\}(273).$$

Come applicazione di queste formole consideriamo una sfera soggetta ad una pressione interna costante e diretta normalmente agli elementi della superficie, cioè in senso radiale. In questo caso è già stato osservato che $i_x=i_y$, $\gamma=0$ e quindi in causa delle (269) $p_{xx}=p_{yy}$ e le (271) danno $\sigma_1=\sigma_2=p_{xx}$ $\sigma_3=p_{zz}$.

Se si suppone di poter fare astrazione dalle forze X e Z agenti sulla massa dell'elemento materiale, allora la prima delle (268) dà una proprietà dell'equilibrio $\frac{dp_{xx}}{dx}=0$, ossia p_{xx} *ha un valore costante in tutto il meridiano*, come doveva risultare essendo essa uguale a p_{yy} e potendo in questo caso ogni diametro essere riguardato come asse di simmetria.

Riferendo la sfera ad un sistema di coordinate polari col polo nel suo centro ed indicando con z il raggio vettore, l'equilibrio di traslazione dell'elemento di volume sarà assicurato, essendo $p_{xx}=p_{yy}=\text{cost}$, quando sia uguale a zero la risultante radiale delle forze agenti sull'elemento stesso (*Fig.* 76ª, *tav.* X), cioè quando

$$\left(p_{zz}+\frac{dp_{zz}}{dz}\right)\Pi(z+dz)^2\,d\phi^2=p_{zz}\Pi z^2\,d\phi^2+$$

$$+p_{xx}\,\text{sen}\,d\phi\cdot 2\Pi\left(z+\frac{dz}{2}\right)d\phi\,dz.$$

Trascurando gli infinitesimi di ordine superiore, togliendo il fattor comune $\Pi z\,dz\,d\phi^2$ e facendo $\text{sen}\,d\phi=d\phi$, rimane come condizione d'equilibrio

$$\frac{dp_{zz}}{dz}=\frac{2}{z}(p_{xx}-p_{zz}) \tag{274}$$

e le (269) diventano

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}=p_{yy}&=\frac{2G}{m-2}\left(\frac{dw}{dz}+m\frac{w}{z}\right)\\ p_{zz}&=\frac{2G}{m-2}\left((m-1)\frac{dw}{dz}+2\frac{w}{z}\right)\end{aligned}\right\}\ (275).$$

Sostituendo questi valori di p_{xx} e p_{zz} nella (274) si ottiene

$$(m-1)\frac{d^2w}{dz^2}+2\frac{d\left(\frac{w}{z}\right)}{dz}=\frac{2}{z}\left(-(m-2)\frac{dw}{dz}+(m-2)\frac{w}{z}\right)=-$$

$$-2(m-2)\frac{z\frac{dw}{dz}-w}{z^2}=-2(m-2)\frac{d\left(\frac{w}{z}\right)}{dz}$$

da cui si ricava

$$\frac{d^2w}{dz^2}+2\frac{d\left(\frac{w}{z}\right)}{dz}=0 \tag{276}$$

ed integrando

$$\frac{dw}{dz}+2\frac{w}{z}=i_x+i_y+i_z=e=\text{cost} \tag{277}$$

cioè *la dilatazione cubica in ogni punto della superficie sferica è costante.*

Dalla (277) moltiplicando per z^2 si ha

$$z^2\frac{dw}{dz}+2\,z\,w=\frac{d}{dz}(z^2\,w)=e\,z^2 \tag{278}$$

ossia

$$w=\frac{e}{3}+\frac{c}{z^3} \qquad \frac{dw}{dz}=\frac{e}{3}-2\frac{c}{z^3}$$

e quindi

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}&=2G\left(\frac{e}{3}+\frac{c}{z^3}+\frac{e}{m-2}\right)=A+\frac{B}{z^3}\\ p_{zz}&=2G\left(\frac{e}{3}-2\frac{c}{z^3}+\frac{e}{m-2}\right)=A-2\frac{B}{z^3}\end{aligned}\right\} \tag{279}$$

in cui A e B sono due costanti per mezzo delle quali si possono determinare e e c.

Se sulla superficie interna della sfera (ossia per $z=r_1$) la pressione unitaria diretta normalmente alla superficie ha il valore p_1 e sulla superficie esterna (ossia per $z=r_2$) il valore p_2, sostituendo nelle (279) a p_{xx}, p_{yy} e z rispettivamente questi valori si ottiene

$$A-2\frac{B}{r_1^3}=-p_1 \qquad A-2\frac{B}{r_2^3}=-p_2$$

da cui

$$A=\frac{p_1r_1^3-p_2r_2^3}{r_2^3-r_1^3} \qquad B=\frac{p_1-p_2}{2}\,\frac{r_1^3r_2^3}{r_2^3-r_1^3} \tag{280}$$

e quindi

$$\left.\begin{aligned} p_{yy}=p_{xx}&=\frac{p_1r_1^3-p_2r_2^3}{r_2^3-r_1^3}+\frac{p_1-p_2}{2}\,\frac{r_1^3r_2^3}{r_2^3-r_1^3}\,\frac{1}{z^3}\\ p_{zz}&=\frac{p_1r_1^3-p_2r_2^3}{r_2^3-r_1^3}-(p_1-p_2)\,\frac{r_1^3r_2^3}{r_2^3-r_1^3}\,\frac{1}{z^3}\end{aligned}\right\} \tag{281}$$

$$\left.\begin{aligned} Ei_x&=p_{xx}-\frac{p_{xx}+p_{zz}}{m}=\frac{m-2}{m}A+\frac{m+1}{m}\,\frac{B}{z^3}\\ Ei_z&=p_{zz}-\frac{p_{xx}+p_{yy}}{m}=\frac{m-2}{m}A-2\frac{m+1}{m}\,\frac{B}{z^3}\end{aligned}\right\} \tag{282}.$$

Con un procedimento di calcolo analogo (*) al precedente si trova per un cilindro a sezione retta circolare sollecitato soltanto da una pressione radiale interna p_1 (per $z=r_1$) e da una pressione radiale esterna p_2 (per $z=r_2$)

$$p_{xx}=o \qquad \tau=o$$

$$\left.\begin{aligned} p_{yy}&=A+\frac{B}{z^2}=\frac{p_1 r_1^2-p_2 r_2^2}{r_2^2-r_1^2}+(p_1-p_2)\,\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2-r_1^2}\,\frac{1}{z^2} \\ p_{zz}&=A-\frac{B}{z^2}=\frac{p_1 r_1^2-p_2 r_2^2}{r_2^2-r_1^2}-(p_1-p^2)\,\frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2-r_1^2}\,\frac{1}{z^2} \end{aligned}\right\} \quad (283).$$

In entrambi i casi le direzioni delle forze principali coincidono colle direzioni di p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} e sono loro uguali in intensità.

Qualora in via approssimata si voglia fare astrazione dalle deformazioni interne di ogni elemento della superficie elastica allora

$$\tau=G\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)=0$$

si può inoltre prescindere dalla forza p_{zz}, che non corrisponde più ad alcuna idea determinata e la forza p_{xx} va riguardata come costante sopra ogni sezione piana normale all'asse Ox. In tale ipotesi le (268) diventano

$$\frac{dp_{xx}}{dx}+X=0 \qquad \frac{-p_{yy}}{z}+Z=0 \qquad (284)$$

da cui si ricava, indicando con P_x la risultante parallela all'asse Ox delle forze agenti sulla superficie esternamente al piano normale all'asse Ox determinato dall'ascissa x,

$$\left.\begin{aligned} p_{xx}&=\frac{\int_{x_0}^{x} X z\,d\phi\,dz\,dx}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_{z_1}^{z_2} z\,dz}=\frac{P_x}{\pi(z_2^2-z_1^2)} \\ p_{yy}&=zZ \end{aligned}\right\} \quad (285)$$

(*) Vedi nella seconda parte di quest' opera il capitolo relativo a questo argomento.

cioè la forza p_{xx} *è uguale alla risultante di tutte le azioni parallele all'asse delle* x *sulla porzione di superficie superiore od esterna alla sezione piana normale all'asse* Ox *determinata dall'ascissa* x *divisa per l'area di questa stessa sezione. La forza* p_{yy} *in ogni parallelo è uguale all'azione che esso subisce in senso radiale moltiplicata pel raggio del parallelo stesso.*

Queste relazioni conducono immediatamente alle formole ordinariamente in uso pel calcolo delle superficie resistenti di rivoluzione ad asse verticale dette comunemente vôlte a cupola.

Siano

$z=f(x)$ l'equazione della curva generatrice della superficie media della vôlta, s la lunghezza del suo arco tra l'origine ed il punto (x, z).

λ_x lo spessore della vôlta in corrispondenza del parallelo di ascissa x

α l'angolo che la tangente alla curva $z=f(x)$ fa coll'asse delle z nel punto di coordinate (x, z)

A la tensione o pressione che subisce la vôlta per unità di lunghezza di parallelo in senso tangenziale al meridiano medio

B la tensione o pressione, che subisce la vôlta per unità di lunghezza di meridiano nella direzione della tangente al parallelo medio.

Dalla (*Fig.* 74ª, *tav.* X) appare che per l'equilibrio di traslazione nel senso dell'asse delle x dovrà essere

$$2\Pi z A \operatorname{sen}\alpha = \Pi(z_2^2 - z_1^2) p_{xx} = P_x$$

ed in causa della seconda delle equazioni (285)

$$B ds = p_{yy}\lambda_x dx = \frac{d}{ds}(zA\cos\alpha)ds$$

dalle quali si ricava

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{P_x}{2\Pi z \operatorname{sen}\alpha} = \frac{P_x}{2\Pi z}\frac{dz}{ds} \\ B &= \frac{1}{2\Pi}\frac{d}{ds}(P_x \cot\alpha) = \frac{1}{2\Pi}\frac{d}{ds}\left(P_x \frac{dz}{dx}\right) \end{aligned}\right\} \quad (286)$$

che sono le formole trovate da Schwedler e Rankine per il calcolo ordinario delle vôlte a cupola.

Per una cupola sferica, la cui superficie media abbia per raggio r, di spessore λ costante, composta di materiale omogeneo di densità ρ in guisa che il suo peso per metro quadrato di vôlta

sia $p=\lambda\rho$, si ricava immediatamente $P_x=2\Pi r^2 p(1-\cos^2\alpha)$ e quindi

$$\left.\begin{aligned} A&=-\frac{P_x}{2\Pi z \operatorname{sen}\alpha}=-pr\frac{1-\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha}=-pr\frac{1}{1+\cos\alpha}\\ B&=\frac{1}{2\Pi}\frac{d}{ds}(P_x\cos\alpha)=\frac{1}{2\Pi r}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{2\Pi r^2 p(1-\cos\alpha^2)\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}\right)=\\ &=pr\left(\frac{\cos\alpha^2+\cos\alpha-1}{1+\cos\alpha}\right)=pr\left(\frac{1}{1+\cos\alpha}-\cos\alpha\right)\end{aligned}\right\}(287).$$

I valori di A e B ai poli ed all'equatore sono dati dal quadro seguente

per $\alpha=$	o	$\frac{\Pi}{2}$	Π
$A=$	$-\frac{pr}{2}$	$-pr$	$-\infty$
$B=$	$-\frac{pr}{2}$	$+pr$	∞

da cui risulta che la pressione al polo inferiore sarebbe infinita. Non bisogna dimenticare che questo risultato si ottiene partendo da un'ipotesi non esatta, poichè si trascurano le deformazioni della vôlta; all'atto pratico le leggere deformazioni prodotte in causa dell'elasticità del materiale modificheranno talmente la distribuzione degli sforzi che saranno evitati al polo i valori infiniti per le forze A e B. Il punto in cui si fa il passaggio dal negativo al positivo nei valori di B si ottiene ponendo $B=0$ ossia $\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0$ da cui si ricava

$$\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

ossia $\alpha=51°, 50'$: per tutti i paralleli superiori al parallelo corrispondente a questo valore di α B produce sforzi di compressione, diventa invece sforzo di tensione pei paralleli inferiori.

Corpi elastici ed ammassi.

88. Sistemi nei quali nessuna dimensione è prevalente sulle altre. — Le considerazioni e semplificazioni particolari del problema di elasticità dovute alla circostanza speciale che una o due dimensioni del corpo sono infinitamente piccole rispetto alle rimanenti non sono più applicabili quando mancano, anche in via largamente approssimata, queste condizioni. Il problema della determinazione delle forze elastiche e delle deformazioni riprende allora la sua generalità e non può essere risoluto che nel modo indicato al numero 54, cioè ponendo nelle equazioni (95) (Pag. 148) in luogo delle forze p le loro espressioni in funzione delle deformazioni u, v e w, che verranno determinate mediante l'integrazione delle tre equazioni differenziali risultanti, assegnando il valore delle funzioni arbitrarie introdotte in causa dell'integrazione col mezzo delle equazioni (96) (Pag. 148). Allo stato attuale delle cognizioni non essendo possibile l'integrazione delle formole (95) torna inutile per l'ingegnere qualsiasi discussione d'ordine generale relativa a questo argomento, perchè non è possibile arrivare ad un procedimento di calcolo comprensivo e di applicazione facile. Ci limiteremo quindi ad accennare ad un caso, nel quale si può quasi per intuizione determinare una soluzione del problema di elasticità, che le equazioni (95) e (96) dimostrano giusta, ed a indicare la soluzione, che può avere questo stesso problema quando in via approssimata si faccia astrazione dai legami, che esistono fra le particelle infinitesime dei corpi, considerando questi come ammassi di materie incoerenti.

Supponiamo che sopra un corpo elastico non agisca altra forza che una pressione unitaria q sulla superficie esterna del medesimo e diretta in ogni punto normalmente ai suoi elementi. In tale ipotesi sembra naturale il ritenere che la pressione q si trasmetta inalterata in tutte le direzioni nell'interno del corpo, e si trova realmente che facendo in tutto il corpo

$$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=-q \qquad p_{xy}=p_{xz}=p_{yz}=0$$

si ha una soluzione del problema di elasticità. Infatti per ipotesi nelle (95) sono uguali a zero X, Y, Z, inoltre le relazioni lineari che passano fra le forze elastiche e le deformazioni (Num. 42, 43, 44) mostrano che le dilatazioni i_x, i_y, i_z, e gli scorrimenti g_{xy}, g_{xz}, g_{yz} sono tutti costanti e proporzionali a q, quindi le derivate di queste quantità saranno uguali allo zero e saranno neces-

sariamente verificate le equazioni (95) e le (33) e (34) del numero 29. Sono poi anche verificate le (96) perchè la forza q è diretta secondo la normale ai successivi elementi piani della superficie del corpo. Nel caso dei corpi elastici isotropi, ritenendo $A=3G$ le equazioni (69) del numero 43 danno

$$-\frac{q}{G}=3i_x+i_y+i_z \qquad -\frac{q}{G}=i_x+3i_y+i_z \qquad -\frac{q}{G}=i_x+i_y+3i_z$$

e quindi la dilatazione cubica e avrà il valore

$$e=(i_x+i_y+i_z)=-\frac{3}{5}\frac{q}{G}=-\frac{3}{2}\frac{q}{E} \tag{288}$$

poichè, fatto $m=4$, è noto che

$$G=\frac{m}{2(m+1)}E=\frac{2}{5}E\,.$$

Se si fa astrazione dalle deformazioni e dai vincoli di elasticità e coesione, che legano fra loro le varie molecole, un corpo si presenta come un complesso di minime particelle affatto incoerenti e slegate fra loro, atte a ricevere ed a trasmettere sforzi di compressione e ad opporre una resistenza d'attrito al moto, ma assolutamente incapaci di trasmettere qualsiasi sforzo di tensione. Se si suppongono tali particelle distribuite in modo uniforme e tale da dare origine ad un ammasso omogeneo, e si suppone inoltre che esse non siano soggette ad altra forza che al proprio peso e che il sistema sia limitato alla parte superiore da una superficie piana inclinata di un angolo ε all'orizzonte, è evidente che ogni piano ideale condotto nell'interno dell'ammasso parallelamente al piano limite superiore si trova nelle condizioni delle superficie, che nel numero precedente abbiamo chiamato di uguale sollecitazione. Supponendo l'ammasso indefinito, e poichè si prescinde dalle deformazioni ed azioni elastiche, è evidente che la superficie di uguale sollecitazione potrà ritenersi anche come superficie di uguale intensità per le forze molecolari e quindi, sempre entro i limiti d'approssimazione compatibili coll'ipotesi ammessa, le variazioni delle forze molecolari, passando da un punto ad un altro di tale superficie, saranno uguali allo zero. Prendiamo come piano delle xy il piano limite superiore e come piano delle xz un piano verticale passante per una linea di massima pendenza; detta ρ la densità del materiale

$$X=\rho \operatorname{sen}\varepsilon \qquad Y=0 \qquad Z=\rho\cos\varepsilon$$

e le equazioni generali di equilibrio

$$\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{xz}}{dz}=X \qquad \frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz}=Y$$

$$\frac{dp_{zz}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}=Z$$

dovendo essere

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{dp_{xx}}{dx}=0 & \frac{dp_{xy}}{dy}=0 & \frac{dp_{xy}}{dx}=0 \\ \frac{dp_{yy}}{dy}=0 & \frac{dp_{xz}}{dx}=0 & \frac{dp_{yz}}{dy}=0 \end{array}\right\} \quad (289)$$

perchè ogni piano di equazione $z=\text{cost}$ è superficie di uguale intensità molecolare, diventano

$$\frac{dp_{xz}}{dz}=\rho \operatorname{sen}\varepsilon \qquad \frac{dp_{yz}}{dz}=0 \qquad \frac{dp_{zz}}{dz}=\rho\cos\varepsilon \quad (290).$$

Ricordando quanto è stato detto al numero 20 e seguenti le (290) mostrano che una delle forze principali ha un valor zero e che le forze molecolari agenti in ogni punto giacciono tutte in un piano verticale passante pel medesimo e parallelo al piano delle xz. Se si eseguisce l'integrazione delle (290), ricordando che alla superficie superiore non agisce sforzo alcuno, si ottiene

$$p_{xz}=\rho z \operatorname{sen}\varepsilon \qquad p_{zz}=\rho z\cos\varepsilon$$

che danno per risultante

$$p_z=\sqrt{\rho^2 z^2(\operatorname{sen}^2\varepsilon+\cos^2\varepsilon}=\rho z$$

la quale farà coll'elemento cui corrisponde un angolo μ dato da

$$\operatorname{tang}\mu=\frac{X}{Z}=\frac{\operatorname{sen}\varepsilon}{\cos\varepsilon}=\operatorname{tang}\varepsilon$$

cioè la pressione p_z è diretta verticalmente.

L'equazione di terzo grado (20), che ha per radici i valori delle forze principali, diventa in questo caso

$$\sigma^2-(p_{xx}+p_{zz})\sigma+p_{xx}p_{zz}-p_{xz}^{\ 2}=0$$

da cui si ricava

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{p_{xx}+p_{zz}+\sqrt{(p_{xx}-p_{zz})^2+4p_{xz}^2}}{2}\\ \sigma_2 &= \frac{p_{xx}+p_{zz}-\sqrt{(p_{xx}-p_{zz})^2+4p_{xz}^2}}{2}\end{aligned}\right\} \quad (291)$$

equazioni che congiunte alla relazione $\operatorname{sen}\delta_m = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$ (Pag. 64) permettono di determinare le forze molecolari agenti sul punto, che si considera. Infatti dalle (291) si ricava

$$\sigma_1-\sigma_2 = \sqrt{(p_{xx}-p_{zz})^2+4p_{xz}^2}$$

$$\sigma_1+\sigma_2 = p_{xx}+p_{zz}$$

quindi

$$\operatorname{sen}\delta_m = \frac{\sqrt{(p_{xx}-p_{zz})^2+4p_{xz}^2}}{p_{xx}+p_{zz}}$$

da cui

$$(p_{xx}+p_{zz})\cos^2\delta_m - 4p_{xx}p_{zz}+4p_{xz}^2 = o \qquad (292).$$

L'equazione (292) essendo di secondo grado esistono due valori di p_{xz}, che soddisfano alle equazioni di equilibrio, cioè sono possibili due stati di equilibrio corrispondenti a questi due valori di p_{xz}, la questione viene a coincidere con quella studiata al problema III del numero 23, dove essa è stata completamente risolta con procedimento algebrico e geometrico servendoci del circolo molecolare.

Se sulla superficie superiore dell'ammasso esistesse un carico uniformemente distribuito, questo nel suo effetto equivarrebbe ad uno strato dello stesso materiale incoerente di altezza h sovrapposto all'ammasso, ed i risultati ottenuti superiormente non sarebbero alterati, poichè non soffre alcuna modificazione l'ipotesi fondamentale da cui si è partiti, soltanto invece di

$$p_{xz} = \rho y \operatorname{sen}\varepsilon \qquad p_{zz} = \rho y \cos\varepsilon$$

si avrebbe

$$p_{xz} = \rho(y+h)\operatorname{sen}\varepsilon \qquad p_{zz} = \rho(y+h)\cos\varepsilon.$$

CAPITOLO VI.

Movimenti vibratori nei corpi elastici e sollecitazioni dinamiche.

89. Sollecitazioni dinamiche. Formole per il calcolo dei movimenti vibratori nelle travature soggette a sollecitazione ed a deformazione piana. — Se le forze, che agiscono sopra un corpo elastico non crescono proporzionalmente alle deformazioni in modo da fare equilibrio in ogni istante alle forze interne, allora le varie molecole acquistano forza viva (Num. 13) e nel loro movimento oltrepassano la posizione di equilibrio dando origine a deformazioni maggiori di quelle corrispondenti a questo stato. Se le forze esterne hanno intensità e direzione costante si è già visto ai numeri 13 e 41 che le deformazioni massime, che si verificano, sono doppie di quelle corrispondenti alla posizione di equilibrio e che il movimento prende forma periodica o quasi periodica dando origine al fenomeno delle vibrazioni. Lo stesso fatto avviene quando il corpo riceva comunicazione di energia cinetica mediante urti, per variazione nell'intensità o direzione delle forze, che gli sono applicate, od altro. Tutte le volte che per una causa qualsiasi, urti, forze costanti in intensità e direzione, cangiamento del punto d'applicazione delle forze, ecc., le molecole di un corpo si mettono in moto sorpassando la posizione corrispondente all'equilibrio statico conveniente alle forze, che lo animano, dando origine (o colla tendenza a dare origine) a movimenti d'oscillazione intorno a questa posizione, si dice che il corpo è soggetto a sollecitazione dinamica. La determinazione esatta di questi movimenti avrebbe un interesse grandissimo pel fisico in generale, ed in particolare per l'ingegnere, poichè determinando il vero valore delle massime deformazioni si avrebbe un criterio esatto per valutare in ogni punto le forze elastiche e le condizioni di stabilità in base all'equazione di coesione (Num. 55).

Per studiare il moto dei varî punti di un sistema è necessario ricorrere all'equazione (97) del numero 51

$$\delta T+\delta W+\delta L=0$$

quando il sistema delle forze esterne ammetta una funzione potenziale, ed in generale all'equazione (Num. 51, pag. 150)

$$\delta U-\delta T-\delta L=0$$

in cui, conservando i simboli usati al numero 51,

$$\delta U = \int_3 \rho \left[\left(X - \frac{d^2u}{dt^2} \right) \delta u + \left(Y - \frac{d^2v}{dt^2} \right) dv + \left(Z - \frac{d^2w}{dt^2} \right) \delta w \right] dS +$$

$$+ \int_2 \left(p_{nx} \delta u + p_{ny} \delta v + p_{nz} \delta w \right) d\sigma$$

e

$$\delta T = \int_3 \rho \left(\frac{d^2u}{dt^2} \delta u + \frac{d^2v}{dt^2} \delta v + \frac{d^2w}{dt^2} \delta w \right) dS$$

mentre L esprime il lavoro di deformazione dovuto alle forze elastiche, che si sviluppano nel corpo. L'equazione superiore (vedi principio di D'Alembert, num. 5, pag. 20) si scinde nelle tre seguenti, analoghe per la forma a quelle d'equilibrio, ma che contengono in più le componenti d'inerzia dovute al movimento dei singoli punti,

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} + \frac{dp_{xz}}{dz} + X = \rho \frac{d^2u}{dt^2}$$

$$\frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} + \frac{dp_{yz}}{dz} + \rho Z = \rho \frac{d^2v}{dt^2}$$

$$\frac{dp_{xz}}{dx} + \frac{dp_{yz}}{dy} + \frac{dp_{zz}}{dz} + \rho Z = \rho \frac{d^2w}{dt^2}$$

ed integrando queste espressioni si otterranno u, v e w in funzione del tempo, ossia le leggi del movimento (Num. 1). Se non chè il problema già difficilissimo dell'integrazione delle equazioni generali dell'equilibrio elastico, diventa ancora più complesso in causa dell'aggiunta delle componenti d'inerzia, ed allo stato attuale delle cognizioni non si può sperare di giungere a nessuna soluzione, anche approssimata, che abbia il doppio carattere di semplicità e generalità, che specialmente interessa gli ingegneri. Anche nel caso relativamente semplice delle travature soggette a sollecitazione e deformazione piana s'arriva a formole, che non sono integrabili che in casi particolari.

Volendo studiare il movimento dei punti di una travatura soggetta a sollecitazioni dinamiche, il principio di D'Alembert può essere applicato in due modi diversi; prendendo in esame la por-

zione di trave compresa fra la sezione iniziale σ_0 ed una sezione σ_k qualsiasi, (*Fig.* 77ª, *tav.* XI) calcolando i valori delle forze e dei momenti X, F, M_x, M (conservando gli stessi simboli usati al capitolo precedente) tenendo conto anche delle componenti d'inerzia delle diverse molecole espresse per mezzo degli spostamenti corrispondenti, considerati come funzioni del tempo, ed introducendo questi valori nelle formole (149) del capitolo V; oppure considerando l'equilibrio del tronco infinitesimo di trave compreso fra due sezioni infinitamente vicine σ_k e σ_{k+1} sotto l'influenza delle forze esterne reali e delle componenti d'inerzia ottenute moltiplicando le masse delle diverse molecole per le derivate seconde prese rispetto al tempo degli spostamenti del loro centro di figura, ed integrando le equazioni che ne risultano, estendendo l'integrale a tutto il solido che si considera. Questo secondo metodo riesce ordinariamente più comodo, ne faremo quindi un'applicazione al caso di una travatura, il cui asse giaccia tutto in un piano, il quale sia contemporaneamente piano di sollecitazione, nell'ipotesi che essa soddisfaccia alle condizioni necessarie perchè abbia luogo la deformazione piana (Num. 67).

Siano (*Fig.* 77ª, *tav.* XI) $A_0\ A_k\ A_{k+1}$ l'asse della trave, $C_k D_k$ e $C_{k+1} D_{k+1}$ due sezioni normali infinitamente vicine

Ω, I e ρ l'area, il momento d'inerzia ed il raggio di girazione della sezione della trave, che supporremo costanti

r il raggio di curvatura dell'asse $A_0 A_k$ nel punto A_k prima della deformazione

s l'arco $A_0 A_k$

$\frac{ds}{r}$ l'angolo compreso fra le due sezioni $C_k D_k$ e $C_{k+1} D_{k+1}$

ε la variazione dell'angolo che la retta $A_k A_{k+1}$, che unisce i due centri delle due sezioni vicinissime $C_k D_k$, $C_{k+1} D_{k+1}$ fa con una retta qualsiasi, considerandola come positiva quando la rotazione avviene nel senso delle sfere di un orologio,

u e v gli spostamenti del punto A_k nel senso della tangente e della normale all'asse della trave del punto A_k

X, F, M le componenti normali e tangenziali ed il momento flettente unitarî delle forze esterne direttamente applicate all'elemento $C_k D_k$, $C_{k+1} D_{k+1}$, ossia le componenti ed il momento corrispondenti all'unità di massa

g l'accelerazione dei corpi pesanti nel vuoto

Π, E, $G = \frac{m}{2(m+1)} E$, la densità ed i moduli d'elasticità longitudinale e tangenziale corrispondenti alla materia, di cui la trave è composta.

Le componenti d'inerzia normali e tangenziali alla sezione $C_k D_k$, e la coppia d'inerzia corrispondente al tronco $C_k D_k$, $C_{k+1} D_{k+1}$ saranno espresse rispettivamente da

$$-\frac{\Pi}{g}\Omega ds\frac{d^2u}{dt^2}, \quad -\frac{\Pi}{g}\Omega ds\frac{d^2v}{dt^2}, \quad -\frac{\Pi}{g}\Omega ds\rho^2\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}.$$

Nella sezione $C_{k+1} D_{k+1}$ gli spostamenti del punto A_{k+1} saranno dati da $u+\frac{du}{ds}ds$, $v+\frac{dv}{ds}ds$ e la rotazione da $\varepsilon+\frac{d\varepsilon}{ds}ds$; la rotazione relativa risulta $\frac{d\varepsilon}{ds}ds$ e gli spostamenti relativi si ottengono proiettando sulla tangente e la normale alla trave in A_k gli spostamenti dei punti A_k e A_{k+1}. Se si tiene conto che l'angolo compreso fra due sezioni normali è piccolissimo ed espresso da $\frac{ds}{r}$, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore e sostituendo il valore dell'arco a quello del seno, poichè gli angoli sono infinitamente piccoli, s'ottiene come valore dello spostamento relativo secondo la tangente

$$\frac{du}{ds}ds+\frac{vds}{r}$$

e secondo la normale

$$\frac{dv}{ds}ds+\varepsilon ds-\frac{uds}{r}.$$

In queste formole sono stati trascurati due elementi; la variazione infinitesima dell'angolo infinitamente piccolo compreso fra due sezioni durante il periodo di vibrazione, ed il cambiamento di posizione durante lo stesso periodo della tangente e della normale all'asse della trave nel punto A_k, poichè nell'ipotesi di deformazioni infinitesime queste variazioni non possono che produrre errori rappresentati da quantità infinitamente piccole di ordine superiore (*).

Le forze molecolari essendo proporzionali alle deformazioni, sulla faccia $C_k D_k$ e nella direzione $A_k u$ agirà una forza elastica rappresentata da

$$E\Omega\left(\frac{du}{ds}+\frac{v}{r}\right)$$

(*) Bresse, *Cours de mécanique appliquée aux constructions.* Seconda edizione, pag. 146.

nella direzione $A_k v$ una forza elastica rappresentata da

$$G\Omega\left(\frac{dv}{ds}+\varepsilon-\frac{u}{r}\right)ds$$

ed un momento flettente espresso da

$$E\Omega\rho^2\frac{d\varepsilon}{ds}.$$

Sulla sezione $C_{k+1}D_{k+1}$ agiranno ancora le forze precedenti aumentate dei loro differenziali, dirette nel senso degli spostamenti. Componendo fra loro queste forze nello stesso modo, col quale si sono composti precedentemente gli spostamenti pel calcolo della deformazione relativa, si ottiene

parallelamente ad $A_k u$

$$E\Omega ds\frac{d}{ds}\left(\frac{du}{ds}+\frac{v}{r}\right)+\frac{G\Omega ds}{r}\left(\frac{dv}{ds}+\varepsilon-\frac{u}{r}\right)$$

parallelamente ad $A_k v$

$$G\Omega ds\frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds}+\varepsilon-\frac{u}{r}\right)-\frac{E\Omega ds}{r}\left(\frac{du}{ds}+\frac{v}{r}\right) \qquad (293)$$

ed il momento totale preso rispetto ad un asse normale al piano della figura e passante pel centro di gravità dell'elemento $C_k D_k$ valutato nel senso della rotazione ε sarà dato da

$$E\Omega ds\rho^2\frac{d^2\varepsilon}{ds^2}-G\Omega ds\left(\frac{dv}{ds}+\varepsilon-\frac{u}{r}\right) \qquad (294).$$

Per cui le leggi del moto dell'elemento prismatico considerato, applicando il principio di D'Alembert, saranno date dalle tre equazioni seguenti

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2u}{dt^2}&=X+\frac{Eg}{\Pi}\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{du}{ds}+\frac{v}{r}\right)+\frac{m}{2(m+1)r}\left(\frac{dv}{ds}+\varepsilon-\frac{u}{r}\right)\right]\\
\frac{d^2v}{dt^2}&=F+\frac{Eg}{\Pi}\left[\frac{m}{2(m+1)r}\frac{d}{ds}\left(\frac{dv}{ds}+\varepsilon-\frac{u}{r}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{du}{ds}+\frac{v}{r}\right)\right]\\
\rho^2\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}&=M+\frac{Eg}{\Pi}\left[\rho^2\frac{d^2\varepsilon}{ds^2}-\frac{m}{2(m+1)}\left(\frac{dv}{ds}+\varepsilon-\frac{u}{r}\right)\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (295)$$

che potranno servire a determinare in funzione del tempo t e dell'arco s le quantità u, v, ε.

90. Varie specie di sollecitazioni dinamiche. Metodo generale per determinare le massime deformazioni da esse prodotte. — Le equazioni (295) in via generale non sono integrabili ed anche nei casi particolari, nei quali si può eseguire l'integrazione s'incontrano difficoltà non lievi a determinare le funzioni arbitrarie, che s'introducono con questa operazione. Non essendo quindi possibile una soluzione generale in termini finiti dal problema delle travi vibranti, non vi insisteremo maggiormente, poichè le soluzioni particolari costituiscono materia della seconda parte di quest'opera, dove appunto si cercherà di risolvere i casi speciali, che si possono presentare ad un ingegnere. D'altra parte ciò che interessa il costruttore non sono tanto le leggi, colle quali ha luogo il movimento vibratorio, quanto la determinazione delle massime deformazioni, che si verificano durante il periodo di vibrazione, per poter giudicare se anche in questo caso sarà soddisfatta l'equazione di coesione, oppure se verrà superato quel limite, oltre al quale la stabilità della costruzione non è più assicurata, od anche assolutamente compromessa. Se si indica con L_e il lavoro fatto dalle forze esterne, con L_i quello fatto dalle reazioni elastiche agenti fra molecola e molecola e con T la forza viva, tutte le volte che per una causa qualsivoglia il corpo deformandosi giunge alla posizione corrispondente all'equilibrio statico possedendo una certa energia $T=L_e-L_i$ (Num. 13), che è quanto dire tutte le volte che il lavoro fatto dalle forze esterne per arrivare alla posizione d'equilibrio statico è maggiore del lavoro resistente sviluppato dalle forze elastiche, per un teorema dimostrato precedentemente (Num. 13 e 41) esso non si arresterà nel suo movimento alla posizione di equilibrio, ma continuerà finchè sia $T=L_e-L_i=0$. Dopo di che, non verificandosi in questa posizione le condizioni, che assicurano l'equilibrio, esso incomincierà un moto retrogrado d'oscillazione intorno alla posizione d'equilibrio, che per le dispersioni di energia importata dalle resistenze passive, continuerà, diminuendo sempre d'importanza, finchè sia estinta tutta la sua forza viva. La determinazione quindi delle massime deformazioni, che avvengono durante il periodo di vibrazione si ottiene risolvendo l'equazione $T=0$ ossia

$$L_e=L_i \qquad (296).$$

Per ciò che riguarda le travature il valore di L_i viene dato dalle formole del capitolo V e nei casi particolari per risolvere

la questione non resta che a determinare L_e. Avute le massime deformazioni si possono determinare facilmente i corrispondenti valori dei carichi unitarî R ed S (Num. 64) e verificare le condizioni di stabilità, oppure determinare le sezioni resistenti convenienti alle diverse membrature della costruzione.

Nei casi ordinari della pratica le sollecitazioni dinamiche sulle travature sogliono essere prodotte dalle cause seguenti:

a) Le forze esterne sono costanti in intensità, direzione e senso; allora il lavoro motore è superiore al lavoro elastico resistente, e precisamente si è dimostrato ai numeri 13 e 41 che $L_e = 2L_i$, e che il movimento si arresta quando la deformazione elastica è doppia di quella corrispondente alla posizione di equilibrio statico.

b) Le forze esterne hanno intensità variabile col tempo; questo caso è specialmente grave quando la variazione delle forze esterne è periodica ed il periodo coincide con quello d'oscillazione del moto vibratorio, perchè in tal caso vi è accumulazione di energia e facilmente si arriva ad ottenere deformazioni capaci di produrre lo snervamento o la rottura della costruzione. Questo modo speciale di azione dei carichi lo distingueremo col nome di *sollecitazione dinamica d'oscillazione*.

c) I carichi, che influenzano la trave vengono ad agirvi bruscamente col mezzo di masse urtanti capaci di trasmettere al sistema una determinata quantità di moto. Tale caso verrà da noi indicato sotto il nome di *influenza degli urti* o *sollecitazione dinamica per urto*.

d) Le forze esterne, qualunque sia la loro intensità, non hanno posizione fissa, ma si muovono lungo l'asse della trave in guisa che in ogni istante cambia la posizione di equilibrio stabile verso le quali il solido tende a deformarsi. Inoltre ha luogo una particolare azione dovuta alla forza radiale centrifuga delle masse in movimento tutte le volte (e sarà il caso ordinario) che l'asse della trave prende od ha tendenza a prendere una forma diversa dalla rettilinea. L'insieme di questo fenomeno l'indicheremo col nome di *influenza di moto* o *sollecitazione dinamica per movimento dei carichi applicati*.

e) Finalmente dal cumulo di tutte o di molte di queste cause (per es., il movimento dei treni sui ponti) potranno essere prodotte sollecitazioni dinamiche complesse. In base però al principio della sovrapposizione degli effetti le azioni complesse potranno essere distinte nelle varie azioni semplici, che vi danno origine, calcolando gli effetti di ciascuna di esse si potrà facilmente valutare l'effetto totale.

Nelle costruzioni ordinarie si presenta difficilmente il caso di dover considerare sollecitazioni dinamiche diverse da quelle sopra enumerate, si potrà quindi riguardare come sufficiente per raggiungere lo scopo, che si propone questa trattazione, limitarci allo studio delle deformazioni da esse prodotte.

91. Varie espressioni del lavoro di deformazione nelle travature. Casi particolari. — Ai numeri 13 e 41 si è dimostrato come il lavoro di deformazione prodotto dalle forze interne in un corpo elastico sotto l'influenza di forze esterne costanti per raggiungere la posizione di equilibrio sia la metà del lavoro fatto da queste ultime e che la forza viva acquistata dal sistema produce nel medesimo deformazioni doppie di quelle corrispondenti alla posizione di equilibrio. Le formole del capitolo V permettono di determinare completamente le deformazioni statiche, ossia corrispondenti allo stato di equilibrio in una travatura sotto l'azione di un sistema qualsiasi di forze, quindi, se si prescinde dall'inerzia della materia, la deformazione dinamica sarà sempre facilmente determinabile nei varî casi particolari.

Per poter applicare l'equazione

$$T = L_e - L_i = 0 \qquad (296)$$

dedotta dall'espressione della forza viva interessa di avere i valori di L_e e di L_i. L'espressione del lavoro prodotto dalle forze esterne sarà sempre determinabile nei casi particolari moltiplicando le forze stesse per lo spostamento del loro punto d'applicazione proiettato sulla loro direzione rispettiva. Quanto al lavoro di deformazione esso potrà essere determinato mediante le formole del capitolo V, numero 64, ed interessa particolarmente averne l'espressione in funzione delle deformazioni, delle forze esterne e delle deformazioni, e finalmente in funzione delle sole forze esterne. Le ipotesi di carico, che più interessano l'ingegnere, sono due, quella cioè di un carico Q isolato agente in un punto determinato della travatura e quella di un carico q uniformemente distribuito per metro corrente della medesima. Conveniamo che

L_i rappresenti il lavoro di deformazione espresso in funzione delle sole deformazioni

Γ_i il lavoro di deformazione espresso in funzione delle sole forze esterne

Λ_i lo stesso lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze e delle deformazioni

η lo spostamento di un punto qualsiasi della travatura.

Al numero 73 abbiamo dedotto dal teorema di correlazione la formola (186)

$$\delta_k = \sum_{i=1}^{i=n} P_i (\delta_k)_i$$

cioè *che la deformazione corrispondente ad un punto qualsiasi di una travatura è uguale alla somma dei prodotti dei carichi agenti sulla medesima per dei coefficienti costanti dipendenti dalla sua forma, dal punto d'applicazione dei carichi e dalla natura del materiale, che la compone*. Se sulla travatura (semplice o composta) agisce soltanto un carico isolato Q e si indica per brevità con k il coefficiente costante $(\delta_k)_k$ e con η_1 lo spostamento del punto in cui la forza Q è applicata

$$\eta_1 = Q k \tag{297}$$

ed il lavoro Γ_i in funzione della forza esterna Q, che si suppone cresca gradatamente da zero a Q, sarà dato da

$$\Gamma_i = \int Q \, d\eta_1 = \int Q k \, dQ = \frac{k Q^2}{2} \tag{298}$$

e poichè $\eta_1 = k Q$ (come ricavasi anche applicando il teorema di Castigliano alla formola precedente) si ottiene per sostituzione

$$\Lambda_i = \frac{\eta_1 Q}{2} \tag{299}$$

$$L_i = \frac{\eta_1^2}{2k} \tag{300}.$$

Se invece si suppone il carico distribuito in modo uniforme per metro corrente di travatura, e con direzione normale all'asse della medesima, che supporremo rettilineo e coincidente coll'asse delle x. La formola (186) dà per un punto qualsiasi

$$\eta = \delta_k = \sum_{i=1}^{i=n} P_i (\delta_k)_i = q \int_0^l (\delta_k)_i \, dx = q k_1 \tag{301}$$

in cui k_1 è un coefficiente costante da determinarsi secondo i casi mediante un'integrazione esatta od approssimata (formola di Simpson

o sommatoria semplice) e che dipende soltanto dalla forma della trave e dalla natura del materiale che la compone. Dalla (301) si ricava in modo analogo a quello usato precedentemente pel calcolo del valore di Γ_i corrispondente ad un carico isolato Q

$$\Gamma_i = \Sigma \Delta x \Sigma q d\eta = \int dx \int q d\eta = \frac{q^2 l}{2} \int_0^l \frac{k_1}{l} dx = \frac{q^2 l}{2} k_m \qquad (302)$$

indicando con k_m il valore medio del coefficiente k_1 nell'intervallo compreso fra $x = o$ od $x = l$. Se con η_m si indica l'ordinata media di deformazione, in causa del teorema dimostrato al numero 38

$$\eta_m = \frac{1}{l} \frac{d\Gamma_i}{dq} = \frac{q l k_m}{l} = q k_m = \varepsilon f$$

convenendo di rappresentare con ε il rapporto fra l'ordinata media η_m e l'ordinata massima f nel punto di mezzo della trave. Sostituendo questo valore nella (302) si ricava

$$\Lambda_i = \frac{q l \cdot \eta_m}{2} = \varepsilon \frac{q l f}{2} \qquad (303)$$

$$L_i = \frac{l \eta_m^2}{2 k_m} = \varepsilon^2 \frac{l f^2}{2 k_m} \qquad (304).$$

Per una travatura qualsiasi sollecitata in punti determinati da carichi isolati Q (Q_1, Q_2, . . . Q_x) dalla formola (186) si ottiene

$$\delta_k = \eta = \Sigma Q_i (\delta_k)_i = Q \Sigma \frac{Q_i}{Q} (\delta_k)_i = Q k_2$$

da cui si potranno ricavare formole analoghe alle precedenti, sebbene alquanto più complesse e di uso meno facile nei calcoli fatti per determinare le condizioni di resistenza e le deformazioni delle travature. Se si volessero poi prendere in esame solidi ad asse curvilineo la forma delle formole, che rappresentano il lavoro di deformazione, rimane ancora la medesima, soltanto il calcolo ne diventa alquanto più difficile dovendo considerare, invece degli spostamenti effettivi, le loro proiezioni secondo le direzioni delle forze, che agiscono sulle medesime.

Non sembra opportuno in questo studio generale prendere in

esame molti casi particolari, che saranno svolti con maggiore estensione nella seconda parte di quest'opera, quindi ci limiteremo alle formole esposte perchè sono sufficienti a risolvere i problemi, che si presentano più spesso all'ingegnere. Il valore poi dei coefficienti k, k_m, k_1 potrà in ogni caso essere determinato con uno qualunque dei metodi esposti nel capitolo V. È evidente che essi rappresentano il valore della deformazione η quando Q oppure q sono uguali all'unità. In altri termini essi sono l'ordinata massima', l' ordinata media oppure la somma di un determinato numero di ordinate dei diagrammi unitarî di deformazione, di cui si è parlato al numero 39. Pel calcolo effettivo di questi coefficienti k, k_m, k_1 si potrà ricorrere alla formola

$$k=(\eta)_{Q=1}=\Sigma\left(\frac{(X^k)^2}{EA}+\frac{(F^k)^2}{GA}+\frac{(M^k)^2}{EI}\right)\Delta s=$$

$$=\int ds\left(\frac{(X^k)^2}{EA}+\frac{(F^k)^2}{GA}+\frac{(M^k)^2}{EI}\right)$$

dedotta dal teorema di correlazione e precisamente dalla (186) facendo tutti i carichi $P=o$ ad eccezione di $P_i=Q=1$ ed $i=k$, oppure all'equazione analoga dedotta dalla (190), se si tratta di una travatura reticolare articolata. Gli stessi coefficienti potranno essere calcolati servendoci delle formole (147), (148) oppure (149), che danno le deformazioni di un punto sommando gli spostamenti dovuti alle deformazioni delle parti elementari componenti il sistema, oppure ricorrendo al teorema di Castigliano (Num. 38).

Prendiamo in esame i casi ordinarî di un tirante rettilineo sollecitato ad un estremo da una forza di intensità costante X e di una trave ad asse rettilineo incastrata orizzontalmente all'estremo A e libera all'altro, oppure appoggiata liberamente alle sue estremità A e B e caricata da un peso isolato Q agente in C e distante a dall'estremo A di sinistra e b dall'estremo B di destra e da un peso p uniformemente distribuito per metro corrente della medesima. Sia l la lunghezza del tirante o della trave, conveniamo di prendere l'asse delle x coincidente coll'asse del solido e supponiamo che la sua sezione trasversale sia costante, e che siano rappresentate da A e da I la sua estensione superficiale ed il suo momento d'inerzia. Trascurando per semplicità e perchè poco importante l'influenza degli sforzi di taglio, l'espressione del lavoro interno di deformazione si ricava immediatamente per ogni caso dalle formole del capitolo V.

I. Sia AB (*Fig.* 78ª, *tav.* XI) l'asta di lunghezza l sollecitata al suo estremo B dalla forza costante X agente secondo il suo asse, detto f l'allungamento totale dell'asta allo stato di equilibrio statico, dalla formola

$$d\Gamma_i = \frac{X^2}{2EA}\,dx$$

si ricava

$$\Gamma_i = \int_A^B \frac{X^2}{2EA}\,dx = \frac{X^2}{2EA}\int_A^B dx = \frac{X^2 l}{2EA}.$$

Pel teorema di CASTIGLIANO sulle proprietà delle derivate del lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze esterne (Num. 38)

$$f = \frac{d\Gamma_i}{dX} = \frac{Xl}{EA}$$

quindi

$$X = EA\frac{f}{l}.$$

Combinando questa relazione con l'espressione del lavoro Γ_i in funzione delle forze esterne si ottiene

$$\Gamma_i = \frac{X^2 l}{2EA} = \frac{X}{2}\frac{Xl}{EA} = \frac{Xf}{2} = \frac{EA}{2l}f^2 = L_i$$

ossia

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_i &= \frac{X^2 l}{2EA} \qquad \Lambda_i = \frac{Xf}{2} \\ L_i &= \frac{EA}{2l}f^2 \qquad k = \frac{l}{EA} \end{aligned}\right\} \quad (305).$$

II. Sia AB (*Fig.* 79ª, *tav.* XI) una trave incastrata orizzontalmente al suo estremo A e libera all'altro, sollecitata da un peso p uniformemente distribuito secondo il suo asse e da un carico Q concentrato nel punto C distante a dall'estremo A e b dall'altro estremo B. Dalla formola (Num. 64)

$$d\Gamma_i = \frac{1}{2}\frac{M^2 dx}{EI}$$

si ricava

$$\Gamma_i = \frac{1}{2}\int_o^l \frac{M^2\,dx}{EI} = \frac{1}{2EI}\left[\int_o^a \left[Q(a-x)+\frac{p(l-x)^2}{2}\right]^2 dx + \right.$$

$$\left. + \int_a^l \frac{p^2(l-x)^4}{4}\,dx\right] = \frac{1}{2EI}\left[Q^2\frac{a^3}{3}+\right.$$

$$\left. + Qp\frac{a^2}{12}\left(6l^2-4la+a^2\right)+\frac{p^2 l^5}{20}\right].$$

Se si fa $a=l$, ossia se si suppone che il carico Q sia applicato all'estremo libero B della trave, allora

$$\Gamma_i = \frac{1}{2EI}\left[Q\frac{l^3}{3}+Qp\frac{l^4}{4}+p^2\frac{l^5}{20}\right].$$

Indichiamo con f_c la freccia di deformazione nel punto in cui è applicato il carico Q, pel teorema sulle derivate del lavoro

$$f_c = \frac{d\Gamma_i}{dQ} = \frac{Qa^3}{3EI}+\frac{pa^2}{24EI}\left[6l^2-4la+a^2\right]$$

e quando $a=l$

$$f = \frac{Ql^3}{3EI}+\frac{pl^4}{8EI}.$$

Se sulla trave non agisce che il carico Q all'estremo B allora

$$f = \frac{Ql^3}{3EI} \qquad Q = \frac{3EI}{l^3}f$$

quindi

$$\Gamma_i = \frac{Q^2 l^3}{6EI} = \frac{Q}{2}\,\frac{Ql^3}{3EI} = \frac{Qf}{2} = \frac{3EI}{2l^3}f^2 = L_i$$

ossia

$$\left.\begin{aligned} L_i &= \frac{3}{2}\,\frac{EI}{l^3}f^2 & \Lambda_i &= \frac{Qf}{2} \\ \Gamma_i &= \frac{Q^2 l^3}{6EI} & k &= \frac{l^3}{3EI} \end{aligned}\right\} \quad (306).$$

Se invece sulla trave non agisce che il carico p uniformemente distribuito per metro corrente della medesima, detta f la freccia di deformazione corrispondente al punto B,

$$f=\left(\frac{d\Gamma_i}{dQ}\right)_{\substack{a=l\\Q=o}}=\frac{pl^4}{8EI} \qquad p=\frac{8EI}{l^4}f$$

$$\eta_m=\frac{1}{l}\frac{d\Gamma_i}{dp}=\frac{pl^4}{20EI}=pk_m=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{8}p\frac{l^4}{EI}=\frac{2}{5}f=\varepsilon f$$

quindi

$$\Gamma_i=\frac{p^2l^5}{40EI}=\frac{pl}{2}\frac{pl^4}{20EI}=\frac{pl\cdot\eta_m}{2}=\frac{1}{5}pl\cdot f=\frac{8}{5}\frac{EI}{l^3}f^2$$

ossia

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma_i=\frac{p^2l^5}{40EI} \qquad \Lambda_i=\frac{pl\cdot\eta_m}{2}=\frac{1}{5}pl\cdot f \qquad L_i=\frac{8}{5}\frac{EI}{l^3}f^2\\&k_m=\frac{l^4}{20EI} \qquad \varepsilon=\frac{2}{5}\end{aligned}\right\}\ (307).$$

III. Sia AB (*Fig.* 80ª, *tav.* XI) una trave orizzontale appoggiata liberamente ai suoi estremi A e B, sollecitata da un carico isolato Q distante a dall'estremo A e b dall'estremo B e da un peso p per metro corrente distribuito uniformemente lungo il suo asse. Il lavoro di deformazione Γ_i è dato da

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_i=\frac{1}{2EI}\int_o^l M^2dx=\frac{1}{2EI}\Bigg[\int_o^a\left[\frac{Qb}{l}x+\frac{px}{2}(l-x)\right]^2dx+\\+\int_a^l\left[\frac{Qb}{l}x-Q(x-a)+\frac{px}{2}(l-x)\right]^2dx\Bigg]=Q^2\frac{a^2b^2}{6EIl}+\\+Qp\frac{a}{24EI}\left[a^3-2a^2l+l^3\right]+p^2\frac{l^5}{240EI}\end{aligned}\right\}\ (308).$$

Se $a=b=\frac{l}{2}$, cioè se Q è applicato nel punto di mezzo della trave

$$\Gamma_i=Q^2\frac{l^3}{96EI}+Qp\frac{5l^4}{384EI}+p^2\frac{l^5}{240EI} \qquad (309).$$

Derivando le due espressioni (308) e (309) del lavoro di deformazione si ottengono la freccia f_c nel punto d'applicazione della forza Q, e quindi dalla seconda la freccia massima f nel punto di mezzo della trave,

$$f_c = \frac{d\Gamma_i}{dQ} = Q\frac{a^2b^2}{3EIl} + p\frac{a}{24EI}(a^3 - 2a^2l + l^3)$$

$$f = \left(\frac{dF}{dQ}\right)_{\substack{l \\ a=\frac{l}{2}}} = \frac{1}{48}\frac{Ql^3}{EI} + \frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI}.$$

Se sulla trave agisce solo il peso isolato Q nel punto di mezzo allora

$$f = \frac{Ql^3}{48EI} \qquad Q = \frac{48EI}{l^3}f$$

$$\Gamma_i = \frac{Q^2l^3}{96EI} = \frac{Q}{2}\frac{Ql^3}{48EI} = \frac{Qf}{2} = \frac{24EI}{l^3}f^2$$

e quindi

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_i &= \frac{Q^2l^3}{96EI} & \Lambda_i &= \frac{Qf}{2} \\ L_i &= \frac{24EI}{l^3}f^2 & k &= \frac{l^3}{48EI} \end{aligned}\right\} \quad (310).$$

Se invece sulla trave agisce solo il carico p uniformemente distribuito lungo l'asse della medesima allora

$$f = \frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI} \qquad p = \frac{384}{5}\frac{EI}{l^4}f$$

$$\eta_m = \frac{1}{l}\frac{d\Gamma_i}{dp} = \frac{1}{120}\frac{pl^4}{EI} = \frac{16}{25}\cdot\frac{5}{384}\frac{pl^4}{EI} = \frac{16}{25}f = \varepsilon f$$

quindi

$$\Gamma_i = \frac{p^2l^5}{240EI} = \frac{pl}{2} \times \frac{pl^4}{120EI} = \frac{pl}{2}\eta_m = \frac{pl}{2}\varepsilon f = \frac{16}{25} \times \frac{pl}{2}f =$$

$$= \frac{3072}{125}\frac{EI}{l^3}f^2 = L_i$$

ossia

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{p^2 l^5}{240\,EI} \qquad \Lambda_1 = \frac{pl}{2}\,\eta_m = \frac{8}{25}\,pl\,f \qquad L_1 = \frac{3072}{125}\,\frac{EI}{l^3}\,f^2 \\ k_m &= \frac{l^4}{120\,EI} \qquad \varepsilon = \frac{16}{25} \end{aligned}\right\} \quad (311).$$

92. Deformazioni elastiche sotto l'effetto di urti. — Supponiamo che una massa del peso Q venga ad urtare nel punto C una travatura essendo animata da velocità V. Sia P il peso della travatura urtata, V_1 la velocità della massa Q alla fine dell'urto e v_1 la velocità di un punto qualsiasi della massa urtata. È noto che la somma delle quantità di moto prima e dopo l'urto moltiplicate per la velocità, che hanno alla fine dell'urto stesso le masse del sistema durante l'elemento di tempo dt, prendendo le quantità di moto finali con segno negativo, deve essere uguale a zero, quindi sarà

$$\frac{Q}{g}\,V\,V_1\,dt - \frac{Q}{g}\,V_1\,V_1\,dt - \int_P \frac{dP}{g}\,v_1\,v_1\,dt = 0.$$

Dividendo per $\frac{V_1\,dt}{g}$, l'equazione superiore può essere scritta come segue

$$V_1 = \frac{QV}{Q + P\int_P \left(\frac{v_1}{V_1}\right)^2 \frac{dP}{P}} = \frac{QV}{Q+\lambda P} = \frac{V}{1+\lambda\,\frac{P}{Q}}\ (*) \qquad (312)$$

in cui

$$\lambda = \int_P \left(\frac{v_1}{V_1}\right)^2 \frac{dP}{P}$$

è un coefficiente numerico da determinarsi caso per caso quando sia noto il valore del rapporto $\left(\frac{v_1}{V}\right)$.

(*) Il teorema da cui deriva questa formola è poco usato ed è stato anche oggetto di controversia. Sebbene dopo i lavori di Cauchy (*Bulletin de Ferussac*, 1829, vol. XI), Coriolis, Lagrange e Barré de Saint-Venant ogni dubbio sull'applicabilità del medesimo al caso presente debba essere completamente scomparso, tuttavia, anche per riferirci ad un altro teorema più comune, riportiamo una seconda dimostrazione della stessa formola deducendola dal teorema sulle perdite di forza viva nei rapidi cambiamenti di velocità.

La stessa formola può anche ricavarsi dal teorema di Carnot sulle perdite di forza viva nei cambiamenti bruschi di velocità. Prima dell'urto la forza viva della massa $\frac{Q}{g}$ era $\frac{Q}{2g}V^2$, dopo l'urto la forza viva del sistema è

$$\frac{Q}{2g}V_1^2+\int_P \frac{dP}{2g}v_1^2=\frac{Q}{2g}V_1^2+\frac{P}{2g}V_1^2\int\left(\frac{v_1}{V_1}\right)^2\frac{dP}{P}=\frac{Q}{2g}V_1^2+\lambda\frac{P}{2g}V_1^2.$$

Uguagliando la perdita di forza viva alla forza viva dovuta alle velocità perdute risulta

$$\frac{Q}{2g}V^2-\frac{Q}{2g}V_1^2-\lambda\frac{P}{2g}V_1^2=\frac{Q}{2g}(V-V_1)^2+\lambda\frac{P}{2g}(-V_1)^2$$

ossia

$$\frac{Q}{2g}V^2-\frac{Q}{2g}V_1^2-\lambda\frac{P}{2g}V_1^2=\frac{Q}{2g}V^2-2\frac{Q}{2g}VV_1+\frac{Q}{2g}V_1^2+\lambda\frac{P}{2g}V_1^2$$

da cui si ricava come precedentemente

$$V_1=\frac{QV}{Q+\lambda P}=\frac{V}{1+\lambda\frac{P}{Q}}.$$

Se nel punto in cui avviene l'urto si suppone concentrata una massa $\frac{P'}{g}$, allora il momento virtuale delle quantità di moto prima e dopo l'urto calcolato, prendendo come spostamenti virtuali quelli, che si verificano durante l'ultimo istante dell'atto dell'urto, (come bisogna sempre fare perchè il principio dei lavori virtuali sia applicabile alla risoluzione di questi problemi) risulta

$$\frac{Q}{g}VV_1dt-\frac{Q}{g}V_1^2dt-\frac{P'}{g}V_1^2dt+\int\frac{dP}{g}v_1v_1dt=0$$

od anche, ripetendo le stesse operazioni eseguite precedentemente,

$$V_1=\frac{QV}{Q+P+\lambda P}=\frac{V}{1+\frac{P'}{Q}+\lambda\frac{P}{Q}} \qquad (313).$$

La risoluzione generale del problema relativo alla determinazione delle vibrazioni, che avvengono nelle travature sotto l'azione di

urti, dipende dall'integrazione delle equazioni (295), operazione che presenta notevole difficoltà anche nei casi più semplici. In queste condizioni la ricerca di una soluzione approssimata di questo problema ha un particolare interesse per l'ingegnere, quand'anche essa riesca applicabile entro limiti non molto estesi, purchè conduca alla soluzione di una classe importante di questioni pratiche ed attinenti all'esercizio dell'ingegneria.

Se si suppone che una trave AB della lunghezza $l=2c$ fissa nei suoi punti estremi A e B sia urtata nel suo punto di mezzo da una massa $\frac{Q}{g}$ (*Fig.* 81ª, *tav.* XI) animata dalla velocità V, e si indica con $\frac{p}{g}$ la sua massa per metro corrente, prescindendo dall'effetto della gravità, ciascun tronco della trave dopo l'urto è animato da una forza rappresentata da $\frac{p\,dx}{g}\frac{d^2y}{dt^2}$, e quindi pel teorema dimostrato al numero 75 sulle proprietà delle derivate del momento flettente e dello sforzo di taglio

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\frac{p}{g}\frac{d^2y}{dt^2}=0.$$

Equazione differenziale della fibra neutra longitudinale della trave alla fine del tempo t, che si sarebbe potuto dedurre anche dalla terza delle (295) introducendovi le condizioni particolari del problema preso in considerazione (*). Se si pone $\tau=\sqrt{\frac{Pc^3}{2gEI}}$, il valore della deformazione y è dato dall'equazione (**)

$$y=V\tau\sum\frac{\frac{4}{m}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{mx}{c}}{\cos m}-\frac{\operatorname{senh}\frac{mx}{c}}{\cosh m}\right)}{m\left(\frac{\operatorname{sen}m}{\cos m}-\frac{\operatorname{senh}m}{\cosh m}\right)+m^2\left(\frac{1}{\cos^2 m}-\frac{1}{\cosh^2 m}\right)}\operatorname{sen}\frac{m^2t}{\tau}\qquad(314)$$

in cui il segno Σ si estende a tutti i valori, in numero infinito, di m radici reali e positive dell'equazione

$$m\left(\frac{\operatorname{sen}m}{\cos m}-\frac{\operatorname{senh}m}{\cosh m}\right)=\frac{2P}{Q}\qquad(315).$$

(*) Bresse, Opera citata, pag. 364.

(**) Veggasi la parte seconda all'articolo relativo.

Come appare da questa relazione il movimento si compone della sovrapposizione di un'infinità di vibrazioni semplici della durata periodica $2\Pi\frac{\tau}{m^2}$ perchè (*)

$$\operatorname{sen}\frac{m^2}{\tau}\left(t+2\Pi\frac{\tau}{m^2}\right)=\operatorname{sen}\frac{m^2 t}{\tau}$$

ossia di periodi sempre più corti a misura che si considerano quelli, che corrispondono a valori più grandi del parametro m.

Questo fatto d'altronde è messo in evidenza in tutti i corsi e trattati di fisica generale (**), e può accettarsi come cosa nota anche indipendentemente dalla discussione dell'equazione (314) o di altre analoghe, che si otterrebbero quando si supponesse un altro modo di percussione. Una prima oscillazione o vibrazione fondamentale o principale si estende a tutta la trave e le altre si sviluppano soltanto su tronchi successivi della medesima, separati gli uni dagli altri da punti, che portano il nome di nodi o punti nodali. La prima vibrazione ha il più lungo periodo e dà le massime deviazioni dalla posizione primitiva dell'asse, le altre hanno periodi sempre più brevi ed in certo qual modo risultano dall'insieme degli spostamenti dell'asse della trave rispetto alla linea media dell'oscillazione principale (linea che assumerebbe l'asse quando si trascurassero le vibrazioni a periodo più rapido).

Le deformazioni elastiche prodotte nelle travature dalle vibrazioni per ipotesi non possono essere che molto piccole rispetto alle dimensioni delle medesime, quindi per la loro misura può evidentemente bastare tener calcolo degli spostamenti corrispondenti all'oscillazione fondamentale della trave (oscillazione o vibrazione d'insieme) perchè le parti di spostamento totale dovute alle vibrazioni a periodo più rapido sono alla loro volta molto piccole rispetto agli spostamenti corrispondenti alla vibrazione d'insieme o principale e per conseguenza la loro influenza non si fa sentire, o soltanto debolmente, entro i limiti delle quantità che l'ingegnere ritiene apprezzabili (ordinariamente il millimetro o le frazioni di millimetro facilmente apprezzabili senza procedimenti od istrumenti particolari, quali sarebbero il mezzo millimetro oppure il quarto od il quinto di millimetro a seconda dei casi). Da queste considerazioni risulta che il calcolo del coefficiente λ per una ricerca approssimata può essere fatto nell'ipotesi che le velocità possedute dai diversi punti della trave stiano fra loro nello stesso rapporto delle deformazioni, che subirebbero gli stessi punti quando

(*) Barrè de Saint-Venant, Opera citata.

(**) Jamin, *Cours de physique*.

nel punto urtato e nella direzione dell'urto avesse luogo un'azione statica. Ciò equivale a tener conto della sola oscillazione principale, già estesa a tutta la trave, ossia nella supposizione che essa si verifichi nel suo insieme immediatamente fin dal primo istante in cui avviene l'urto. Perchè tutta la materia si metta in moto, bisogna che sia vinta la sua inerzia, cosa che richiede bensì un tempo piccolissimo, ma sempre finito, quindi l'ipotesi fatta è tanto più vera quanto più diminuisce $\frac{P}{Q}$ ed il valore della velocità V. Lo scuotimento molecolare, conseguenza dell'urto, si trasmette con una estrema rapidità nell'interno dei corpi, quindi anche che il valore di P non sia molto piccolo, purchè la velocità V dell'urto non sia molto grande, l'ipotesi fatta corrisponderà ancora abbastanza bene alla realtà in quella parte almeno che si riferisce alla determinazione dei massimi spostamenti totali, che avvengono durante il periodo di vibrazione. Se la velocità V dell'urto assume invece valori molto considerevoli, allora lo scuotimento molecolare non ha il tempo di propagarsi a tutta la massa del corpo urtato durante il primo istante dell'urto, e durante questo tempo alla forza viva della massa urtante non si oppone che il lavoro di deformazione della porzione di corpo posto in vicinanza del punto nel quale avviene l'urto. Ciò è causa che nel primo istante dell'urto in questa parte del corpo urtato la resistenza della materia è eccezionalmente cimentata, possono aver luogo deformazioni relative molto forti ed anche essere compromessa la stabilità o la resistenza della travatura. In ogni modo poi non sarà mai possibile in questi casi calcolare lo sforzo unitario massimo del materiale servendosi delle formole dedotte accettando l'ipotesi esposta superiormente, che potrà tutt'al più dare risultati attendibili per il calcolo degli spostamenti totali, semprechè V non sia troppo grande, ma bisognerà determinare gli sforzi e deformazioni unitarie mediante le formole esatte oppure ricorrendo a criterî dedotti dall'osservaziene e dall'esperienza.

Barré de Saint-Venant (*) sviluppando in serie il valore di y dato dalla (314) ha trovato che si ottengono risultati abbastanza esatti trascurando i termini, che contengono le potenze superiori di m per $m=m_0$ ossia tenendo calcolo soltanto dell'oscillazione principale, finchè $\frac{P}{Q}$ ha valori inferiori a 4. Probabilmente si avrebbero conseguenze analoghe sviluppando in serie le funzioni, che danno la deformazione supponendo l'urto avvenuto in modo diverso

(*) *Note* alla *Théorie de l'élasticité des corps solides* di Clebsch.

e mettendo a confronto i risultati dei calcoli fatti colle formole esatte e con quelle approssimate. Il trascurare nello sviluppo della funzione y i termini che contengono le potenze superiori di m_0 equivale a trascurare $\left(\frac{P}{Q}\right)^2$ rispetto a $\frac{P}{Q}$, cosa che non potrebbe farsi in generale che per valori piccolissimi di $\frac{P}{Q}$, Boussinesq (*) però ha dimostrato che anche per valori non infinitamente piccoli di $\frac{P}{Q}$ si può accettare come procedimento di calcolo sufficientemente esatto di trascurare i termini, che contengono le potenze superiori del parametro m, perchè se ciò produce un certo errore al numeratore è anche causa che avvenga un errore nello stesso senso nel denominatore e quindi le formole, che danno gli spostamenti dei diversi punti, continuano a dare risultati pratici pressochè esatti anche quando $\frac{P}{Q}$ è sensibilmente superiore all'unità.

Accettando l'ipotesi enunciata superiormente relativa al rapporto, che passa tra le velocità di due punti di una trave durante il periodo di vibrazione, la determinazione del coefficiente λ in ogni singolo caso riesce semplicissima. Infatti per una trave AB (*Fig.* 81ª, *tav.* XI) della lunghezza l, urtata nel suo punto di mezzo da una massa Q, la deformazione statica y di un punto qualsiasi è data dalla formola (Vedi num. 72 e 91)

$$EIy = P\left(\frac{x^3}{12} - \frac{l^2 x}{16}\right)$$

la freccia f nel punto di mezzo da (Form. 308)

$$f = -P\frac{l^3}{48EI}$$

quindi

$$\lambda = \int_P \left(\frac{v_1}{V}\right)^2 \frac{dP}{P} = \int_0^l \left(\frac{y}{f}\right)^2 \frac{dx}{l} = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \left(\frac{4x^3}{l^3} - \frac{3x}{l}\right)^2 \frac{dx}{l} = \frac{17}{35} \quad (316).$$

Nello stesso modo si trova per una trave incastrata ai due estremi ed urtata nel punto di mezzo $\lambda = \frac{13}{35}$; per una trave in-

(*) *Compte rendu*, 1874, pag. 1324-1407.

castrata ad un estremo ed urtata all'altro estremo libero $\lambda = \frac{33}{140}$.

Finalmente per una trave appoggiata agli estremi ed urtata in un punto C' distante a dall'appoggio A e b dall'appoggio B si avrebbe

$$\lambda = \frac{1}{105}\left\{1 + 2\left[1 + \frac{(a+b)^2}{ab}\right]^2\right\}$$

e per un'asta (*Fig.* 78ª, *tav.* XI) rettilinea a sezione costante disposta verticalmente ed urtata da una massa Q ad un estremo con direzione assiale $\lambda = \frac{1}{3}$.

Alla fine dell'urto la forza viva della massa Q e della trave urtata è espressa da

$$\frac{Q V_1^2}{2g} + \int_P \frac{v_1^2}{2g} dP = \frac{V_1^2}{2g}\left(Q + P\int_P \left(\frac{v_1}{V_1}\right)^2 \frac{dP}{P}\right) = \frac{V_1^2}{2g}(Q + \lambda P).$$

Oppure da

$$\frac{V_1^2}{2g}(Q + P' + \lambda P)$$

se si vuol tener conto anche di una massa P' concentrata nel punto, nel quale ha luogo l'urto.

Nel numero precedente abbiamo visto che il lavoro di deformazione della trave urtata è dato da $\frac{\eta_1^2}{2k}$ (Form. 300). Quindi il movimento prodotto dall'urto in causa della (296) si arresterà quando sarà estinta tutta la forza viva, ossia quando

$$\frac{V_1^2}{2g}(Q + \lambda P) = \frac{\eta_1^2}{2k}$$

e ricordando che le formole (312) e (297)

$$V_1 = \frac{V}{1 + \lambda\frac{P}{Q}}; \qquad \eta_1 = Qk$$

si ricava il valore ϕ massimo della deformazione dinamica η_1 nel punto urtato

$$\phi = V\sqrt{\frac{Qk}{g}}\sqrt{\frac{1}{1 + \lambda\frac{P}{Q}}} = V\sqrt{\frac{f}{g}}\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda\frac{P}{Q}}} \qquad (317)$$

in cui $f = \eta_1 = Qk$ esprime la deformazione corrispondente al punto urtato allo stato d'equilibrio sotto l'azione della forza Q.

Se nel punto urtato vi fosse concentrata una massa $\frac{P'}{g}$ abbiamo già visto (Form. 313) che allora

$$V_1 = \frac{V}{1 + \frac{P'}{Q} + \lambda \frac{P}{Q}}$$

e quindi

$$\varphi = V \sqrt{\frac{Qk}{g}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{P'}{Q} + \lambda \frac{P}{Q}}} = V \sqrt{\frac{f}{g}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{P'}{Q} + \lambda \frac{P}{Q}}} \quad (318).$$

Se si trascura l'effetto dell'inerzia della materia, ossia se non si tiene conto del termine λP, allora la (317) si cambia nella formola usuale

$$\varphi = V \sqrt{\frac{Qk}{g}} = V \sqrt{\frac{f}{g}} \quad (319)$$

che non potrà dare valori attendibili altro che quando la massa urtata sia piccolissima in confronto della massa urtante (Num. 94) e che per ciò chiameremo formola di *prima approssimazione* per distinguerla dalla (317) che tien conto entro certi limiti dell'inerzia della materia e che diremo di *seconda approssimazione*.

Usando dell'ipotesi fatta relativamente al valore del rapporto $\left(\frac{v_1}{V_1}\right)$ si può determinare facilmente in modo abbastanza approssimato il periodo di vibrazione. Infatti la reazione elastica in un punto è (Num. 91) $\frac{\eta}{k}$ ed il suo lavoro resistente durante il tempo dt

$$-\frac{\eta_1}{k} \frac{d\eta_1}{dt} dt$$

pel corpo Q invece esso sarà espresso da

$$-\frac{Q}{2g} \frac{d^2\eta_1}{dt^2} \frac{d\eta_1}{dt} dt$$

e per una porzione elementare dP del corpo urtato, supponendo il rapporto $\frac{v_1}{V_1}$ costante durante tutta la durata della flessione,

come si è già supposto che lo sia durante l'istante infinitamente piccolo nel quale avviene l'urto, il lavoro dell'inerzia dell'elemento dP sarà dato da

$$-\frac{dP}{g}\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{v_1}{V_1}\eta_1\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{v_1}{V_1}\eta_1\right)dt=-\frac{dP}{g}\left(\frac{v_1}{V_1}\right)^2\frac{d^2\eta_1}{dt^2}\frac{d\eta_1}{dt}dt.$$

Sommando e ricordando che

$$\lambda=\int\left(\frac{v_1}{V_1}\right)^2\frac{dP}{P}$$

si ottiene

$$\frac{Q+\lambda P}{g}\frac{d^2\eta_1}{dt^2}+\frac{1}{k}\eta_1=0 \qquad (320)$$

equazione soddisfatta per

$$\eta_1=A\,\mathrm{sen}\,mt.$$

Le costanti A ed m si determinano facilmente osservando che alla fine della mezza oscillazione, ossia in corrispondenza del massimo valore di $\mathrm{sen}\,mt$ ($\mathrm{sen}\,mt=1$) deve essere

$$\eta_1=A\,\mathrm{sen}\,mt=\phi$$

quindi in causa della (317)

$$A=V\sqrt{\frac{Qk}{g}\frac{1}{1+\lambda\frac{P}{Q}}}$$

ponendo per η_1 il suo valore $A\,\mathrm{sen}\,mt$ nella (320) si ottiene

$$-\frac{Q+\lambda P}{g}m^2\eta_1+\frac{1}{k}\eta_1=0$$

da cui

$$m=\sqrt{\frac{g}{Qk}\frac{1}{1+\lambda\frac{P}{Q}}}$$

e quindi

$$\eta_1=V\sqrt{\frac{Qk}{g}\frac{1}{1+\lambda\frac{P}{Q}}}\,\mathrm{sen}\,t\sqrt{\frac{g}{Qk}\frac{1}{1+\lambda\frac{P}{Q}}} \qquad (321).$$

Se si considera un intero periodo d'oscillazione, cioè il tempo T necessario perchè la trave ritorni alla posizione primitiva, ossia ad aumentare l'arco di 2Π, dovrà essere

$$T\sqrt{\frac{g}{Qk}\frac{1}{1+\lambda\frac{P}{Q}}}=2\Pi$$

da cui

$$T=2\Pi\sqrt{\frac{Qk}{g}\left(1+\lambda\frac{P}{Q}\right)}=2\Pi\sqrt{\frac{f}{g}}\sqrt{1+\lambda\frac{P}{Q}} \qquad (322).$$

Supponiamo ora che si voglia tener conto dell'effetto dell'urto non solo, ma anche di quello della massa in movimento dopo l'urto durante la deformazione della travatura. Ritenendo i soliti simboli e convenendo di indicare con φ la deformazione massima totale, con f_1 quella dovuta al peso proprio P della travatura ed a quello P' di una massa eventualmente esistente in corrispondenza del punto urtato, con f_2 quella dovuta al peso della massa $\frac{Q}{g}$ considerati entrambi allo stato statico, la forza viva totale del sistema sarà completamente esaurita quando

$$\frac{QV_1^2}{2g}+\int_P\frac{dP}{g}\frac{v_1^2}{2}+Q(\varphi-f_1)+\int_P dP\eta=\frac{1}{2k}(\varphi^2-f_1^2) \qquad (323).$$

Accettando l'ipotesi che le velocità e le deformazioni di un punto qualsiasi abbiano rispettivamente colla velocità e colla deformazione del punto urtato lo stesso rapporto

$$\int_P dP\eta=\int_P dP\frac{v_1}{V_1}(\varphi-f_1)=P(\varphi-f_1)\int_P\left(\frac{v_1}{V_1}\right)\frac{dP}{P}=\lambda_1 P(\varphi-f_1)$$

in cui λ_1 è un coefficiente numerico dipendente dalla forma e natura del corpo urtato e dalla posizione del punto C, in cui avviene l'urto. Nel caso di una trave a sezione costante urtata nel suo punto di mezzo

$$\int_P\left(\frac{v_1}{V}\right)\frac{dP}{P}=2\int_0^{\frac{l}{2}}\left(-\frac{4x^3}{l^3}+\frac{3x}{l}\right)\frac{dx}{l}=\frac{5}{8}.$$

Sostituendo nella (323) ad $\int P\eta$ questo valore si ottiene

$$\frac{V_1^2}{2g}(Q+\lambda P)+(Q+\lambda_1 P)(\varphi-f_1)=\frac{1}{2k}(\varphi^2-f_1^2)$$

e nell'ipotesi più generale che nel punto urtato sia concentrato un peso P' si avrebbe

$$\frac{V_1^2}{2g}(Q+P'+\lambda P)+(Q+P'+\lambda_1 P)(\varphi-f_1)=\frac{1}{2k}(\varphi^2-f_1^2).$$

Dividendo per Q e ricordando (Form. 313) che

$$V_1=\frac{V}{1+\frac{P'}{Q}+\lambda\frac{P}{Q}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{kQ}=\frac{1}{f_2}$$

si ottiene

$$\frac{V^2 f_2}{g\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda\frac{P}{Q}\right)}+2\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)\varphi f_2-$$

$$-2\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)f_1 f_2+f_1^2=\varphi^2$$

da cui si ricava

$$\varphi^2-2\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)f_2\varphi+2\left(1+\frac{P'}{Q}+\right.$$

$$\left.+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)f_1 f_2-f_1^2-\frac{V^2 f_2}{g\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda\frac{P}{Q}\right)}=0$$

e risolvendo quest'equazione rispetto a φ

$$\varphi=\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)f_2\pm\sqrt{\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)^2 f_2^2-2\left(1+\frac{P'}{Q}+\right.}$$

$$\sqrt{\left.+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)f_1 f_2+f_1^2+\frac{V^2 f^2}{g\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda\frac{P}{Q}\right)}}=$$

$$=\left(1+\frac{P_1}{Q}+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)f_2\pm$$

$$\pm\sqrt{\left[\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)f_2-f_1\right]^2+\frac{V^2 f_2}{g\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda\frac{P}{Q}\right)}}$$

e finalmente

$$\left.\begin{aligned}\varphi=\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)f_2\Bigg(1\pm\sqrt{\left[1-\frac{f_1}{\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)}\right]^2+}\\ +\frac{V^2}{gf_2\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda\frac{P}{Q}\right)\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)^2}\Bigg)\end{aligned}\right\}\quad(324)$$

formola generalissima per le travature e che può servire per la risoluzione dei varî casi, che si possono presentare nella pratica.

Se $P'=0$ allora

$$\left.\begin{aligned}\varphi=\left(1+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)f_2\Bigg(1\pm\\ \pm\sqrt{\left(1-\frac{f_1}{\left(1+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)f_2}\right)^2+\frac{V^2}{gf_2\left(1+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)^2\left(1+\lambda\frac{P}{Q}\right)}}\Bigg)\end{aligned}\right\}\quad(325).$$

Se si trascura il coefficiente λ_1, ossia l'effetto del peso proprio della trave durante la deformazione, la formola precedente diventa

$$\left.\begin{aligned}\varphi=f_2\left(1\pm\sqrt{\left(1-\frac{f_1}{f_2}\right)+\frac{V^2}{gf_2\left(1+\lambda\frac{P}{Q}\right)}}\right)=\\ =f_2\left(1\pm\sqrt{\left(1-\frac{f_1}{f_2}\right)+\frac{2h}{f_2\left(1+\lambda\frac{P}{Q}\right)}}\right)\end{aligned}\right\}\quad(326)$$

indicando con h l'altezza corrispondente alla velocità V.

Se non si vuol mettere in evidenza la deformazione f_1 esprimendo con φ_1 l'aumento nella freccia, che si verifica in seguito all'urto

$$\varphi_1=\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)f_2\pm\sqrt{\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)^2f_2^2+\frac{V^2f_2}{g\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda\frac{P}{Q}\right)}}\quad(327)$$

ed indicando con φ_u la deformazione totale dovuta soltanto all'azione dell'urto, ricordando la (318) risulta

$$\varphi_1=\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda_1\frac{P}{Q}\right)f_2+\sqrt{\left(1+\frac{P'}{Q}+\lambda_0\frac{P}{Q}\right)^2 f_2^2+\varphi_u^2} \quad (328).$$

Se $P'=0$ e se si trascura l'effetto del lavoro attivo $\int dP\eta dx$ dovuto al peso proprio della travatura in causa della deformazione, ossia se si pone $\lambda_1 P=0$, l'equazione precedente prende la forma

$$\varphi_1=f_2+\sqrt{f_2^2+\varphi_u^2} \quad (329)$$

in cui per φ_u si potrà prendere il valore (317) oppure (319) secondo che si vuole fare una ricerca di prima approssimazione trascurando l'effetto dell'inerzia della materia, oppure si vuole un valore entro certi limiti più vicino al vero tenendo conto approssimativamente di questo elemento.

Se la massa urtante ha una velocità nulla, ossia se si considera un carico, che agisca istantaneamente con intensità costante sulla travatura, allora $\varphi_u=0$ e l'espressione di φ diventa $\varphi=2f$, cioè la deformazione dovuta in questo caso all'azione dinamica è doppia di quella corrispondente allo stato statico, come si è già ripetutamente osservato ai numeri 13, 41, ecc.

Supponiamo di prendere in considerazione un'asta AB (*Fig.* 82ª, *tav.* XI) disposta verticalmente e sollecitata in B da un peso P'. Sia Q un carico, che cadendo da un'altezza h viene ad urtare la massa $\frac{P'}{g}$. Se si ritiene che si possa trascurare l'effetto della massa dell'asta senza errore sensibile, e quindi che essa sia molto piccola in confronto di P' e Q, allora

$$\lambda_1=0 \qquad \lambda=0 \qquad P=0$$

per cui

$$\varphi=\frac{Q+P'}{Q}f_2\left(1\pm\sqrt{\left(1-\frac{f_1}{\frac{Q+P'}{Q}f_2}\right)^2+\frac{V^2}{gf_2\left(\frac{Q+P'}{Q}\right)\left(\frac{Q+P}{Q}\right)^2}}\right).$$

Se si indica con f la freccia dovuta al carico $P'+Q$ allo stato statico, dalle (125) (Num. 64) si ricava (Vedi anche num. 91)

$$P'+Q=\frac{EAf}{l} \qquad Q=\frac{EA}{l}f_2$$

quindi

$$\frac{P'+Q}{Q}=\frac{f}{f_2}.$$

Sostituendo nell'equazione precedente a $\frac{P'+Q}{Q}$ questo valore e facendo $\alpha=\left(\frac{Q}{Q+P'}\right)^2$ si ricava

$$\left.\begin{aligned}\phi&=f\left(1\pm\sqrt{\left(1-\frac{f_1}{f}\right)^2+\frac{V^2}{gf\left(\frac{Q+P}{Q}\right)^2}}\right)=\\&=f\left(1\pm\sqrt{\left(1-\frac{f_1}{f}\right)^2+\frac{2\alpha h}{f}}\right)\end{aligned}\right\}\quad(330)$$

ed il massimo sforzo X diretto secondo l'asse dell'asta è dato da

$$X=EA\frac{f}{l}\left(1+\sqrt{\left(1+\frac{f_1}{f}\right)^2+\frac{2\alpha h}{f}}\right)\qquad(331).$$

Se

$$P'=0\qquad\alpha=1\qquad f_1=0\qquad f=f_2$$

quindi

$$X=EA\frac{f}{l}\left(1+\sqrt{1+2\frac{h}{f}}\right)\qquad(331^{bis}).$$

Si è tralasciato il segno meno perchè ordinariamente si cercano soltanto i massimi valori numerici assoluti delle dilatazioni e degli sforzi corrispondenti.

Se invece si ha una trave AB (*Fig.* 83ª, *tav.* XI) incastrata orizzontalmente nell'estremo A e libera all'altro e si suppone che essa venga urtata in B da una massa cadente dall'altezza $h=\frac{V^2}{2g}$, trascurando l'inerzia della materia, risulta

$$P'=0\qquad\lambda\frac{P}{Q}=0\qquad\lambda_1\frac{P}{Q}=0\qquad f_1=0\qquad f_2=f$$

quindi la (324) diventa

$$\phi=f\left(1\pm\sqrt{1+\frac{2h}{f}}\right)\qquad(332).$$

Dalle relazioni che passano fra le deformazioni elastiche statiche e dinamiche nei casi particolari si passa facilmente a quelle che

legano fra loro gli sforzi unitarî del materiale nei due stati summentovati. È però necessario avvertire che queste formole non possono avere un interesse che quando $\frac{P}{Q}$ sia piccolissimo e non molto forte la velocità del corpo urtante. Ciò dipende dal fatto che la trasmissione nell'interno del corpo urtato dell'impulso ricevuto dall'urto richiede un certo tempo, durante il quale in vicinanza del punto urtato le deformazioni unitarie massime possono essere notevolmente superiori a quelle corrispondenti all'ipotesi che tutto il corpo urtato si sia per così dire messo in tensione, ed abbia sviluppato tutto il lavoro di deformazione resistente, di cui è capace. Riservandoci a svolgere questo concetto al numero 94 riportiamo qui questa semplice osservazione, affinchè non possa sorgere alcun dubbio nell'applicazione delle formole che seguono, le quali non hanno valore e non sono attendibili che per piccolissimi valori del rapporto $\frac{P}{Q}$ e della velocità V del corpo urtante.

Siano

R'_s, R''_s, R_s rispettivamente gli sforzi unitarî del materiale sotto l'azione della sola forza P o $P+P'$, Q e finalmente $P+P'+Q$

R_d lo sforzo unitario massimo prodotto sotto l'influenza dei carichi e dell'urto

M'_m, M''_m, M_m il massimo momento flettente prodotto rispettivamente allo stato statico dal carico fisso $P+P'$, da quello mobile Q e dalla somma dei due.

Nel primo caso trattato (*)

$$\frac{R_s}{E}=\frac{f}{l} \qquad \frac{R_d}{E}=\frac{\phi}{l}$$

quindi dividendo per l la (330) si ottiene

$$\frac{R_d}{E}=\frac{\phi}{l}=\frac{f}{l}+\sqrt{\left(\frac{f}{l}-\frac{f_1}{l}\right)^2+\frac{2h\alpha}{l}\frac{f}{l}}=$$

$$=\frac{R_s}{E}+\sqrt{\left(\frac{R_s}{E}-\frac{R'_s}{E}\right)^2+2\alpha\frac{h}{l}\frac{R_s}{E}}$$

ossia

$$R_d-R_s=R_s\sqrt{\left(\frac{R_s-R'_s}{R_s}\right)^2+2\alpha\frac{h}{l}\frac{E}{R_s}}.$$

(*) Ceradini, *Lezioni di meccanica applicata alle costruzioni.*

L'asta essendo soggetta soltanto a tensione, detta A la sua sezione trasversale

$$\frac{R_s - R'_s}{R_s} = \frac{\frac{P'+Q-P'}{A}}{\frac{P'+Q}{A}} = \frac{Q}{P'+Q} = \sqrt{\alpha}$$

quindi, ponendo $\beta = \alpha \frac{h}{l}$ ed innalzando al quadrato l'equazione precedente, risulta

$$R_d^2 - 2R_d R_s + (1-\alpha) R_s^2 - 2\beta E R_s = 0 \qquad (333).$$

Se

$$P' = 0 \qquad \alpha = 1 \qquad R'_s = 0 \qquad R''_s = R_s$$

s'ottiene invece

$$R_d^2 - 2R_d R_s - 2\frac{h}{l} E R_s = 0 \qquad (334).$$

Dalla (333) si ricava

$$R_s = \frac{R_d + \beta E}{(1-\alpha)} \pm \sqrt{\left(\frac{R_d + \beta E}{(1-\alpha)}\right)^2 - \frac{R_d^2}{(1-\alpha)}} \qquad (335)$$

se si pone $\gamma = \beta \frac{E}{R_d}$ e si trascura il segno più perchè allo stato statico il carico unitario è sempre inferiore a quello corrispondente allo stato dinamico, l'equazione (335) diventa

$$R_s = R_d \frac{1+\gamma}{1-\alpha}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{1-\alpha}{(1+\gamma)^2}}\right) \qquad (336).$$

Quando

$$P' = 0 \qquad \alpha = 1 \qquad R''_s = R_s$$

dalla (334) risulta

$$2R_s\left(1 + \frac{h}{l}\frac{E}{R_d}\right) = R_d$$

od anche

$$R_s = \frac{R_d}{2\left(1 + \frac{h}{l}\frac{E}{R_d}\right)} = \frac{R_d}{2(1+\gamma)} \qquad (337).$$

Quest'ultima relazione non può ricavarsi direttamente dalla (336), ma bisogna derivarla dalla formola generale, perchè facendo $\alpha=1$ nella (336) essa prende la forma indeterminata $\frac{0}{0}$.

Nel secondo caso le formole del capitolo V e quelle del numero 91 combinate per la trave incastrata ad un estremo e libera all'altro, essendo

$$P=0 \qquad P'=0$$

danno (Num. 64 e 91)

$$f_2=f=\frac{1}{3}Q\frac{l^3}{EI}=\frac{l^2}{3EI}Ql=\frac{l^2}{3EI}M_m=\frac{l^2R_sI}{3EIv'}=\frac{l^2R_s}{3Ev'}$$

ed analogamente

$$\varphi=\frac{l^2R_d}{3Ev'}.$$

Sostituendo questi valori nella formola

$$\varphi=f\left(1+\sqrt{1+2\frac{h}{f}}\right)$$

si ottiene

$$\frac{R_dl^2}{3Ev'}=\frac{R_sl^2}{3Ev'}\left(1+\sqrt{1+2\frac{3Ev'h}{R_sl^2}}\right)$$

ponendo $\beta_1=\frac{3hv'}{l^2}$, elevando al quadrato i due membri della equazione e togliendo il termine comune R_s^2 risulta

$$2R_s(R_d+\beta_1E)=R_d^2$$

ossia

$$R_s=\frac{R_d}{2\left(1+\beta_1\frac{E}{R_d}\right)} \qquad (338).$$

È importante avvertire che queste formole (336) e (337) fanno vedere come l'effetto dell'urto equivalga ad un'aumento dello sforzo unitario subìto dal materiale. Si può quindi tener conto di questo modo speciale di sollecitazione dinamica calcolando la costruzione che si considera nel modo ordinario col mezzo delle formole del capitolo V, avendo però l'avvertenza di scegliere come limite dei carichi permanenti un coefficiente R_0 uguale al limite R

che si userebbe per carichi agenti soltanto allo stato statico moltiplicato per un coefficiente n' da determinarsi nei singoli casi.

Come applicazione numerica delle formole precedenti supponiamo che un'asta in ferro lunga metri 5,00 debba sopportare permanentemente alla sua estremità inferiore B un peso di Kg. 500,00 e ricevere l'urto di un peso di Kg. 500,00 che cade da un'altezza di metri 0,05 nell'ipotesi che il valore del modulo di elasticità E possa ritenersi per millimetro quadrato uguale a 20 000$^{kg.}$.

Si domanda quale sia lo sforzo statico, col quale si deve calcolare la sezione resistente A dell'asta, perchè non sia superato il valore $R_d = 18^{kq.}$ durante la massima deformazione. La formola da impiegare è la (336), che corrisponde esattamente a questo caso,

$$R_s = R_d \frac{1+\gamma}{1-\alpha}\left(1-\sqrt{1-\frac{1-\alpha}{(1+\gamma)^2}}\right)=$$

$$=\frac{R_d+\beta E}{1-\alpha}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{R_d}{R_d+\beta E}\right)^2(1-\alpha)}\right].$$

In cui secondo le convenzioni fatte

$$\alpha=\left(\frac{500}{1000}\right)^2=0{,}25 \quad \beta=\frac{\alpha h}{l}=\frac{0{,}25\cdot 0{,}05}{5}=0{,}0025$$

quindi

$$\frac{R_d+\beta E}{1-\alpha}=91\,,\left(\frac{R_d}{R_d+\beta E}\right)^2(1-\alpha)=0{,}05$$

$$R_s=91\,(1-\sqrt{1-0{,}05})=2{,}73.$$

Per cui l'area A ed il suo diametro d, se si suppone l'asta a sezione circolare, saranno date da

$$A=\frac{\Pi d^2}{4}=\frac{1000}{2{,}73}=368^{mmq.}$$

$$d=\sqrt{\frac{4000}{2{,}73\,\Pi}}=21{,}00^{mm.}\,(*).$$

93. Azione dinamica per urto di un carico uniformemente distribuito per metro corrente di trave. — Prendiamo ora in esame il caso in cui sopra una trave agisca un carico p uniformemente distribuito per

(*) Ceradini, Opera citata, pag. 186.

metro corrente, comprendendo in esso anche il peso proprio della costruzione, e che un carico q, distribuito pure uniformemente per metro corrente, venga ad urtarla animato da una velocità costante V corrispondente alle altezze h, $V=\sqrt{2gh}$. Pel teorema ricordato anche al numero precedente che il momento virtuale delle quantità di moto prima e dopo l'urto (quest'ultime prese con segno negativo), scegliendo come spostamenti virtuali quelli corrispondenti alla fine dell'urto, deve essere uguale allo zero, sarà

$$\int_0^l \frac{q\,dx}{g} V v_1 dt - \int \frac{(q+p)dx}{g} v_1 v_1 dt = 0.$$

Indichiamo con V_m la velocità media di traslazione del sistema alla fine dell'urto, V essendo costante, l'equazione precedente potrà scriversi anche nel modo seguente

$$\frac{q\,V\,l\,V_m}{g}\int_0^l \left(\frac{v_1}{V_m}\right)\frac{dx}{l} = \frac{(q+p)\,l\,V_m^2}{g}\int_0^l \left(\frac{v_1}{V_m}\right)^2\frac{dx}{l}$$

da cui si ricava ponendo

$$\lambda' = \int_0^l \left(\frac{v_1}{V_m}\right)^2 \frac{dx}{l} \qquad \lambda'_1 = \int_0^l \left(\frac{v_1}{V_m}\right)\frac{dx}{l} \tag{339}$$

$$V_m = \left(\frac{q}{p+q}\frac{\lambda'_1}{\lambda'}\right) V \tag{340}.$$

Per la determinazione del valore dei coefficienti λ' e λ'_1 potrà servire in via di prima e larga approssimazione l'ipotesi indicata al numero precedente, cioè si potrà ritenere che il valore del rapporto $\frac{v_1}{V_m}$ sia lo stesso di quello che passa fra la deformazione statica in un punto qualunque della trave nell'ipotesi di un carico uniformemente distribuito e l'ordinata media di deformazione, ossia riterremo $\frac{v}{V_m} = \frac{\eta}{\eta_m}$.

Le formole del capitolo V permettono di determinare η ed η_m quindi λ' e λ'_1 sono sempre calcolabili facilmente: nel caso di una travatura a sezione trasversale costante, ricordando le formole che

danno la deformazione di y corrispondente ad un suo punto qualsiasi (Num. 91)

$$-EIy=p\frac{x}{24}(2lx^2-l^3-x^3)$$

risulta

$$\frac{v_1}{V_m}=\frac{\eta}{\eta_m}=\frac{-EIy}{EI\eta_m}=-\frac{120}{24l^4}(2x^3l-l^3x-x^4)=-5\left[\frac{2x^3}{l^3}-\frac{x}{l}-\frac{x^4}{l^4}\right]$$

quindi

$$\lambda'_1=\int_0^l\left(\frac{v_1}{V_m}\right)\frac{dx}{l}=-\int_0^l 5\left[\frac{2x^3}{l^3}-\frac{x}{l}-\frac{x^4}{l^4}\right]\frac{dx}{l}=1$$

$$\lambda'=\int\left(\frac{v_1}{V_m}\right)^2\frac{dx}{l}=\int_0^l 25\left[\frac{2x^3}{l^3}-\frac{x}{l}-\frac{x^4}{l^4}\right]^2\frac{dx}{l}=$$

$$=25\frac{31}{630}=\frac{775}{630}=1{,}23.$$

La stessa formola si può ricavare dal teorema di Carnot sulla perdita di forza viva nei cambiamenti bruschi di velocità: prima dell'urto la forza viva è $\frac{ql}{2g}V^2$, dopo l'urto invece è data coi simboli usati da $\lambda'\frac{(p+q)lV_m^2}{2g}$ quindi dovrà essere

$$\frac{ql}{2g}V^2-\lambda'\frac{(p+q)l}{2g}V_m^2=\int_0^l\frac{q\,dx}{2g}(V-v_1)^2+\int_0^l\frac{p(-v_1)^2dx}{2g}.$$

Sviluppando i quadrati e togliendo il termine $\frac{ql}{2g}V^2$ comune ai due membri, si ottiene

$$-\lambda'\frac{(p+q)l}{2g}V_m^2+2\frac{qlVV_m}{2g}\int_0^l\left(\frac{v_1}{V_m}\right)\frac{dx}{l}-$$

$$-\frac{qlV_m^2}{2g}\int\left(\frac{v_1}{V_m}\right)^2\frac{dx}{l}-\frac{plV_m^2}{2g}\int\left(\frac{v_1}{V_m}\right)^2\frac{dx}{l}=0.$$

Se si introducono i simboli λ' e λ'_1 e si risolve l'equazione rispetto alla velocità media V_m si ricava come precedentemente

$$V_m = \left(\frac{q}{p+q}\frac{\lambda'_1}{\lambda'}\right) V \qquad (340).$$

Se si indicano con f_1, f_2 ed f rispettivamente le freccie dovute al carico p, al carico q ed al carico $p+q$ allo stato statico e con ϕ quella, che avviene quando ha luogo l'azione dinamica dell'urto, la forza viva di tutto il sistema sarà estinta quando il lavoro di deformazione della travatura L_i sarà eguale al lavoro motore

$$L_e = \frac{(q+p)l}{2g} V_m^2 \int_0^l \left(\frac{v_1}{V_m}\right)^2 \frac{dx}{l} + \int_0^l (p+q)\,dx\,\eta$$

ossia la freccia dinamica, ritenendo i simboli usati nei tre paragrafi precedenti e ricordando il valore (340) di V_m e (304) di L_i, sarà data da

$$\frac{(q+p)l}{2g} V^2 \left[\frac{q}{p+q}\frac{\lambda'_1}{\lambda'}\right]^2 \lambda' + (p+q)l \int_0^l \frac{\eta\,dx}{l} = \varepsilon^2 \frac{\phi^2 - f_1^2}{2k_m} l.$$

Evidentemente $\int_0^l \frac{\eta\,dx}{l}$ è l'ordinata media di deformazione $(\phi - f_1)\varepsilon$

e ponendo per semplicità

$$\left[\frac{q}{p+q}\frac{\lambda'_1}{\lambda'}\right]^2 \lambda' = \alpha \qquad \frac{V^2}{2g} = h$$

risulta

$$2(p+q)\,l\frac{k_m}{\varepsilon^2}\alpha h + 2(p+q)\frac{l k_m}{\varepsilon}(\phi - f_1) = (\phi^2 - f_1^2)\,l$$

od anche $2f\frac{\alpha h}{\varepsilon} + 2f\phi - 2ff_1 = \phi^2 - f_1^2$ da cui si ricava

$$\left.\begin{aligned} \phi &= f \pm \sqrt{f^2 - 2ff_1 + f_1^2 + 2f\frac{\alpha h}{\varepsilon}} = \\ &= f\left(1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{f_1}{f}\right)^2 + \frac{2\alpha h}{f\varepsilon}}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (341)$$

equazione che servirà a determinare il valore della massima freccia ϕ. Se non si vuole mettere in evidenza la freccia iniziale f_1 e si indica con ϕ_1 la sola freccia, che avviene in seguito all'urto ed all'azione del peso q, allora

$$\phi_1 = f + \sqrt{f^2 + \phi_u^2} \qquad (341^{bis})$$

in cui

$$\phi_u = \sqrt{2\frac{\alpha h}{\varepsilon} f} = V\sqrt{\frac{\alpha f}{\varepsilon g}} \qquad (342)$$

esprime la deformazione dovuta unicamente all'azione dell'urto.

Se si considera un corpo pesante agente istantaneamente sopra una data costruzione, ciò equivale evidentemente ad un urto avvenuto con velocità nulla, in tal caso $\phi_u = 0$ e la freccia ϕ è data da

$$\phi = 2f$$

cioè la deformazione è doppia di quella corrispondente allo stato statico come si è già dimostrato ed osservato più volte nei numeri precedenti.

Dalla relazione che passa fra la freccia dinamica e la freccia statica, si può passare facilmente ad una relazione fra gli sforzi unitarî, che subisce il materiale di cui la trave è composta. Conservando i simboli usati al numero precedente in causa delle formole trovate al numero 91 per esprimere la freccia in una trave appoggiata agli estremi e caricata di un peso p per metro corrente risulta per una trave a sezione trasversale costante

$$f = \frac{5}{384}\frac{(p+q)}{EI} l^4 = \frac{5}{48}\frac{l^2}{EI}\frac{(p+q)l^2}{8} = \frac{5}{48}\frac{l^2}{EI} M_{max} = \frac{5}{48}\frac{l^2}{EI}\frac{R_s I}{v'} = \frac{5}{48}\frac{l^2 R_s}{Ev'}$$

e quindi

$$f_1 = \frac{5}{48}\frac{l^2 R'_s}{Ev'} \qquad \phi = \frac{5}{48}\frac{l^2 R_d}{Ev'}.$$

Se si sostituiscono questi valori nella formola (341); togliendo il fattore comune $\frac{5}{48}\frac{l^2}{Ev'}$, ponendo $\beta_2 = 15\frac{\alpha h v'}{l^2}$ e ricordando che $\varepsilon = \frac{16}{25}$ (Form. 311), risulta

$$R_d = R_s\left(1 + \sqrt{\left(1 - \frac{R'_s}{R_s}\right)^2 + \frac{25}{8}\alpha h \frac{48}{5}\frac{Ev'}{l^2 R_d}}\right) =$$

$$= R_s\left(1+\sqrt{\left(1-\frac{R'_s}{R_s}\right)^2+2\beta_2\frac{E}{R_s}}\right)=$$

$$= R_s\left(1+\sqrt{\left(\frac{R_s-R'}{R_s}\right)^2+2\beta_2\frac{E}{R_s}}\right).$$

L'equazione di resistenza a flessione (Num. 64) dà

$$R=\frac{Mv}{I}=\frac{pl^2}{8}\frac{v'}{I}$$

quindi

$$\left(\frac{R_s-R'_s}{R_s}\right)^2=\left(\frac{\dfrac{(p+q)\dfrac{l^2}{8}v'}{I}-\dfrac{pl^2v'}{8I}}{\dfrac{(p+q)l^2v'}{8I}}\right)^2=\left(\frac{q}{p+q}\right)^2=\alpha'.$$

Sostituendo α' ad $\left(\frac{R_s-R'_s}{R_s}\right)^2$ nell'equazione precedente ed elevandola al quadrato si ottiene

$$R_d^2-2R_dR_s+(1-\alpha')R_s^2-2\beta_2ER_s=0$$

da cui

$$R=\frac{R_d+\beta_2E}{(1-\alpha')}\pm\sqrt{\left[\frac{R_d+\beta_2E}{(1-\alpha')}\right]^2-\frac{R_d^2}{(1-\alpha')}}=$$

$$=R_d\frac{1+\beta_2\dfrac{E}{R_d}}{1-\alpha'}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{1-\alpha'}{\left(1+\beta_2\dfrac{E}{R_d}\right)^2}}\right]$$

e ponendo $\gamma=\beta_2\frac{E}{R_d}$ risulta

$$R_s=R_d\frac{1+\gamma}{1-\alpha'}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{1-\alpha'}{(1+\gamma)^2}}\right) \qquad (343).$$

Anche qui valgono le osservazioni fatte al numero precedente; i calcoli di resistenza si fanno nel modo ordinario colle formole del capitolo V avvertendo di prendere come limite dei carichi permanenti un valore R_o tale, che esso sia uguale al valore R, che si prenderebbe quando si considerassero carichi agenti soltanto allo stato statico, moltiplicato per un coefficiente n' da determinarsi

nei singoli casi. Ciò risulta evidente dalla formola (343) poichè appunto l'effetto dell'urto è quello di aumentare in un dato rapporto lo sforzo unitario massimo subìto dal materiale, di cui la costruzione è composta: è per questa ultima ragione che nella formola (343) si suole trascurare il segno positivo, infatti lo sforzo unitario R_s allo stato statico è ordinariamente minore dello sforzo unitario R_d allo stato dinamico.

Come applicazione numerica di questa formola supponiamo una trave della lunghezza di metri 25,00, che debba sopportare un carico permanente p per metro corrente di Kg. 1000 ed una accidentale q di Kg. 2000, sia $H=2^m,00$ l'altezza della trave, $E=20000^{kg.}$ e l'altezza h, da cui si suppone cadere il carico, sia $h=0^m,002$: cerchiamo quale sia il valore R_s dello sforzo unitario del materiale in base al quale deve essere calcolata la sezione resistente della trave perchè durante la massima deformazione non sia mai superato il valore $R_d=12$ per millimetro quadrato. In relazione alle convenzioni fatte

$$\alpha'=\left[\frac{q}{p+q}\right]^2=\left[\frac{2000}{3000}\right]^2=\frac{4}{9}=0,444$$

$$\alpha=\left[\frac{q}{p+q}\frac{\lambda'_1}{\lambda_1}\right]^2\lambda'=\left[\frac{q}{p+q}\right]^2\frac{1}{\lambda'}=\frac{0,444}{1,23}=0,36$$

$$\beta_2=15\frac{\alpha h v'}{l^2}=\frac{15\times 0,36\times 0,002\times 1}{625}=0,000\ 017\ 3$$

$$\gamma=\beta_2\frac{E}{R_d}=0,000\ 017\ 3\frac{20\ 000}{12}=0,0288$$

$$R_s=R_d\frac{1+\gamma}{1+\alpha'}\left[1-\sqrt{1-\frac{1-\alpha'}{(1+\gamma)^2}}\right]=$$

$$=12\frac{1,0288}{0,556}\left[1-\sqrt{1-\frac{0,556}{(1,0288)^2}}\right]=21,789\times 0,31\ 833=6,936.$$

Quindi l'area della sezione resistente della trave dovrebbe essere calcolata colla formola di resistenza $M=\frac{RI}{v^1}=R\omega h$ (Num. 75), in cui si deve aver cura di porre $R=6\ 936\ 000$ Kg. per metro quadrato. Eseguendo i calcoli indicati risulta

$$\omega=\frac{M}{RH}=\frac{(p+q)l^2}{8RH}=\frac{3\ 000\times 625}{110\ 976\ 000}=0,016\ 895.$$

94. Velocità di propagazione degli impulsi nei corpi elastici. Suoi effetti. — Le formole pel calcolo delle massime deformazioni dinamiche esposte nei due numeri precedenti riposano sull' ipotesi che le deformazioni, che avvengono durante il movimento del solido elastico, si possano ritenere proporzionali a quelle, che avvengono sotto l'influenza degli stessi carichi allo stato statico. Quest'ipotesi si fonda sul concetto che l'effetto dell'impulsione nel punto urtato si comunichi istantaneamente a tutta la travatura, cosa che in realtà non è, poichè sebbene la trasmissione di tronco in tronco di trave della dilatazione o condensazione delle varie fibre sia rapidissima, tuttavia essa deve vincere l'inerzia della materia ed impiega sempre un tempo finito. Se si suppone la trave divisa in tanti tronchi infinitamente corti, sotto l'azione di una forza agente ad un suo estremo la deformazione δ nel secondo tronco non può cominciare se non è eccitata da una variazione nello stato molecolare già avvenuta nel primo e così di seguito fino all'ultimo. Immaginiamo un' asta AB a sezione trasversale ω costante urtata all'estremo B da una massa Q tale, che dopo l'urto l'ultimo tronco si muova insieme a Q colla velocità V_1, indichiamo con w la velocità di trasmissione dello scuotimento od impulso molecolare e con i l'allungamento unitario; alla fine del tempo t la lunghezza, che avrà risentito l' azione dell'urto, sarà data da wt e l'allungamento corrispondente al punto B sarà iwt, quindi la sua velocità V_1 sarà rappresentata dal rapporto fra il suo allungamento iwt ed il tempo t, cioè sarà $V_1 = iw$.

La massa poi che possiede questa velocità, indicando con ρ la densità del materiale, è data da $\rho wt\omega$ e la sua quantità di moto $\rho\omega wt \cdot wi = \rho\omega w^2 ti$, che dovrà essere uguale all' impulso della forza, cioè ad $E\omega i \cdot t$. Uguagliando le due espressioni si ottiene

$$\rho\omega w^2 ti = E\omega it$$

da cui

$$w = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (344)$$

formola che rappresenta il valore della velocità di propagazione dello stato di deformazione attraverso la materia del corpo urtato e che coincide colla velocità di propagazione longitudinale del suono (*), come era facile prevedere essendo quest'ultimo fenomeno prodotto dalla trasmissione di scuotimenti elastici della materia.

Sia τ il tempo nel quale il corpo urtante e la porzione di corpo urtato, che è a contatto con lui, restano uniti durante una semi-vibra-

(*) Jamin, *Cours de physique*. Seconda edizione, vol. II, pag. 574.

zione elastica; se esso si può dividere in un numero molto grande n di parti uguali $\Delta\tau$ tali che alla fine di ogni periodo $\Delta\tau$ l'onda di scuotimento si sia trasmessa a tutto il corpo in guisa che esso sia giunto interamente alla posizione, che allo stato d'equilibrio statico corrisponderebbe alla posizione presa dal punto urtato, od almeno sia giunto molto vicino a questa posizione, allora in tempi uguali gli spazî percorsi sono proporzionali alle deformazioni statiche o quasi proporzionali e l'ipotesi dei due numeri precedenti che i rapporti $\left(\frac{v_1}{V_1}\right)$ e $\left(\frac{v_1}{V_m}\right)$ siano i medesimi di quelli delle deformazioni statiche dei punti corrispondenti può essere accettata e dà risultati sufficientemente approssimati. Se il valore della velocità V_1 dell'insieme della massa urtante e della porzione del corpo urtato, che gli è a contatto, cresce, la velocità di propagazione w essendo costante, la massa Q avrà già percorso lo spazio corrispondente all'intervallo $\Delta\tau$ che i punti, che si trovano ad una certa distanza incomincieranno appena a muoversi, la linea dinamica di deformazione si scosterà dalla forma conveniente all'equilibrio statico diventando più accentuata in corrispondenza del punto urtato, poichè la massa messa in moto è minore e quindi maggiore deve essere il lavoro di deformazione relativo, cioè il lavoro delle reazioni elastiche, che tendono a distruggere la forza viva, che l'urto comunica alla massa della trave in corrispondenza del punto urtato. Aumentando sempre più la velocità V_1, sempre più si accentua questo fenomeno finchè quando $i_1 = \frac{V_1}{w}$, in cui i_1 indica il massimo limite di dilatazione, che la materia può sopportare, sarà vinta la facoltà di rimbalzo o *resilienza* della materia, ed essa sarà snervata od anche completamente disaggregata, ossia il corpo urtante, per piccola che sia la sua massa, romperà il pezzo urtato o vi lascierà qualche impressione permanente alterando la sua intima composizione, almeno nel punto urtato. Da questa analisi si ricavano subito le conseguenze seguenti: se la massa urtante è grande in confronto della massa urtata ed animata da velocità non molto grande le formole dei numeri 92 e 93 dànno risultati abbastanza esatti. Diminuendo la massa urtante in confronto di quella del sistema urtato e specialmente aumentando la velocità V_1, quelle formole si scostano dal vero, e se possono ancora dare la massima deformazione totale (allungamento totale di una barra, freccia d'inflessione di una trave, ecc.) perchè durante il periodo intero dell'urto e del successivo movimento per una mezza oscillazione lo scuotimento elastico ha tempo di comunicarsi a tutta la massa e quindi viene sviluppato tutto o quasi tutto il lavoro di deformazione di cui la materia del corpo è capace,

non possono più servire a dare indicazioni attendibili sulle massime deformazioni in vicinanza del punto urtato. Infatti nei primi istanti dell'urto la resistenza viene offerta specialmente dalla materia in vicinanza del punto urtato e quindi in questo campo sono eccezionalmente sorpassati i rapporti esistenti fra le deformazioni allo stato statico: per questi calcoli è più approssimata la formola usuale di prima approssimazione (319) perchè essa non tien conto della resistenza dovuta all'inerzia della materia. Volendo in questi casi applicare la formola di coesione per garantire la stabilità durante l'urto è necessario considerare le deformazioni massime nei punti più affaticati, quindi bisogna integrare (quando si può) le equazioni (295) relative al moto dei corpi elastici. Ciò è possibile per le barre a sezione costante soggette ad urti longitudinali e trasversali; atteso però il loro carattere di soluzioni particolari queste integrazioni saranno eseguite e discusse nella seconda parte di quest'opera in fine dei capitoli, che trattano della tensione e compressione semplice e della flessione, tanto più che ciò richiederebbe una digressione troppo lunga, che imbarazzerebbe la rapida esposizione dei concetti generali necessarî all'ingegnere per la soluzione dei problemi costruttivi.

Riprendendo il concetto svolto sul modo di resistere dei corpi agli urti, se la velocità d'urto è grandissima, anche se la massa urtante è molto piccola, (e quindi impegna nel primo istante una piccola porzione della materia resistente), lo scuotimento elastico non ha il tempo di trasmettersi alla massa urtata, per cui la materia, che è ad una certa distanza dal punto urtato (maggiore o minore secondo la velocità V_1), non può entrare in tensione e tutto il lavoro resistente deve essere fatto dalla materia, che trovasi in vicinanza del punto urtato. Come già si è detto, è in questo fatto che deve vedersi la spiegazione delle deformazioni permanenti prodotte da piccole masse, in corpi indubbiamente capaci di sviluppare entro i limiti di elasticità un lavoro resistente di deformazione capace di estinguere la forza viva della massa urtante, e l'asportazione netta della parte urtata del corpo resistente spesso fatta (specialmente nelle superficie resistenti) da piccole masse urtanti animate da velocità conveniente (*).

È facile trovare una relazione fra la massima deformazione unitaria e la velocità presa nel primo istante dell'urto dalla massa urtata nel punto o nel tronco soggetto all'urto, purchè questo abbia uno spessore molto piccolo. Consideriamo un tronco ds di

(*) Se ne ha un esempio nei fori che le palle dei fucili fanno nelle lamiere in ferro ed i proiettili dei cannoni nelle corazze delle navi.

trave e sia V la sua velocità al primo istante dell'urto prima che la deformazione si sia già comunicata alle parti vicine, A la sezione trasversale, ρ il raggio di girazione della medesima intorno all'asse di rotazione, e μ la densità del materiale. In causa della velocità V acquistata dal tronco elementare la sua forza viva sarà data da $\frac{\mu A ds V^2}{2}$. L'elemento essendo partito dallo stato di equilibrio naturale questa quantità dovrà essere uguale al lavoro di deformazione sviluppatosi nel tronco e precisamente (Num. 64) ad $\frac{1}{2} E A i^2 ds$ se l'urto è diretto secondo l'asse e produce sforzi di tensione o pressione, e ad $\frac{E I \theta^2 ds}{2}$ se l'urto è trasversale e produce flessione, perchè la massa urtante sia arrestata nel suo movimento. Uguagliando l'espressione della forza viva a quella del lavoro si ottiene nel primo caso

$$\frac{\mu A ds V'^2}{2} = \frac{E A ds i^2}{2}$$

da cui

$$i = \frac{V'}{\sqrt{\frac{E}{\mu}}} = \frac{V'}{w} \qquad (345).$$

Nel secondo invece

$$\frac{\mu A ds V''^2}{2} = \frac{E I \theta^2 ds}{2}$$

da cui

$$\theta = \sqrt{\frac{A}{I}} \frac{V''}{\sqrt{\frac{E}{\mu}}} = \frac{1}{\rho} \frac{V''}{w} \qquad (346).$$

Chiamando con h l'altezza della trave (nella direzione dell'urto) la massima deformazione i' nella fibra più lontana dall'asse neutro di una sezione trasversale è data da $i' = \theta \frac{h}{2}$, quindi

$$i' = \frac{h}{2\rho} \frac{V''}{w} (*) \qquad (347).$$

Se la sollecitazione invece che a tensione o flessione fosse a

(*) È la stessa formola trovata con altro procedimento da Boussinesq. Opera citata, 1882, vol. XCIX, num. 15.

sforzo di taglio allora, detto g lo scorrimento, la formola del lavoro diventa

$$\frac{\mu A ds V'''^2}{2} = \frac{G A ds g^2}{2}$$

da cui, ricordando che $G = \frac{m}{2(m+1)} E$; si ricava

$$g = \frac{V'''}{\sqrt{\frac{G}{\mu}}} = \sqrt{\frac{2(m+1)}{m}} \frac{V'''}{\sqrt{\frac{E}{\mu}}} = \sqrt{\frac{2(m+1)}{m}} \frac{V'''}{w} \quad (348).$$

Se in queste formole invece di i, i', g si mettono i valori i_1, i'_1, g_1 oppure i_2, i'_2, g_2 corrispondenti rispettivamente al limite di elasticità o di rottura si ricaveranno i valori V_1', V_1'', V_1''' e V_2', V_2'', V_2''' delle velocità di urto limite, oltre i quali si produrranno indubbiamente fenomeni di snervamento oppure la rottura, mentre invece per valori inferiori avranno luogo soltanto deformazioni elastiche. Queste formole poi mettono in evidenza un'importante proprietà, cioè che esse si verificano indipendentemente dall'estensione delle superficie a contatto durante l'urto e dal peso della massa urtante e della massa urtata, sempre però nell'ipotesi di spessori molto sottili per ciò che si riferisce a sforzi di taglio o di flessione, mentre quest'ipotesi non è necessaria nel caso che si verifichino sforzi di tensione, perchè allora la porzione di materia considerata è quella compresa fra la sezione che riceve l'urto e la sezione infinitamente vicina qualunque sia la lunghezza dell'asta resistente, purchè però l'urto avvenga contemporaneamente su tutta la sezione (o possa considerarsi come avvenuto su tutta la sezione) altrimenti non si verifica l'ipotesi fondamentale, che ha servito a stabilire l'equazione (345).

Dalle deformazioni unitarie per mezzo delle formole (122) si ricavano immediatamente nei tre casi i valori degli sforzi elastici unitari $R = E\delta = Ei$, $R' = E\delta = Ei'$, $S = Gg$ quindi

$$\left.\begin{aligned} R &= E \frac{V'}{w} \\ R' &= E \frac{h}{2\rho} \frac{V''}{w} \\ S &= \sqrt{\frac{2(m+1)}{m}} G \frac{V'''}{w} \end{aligned}\right\} \quad (349).$$

Se si tiene conto dei valori dei carichi di rottura R'_2 ed S_2 e delle relazioni, che passano fra loro nei corpi isotropi (Num. 74), non chè della formola (78) e del fatto che $\frac{h}{2}$ è sempre maggiore di ρ (nelle barre piene a sezione rettangolare di spessore h $\rho = \frac{h}{2\sqrt{3}}$) si vede che $V_2'' = \frac{2\rho}{h}\frac{R'_2}{E}w$ è minore delle velocità

$$V_2''' = \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}\frac{S_2}{G}w = \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}\frac{\frac{m}{m+1}R_2}{\frac{m}{2(m+1)}E}w = 2\sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}\frac{R_2}{E}w$$

e di $V_2' = \frac{R_2}{E}w$, quindi nelle barre sottili urtate trasversalmente da masse molto veloci avviene la rottura od anche l'asportazione netta della parte urtata tutte le volte che la velocità dell'urto superi il limite V_2'' o V_2'''. Questa osservazione spiega anche il modo col quale avvengono in generale le deformazioni permanenti nelle barre urtate trasversalmente da masse molto veloci, quando la velocità V è compresa tra V_1'' e V_2''.

Se nel determinare l'equazione di coesione (Num. 55) si accetta il concetto del Professore Beltrami, abbiamo visto (Num. 74) che in tale ipotesi sussiste fra R ed S la relazione

$$S = \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}R.$$

Impiegando per S questo valore si ottiene per V_2''' l'espressione seguente

$$V_2''' = \sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}\frac{\sqrt{\frac{m}{2(m+1)}}R_2}{\frac{m}{2(m+1)}E}w = \frac{R_2}{E}w$$

cioè lo stesso valore che abbiamo trovato per V_2'. È opportuno non dimenticare che i valori forniti dalle formole della scienza delle costruzioni in generale vanno scostandosi dal vero oltrepassando il limite di elasticità e che soltanto in via eccezionale in qualche caso particolare potrebbero dare oltre questo limite valori esatti o molto approssimati.

A conclusioni analoghe si arriva studiando l'effetto degli urti contro le superficie resistenti e restano così spiegati i fenomeni di deformazione permanente ed anche di taglio o perforazione

netta che masse relativamente piccole fanno nel corpo urtato, benchè il lavoro elastico di deformazione richiesto per estinguere la loro forza viva non sia tale da compromettere la stabilità del solido urtato, qualora esso avesse il tempo necessario per essere sviluppato utilmente.

È però indispensabile osservare che queste formole suppongono che la massa urtata, nel luogo nel quale avviene l'urto, abbia assunto nel primo istante la velocità del corpo urtante. Ciò non sarebbe esatto che per spessori infinitamente piccoli, ed approssimato (tenuto conto dell'importanza della massa urtante e della natura del materiale urtato) per spessori soltanto piccoli. Se lo spessore h aumenta allora lo studio dell'effetto dell'urto di corpi animati da forti velocità riveste il carattere di problema particolare e sarà trattato nella seconda parte di quest'opera all'articolo, *Penetrazione e perforazione delle lamiere e delle piastre*. Le considerazioni svolte superiormente non hanno altro scopo che di mettere in evidenza la grande importanza che la velocità, colla quale avviene l'urto, ha sugli effetti che l'urto stesso produce.

95. Valutazione pratica dell'effetto degli urti. Considerazioni relative agli urti che si verificano nei ponti. — Se si prendono in esame le formole del capitolo V che dànno le deformazioni, che avvengono in un'asta od in una trave sotto l'influenza di un carico isolato oppure distribuito uniformemente sulla medesima, risulta che queste sono proporzionali ai carichi, che agiscono sulla travatura (Num. 91). L'effetto delle sollecitazioni dinamiche per urto essendo quello di aumentare le deformazioni, è evidente che esso corrisponde a quello prodotto da un aumento ideale del carico statico fatto nella stessa proporzione nella quale aumentano le deformazioni. Questa considerazione ha il vantaggio di dare carattere pratico alle considerazioni fatte sull'effetto degli urti rendendole atte ad entrare nei calcoli usuali di resistenza senza complicarli in modo sensibile e renderli più lunghi o difficili. È evidente che, sia che si vogliano impiegare le formole (336) e (343) od altre analoghe, sia che si voglia fare uso di quest'ultima considerazione, il tener conto degli effetti degli urti si riduce in ultima analisi ad eseguire i calcoli ordinari di resistenza impiegando come limite dei carichi permanenti un valore R_0 uguale al limite ordinario R conveniente quando si considerano soltanto carichi agenti allo stato statico, moltiplicato per un coefficiente n' da determinarsi a seconda del genere della costruzione e delle forze, che si considerano, oppure supponendo un carico ideale uguale al carico reale moltiplicato per un coefficiente da determinarsi pure a seconda dei diversi casi. Finalmente qualche volta può convenire di usare contemporaneamente i due metodi per

tener conto di tutte le considerazioni fatte e dell'importanza relativa della massa urtante e della massa urtata. È però necessario avvertire che la supposizione che sulla trave agisca un carico ideale, superiore al reale e tale da produrre le stesse deformazioni a cui dà origine l'urto, può bensì entro certi limiti rappresentarne l'effetto in via di prima approssimazione, corrispondendo in certo qual modo all'insieme del fenomeno rappresentato dalle deformazioni totali, poichè sono solo le deformazioni d'insieme o totali che noi possiamo apprezzare sperimentalmente, ma non dà alcuna indicazione particolare sulle deformazioni che avvengono nel solido resistente nei suoi punti singolari, specialmente nel punto urtato ed in quelli d'attacco o d'appoggio. Questo fatto è particolarmente importante quando la velocità dell'urto è considerevole; anzi al numero 94 abbiamo messo in evidenza le dannose conseguenze, che possono verificarsi quando ha luogo quest'ultima condizione ed abbiamo fatto vedere come facilmente possa essere compromessa la resistenza del corpo urtato. Quando invece la velocità della massa urtante è piccola, allora la scossa molecolare ha il tempo di propagarsi nell'interno del solido che riceve l'urto, tutto il corpo resistente, o gran parte di esso, ha per così dire il tempo di mettersi in tensione e deformarsi in modo che alla fine di ognuno degli istanti, in cui può intendersi diviso il tempo della durata dell'urto, esso abbia sensibilmente la forma che allo stato statico corrisponderebbe allo spostamento subìto alla fine dello stesso istante dal punto o dalla sezione urtata. In altri termini alla fine di ogni elemento di tempo, in cui può supporsi divisa la durata dell'urto, si può considerare come sufficientemente esatto il supporre che il corpo urtato abbia già sviluppato tutta l'energia resistente o *resilienza*, che corrisponde alla posizione presa dal punto o dalla sezione, che ha ricevuto l'urto. Nelle costruzioni civili in genere si presenta quest'ultimo caso quindi per un gran numero di problemi si potrà valutare con approssimazione sufficiente l'effetto degli urti ricorrendo all'espediente di calcolare la trave in modo che essa possa resistere allo stato statico ad uno sforzo uguale al peso reale della massa urtante moltiplicata per l'unità aumentata di un coefficiente γ uguale al rapporto fra l'aumento della deformazione statica prodotta dall'azione dinamica e la deformazione prodotta dall'azione statica del corpo urtante nel punto urtato.

Fra le costruzioni civili quelle che sono più soggette a sollecitazioni dinamiche sono certamente da noverarsi i ponti, specialmente quando servono per ferrovie; quindi, senza trattare ora completamente la questione, faremo alcune considerazioni sui medesimi

per mostrare come possono essere applicati nei casi particolari i criterî accennati superiormente.

Preferiamo riferirci ad un genere speciale di costruzione nell'esporre il modo, col quale si può tener conto in pratica dell'effetto delle sollecitazioni dinamiche per urto quando non si possono o non si vogliono impiegare le formole esatte, oppure quelle che abbiamo chiamato di prima o di seconda approssimazione poichè, dovendosi il più delle volte considerare molte cause di sollecitazione variamente apprezzabili, una trattazione generale e puramente astratta riescirebbe facilmente oscura e di difficile applicazione. Sembra invece che potrà essere cosa molto semplice nei problemi speciali analizzare tutte le cause possibili di sollecitazione dinamica in modo analogo a quello che ora faremo pei ponti e, seguendo lo stesso metodo, esaminare l'effetto prodotto da ciascuna di esse e valutarlo approssimatamente coi criterî anzidetti o calcolarlo esattamente per mezzo delle formole, che corrispondono a ciascun caso.

Il passaggio dei treni ferroviari sui ponti produce urti e scosse in seguito a varie cause, di cui le principali sono le seguenti:

a) L'elasticità delle molle, per effetto della quale il peso della locomotiva e dei veicoli ora gravita sull'asse delle ruote, ora rimbalza, dopo di che dà luogo, cadendo dall'altezza raggiunta, ad un urto, ed il fenomeno si ripete successivamente senza interruzione. Se il ponte ha una certa lunghezza non si può supporre, anzi è smentito dall'esperienza, che tutte le molle abbiano un movimento sincrono, quindi l'effetto dovuto alla loro elasticità è molto ridotto avendo luogo una specie di compenso fra le diverse oscillazioni. Lo stesso non può dirsi dei piccoli ponti, nei quali questo fatto ha sempre un'importanza più o meno grande dipendentemente dalla minore o maggiore ampiezza delle loro luci.

b) L'uso dei freni, che aumenta l'attrito contro le rotaie, una parte della forza viva del treno viene estinta e cambiata in calore ed un' altra invece è comunicata alla massa del ponte. Anche questa causa di sollecitazione dinamica è più dannosa pei piccoli ponti che pei grandi, poichè in questi ultimi la massa è molto maggiore. In via generale si può sempre ridurre molto od anche togliere completamente nelle ferrovie questa causa d'aumento delle deformazioni elastiche con opportuni regolamenti relativi all'uso dei freni ed all'aumento o diminuzione di velocità dei treni sui ponti.

c) Il salto che avviene nelle ruote al passaggio da una rotaia all'altra in causa delle inevitabili ineguaglianze della via e delle inflessioni prodotte dai carichi. Coi modi di costruzione ora

in uso non è possibile evitare completamente questa causa d'urto, si può attenuarla impiegando rotaie molto lunghe, non accoppiando mai rotaie nuove con rotaie vecchie, mettendo molta cura nella costruzione del solaio del ponte e sottoponendo alle rotaie in ferro delle robuste lungherine in legno. L'effetto dannoso prodotto da questi salti è tanto minore quanto più grande è il ponte, perchè è maggiore in questo caso la massa che riceve l'urto, e la velocità dell'urto essendo sempre molto piccola può essere sviluppata tutta la facoltà di resistenza o *resilienza* delle travature.

È facile rendersi conto dell'importanza di questo fatto esaminando un caso particolare (*). Supponiamo che il salto al passaggio da una rotaia all'altra sia di metri 0,005 ed il peso portato da una ruota della locomotiva sia di Kg. 6500,00 il lavoro prodotto nella caduta è di Kgm. 32,500. Se si ritiene in via approssimata che la freccia media di deformazione η_m di un ponte della lunghezza l possa essere espressa da

$$\eta_m = \frac{l}{2000}$$

il lavoro prodotto dal carico accidentale q distribuito uniformemente sul ponte sarà dato da

$$\frac{ql}{2}\,\frac{l}{2000} = \frac{ql^2}{4000}$$

e ritenuto che il sovraccarico sia costante ed agisca istantaneamente, per quanto è stato detto ai numeri 13 e 41, il lavoro motore corrispondente sarà doppio di quello dato dalla formola precedente.

Indicando con χ il rapporto di questi due diversi lavori e ricavandone il valore per diverse lunghezze si ha una chiara idea dell'importanza dell'effetto dei salti delle ruote al passaggio da una rotaia ad un'altra sui ponti per ferrovia. Nel quadro (**) che segue riportiamo il valore del rapporto χ corrispondente a sei lunghezze diverse di trave scelte fra i limiti di $l = 0^m,00$ ed $l = 100^m,00$.

(*) Ceradini, Opera citata, pag. 215.

(**) Ceradini, come sopra.

Lunghezza l della trave	Carico q per metro corrente di ponte	Lavoro di flessione $\frac{ql^2}{4000}$ da esso prodotto	Valore del rapporto $\chi = \frac{32,500}{\frac{ql^2}{2000}}$	*Osservazioni*
3	9 000	40 500	0,8300	
6	8 000	144 000	0,2300	Il valore del rapporto χ diminuisce al crescere della lunghezza l.
10	6 000	300 000	0,1800	
20	5 000	1 000 000	0,1300	
30	4 000	1 800 000	0,0180	
100	4 000	20 000 000	0,0016	

d) I varî movimenti che hanno le locomotive in moto, le oscillazioni dei treni, gli attriti contro le rotaie quando il ponte è in curva, le trepidazioni delle travi, le deformazioni delle travi secondarie ed altre cause di minore importanza, che non si esaminano particolarmente, poichè non si vuol fare uno studio completo della questione, ma solo dare un esempio del modo, col quale si applicano i criterî svolti nei numeri precedenti. La maggior parte di queste cause di sollecitazioni dinamiche si possono diminuire rendendo più saldo l'accoppiamento dei veicoli, perchè in tal modo si evitano gli spostamenti relativi delle varie parti dei treni, contemporaneamente però si rende maggiore l'attrito contro le rotaie nelle curve.

Fatti analoghi si producono nei ponti per strade ordinarie in causa dell'attrito delle ruote dei veicoli contro la massicciata stradale, della elasticità delle molle, degli urti prodotti dai motori, dei salti dovuti alle asperità della via, delle oscillazioni dei carichi e finalmente in causa del passo cadenzato di una folla di persone. Questa ultima causa di sollecitazione dinamica in certi casi può assumere un'importanza affatto eccezionale, specialmente se la cadenza del passo coincide col periodo d'oscillazione, perchè allora ad ogni ripetizione dell'urto al lavoro di deformazione, che produce naturalmente la vibrazione viene ad aggiungersi quello prodotto dall'urto, e, riproducendosi questo fatto successivamente, si arriva presto ad avere nel corpo deformazioni superiori a quelle, per le quali incomincia lo snervamento della materia od anche la rottura. Le altre cause di sollecitazione dinamica invece per l'indipendenza e la natura dei carichi, che transitano sui ponti per strade carrettiere (ben mantenute), producono effetti sensibilmente meno

importanti di quelli, che si verificano nei ponti per ferrovie. L'effetto poi dannosissimo del passo cadenzato può facilmente essere evitato con opportuni regolamenti sulle marcie delle truppe e facendole transitare sui ponti molto deformabili (ponti sospesi) per colonne separate. Un'altra causa importantissima di urti e di azioni dinamiche nei grandi viadotti è l'effetto del vento, specialmente quando soffia a raffiche, e può diventare dannosissimo e pericoloso quando l'azione delle raffiche produce impulsi, che vengano a concordare col periodo o con tempi multipli del periodo di oscillazione, perchè allora i due effetti, come si è già avvertito, si vengono a sommare. Fortunatamente questo ultimo fatto, per la natura del fenomeno avviene difficilmente oppure tutt'al più la concordanza non si verifica più di due o tre volte di seguito e spesso l'azione del vento agente in discordanza colle oscillazioni tende a diminuirle distruggendo in parte la forza viva prima comunicata.

Tralasciando ora di considerare l'azione del vento, che ordinariamente si estrinseca in senso trasversale al ponte (sebbene qualche volta si possa avere un'influenza notevole anche in senso verticale) tutte le altre cause di sollecitazione dinamica per urto superiormente accennate hanno comuni i seguenti caratteri:

La velocità della massa urtante è molto piccola in confronto della velocità di propagazione dello scuotimento molecolare nell'interno del corpo urtato.

L'effetto che producono è più dannoso pei piccoli ponti che pei grandi, poichè nelle formole che danno le deformazioni dinamiche (Num. 93) il rapporto $1+\frac{P}{Q}=\frac{P+Q}{Q}$ entra nel denominatore.

Esse si verificano in condizioni tali che non permettono un facile apprezzamento, anche soltanto in modo approssimato.

In queste condizioni, per valutare l'influenza degli urti sui ponti non resta altro modo che introdurre nel calcolo un'ipotesi prossimamente equivalente, cioè tale che le corrispondano con molta approssimazione deformazioni elastiche presumibilmente non minori di quelle, che hanno effettivamente luogo sotto l'azione reale delle varie sollecitazioni dinamiche. Diversi autori, ed il Winkler in particolare, propongono di tener conto di queste influenze scegliendo per limite dei carichi permanenti R un valore più piccolo pei piccoli ponti che pei grandi, e di ragguagliare complessivamente l'effetto degli urti ad un aumento del carico accidentale. Sia R_r il carico di rottura del materiale impiegato, n il coefficiente di sicurezza, cioè il rapporto fra il carico di rottura R_r ed il limite R dei carichi permanenti $\left(n=\frac{R_r}{R}\right)n$ dovrà ricevere un

valore n_1 più grande pei piccoli ponti con luce libera inferiore a metri 10,00 ed un valore n_2 più piccolo pei grandi ponti, in cui la luce è superiore a metri 30,00, e valori intermedî per ampiezze comprese fra questi due limiti. Non sembra opportuno per ora considerare una variazione ulteriore del coefficiente di sicurezza n per le ampiezze superiori ai metri 30,00, sebbene sia da ritenere che l'effetto di un urto brusco diminuisca di importanza coll'aumentare del peso e della luce della travatura. Ciò dipende dal fatto che nei ponti aventi una luce libera superiore a metri 30,00 a regime normale non si possono più produrre variazioni brusche ed impreviste nelle deformazioni; i salti al passaggio da una rotaia all'altra perdono d'importanza, ha luogo una specie di compenso negli effetti prodotti dall'elasticità delle molle e diminuisce considerevolmente il rapporto fra la massa urtante e quella resistente. Per tener conto della minore importanza che le sollecitazioni dinamiche hanno nei ponti per strada ordinaria in confronto di quelli che servono per ferrovie si può prendere nei primi il coefficiente di sicurezza alquanto minore, circa dal 10 al 15 %, di quello che si prenderebbe in circostanze uguali per un ponte per strada ferrata. Il valore poi di n si fa attualmente variare fra i limiti n_1 ed n_2 in modo che sia sempre verificata nei metalli la relazione

$$\frac{n_1 - n_2}{n_1} = \frac{1}{5} = 0{,}20.$$

L'effetto generale delle sollecitazioni dinamiche considerate per quanto è stato detto, riesce rappresentabile con sufficiente approssimazione da un aumento del carico accidentale tale che le deformazioni, che gli corrispondono, siano uguali alle deformazioni dinamiche, che si verificano realmente.

Al numero 91 è stato dimostrato chè per una data ipotesi di carico, cioè per un carico agente in un punto determinato di una trave, oppure per un carico uniformemente distribuito lungo la medesima, le deformazioni massime η_1 sono proporzionali ai carichi, quindi, detta f la freccia o deformazione allo stato statico e ϕ quella corrispondente allo stato dinamico, P il carico allo stato statico e P_i il carico ideale, che produce una deformazione equivalente alla deformazione dinamica, dovrà verificarsi la relazione

$$P : P_i = f : \phi$$

da cui si ricava

$$P_i = P \frac{\phi}{f} = P(1+\gamma)$$

quando si convenga di indicare con γ il rapporto $\frac{\phi - f}{f} = \frac{\Delta f}{f}$, cioè l'aumento proporzionale della deformazione dovuto alle azioni dinamiche. Per una trave a sezione costante caricata da un peso q uniformemente distribuito lungo il suo asse, conservando i soliti simboli per rappresentare la lunghezza della trave, il momento d'inerzia ed il modulo di elasticità, la freccia statica è (Num. 91)

$$f_q = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI}.$$

La freccia dinamica sotto l'azione dell'urto di un carico k uniformemente distribuito sulla medesima è data dalla formola (243) del numero 93

$$\phi_u = \sqrt{\frac{2\alpha h f}{\varepsilon}} = V \sqrt{\frac{f}{g\varepsilon}} \cdot \sqrt{\left[\frac{q}{p+q} \frac{\lambda_1'}{\lambda'}\right]^2 \lambda'} = \sqrt{\frac{125}{3072} \frac{q^2}{(p+q)} \left(\frac{\lambda_1'}{\lambda'}\right)^2 \lambda' \frac{l^4}{EI} h}.$$

Per le ragioni esposte superiormente non si può ritenere che gli urti, che avvengono nei ponti al passaggio dei carichi, debbano ritenersi come dovuti all'azione di tutto il sovraccarico q, ma soltanto ad una porzione di esso $\nu_1 q$ supposta cadere da un'altezza h. Il coefficiente ν_1 e l'altezza h dipendono evidentemente da molte circostanze e precisamente da tutte quelle considerate in principio di questo numero e che possono riassumersi dicendo che il valore di queste quantità è in relazione colla natura dei carichi che transitano sul ponte e col modo nel quale esso venne costruito. Partendo da quest'ipotesi e ponendo $\nu^2 = \nu_1^2 \left(\frac{\lambda_1'}{\lambda'}\right)^2 \lambda'$ il rapporto γ_u fra la freccia ϕ_u dovuto soltanto all'urto e la freccia f_q dovuta al sovraccarico q quando esso agisce allo stato statico è dato da

$$\gamma_u = \frac{\phi_u}{f_q} = \sqrt{\frac{125}{3072} \left(\frac{384}{5}\right)^2 \frac{\nu^2 q^2}{(p+q)} \frac{l^4 h E^2 I^2}{q^2 l^8 EI}} = \sqrt{\frac{240 \nu^2 EIh}{(p+q) l^4}}.$$

Dalla formola di resistenza a flessione $M = \frac{RI}{v'}$, indicando con H l'altezza della trave, si ricava

$$I = \frac{1}{8} \frac{(p+q) l^2}{R} \frac{H}{2}$$

quindi

$$\gamma_u = \sqrt{\frac{240\,\nu^2 E}{16R}\cdot\frac{l^2 H}{l^4}} = \sqrt{\frac{15\,\nu^2 E}{R}}\sqrt{\frac{l^2 H}{l^4}} = \mu\frac{\sqrt{H}}{l} \qquad (350)$$

e ritenendo (col WINKLER) che per approssimazione questa formola possa accettarsi anche se il sovraccarico agisce solo sopra una porzione l_1 della lunghezza l di tutta la trave

$$\gamma_u = \frac{\mu l\sqrt{H}}{l_1^2}. \qquad (350^{bis}).$$

Al numero 93 formola (342) abbiamo visto che

$$\varphi_1 = f + \sqrt{f^2 + \varphi_u^2}$$

quindi

$$\gamma = \frac{\varphi_1 - f}{f} = \sqrt{1 + \frac{\varphi_u^2}{f^2}} = \sqrt{1 + \gamma_u^2}.$$

Non è possibile dedurre da questa formola un valore attendibile per γ, poichè non è noto quale porzione $\nu_1 q$ del sovraccarico q cadente da un'altezza h determinata possa considerarsi nelle condizioni attuali di costruzione ed esercizio delle strade ferrate e delle strade ordinarie come equivalente agli urti prodotti dal sovraccarico q, quindi è più opportuno riferirsi direttamente ai risultati delle osservazioni ed esperienze fatte su costruzioni esistenti ed in base alle medesime determinare direttamente il valore di γ. Questo coefficiente, come mostrano le formole (350) e (350^{bis}) è variabile e diminuisce al crescere della lunghezza del ponte o meglio della luce della travata, che si considera, μ invece ha un valore pressochè costante. Ciò non ostante sembra giustificato per ora ritenere per γ in via di prima approssimazione un valore costante corrispondente alla media delle osservazioni e ricerche fatte, perchè allo stato attuale delle cognizioni il coefficiente γ non si può ancora apprezzare convenientemente. Non si hanno ancora dati sufficienti sugli aumenti delle tensioni prodotte dagli urti nelle diverse membrature di una trave, e le esperienze fatte sugli accrescimenti delle freccie di curvatura al passaggio dei carichi non possono far conoscere l'effetto generale degli urti, e molto meno il loro effetto locale, ma soltanto l'aumento totale delle deformazioni corrispondenti allo stato statico prodotto dagli urti e dalle altre sollecitazioni dinamiche, che hanno luogo nei ponti e che restano ancora da esaminare (influenza dei carichi in movimento). Per dare un'idea

dell'importanza delle sollecitazioni dinamiche totali nei ponti ricordiamo che il signor Gerber riteneva che tenendo conto di tutte le cause, che aumentano le deformazioni, si dovesse pei ponti in ferro ritenere $\gamma = 0{,}50$. Winkler crede esagerato questo valore ed opina che, tenuto conto delle esperienze eseguite, si possano accettare con sufficiente approssimazione per γ i seguenti valori:

Per i ponti per ferrovia . . . . . $\gamma = 0{,}30$

Per i ponti per strada ordinaria $\gamma = 0{,}20$.

Ciò è da ritenersi più conforme alla verità in quanto chè i carichi, che si muovono con grande velocità, sono sempre considerevolmente minori di quelli, che si assumono pel calcolo di un ponte e che corrispondono al massimo sovraccarico, che può trovarsi sul medesimo. Il Winkler osserva inoltre che la formola (350) può ritenersi valida anche quando la trave, subendo un'azione parziale di urto, presentasse un aumento di flessione dovuto ad un carico agente solo su una porzione l_1 di tutta la sua portata l, poichè una valutazione più precisa riescirebbe troppo complessa e poco in armonia colle esigenze della pratica. Da questa discussione risulta che l'effetto degli urti sopra un ponte può ritenersi abbastanza bene valutato moltiplicando il sovraccarico q uniformemente distribuito sulla costruzione ed equivalente staticamente all'effetto del massimo peso, che può gravitare sul ponte, per il coefficiente $(1+\gamma)$.

L'osservazione e l'esperienza non hanno ancora permesso di determinare il valore di γ corrispondente agli urti, che subiscono i ponti, ma solo quello equivalente all'effetto di tutte le sollecitazioni dinamiche riunite, che si producono al passaggio dei treni ed anche questo entro limiti molto larghi e che varieranno al variare delle condizioni di manutenzione e di esercizio. Indipendentemente però da questa osservazione l'ingegnere dovrà sempre aver cura di scegliere nel calcolo dei piccoli ponti (e quindi anche pei traversi e per le piccole travi in genere soggette a sollecitazioni dinamiche) come limite dei carichi permanenti R un valore più piccolo di quello che si fissa ordinariamente pei grandi ponti: ciò equivale a scegliere pei primi un coefficiente n di sicurezza superiore (dal 20 al 5 %) a quello, che si suole usare pei secondi.

Considerazioni analoghe possono esser fatte per qualsiasi altra costruzione particolare soggetta ad urti: per ciascuna di esse bisognerà esaminare il modo, col quale avviene l'urto, se la massa urtante ha piccola velocità si potrà ritenere con sufficiente approssimazione che il suo effetto sia abbastanza bene rappresentato

mediante un aumento del carico proporzionale all'aumento delle deformazioni valutate colle formole del numero 92. Se invece la massa urtante è animata da una grandissima velocità, allora bisognerà per ciascun caso determinare le massime deformazioni, che avvengono specialmente nel punto urtato e nei punti o sezioni fisse per giudicare del grado di stabilità delle medesime. (Veggasi la seconda parte di quest'opera dove sono svolte le trattazioni relative ai problemi speciali).

96. Effetto dei carichi in movimento sulle travature soggette a flessione. — Fra le cause di sollecitazione dinamica nelle travature va noverato anche il movimento dei carichi lungo l'asse delle medesime. Questo fatto, che si verifica sempre nelle travature, che sopportano piani stradali e spesso anche in altre costruzioni, produce due effetti diversi. Il primo è che appena il carico agisce in una determinata posizione, le molecole della trave si spostano per arrivare alla posizione di equilibrio corrispondente. Contemporaneamente al movimento delle molecole il carico cambia di punto di applicazione e quindi cambia anche la posizione di equilibrio, verso la quale tende a portarsi la trave deformandosi. Questo fatto ripetendosi per tutti i successivi istanti produce una serie continua di trepidazioni, che hanno per effetto di modificare le deformazioni elastiche e l'equilibrio ha luogo sotto l'influenza delle forze attive e delle forze d'inerzia di ogni piccola particella materiale, di cui la trave è composta. In secondo luogo in causa delle deformazioni avviene in generale che il carico non si muove sopra una linea retta (il piano del ponte), ma su una curva, quindi dà origine ad una forza radiale W, che viene ad aggiungersi ai carichi agenti sulla trave. Se indichiamo con m la massa del corpo in movimento, con ρ il raggio di curvatura dell'asse neutro longitudinale della trave deformato in causa della flessione (della curva secondo la quale si dispone il piano del ponte primitivamente rettilineo) con V la velocità di traslazione del carico, la forza W è data dalla nota formola

$$W = m\frac{V^2}{\rho}.$$

L'effetto dei carichi in movimento, che abbiamo accennato pel primo, non può determinarsi facilmente allo stato attuale delle cognizioni ed in realtà non può avere una grande importanza, poichè due successive posizioni di equilibrio essendo infinitamente vicine, nelle condizioni ordinarie non può essere notevole la forza viva acquistata dalle molecole, ed in generale non avrà importanza

sensibile. Il secondo invece degli effetti accennati può avere spesso un'influenza notevole ed aumentare considerevolmente le deformazioni, che subirebbe la trave allo stato statico; esso ha interessato molto gl'ingegneri, i quali se ne sono occupati ripetutamente. Nel 1847 il Parlamento inglese nominò una Commissione coll'incarico di studiare questo speciale fenomeno; dapprima se ne è occupato Willis e nel 1849 Stokes pubblicò uno studio completo sull'argomento (*). Chi però ha più particolarmente studiato questo genere di sollecitazione dinamica è stato Phillips in due memorie pubblicate l'una negli *Annales des mines*, 1852, e l'altra nei *Resoconti dell'Accademia delle Scienze* (Parigi) nel 1856. La stessa questione è poi stata trattata in seguito da Renaudot (**) dal Bresse (***) e finalmente da Barrè de Saint-Venant (****).

Prendiamo in considerazione una trave ad asse rettilineo $A'B'$ (*Fig.* 84ª, *tav.* XI,) ed a sezione costante riposante liberamente in A ed in B sulla quale si muove un peso Q, che alla fine del tempo t trovasi nel punto C distante a dall'estremo A e b dall'altro estremo B, e siano $l=2c$ la lunghezza della trave, Ax e Ay gli assi coordinati e g l'accelerazione corrispondente all'unità di massa dovuta alla gravità. La trave AB è soggetta all'azione statica del peso Q, alla forza radiale $W=\frac{QV^2}{g\rho}$, che nasce in causa del moto del peso Q lungo una linea curva e finalmente all'azione statica del peso proprio p ed a quella dell'inerzia della materia componente la trave messa in moto in seguito alla deformazione, che avviene nella medesima. La curvatura della linea elastica si suppone per ipotesi debolissima, (se la deformazione fosse grande allora si sortirebbe dai limiti, entro i quali abbiamo detto essere compresa la scienza delle costruzioni) quindi come è stato dimostrato al numero 69 $\frac{1}{\rho}=\pm\frac{d^2y}{dx^2}$ ed il valore di W diventa

$$W=\frac{Q}{g}\frac{V^2}{\rho}=-\frac{QV^2}{g}\frac{d^2y}{dx^2}$$

poichè prendendo lo spostamento diretto verso il basso come positivo, il raggio di curvatura, essendo diretto verso l'alto, è negativo e quindi espresso da $-\frac{d^2y}{dx^2}$.

(*) Riportato negli *Annales des ponts et chaussées*, 1851.

(**) *Annales des ponts et chaussées*, 1861.

(***) Opera citata.

(****) *Note* alla *Théorie de l'élasticité des corps solides* di Clebsch.

Inoltre con moltissima approssimazione si può ritenere che la direzione di W coincida con quella della forza Q, colla quale in realtà fa un angolo infinitamente piccolo. Ciò equivale a ritenere la componente verticale della forza W uguale alla forza stessa ed a trascurarne la componente orizzontale. Se si suppone che il peso della trave, e quindi anche l'inerzia della materia che la compone, siano trascurabili rispetto al Q (*) allora la deformazione corrispondente al punto C sarà data dalla formola (308) del numero 91

$$y=\left(\frac{d\Gamma}{dQ}\right)_{Q=0}=Q\frac{a^2(l-a)^2}{3EI}$$

nella quale in luogo di Q bisognerà porre

$$Q+W=Q\left(1-\frac{V^2}{g}\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

ed il momento flettente nei due tronchi AC e CB della trave risulterà espresso rispettivamente da

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M=Q\left(1-\frac{V^2}{g}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a}\right)\frac{l-a}{l}x \quad (**) \quad (351)$$

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M=Q\left(1-\frac{V^2}{g}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a}\right)\frac{a}{l}(l-x) \quad (**) \quad (352).$$

Se poi si volesse tener conto anche delle deformazioni prodotte dal peso proprio, alle equazioni (351) e (352) bisognerebbe aggiungere la deformazione ed il momento prodotto da questa ultima causa. Lo stesso deve dirsi se si volesse tener conto di di-

---

(*) Come appunto avverrebbe quando si considerasse una rotaia durante il passaggio della ruota della locomotiva sulla medesima.

(**) Non bisogna dimenticare che in ogni sezione si possono considerare due momenti uguali e di segno contrario, cioè quello delle forze esterne alla sezione e quello delle azioni molecolari resistenti agenti nella sezione stessa. A seconda che si considera l'uno piuttosto che l'altro di questi momenti bisogna introdurre nelle formole superiori il segno positivo o negativo; in relazione a quanto è stato fatto in molti numeri, precedenti, qui è stato conservato il segno positivo.

versi carichi isolati Q (Q_1, Q_2, ... Q_n) oppure di un peso b uniformemente distribuito lungo l'asse della trave.

Le equazioni (351) e (352) contengono la variabile x, la funzione y e la sua derivata seconda, quindi la soluzione del problema della determinazione delle deformazioni, e quindi anche quelle dei momenti flettenti (Form. 154), dipende dall'integrazione delle equazioni differenziali (351) e (352). Se però si considera che l'effetto della sollecitazione dinamica prodotta dal movimento dei carichi non può essere che un aumento della deformazione corrispondente allo stato statico alla forza Q, e che tale deformazione in una trave stabile è piccolissima e varia con legge di continuità da punto a punto, appare evidente come il metodo delle successive approssimazioni possa essere applicato con vantaggio alla soluzione di questo problema. Si può cioè mettere nelle (351) e (352) in luogo di $\frac{d^2y}{dx^2}$ il valore corrispondente della derivata della deformazione prodotta da Q allo stato statico, e ricavare per y un valore di prima approssimazione; in seguito calcolare $\frac{d^2y}{dx^2}$ corrispondente a questo ultimo valore di y e sostituirlo ancora nelle (351) e (352) per dedurne un'altra espressione di y di seconda approssimazione più vicina al vero valore della deformazione e così di seguito finchè due valori successivi differiscono meno di ciò che si ritiene apprezzabile. Le deformazioni elastiche essendo piccolissime una ricerca di prima approssimazione in generale è sufficiente pei bisogni dell'ingegnere; in ogni caso poi si potrà facilmente verificare questo fatto calcolando per y un valore di seconda approssimazione. Si hanno quindi due metodi per la determinazione delle deformazioni prodotte dai carichi in movimento; uno per successive approssimazioni elementare e sempre applicabile e l'altro esatto, che dipende dall'integrazione delle equazioni differenziali (351) e (352), e che potrà essere impiegato con vantaggio soltanto quando la predetta integrazione sia relativamente semplice e facile da eseguire, oppure quando si richiegga una precisione estrema nel risultato. Come esempio dei due metodi cercheremo col primo procedimento l'effetto prodotto sopra una trave da un carico Q isolato mobile lungo l'asse della medesima e col secondo l'effetto del movimento di un carico, il quale sia uniformemente distribuito lungo l'asse della frave e la occupi interamente rinnovandosi continuamente.

Conveniamo di indicare (*Fig.* 84ª, *tav.* XI) con

x_1 ed x_2 le distanze di un punto D dell'asse della trave dai suoi estremi A e B

y_1 ed y_2 la deformazione elastica corrispondente misurata ver-

ticalmente secondo che il punto D è alla sinistra od alla destra del punto C in cui è applicato il carico Q

$l=2c$ la lunghezza della trave

G il suo punto di mezzo

p il carico distribuito uniformemente per metro corrente lungo l'asse della trave comprendendovi anche il suo peso.

Se si prescinde dal peso proprio della trave abbiamo già trovato che l'ordinata y_c del punto in cui agisce il carico Q è data da

$$y_c=Q\left(1-\frac{Q}{g}V^2\frac{d^2y_c}{dx^2}\right)\frac{l^2x^2-2lx^3+x^4}{3EI} \qquad (353)$$

allo stato statico invece nello stesso punto la deformazione sarebbe data da

$$y_c=Q\frac{l^2x^2-2lx^3+x^4}{3EI}$$

per conseguenza

$$\frac{d^2y_c}{dx^2}=\frac{2Q}{3EI}(l^2-6lx+6x^2).$$

Quindi come prima approssimazione il valore di y_c sarebbe dato da

$$y_c=Q\left[1-\frac{QlV^2}{3EIg}\left(\frac{12a^2-12la+2l^2}{l^2}\right)\right]\frac{a^2(l-a)^2}{3EI} \qquad (354).$$

Se si indicano con ϕ la freccia nel punto di mezzo della trave, con f la freccia nello stesso punto corrispondente al peso Q agente allo stato statico e si pone

$$\beta=\frac{3EIg}{QlV^2} \qquad \varphi=\frac{Ql^3}{48EI}\left(1+\frac{QlV^2}{3EIg}\right)=f\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \qquad (355)$$

il momento M_c nel punto C in causa delle (351) diventa

$$\left.\begin{aligned} M_c&=Q\left[1-\frac{QlV^2}{3CIg}\left(\frac{12a^2-12la+2l^2}{l^2}\right)\right]\frac{(l-a)a}{l}= \\ &=Q\left[1-\frac{1}{\beta}\left(\frac{12a^2-12la+2l^2}{l^2}\right)\right]\frac{(l-a)a}{l} \end{aligned}\right\} \qquad (356)$$

e nel punto di mezzo G, in causa della simmetria di forma e di carico, esso prenderà il valore massimo M_{max} e sarà dato da

$$M_{max}=\frac{Ql}{4}\left(1+\frac{QlV^2}{3EIg}\right)=\frac{Ql}{4}\left(1+\frac{1}{\beta}\right) \qquad (357)$$

ossia: *il massimo momento flettente nel punto di mezzo e la freccia corrispondente sotto l'azione di un carico* Q *in movimento sono uguali a quelli che si avrebbero allo stato statico qualora sulla trave invece del carico* Q *agisse nello stesso punto una forza uguale a* $Q\left(1+\frac{1}{\beta}\right)$.

Da questa analisi appare come l'effetto del movimento di un carico sopra una travatura ad asse rettilineo, qualora non si tenga conto del suo peso p, è quello di far aumentare il momento flettente e la freccia massima di una quantità $\frac{1}{\beta}$ tanto maggiore, quanto più grande è il carico in moto, la velocità di traslazione e la lunghezza del solido e quanto più piccolo è il momento d'inerzia della sezione resistente della trave. Il valore di E essendo rappresentato da un numero molto grande il termine

$$\frac{1}{\beta}=\frac{QlV^2}{3EIg}$$

in generale non avrà grande importanza, a meno che non si tratti di carichi animati da una velocità molto forte, o di una trave molto lunga costruita in modo che la sua sezione trasversale presenti un piccolo momento d'inerzia.

Se si vuole tener conto anche del peso proprio della trave o, più generalmente, di un peso p uniformemente distribuito lungo l'asse della medesima, allora nelle formole (351) e (352) al momento M' prodotto dal carico Q bisognerà aggiungere il momento M'' dovuto a queste ultime forze, in guisa che esse diventeranno

$$\left.\begin{aligned} EI\frac{d^2y_1}{dx_1^2}&=\left(Q-\frac{QV^2}{g}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a}\right)\frac{(l-a)a}{l}x_1+\frac{pl}{2}x_1-\frac{px_1^2}{2}\\ EI\frac{d^2y_2}{dx_2}&=\left(Q-\frac{QV^2}{g}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a}\right)\frac{a}{l}x_2+\frac{pl}{2}x_2-\frac{px_2^2}{2}\end{aligned}\right\} (358).$$

Per un calcolo di prima approssimazione il valore della defor-

mazione y si ottiene, come si è già osservato, trascurando la forza radiale

$$W=-\frac{Q V^2}{g}\left(\frac{d^2 y}{d x_2}\right)_{x=a} \tag{359}$$

quindi le due equazioni da integrare restano

$$\left.\begin{aligned} E I\frac{d^2 y_1}{d x_1}&=Q\frac{b}{l}x_1+\frac{p l}{2}x_1-\frac{p}{2}x_1^2 \\ E I\frac{d^2 y_2}{d x_2}&=Q\frac{a}{l}x_2+\frac{p l}{2}x_2-\frac{p}{2}x^2{}_2 \end{aligned}\right\} \tag{360}$$

Eseguendo le integrazioni necessarie per avere y_1 ed y_2, ed indicando con C_1, C_2, C_3, C_4 quattro costanti arbitrarie da determinarsi in seguito per mezzo delle condizioni imposte dalla natura del problema, si ottiene

$$\left.\begin{aligned} E I\frac{d y_1}{d x_1}&=Q\frac{b}{2l}x_1^2+\frac{p l}{4}x_1^2-\frac{p}{6}x_1^3+C_1 \\ E I\frac{d y_2}{d x_2}&=Q\frac{a}{2l}x^2{}_2+\frac{p l}{4}x_2^2-\frac{p}{6}x_2^3+C_2 \end{aligned}\right\} \tag{361}$$

$$\left.\begin{aligned} E I y_1&=Q\frac{b}{6l}x_1^3+\frac{p l}{12}x_1^3-\frac{p}{24}x_1^4+C_1 x_1+C_3 \\ E I y_2&=Q\frac{a}{6l}x_2^3+\frac{p l}{12}x_2^3-\frac{p}{24}x_2^4+C_2 x_2+C_4 \end{aligned}\right\} \tag{362}$$

La trave considerata è appoggiata in A ed in B e non presenta alcuna soluzione di continuità quindi per

$$\left.\begin{aligned} x_1&=0 \qquad y_1=0 \\ x_2&=0 \qquad y_2=0 \\ x_1=a,\quad x_2=b \qquad &\left(\frac{d y}{d x_1}\right)_{x_1=a}=-\left(\frac{d y_2}{d x_2}\right)_{x_2=b} \qquad y_1=y_2=y_c \end{aligned}\right\} \tag{363}$$

Le costanti C_3 e C_4 sono uguali allo zero, perchè per $x_1=0$ ed $x_2=0$ si annullano tutti i termini, che entrano nelle (362) ad ec-

cezione di C_3 e C_4, e le due costanti C_1 e C_2 sono date dalle due ultime equazioni del gruppo (363) cioè da

$$Q\frac{ba^2}{2l}+\frac{pla^2}{4}-\frac{pa^3}{6}+C_1+Q\frac{ab^2}{2l}+\frac{plb^2}{4}-\frac{pb^3}{6}+C_2=0$$

$$Q\frac{ba^3}{6l}+\frac{pla^3}{12}-\frac{pa^4}{24}+C_1a-Q\frac{ab^3}{6l}-\frac{plb^3}{12}+\frac{pb^4}{24}-C_2b=0$$

dalle quali si ricava

$$C_1=Q\frac{b}{6l}(2la-a^2)+\frac{pl^3x_1}{24} \qquad C_2=Q\frac{a}{6l}(l^2-a^2)+\frac{pl^3x_2}{24}$$

e le formole (362) che dànno gli spostamenti y_1 ed y_2 di un punto dell'asse della trave diventano

$$\left.\begin{aligned} y_1&=Q\frac{b}{6EIl}\left[(2la-a^2)x_1-x_1^3\right]+pl\frac{l^3x_1-2lx_1^3+x_1^4}{24EIl}\\ y_2&=Q\frac{a}{6EIl}\left[(l^2-a^2)x_2-x_2^3\right]+pl\frac{l^3x_2-2lx_3^3+x_2^4}{24EIl}\end{aligned}\right\}\ (364).$$

La deformazione y_c nel punto C, in cui agisce il carico, Q si ottiene dalle formole precedenti facendo nella prima $x_1=a$ oppure nella seconda $x_2=b=l-a$ e risulta

$$y_c=Q\frac{a^2(l-a^2)}{3EIl}+pl\frac{l^3a-2la^3+a^4}{24EIl}$$

da cui si ricava

$$-\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=a}=\frac{l}{3EI}\left[Q\frac{2l^2-12al+12a^2}{l^2}+\frac{3pl}{2}\,\frac{a^2-la}{l^2}\right] \qquad (365).$$

Sostituendo nella (358) a $\left(\frac{d^2y}{dx}\right)_{x=a}$ questo valore si ottiene l'espressione del momento flettente $M'+M''$

$$\left.\begin{aligned} M=M'+M''=Q\frac{l-a}{l}x\Big[1+\frac{QlV^2}{3EIg}\Big(Q\frac{12al-12a^2-2l^2}{l^2}+\\ +\frac{3pl}{2}\,\frac{la-a^2}{l^2}\Big)\Big]+pl\frac{l^3x-2l^3x+x^4}{24EIl}\end{aligned}\right\}\ (366)$$

e pel tronco di destra CB si avrebbe un'espressione analoga, in cui Q sarebbe moltiplicato per $\frac{a}{l}(l-x)$ invece che per $\frac{(l-a)}{l}x$.

Se per raggiungere una maggiore approssimazione si vuole tener conto anche dell'inerzia della trave, è evidente che per ogni tronco dx essa equivale ad una forza rappresentata dal prodotto della massa $\frac{p\,dx}{g}$ presa con segno negativo moltiplicata per l'accelerazione $\frac{d^2y_1}{dt^2}$ oppure $\frac{d^2y_2}{dt^2}$ (Num. 2). Indichiamo con $\Pi_1 dx_1$ e $\Pi_2 dx_2$ queste forze, secondochè corrispondono ad un tronco infinitesimo di trave posto a sinistra oppure a destra del punto C, sarà

$$\Pi_1 dx_1 = -\frac{p\,dx}{g}\frac{d^2y_1}{dt^2} \qquad \Pi_2 dx_2 = -\frac{p\,dx}{g}\frac{d^2y_2}{dt^2} \qquad (367).$$

In questo problema non vi è altra variabile indipendente che il tempo t, quindi

$$a = Vt \qquad da = V\,dt$$

e sostituendo a dt^2 questo valore nelle (367) risulta

$$\left.\begin{aligned} \Pi_1 dx_1 &= -\frac{p\,dx_1}{g}V^2\frac{d^2y_1}{da^2} \\ \Pi_2 dx_2 &= -\frac{p\,dx_2}{g}V^2\frac{d^2y_2}{da^2} \end{aligned}\right\} \quad (368).$$

Per una ricerca di prima approssimazione si potrà ritenere come valore degli spostamenti dinamici incogniti quelli corrispondenti allo stato statico, come già si è fatto nelle ricerche precedenti, ed allora, derivando due volte i valori di y_1 ed y_2 (Form. 364) e sostituendoli nelle equazioni precedenti, si ottengono per $\Pi_1 dx_1$ e $\Pi_1 dx_2$ le seguenti espressioni

$$\Pi_1 dx_1 = -\frac{1}{\beta}\frac{3p}{l^3}(l-a)\,x_1\,dx_1$$

$$\Pi_2 dx_2 = -\frac{1}{\beta}\frac{3p}{l^3}a\,x_2\,dx_2.$$

Se con S si indica la reazione di sinistra a cui dà origine nel punto A l'azione delle forze $\Pi_1 dx_1$ e $\Pi_2 dx_2$, il momento flettente

M''' di queste stesse forze rispetto ad una qualunque delle sezioni di ascissa x'_1 poste a sinistra del punto C' è dato da

$$\left.\begin{aligned} M''' &= Sx'_1 - \int_0^{x'_1} \Pi_1 (x'_1 - x_1)\, dx_1 = - \\ &- \frac{\int_0^a \Pi_1 (l - x_1)\, dx_1 + \int_0^b \Pi_2 x_2 dx_2}{l} x'_1 - \int_0^{x'_1} \Pi_1 (x'_1 - x_1)\, dx_1 = \\ &= \frac{1}{\beta} p l \frac{l-a}{2l^3} x'_1 (2al - a^2 - x'^2_1) \end{aligned}\right\} \quad (369).$$

Sommando i tre valori M', M'' ed M''', ossia la (366) colla (369), in causa del principio della sovrapposizione degli effetti si ottiene il momento M rispetto ad una sezione qualsiasi della trave per una sezione posta a sinistra del punto C'

$$\left.\begin{aligned} M &= M' + M'' + M''' = \left(-EI \frac{d^2 y}{dx^2}\right) = \\ &= Q \frac{l-a}{l} x \left[1 + Q \frac{lV^2}{3EIg} \left(Q \frac{12al - 12a^2 - 2l^2}{l^2} + \frac{3pl}{2} \frac{la - a^2}{l^2}\right)\right] + \\ &+ p l \frac{l^3 x - 2l^3 x - x^4}{24EIl} + \frac{1}{\beta} p l \frac{l-a}{2l^3} x_1 (2al - a^2 - x_1^2) \end{aligned}\right\} \quad (370)$$

ed un'espressione analoga si ricava collo stesso procedimento per una sezione posta a destra del punto d'applicazione della forza Q. Integrando due volte le due espressioni del momento rispetto alle variabili x_1 ed x_2 e dividendo il risultato per EI si ottengono i valori di y_1 ed y_2, che risultano ricordando che $l = 2c$ (*)

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \frac{Qx_1}{12cEI} (2c - a) [a(4c - a) - x_1^2] \left\{1 + \frac{2QV^2}{3cgEI} [3a(2c - a) - \right. \\ &- \left. 2c^2]\right\} + \frac{plx_1}{48cEI} \left[(8c^3 - 4cx_1^2 + x_1^3) + \frac{1}{20} \frac{2QV^2}{3cgEI} (2c - a) \left\{3x_1^4 + \right.\right. \\ &+ \left.\left. a\left(64c^3 + a[(24c - 11a)(12c - 3a) - 16c^2] - 20x_1^2 (5c - 2a)\right)\right\}\right] \end{aligned}\right\} \quad (371)$$

(*) Flamant, *Stabilité des constructions*, *Résistance des matériaux*, pag. 617.

$$y_2=\frac{Qx_2}{12cEI}a[(2c-a)(2c+a)-x_2^2]\left\{1+\frac{2QV^2}{3cgEI}[3a(2c-a)-\right.$$

$$\left.-2c^2]\right\}+\frac{plx_2}{48cEI}\left[(8c^3-4cx_2^2+x_2^3)+\frac{1}{20}\frac{2QV^2}{3cgEI}a\left\{3x_2^4+(2c-\right.\right. \quad (371).$$

$$\left.\left.-a)\left(64c^3+(2c-a)[(2c-11a)(6c+3a)-16c^2]-20x_2^2(c+2a)\right)\right\}\right]$$

L'espressione del momento M_c diventa massima per

$$x_1=a=c=\frac{l}{2}$$

ciò risulta facilmente considerando che la parte di momento dovuta all'azione statica di Q e di p in causa della simmetria di forma e di carico è massima nel punto di mezzo e che in questo stesso punto è annullata la derivata del momento M'''. Infatti derivando l'espressione di M''' rispetto a x_1 e ponendo la sua derivata uguale allo zero si ottiene $4ca-a^2-x_1^2-2x_1^2=0$ da cui

$$x_1=\sqrt{\frac{4ca-a^2}{3}}$$

e per conseguenza per un dato valore di a il momento flettente massimo M''' è dato da

$$M'''=\frac{pQlV^2}{24c^2gEI}\sqrt{\frac{4ca-a^2}{3}}(2c-a)\left(4ca-a^2-\frac{4ca-a^2}{3}\right).$$

Il valore poi di a che rende massimo M_1''', si ottiene uguagliando a zero la sua derivata presa rispetto ad a, ciò che dà

$$4\sqrt{4ca-a^2}(3c-a)(c-a)=0$$

equazione che è soddisfatta per

$$a=0, \qquad a=c, \qquad a=3c, \qquad a=4c.$$

Il solo valore ammissibile in questa ricerca è $a=c$ ed il massimo valore del momento M''' è

$$M'''_{max}=\frac{Qpl^2V^2}{12EIg}c^2=\frac{QlV^2}{3EIg}\frac{pl^2}{16}=\frac{1}{2}\frac{1}{\beta}\frac{pl^2}{8}.$$

Sommando il valore M'''_{max} con quello di $(M'+M'')_{max}$ dato dalla (366) si ottiene il massimo valore del momento flettente M_{max} nel punto di mezzo pella trave

$$M_{max}=\frac{Ql}{4}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{pl^2}{8}\left(1+\frac{3}{4}\frac{1}{\beta}+\frac{1}{2}\frac{1}{\beta}\right) \qquad (372).$$

$\frac{Ql}{4}$ e $\frac{pl^2}{8}$ sono i valori dei momenti flettenti corrispondenti al punto di mezzo della trave prodotti allo stato statico rispettivamente dal carico mobile Q e dal peso uniformemente distribuito p, i termini compresi fra le parentesi esprimono di quanto questi momenti debbono essere aumentati per tener conto dell'azione prodotta dal carico in movimento.

$\frac{Ql}{4}\frac{1}{\beta}$ esprime la parte di momento dovuta all'azione centrifuga del carico Q in moto.

$\frac{3}{4}\frac{1}{\beta}\frac{pl^2}{8}$ è la porzione di momento flettente dovuta all'inerzia dello stesso carico Q in causa dell'incurvamento prodotto dal peso proprio della trave.

$\frac{1}{2}\frac{1}{\beta}\frac{pl^2}{8}$ è la parte di momento flettente totale dovuta all'inerzia della trave e dei suoi diversi elementi messi in moto in causa della flessione prodotta dal passaggio del carico Q.

La formola (372) è generale e può servire alla determinazione delle condizioni di stabilità di una trave al passaggio di carichi animati da una determinata velocità, essa comprende in certo qual modo gli studi fatti su questo problema, tenendo conto di tutti gli elementi, che vi influiscono. Ordinariamente in pratica si suole trascurare il terzo termine della seconda parentesi scrivendo per le applicazioni la formola come fu data da Phillips

$$M_{max}=\frac{Ql}{4}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{pl^2}{8}\left(1+\frac{3}{4}\frac{1}{\beta}\right) \qquad (373)$$

nulla impedisce di procurarsi una maggiore approssimazione impiegando la formola (372), che non differisce dalla precedente che per la sostituzione del coefficiente $\frac{5}{4}$ a quello di $\frac{3}{4}$

$$M_{max}=\frac{Ql}{4}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{pl^2}{8}\left(1+\frac{5}{4}\frac{1}{\beta}\right) \qquad (374).$$

Se nelle formole (371) si fa

$$x_1 = c = \frac{l}{2} \qquad x_2 = c = \frac{l}{2}$$

e si conviene di indicare con f_1 ed f_2 le freccie dovute allo stato statico al carico Q applicato nel punto di mezzo della trave ed al peso uniformemente distribuito p

$$f_1 = \frac{Q l^3}{48 EI} \qquad f_2 = \frac{5}{384} \frac{p l^4}{EI}$$

la freccia dinamica φ corrispondente al punto di mezzo G della trave è data da

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{Q l^3}{48 EI}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{5}{384}\frac{p l^4}{EI}\left(1+\frac{3}{4}\frac{1}{\beta}+\frac{43}{100}\frac{1}{\beta}\right)= \\ &= f_1\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+f_2\left(1+\frac{118}{100}\frac{1}{\beta}\right) \end{aligned}\right\} \quad (375).$$

Se si indica con h l'altezza teorica, da cui dovrebbe cadere il carico Q per acquistare la velocità V, la quantità $\frac{1}{\beta}$ può mettersi sotto la forma seguente

$$\frac{1}{\beta} = \frac{Q l V^2}{3 EI g} = 2 \frac{16 Q l^3}{48 E I l^2} \frac{V^2}{2g} = 2 f_1 \frac{h}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} = 2 \frac{f_1}{\left(\frac{l}{4}\right)^2} h \qquad (376).$$

Il valore del rapporto $\frac{f_1}{\left(\frac{l}{4}\right)^2}$ è in generale molto piccolo, quindi a meno che non si abbiano per h, e quindi per V, valori molto forti il coefficiente $\frac{1}{\beta}$ non ha grande importanza: raramente in pratica supera $\frac{1}{20}$. In queste condizioni, e tenuto conto della incertezza che regna intorno al valore da assegnare nei casi particolari al limite R dei carichi permanenti o meglio dei criterî larghi coi quali si assume questo valore, si comprende facilmente come in condizioni ordinarie l'effetto del movimento dei carichi lungo l'asse delle travature in generale, e nei ponti in particolare, non possa influire considerevolmente sulla stabilità dei medesimi.

Se la travatura invece che essere appoggiata agli estremi fosse incastrata, oppure sulla medesima si movessero diversi carichi Q (Q_1, Q_2, . . . Q_n) il metodo per successive approssimazioni condurrebbe certamente a calcoli molto lunghi e laboriosi, ma si potrebbe sempre applicare seguendo il procedimento usato nell'esempio svolto superiormente. Come appare dalla trattazione precedente la velocità iniziale della trave, ossia per $t=0$, si suppone uguale allo zero, infatti non si tien conto che delle componenti d'inerzia dovute alla deformazione prodotta dal carico Q.

A complemento di quanto è stato detto sopra questo argomento riportiamo dal *Trattato di costruzioni di ponti* di Molinos e Pronier, (Pag. 80), il riassunto di tre serie di esperienze fatte dalla Commissione inglese per la determinazione dell'influenza dei carichi in movimento sulle travi sopra barre della lunghezza di metri 2,74 in ghisa, sulle quali si faceva passare a diverse velocità un carro caricato di pesi.

1ª *Serie.* — Larghezza delle barre metri 0,0254, spessore metri 0,0508, freccia statica media sotto il carico iniziale di Kg. 253,91 nel punto di mezzo metri 0,020, carico unitario corrispondente Kg. 15,93 per millimetro quadrato:

Rapporto medio delle freccie massime, dinamiche e statiche .	1,29	1,52	2,15	2,12	2,19
Velocità corrispondenti in metri per secondo	4,57	7,31	8,84	10,06	10,97
Carichi mobili in Kg. che producono la rottura alle diverse velocità	418,27	343,05	275,67	274,97	266,60

2ª *Serie.* — Larghezza metri 0,0254, spessore metri 0,0762, freccia statica pel carico iniziale metri 0,009, sforzo unitario del materiale Kg. 7,08 per millimetro quadrato:

Rapporto medio delle freccie massime, dinamiche e statiche	1,09	1,32	1,55	1,59
Velocità corrispondenti in metri per secondo	4,57	8,84	10,97	13,11
Carichi mobili in Kg. che producono la rottura alle differenti velocità . . .	770,80	590,09	545,45	494,67

3ª *Serie.* — Larghezza metri 0,1016, spessore metri 0,0381, freccia statica pel carico iniziale metri 0,0193, sforzo unitario del materiale Kg. 9,08 per millimetro quadrato:

Rapporto medio delle freccie massime, dinamiche e statiche	1,41	1,56	1,96	2,50
Velocità corrispondenti in metri per secondo	4,57	8,84	10,97	13,11
Carichi mobili in Kg. che producono la rottura alle differenti velocità . . .	748,03	605,30	480,16	387,21

In queste esperienze l'aumento della freccia dovuto alla velocità è stato considerevole, esso aumenta notevolmente colla freccia. Sarebbe però esagerato ed erroneo il ritenere che aumenti analoghi si dovessero riscontrare nei ponti, poichè in queste costruzioni in genere la freccia è sempre molto piccola, raramente supera 0,0016 della portata e sovente è inferiore a 0,0005, inoltre la massa in movimento ha un'importanza minore rispetto a quello della travatura resistente.

Dall'esame delle formole superiori e dei risultati delle esperienze fatte su ponti costruiti risulta che l'influenza della velocità non è mai tale da aumentare di molto le deformazioni elastiche: non è possibile nelle esperienze fatte sui ponti esistenti separare l'effetto degli urti da quello dovuto alla velocità di traslazione, ma come si è già osservato raramente gli aumenti totali delle deformazioni dovuti alle due cause riunite superano il 30 %.

Il Professore Chicchi nel suo lavoro intitolato, *Procedimenti per le prove di stabilità delle travate metalliche per il calcolo delle freccie teoriche e di un nuovo istromento per la misura delle freccie effettive*, ecc., porta il seguente quadro, il quale può dare un'idea sufficiente dell'aumento, che subiscono le freccie statiche dei ponti metallici sotto l'influenza di carichi in movimento.

Velocità di traslazione in chilometri per ora	90	80	70	60	50	40	30	20
Aumento corrispondente della freccia statica	40 %	32 %	24,5 %	18 %	12,5 %	8 %	4,5 %	2 %

È poi opportuno avvertire che i carichi, che si muovono sui ponti con grande velocità sono sempre molto minori di quelli, in base ai quali vengono ordinariamente calcolati le freccie statiche e la sezione resistente delle travature.

97. Carico uniformemente distribuito sull'asse di una travatura ad asse rettilineo animato da una determinata velocità di traslazione V. — Un altro caso di sollecitazione dinamica dovuta ai carichi in movimento, e che può specialmente verificarsi nei ponti di piccola e media luce, è quello di un treno di veicoli o di pesi, che occupando tutta la travatura si muove sulla medesima con una certa velocità. Esso corrisponde con sufficiente approssimazione come limite estremo al caso di una trave ad asse rettilineo caricata da un peso fisso k uniformemente distribuito per metro corrente e da un carico q distribuito in egual modo ed animato da una velocità V,

che percorre la trave rinnovandosi continuamente. Supponiamo conservato ai simboli usati nei numeri precedenti lo stesso significato ed immaginiamo riferito il sistema a due assi ortogonali aventi l'origine nel punto di mezzo G della trave (*Fig.* 85ª, *tav.* XI) e diretti in modo che Gx coincida colla retta AB e Gy sia diretto dall'alto al basso. Sia $p=k+q$, lo sforzo di taglio F ed il momento flettente M (Num. 75) si potranno ottenere integrando l'espressione dello sforzo, che agisce sopra un elemento dx qualsiasi della trave, determinando le costanti mediante le condizioni imposte dal fatto che la trave è simmetrica e simmetricamente caricata, e che essa riposa liberamente ai suoi estremi, cioè dovrà essere per

$$x=0 \qquad F=0$$

per

$$x=c=\frac{l}{2} \qquad M=0.$$

Lo sforzo che agisce su un tronco elementare di trave della lunghezza dx è composto del peso $pdx=(k+q)dx$ realmente esistente, più l'azione della componente radiale

$$\frac{q\,dx\,V^2}{g\rho}=-\frac{q\,V^2}{g}\,\frac{d^2y}{dx^2}dx.$$

In causa delle considerazioni svolte nel numero precedente potremo scrivere che l'azione totale su un tronco di lunghezza dx è dato da

$$\frac{dF}{dx}dx=p\,dx-\frac{q\,dx\,V^2}{g\rho}=p\,dx-\frac{q\,V^2}{g}\,\frac{d^2y}{dx^2}dx \qquad (377).$$

Questa relazione si verificherà finchè durerà sulla trave la continuità del carico e del movimento e suppone che il carico sia arrivato gradualmente ad avere la velocità V in guisa che la trave giunge alla sua posizione di equilibrio senza impulso sensibile, e la conserva sotto l'azione costante del peso p e della velocità V.

Integrando due volte questa espressione, e tenendo conto delle condizioni poste per determinare le costanti di integrazione, si ottiene

$$\frac{dM}{dx}=F=px-\frac{qV^2}{g}\,\frac{dy}{dx}$$

$$M=\frac{p}{2}(x^2-c^2)-\frac{qV^2}{g}\,y=EI\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Quest'ultima relazione

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{p}{2}(x^2-c^2)-\frac{qV^2}{g}y \qquad (378)$$

rappresenta l'equazione differenziale della fibra media dopo avvenuta la deformazione e sarà necessario integrarla per avere il valore della deformazione y corrispondente ai diversi punti della trave.

Per un calcolo di prima approssimazione seguendo il procedimento indicato nel numero precedente si potrebbe porre nella (378) per y il valore che gli corrisponderebbe se il carico q agisse sulla trave allo stato statico. In tal caso la formola (364) che dà il valore di y quando la trave è riferita ad assi ortogonali passanti per A e diretti secondo AB ed Ay (*Fig.* 84ª, *tav.* XI)

$$y=\left(\frac{d\Gamma}{dQ}\right)_{Q=0}=\frac{p}{24EI}[2la^3-l^3a-a^4]$$

diventa nel nostro caso facendo $l=2c$ e $a=c+x$

$$-y=\frac{p}{24EI}[5c^4-6c^2x^2+x^4]=\frac{p}{384EI}[5l^4-24l^2x^2+16x^4]$$

e quindi l'equazione (378) può scriversi in via approssimata nel modo seguente

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{p}{2}(x^2-c^2)+\frac{pqV}{24EIg}[5c^4-6c^2x^2+x^4].$$

In causa della simmetria di forma e di carico il massimo momento si otterrà ponendo $x=0$, quindi convenendo di indicare con $\frac{1}{\beta_1}$ la quantità $\frac{qV^2c}{EIg}$

$$M_{max}=EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}=\frac{pc^2}{2}\left[1+\frac{5}{12}\frac{qV^2c^2}{EIg}\right]=\frac{pl^2}{8}\left(1+\frac{5}{12}\frac{1}{\beta_1}\right) \qquad (379).$$

Il Bresse (*) risolve esattamente la stessa questione nel modo seguente: L'equazione

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{p}{2}(x^2-c^2)-\frac{qV^2}{g}y$$

(*) Opera citata, pag. 378.

mostra che l'equilibrio della trave corrisponde a quello che produrrebbero allo stato statico un carico $p = k + q$ agente normalmente all'asse della trave e due forze di compressione e di intensità $\frac{qV^2}{g}$ applicate all'estremità della medesima ed agenti secondo la direzione, che aveva il suo asse prima della deformazione. Poniamo

$$EIy = pc^4 y_1 \qquad x = cx_1 \qquad \frac{qV^2}{g} = \frac{EIu^2}{c^2}$$

allora l'equazione (378) diventa

$$pc^2 \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{pc^2}{2}(x_1^2 - 1) - \frac{EI}{c^2} u^2 \frac{pc^4 y_1}{EI}$$

od anche

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{2}(x_1^2 - 1) - u^2 y_1 \qquad (380).$$

Se in questa equazione si mette invece di y' un binomio di secondo grado della forma $\alpha + \beta x_1^2$ si determineranno facilmente i coefficienti α e β in modo da rendere identici i due membri dell'equazione, cioè

$$y_1 = \frac{1}{2u^2}\left(x_1^2 - 1 - \frac{2}{u^2}\right).$$

Poniamo ora

$$y_1 = \frac{1}{2u^2}\left(x_1^2 - 1 - \frac{2}{u}\right) + z \qquad (381)$$

allora

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{x_1}{u^2} + \frac{dz}{dx_1}$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{d^2 z}{dx_1^2}$$

e sostituendo questi valori nella (380) risulta

$$\frac{1}{u^2} + \frac{d^2 z}{dx_1^2} = \frac{1}{2}(x_1^2 - 1) - \frac{1}{2}(x_1 - 1) + \frac{1}{u^2} - u^2 z$$

cioè

$$\frac{d^2 z}{dx_1^2} = -u^2 z$$

equazione il cui integrale è notariamente

$$z = A \operatorname{sen} u x_1 + B \cos u x_1$$

essendo A e B due costanti da determinarsi in base alle condizioni particolari del problema. Sostituendo questo valore di z nella (381) si ottiene

$$y_1 = \frac{1}{2u^2}\left(x_1^2 - 1 - \frac{2}{u^2}\right) + A \operatorname{sen} u x_1 + B \cos u x_1$$

od anche, ricordando le posizioni fatte,

$$EI\frac{y}{pc^2} = \frac{1}{2u^2}\left(x^2 - c^2 - \frac{2c^2}{u^2}\right) + Ac^3 \operatorname{sen}\frac{ux}{c} + Bc^2 \cos\frac{ux}{c}.$$

Per le condizioni particolari del problema, che stiamo trattando, deve essere

$$\text{per } x = 0 \qquad \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{per } x = c = \frac{l}{2} \qquad y = 0$$

quindi

$$A = 0 \qquad B = \frac{1}{u^4 \cos u}$$

e sostituendo ad A e B questi valori si ha finalmente l'equazione cercata

$$EI\frac{y}{pc^2} = \frac{1}{2u^2}(x^2 - c^2) + \frac{c^2}{u^4}\left(\frac{\cos\frac{ux}{c}}{\cos u} - 1\right) \qquad (382).$$

Facendo $x = 0$ s'ottiene la freccia dinamica ϕ nel punto di mezzo

$$\phi = \frac{pc^4}{EI}\left[\frac{1}{u^4}\left(\frac{1}{\cos u} - 1\right) - \frac{1}{2u^4}\right]$$

in cui

$$u^2 = \frac{qV^2c}{EIg} = \frac{1}{\beta'} \qquad (383).$$

Dalla formola

$$M = \frac{p}{2}(x^2 - c^2) - \frac{qv^2}{g}y$$

si ricava, ponendo $\frac{dM}{dx}=0$, che M assume il valor massimo quando $x=0$, ossia nel punto di mezzo della trave (cosa del resto evidente in causa della simmetria di forma e di carico), quindi essendo in tal punto $y=\phi$

$$M_{max}=\frac{pc^2}{2}+\frac{qV^2}{g}\phi=\frac{pc^2}{2}+\frac{EI}{c^2}u^2\phi=\frac{pc^2}{2}\left(1+\frac{2EIu^2}{pc^4}\phi\right)$$

mentre allo stato statico il valore del momento massimo sarebbe $M_{max}=\frac{pc^2}{2}$ cioè l'effetto del movimento del carico sulla trave è quello di fare aumentare il momento flettente della quantità

$$\frac{pc^2}{2}\frac{2EIu^2}{pc^4}\phi=\frac{EIu^2}{c^2}\phi.$$

Se si pone $n=1+\frac{2EIu^2}{pc^4}\phi$ in causa delle relazioni (382) e (383) si ottiene

$$n=1+\frac{EIu^2}{pc^4}\phi=\frac{2}{u^2}\left(\frac{1}{\cos u}-1\right)=2\beta'\left(\frac{1}{\cos\sqrt{\frac{1}{\beta'}}}-1\right)$$

n esprime il coefficiente pel quale bisogna moltiplicare il massimo momento statico per avere il valore del massimo momento prodotto nel punto di mezzo della trave per effetto del movimento del carico.

Sviluppando in serie $\cos\sqrt{\frac{1}{\beta'}}$ si ottiene

$$1-\frac{1}{2\beta'}+\frac{1}{2\times 384}\frac{1}{\beta'^2}-\ldots,$$

se si sostituisce questo valore nell'espressione di n, trascurando i termini, che contengono le potenze di β' d'ordine superiore, cosa che è quasi sempre permessa in via di prima approssimazione perchè $\frac{1}{\beta'}$ nelle circostanze ordinarie è sempre una quantità abbastanza piccola, risulta

$$n=\frac{2}{u^2}\left(\frac{1}{\cos u}-1\right)=2\beta'\left(\frac{1}{\cos\sqrt{\frac{1}{\beta'}}}-1\right)=1+\frac{5}{12}\frac{1}{\beta'}$$

ed il momento massimo sarà espresso da

$$M_{max} = \frac{p c^2}{2}\left(1 + \frac{5}{12}\,\frac{1}{\beta'}\right) \qquad (379).$$

come si era trovato precedentemente impiegando il metodo delle approssimazioni successive.

Se si fa $u = \frac{\Pi}{2}$, $n = \infty$ e la trave non potrebbe resistere in modo alcuno, sarà quindi opportuno fissare col Bresse come valor massimo di u almeno $\frac{\Pi}{4}$, in tal caso

$$\frac{q V^2}{g} = \frac{EI\Pi^2}{16 c^2} \qquad (384)$$

da cui si ricava

$$V = \pm\sqrt{\frac{EI g \Pi^2}{16 c^2 q}}$$

ed

$$n = \frac{32}{\Pi^2}\left(\frac{1}{\cos\frac{\Pi}{4}} - 1\right) = 1{,}343$$

cioè il momento statico può al massimo essere aumentato di circa un terzo e la freccia ϕ diventa

$$\phi = 0{,}2780\,\frac{p c^4}{EI}$$

mentre se la velocità V fosse uguale allo zero la freccia statica f sarebbe

$$f = \frac{5}{24}\,\frac{p c^4}{EI\,l} = 0{,}2083\,\frac{p c^4}{EI}.$$

Se indichiamo con H l'altezza di una trave e con R il limite dei carichi permanenti

$$M_{ma} = \frac{p c^2}{2} = \frac{RI}{V'} = \frac{2RI}{H}$$

da cui

$$\frac{c^2}{I} = \frac{4R}{pH}$$

e sostituendo nella (383) a $\frac{c^2}{I}$ questo valore risulta

$$q\,\frac{V^2}{g} = \frac{EI\Pi^2}{16c^2} = \frac{p\Pi^2 EH}{64R}$$

e

$$V = \frac{\Pi}{8}\sqrt{\frac{E}{R}\,\frac{p}{q}\,gH}.$$

Se come fa Bresse si suppone

$$\frac{E}{R} = \frac{20\,000\,000\,000}{6\,000\,00}$$

e

$$\frac{p}{q} = \frac{K+q}{q} = \frac{6}{5}$$

valore che in generale è superiore al vero, e quindi tende a diminuire il limite della massima velocità ammissibile,

$$V = 17{,}56\sqrt{2gH}$$

relazione dalla quale si ricava il quadro seguente:

Per H uguale a metri	Il valore limite della velocità espressa in metri per minuto secondo è
0,50	55
0,75	67
1,00	78
1,25	87
1,50	95
2,00	110
3,00	135
4,00	156
5,00	174

La velocità di un treno ferroviario sorpassa difficilmente 100 chilometri l'ora, ossia 28 metri al secondo, si può quindi affer-

mare (*) che le velocità dei treni nelle ferrovie non raggiungono mai il limite, che potrebbe cominciare a rendere la forza viva del convoglio pericolosa per la stabilità delle travature in ferro, a meno che non si abbiano travi di altezza limitatissima. Dalla formola

$$V = 17{,}56 \sqrt{2gH}$$

si ricava

$$H = \frac{V^2}{602{,}05\, g}$$

supponendo $V = 28$ metri per minuto secondo l'altezza limite risulterebbe

$$H = \frac{784}{602{,}05 \times 9{,}80} = \frac{784}{5899} = 0{,}13.$$

Tutti questi calcoli riposano sull'ipotesi che il treno di carichi abbia assunta la sua velocità definitiva gradualmente senza comunicare forza viva alla trave e che esso si rinnovi continuamente. In pratica non avverrà precisamente quanto l'ipotesi suppone; ordinariamente il treno arriva animato da una determinata velocità, entra sul ponte occupandolo progressivamente fino a coprirlo interamente, se è abbastanza lungo, poi dopo un certo tempo lo abbandona lasciando la trave in uno stato vibratorio in causa della forza viva acquistata dalla materia, che la compone (**). Si può quindi dire che la trave avrà tendenza a prendere durante il passaggio del treno la forma corrispondente all'equazione (382), ma che arrivata a quella posizione, essa passerà oltre in causa della forza viva acquistata per l'entrata brusca del treno, lo scuotimento dovuto alle successive posizioni che esso occupa, ecc., ecc., oscillando intorno alla posizione di equilibrio naturale. Il Bresse osserva che quand'anche l'aumento nelle deformazioni e nel momento flettente fosse duplicato, ciò non condurrebbe in modo alcuno a condizioni pericolose per la stabilità della trave, ciò ridurrebbe al massimo il coefficiente n a 1,70 circa invece che 1,33, aumento per nulla pericoloso a meno che lo sforzo unitario prodotto dal carico fisso non fosse elevatissimo e superiore alle cifre abitualmente ammesse. In ogni caso questa soluzione relativa ad un caso estremo ed ipotetico servirà sempre a dare criterî chiari intorno all'effetto dei carichi mobili sulle travature.

(*) Bresse, Opera citata, pag. 385.

(**) Bresse, Opera citata, pag. 396.

In realtà un treno non può considerarsi come un carico distribuito uniformemente, ma piuttosto come due serie di carichi, una corrispondente alla locomotiva e l'altra ai veicoli, che essa trascina, ciascuna delle quali può ritenersi equivalente ad un carico uniformemente distribuito su una determinata estensione. Lo studio dell'effetto prodotto da un carico mobile così composto può farsi applicando il metodo generale delle approssimazioni successive, oppure, come ha fatto l'Ingegnere Renaudot (*), basandosi sopra un'analisi speciale. Tanto questo come altri problemi analoghi saranno trattati nella seconda parte di quest'opera nella risoluzione delle questioni particolari, che si possono presentare all'ingegnere. Qui volevamo soltanto dare un'idea generale dell'effetto dei carichi mobili sulle travature e del modo di assoggettarlo a calcolo e pensiamo che quanto è stato detto su tale argomento sia sufficiente per raggiungere lo scopo proposto. Il problema della determinazione esatta dell'effetto di uno o più carichi mobili lungo l'asse di una trave è sempre una questione d'analisi molto difficile e complessa, ed anche nel caso, in cui non si cerchino che soluzioni di prima approssimazione, s'incontrano sempre calcoli lunghi e laboriosi. In via generale l'effetto di un carico mobile è un aumento nelle deformazioni e quindi può essere rappresentato approssimatamente da un aumento nel carico supposto agire allo stato statico. Nelle condizioni, che si verificano ordinariamente in pratica, questo aumento non ha in generale una grande importanza, tanto più che i carichi che si muovono con grande velocità sono sempre molto più leggeri del peso, che si suppone agire sulla trave allo stato statico pei calcoli di resistenza.

Per diminuire e togliere anche completamente l'effetto prodotto dai carichi in moto il Bresse consiglia di fare le travi leggermente curve verso l'alto in guisa chè per la deformazione esse possano tutt'al più diventare rettilinee. In queste condizioni la componente radiale, che abbiamo indicata col simbolo W, o non esiste od avrà un segno contrario al peso e ne distruggerà parzialmente l'effetto. È però necessario osservare che vi possono essere difficoltà pratiche a realizzare questa leggera curvatura verso l'alto e che è raro che le travi rettilinee montate con una leggera freccia rispetto alla linea, che unisce i due punti d'appoggio, conservino per molto tempo la forma arcuata, per cui non si può fare grande assegnamento su questo espediente e non si vede

(*) *Étude de l'influence des charges en mouvement sur la résistance des ponts métalliques à poutres droites* (*Annales des ponts et chaussées*, 1861.)

applicato in via generale dai costruttori. Forse si potrebbe raggiungere lo stesso scopo in modo più pratico disponendo gli attacchi dei traversi e delle lungherine in modo che il piano stradale riescisse leggermente curvo verso l'alto senza portare alcuna modificazione speciale alla costruzione delle travature principali.

98. Osservazioni generali sulle sollecitazioni dinamiche. — Dalle cose esposte in questo capitolo risulta evidente l'effetto dannoso delle sollecitazioni dinamiche, variabile col variare del modo, col quale esse si esercitano, e la difficoltà di poterlo apprezzare esattamente e con metodi, che per la loro facilità d'applicazione, possano entrare nell'uso corrente. Fino ad ora mancano anche dati precisi per molte costruzioni sulla frequenza ed intensità di queste cause, come mancano dati per assegnare il limite dei carichi permanenti e delle deformazioni per le massime deformazioni dinamiche, che non durano che una piccolissima frazione di secondo e che un urto non produce che una sola volta, per stabilire l'effetto che queste azioni, che si ripetono rapidissimamente, hanno sulla compagine molecolare dei corpi e finalmente sull'opportunità che vi può essere talvolta di tener conto anche delle vibrazioni secondarie. In tali condizioni si comprende come debba già essere considerato come notevole per la sua importanza pratica un procedimento informato a criterî larghi, senza altre pretese che quella di arrivare ad un risultato di prima approssimazione e tale da poter facilmente essere introdotto nei calcoli usuali di resistenza senza renderli sensibilmente più difficili o complessi. Si può raggiungere questo scopo usando in modo razionale degli espedienti già accennati nei numeri precedenti, cioè di correggere opportunamente il coefficiente n di sicurezza e di aumentare idealmente in giusta misura il carico statico, in base al quale sono fatti i calcoli di resistenza. Per ciò poi che si riferisce agli urti bisognerà sempre verificare se essi avvengono in condizioni tali che le formole approssimate dei numeri 92 e 93 siano applicabili, cioè se la velocità dell'urto non è tale da non permettere al corpo urtato di entrare, per così dire, in tensione, producendo specialmente nel punto urtato deformazioni elastiche unitarie molto superiori a quelle, che corrisponderebbero alla deformazione complessiva del corpo e quindi alle formole (317) e (319) di prima o seconda approssimazione.

Riassumendo le cose dette si può concludere quanto segue:

a) Nelle costruzioni civili in generale, ed anche in quelle che più specialmente sono destinate a sopportare azioni dinamiche come i ponti, raramente hanno luogo nelle condizioni ordinarie di carico sollecitazioni tali, che possano produrre conseguenze molto

gravi o pericolose, le velocità colle quali avvengono gli urti e si trasportano i carichi non sono mai tali da compromettere la stabilità quando le travature resistenti siano state calcolate coi procedimenti e coi coefficienti di sicurezza comunemente usati: è raro che sia duplicata la deformazione e quindi la tensione unitaria corrispondente allo stato statico, ordinariamente esse non vengono aumentate più del 30 o 40 %.

b) Le sollecitazioni dinamiche possono essere pericolosissime quando si esercitano periodicamente, se il loro periodo d' azione viene a concordare col periodo d' oscillazione principale della costruzione, e ne può seguire facilmente la rottura. Bisogna assolutamente evitare di eseguire costruzioni poste in tali condizioni, od almeno diminuirne le conseguenze. rendendo la costruzione rigida tanto quanto è compatibile colle esigenze pratiche e costruttive, ed impedendo l'oscillazione completa della costruzione provocando la formazione di ventri d'oscillazione ridotta o secondaria colla creazione di punti fissi, come appunto è stato fatto nei grandi ponti sospesi americani adottando i canapi secondarî di ritegno (*) oltre i canapi principali o portatori, od anche in qualche caso introducendo materiali di diversa natura in modo che le varie parti della costruzione diano luogo ad oscillazioni discordanti.

c) L' effetto delle sollecitazioni dinamiche è in generale più dannoso per le piccole costruzioni che per le grandi. Si può tener conto in modo approssimato di questo fatto assumendo per le prime un coefficiente di sicurezza n (rapporto fra il carico di rottura ed il massimo sforzo unitario ammissibile nella costruzione) maggiore che per le seconde. Esaminando il caso particolare dei ponti abbiamo visto come questo aumento possa variare dal 20 al 5 % di quello che si tiene usualmente per ponti di lunghezza superiore a metri 30,00 quando la portata dell'opera varia da metri 5,00 a 20,00. Il Winkler dà una formola empirica per fissare il limite dei carichi permanenti nei ponti in ferro:

Siano

k il peso fisso e q il carico accidentale uniformemente distribuiti per metro corrente di ponte,

l la lunghezza della luce del ponte,

H l'altezza della trave, che sopporta il piano stradale,

R il limite dei carichi permanenti in chilogrammi per centimetro quadrato.

(*) Sono canapi fissi alle sponde, i quali vanno ad attaccarsi a punti diversi delle travi, che sopportano il piano del ponte.

La formola che lega R cogli altri elementi riportata dal WINKLER è la seguente

$$R = \frac{870}{1 + 5 \frac{q}{k+q} \frac{\sqrt{H}}{l}} \qquad (385).$$

Formole e leggi tendenti allo stesso scopo sono state proposte da GERBER, BAKER, LAISSLE e SCHÜBLER e da altri, che si sono occupati in modo particolare di questo argomento.

Senza voler discutere ora questa questione, ma solo per far comprendere il modo, col quale si può tener conto dell'effetto dannoso delle sollecitazioni dinamiche sulle piccole costruzioni, riportiamo il seguente quadro dei valori del coefficiente di sicurezza n, che REBHANN aveva proposto nel 1869 pel calcolo dei ponti in ferro dietro domanda del Ministero Austriaco del Commercio.

INDICAZIONI DELLE TRAVI		Valore di n	
		ferrovie	strade ordinarie
Travi principali della portata	fino a metri 6,00	6	4
	da metri 6,00 a metri 19,00	$5\,^1/_2$	$3\,^3/_4$
	oltre metri 19,00	5	$3\,^1/_2$
Travi trasversali del solaio del ponte . . .		6	4

d) Colle velocità che ordinariamente hanno luogo negli urti e nel movimento dei carichi, che si verificano nelle costruzioni civili, l'effetto delle sollecitazioni dinamiche può con sufficiente approssimazione essere ritenuto equivalente a quello che produrrebbe allo stato statico un aumento del carico, che agisce sulla costruzione, ed i calcoli di resistenza possono essere fatti in base a questa ipotesi. La proporzione dell'aumento del carico statico varia colla natura e scopo della costruzione particolare che si considera. Pei ponti in ferro nelle condizioni attuali di armamento, costruzione ed esercizio delle ferrovie e delle strade ordinarie sembra che in base alle osservazioni fatte sulle opere eseguite, e tenendo conto anche del fatto che i carichi molto veloci sono sempre più leggeri del peso, che si suppone esistere allo stato statico sulle travature, l'effetto delle sollecitazioni dinamiche sia

abbastanza bene rappresentato moltiplicando il peso che gravita sul ponte (il sovraccarico) pel coefficiente $1+\gamma$, in cui secondo il WINKLER (come è già stato detto al num. 98) γ avrebbe i valori seguenti:

Per le ferrovie . . . . . $\gamma=0{,}30$

Per le strade ordinarie $\gamma=0{,}20$.

Variando o perfezionandosi i modi di *costruzione* e di *esercizio* naturalmente questi valori di γ verrebbero a cambiare.

e) In certe costruzioni speciali ed in certi pezzi componenti macchine le sollecitazioni dinamiche possono assumere molta importanza, e particolarmente gli urti possono avvenire con velocità considerevoli. In tal caso bisogna specialmente tener conto delle massime deformazioni, che avvengono in corrispondenza del punto urtato e delle sezioni vincolate; le formole di seconda approssimazione cadono in difetto per questa speciale ricerca, entro certi limiti dànno risultati meno inesatti quelle di prima approssimazione, ed in generale bisognerà risolvere esattamente il problema o servirsi di criterî dedotti dalle osservazioni fatte su costruzioni poste in condizioni analoghe di resistenza, oppure ricavati da apposite esperienze.

f) Qualunque sia la massa del corpo urtato, il corpo urtante, anche quando esso abbia piccola massa, può facilmente produrre lo snervamento o la rottura nel punto, in cui avviene l'urto, e può anche penetrare od attraversare il corpo urtato se la velocità dell'urto è abbastanza forte. In generale nel punto urtato avverrà una deformazione permanente od anche una rottura se la velocità dell' urto è superiore al prodotto della velocità di propagazione del suono nel corpo urtato moltiplicata per la deformazione limite, oltre la quale incomincia lo snervamento o la disaggregazione della materia, che compone il corpo che sopporta l'urto.

g) L'analisi pura basata sul principio che le forze elastiche sono direttamente ed in modo costante proporzionali alle deformazioni, oppure sul concetto equivalente che il lavoro elastico di deformazione (a temperatura costante) è in ogni punto una determinata funzione omogenea di secondo grado delle deformazioni, non può condurre a nessun risultato relativamente alla ricerca dell'effetto delle azioni ripetute dei carichi, non che del periodo nel quale avvengono le ripetizioni. Questo fenomeno è estraneo all'ipotesi fondamentale, quindi per valutarlo in modo esatto od approssimato sono necessarie ricerche speciali, che esporremo nel capitolo seguente.

CAPITOLO VII.

Risultati sperimentali.

99. Osservazioni ed esperienze. — Nei capitoli precedenti si è visto come si possa svolgere la teoria dell'equilibrio dei corpi elastici e come essa possa essere applicata con facilità ed utilità pratica ai problemi, che si presentano nell'arte dell'ingegnere col mezzo di opportune ipotesi intorno al modo, col quale avvengono le deformazioni e coll'esame dell'influenza relativa dei diversi elementi, che entrano a comporre le formole. A completare questo studio rimane ad esaminare fino a qual punto esso venga sanzionato dai fatti e se i risultati previsti dalla teoria si verificano realmente. Si può arrivare a questo scopo in due modi diversi.

a) Osservando le deformazioni, che avvengono nelle costruzioni eseguite sotto l'influenza dei carichi, ai quali esse vanno soggette.

b) Sottoponendo i materiali ad esperienze dirette a constatare il modo di comportarsi dei medesimi sotto l'influenza di sforzi determinati.

È ovvio che entrambi questi metodi (cioè l'osservazione e l'esperienza) sono suscettibili di essere applicati alla verifica sperimentale delle formole della resistenza dei materiali e delle ipotesi fondamentali, sulle quali essa riposa, in modi diversi dipendentemente dallo scopo speciale, che uno si prefigge; noi ci limiteremo ad esporre brevemente i metodi più comunemente usati ed i principali risultati ottenuti.

100. Spostamenti e freccie di incurvamento. — La deformazione che nelle opere eseguite è stata più spesso e più facilmente osservata e misurata per avere una verifica delle formole dei capitoli IV e V è stata la freccia d'incurvamento, che si produce nelle travi sotto l'influenza di carichi determinati, e ciò mediante apparecchi speciali, che portano il nome di flessimetri. In seguito si sono anche costruiti istrumenti più delicati capaci di far conoscere con sufficiente esattezza, ingrandendole in un determinato rapporto, le deformazioni elastiche corrispondenti ai piccoli tronchi delle varie barre o lamiere componenti una trave, in guisa che si possono ora studiare non solo le deformazioni complessive, ma anche quelle, che avvengono nelle diverse parti di una costruzione qualsiasi. Questi strumenti diconsi micrometri e ne esistono di

forme svariate; alcuni sono semplici indicatori delle deformazioni e non lasciano alcuna traccia delle medesime quando l'esperienza è cessata; altri invece indicano permanentemente la massima dilatazione o la massima condensazione subìta dal solido e finalmente alcuni dànno un diagramma in cui sono rappresentate tutte le fasi dell'esperienza. Questi ultimi sono evidentemente più completi e si prestano meglio per chi voglia fare uno studio esteso ed accurato sul modo di comportarsi dei corpi elastici sotto l'azione di sforzi determinati e durante il periodo di deformazione. I risultati delle ricerche eseguite con questi mezzi e quelli delle esperienze eseguite in appositi stabilimenti avendo posto fuori di dubbio che i risultati della teoria delle travature coincidono sensibilmente colla realtà, in guisa che entro i limiti di precisione richiesti dagli ingegneri essi possono riguardarsi come esatti in tutti quei casi nei quali si è detto che le teorie svolte ai capitoli IV e V sono applicabili, ne è venuto come conseguenza che attualmente i flessimetri ed i micrometri si usano anche correntemente per verificare le condizioni di stabilità delle diverse costruzioni. Questa ricerca si fa nel modo seguente: Colle formole del capitolo V si calcolano le deformazioni, che deve subìre una data trave sotto l'influenza di carichi determinati, ordinariamente si valuta la freccia, oppure l'abbassamento che dovrà subìre un punto stabilito o finalmente l'allungamento unitario, che dovranno subìre una o più delle barre che la compongono, indi cogli istrumenti indicati si verifica se le deformazioni reali corrispondono a quelle calcolate oppure se sono sensibilmente diverse, e quindi se ne deduce se la travatura si trova in buone o cattive condizioni di stabilità. Se dovesse presentarsi questo ultimo caso allora, dopo aver verificate le dimensioni assegnate alle diverse parti, mediante un accurato esame si passa ad indagare quali siano le cause della mancanza di resistenza sufficiente, cioè se essa dipende da cattiva qualità del materiale, da cattiva lavorazione o costruzione, da chiodature mal fatte od altro. Alcune volte invece si misurano le deformazioni e servendosi delle formole del capitolo V, si calcola lo sforzo unitario del materiale per concludere in seguito in quali condizioni di resistenza esso si trovi e quale sia il coefficiente di stabilità (rapporto fra il carico unitario che produce la rottura e quello effettivamente sopportato dal materiale) conveniente alla costruzione esaminata. In generale quando si usa questo secondo procedimento s'impiegano i micrometri per misurare gli allungamenti od accorciamenti, che si verificano nei singoli pezzi che compongono la costruzione.

Tanto i flessimetri che i micrometri sono apparecchi semplicis-

simi e per comprenderne l'uso sarà sufficiente la descrizione di alcuni di essi ed il modo di servirsene. Ognuno potrà facilmente immaginare apparecchi o disposizioni svariate a seconda dei casi e dei mezzi disponibili, poichè in ultima analisi il problema che viene risoluto con questi istrumenti non è altro che la determinazione dello spostamento relativo fra due corpi o fra due punti.

101. Flessimetri. — Un flessimetro in generale consta essenzialmente di due parti A e B aderenti, mobili l'una sull'altra, una collegata invariabilmente alla trave e l'altra ad un sostegno fisso al suolo e di una disposizione qualsivoglia atta ad indicare lo spostamento del pezzo A rispetto al pezzo fisso B durante la deformazione. I flessimetri che si conservano nel gabinetto di costruzioni della Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Bologna hanno dimensioni diverse ed alcuni sono fatti in modo da poter dare un diagramma od almeno indicare permanentemente le deformazioni massime; però essi possono essere tutti ridotti al tipo seguente.

Sopra una tavoletta in legno od in metallo delle dimensioni di circa metri $0{,}12 \times 0{,}18$ e che mediante quattro viti a, b, c, d (*Fig.* 86ª, *tav.* XII) può esser fissata ad un sostegno riposante sul suolo ed affatto indipendente dalla trave o dal ponte che si esamina, sono disposte due guide parallele ef, gh e nella scanalatura da esse comprese può muoversi un corsoio lm, mantenuto qualche volta aderente alle guide mediante una molla d'opposizione o posta nel fondo della scanalatura medesima. L'estremità l del corsoio porta un'appendice metallica, colla quale può essere fissato alle nervature della trave mediante una morsa pq analoga a quella rappresentata nella figura 87ª munita di viti di pressione r, t, l'altro estremo m porta un gancio, al quale in determinate circostanze si possono attaccare dei cilindretti di piombo s del peso di Kg. 5,00 ciascuno. Se la trave da assoggettare alla prova fosse molto elevata al di sopra del fondo del fiume in guisa da essere necessario un grande castello in legno per poter fissare la tavoletta in vicinanza delle nervature superiori od inferiori della costruzione, allora il corsoio si attacca ad una catenella (*) fissata

(*) Sono specialmente raccomandabili le catene a piccole maglie contorte in guisa che ciascuna maglia sotto lo sforzo di tensione non può prendere movimenti notevoli rispetto alle maglie vicine. Varie esperienze eseguite al Finale, al ponte sul Taro al Martorano e sui ponti della ferrovia Bologna-San Giovanni in Persiceto hanno dimostrato che queste catene servono molto bene, regolando opportunamente la tensione, anche quando l'aria non è completamente tranquilla. In qualche caso le deformazioni della travatura sono state trasmesse al flessimetro mediante una membratura rigida, per es., una trave in legno (Chicchi, *Apparecchi per le prove dei ponti*).

alla trave mediante una morsa con viti di pressione e si mantiene tesa attaccando al gancio *m* uno o due dei cilindretti di piombo poc'anzi ricordati. La tavoletta poi viene attaccata ad un palo fisso al suolo e ad una distanza tale che riesca la più conveniente per una facile osservazione. Qualunque deformazione in senso verticale verrà trasmessa al corsoio e potrà essere facilmente misurata dallo spostamento di un indice fisso al corsoio e la cui punta si muove sopra una scala divisa in millimetri e mezzi millimetri od anche più semplicemente dallo spostamento di una linea di fiducia tracciata attraverso il corsoio e le guide (se questi sono nello stesso piano). Se per rendere più facili le osservazioni (specialmente quando se ne debbono fare diverse contemporaneamente) o per aver maggior sicurezza ed un controllo delle letture si desidera che lo strumento indichi automaticamente la massima deformazione tanto verso l'alto che verso il basso, si adotta la disposizione seguente. Al corsoio *lm* si attacca mediante viti un portalapis angolare *kj* a molla spirale (*Fig.* 91ª, *tav.* XIII) ed alla guida *gh* si fissa una striscia di carta (mediante punte o due piccole guide) sulla quale la punta *y* del lapis segna l'ampiezza massima dello spostamento superiormente od inferiormente alla posizione iniziale (fissata con un segno convenzionale, per es. ⇒) avvenuto durante l'esperienza. In alcuni di questi strumenti per maggior garanzia si sono disposte le cose in modo che l'indice del corsoio nel suo movimento urti contro due appendici metalliche fisse a due piccole asticciuole mobili a sfregamento entro una scanalatura in guisa che rimangono nella posizione, in cui sono spinte, e dal loro spostamento si può dedurre la deformazione subìta dalla trave: in altri sono state adottate disposizioni analoghe fondate sugli stessi principî.

Se finalmente occorre per ragioni di studio o per altri motivi avere un diagramma, nel quale siano rappresentate tutte le diverse fasi della deformazione durante il periodo di tempo, in cui i carichi hanno agito sulla trave, allora al braccio del portalapis *kj* s'avvita un altro lapis a molla spirale *z* e si fissa alla tavoletta in corrispondenza della punta *z* del lapis un cilindro *c'c''*, nel cui interno trovasi un movimento d'orologeria, sul cilindro si distende una striscia di carta, sulla quale si raccoglie il diagramma delle deformazioni. Il cilindro col movimento d'orologeria è sostenuto da due piccoli bracci in ferro che mediante viti possono essere uniti stabilmente alla tavoletta (*Fig.* 86ª, *tav.* XII). In molti casi i portalapis si sono attaccati direttamente alle nervature del ponte e le indicazioni sono state raccolte sopra tavolette, sopra cilindri mossi da un movimento interno di orolo-

gieria (*) (*Fig.* 87ª ed 88ª, *tav.* XII) oppure da un contrappeso il cui movimento viene regolato da una particolare disposizione idraulica (**).

Non crediamo opportuno estenderci qui maggiormente nella descrizione di questi apparecchi poichè nel volume dell'*Arte di fabbricare* relativo alla costruzione dei ponti un capitolo speciale sarà riservato per la descrizione del modo, col quale si fanno le prove di tali opere. Quanto è stato detto può bastare per far comprendere come si dispongono tali esperienze ed il modo col quale possono essere composti i flessimetri e ci limitiamo a riportare nelle tavole XII e XIII le figure (***) relative ai flessimetri usati dall'Ingegnere Biadego, ritenendo che queste possano bastare per la chiara intelligenza dei medesimi.

Apparecchio a rotismo. — Prospetto di fronte (*Fig.* 87ª, *tav.* XII).

Apparecchio fisso a tavoletta. — Prospetto di fronte (*Fig.* 88ª, *tav.* XII).

Pianta dei due apparecchi (*Fig.* 89ª, *tav.* XIII).

Vista di fianco dei due apparecchi (*Fig.* 90ª, *tav.* XIII).

Particolari dei portalapis (*Fig.* 91ª, *tav.* XIII).

Fra le diverse disposizioni a cui si può ricorrere nelle prove dei ponti per la misura delle deformazioni complessive o freccie d'incurvamento merita una speciale menzione l'apparecchio idraulico a tubi comunicanti usato per le prove dei viadotti di Trezzo e di Paderno sull'Adda e pel gran ponte sul Po a Casalmaggiore. Esso consta di un tubo di ferro disposto orizzontalmente sul solaio del ponte composto di tanti tronchi riuniti fra loro con manicotti a vite e posto in comunicazione mediante un rubinetto *A* con un serbatoio posto ad una delle estremità del ponte riempito d'acqua, qualche volta leggermente colorata in rosso per rendere più facili le letture. In corrispondenza degli appoggi della trave e dei punti, nei quali si vuol misurare l'abbassamento, si elevano verticalmente dei bracci pure in ferro terminati all'altezza di circa metri 1,40 da un tubo in vetro, sul quale è segnata una scala in millimetri. Collocato l'apparecchio si riempiono i tubi fino ad un determinato livello aprendo il rubinetto *A*, indi si fanno le letture delle altezze delle colonne liquide nei diversi bracci verticali, e si fanno entrare i carichi sul ponte; ripetendo le letture (tenendo conto del diametro dei tubi in vetro entro ai quali si verificano

(*) Biadego, *Monografie tecniche.*

(**) Chicchi, Opera citata.

(***) Estratte dalle *Monografie tecniche* sopra citate.

le oscillazioni del liquido) si ottengono per differenza gli spostamenti verticali in corrispondenza dei singoli bracci. Questo apparecchio si è adoperato anche per le prove dinamiche, cioè per verificare le freccie sotto l'influenza di carichi in movimento; però i risultati a cui s'arriva non possono dar garanzia alcuna di esattezza in causa della forza viva acquistata dal liquido durante il suo movimento lungo i tubi, esso può invece servir bene per le prove statiche, specialmente in quei casi in cui le condizioni locali non permettono o rendono soverchiamente difficile l'installazione di ponti di servizio per fissarvi i flessimetri.

102. Micrometri moltiplicatori. — I micrometri moltiplicatori servono specialmente a determinare le deformazioni e quindi anche gli sforzi unitarî, che hanno luogo nelle diverse membrature, che compongono una trave, essi vengono ordinariamente fissati alle sbarre, sulle quali si vuol fare l'esperienza, mediante viti di pressione in due punti, che il più delle volte distano fra loro di metri 0,50 o di metri 1,00 e col mezzo di un indice dànno ingrandite in un determinato rapporto le quantità, di cui i due punti si sono avvicinati od allontanati. I micrometri, detti anche micrometri moltiplicatori constano essenzialmente delle parti seguenti:

a) Due appendici A e B, colle quali per mezzo di morse e viti di pressione l'apparecchio può essere solidamente fissato alle sbarre di una trave metallica.

b) Un apparecchio moltiplicatore C fisso ad una delle appendici per esempio B che permetta di leggere ingrandito in un rapporto ben determinato l'oscillazione piccolissima trasmessa ad un suo braccio D.

c) Un'asta EF coll'estremità E unita invariabilmente all'appendice A e l'altro estremo F unito a cerniera o mediante semplice contatto al braccio D dell'apparecchio moltiplicatore degli spostamenti.

Impiegando una simile disposizione qualunque deformazione, allungamento od accorciamento, avvenga nella membratura che si considera, sarà accusata da un movimento dell'indice del moltiplicatore, e sarà completamente nota quando si conosca il rapporto d'ingrandimento dello strumento. A seconda poi del modo col quale il micrometro è costruito, esso può essere un semplice indicatore delle deformazioni se non lascia alcuna traccia dei suoi movimenti, può essere a massimo ed a minimo se indica permanentemente le deformazioni estreme, finalmente può essere un micrometro autoregistratore o scrivente se lascia traccia di tutte le deformazioni, che avvengono successivamente durante l'espe-

rienza, ed in questo ultimo caso lo strumento prende anche il nome di micrografo.

Le disposizioni adottate e che si possono adottare per un micrometro moltiplicatore da impiegare per la misura delle deformazioni elastiche sono molte e possono anche riescire diverse a seconda della natura delle esperienze, che si vogliono eseguire; noi riporteremo qui succintamente soltanto la descrizione dei tipi più conosciuti ordinandoli a seconda delle tre categorie accennate superiormente.

a) Micrometro moltiplicatore semplice del signor Dupuy.

b) Micrometri moltiplicatori a massimo e minimo dei signori Manet e Castigliano.

c) Micrometro moltiplicatore autoregistratore o micrografo del signor Fraenkel e micrografo del gabinetto di costruzione della Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Bologna.

Micrometro moltiplicatore Dupuy (*)

Questo apparecchio (*Fig.* 98ª, *tav.* XV) trovasi descritto nel catalogo degli oggetti esposti a Vienna dal Ministero francese dei Lavori pubblici nel 1873. Sia MN una barra del reticolato componente una trave metallica, lo strumento si compone di una falsa squadra ABD articolata in B e colle braccia forate in A ed in C, che si fissa alla barra MN mediante perni passanti per i fori A e C fortemente stretti con morse a vite; l'estremità D del braccio CD è tagliata a punta e si muove sopra un arco graduato EE', che è invariabilmente unito al braccio AB ed ha il centro in B: la divisione dell'arco è fatta per millimetri e mezzi millimetri. Si misura la distanza AC e si dispone l'apparecchio in modo che l'angolo ABC sia retto e la punta O cada sullo zero della scala EE': se nella sbarra avvengono delle deformazioni queste sono accusate dal movimento ε dell'indice D che si porta in D' mentre il punto C si porta in C'. L'allungamento proporzionale i della barra MN

$$i = \frac{AC' - AC}{AC} = \frac{\Delta AC}{AC}$$

s'ottiene immediatamente in funzione di ε e delle tre lunghezze AB BC, BD, infatti

$$\frac{\Delta AC}{AC} = \frac{AC' - AC}{AC} = \frac{\overline{AC'}^2 - \overline{AC}^2}{AC(AC' + AC)}$$

(*) Collignon, *Cours de mécanique appliquée aux constructions.*

e per le proprietà dei triangoli

$$\frac{\overline{AC'}^2 - \overline{AC}^2}{AC(AC'+AC)} = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + 2AB \cdot BC \operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{BD} - \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{AC(AC'+AC)}.$$

Trattandosi di deformazioni piccolissime si può ritenere

$$\operatorname{sen} \frac{\varepsilon}{BD} = \frac{\varepsilon}{BD} \qquad AC' + AC = 2AC$$

quindi

$$i = \frac{\Delta AC'}{AC} = \frac{AB \cdot BC}{\overline{AC}^2} \frac{\varepsilon}{BD} = \frac{AB \cdot BC}{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} \frac{\varepsilon}{BD}.$$

Il signor Dupuy ha costruito il suo istrumento in modo che sia

$$AB = 1^m,00, \quad BC = 0^m,05, \quad BD = 1^m,00$$

quindi per una barra in ferro, pel quale può ritenersi

$$E = 20\,000\,000\,000$$

lo sforzo unitario R per millimetro quadrato sarà dato da

$$R = Ei = E \frac{AB \cdot BC}{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} \frac{\varepsilon}{BD} = 20\,000 \frac{0,05}{1 + (0,05)} \varepsilon = 997,5\varepsilon$$

in cui ε è espresso in metri, se invece si misura in millimetri e si tien conto del fatto che il valore di E non è ben determinato, oscillando esso fra limiti abbastanza estesi, si potrà scrivere $(1000\,\varepsilon)$ invece di $(997,5\,\varepsilon)$ nella formola precedente, e quindi lo sforzo R' per millimetro quadrato risulta

$$R' = \varepsilon.$$

Micrometro a massimo e minimo Manet.

Questo micrometro (*Fig.* 96ª e 97ª, *tav* XV) è composto di una scatola A, che porta nel suo centro un ago C mobile intorno ad un perno O, l'estremità dell'ago percorre un lembo graduato e e manda a destra e sinistra due bracci, di cui uno soltanto è rappresentato in D sulla figura; questi bracci sono destinati a conservare sull'apparecchio l'indicazione delle posizioni estreme prese dall'ago durante la massima dilatazione od il massimo accorciamento.

L'indice C è comandato da una leva a gomito G e da una dentiera, che una molla spirale H tende sempre a condurre alla posizione estrema, oppure a mantenerla a contatto di un ostacolo, che si opponga al suo movimento: tutta la scatola mediante apposite morse e viti di pressione può essere solidamente fissata in un punto B qualsiasi della membratura da sottomettere all'esperienza. La leva G è messa in movimento da un'asta della lunghezza di un metro, l'estremità superiore di questa striscia dolcemente sull'orlo della scatola e viene ad appoggiarsi al braccio della leva, l'estremità inferiore poi dell'asta L' penetra a vite entro un pezzo L, che mediante una morsa a vite può essere solidamente fissata alla barra, sulla quale si esperimenta. Disposto l'apparecchio si conduce a zero l'indice facendo ruotare opportunamente la vite L', indi si fanno agire i carichi; ogni deformazione verrà accusata dai movimenti dell'indice C, ed i bracci D spostati segnano in modo permanente le posizioni estreme occupate dall'indice stesso. Il signor Manet ha fatto costruire il suo apparecchio in modo che l'ingrandimento sia espresso dal rapporto 40:1 giudicandolo sufficiente, poichè attribuendo ad E il valore 20 000 per millimetro quadrato, ad ogni millimetro del lembo graduato corrisponderebbe uno sforzo unitario R per millimetro quadrato di Kg. 0,500; infatti detto ε lo spostamento dell'indice C

$$R = E\,i = 20\,000\,\frac{\varepsilon}{40 \cdot 1000} = \frac{20\,000}{40\,000}\varepsilon = 0{,}500\varepsilon.$$

Micrometro a massimo e minimo Castigliano.

Questo strumento (*Fig.* 92ª, 93ª e 95ª, *tav.* XIV) è usato ora correntemente dagli Ingegneri delle ferrovie italiane per le prove dei ponti metallici quindi ne diamo una descrizione particolareggiata togliendola dall'*Annuario della Regia Scuola d'applicazione per gli Ingegneri* di Roma dell'anno 1884. Il micrometro moltiplicatore dell'Ingegnere Castigliano si compone di un'asta ab di ferro lunga un metro (si costruisce pure un altro modello in cui l'asta ab è lunga metri 0,50) la quale viene fissata alle sue estremità al pezzo da provarsi mediante morse a vite di pressione CC. L'asta è divisa in due parti in d, una delle quali della lunghezza di circa metri 0,24 e l'altra parte s'innesta nella prima mediante un cilindretto e: le cose sono disposte in modo che per l'avvicinarsi od allontanarsi dei due tronchi dell'asta in causa delle deformazioni, che avvengono nel pezzo in prova, il cilin-

dretto e, che è unito al tronco più lungo dell'asta, può scorrere liberamente nella matrice, che trovasi nell'altro tronco. In vicinanza dell'innesto il tronco più lungo dell'asta porta due perni f, g mentre l'altro tronco è munito d'una lastra d'ottone, sulla quale sono montati due indici l, l i cui assi di rotazione m, m sono nella posizione normale dello strumento in un medesimo piano normale al suo asse. I due indici sono muniti di due appendici ad angolo retto n, n che vanno ad appoggiare contro i perni f, g in modo che uno degli indici viene messo in moto in un senso quando vi è allontanamento dei due punti d'attacco dello strumento, e l'altro invece vien messo in moto in senso inverso quando i due punti d'attacco s'avvicinano, cioè quando ha luogo una compressione.

Il rapporto fra la lunghezza degli indici e quella delle appendici laterali è di 40:1 e più precisamente gli indici sono lunghi metri 0,20, le appendici metri 0,005. L'estremo libero degli aghi si muove sopra un lembo graduato p, sul quale nelle deformazioni dovute a tensione o pressione si può leggere l'incremento dello sforzo unitario al passaggio del carico di prova. Ritenuto il modulo di elasticità del ferro $E = 20\,000$ Kg. per millimetro quadrato, per un aumento di un chilogramma nello sforzo si ha per un metro di lunghezza l'allungamento $\frac{1}{20\,000} = 0{,}00005$, al quale corrisponde un movimento dell'estremo di uno degli indici di

$$0{,}00005 \times 40 = 0^{m},0020.$$

Il lembo graduato porta quindi una divisione in millimetri; facendo la differenza fra due letture fatte per ciascun indice prima e dopo l'esperienza s'ottiene il numero ε di millimetri di cui ogni indice si è spostato e si deduce subito, ritenendo i soliti simboli,

$$R = Ei = E\frac{\varepsilon}{1000 \cdot 40} = 0{,}5 \cdot \varepsilon.$$

Nella posizione normale dello strumento i due indici dovrebbero essere paralleli al suo asse; piccole deviazioni però da questa posizione non sono di alcuna importanza, l'essenziale è che prima di ogni esperienza le appendici, di cui sono muniti gli aghi, siano portate a contatto coi relativi pernetti motori. In un modello più recente rappresentato nella figura 94ª le leve ad angolo sono completamente avvicinate e disposte in modo che un sol perno basta a comandare il movimento dei due indici (*Fig.* 94ª, *tav.* XIV).

Micrometro autoregistratore o micrografo Fränkel.

Il micrografo o disegnatore degli allungamenti (od accorciamenti) del Professor Fraenkel (*Fig.* 99ª e 100ª, *tav.* XV) si compone essenzialmente di un'asta *ab* lunga un metro, la quale viene fissata in *b* con una morsa al pezzo da esperimentare e che può scorrere in una guida *e* portata da un telaio di ghisa *p q*, il quale porta pure tutte le parti dell'apparecchio, che scrive le deformazioni. Anche il telaio viene fissato alla membratura con una morsa a vite di pressione e la distanza fra i punti d'attacco corrisponde esattamente alla lunghezza dell'asta *ab*, cioè ad un metro.

L'apparato che scrive le deformazioni ingrandendole consiste in una leva di primo genere *d e* avente il suo fulcro in *f* ed il braccio *a f* è molto piccolo rispetto all'altro. L'estremo *e* di questa leva porta un arco dentato, che s'incastra nel rocchetto *g* di piccolo raggio, a cui è rigidamente connessa l'asta *g h*, la quale si collega ad un sistema di asticciuole formanti una specie di parallelogramma composto destinato a cangiare il movimento rotativo del rocchetto *g* in movimento rettilineo per una matita posta in *l*. Muovendosi il rocchetto la matita *l* viene a disegnare una linea sopra una striscia di carta, che per un movimento di orologeria si svolge sopra una piccola tavoletta fra i cilindri *m* ed *n* da *m* verso *n*, e le ordinate di questa linea sono evidentemente in un determinato rapporto coi movimenti subìti dal rocchetto *g*: la molla *u* obbliga l'estremo della leva *e d* ad aderire costantemente all'estremo libero *b* dell'asta *ab*. Nella figura il tratteggio rappresenta le parti fisse del telaio *pq* e dietro le cose esposte riesce facile comprendere il modo di funzionare dello strumento. Se i punti dell'asta in prova corrispondenti ai punti *a* e *b* s'avvicinano in causa della deformazione che avviene, allora l'asta *ab* muovesi rispetto al telaio al senso *b a*, e corrispondentemente la matita *l* si muove nel senso *s t*: se i due punti dell'asta in prova corrispondenti ad *a* e *b* invece si allontanano, allora avviene il contrario e la matita *l* si muove nel senso *t s*.

L'asta *ab* consta di tre parti *a a'*, *a' a''*, *a'' b* la prima e la seconda sono unite fra loro a vite in guisa che si possono produrre piccole ed insignificanti variazioni nella lunghezza dell'asta, ottenendo di portare la matita *l* in corrispondenza del mezzo della striscia di carta, sulla quale verrà tracciato il diagramma. Un lapis u_1 fisso al telaio traccia sulla striscia di carta una linea fondamentale in corrispondenza alla posizione primitiva della ma-

tita l, da una parte della medesima si avranno le ordinate positive, ossia corrispondenti alla tensione, e dall'altro le negative cioè quelle, che rappresentano le compressioni.

Il rapporto d'ingrandimento degli apparecchi costruiti dal Professor Fraenkel è come 160:1 cioè quadruplo di quello dell'apparecchio di Castigliano e di Manet, e la piccola massa delle parti in movimento lascia credere legittimamente che essa non abbia grande influenza sulla grandezza delle ordinate.

Presso il gabinetto di costruzione della Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Bologna esiste un micrografo costrutto nel 1889 nell'officina della Scuola stessa e che dà risultati abbastanza buoni nelle prove dei ponti. Come disposizione generale esso è formato come quello dell'Ingegnere Castigliano, ne differisce soltanto perchè porta un solo pernetto motore unito a cerniera col braccio più corto di una delle leve ad angolo, che funzionano da indice, mentre l'estremo del suo braccio più lungo comanda una matita, che si muove entro apposita guida in senso trasversale allo strumento. In corrispondenza della matita trovasi un piccolo cilindro mosso da un apparecchio di orologieria posto nel suo interno in guisa che invece d'avere soltanto le indicazioni corrispondenti alle massime deformazioni si ottiene un diagramma, che rappresenta tutta la fase dell'esperienza e che può dare preziose indicazioni sull'effetto dei carichi mobili, delle vibrazioni, delle variazioni di temperatura, ecc., ecc. Le figure 101ª e 102ª della tavola XV mostrano abbastanza chiaramente le disposizioni dell'apparecchio senza bisogno di ulteriori descrizioni (*).

Questi strumenti, od altri analoghi facili ad immaginare, come servono ad eseguire esperienze relativamente al comportarsi delle travature metalliche sotto l'influenza dei carichi e verificare le formole della resistenza dei materiali, possono anche essere utilizzati per le prove della stabilità delle costruzioni metalliche in genere e più particolarmente per le prove dei ponti. Essi infatti fanno conoscere gli allungamenti ed accorciamenti, che avvengono in ogni singola parte di una determinata struttura, e quindi lo sforzo unitario di tensione o compressione, a cui essa va soggetta, e permettono all'ingegnere di verificare in quali condizioni di resistenza essa si trovi effettivamente. Non bisogna però dimenticare che nel servirsi di questi istrumenti è necessario tenere conto scrupolosamente di tutte le circostanze, variazioni di tem-

(*) Questo istrumento fu provato con successo dall'Ingegnere Domenico Gorrieri al ponte sul Reno a Pioppe di Salvaro ed in un altro ponte presso Castenaso: i due diagrammi ottenuti riescirono nitidissimi.

peratura, diversità di esposizione, impulsi, ecc., ecc., altrimenti è facile cadere in apprezzamenti inesatti od anche affatto errati, mentre invece usati con discernimento possono rendere reali servizi e mettere molte volte in vista difetti di costruzione, che altrimenti potrebbero passare inosservati. Naturalmente tutte queste cause particolari e locali, che possono avere grande influenza in un punto determinato, ne hanno molto meno prendendo la deformazione nel suo insieme. Questa osservazione dà la spiegazione del fatto, che spesso si verifica, di non avere dai micrometri indicazioni omogenee, mentre invece misurando le freccie d'incurvamento si trovano nelle opere ben fatte sensibilmente i risultati previsti dalla teoria.

103. Avvertenze necessarie quando si fanno esperienze sulla resistenza dei materiali da costruzione. — Per formarsi un'idea esatta del modo di resistere dei diversi materiali agli sforzi che li sollecitano si suole ricorrere ad esperienze dirette cimentando in varî modi la resistenza dei medesimi. Tali esperienze si possono eseguire in due modi diversi.

a) Applicando i carichi direttamente al corpo, sul quale si vuole esperimentare.

b) Impiegando macchine, colle quali sia possibile produrre sforzi determinati sui corpi, che si assoggettano ad esperienza e misurando le deformazioni, che ne risultano.

Il primo metodo si applica specialmente per esperienze sulla resistenza a tensione; però se gli sforzi, che debbono esser provocati, sono grandi, esso riesce incomodo per l'importanza dei carichi che si debbono trasportare e maneggiare, per cui tutte le volte che si vuole eseguire una serie ordinata di esperienze si ricorre ad un'apparecchio capace d'aumentare la potenza o sforzo trasmesso, cioè ad una *macchina per esperimentare la resistenza dei materiali*.

Qualunque sia il modo, col quale si eseguiscono le ricerche, è indispensabile aver presente alcune norme se si vuole evitare il pericolo di cadere in errore, e precisamente bisogna:

a) Cercar sempre la forma più semplice del fenomeno.

b) Tener nota esatta e chiara di tutte le particolarità, anche di quelle che a primo aspetto potrebbero sembrare prive di interesse.

c) Evitare le cause di perturbazione o d'errore e, quando ciò non sia possibile, tenerne nota, valutarne l'influenza e possibilmente correggere i risultati.

d) Eseguire la stessa esperienza in condizioni diverse e con diverse disposizioni per eliminare o scoprire le cause accidentali di errore.

e) Riconoscere se il pezzo, che si esperimenta, si trova nelle condizioni che la teoria suppone e se in esso vi siano punti, sezioni o tronchi singolari per forma, per carico o per ragioni costruttive.

Quando si assoggettano ad esperienze dei corpi allo scopo di conoscere la loro resistenza a sforzi di tensione applicando direttamente i carichi al solido, sul quale si esperimenta, ordinariamente il corpo od asta viene disposto verticalmente; esso è attaccato in alto ad un punto fisso e porta sospeso alla parte inferiore un piatto, sul quale si dispongono i pesi. Se si tratta di esperimentare su fili, questi si possono anche disporre orizzontalmente e, ripiegando sopra una carrucola un tratto dei medesimi, collocare ancora i pesi sopra un piatto attaccato alla loro estremità. Nell'eseguire queste esperienze è necessario avere le avvertenze seguenti:

1° Operare a temperatura costante, oppure correggere opportunamente i risultati togliendo dalle deformazioni misurate quelle dovute alle variazioni di temperatura.

2° Il pezzo sul quale si esperimenta deve avere un peso insignificante rispetto ai carichi applicati sul piatto, oppure se ne dovrà tener conto riguardandolo come una forza sollecitante.

3° La risultante delle forze (quando si esperimenta a tensione od a compressione semplice) deve costantemente passare pei centri di gravità delle diverse sezioni per evitare che alle deformazioni prodotte dalla tensione o dalla compressione si aggiungano quelle prodotte da fenomeni accessori di flessione, torsione, ecc.

4° I carichi dovranno essere applicati con cautela per evitare l'effetto degli urti e delle vibrazioni. È interessante notare che il Colonnello Conti per soddisfare a questo precetto nelle sue esperienze sostituì al piatto, sul quale ordinariamente si collocano i pesi, una vasca in lamiera di ferro ed otteneva le variazioni del carico introducendo o facendo uscire dell'acqua dalla medesima (*).

5° Prendere tutte le precauzioni compatibili coll'esperienza perchè i punti d'attacco siano realmente fissi, oppure tener conto del loro spostamento.

6° Far le misure delle deformazioni in modo che sia elimi-

(*) Il Comm. Pacthodt in una serie di esperienze eseguite ad Ancona presso l'Ufficio della Società delle Ferrovie Meridionali ha impiegato un sistema analogo. Esso si serviva di una leva, che portava all'estremo una vasca, ed il carico si otteneva introducendo in quest'ultima una determinata quantità d'acqua.

nata per quanto è possibile l'influenza dei punti singolari. Nelle esperienze a tensione semplice si giunge facilmente a questo scopo misurando gli allungamenti fra due punti a e b sufficientemente distanti dagli estremi A e B dell'asta, che vanno evidentemente riguardati come singolari in causa degli attacchi: con questa precauzione si evitano anche gli errori, che potrebbero provenire dalla non perfetta stabilità dei punti di ritegno. Quanto ai punti a e b sarà bene sceglierli discosti dagli attacchi circa due o tre volte la larghezza della sezione trasversale ed anche più, poichè a distanza minore difficilmente si può ritenere lo sforzo uniformemente distribuito sopra la sezione trasversale.

Le esperienze sulla resistenza dei materiali d'ordinario si eseguiscono col mezzo di macchine speciali, varie come composizione, ma che in generale constano di un complesso di organi destinati a moltiplicare la potenza ed a misurare gli sforzi, che vengono prodotti, e le deformazioni, che avvengono nei pezzi soggetti ad esperienza. Qualunque sia la disposizione e la natura dei meccanismi che si impiegano, è necessario uniformarsi ai seguenti precetti, oltre a quelli indicati superiormente:

a) Garantirsi ogni volta relativamente al modo di funzionare del meccanismo cioè:

I. Se le trasmissioni si conservano in buono stato.

II. Se i piatti contro i quali si appoggiano i pezzi da esperimentare o le branche, alle quali essi sono attaccati, hanno subìto deformazione alcuna.

III. Se i bracci e gli appoggi delle leve, degli indici, dei contrappesi, ecc., non hanno subito variazione o deteriorazione.

IV. Se le branche d'attacco e gli apparecchi di misura funzionano regolarmente.

b) Assicurarsi che i cambiamenti di temperatura non influiscano sui risultati ed in caso contrario tenerne conto ed apportare le opportune correzioni.

c) Evitare tutte le cause di perturbazione o di errore straordinarie, oppure tenerne conto se per avventura se ne verificano.

104. Macchine per esperimentare la resistenza dei materiali. — Le macchine per esperimentare la resistenza dei materiali possono avere forme molto varie. L'indole però di queste esperienze richiede in via generale organi semplici e sforzi molto forti, che ordinariamente si ottengono impiegando leve, torchi idraulici o trasmissioni fatte col mezzo di ruote dentate e viti perpetue. In una macchina per esperimentare la resistenza dei materiali si possono distinguere quattro parti:

a) L'apparecchio moltiplicatore della potenza.

b) L'apparecchio operatore, ossia quell'insieme di organi, che servono a trattenere e fissare i pezzi, sui quali si vuole esperimentare.

c) L'apparecchio misuratore degli sforzi.

d) Gli apparecchi per la misura delle deformazioni.

L'apparecchio moltiplicatore della potenza nel maggior numero di casi è costituito da una o più leve solidali, da un torchio idraulico oppure da viti e madreviti, ruote dentate e viti perpetue. Non è facile, dire in via generale quale di questi sistemi sia preferibile, poichè la bontà relativa del meccanismo dipende dallo scopo che l'esperimentatore si propone. Le leve hanno il vantaggio che permettono di studiare facilmente l'effetto prodotto da carichi costanti agenti istantaneamente ed applicati senza urto, e che indicano l'intensità degli sforzi esercitati quando sia noto il rapporto dei bracci delle leve; in molti casi però hanno varî inconvenienti, specialmente quando si vogliono produrre sforzi molto grandi. Tali sistemi sono spesso incomodi ad esser messi in azione e per disporre le esperienze, ed in essi si evitano difficilmente le inflessioni e le deformaziani dei lunghi bracci e gli urti, che avvengono particolarmente al momento della rottura. L'uso del torchio idraulico permette di ottenere con molta semplicità di mezzi sforzi molto grandi, essi però non si producono mai istantaneamente, ma crescono in modo lento e graduale: tale apparecchio presenta l'inconveniente di richiedere cure speciali di manutenzione e riparazioni ai varî organi del meccanismo specialmente quando la macchina funziona soltanto a lunghi intervalli. Le trasmissioni formate con sistemi di viti, madreviti, ruote dentate, ecc., servono pure molto bene per ottenere grandi sforzi e possono funzionare intermittentemente senza cure o cautele speciali; hanno però l'inconveniente di occupare qualche volta molto posto e di dar luogo a notevoli perdite di forza in causa delle numerose resistenze passive, che loro sono inerenti. A seconda dei casi e delle esperienze che si vogliono fare, non che del modo col quale si vuole o si può esperimentare, può essere preferibile l'uno o l'altro sistema e tutti infatti li vediamo impiegati dai costruttori di questi apparecchi; si può però avvertire che in questi ultimi tempi si nota fra gli ingegneri una certa tendenza a preferire nelle macchine di media potenza (circa Kg. 50 000,00) l'uso di meccanismi analoghi alle ruote dentate ed alle viti. Ciò avviene specialmente quando la macchina si trova in una grande officina oppure quando si può disporre di un piccolo motore speciale facile ad entrare in azione (*).

(*) Motori a gaz, oppure motori idraulici.

Poche sono le osservazioni di ordine generale che si possono fare sull'apparecchio operatore, esso dovrà essere fatto in modo da lasciare molto spazio disponibile intorno a sè e da permettere facilmente la posa dei pezzi da esperimentare e le osservazioni relative alle deformazioni, che essi subiscono. Bisogna poi aver somma cura che le branche, tenaglie, manicotti, ecc., che servono per fissare i campioni, sui quali si vuole esperimentare, abbiano dimensioni e forme tali che le loro deformazioni non possano mai avere influenza alcuna sull'esperienza.

L'apparecchio misuratore degli sforzi ordinariamente è una bilancia con stadera a romano oppure un manometro. Quest'ultimo sistema è assolutamente da proscrivere in quelle macchine, in cui si producono gli sforzi per mezzo di un torchio idraulico quando il manometro è in comunicazione con quest'ultimo apparecchio. Infatti in queste condizioni il manometro dà bensì la pressione, che si esercita nell'interno del torchio idraulico, ma non quella che soffre il pezzo, sul quale si esperimenta, poichè essa è diminuita molto da varie cause ed in particolar modo dall'attrito delle guarnizioni. È per queste ragioni che il Ministero della Marina in Francia ha proibito l'uso del manometro come misuratore degli sforzi nelle macchine a torchio idraulico (*), mentre invece nelle altre il manometro può ancora servire e può essere usato anche colle macchine a torchio idraulico purchè esso sia affatto indipendente da questo apparecchio. Attualmente però nelle macchine meglio costruite la misura degli sforzi suole essere fatta col mezzo di un sistema speciale di leve di cui l'ultima funziona come stadera a romano.

Gli apparecchi per la misura delle deformazioni sono molto variabili a seconda della maggiore o minore precisione, che si vuole raggiungere nell'esperienza e secondochè si vogliono misurare le deformazioni permanenti oppure le deformazioni elastiche, che in generale sono sempre più piccole. Senza entrare in particolari facili ad immaginare ed a comprendere avvertiremo soltanto che sono state usate a questo scopo delle scale rettilinee a nonio colle divisioni in mezzi millimetri (**), oppure scale circolari in guisa che la deformazione veniva ingrandita nel rapporto esistente fra il raggio del circolo graduato e quello dell'albero o braccio motore (***).

(*) Les efforts de traction ne seront jamais calculés d'après les indications du manomètre si la machine employée pour les produire comprend une presse hydraulique (Circulaire du Ministère de la Marine, 11 mai 1876).

(**) Apparecchio del Mangin.

(***) Apparecchio a nonio ed a spirale del Colonnello Rosset.

Il Colonnello Rosset si è anche servito di due tubi comunicanti di diametro diverso, nei quali i movimenti vengono evidentemente ingranditi nel rapporto inverso dei diametri; è però necessario esperimentare con questo apparecchio a temperatura costante, oppure fare le opportune correzioni, cosa che complica singolarmente l'esperienza. In esperienze più delicate si sono valutati gli allungamenti ed accorciamenti dei pezzi soggetti a sforzi determinati nel modo seguente. Ad un piccolo cilindro in gomma vulcanizzata si fissa uno specchio in modo, che esso sia obbligato a muoversi e ruotare insieme al cilindro stesso, disponendo questo cilindro in vicinanza del pezzo da esperimentare in modo che esso allungandosi od accorciandosi lo faccia ruotare, l'angolo di rotazione viene misurato dall'arco percorso da un raggio luminoso, oppure dall'immagine di un punto, e la deformazione s'ottiene moltiplicando l'arco misurato per l'inversa del rapporto dei raggi di quest'ultimo e del cilindretto motore (*). Finalmente spesso è stato usato (specialmente in Francia) il catetometro, istrumento notissimo e sul quale non è necessario dare alcuna particolare descrizione.

Non sembra che l'indole di questo lavoro permetta di entrare qui in descrizioni particolareggiate relative alle macchine per esperimentare la resistenza dei materiali poichè uno dei volumi dell'*Arte di fabbricare* del Professore Giovanni Curioni, e precisamente il volume VI dell'*Appendice* è particolarmente destinato a raccogliere tutto ciò che ha diretto rapporto colla determinazione dei coefficienti di elasticità e resistenza dei varî materiali, che si usano nelle costruzioni. Ci limiteremo quindi ad una descrizione sommaria di due macchine esistenti nel gabinetto di costruzione della Regia Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Bologna rinviando il lettore, che desideri avere più ampie cognizioni su questo argomento, al predetto volume dell'*Appendice all'Arte di fabbricare* (**), ai lavori di Lebasteur, di Kirkaldy, alle pubblicazioni speciali ed alle opere e memorie originali dei varî esperimentatori.

La figura 110ª (*Tav.* XVIII), rappresenta una piccola macchina basata sul principio della leva capace soltanto di piccoli sforzi (Kg. 500) e fatta per esperimentare la resistenza a tensione

---

(*) Apparecchi di questo genere hanno servito a Flad e Pfeiffer ed al Professore Bauschinger per le esperienze, che quest'ultimo ha eseguite al Politecnico di Monaco.

(**) Editore A. F. Negro di Torino.

e l'adesione delle malte e dei cementi (*). Essa si compone delle parti seguenti:

aa — Doppia leva per aumentare la potenza nel rapporto di 50:1.

b — Sostegno delle due leve.

cc — Branche per trattenere il pezzo, sul quale si vuole esperimentare.

d — Secchiello nel quale si lascia cadere della pallina di piombo, che col suo peso funziona da potenza.

e — Serbatoio contenente pallina del numero 6, che pel condotto *g* mediante apposita valvola può lasciarsi cadere entro il secchiello sospeso al braccio lungo della prima leva.

h — Bilancia a molla per pesare la pallina caduta entro il secchiello *d* per produrre la rottura.

f — Forme per preparare i campioni, sui quali eseguire le esperienze.

gg — Tavolo sul quale riposa l'intero apparecchio.

Nelle prime tavole del sopraccennato volume VI dell'*Appendice all'Arte di fabbricare* è rappresentata una macchina per esperimentare la resistenza dei materiali alle diverse sollecitazioni basata sul principio del torchio idraulico fatta costruire dal defunto Professor Curioni per la Scuola di applicazione per gli Ingegneri di Torino nel 1881. In questa macchina l'apparecchio moltiplicatore della potenza è costituito da un torchio idraulico del sistema Desgoffe e Ollivier ingegneri a Parigi e conosciuto sotto il nome di torchio steridraulico. L'apparecchio operatore consta di un carrello riunito invariabilmente allo stantuffo del torchio steridraulico composto da quattro grossi tiranti, che collegano due robusti piatti e del braccio corto di una robusta leva a gomito, che penetra tra i tiranti del carrello. I pezzi sui quali si vogliono eseguire le esperienze si collocano fra il braccio anzidetto ed uno dei piatti col mezzo di una serie di branche, pezzi di rimonta, ecc., di diverse specie e forme a seconda delle esperienze che si vogliono fare. L'apparecchio misuratore degli sforzi consta della leva angolare anzidetta, il cui braccio lungo (disposto pressochè orizzontalmente) è collegato mediante un tirante col braccio corto di una stadera a romano posta superiormente alla macchina, che serve a misurare esattamente gli sforzi, che si esercitano contro il braccio corto della leva angolare. Finalmente gli apparecchi misuratori delle deformazioni sono scale ed archi graduati, noni, micrometri moltiplicatori, ecc.

L'altra macchina per esperimentare la resistenza dei materiali

(*) Questa macchina fu provveduta dal signor Kulmann di Londra.

esistente presso il gabinetto di costruzioni della Regia Scuola di applicazione per gli Ingegneri di Bologna fu acquistata a Manheim, è conosciuta col nome di sistema Mohr e Federhaff ed è rappresentata nelle figure 103ª, 104ª, 105ª, 106ª, 107ª, 108ª, delle tavole XVI e XVII.

Sopra uno zoccolo *A* (*Fig.* 103ª e 105ª, *tav.* XVI) si elevano tre colonne *B*, *C*, *D*, delle quali due, cioè *B* e *C*, servono di guida ad un blocco metallico *E*, che mediante viti e ruote dentate può ricevere il movimento trasmesso da un piccolo motore alla puleggia, oppure essere mosso a mano mediante la manivella *G*. Le tre colonne *B*, *C*, *D* sono riunite fra loro alla parte superiore da un telaio in modo da formare un robusto castello atto a sopportare una leva *H*, sulla quale agiscono le orecchie *K* e che è connessa mediante l'asta *I* all'estremo *L'* di una stadera ordinaria a romano *LL'*: una disposizione molto ingegnosa permette di poter far avanzare regolarmente il romano facendo ruotare un'asta a vite. Fra il blocco *E* e le orecchie *K* possono adattarsi varî pezzi di ricambio, diversi secondo le esperienze che si vogliono eseguire, in modo da dar luogo a disposizioni svariate facili a comprendere e rappresentate nelle figure 104ª, 106ª, 107ª, 108ª, 109ª delle tavole XVI e XVII. Per maggior comodità di chi deve preparare le esperienze il blocco può essere mosso a mano con una certa rapidità per mezzo di una piccola manivella *G'*.

Disposizione per le esperienze sulla resistenza a trazione (*Fig.* 106ª e 107ª, *tav.* XVII).

Disposizione per le esperienze sulla resistenza a compressione (*Fig.* 108ª e 109ª, *tav.* XVII).

Apparecchio per le esperienze sulla resistenza a flessione (*Fig.* 106ª, *tav.* XVII).

Le deformazioni subìte dal pezzo soggetto ad esperienza sono trasmesse mediante una funicella ad un asse *a*, sul quale è montato un piccolo tamburo *T*, e di fronte a questo trovasi un indice portamatita *N*, che si muove dal basso all'alto proporzionalmente al cammino percorso dal romano *M* della stadera *LL'* in guisa che stendendo una striscia di carta sul tamburo *T* si ottiene un diagramma, in cui le ascisse sono proporzionali alle deformazioni e le ordinate agli sforzi subìti dal materiale soggetto ad esperimento, cioè si ha una rappresentazione automatica di tutte le fasi dell'esperienza (*).

(*) Questo apparecchio particolare per ottenere automaticamente i diagrammi corrispondenti alle varie esperienze è dovuto a Mohr ed è stato l'oggetto di uno speciale brevetto.

Quando si vogliono fare esperienze sulla resistenza dei materiali la macchina Mohr e Federhalt può essere mossa a mano, col mezzo della manivella G, oppure con mezzi meccanici. La macchina che stiamo descrivendo riceve il movimento mediante una cinghia da un lungo albero (che mette in moto anche altri apparecchi), sul quale agisce un piccolo motore a gas — brevetto Adam, 2 cavalli. Il movimento è trasmesso al piatto α, sul quale si appoggia una ruota di frizione β montata su un albero a vite, girando opportunamente un piccolo volante γ la ruota β può essere allontanata od avvicinata al centro del piatto, muovendosi in senso parallelo al medesimo, in guisa che si può graduare a volontà la sua velocità non solo, ma anche invertire il senso del suo movimento. Finalmente da una puleggia montata sullo stesso albero della ruota di frizione β parte la cinghia che trasmette il moto alle ruote dentate, che costituiscono l'apparecchio moltiplicatore della potenza nella macchina considerata.

105. Risultati generali delle esperienze sulla resistenza dei materiali. — Le prime ricerche fatte sulla resistenza dei materiali condussero a risultati d'indole generale e non rigorosamente esatti; in seguito nuovi studî eseguiti con molta accuratezza e con apparecchi più perfetti permisero di precisare meglio il modo, col quale avviene la deformazione e la rottura dei corpi. I primi sperimentatori riconobbero:

1° Che tutti i corpi si deformano sotto l'azione di forze esterne più o meno grandi.

2° Che in tutti i corpi solidi, se si fanno agire delle forze relativamente piccole, ossia se si deforma di poco il solido, questo ritorna alla posizione iniziale quando cessa d'agire la causa deformatrice. Tali deformazioni furono dette elastiche, cioè tali che al cessare della causa, che le produce, cessano completamente.

3° Che ad un allungamento corrisponde un restringimento trasversale e viceversa per la compressione.

4° Che se un corpo è assoggettato a sforzi di tensione o di compressione superiori ad un certo limite, si verificano delle deformazioni tali che al cessare della causa che le produce non scompaiono completamente: ciò che rimane della deformazione primitiva dicesi deformazione permanente e limite di elasticità il punto, in cui comincia a mostrarsi una deformazione permanente.

5° Che se sopra un corpo agisce una forza, esso si deforma; se la forza aumenta la deformazione aumenta pure, e ad un certo punto gli spostamenti delle molecole sono tanto grandi che riesce impossibile al corpo di costituirsi in equilibrio sotto l'azione di nuove

forze, esso seguiterebbe a deformarsi conducendo ad una più o meno prossima od anche immediata disaggregazione molecolare. Tale fenomeno prende il nome di *snervamento*.

6° Che se le forze che agiscono sopra un corpo sono inizialmente abbastanza grandi, oppure aumentano per gradi sufficientemente, avviene nel corpo una disaggregazione delle molecole in guisa che esse non agiscono più sensibilmente le une sulle altre e il corpo si divide in più parti. Tale fenomeno chiamasi *rottura*.

Ulteriori esperienze eseguite più accuratamente hanno messo in evidenza i fatti seguenti:

1° Che in genere non esistono deformazioni puramente elastiche ed un limite di elasticità ben determinato, ma che invece ogni deformazione δ si può considerare composta di due termini, uno δ_1 dovuto alla deformazione elastica, e l'altro δ_2 dovuto alla deformazione permanente e che a seconda dell'importanza della deformazione uno dei due termini può essere molto piccolo in confronto dell'altro, in guisa da spiegare come esso sia sfuggito ai primi sperimentatori.

2° Da quanto fu detto superiormente risulta che il limite di elasticità è un'espressione vuota di senso a meno che per esse non vogliasi intendere, come s'intende realmente, quel punto, in cui le deformazioni permanenti cessano di essere trascurabili rispetto a quelle elastiche.

3° Che un corpo soggetto a deformazione permanente, non ritornando più allo stato primitivo, non va per questo considerato in cattive condizioni di resistenza, ma soltanto le deformazioni vanno riguardate come cause modificatrici del corpo stesso, per cui dopo una deformazione esso è un sistema nuovo, che ha bensì uno stato d'equilibrio infinitamente vicino al precedente, ma pure diverso da esso.

4° Che la durata delle forze influisce sulle deformazioni prodotte.

5° Che gli sforzi intermittenti od alternati possono in certi casi dar luogo a deformazioni molto superiori a quelle che produrrebbero se agissero senza interruzione o variazione alcuna, e qualche volta condurre alla rottura, sebbene inferiori in intensità al carico, che la produce agendo in modo continuo.

6° Che le leggi su cui si basa la teoria dell'elasticità sono vere soltanto entro i limiti imposti dalla condizione δ_2 piccolissimo rispetto a δ_1 per cui possa riguardarsi $\delta = \delta_1$. Come conseguenza, le formole della resistenza dei materiali non sono applicabili che ai solidi o costruzioni stabili, mentre che non

possono essere che largamente approssimate in vicinanza della rottura e qualche volta possano condurre a risultati molto lontani dal vero.

7° Le deformazioni sotto le stesse forze e per dimensioni uguali dei corpi resistenti variano al variare della materia, della temperatura, del modo di lavorazione, della provenienza, del modo di produzione, ecc.

106. Modi di sollecitazione più comuni. — Esaminato così in generale il fenomeno delle deformazioni, passiamo a studiare più particolarmente il modo, col quale esso avviene, e primieramente distingueremo i seguenti casi:

I. Tensione semplice.

II. Compressione semplice.

III. Scorrimento semplice.

IV. Deformazioni prodotte da fenomeni complessi di tensione, pressione, scorrimento, flessione e torsione.

V. Influenza della durata e della intermittenza degli sforzi, degli urti, delle vibrazioni, ecc.

Nelle costruzioni s'impiegano diversi materiali; quelli però che ordinariamente debbono resistere a sforzi ragguardevoli e formar parte essenziale dell'opera da eseguirsi si possono ridurre a tre gruppi fra loro fisicamente diversi pel modo, col quale si ottengono, si lavorano e si impiegano. Divideremo quindi ciò che diremo relativamente ai risultati delle esperienze in tre sezioni o paragrafi: *Legnami — Metalli — Materiali per costruzioni murarie.*

Per brevità d'esposizione ed in relazione all'indole di questo lavoro, non trascriveremo delle esperienze che ciò che ha un'importanza più diretta per far comprendere in via generale il modo di comportarsi dei varî materiali nelle costruzioni sotto l'azione di sforzi determinati, rinviando pel rimanente ai trattati ed alle memorie speciali di Barré de Saint-Venant, Wertheim, Chevandier, Hodgkinson, Morin, ecc., ed all'*Appendice* VI *all'Arte di fabbricare* del Curioni.

107. Risultati delle esperienze a tensione. — *a*) *Legnami.* — Le esperienze eseguite sui legnami da Wertheim, Chevandier e da altri hanno condotto ai risultati seguenti:

1° La resistenza allo snervamento e alla rottura è sensibilmente proporzionale alla densità pei legnami della stessa essenza. Questo fatto non si verifica più per legnami di essenze diverse.

2° Un legno cresciuto in terreno secco e conveniente può presentare una resistenza allo snervamento ed alla rottura per

trazione che sia anche $\frac{5}{4}$ di quella corrispondente ad un legno di uguale essenza cresciuto in terreno acquitrinoso e malsano.

3° Il legno ricavato al piede o verso il mezzo dei tronchi degli alberi sani, i quali trovansi ancora nello stadio di incremento, presenta generalmente maggior resistenza allo snervamento ed alla rottura per trazione di quello che ricavasi dall'alto e dalle parti esteriori. Il contrario avviene per il legname che si ritrae da alberi, che già sono nello stadio di deperimento.

4° Il coefficiente di elasticità relativo all'estensione diminuisce al di là di una certa età, che dipende anche dalla secchezza e dall'esposizione del terreno, che è grande pei terreni cresciuti nelle esposizioni N, NE, NO, e che è piccolo pei legnami cresciuti in terreni acquitrinosi e fangosi.

5° Gli alberi tagliati nella pienezza degli umori e quelli della stessa essenza tagliati prima somministrano legnami con coefficienti di elasticità longitudinale relativi all'estensione sensibilmente uguali.

6° Lo spessore degli strati legnosi non sembra influire sul coefficiente longitudinale d'elasticità relativo all'estensione, salvo per l'abete, nel quale esso cresce colla sottigliezza degli strati.

7° Nei legnami ha sempre luogo, quando sono soggetti a trazione, un allungamento permanente ed uno elastico. Lo snervamento per trazione ha sensibilmente luogo quando l'allungamento permanente giunga ad essere 0,00005 della lunghezza iniziale del solido prismatico sperimentato.

8° Pei legnami, che s'impiegano nelle costruzioni, la resistenza R allo snervamento varia tra Kg. 1 e 3,2 ed E (coefficiente di elasticità longitudinale relativo all'estensione) fra Kg. 500 e 1800 per millimetro quadrato.

9° I legni seccati rapidamente alla stufa si rompono senza deformarsi sensibilmente e quindi senza dare indizio del loro prossimo sfacelo.

10° Per i legnami impiegati nelle costruzioni il coefficiente di rottura per trazione nel senso delle fibre varia fra Kg. 1,80 e Kg. 9,00 per millimetro quadrato.

11° I legnami sono più resistenti nel senso delle fibre che nel senso normale alle medesime.

b) *Metalli.* — I risultati delle esperienze eseguite da Bonnet, Ardant, Duleau, Eaton Hodgkinson, Kirkaldy e da altri sperimentatori, e da costruttori ben noti quali Stephenson, Desplaces e Collet-Meygret conducono alle conclusioni seguenti:

1° In ferri della stessa provenienza la resistenza unitaria

varia al variare delle dimensioni trasversali, quand'anche siano ugualmente trattati, così le barre di piccolo calibro a parità di superficie resistono più che quelle di calibro maggiore; mentre i fili di ferro possono resistere a 60 Kg. per millimetro quadrato, il ferro in grosse barre non resiste a più di 35 Kg., ed in genere meno. Ciò è specialmente dovuto all'azione del maglio, dei laminatoi, ecc., che influiscono più attivamente sopra gli strati esterni e poco profondi.

2° I ferri laminati offrono una maggior resistenza nel senso delle fibre che in senso normale, in media 36 Kg. per millimetro quadrato (essa varia da 30 a 40 Kg.).

3° La resistenza dei metalli varia grandemente a seconda della loro lavorazione, della loro natura, ecc. Come dato medio si può ritenere che essa varia:

Pei fili di ferro da 50 a 90 Kg. per millimetro quadrato con una media di 60 a 70 Kg.

Pei ferri comuni da 25 a 60 Kg. per millimetro quadrato con una media di 36 Kg. (*).

4° Generalmente i ferri duri e non ricotti resistono allo snervamento per trazione più di quelli duri e ricotti della stessa qualità e presentano allungamenti minori di questi.

5° I ferri lavorati con carbone di legna resistono meglio di quelli lavorati con carbon fossile.

6° Il ferro caldo resiste meno che il ferro freddo: a 300°, 500°, 600° la resistenza diventa $^{9}/_{10}$, $^{7}/_{10}$, $^{5}/_{10}$ di quella a freddo.

7° Le correnti elettriche diminuiscono nel ferro la resistenza allo snervamento per trazione, ma al loro cessare il ferro riprende la resistenza primitiva.

8° Nei ferri sottoposti ad una forza di tensione si verifica sempre un allungamento elastico ed uno permanente.

9° La resistenza al limite di elasticità nel ferro varia fra Kg. 9 e 15 per millimetro quadrato ed il modulo di elasticità E fra 12000 e 20000 per millimetro quadrato.

10° La ghisa resiste alla tensione meno assai del ferro. La sua resistenza al limite di elasticità varia fra 5 e 10 Kg., ed E fra 7000 e 12000 per millimetro quadrato.

11° La resistenza della ghisa alla tensione è in media di 11 Kg. per millimetro quadrato con un minimo di 6 Kg.

12° I pezzi in ghisa a grande sezione resistono meno di quelli a piccola in causa dell'influenza del raffreddamento sull'involucro

---

(*) Claudel, *Formules, Tables*, ecc., Ottava edizione.

che lo rende più resistente. (L'influenza del raffreddamento si fa sentire circa fino alla profondità di un millimetro).

13° La ghisa bianca resiste alla rottura per trazione meglio che la grigia.

14° La ricottura prolungata diminuisce la resistenza della ghisa.

15° I pezzi di ghisa sono più resistenti nel senso dell'asse che in senso tangenziale.

16° Pei pezzi tesi conviene sempre più il ferro che la ghisa.

17° La resistenza dell'acciaio alla tensione varia moltissimo al variare del suo grado di durezza.

Denominazione dell'acciaio	Sforzo di rottura alla trazione per mmq.	
	da chilogrammi	a chilogrammi
Dolce	48,000	56,000
Medio	56,000	69,000
Duro	69,000	105,000

c) *Materiali per costruzioni murarie.* — Raramente nelle costruzioni le pietre sono cimentate alla tensione, si hanno quindi pochi dati relativi a questo argomento ed anche incerti; tuttavia essi possono essere riassunti nel quadro seguente:

Resistenza per millimetro quadrato delle pietre naturali alla rottura per trazione.

Qualità delle pietre	Densità da 1,40 a 2,20 pietre tenere	Densità da 2,20 a 2,60 pietre mezzane	Densità superiore a 2,60 pietre dure
Pietre calcari	0,06—0,13	0,13—0,30	0,30—0,65
Pietre silicee	0,04—0,10	0,10—0,42	0,42—0,80
Pietre vulcaniche . .	0,14—0,15	0,15—0,40	0,40—0,90

La resistenza dei laterizî a tensione varia fra i Kg. 0,08 e 0,25 per millimetro quadrato.

I risultati delle esperienze eseguite sulle malte conducono alle seguenti conclusioni:

1° Per le malte di calcina la coesione è minore dell'aderenza colle pietre, per cui è generalmente nella massa della malta che avviene la rottura.

2° Nella malta di calcina posta in condizioni favorevoli la coesione cresce col tempo.

3° Per le malte fatte con calce grassa in muri di ordinario spessore si raggiunge il massimo di coesione dopo 8 oppure 12 anni d'impiego; pei grossi muri possono occorrere centinaia di anni.

4° Nelle malte con calce idraulica e sabbia si raggiunge il massimo di coesione dopo 4 anni. In quelle con pozzolana dopo 3 anni. Nelle malte con cemento pare che tale massimo si raggiunga dopo 18 o 12 mesi.

5° L'aderenza delle pietre col gesso è minore della coesione, circa $^2/_3$.

6° Le malte di gesso si alterano per le vicende atmosferiche e per le esalazioni animali od altro.

7° Le malte di gesso in condizioni favorevoli raggiungono il massimo di coesione e di aderenza alle pietre in un mese.

Quadro riassuntivo della resistenza delle malte.

Qualità	Tempo d'impiego	Coesione per mmq. in Kg.
Calce grassa e sabbia .	$^1/_2$ a 10 anni	0,005 a 0,035
Calce idraulica e sabbia	6 a 4 mesi (secondo il grado di idraulicità della calce)	da { 0,02 a 0,05 / 0,03 a 0,09 / 0,05 a 0,15 }
Calce grassa e pozzolana	2 mesi a 3 anni	0,03 a 0,15
Cemento	1 a 13 mesi	0,04 a 0,21
Gesso puro	1 mese	0,10 a 0,16
Gesso con sabbia	1 mese	0,02 a 0,06

d) Spesso si presenta il caso di dover considerare la resistenza delle funi, catene, corregge, ecc. (Macchine, manovre per mettere in posto pezzi, ecc.). A questo proposito l'esperienza ha dimostrato che:

1° Per le funi nuove la resistenza alla trazione può variare da 5 a 9 Kg. per millimetro quadrato.

2° Per le funi usate da tempo, ma non guaste, la resistenza a tensione può variare fra 4 e 6 Kg. per millimetro quadrato.

3° Le funi di canapa bagnate perdono $^2/_3$ della loro resistenza.

4° Le funi incatramate da $^1/_3$ ad $^1/_4$.

5° Le catene a maglie oblunghe resistono a circa 24 Kg. per millimetro quadrato (*).

6° Le corregge di cuoio non possono sviluppare una resistenza di 0,2 Kg. per millimetro quadrato senza che la loro sezione sia cimentata alla rottura per trazione.

Osservazione. — In causa delle numerose applicazioni del ferro nelle costruzioni moderne questo corpo è stato quello, sul quale è stato eseguito un maggior numero di esperienze. Dal trattato di *Meccanica applicata* del Bresse e da quello di *Resistenza dei materiali* del Generale Morin togliamo il seguente quadro come quello che è adatto a far ben comprendere il modo di comportarsi del ferro sotto l'azione degli sforzi. Le esperienze sono state fatte sovra aste di circa 15 metri di lunghezza formate di diversi pezzi uniti fra loro col mezzo di manicotti a vite, la

(*) Come complemento delle indicazioni date sulla resistenza delle funi e delle catene riportiamo il seguente quadro, che togliamo dall'opera del Generale Morin, *Resistance des matériaux* (Terza edizione, vol. I, pag. 122).

Proporzioni comparative delle gomene in canapa incatramate e delle catene in uso nella marina francese.

INDICAZIONE DEL NAVIGLIO	GOMENE			CATENE		
	Circonferenza in centimetri	Diametro in centimetri	Peso di 100 m di lunghezza	Diametro in millimetri	Peso di 100 m di lunghezza	Sforzo di prova
			Kg.		Kg.	Kg.
Bastimenti: di I e II ordine	66	21,0	3500	54	6576	77000
Bastimenti: di III ordine (nuovo)	65	20,7	3392	52	5863	71500
Bastimenti: di IV ordine	60	19,1	2895	48	5043	61000
Fregate: di I ordine	60	19,1	2895	48	5043	61000
Fregate: di II ordine	48	15,3	1852	46	4700	56000
Fregate: di III ordine	46	14,6	1700	42	3851	46500
Bastimenti: di I classe	40	12,7	1288	38	3187	38500
Bastimenti: di II classe	38	12,1	1161	34	2502	31000
Fregate: di I classe	35	11,1	985	32	2379	27000
Fregate: di II classe	29	9,1	676	28	1797	21000
Cannoniere, Bricks, Golette da 6	33	7,6	426	24	1392	15500
Golette da 4	20	6,4	322	20	953	10500

sezione trasversale delle aste era di millimetri quadrati 135,4 ed è stato tenuto nota esatta delle deformazioni elastiche e delle deformazioni permanenti misurando la lunghezza dei pezzi prima dell'esperienza, sotto l'influenza degli sforzi e finalmente dopo aver tolto i carichi.

Esperienze per determinare gli allungamenti di una barra di ferro sotto diversi pesi.

CARICO per mmq. espresso in chilogrammi	NUMERI proporzionali ai carich	ALLUNGAMENTO RELATIVO espresso in millesimi della lunghezza primitiva			QUOZIENTE DEL CARICO riferito al metro quadrato diviso per l'allungamento relativo	
		TOTALE	permanente	elastico	TOTALE	elastico
1,87	1	0,082	»	0,082	$10^9 \times 22,8$	$10^9 \times 22,8$
3,75	2	0,185	»	0,185	20,2	20,2
5,62	3	0,284	0,003	0,281	19,8	20,0
7,50	4	0,380	0,003	0,377	19,8	19,9
9,37	5	0,475	0,004	0,471	19,7	19,9
11,25	6	0,571	0,005	0,566	19,7	19,9
13,12	7	0,666	0,007	0,659	19,7	19,9
15,—	8	0,760	0,010	0,750	19,3	20,0
16,87	9	0,873	0,033	0,840	19,3	20,1
18,75	10	1,013	0,083	0,930	18,4	20,2
20,64	11	1,283	0,262	1,021	16,1	20,2
22,50	12	2,360	1,130	1,230	9,5	18,1
24,37	13	4,287	3,071	1,216	5,6	20,0
26,25	14	9,951	8,574	1,377	2,9	19,1
28,12	15	10,493	9,102	1,391	2,7	20,0
id. dopo 1 ora	»	11,750	»	»	2,4	»
id. 3 ore	»	11,934	»	»	2,4	»
id. 5 id.	»	11,959	»	»	2,4	»
id. 7 id.	»	12,027	»	»	2,3	»
id. 10 id.	»	12,027	»	»	2,3	»
30,—	16	17,888	16,515	1,373	1,7	21,8
»	»	20,220	18,889	1,331	1,5	22,5
31,87	17	21,486	19,795	1,691	1,5	18,9
»	»	21,702	»	»	1,5	»
33,75	18	24,774	22,709	2,065	1,4	16,3
»	»	25,225	»	»	1,3	»
35,62	19	34,935	32,820	2,115	1,0	17,0
»	»	35,202	»	»	1,0	»
37,46	20	rottura dell'asta				

PONCELET, BRESSE ed altri dànno una rappresentazione geometrica di questo quadro portando rispetto a due assi ortogonali i carichi come ascisse e gli allungamenti come ordinate (*Fig.* 114ª, *tav.* XVIII)

e riunendo con una curva a mano i varî punti, avendo cura di correggere qualche piccola irregoralità dovuta senza dubbio ad errori di esperienza. Dall'esame di questo quadro e del diagramma tracciato nella (*Fig.* 114ª, *tav.* XVIII) risulta:

a) Che gli allungamenti totali del ferro sono sensibilmente proporzionali ai carichi finchè questi non sorpassano il limite di 15 Kg. per millimetro quadrato e che al di là di questo limite gli allungamenti totali crescono secondo una legge, che diventa progressivamente più rapida in guisa che il modulo di elasticità E, se si tiene conto della deformazione totale, si trova alla fine dell'esperienza 15 od anche 20 volte più piccolo che al principio.

b) Che gli allungamenti elastici, cioè gli allungamenti totali diminuiti della porzione corrispondente all'allungamento permanente, restano sempre presso a poco proporzionali ai carichi anche quando questi si accostano al limite di rottura (Legge di Gerstner).

c) Che il valore del coefficiente E di elasticità longitudinale è in cifra rotonda Kg. 20 000 000 000,00 per metro quadrato di sezione resistente.

d) Che anche i carichi più deboli di Kg. 15 per millimetro quadrato dànno luogo ad allungamenti permanenti, questi però sono piccolissimi e quindi trascurabili. Infatti per un carico di Kg. 15 per millimetro quadrato l'allungamento permanente non è ancora che 0,01 di millimetro per metro, cioè $\frac{1}{76}$ dell'allungamento totale.

e) Che l'allungamento permanente non aumenta se dopo un riposo anche abbastanza lungo si assoggetta di nuovo la barra a carichi, che non superino però quello che ha prodotto l'allungamento permante considerato: se questo limite fosse sensibilmente superato allora aumenta anche l'allungamento permanente (legge di Gerstner).

Il Bresse osserva che questo ultimo fatto mostra come assoggettando una barra di ferro a tensione ha luogo entro certi limiti un cambiamento nelle qualità fisiche del metallo paragonabile a quello prodotto dalla martellatura o dal passaggio al laminatoio.

Dai trattati sulla *Resistenza dei materiali* del Generale Morin e del Professor Curioni riportiamo i due quadri seguenti, nei quali si trovano raccolti molti dati relativi ai valori del modulo di elasticità E e del carico di rottura R pei materiali più comunemente usati.

INDICAZIONE DEI CORPI	Peso del decimetro cubo	Resistenza allo snervamento per trazione riferita al millimetro quadrato	ALLUNGAMENTO proporzionale	Coefficiente di elasticità longitudinale relativo all'estensione riferito al millim° quad°
Legnami tirati nel senso delle fibre	Cg.	Cg.		Cg.
Abete bianco	0,500	1,730	0,00192	902
Abete giallo	0,670	2,170	0,00121	1793
Acacia	0,717	3,188	0,00253	1260
Acero	0,645	1,068	0,00105	1017
Betulla	0,700	1,617	0,00162	998
Carpino	0,756	1,282	0,00118	1086
Faggio	0,830	2,317	0,00236	982
Frassino	0,750	1,270	0,00113	1124
Larice rosso	0,700	3,150	0,00210	1500
Olmo	0,730	2,350	0,00242	971
Ontano	0,600	1,121	0,00101	1110
Pino silvestre	0,580	1,633	0,00289	565
Pioppo	0,400	1,007	0,00195	516
Quercia	0,850	2,400	0,00170	1412
Metalli				
Acciaio di Germania di buona qualità, ricotto all'olio	7,820	25,000	0,00120	20833
Acciaio fuso assai fino, ricotto all'olio e temperato	»	66,000	0,00220	30000
Acciaio ordinario ricotto	»	»	»	18045
Bronzo da cannone fuso.	8,040	2,000	0,00063	3175
Ferro in barre sottili	7,770	15,000	0,00076	19737
Ferro in barre di media grossezza	»	12,205	0,00066	18492
Ferro in grosse barre	»	»	»	14000
Ferro dolce di piccole dimensioni, e passato alla filiera	»	14,750	0,00080	18437
Ferro in lamiera tirato nel senso della laminatura	»	»	»	13000
Ferro in lamiera tirato in senso perpendicolare alla laminatura	»	»	»	12000
Ghisa a grana fina	7,202	10,000	0,00083	12000
Ghisa grigia inglese ordinaria	»	6,000	0,00078	7692
Ottone fuso	8,540	4,800	0,00076	6316
Ottone in fili ricotti	»	15.000	0,00135	11111
Piombo fuso ordinario	11,350	1,000	0,00210	476
Piombo di coppella in fili stesi a freddo di 4 millimetri di diametro	»	0,400	0,00067	597
Piombo impuro di commercio in fili stesi a freddo di 6 millimetri di diametro	»	0,400	0,00050	800
Rame in fili	8,500	»	»	13100
Stagno	7,290	»	»	3200
Zinco	7,190	»	»	9600

INDICAZIONE DEI CORPI	Peso del decimetro cubo	Resistenza alla rottura per trazione riferita al millim° quadr°
Legnami	Cg.	Cg.
Abete nel senso delle fibre	0,500	4,100
Abete nel senso perpendicolare agli strati legnosi	»	0,220
Abete nel senso tangenziale agli strati legnosi	»	0,297
Acacia nel senso delle fibre	717	7,930
Acacia nel senso tangenziale agli strati legnosi.	»	1,231
Acero nel senso delle fibre	0,645	3,580
Acero nel senso perpendicolare agli strati legnosi	»	0,716
Acero nel senso tangenziale agli strati legnosi	»	0,371
Betulla nel senso delle fibre	0,700	4,300
Betulla nel senso perpendicolare agli strati legnosi.	»	0,823
Betulla nel senso tangenziale agli strati legnosi	»	1,063
Carpino nel senso delle fibre	0,756	2,990
Carpino nel senso perpendicolare agli strati legnosi	»	1,007
Carpino nel senso tangenziale agli strati legnosi	»	0,608
Faggio nel senso delle fibre	0,830	3,570
Faggio nel senso perpendicolare agli strati legnosi	»	0,885
Faggio nel senso tangenziale agli strati legnosi	»	0,752
Frassino nel senso delle fibre	0,750	6,780
Frassino nel senso perpendicolare agli strati legnosi.	»	0,218
Frassino nel senso tangenziale agli strati legnosi	»	0,408
Larice rosso nel senso delle fibre	0,700	8,500
Olmo nel senso delle fibre	0,730	6,990
Olmo nel senso perpendicolare agli strati legnosi	»	0,345
Olmo nel senso tangenziale agli strati legnosi	»	0,366
Ontano nel senso delle fibre	0,600	4,540
Ontano nel senso perpendicolare agli strati legnosi.	»	0,329
Ontano nel senso tangenziale agli strati legnosi	»	0,175
Pino silvestre nel senso delle fibre	0,580	2,480
Pino silvestre nel senso perpendicolare agli strati legnosi	»	0,256
Pino silvestre nel senso tangenziale agli strati legnosi	»	0,196
Pioppo nel senso delle fibre	0,400	1,970
Pioppo nel senso perpendicolare agli strati legnosi	»	0,146
Pioppo nel senso tangenziale agli strati legnosi	»	0,214
Quercia nel senso delle fibre	0,850	7,000
Quercia nel senso perpendicolare agli strati legnosi.	»	0,582
Quercia nel senso tangenziale agli strati legnosi	»	0,406
Metalli		
Acciaio fuso o di cementazione tirato al martello in piccoli pezzi	7,820	100,000
Acciaio il più cattivo in grossi pezzi e mal temprato.	»	36,000
Acciaio ordinario	»	75,000
Bronzo da cannone	8,040	23,000
Ferro il più forte lavorato in piccoli pezzi	7,770	60,000
Ferro il più debole lavorato in grandi pezzi	»	25,000
Ferro di qualità comune lavorato in barre di media grossezza	»	40,000
Ferro laminato tirato nel senso della laminatura	»	40,000
Ferro laminato tirato in senso perpendicolare alla laminatura	»	36,000
Ferro assai dolce, detto di *ruban*	»	45,000
Ferro non ricotto tirato in fili del diametro da 1 a 3 millimetri.	»	60,000
Ferro non ricotto, del più forte e tirato in fili del diametro di millimetri 0,23	»	90,000

INDICAZIONE DEI CORPI	Peso del decimetro cubo	Resistenza alla rottura per trazione riferita al millim° quadro
Metalli	Cg.	Cg.
Ferro non ricotto del più forte e tirato in fili del diametro di millimetri 0,5 a 1	7,770	80,000
Ferro non ricotto, debole e tirato in fili di gran diametro	»	50,000
Ferro in fili impiegati nella formazione di gomene	»	30,000
Ferro dolce in catene a maglie oblunghe	»	24,000
Ferro dolce in catene a maglie oblunghe rinforzate da puntelli	»	32,000
Ghisa grigia la più forte colata verticalmente	7,202	13,500
Ghisa grigia la più debole colata orizzontalmente	»	12,500
Ottone fuso	8,540	12,600
Ottone del più forte in fili non ricotti con diametro minore di 1 millimetro	»	85,000
Ottone di qualità media in fili non ricotti del diametro minore di 1 millimetro	»	50,000
Piombo fuso	11,350	1,280
Piombo laminato	»	1,350
Piombo di coppella tirato in fili del diametro di 4 millimetri	»	1,360
Rame fuso	7,783	13,400
Rame battuto	8,500	25,000
Rame laminato nel senso della lunghezza	»	21,000
Rame di qualità superiore laminato nel senso della lunghezza	»	26,000
Rame del più forte in fili non ricotti col diametro minore di 1 millimetro	»	70,000
Rame di qualità media in fili non ricotti col diametro variabile da 1 a 2 millimetri	»	50,000
Rame di infima qualità in fili non ricotti	»	40,000
Stagno fuso	7,290	3,000
Zinco fuso	7,190	6,000
Zinco laminato	»	5,000
Funi (*)		
Funi di canape di Strasburgo di 13 a 14 millimetri di diametro	»	8,800

(*) Per trovare approssimativamente i pesi delle funi possono valere i dati della seguente tavola.

INDICAZIONE DELLE FUNI	N° dei fili	Diametro delle funi	Peso delle funi per metro di lunghezza
		mm.	Cg.
Funi bianche nuove	30	0,0200	0,2834
Funi bianche nuove	15	0,0144	0,1448
Funi bianche nuove	6	0,0088	0,0522
Funi incatramate	30	0,0236	0,3326
Funi incatramate	15	0,0168	0,1632
Funi incatramate	6	0,0096	0,0693

INDICAZIONE DEI CORPI	Peso del decimetro cubo	Resistenza alla rottura per trazione riferita al millim° quadr°
Funi	Cg.	Cg.
Funi di canape di Lorena pure di 13 a 14 millimetri di diametro	»	6,500
Funi di canape di Strasburgo o di Lorena del diametro di 23 millimetri	»	6,000
Funi di canape di Strasburgo del diametro di 40 a 54 millimetri	»	5,500
Funi incatramate	»	4,400
Funi già usate di 23 millimetri di diametro	»	4,200
Pietre e Malte		
Basalto d'Alvernia	2,95	0,770
Calcare di Portland	»	0,600
Calcare bianco a grana fina ed omogenea	»	0,144
Calcare litografico a tessuto compatto	»	0,308
Calcare a tessuto arenaceo	»	0,229
Calcare a tessuto oolitico	»	0,137
Gesso impastato solidamente	1,57	0,120
Gesso impastato col metodo ordinario con un po' di sabbia	»	0,040
Malta di calce grassa e di sabbia, 14 anni dopo il suo impiego	1,60	0,035
Malta di cattiva qualità di calce grassa e di sabbia	»	0,008
Malta di calce idraulica ordinaria e sabbia, 18 mesi dopo il suo impiego	»	0,080
Malta con calce eminentemente idraulica, 1 anno dopo il suo impiego	»	0,140
Malta di parti eguali di cemento di Pouilly e sabbia, 1 anno dopo il suo impiego	»	0,096
Malta in parti eguali di cemento di Vassy e di sabbia, dopo 6 mesi d'indurimento all'aria	»	0,096
Malta in parti eguali di cemento di Vassy e sabbia, dopo 1 anno di indurimento nell'acqua	»	0,151
Malta di puro cemento di Vassy dopo 1 anno d'indurimento in luogo umido	»	0,207
Malta in parti eguali di cemento di Vassy e sabbia, dopo 1 mese d'indurimento nell'acqua di mare	»	0,113
Malta di puro cemento di Vassy, dopo 1 mese d'indurimento nell'acqua di mare	»	0,085
Mattoni di Provenza, ben cotti	2,17	0,195
Mattoni ordinari, deboli (*)	2,08	0,080

(*) Il quadro seguente può servire per aver un'idea abbastanza approssimata del peso per decimetro cubo delle murature ottenute con materiali diversi.

INDICAZIONE DELLE MURATURA	Peso al decimetro cubo	
	da Kg.	a Kg.
Muratura di pietrame calcare siliceo	1,7	2,3
Muratura di pietrame granitico	2,3	
Muratura di pietrame basaltico	2,5	
Muratura di mattoni	2,0	2,2
Muratura di calcestruzzo	2,2	

È opportuno osservare che i numeri contenuti in questi quadri non vanno riguardati come assoluti, ma soltanto come numeri medî, dei quali si serve il costruttore tutte le volte che non può mediante esperienze speciali avere dati più precisi sulla resistenza dei materiali da impiegare. Nell'usare poi di questi numeri non è necessario tenersi rigorosamente ai valori consegnati in queste tabelle od in altri manuali, questi numeri servono come criterio e potranno essere aumentati o diminuiti entro i limiti portati dalle tabelle riassuntive delle esperienze e dei risultati che si ottengono interpretandole in modo ampio a seconda della qualità del materiale, provenienza, modo di lavorazione, ecc., come abbiamo già avuto occasione di osservare superiormente. Bisogna inoltre ricordare per ciò che si riferisce ai metalli che a determinare il limite di elasticità ed il coefficiente di rottura entrano la provenienza dei materiali ed il modo di fabbricazione, perfezionandosi i quali, i valori predetti vengono necessariamente a variare.

108. Osservazioni sulla resistenza a compressione. — Se un corpo si assoggetta a compressione l'esperienza mostra che sempre si possono verificare due casi diversi:

a) Le dimensioni del corpo non sono molto diverse, cioè la sua lunghezza non supera di molto la minima dimensione della base; ed in tal caso si manifestano degli accorciamenti elastici, i quali, crescendo la compressione, diventano permanenti e sono il preludio dello snervamento e successiva rottura.

b) Una delle dimensioni del corpo, precisamente la lunghezza, è molto grande in confronto delle dimensioni della sezione trasversale, allora gli accorciamenti sono accompagnati da una flessione laterale e lo snervamento e la rottura, aumentando gli sforzi, avvengono per l'effetto nelle due deformazioni riunite. Il punto in cui incomincia a manifestarsi la flessione laterale non è ben definito e varia da corpo a corpo; in via generale può dirsi che essa flessione comincia ad essere rimarchevole quando la lunghezza è superiore ad 8 oppure a 10 volte la minima dimensione della sezione trasversale. Se si vuole esperimentare un solido molto lungo alla compressione semplice non resta altro mezzo che contenerlo entro robuste guide: per diminuire l'attrito sarà necessario impiegare liquidi lubrificanti ed imprimere delle scosse con colpi di martello per diminuire l'aderenza.

Se riesce facile a comprendere come si possa rompere un corpo soggetto a tensione non è altrettanto semplice formarsi un'idea esatta del modo col quale può avvenire la rottura per compressione semplice. Il Coulomb ammetteva che la parte superiore potesse strisciare obliquamente sopra la parte inferiore e riconduceva

la resistenza a compressione alla resistenza a sforzo radente trasversale. In appoggio di questa teoria ingegnosa stanno alcuni fatti; se si assoggettano prismi corti di ghisa o di pietra a forti pressioni essi si separano in cunei o piramidi aventi la base sulle faccie laterali ed il vertice verso il centro di figura del prisma e manifestanti la tendenza a staccarsi strisciando gli uni sugli altri. I risultati forniti da questa ipotesi sono però molto più deboli di quelli trovati ed il loro insieme non è consono alle idee ormai accettate sull'equilibrio molecolare, quindi attualmente si prestano molto meglio a spiegare il fenomeno della rottura per compressione le osservazioni del signor Michon. Se si considera un corpo (*Fig.* 111ª, *tav.* XVIII) ed in esso quattro molecole *m*, *n*, *o*, *p*, per le leggi dell'equilibrio elastico ad un avvicinamento di *m* ed *n* corrisponde un allontanamento di *o* e *p*, e siccome la rottura avviene quando le distanze molecolari eccedono un certo limite, così aumentando la compressione potrà la distanza *op* aumentare al di là dei limiti di resistenza e quindi disaggregarsi il corpo. Questo modo di vedere riconduce la rottura per compressione alla rottura per estensione, ed essendo una conseguenza della teoria dei corpi elastici, ha in suo appoggio il fatto che serve benissimo a render ragione dei fenomeni osservati quando si faccia parte all'influenza che può avere la diversa composizione molecolare. Partendo da queste idee si conclude che impedendo la dilatazione laterale in un corpo compresso, esso non deve rompersi ed è ciò appunto che avviene; la macchina di Blanchard di Boston all'Esposizione di Parigi del 1855 poteva piegare secondo un arco di cerchio di 90° un pezzo di legno di forte sezione senza alterarne la resistenza, col solo impedire la dilatazione longitudinale e trasversale (*).

Esperienze analoghe sono state fatte in seguito per altri corpi. La teoria di Michon dà anche ragione di alcuni fenomeni che a primo aspetto possono sembrare indipendenti, fenomeni che avvengono quando le deformazioni laterali di un corpo essendo rese anche soltanto più difficili aumenta la resistenza a compressione; e se esso è in certe direzioni molto compresso può provare nel medesimo punto fortissime deformazioni in un altro senso, quasichè le compressioni riempissero i vuoti fatti o lasciati dalle disgiunzioni prodotte dalle dilatazioni (sono questi vuoti che forse producono lo snervamento). Easton e Amos hanno fatto provare ad un cilindro in ghisa sotto forte pressione interna ed esterna una dilatazione di $^1/_{18} = 0{,}0556$, ossia 33 volte la dilatazione di rottura.

(*) *Annales des ponts et chaussées*, 1856.

Nei corpi isotropi il rapporto di dilatazione trasversale essendo un $^1/_4$ lo snervamento e la rottura per compressione dovrebbero quindi avvenire, secondo l'ipotesi di MICHON, sotto un carico quadruplo che per la tensione. Questa legge, sebbene abbia un gran numero di esperienze favorevoli (*) non si verifica nè si potrebbe verificare al momento della rottura, perchè:

a) I corpi in natura non sono isotropi.

b) La costanza del rapporto fra gli accorciamenti longitudinali e le dilatazioni trasversali non sussiste che entro i limiti di elasticità.

c) Il limite degli sforzi a dilatazione nel senso trasversale può essere naturalmente diverso di quello che si verifica nel senso longitudinale.

d) Varie cause possono influire ad impedire la libera dilatazione trasversale; così un prisma compresso fra due superficie piane (*Fig.* 112ª, *tav.* XVIII) non può evidentemente dilatarsi liberamente ed è obbligato a rigonfiarsi verso il mezzo.

In conclusione si può affermare:

1° Che l'ipotesi di MICHON serve benissimo a spiegare il fenomeno della rottura per compressione quando si faccia larga parte a tutte le numerose influenze, che possono modificare il risultato.

2° Nei calcoli di resistenza sarà in generale consigliabile riferirsi ai risultati delle esperienze, come quelli che meglio e più da vicino rappresentano l'effetto di una forza di compressione.

109. Risultati delle esperienze a compressione. — Come nel caso dell'estensione semplice divideremo i materiali da costruzione in tre categorie: *Legnami — Metalli — Murature.*

a) *Legnami.* — Le esperienze sulla resistenza dei legnami alla compressione sono specialmente dovute ai signori RONDELET, HODGKINSON, RENNIE, GAUTHEY, TREDGOLD, ecc., e da esse risulta quanto segue:

1° La resistenza a rottura per compressione, come quella per tensione varia nei legnami coll'essenza, colla densità, colla provenienza, colla località in cui sono cresciuti, coll'età e coll'appartenere ad una parte piuttosto che ad un'altra dell'albero.

2° I legni secchi presentano una maggior resistenza di quelli meno secchi.

3° La resistenza a compressione nei legni stagionati come si impiegano comunemente nelle costruzioni varia fra 1,5 e 6,5 Kg. per millimetro quadrato quando sono compressi nel senso delle fibre e la loro altezza non eccede otto oppure dieci volte la minima dimensione trasversale.

(*) BARRÉ DE SAINT-VENANT, Opera citata, pag. 10.

4° La quercia ed il larice rosso allo stato di essiccamento ordinario presentano presso a poco la stessa resistenza allo schiacciamento, ossia alla rottura per compressione; ma mentre la resistenza del larice non sembra aumentare notevolmente col tempo, quella della quercia invece diventa molto più grande, ond'è che la quercia viene preferita nelle costruzioni in luogi asciutti.

5° La rottura per compressione è preceduta da un rigonfiamento trasversale.

6° La resistenza allo schiacciamento è maggiore quando si comprimono i legnami nel senso delle fibre che nel senso normale.

b) *Metalli.* — Dalle esperienze specialmente di Hodgkinson, Rondelet, ecc., risulta:

1° La resistenza per pressione nel ferro di buona qualità al limite di elasticità è di Kg. 14 a 18 per millimetro quadrato ed il coefficiente longitudinale relativo alla compressione è da $^{17}/_{20}$ ai $^{4}/_{5}$ di quello relativo all'estensione.

2° La resistenza per pressione nella ghisa al limite di elasticità varia da 12 a 15 Kg. per millimetro quadrato ed il coefficiente di elasticità relativo alla compressione è soltanto di alcuni centesimi inferiore a quello relativo all'estensione.

3° Tanto nel ferro che nella ghisa anche per piccole pressioni si hanno sempre un'accorciamento elastico, ed uno permanente; quest'ultimo però è sempre una piccola porzione dell'accorciamento totale (entro i limiti di elasticità) e non aumenta pel ripetersi di pressioni uguali od inferiori.

4° Fino al punto in cui ha luogo lo snervamento per uguali pressioni su pezzi in ferro ed in ghisa di identiche dimensioni, quelli si accorciano meno di questi (come appare altresì dai valori dei coefficienti di elasticità).

5° I pezzi prismatici in ferro non trattenuti opportunamente possono inflettersi quando l'altezza supera il triplo della minima dimensione della sezione, e la resistenza che oppongono allo schiacciamento quando non ha luogo flessione laterale è di circa 25 Kg. per millimetro quadrato e per conseguenza alquanto inferiore alla resistenza che il ferro oppone alla rottura per trazione (circa $^{1}/_{6}$ od $^{1}/_{7}$).

6° I pezzi prismatici in ghisa compressi nel senso dell'asse presentano presso a poco una resistenza costante finchè la loro lunghezza non supera di cinque volte la minima dimensione della sezione trasversale; a partire da questo limite la resistenza diminuisce rapidamente.

7° La resistenza della ghisa alla compressione varia da 5 a 7 volte quella alla tensione, sta cioè fra 63 e 94,5 Kg. per millimetro quadrato.

c) *Muratura.* — Sono specialmente note le esperienze di Rondelet e di Vicat, da esse si deducono i risultati seguenti:

1° Le qualità fisiche delle pietre non possono servire di sicuro indizio per giudicare della resistenza rispettiva.

2° In una medesima cava le pietre, che costituiscono il cappellaccio, sono meno dense e meno resistenti di quelle, che si tolgono dal mezzo; ciò si verifica spesso, sebbene in grado minore, anche per lo stato inferiore della cava.

3° Per una stessa qualità di pietra sono più resistenti quelle murature che presentano una forma cubica; le variazioni però sono piccole finchè l'altezza è minore di 12 volte la minima dimensione della base.

4° Le pietre in generale si accorciano pochissimo sotto l'azione di forze prementi.

5° La resistenza alla rottura per schiacciamento delle pietre varia fra limiti molto estesi (come apparirà dal quadro che farà seguito a queste note).

6° La compressione della terra aumenta la resistenza dei laterizî.

7° L'azione di battere i cementi e comprimerli aumenta la loro resistenza.

8° La resistenza alla rottura per compressione è generalmente nelle pietre e nei cementi più grande di quella opposta alla rottura per trazione.

9° Le opere murali non presentano la loro massima resistenza alla rottura per compressione appena costruite, ma dopo un tempo che può essere considerevole, cioè quando le malte hanno fatto presa ed hanno acquistata quella coesione, che può considerarsi come finale.

10° I sostegni di pietra composti di due pezzi presentano una resistenza minore, di quelli, che constano di un pezzo unico. Questa proprietà è stata studiata dal Rondelet sovrapponendo dei cubi di metri 0,05 di lato; esso avrebbe trovato che la resistenza del sostegno così costruito si riduce a $^2/_3$. Il signor Vicat attribuisce questa diminuzione di resistenza ad un cattivo apparecchio ed alla mancanza di malta; egli ritiene che avendo cura nell'apparecchiare la muratura ed impiegando buona malta, la diminuzione di resistenza varia da 0,93 a 0,83: se i giunti sono paralleli alla direzione della forza premente la resistenza non è diminuita. Vicat sovrapponendo dei prismi in gesso e comparando la loro resistenza a quella di un prisma campione di altezza h, ha trovato i numeri seguenti: Sovrapponendo 2, 4, 8 prismi così che l'altezza della pila risultasse, comparata a quella h del prisma campione, h, $2h$, $4h$, il rapporto fra la resistenza del sostegno a più pezzi

e quella del sostegno monolite, sarebbe stato rispettivamente 0,930, 0,861, 0,834.

A complemento delle nozioni date superiormente riportiamo il quadro seguente, nel quale sono riuniti molti dati relativi alla resistenza dei varî materiali in uso nelle costruzioni agli sforzi di compressione semplice non accompagnata da flessione laterale. Anche qui vale l'osservazione fatta parlando della resistenza a tensione semplice, i numeri racchiusi in questo quadro sono valori medî ed all'atto pratico possono variare entro certi limiti dipendentemente da varie circostanze, quali la qualità, il modo di lavorazione, la provenienza, ecc.

INDICAZIONE DEI CORPI	Peso del decimetro cubo	Resistenza alla rottura per pressione riferita al millimº qudrº
Legnami	Cg.	Cg.
Abete bianco	0.50	1,50
Abete giallo	0,67	2,25
Betulla	0,70	2,50
Cedro	0,60	3,99
Faggio	0,83	5,43
Frassino	0,75	6,10
Larice rosso	0,70	4,50
Olmo	0,73	2,00
Ontano	0,60	4,00
Pino silvestre	0,58	1,90
Pioppo	0,40	1,70
Pomo selvatico	0,75	4,56
Prugno		2,57
Pruno		5,79
Quercia allo stato d'essiccamento ordinario	0,85	4,25
Quercia assai secca		6,50
Metalli		
Ferro	7,77	25,00
Ghisa grigia	7,20	70,00
Ghisa bianca	7,50	94,00
Pietre naturali		
Calcari teneri	1,40 a 2,20	0,60 a 1,30
Calcari mezzani	2,20 » 2,60	1,30 » 3,00
Calcari duri	2,60 » 2,90	3,00 » 5,00
Marmo di Candoglia sul Lago Maggiore	2,70	3,00
Marmo bianco di Carrara	2,71	3,20
Marmo nero di Varenna sul Lago di Como	2,72	3,40
Marmo di Genova	2,70	3,60
Marmo turchino di Genova	2,71	6,00
Marmo bianco venato presso Carrara	2,72	6.50
Pietre silicee tenere	1,40 a 2,20	0,04 a 0,90
Pietre silicee mezzane	2,20 » 2,60	0,90 » 4,20
Pietre silicee dure	2,60 » 2,90	4,20 » 8,00
Granito bigio di Montorfano sul Lago Maggiore, e di Alzo sul Lago d'Orta	2,66	6,80

INDICAZIONE DEI CORPI	Peso del decimetro cubo	Resistenza alla rottura per pressione riferita al millimº quadrº
Pietre naturali	Cg.	Cg.
Granito rosso di Baveno	2,60	6,90
Granito della Riva di Chiavenna sul Lago di Como	2,62	7,90
Granito della Balma presso Biella	2,75	8,00
Puddinga, o ceppo di Brambate sull'Adda	2,22	1,00
Pietra arenaria di Viganò	2,21	1,40
Pietra da Viggiù	2,23	1,50
Ceppo gentile, o puddinga a grana fina nel Milanese	2,30	2,50
Beola sul Lago Maggiore	2,61	5,10
Pietra argillosa di Firenze	2,56	4,20
Pietre vulcaniche tenere	0,60 a 2,20	0,34 a 2,30
Pietre vulcaniche mezzane	2,20 2,60	2,30 5,90
Pietre vulcaniche dure	2,60 2,95	5,90 20,00
Pietra pomice	0.60	0,34
Tufo di Roma	1,22	0,57
Lava tenera di Napoli	1,72	1,60
Lava grigia di Roma (*peperino*)	1,97	2,28
Lava di Napoli (*piperno*)	2,61	5,92
Basalti	2,95	20,00
Mattoni (*)		
Mattoni crudi	»	0,33
Mattoni poco cotti (*albasi*)	2,09	0,40
Mattoni cotti a giusto grado (*mezzanelli*)	2,17	0,60
Mattoni il cui grado di cottura oltrepassa di un poco il giusto grado (*forti*)	2,10	0,70
Mattoni troppo cotti (*ferrioli*)	1,56	1,50
Malte e Cementi		
Malta comune di calce grassa e sabbia che da poco ha fatto presa	1,70	0,19
Malta di calce mediamente idraulica e sabbia che da poco ha fatto presa	»	0,74
Malta di calce eminentemente idraulica e sabbia che da poco ha fatto presa	»	1,44
Malta in parti eguali di cemento di Vassy e sabbia dopo 15 giorni d'indurimento	1,65	1,36
Malta di calce grassa e sabbia dopo 18 mesi d'indurimento	1,63	0,30
La stessa malta ma battuta	1,89	0,41
Malta di calce grassa e coccio dopo 18 mesi d'indurimento	1,46	0,47
La stessa malta, ma battuta	1,66	0,65
Malta di calce grassa e di pozzolana di Roma o di Napoli, dopo 18 mesi d'indurimento	1,46	0,37
Gesso impastato con acqua	1,57	0,50
Gesso impastato con latte di calce		0,72
Gesso impastato duro	1,40	0,90
Calcestruzzo fatto con buona malta idraulica dopo 18 mesi d'indurimento	2,20	0,48

(*) Veggasi la tabella nella pagina seguente.

Nella *Resistenza dei materiali* del Professor Curioni (*) erano riportati i seguenti dati relativi ai mattoni impiegati nelle opere d'arte del canale Cavour e che riproduciamo reputandoli interessanti ed atti a dare idee precise sulla resistenza del materiale laterizio.

PROVENIENZA DEI MATTONI	QUALITÀ DEI MATTONI	Resistenza alla rottura per pressione per millim° quadr°
		Cg.
Fornaci della cascina Arizza presso Chivasso	Mattoni mezzanelli	0,76
	Mattoni forti	1,00
	Mattoni mezzanelli per vôlti	0,76
	Mattoni forti per vôlti	1,14
Fornaci di Castelrosso nel territorio di Chivasso	Mattoni per vôlti	1,52
Fornaci della Torrazza	Mattoni mezzanelli	0,96
	Mattoni forti	1,18
	Mattoni quasi ferrioli	1,41
	Mattoni mezzanelli per vôlti	1,43
	Mattoni forti per vôlti	2,00
Fornaci di San Giacomo	Mattoni per vôlti	1,44
Fornaci di Lamporo	Mattoni per vôlti	1,54
Fornaci di San Giovanni in territorio di Tronzano	Mattoni mezzanelli	0,59
	Mattoni forti	0,65
	Mattoni ferrioli	1,33
Fornaci della cascina del Cavallo in territorio di Tronzano	Mattoni mezzanelli	0,48
	Mattoni forti	0,62
	Mattoni ferrioli	1,50
Fornaci di Vettignè in territorio di Santhià	Mattoni mezzanelli	0,89
	Mattoni forti	1,12
Fornaci della Mirabella in territorio di Casanova	Mattoni mezzanelli	1,11
	Mattoni forti	1,59
	Mattoni ferrioli	1,91
Fornaci di Villerboit	Mattoni forti	0,99
Fornaci della cascina Cerotta in territorio di Biandrate	Mattoni mezzanelli	0,79
	Mattoni forti	0,90
Fornaci di Camiano in territorio di Novara	Mattoni mezzanelli	0,71
	Mattoni forti	1,07
Fornaci del Terdoppio in territorio di Novara	Mattoni mezzanelli	0,66
	Mattoni forti	0,80

(*) Edizione citata.

110. Scorrimento semplice. — Lo studio di questo fenomeno si presenta più difficile di quello relativo ai due casi precedenti, poichè difficilmente si possono fare misure esatte ed avere la sollecitazione a scorrimento semplice senza complicazione di altri sforzi. Inoltre, osserva il BRESSE, gl'ingegneri ed i fisici non si sono molto occupati di questo modo di rottura poichè in generale è meno da temere che i precedenti. Perciò che si riferisce alle grandi travi considerate nel loro insieme ciò può ritenersi vero, ma bisogna osservare che nella maggior parte dei collegamenti vi è sempre qualche pezzo sollecitato a scorrimento, per cui una conoscenza esatta degli effetti di questo modo speciale di sollecitazione sarebbe interessante. Diversi modi sono in uso per determinare il coefficiente di elasticità trasversale ed il carico di rottura per scorrimento: NAVIER, BARRÉ DE SAINT-VENANT, WINKLER, ecc., hanno determinato questi coefficienti in base soltanto alle idee di struttura molecolare dei corpi elastici. Trattando questo argomento si è visto che (Num. 44)

$$G=\frac{m}{2(m+1)}E.$$

Quando ha luogo soltanto una sollecitazione a scorrimento semplice, se si indica con ε il valore della massima dilatazione ammissibile nel materiale, è noto che il massimo scorrimento è espresso da (Num. 28)

$$g_m=2\varepsilon$$

per cui detto S il limite dei carichi permanenti per la sollecitazione a scorrimento, sarà

$$S=Gg_m=2G\varepsilon$$

e ricordando che

$$\varepsilon=\frac{R}{E}$$

in cui R è il limite dei carichi a tensione od a pressione (nell'ipotesi che i due valori limiti siano uguali) si ottiene

$$S=Gg_m=2G\varepsilon=2G\frac{R}{E}=2\frac{m}{2(m+1)}E\frac{R}{E}=\frac{m}{m+1}R.$$

Pei corpi isotropi $m=4$, quindi

$$G=\frac{2}{5}E \qquad S=\frac{4}{5}R.$$

Accettando il concetto esposto dal Professor Beltrami per stabilire l'equazione di coesione allora (Num. 74)

$$S=0{,}63\,R.$$

I corpi che s'impiegano nelle costruzioni non sono certamente isotropi ed alcuni ingegneri piuttosto che dedurre il valore di m da considerazioni teoriche preferiscono ritenere quello che vien dato dall'esperienza, cioè variabile fra 3 e 4; per cui, ritenendo $m=3$,

$$G=\frac{3}{8}E, \qquad S=\frac{3}{4}R.$$

In pratica l'ingegnere potrà seguire o l'una o l'altra soluzione secondochè la composizione del corpo si accosta assai all'isotropia, oppure se ne scosta. Le poche esperienze dirette eseguite su questo modo di rottura non solo non ismentiscono quelle previsioni teoriche, ma tendono anzi entro limiti larghi a provarle.

Altri ingegneri e fisici si sono occupati della determinazione sperimentale di G ed S, in due modi differenti:

a) Deducendoli da esperienze allo scorrimento semplice per mezzo delle formole $F=GAg$, $F=SA$ (Num. 64).

b) Deducendoli da esperienze eseguite su cilindri soggetti unicamente a torsione col mezzo delle due formole (Num. 64)

$$M_x=G\theta_x I_{xp} \qquad M_x=\frac{SI_{xp}}{r'}.$$

Il primo sistema si applica bene per misurare S, il secondo invece serve meglio per determinare G in causa delle difficoltà di misurare le deformazioni elastiche quando si verifica uno scorrimento semplice. Nel primo modo ha esperimentato Vicat operando sopra cubi di laterizî, gessi, cementi, e pietre calcari: i pezzi erano forati con due escavazioni cilindriche opposte e si misurava lo sforzo necessario a distaccare il cilindretto intermediario. Detto F lo sforzo, r il raggio del cilindro, e il suo spessore sarà $S=\frac{F}{2\Pi re}$.

Vicat ha ottenuto (*) i risultati seguenti:

Gesso ordinario	da 21×10^4 a 53×10^4
Mattone crudo	30×10^4
Malta di calce grassa di 14 anni . .	28×10^4
Pietra calcare.	121×10^4
Calcare litografico	239×10^4.

(*) Bresse, Opera citata, pag. 409.

Questo metodo di esperimentare però può convenire per corpi granulosi ma lascia incertezza nei corpi fibrosi, perchè la resistenza allo scorrimento potrebbe non essere costante sopra tutto il contorno del cilindretto esistente fra i due fori.

Le esperienze sulla resistenza allo sforzo tagliante dei chiodi ha fatto conoscere che nel ferro il carico di rottura non diversifica molto da quello corrispondente alla tensione, in guisa che è ben rappresentato dalla formola teorica

$$S = \frac{m}{m+1} R.$$

La resistenza agli sforzi tangenziali per la ghisa e pei legnami è stata dedotta ordinariamente col secondo processo, ossia ricorrendo ad esperienze sulla torsione. Con quest'ultimo metodo si è ottenuto:

Ferro	Valore di G	$6{,}7 \times 10^9$
Ghisa	» »	$2{,}0 \times 10^9$
Ferro e acciaio	Valore di S	4×10^6 (Morin)
Ghisa	» »	133×10^4 »
Quercia	» »	27×10^4
Abete	» »	29×10^4

Pel legno, Wertheim e Bouniceau hanno trovato per G dei valori che stanno fra $0{,}44 \times 10^8$ e $0{,}82 \times 10^8$. Secondo il Bouniceau si avrebbe per la rottura

Quercia di Normandia	$1{,}96 \times 10^6$
Abete rosso di Prussia	$1{,}29 \times 10^6$
Abete rosso di Norvegia	$0{,}80 \times 10^6$.

Abbiamo visto come nei solidi soggetti a flessione avvenga uno scorrimento longitudinale (Num. 75); se poche sono le esperienze eseguite sullo scorrimento semplice trasversale, molto meno sono quelle relative allo scorrimento longitudinale. In mancanza di dati precisi si potrà ritenere pei corpi granulosi che la resistenza sia uguale nei due sensi, mentre pei corpi fibrosi, come i legnami, essa è notevolmente diversa. Per la quercia e l'abete la resistenza allo scorrimento longitudinale non può ritenersi che di 30 o 40 Kg. per centimetro quadrato.

111. — Flessione o torsione. — Le esperienze fatte su questi fenomeni di deformazione complessa più che determinare dei coefficienti di resistenza hanno per iscopo di mostrare quale sia l'accordo che

passa fra la teoria della resistenza dei materiali, ed i fatti che si osservano. Come già fu accennato precedentemente sull'esattezza di cui le formole della teoria delle travature sono suscettibili, l'accordo si manifesta maggiore e più generale per la teoria della flessione che per quella della torsione, dove, come osserva nei suoi pregevoli lavori il Barré di Saint-Venant, la formola ordinaria non può presentare che grossolanamente il fenomeno ed è necessario correggerla con opportuni coefficienti. Senza riprendere ora questa discussione già svolta ai numeri 57 e 63 osserviamo che pel costruttore ciò che più interessa è lo studio dei solidi inflessi mentre la torsione non si presenta quasi mai; e se anche in certi casi si hanno da calcolare nell'impianto di fabbriche alberi di trasmissione, questi hanno sempre sezioni semplici tali che per essi la formola data dalla teoria approssimata della resistenza dei materiali è sufficientemente esatta o può essere facilmente corretta con un coefficiente; in generale s'incontrano solidi a sezione circolare, pei quali vale la formola (127) data nel capitolo V (Num. 64).

Molte sono le esperienze fatte e che si possono fare per vedere se la teoria della flessione corrisponde abbastanza ai fatti, basta per questo verificare se realmente avvengono, e se avvengono nella misura da essa prevista, le deformazioni e gli sforzi, che la teoria dimostra doversi verificare nei corpi soggetti a carichi, che diano luogo nelle varie sezioni a determinati momenti flettenti.

Ci limiteremo a citare le seguenti.

1° Duhamel du Monceau (*) prendendo travicelli uguali, alcuni intatti ed altri in cui erano state tagliate colla sega le fibre compresse quasi nella totalità ($^1/_3$ circa dell'altezza della sezione) riempiendo il vano del taglio con una sottile tavola in legno, riscontrò presso a poco la medesima resistenza alla flessione.

2° Carlo Dupin e Duleau esperimentando sopra solidi in ferro ed in legno a sezione rettangolare hanno trovato che l'allungamento dalla parte convessa è uguale all'accorciamento dalla parte concava, cosa che viene ad appoggiare l'ipotesi della conservazione delle sezioni piane (Num. 63). A questo proposito è interessante una esperienza fatta dal Colonnello Conti; in un solido in legno della lunghezza di 2 metri, erano stati praticati 7 incavi longitudinali su una delle sue faccie laterali; in questi incavi si collocavano delle asticelle di ferro fisse alla trave in un estremo, e portanti al-

(*) *Memoire de l'Académie des Sciences de Paris*, 1767.

l'altro una scala graduata, che col mezzo di noni fissi all'altra estremità della trave permettevano di valutare l'allungamento o l'accorciamento delle fibre corrispondenti ad ogni asticella. Il diagramma delle deformazioni delle fibre corrispondeva sufficientemente alle ipotesi ammesse, cioè le deformazioni erano proporzionali alla distanza delle fibre stesse dall'asse.

3° Il Generale Morin al Conservatorio di Arti e Mestieri ha ricorso al procedimento di verificare se in pratica si producevano le deformazioni dedotte dalla teoria ed ha verificato che le approssimazioni della resistenza dei materiali possono essere accettate, se non come verità assolute e matematiche, almeno come rappresentazioni sufficientemente esatte dei fatti reali.

4° Fairbairn, il Colonnello Conti e moltissimi altri hanno fatto esperienze analoghe, che troppo lungo sarebbe riportare, ci limiteremo ad accennare una disposizione poco comune che il Conti impiegava per moltiplicare la freccia. Egli invece di una sola trave o sbarra ne usava parecchie sovrapposte e successivamente fra loro collegate in *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* con molta solidità, come mostra schematicamente la (*Fig.* 113ª, *tav.* XVIII) in guisa che la freccia risultava, se *n* erano le barre riunite, $2n$ volte più grande di quella corrispondente alla prima sbarra.

Si è opposto qualche volta alla teoria della resistenza dei materiali che se si calcolano le deformazioni corrispondenti al carico di rottura di una trave e si cimenta questa alla rottura, i due risultati non coincidono. Questo fatto era facilmente prevedibile ed è lontano dall'infirmare la teoria poichè è noto che gli allungamenti sono proporzionali alle forze entro i limiti di elasticità, che in vicinanza alla rottura avvengono snervamenti, che alterano la omogeneità della materia e la pongono in condizioni affatto diverse da quelle che la teoria suppone; per conseguenza le formole nel caso della rottura non debbono dare risultati che largamente approssimati ed in certi casi molto diversi dal vero: i fatti e le formole non possono coincidere che entro i limiti d'elasticità ed è in questo campo che bisogna esperimentare. Il Bresse aggiunge un'osservazione molto interessante, ed è che la solidarietà delle fibre deve nella flessione dar luogo a delle reazioni mutue, che non esistono nell'estensione semplice e che potrebbero spiegare certe piccole differenze, che si presentano qualche volta nell'esame dei fatti sperimentali.

Dalla *Resistenza dei materiali* del Generale Morin riportiamo il seguente quadro che riassume i risultati delle osservazioni fatte su corpi soggetti a flessione in costruzioni eseguite in buone condizioni di stabilità.

Natura dei materiali		Sforzo unitario R per millimetro quadrato (tensione o compressione) ammissibile con sicurezza nella flessione	
		Materiale ordinario	Materiale scelto o costruzioni leggere
Ghisa	Ponti per ferrovie . .	2,00	»
	Ponti ordinari ed alberi per ruote idrauliche	3,00	7,50
	Pezzi ordinari per macchine	7,50	»
Ferro fucinato		6,00	8,00
Acciaio	di prima qualità . . .	16,70	22,00
	di qualità media . . .	12,50	16,60
Legna di quercia od abete . .		0,60	0,80

Per facilità di calcolo e perchè la differenza non è molto grande si ritengono uguali i due limiti di carico, sia che si tratti di tensione o di compressione: questa semplificazione è ormai da tempo consacrata dall'uso.

La torsione è un fenomeno pel quale le formole della resistenza dei materiali corrispondono meno esattamente che per le altre deformazioni ed ai numeri 57 e 63 ne abbiamo visto la ragione, quindi è che volendo fare esperienze sopra corpi soggetti a torsione per determinare il valore del coefficiente di elasticità tangenziale G bisognerà scegliere solidi cilindrici a sezione circolare, oppure introdurre nella formola usuale $M_x = G I_p \theta_x$ i coefficienti di correzione, che i bei lavori del Saint-Venant hanno mostrato essere necessarî affinchè la formola stessa sia verificata nel caso di un prisma a sezione trasversale non circolare: Barré de Saint-Venant ha dimostrato (*) che il coefficiente di correzione per la sezione rettangolare sarebbe 0,8435. Le stesse ragioni che consigliano di determinare E in base ad esperienze sulla tensione semplice piuttosto che partendo da esperienze fatte su travi inflesse, dove il fatto dell'estensione o compressione si presenta molto più complesso e varie influenze possono modificare il risultato, consiglierebbero pure di determinare il coefficiente G in base ad esperienze a

(*) Opera citata.

scorrimento semplice se non si presentassero quelle difficoltà di osservazione, che abbiamo accennato superiormente. In queste condizioni la determinazione di G può farsi nel modo seguente: si fissi ad un estremo A un cilindro $A\,B$ a sezione retta circolare ed all'altro estremo B si applichi un momento noto di torsione M_x, si misuri con un arco graduato lo spostamento angolare Θ della base B rispetto alla base A e se l è la lunghezza del cilindro

$$G=\frac{M_x l}{I_p \Theta}.$$

Altre esperienze sono state fatte per determinare il carico di rottura e più specialmente la resistenza degli alberi di trasmissione: dalla formola (127) (Num. 64)

$$M_x=\frac{S I_p}{r'}$$

noto il momento M_x si può determinare il valore corrispondente di S e trattandosi di solidi a sezione circolare si può facilmente esprimere in funzione del diametro e di un coefficiente α il momento di torsione, a cui essi possono resistere,

$$M_x=S\frac{I_p}{r'}=S\frac{\Pi}{16}d^3=\alpha d^3$$

da cui

$$d=\beta\sqrt[3]{M_x} \qquad (386).$$

I coefficienti α e β possono essere calcolati in base al valore di S, oppure determinati direttamente mediante esperienze speciali a seconda delle qualità dei materiali che si impiegano. Il Reuleaux nel suo trattato (*) ammette $S=6$ per gli alberi di trasmissione in ferro ed $S=3$ per gli alberi in ghisa e ricava i valori seguenti:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{per gli alberi in ferro} \ldots & d=0{,}95\sqrt[3]{M_x}=84{,}7\sqrt[3]{\frac{N}{\mu}} \\ \text{per gli alberi in ghisa} \ldots & d=1{,}19\sqrt[3]{M_x}=106{,}7\sqrt[3]{\frac{N}{\mu}} \end{array}\right\} (387).$$

Il Reuleaux osserva inoltre che perchè la trasmissione s'effettui convenientemente mediante un albero è opportuno che l'angolo Θ non superi $\theta=\frac{1}{4}$ di grado per metro corrente, quindi la formola

$$M_x=G I_p \theta_x=G I_p \frac{\Theta}{l}=G I_p \theta$$

(*) Reuleaux, *Le constructeur*, Parigi, pag. 244.

essendo $\theta = \frac{1}{4}$ diventa

$$M_x = \frac{G I_p}{4} = \frac{G \Pi d^4}{128}$$

da cui

$$d = \sqrt{\frac{128}{\Pi G}} \sqrt{M_x}$$

per gli alberi in ferro REULEAUX trova $d = 4{,}13 \sqrt[4]{M_x} = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{\mu}}$

per gli alberi in ghisa » » $d = 4{,}91 \sqrt[4]{M_x} = 143 \sqrt[4]{\frac{N}{\mu}}$

nelle quali N è il numero di cavalli, che l'albero deve trasmettere, μ il numero di giri dell'albero per minuto secondo, ed il rapporto $\frac{N}{\mu}$ si ottiene dall'equazione

$$M_x = \frac{60 \cdot 75 \cdot 1000}{2\Pi} \frac{N}{\mu} = 716200 \frac{N}{\mu} \qquad (388).$$

112. Influenza degli sforzi ripetuti. — Da molto tempo era stata riconosciuta l'influenza del modo d'applicazione dei carichi nella resistenza delle costruzioni. FAIRBAIRN nel 1849 fece notare l'influenza nella durata degli sforzi e della loro intermittenza, WILLIS quella della velocità, colla quale si muove il carico (esperimentando sopra rotaie metalliche); ma non è stato che verso il 1860 che si è cominciato a fare esperienze su larga scala per determinare l'effetto degli sforzi, che si ripetono succedendosi ad intervalli sopra una determinata membratura, ed ancora queste ricerche se tengono conto della ripetizione dei carichi non sono però state eseguite in modo da poter apprezzare l'influenza, che può avere il tempo percorso fra due successive azioni del sovraccarico.

Nel 1859 per incarico del Governo Prussiano WÖHLER intraprese una serie di accurate esperienze relative all'influenza degli sforzi ripetuti nella resistenza dei materiali e continuò fino al 1870, epoca in cui il Professore SPANNGEBERG dell'Accademia Industriale di Berlino rifece e controllò i risultati ottenuti dal WÖHLER, impiegando in questo lavoro tre anni. Da tutte queste esperienze risultarono alcune conseguenze, che sono conosciute dai costruttori sotto il nome di leggi del WÖHLER e sono le seguenti (*):

(*) WINKLER, *Determinazione degli sforzi molecolari ammissibili*, ecc.

1° Sotto l'influenza di uno sforzo ripetuto la rottura è prodotta da un carico minore di quello, che corrisponde al carico fisso e costante, o, come suol dirsi, al carico morto che produce la rottura.

2° Il numero delle azioni di uno sforzo ripetuto occorrente per produrre la rottura è tanto maggiore quanto più piccolo è il limite dello sforzo unitario massimo.

Alcuni assi in ferro inflessi in modo che il limite minore degli sforzi unitarî R fosse lo zero, ed il massimo R_2 si ruppero dopo n azioni, in cui R_2 ed n avevano i valori

$R_2 = 4500$	Kg. per centimetro quadrato	$n =$	0,17 milioni
$R_2 = 3500$	» » »	$n =$	0,45 »
$R_2 = 3000$	» » »	$n =$	0,86 »
$R_2 = 2500$	» » »	$n =$	1,50 »
$R_2 = 2200$	» » »	$n =$	48,20 »

3° Il numero delle azioni di uno sforzo ripetuto occorrente per produrre la rottura è tanto maggiore quanto maggiore è il limite inferiore del carico specifico od unitario restando invariato il limite superiore.

Siano R_1 il limite inferiore, R_2 il limite superiore dello sforzo unitario subìto dal materiale, ed n il numero delle azioni ripetute in milioni. Riportiamo come esempio la seguente serie di prove eseguite sopra acciaio fuso per molle.

R_1 per cent. quad.	R_2 per cent. quad.	n in milioni
1210	7300	0,06
2430	7300	0,15
3660	7300	0,40
4820	7300	$>19,67$

4° Per un dato valore del limite inferiore del carico unitario esiste un valore limite superiore che non produce mai la rottura qualunque sia il numero delle azioni dello sforzo attivo. Questo limite si potrebbe chiamare *resistenza attiva del materiale*; il Launhardt la denominò *Arbeitfestigkeit* (resistenza o solidità di lavoro) ed i due valori limiti corrispondenti si potrebbero chiamare limiti corrispondenti di *resistenza dinamica*.

5° La resistenza attiva è tanto più elevata quanto maggiore è il limite inferiore degli sforzi unitarî corrispondenti.

Se R_2 indica la resistenza attiva ed R_1 lo sforzo specifico minimo, pel ferro fucinato è risultato:

$R_1 = -1170$	$R_2 = +1170$	Kg. per centimetro quadrato
$R_1 = 0$	$R_2 = +2340$	» » »
$R_1 = +1750$	$R_2 = +3220$	» » »
$R_1 = +3290$	$R_2 = +3290$	» » »

Le leggi del Wöhler, confermate dai risultati ottenuti dallo Spanngeberg, conducono a questa conseguenza che non solo esiste uno sforzo limite capace di produrre la rottura a carico morto, ma esistono infinite coppie di valori corrispondenti (uno maggiore, l'altro inferiore) capace di produrre la rottura qualora vengano convenientemente ripetuti. La differenza fra questi due limiti sta in relazione col numero delle volte che occorre ripetere lo sforzo per produrre la rottura, poichè il limite massimo è tanto minore quanto è maggiore questa differenza, e il numero delle volte che bisogna ripetere lo sforzo è tanto maggiore quanto è minore la differenza stessa.

Molti si sono occupati di esprimere analiticamente col mezzo di una formola la relazione che passa fra due limiti qualsiansi di resistenza dinamica corrispondenti. Ci limiteremo a citare i procedimenti seguìti dal Winkler, dal Weyrauch come complemento del metodo Launhardt e dal Lippold, che coincide con quello esposto sotto altra forma dal Professore Clericetti.

Metodo di Winkler.

Indichiamo con R_1 lo sforzo specifico od unitario minimo, con R_2 lo sforzo specifico massimo, con R_i (resistenza iniziale) lo sforzo specifico massimo quando lo sforzo specifico minimo è uguale allo zero, con R_0 (resistenza di oscillazione) il valore assoluto di chilogrammi per cui $R_1 = -R_2$.

Il Winkler ha segnato in un piano tanti punti rappresentanti le esperienze del Wöhler per ciascun materiale prendendo come ordinate i valori di R_2 e come ascisse i valori di R_1. Dall'esame di questo quadro parve a lui che una linea retta potesse con sufficiente approssimazione rappresentare il fenomeno, quindi scrisse l'equazione

$$R_2 = b + \alpha R_1 \qquad (389)$$

riservandosi di determinare il valore dei coefficienti α e b in base alla media dei risultati delle esperienze.

Se si pone $R_1=0$ allora $R_2=b=R_i$ quindi

$$R_2=R_i+\alpha R_1$$

analogamente se si indica con R_s (resistenza statica) il carico di rottura a peso morto, cioè senza reiterazione alcuna, per esso $R_2=R_1$ quindi l'equazione precedente diventa

$$R_s=R_i+\alpha R_s$$

da cui si ricava

$$R_i=(1-\alpha)R_s \qquad \alpha=\frac{R_s-R_i}{R_s}$$

valore che sostituito nella equazione $R_2=R_i+\alpha R_1$ dà la relazione determinata dal WINKLER fra R_2 ed R_1

$$R_2=(1-\alpha)R_s+\alpha R_1. \tag{390}$$

Nel caso che si debbano considerare soltanto sforzi di tensione

pel ferro . . $\alpha=0{,}45$

per l'acciaio $\alpha=0{,}56$

quindi la formola generale diventa

$$\left.\begin{array}{l}\text{pel ferro . . } R_2=0{,}55R_s+0{,}45R_1\\ \text{per l'acciaio } R_2=0{,}44R_s+0{,}56R_1\end{array}\right\} \tag{391}$$

che servano per valori positivi di R_1 ed anche per valori negativi finchè $R_2>-R_1$.

Se invece si debbono prendere in esame sforzi di compressione, allora sostituendo α nella formola (389) con α_1 avremo analogamente, rappresentando con R'_s lo sforzo di rottura a compressione sotto l'azione di un carico morto,

$$R_2=(1-\alpha_1)R'_s+\alpha_1 R_1 \quad (*)$$

(*) Indicando con R_0 (resistenza di oscillazione) il valore del limite dinamico pel quale lo sforzo di tensione è uguale a quello di compressione dalla formola (389) nel caso della tensione si ottiene

$$R_0=(1-\alpha)R_s-\alpha R_0$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{pel ferro . . } \alpha_1 = 0{,}40 \text{ ed } R_2 = 0{,}60\, R'_s + 0{,}40\, R_1 \\ \text{per l'acciaio } \alpha_1 = 0{,}63 \text{ ed } R_2 = 0{,}37\, R'_s + 0{,}63\, R_1\end{array}\right\} (392).$$

La determinazione dell'area da assegnare alle membrature resistenti si fa nel modo seguente:

Sia n il coefficiente di stabilità, cioè il rapporto fra il carico di rottura a peso morto R_s e lo sforzo unitario massimo R_a che si ammette.

P_{max} e P_{min} gli sforzi massimi e minimi, che si esercitano nella membratura, che si considera.

P lo sforzo prodotto nella membratura sotto l'azione del solo carico fisso.

Q_2 e Q_1 gli sforzi massimi e minimi prodotti sotto l'azione del solo carico accidentale.

α ed α_1 il coefficiente della formola del WINKLER quando si verificano sforzi di tensione o di compressione,

ω l'area della sezione trasversale della membratura resistente.

Allora, se gli sforzi sono entrambi dello stesso segno,

$$P_{max} = P + Q_2 \qquad P_{min} = P$$

$$R_2 = \frac{n P_{max}}{\omega} \qquad R_1 = \frac{n P_{min}}{\omega}$$

e sostituendo questi valori nella (390) si ottiene

$$P_{max} = (1-\alpha)\frac{R_s}{n}\omega + \alpha P_{min}$$

da cui

$$\omega = n\frac{P_{max} - \alpha P_{min}}{(1-\alpha) R_s} \qquad (393)$$

---

ed in quello della compressione

$$R_0 = (1-\alpha_1) R'_s - \alpha_1 R_0.$$

Uguagliando i due valori di R_0 WINKLER ricava fra α ed α_1 la seguente relazione

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} R_s = \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1} R'_s$$

da cui

$$\alpha_1 = \frac{(1+\alpha) R'_s - (1-\alpha) R_s}{(1+\alpha) R'_s + (1-\alpha) R_s}.$$

e per la compressione

$$\omega = n \frac{P_{max} - \alpha_1 P_{min}}{(1-\alpha_1) R'_s} \qquad (394).$$

Sostituendo in queste formole a P_{max} e P_{min} i valori che loro corrispondono si ottengono le formole seguenti:

a) La membratura resistente sopporta sforzi che hanno tutti ugual segno.

Per la tensione $P_{min} = P$, $P_{max} = P + Q_2$

$$\omega = n \frac{P_{max} - \alpha P_{min}}{(1-\alpha) R_s} = n \frac{P}{R_s} + n \frac{Q_2}{(1-\alpha) R_s} \qquad (395)$$

per la compressione $P_{min} = P$, $P_{max} = P + Q_2$

$$\omega = n \frac{P_{max} - \alpha_1 P_{min}}{(1-\alpha_1) R_s} = n \frac{P}{R'_s} + n \frac{Q_2}{(1-\alpha_1) R'_s} \qquad (396).$$

b) La membratura resistente sopporta sforzi, che hanno segno diverso.

Se predomina la tensione

$$\left.\begin{aligned} \omega = n \frac{P_{max} - \alpha P_{min}}{(1-\alpha) R_s} = n \frac{P + Q_2 - \alpha (P - Q_1)}{(1-\alpha) R_s} = n \frac{P}{R_s} + \\ + n \frac{\alpha Q_1}{(1-\alpha) R_s} + n \frac{Q_2}{(1-\alpha) R_s} \end{aligned}\right\} (397).$$

Se predomina la compressione

$$\left.\begin{aligned} \omega = n \frac{P_{max} - \alpha_1 P_{min}}{(1-\alpha_1) R'_s} = n \frac{(P + Q_2) - \alpha_1 (P - Q_1)}{(1-\alpha_1) R'_s} = n \frac{P}{R'_s} + \\ + n \frac{\alpha_1 Q_1}{(1-\alpha) R'_s} + n \frac{Q_2}{(1-\alpha) R'_s} \end{aligned}\right\} (398).$$

Il Winkler poi osserva che per gli sforzi tangenziali possono servire le stesse formole qualora si abbia l'avvertenza di mettere in esse S_s sforzo di rottura a carico morto per scorrimento trasversale invece di R_s. Ciò risulta anche dalle considerazioni teoriche svolte nel numero 74 per i corpi isotropi; infatti si è trovato in generale $S = \frac{m}{m+1} R$.

Accettando per α ed α_1 i valori indicati superiormente e facendo pel ferro $\frac{R_s}{n} = 1400$ per centimetro quadrato il WINKLER dà pel calcolo delle sezioni resistenti delle membrature costruite con questo materiale:

Quando predomina lo sforzo di tensione

$$\omega = \frac{1{,}82\,P_{max} - 0{,}82\,P_{min}}{14000} = \frac{P}{1400} + \frac{Q_2}{770} + \frac{Q_1}{1700}$$

quando predomina lo sforzo di compressione

$$\omega = \frac{1{,}67\,P_{max} - 0{,}67\,P_{min}}{1200} = \frac{P}{1200} + \frac{Q_2}{720} + \frac{Q_1}{1800}.$$

Quando debba aver luogo solo trazione o solo compressione si porrà $Q_1 = 0$.

La legge del WINKLER non può essere vera per valori positivi e negativi di R_1 ed R_2 perchè nella tensione per $R_2 = R_s$ anche $R_1 = R_s$ e nella compressione per $R_2 = R'_s$ anche $R_1 = R'_s$ quindi la retta, che secondo il WINKLER rappresenterebbe la legge del WÖHLER, dovrebbe passare per l'origine delle coordinate, cioè per $R_1 = 0$ dovrebbe essere $R_2 = 0$ ciò che è assurdo e contrario all'esperienza. Il WINKLER però opina che malgrado questo difetto le sue formole siano accettabili perchè rappresentano già un primo progresso sul metodo usuale di conservare costante il limite dei carichi permanenti in tutti i casi e sono semplici assai e facili ad entrare nell'uso comune. Si può aggiungere che esse sono approssimate pei valori alti di R_1 ed R_2 pei quali specialmente queste formole hanno interesse. Sarebbe certamente più esatto (osserva il WINKLER) considerare espressa la legge del WÖHLER da una curva come fa, per es., il GERBER (rappresentata nella (*Fig.* 115ª, *tav.* XVIII) con un tratto ed un punto) od almeno bisogna considerare sempre due rette, una corrispondente agli sforzi positivi di R_2 e l'altra agli sforzi negativi. In altri termini, secondo chè si debbono considerare per $R_2 > \pm R_1$ sforzi di tensione o di compressione tener conto della retta ab oppure $a'b'$ (*Fig.* 115ª) (*) come si è fatto implicitamente cambiando il valore di α in α_1 nella formola (389).

(*) Estratta dalla monografia citata del WINKLER.

Metodo di Launhardt e Weyrauch.

Qualunque sia la legge che lega fra loro i valori di R_2 ed R_1 si potrà sempre porre

$$R_2 = R_i + \varphi\left(\frac{R_1}{R_2}\right) \qquad (399).$$

In una ricerca di prima approssimazione secondo LAUNHARDT e WEYRAUCH si potrà ritenere

$$\varphi\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = \alpha \frac{R_1}{R_2}$$

quindi la formola superiore diventa

$$R_2 = R_i + \alpha \frac{R_1}{R_2} \qquad (400).$$

Nel caso che R_1 ed R_2 siano entrambi sforzi di tensione o di compressione se si fa $R_1 = R_s$ anche $R_2 = R_s$ quindi

$$\alpha = (R_s - R_i).$$

Se invece gli sforzi R_1 ed R_2 hanno segno diverso allora indicando con R_o (resistenza d'oscillazione) il valore per cui $R_2 = -R_1$ dalla (400) si ricava

$$\alpha = R_i - R_o$$

e la formola generale diventa rispettivamente nei due casi

$$R_2 = R_i\left(1 + \frac{R_s - R_i}{R_i}\frac{R_1}{R_2}\right) \qquad (401)$$

$$R_2 = R_i\left(1 + \frac{R_o - R_i}{R_i}\frac{R_1}{R_2}\right) \qquad (402)$$

in cui in luogo di R_1 ed R_2 dovremo porre come precedentemente

$$R_1 = \frac{n P_{min}}{\omega} \qquad R_2 = \frac{n P_{max}}{\omega}.$$

Usando di queste formole le sezioni resistenti si ottengono con facilità nel modo seguente. Supponiamo che si voglia calcolare l'area trasversale di una membratura in ferro pel quale l'esperienza ha dato

$$R_s = 32{,}90 \qquad R_i = 21{,}95 \qquad R_o = 11{,}70$$

allora con molta approssimazione

$$\frac{R_s - R_i}{R_i} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{R_i - R_o}{R_i} = \frac{7}{15} = (\text{per appross.}) = \frac{1}{2}$$

ed avremo nei due casi le formole seguenti

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_{max}}{\omega} &= \frac{21{,}90}{n}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{P_{min}}{P_{max}}\right) \\ \frac{P_{max}}{\omega} &= \frac{21{,}90}{n}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{P_{min}}{P_{max}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (403).$$

Il Weyrauch consiglia di prendere pel coefficiente di stabilità n il valore di 3 quindi, trascurando le frazioni, le formole precedenti diventano

$$\frac{P_{max}}{\omega} = 7\left(1 + \frac{1}{2}\frac{P_{min}}{P_{max}}\right) \quad (404)$$

$$\frac{P_{max}}{\omega} = 7\left(1 - \frac{1}{2}\frac{P_{min}}{P_{max}}\right) \quad (405).$$

Per l'acciaio Weyrauch ottiene nei due casi particolari che si abbiano solo sforzi del medesimo segno oppure di segno diverso

$$\frac{R_s}{n} = \frac{P_{max}}{\omega} = 11\left(1 + \frac{9}{11}\frac{P_{min}}{P_{max}}\right) \quad (406)$$

$$\frac{R_s}{n} = \frac{P_{max}}{\omega} = 11\left(1 - \frac{5}{11}\frac{P_{min}}{P_{max}}\right) \quad (407).$$

I risultati dati da questa formola concordano sufficientemente con quelli forniti direttamente dalle esperienze del Wöhler, essa ha poi anche il vantaggio di essere di uso facile e di non complicare notevolmente i calcoli di resistenza. Il Winkler osserva che i risultati dati dalla formola del Weyrauch differiscono al massimo nel caso in cui si debbano considerare sforzi di segno diverso del 7 % da quelli dati dalla formola, che esso ha proposto e soltanto del 3 % nel caso che si debbano considerare sforzi di ugual segno.

Metodo di Lippold.

Richiamiamo quanto è stato detto nei numeri precedenti, cioè che entro il limite di elasticità le deformazioni sono sempre proporzionali alle forze, che se è superato il limite di elasticità si producono due deformazioni una permanente e l'altra elastica, quest'ultima si conserva ancora proporzionale alle forze che la producono, la prima invece una volta prodotta, non aumenta nè diminuisce se si sottopone il corpo a nuovi sforzi, purchè la loro intensità sia inferiore a quella che prima ha dato origine alla deformazione permanente, aumenta invece se questo limite è superato (legge di Gerstner). La produzione delle deformazioni permanenti importa un certo lavoro per vincere le aderenze intermolecolari, Lippold ha creduto di poter stabilire una formola, che tenga conto dell'effetto dei carichi ripetuti basandosi sopra questo concetto. Egli osserva che durante l'azione di un carico sopra un corpo si debbono distinguere due lavori, quello dovuto alla deformazione elastica e quello dovuto alla deformazione permanente. Poichè quest'ultima deformazione non scompare al ripetersi dell'azione del carico rimane disponibile una parte di lavoro motore (quella che aveva prodotta la deformazione permanente) che produrrà un'ulteriore deformazione elastica e permanente e così di seguito finchè non si sia prodotta tutta la deformazione permanente corrispondente a quella forza in guisa che il lavoro motore prodotto da nuove azioni sia tutto assorbito dal lavoro dovuto alle deformazioni elastiche. Ciò equivale a supporre concordemente ai risultati delle esperienze, che gli sforzi esterni applicati ad un corpo elastico vanno considerati come cause modificatrici dell'equilibrio molecolare, che il loro effetto è insensibile per carichi inferiori a quelli, che producono deformazioni corrispondenti al limite d'elasticità, e che esso invece diventa sensibile ed anche notevole oltre questo limite e finalmente che la deformazione permanente corrisponde ad una determinata quantità di lavoro assorbito per cui un carico

agente istantaneamente non potrà più produrre deformazione permanente quando la deformazione elastica è arrivata ad essere doppia di quella che gli corrisponderebbe allo stato di equilibrio statico. Lippold riassume questi concetti nel seguente principio (*): *Qualunque sia il numero delle ripetizioni, carichi agenti istantaneamente sopra un corpo non possono produrre una deformazione permanente finchè la loro intensità non oltrepassa la metà del carico, che corrisponde al limite di elasticità.* L'azione ripetuta d'un carico potendo elevare il limite d'elasticità fino al limite di rottura (legge di Gerstner) così si può concludere che *qualunque sia il numero delle ripetizioni, carichi agenti istantaneamente sopra un corpo non possono produrne la rottura se la loro intensità non oltrepassa la metà di quella corrispondente alla rottura a carico morto.* Ciò equivale a dire che anche oltre il limite di elasticità con un carico istantaneo sufficientemente ripetuto si può al massimo produrre una deformazione e quindi anche una tensione molecolare doppia di quella, che gli corrisponderebbe allo stato di equilibrio, facendo astrazione dalla deformazione permanente. Informandosi a queste considerazioni Lippold ritiene che sia più opportuno fissare il limite del lavoro di deformazione, che quello dei carichi massimi, per cui, ritenendo uguale all'unità l'area resistente e la lunghezza dell'elemento di volume che si considera, conservando i simboli usati superiormente, perchè un corpo sotto l'azione di carichi istantanei ripetuti sia in buone condizioni di resistenza dovrà essere il lavoro $L < \frac{R_a^2}{2E}$, in cui R_a esprime il massimo sforzo unitario ammissibile nel materiale. Poniamo $R_2 - R_1 = \Delta$; il massimo lavoro che potrà prodursi per la ripetizione dell'azione istantanea dovuta all'aumento Δ dello sforzo unitario sarà dato dal prodotto della deformazione elastica pel carico stesso, per cui sarà

$$\frac{1}{E}(R_a - R_1)(R_1 + \Delta) \qquad (408).$$

Aggiungendo il lavoro di deformazione dovuto all'azione statica del carico $\frac{R_1^2}{2E}$ l'equazione di Lippold assume la forma seguente

$$\frac{R_a^2}{2E} = \frac{R_1^2}{2E} + \frac{R_a - R_1}{E}(R_1 + \Delta) = \frac{R_1}{2E} + \frac{2R_1 R_a}{2E} - \frac{2R_1^2}{2E} + \frac{\Delta}{E}(R_a - R_1)$$

(*) *Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwen*, 1879.

od anche

$$R_a^2 - 2R_1R_a + R_1^2 = 2\Delta(R_a - R_1)$$

e togliendo $R_a - R_1$ fattore comune rimane

$$\Delta = \frac{R_a - R_1}{2} \tag{409}$$

od anche, ricordando che $\Delta = R_2 - R_1$

$$2R_2 - R_1 = R_a \tag{410}$$

ossia

$$R_2 = \frac{R_a}{2 - \frac{R_1}{R_2}} = \frac{R_a}{2 - \frac{P_{min}}{P_{max}}} = \frac{R_a}{2 - \phi} \tag{411}$$

indicando con ϕ il rapporto fra P_{min} e P_{max}.

Abbiamo già visto che

$$R_2 = \frac{n P_{max}}{\omega}$$

e che

$$P_{max} = P + Q_2 = P_2 = P_1 + \Delta P_1 \qquad P_{min} = P + Q_1 = P_1$$

quindi risulta

$$n\frac{Q_2 + P}{\omega} = \frac{R_a}{2 - \frac{P + Q_1}{P + Q_2}} = \frac{R_a}{2 - \frac{P_1}{P_1 + \Delta P}}$$

e finalmente

$$\omega = n\frac{2\Delta P_1 \pm P_1}{R_a} \tag{412}$$

in cui dovrà esser scelto il segno + od il segno — secondochè P_{min} e P_{max} hanno ugual segno o segno diverso.

Il Professor Clericetti (*) è arrivato ad un risultato analogo osservando che l'effetto di un carico istantaneo è di produrre una deformazione, e per conseguenza un carico unitario doppio di quello corrispondente allo stato statico. Ciò si verifica sempre entro il limite di elasticità ed in causa della legge di Gerstner, come è già stato osservato, anche oltre questo limite purchè l'azione

(*) *Politecnico*, anno 1881.

dello sforzo sia sufficientemente ripetuta ed istantanea, quindi perchè non sia superato il limite R_a dovrà essere

$$R_1 + 2\Delta R_1 = R_a \qquad (413).$$

Prescindendo dall'effetto dinamico

$$R_1 + \Delta R_1 = R_2$$

eliminando ΔR_1 fra le due equazioni rimane

$$2R_2 - R_1 = R_a \qquad (410)$$

precisamente come si è ottenuto colla formola del Lippold e quindi

$$\omega = n \frac{2\Delta P_1 \pm P_1}{R_a} \qquad (412).$$

Sono stati proposti molti altri metodi per tener conto ed interpretare la legge del Wöhler; ricordiamo fra gli altri quelli del Gerber, Müller, Schaeffer, Ritter, ecc. (*), ma non crediamo necessario riportarli poichè rappresentano altrettante interpretazioni diverse dello stesso fatto senza arrivare a conclusioni, che per la loro semplicità o per l'esattezza colla quale interpretano la legge del Wöhler, possano farli preferire in modo asssoluto a quelli svolti. La loro esposizione non avrebbe interesse che per coloro, che desiderassero fare uno studio speciale su questo argomento, ed in tal caso sarebbe sempre preferibile consultare le memorie speciali ed i lavori originali dei varî autori, che hanno proposto, i diversi metodi. Qui ci limitiamo ad osservare, che un giudizio sulla preferenza da accordarsi all'una od all'altra formola sembra prematuro, pare però che l'uso accenni ad introdurre nella pratica quelle proposte dal Winkler e dal Weyrauch. La prima ha il vantaggio della grande semplicità, la seconda di corrispondere meglio ai risultati delle esperienze senza complicare notevolmente i calcoli. Sotto questo doppio punto di vista crediamo sia anche raccomandabile la formola di Lippold e Clericetti, poichè essa è di uso facile, e dà risultati molto esatti come risulta dal diagramma che riportiamo nella (*Fig.* 116ª, *tav.* XVIII) dove sono messi a confronto i risultati ottenuti colle tre formole rappresentati col mezzo di tre diagrammi (**). Per l'uso poi di queste formole non potrà mai sor-

(*) Winkler, Opera citata.
(**) Ceradini, Opera citata.

gere difficoltà od ambiguità alcuna: membratura per membratura si calcoli il valore di R_2 e quindi si determini la sezione resistente ω mediante la formola

$$R_2 \omega = P_{max}.$$

È però opportuno avvertire che la legge del Wöhler risolve il problema degli sforzi ripetuti soltanto parzialmente, perchè fu determinata esperimentando sopra corpi, in cui le azioni dinamiche si ripetevano ad intervalli brevissimi ed uguali. Essa quindi potrà fornire una guida sicura pel calcolo di certe costruzioni speciali, particolarmente organi di macchine in movimento, assi, molle, ecc., ma non può essere accettata con ugual sicurezza quando si debbano considerare costruzioni, in cui gli sforzi si ripetono a lunghi intervalli.

Un'osservazione analoga può farsi per le deformazioni, che hanno luogo in causa delle vibrazioni prodotte da urti, che hanno come carattere di essere estremamente rapide e decrescenti. Noi pensiamo di non poter meglio finire le nostre osservazioni su questo argomento che riportando le seguenti parole di Barré de Saint-Venant (*). Delle esperienze, di cui è difficile tracciare il programma, ma dove si dovrà specialmente tener conto della misura delle deformazioni permanenti riguardate come indizio di un principio di snervamento e di disaggregazione, sono necessarie per servire di guida alla teoria, che dovrà, qualunque ne siano i risultati, guardarsi di abdicare al suo ufficio e rinunziare alle considerazioni ed ai calcoli pazienti, atti a stabilire idee chiare e precise intorno ai fenomeni molecolari.

113. Coefficiente di sicurezza e conclusioni pratiche relative alla determinazione del limite dei carichi permanenti. — L'esame dei risultati sperimentali esposti nei numeri precedenti lascia facilmente comprendere come la determinazione del valore dello sforzo unitario massimo ammissibile per ogni materiale debba presentare qualche difficoltà e dar luogo in molti casi ad opinioni diverse. I primi costruttori, che incominciarono ad introdurre criterî razionali nella determinazione delle dimensioni delle varie parti di una costruzione, assunsero in generale per R_a, limite dei carichi permanenti unitarî ammissibile allo stato statico, una determinata frazione del carico R_s che produce la rottura a carico morto. Il rapporto $\frac{1}{n}$ fra il valore di R_a e quello di R_s fu detto coefficiente di sicurezza ed invalse l'uso

(*) *Note* alla *Teoria dell'elasticità dei corpi solidi* di Clebsh.

di stabilire per i metalli ed i legnami $\frac{1}{n}=\frac{R_a}{R_s}=\frac{1}{6}$ e per le murature in genere $\frac{1}{n}=\frac{R_a}{R_s}=\frac{1}{10}$. Molto probabilmente influì sulla scelta di questi numeri la considerazione che l'azione di un carico di intensità costante ha per effetto di duplicare le deformazioni corrispondenti allo stato di equilibrio e che in nessuna costruzione è opportuno superare il limite di elasticità. Infatti troviamo spesso fissato pel ferro un carico R_a variabile tra 6 ed 8 chilogrammi per millimetro quadrato, ed appunto per un carico variabile fra 14 e 16 chilogrammi incominciano a manifestarsi le deformazioni permanenti. Il progredire delle ricerche teoriche e sperimentali sulla resistenza dei materiali ed il grande sviluppo preso dalle costruzioni eseguite negli ultimi cinquant'anni, specialmente per ciò che si riferisce all'uso dei metalli, ha messo in evidenza che un unico valore pel coefficiente di sicurezza non poteva convenire a tutte le costruzioni. L'insieme delle nozioni svolte nei capitoli V e VI mostrano come siano differenti le deformazioni, che avvengono per l'influenza di un carico agente allo stato statico oppure allo stato dinamico, e le considerazioni svolte nel numero precedente fanno vedere quale perniciosa influenza possa avere sulla coesione il ripetersi delle deformazioni prodotte dai carichi. Finalmente a determinare l'effetto di un carico sopra una costruzione entra anche il rapporto che passa fra il peso, che agisce permanentemente sulla medesima (peso proprio) e le forze che possono accidentalmente o periodicamente influenzarla. Si comprende facilmente che il coefficiente di sicurezza debba avere un valore maggiore, e quindi il coefficiente o modulo di stabilità (che è il valore reciproco del coefficiente di sicurezza) un valore minore, per le costruzioni, che non vanno soggette a carichi accidentali oppure che sono sottoposte soltanto a carichi accidentali, che abbiano poca importanza rispetto al peso proprio del sistema, che non in quelle, in cui i carichi accidentali hanno maggior importanza. Il coefficiente di stabilità deve poi aumentare ancora quando i carichi accidentali oltre essere importanti producono anche sollecitazioni dinamiche, quali appunto sarebbero, urti, ripetizioni, ecc. È per questa ragione che nei solai in ferro troviamo spesso usato per valor limite dei carichi permanenti per millimetro quadrato $R_a=8$ ed anche $R_a=10$ mentre pei piccoli ponti non si supera mai il valore $R_a=6$ e raramente anche pei grandi ponti si arriva ad avere $R_a=8$. Il criterio di stabilità per consenso unanime dei costruttori deve riscontrarsi in ciò che una costruzione possa in qualsiasi eventualità possibile di carico o di sforzi adempiere allo

scopo, pel quale venne eseguita, senza che siano alterate in modo alcuno le sue condizioni iniziali di resistenza. Varie circostanze si oppongono a che sia possibile conseguire completamente questo risultato, specialmente per le costruzioni metalliche dove più particolarmente influiscono certe cause, il cui effetto non è ben noto. Vanno considerate fra queste l'azione lenta delle circostanze climatologiche, le variazioni di forma dovute ai cambiamenti di temperatura, certe azioni chimiche ed elettriche, che soltanto si suppongono e di cui non si è in grado di giudicare l'effetto, finalmente una certa tendenza, che qualche fatto osservato farebbe supporre esistere nei metalli, di cambiare il loro stato molecolare in guisa che alla fine di un tempo più o meno lungo, certe parti, che avevano una struttura fibrosa, finiscono per avere invece una composizione cristallina. Allo stato attuale delle cognizioni l'ingegnere non può assoggettare a calcolo queste influenze e soltanto può tenerne conto approssimativo e sommario nelle costruzioni destinate a lunga durata scegliendo il limite R_a ammissibile pei carichi permanenti alquanto inferiore a quello, che sceglierebbe indipendentemente da queste circostanze, lasciando cioè un certo margine per ovviare all'effetto delle cause imprevedute nei calcoli di resistenza. Questa cautela non è più necessaria per le opere destinate ad una durata limitata ed in tal caso non sarà necessario portare alcuna correzione al valore limite R_a ammissibile pei carichi unitarî. Ciò equivale ad introdurre nelle formole di resistenza un coefficiente di correzione che chiameremo coefficiente di sicurezza in relazione alla durata. Ci mancano criterî per fissarne anche solo con larghissima approssimazione il valore, tuttavia potrà bastare per ora, e non si sarà forse molto lontano dal vero entro i limiti di durata ordinariamente richiesti nelle opere stabili, e particolarmente nelle costruzioni metalliche, fissando, a seconda dei casi e degli scopi che l'ingegnere si propone, il valore di questo coefficiente fra 0,8 ed 1,00 (*). L'esame del materiale impiegato, le condizioni probabili di sorveglianza, le circostanze climatologiche, l'esame di costruzioni poste in condizioni analoghe ed il senso pratico del costruttore saranno altrettanti criterî, che guideranno l'ingegnere nell'assegnare il valore di questo coefficiente. Indipendentemente da queste considerazioni perchè non siano mai alterate le condizioni iniziali

---

(*) Sarebbe cosa interessantissima che gli ingegneri ed i costruttori raccogliessero osservazioni e dati relativamente a questo argomento: ciò potrebbe essere fatto specialmente ed anche senza gravi difficoltà dalle grandi Compagnie esercenti estese linee ferroviarie.

di resistenza bisogna che al succedersi degli sforzi, che agiscono sopra una costruzione, questa ritorni allo stato primitivo, cioè che non sia mai sorpassato il limite di elasticità per l'effetto combinato dei carichi fissi, accidentali ed azioni dinamiche varie ordinarie e straordinarie. In qualche caso particolare (opere aventi carattere provvisorio) in base alle osservazioni già fatte più volte potrà anche essere superato il limite di elasticità ammettendo eventualmente una leggera deformazione permanente, essa però non dovrà mai essere tale da dar origine ad un principio sensibile di snervamento nel materiale. Le formole del capitolo V permettono di determinare le sezioni resistenti di una travatura in modo che non sia mai superato un determinato valore dello sforzo unitario subìto dal materiale, le formole del capitolo VI permettono di valutare l'effetto delle sollecitazioni dinamiche, che nelle costruzioni civili si possono in generale ragguagliare ad un aumento ideale del sovraccarico. Finalmente le cose dette nel presente capitolo sono di guida sicura per fissare il valore del carico di rottura R_s, del carico R_e corrispondente al limite di elasticità e quindi anche il carico unitario ammissibile R_a tenendo conto dell'effetto della ripetizione degli sforzi: valore che in determinate circostanze va moltiplicato per un coefficiente particolare di sicurezza in relazione alle circostanze imprevedute non introdotte nei calcoli di resistenza. Da questa discussione risulta che per una determinata costruzione o parte di costruzione stabile il limite ammissibile per gli sforzi unitarî R_a od anche il limite dei carichi permanenti, e quindi la massima deformazione corrispondente, debbono essere fissati tenendo conto delle seguenti avvertenze:

a) In qualsiasi eventualità non dovrà mai essere raggiunto il valore R_e corrispondente al limite d'elasticità.

b) Debbono essere valutati gli effetti prodotti dalle sollecitazioni dinamiche; in modo speciale poi per gli urti bisogna distinguere il caso in cui l'urto avvenga per l'effetto di una massa urtante animata da piccola velocità oppure molto veloce. Nel primo caso l'effetto dell'urto è sensibilmente equivalente ad un aumento ideale del sovraccarico, nel secondo invece è necessario fare ricerche speciali sulle deformazioni, che avvengono nel punto urtato. In generale nelle costruzioni civili si verifica il primo caso ed abbiamo visto che pei ponti si tiene conto sufficientemente di questa speciale sollecitazione moltiplicando il sovraccarico per $(1+\gamma)$ in cui γ varia da 0,30 a 0,20 secondochè si tratta di ponti in ferro per ferrovie o per strade ordinarie.

c) Debbono essere valutati gli effetti della ripetizione degli

sforzi calcolando le aree resistenti col mezzo di una delle formole, che interpretano la legge del Wöhler, per es., quella del Weyrauch, Winkler, Clericetti e Lippold, ecc., avvertendo che queste formole corrispondono ad esperienze fatte su corpi, che si assoggettavano a sforzi sempre uguali ripetuti a brevi intervalli pure uguali fra loro. Quindi si avranno risultati esatti specialmente nel calcolo delle sezioni resistenti di certi pezzi per macchine, ruote, assi, molle, ecc., mentre non si può sperare di raggiungere lo stesso risultato nelle costruzioni civili ordinarie, dove entra il tempo come elemento importantissimo fra un'azione del carico ed una successiva non solo, ma dove le diverse azioni non hanno sempre ugual importanza. Bisogna anche non dimenticare il modo particolare d'agire delle vibrazioni, che costituiscono uno scuotimento molecolare rapidissimo e di intensità rapidamente decrescente, sul cui effetto le formole dedotte dalla legge del Wöhler non dànno alcuna indicazione.

d) Finalmente bisogna lasciare un margine per l'impreveduto comprendendo sotto questo nome una serie di cause varie, male definibili e da valutarsi caso per caso; azioni straordinarie dovute ad impetuosissimi uragani, quando il loro possibile effetto non fu introdotto nei calcoli di resistenza, urti eventuali e poco probabili ed altre azioni meccaniche difficili a prodursi tutte contemporaneamente, degradazione del materiale dovuto a cause climatologiche, termiche, chimiche, possibili cambiamenti dello stato molecolare del corpo. Di queste ultime influenze bisogna specialmente tener conto per quelle costruzioni che sono destinate ad una lunga durata, mentre non sarà sempre necessario di farlo, o potrà essere fatto in grado minore, per opere destinate a scomparire in un periodo più o meno lungo. In generale si potrà valutare in complesso l'effetto di tutte queste cause moltiplicando il valore di R_e per un coefficiente di sicurezza o riduzione da determinarsi volta per volta coi criterî anzidetti a seconda delle circostanze e che potrà probabilmente variare da 0,8 ad 1,00 (*). Non può dirsi che questi criterî siano diventati comuni ed entrati nella pratica, dove anzi

(*) Lippold fissa il valore dello sforzo unitario massimo ammissibile R_a partendo dal criterio che il modulo di *resilienza* (e quindi il lavoro di deformazione) sia la metà di quello corrispondente al limite di elasticità per le opere stabili e durature e la metà di quello di rottura per le opere provvisorie (Lippold, Memoria citata, ecc., Ceradini, Opera citata). Esso derivò questa condizione dalla considerazione che il lavoro prodotto da carichi istantanei è doppio di quello corrispondente allo stato di equilibrio (Num. 13 e 41); accettando questo concetto deve essere $\frac{R_a^2}{E} = \frac{R_e^2}{2E}$ ossia $R_a = 0{,}7\ R_e$

continua a prevalere l'uso di fissare il valore di R_a moltiplicando per un determinato coefficiente di sicurezza il carico di rottura. L'uso di un coefficiente di sicurezza costante per un determinato materiale per tutte le costruzioni è da escludersi completamente come contrario alle risultanze della teoria e della pratica, e riteniamo sia ormai venuto il tempo, in cui si debbono introdurre nell'esercizio dell'arte dell'ingegnere criterî più razionali per la determinazione del limite dei carichi permanenti informandosi alle considerazioni fatte superiormente. In ogni caso poi si potrà come primo passo su questa via accettare l'uso ormai invalso di far variare il coefficiente di sicurezza in modo da tener conto largamente delle osservazioni fatte per le costruzioni ordinarie di uso corrente e che si trovano in condizioni analoghe di sollecitazione, riservando uno studio certamente più lungo, ma anche più accurato, per quelle opere grandiose o straordinarie, che rivestano carattere di grande importanza o che sortono dalle circostanze usuali, per le quali non è possibile con un solo coefficiente di sicurezza assunto per confronto tener conto in blocco di tutte le cause di sollecitazione o deperimento superiormente accennate. In via generale poi riteniamo che sia assolutamente necessario introdurre nella pratica per la determinazione degli sforzi unitarî limiti e dei coefficienti di sicurezza in qualsiasi genere di costruzione l'uso di criterî dedotti da uno studio accurato delle proprietà dei materiali resistenti e dell'azione delle forze esterne. Ciò avrà indubbiamente il vantaggio di dare agli ingegneri una guida sicura, razionale ed applicabile variamente a tutti i casi, di volgarizzare procedimenti di calcolo fondati su considerazioni dedotte da uno studio esatto dei fatti, che si presentano in natura, elevando e rendendo più precisa ogni discussione intorno a questioni relative a tali argomenti e finalmente di preparare il terreno ad ulteriori progressi della scienza delle costruzioni.

114. Fluidità dei corpi solidi. — L'esame dei fatti, che si verificano in un corpo solido sotto l'azione di sforzi corrispondenti al limite di resistenza, può sembrare estraneo alla scienza delle costruzioni, la quale, come si è già detto più volte, non prende in considerazione che le deformazioni elastiche, e soltanto tien conto in via eccezionale di ciò che avviene in un corpo quando le deformazioni oltrepassano il limite di elasticità. Tuttavia per alcuni

---

per le opere stabili ed $R_a = 0{,}7\,R_s$ per le opere provvisorie. È opportuno osservare che questa formola da sola non prende in considerazione che l'effetto dei carichi istantanei e non quello degli urti, dei carichi mobili e delle altre sollecitazioni esaminate in questo e nel capitolo precedente.

casi particolari, relativi specialmente alla perforazione delle lamiere ed alla lavorazione dei metalli, presenta un certo interesse esaminare gli effetti che sforzi sufficientemente grandi perchè i corpi siano sollecitati alla rottura possono produrre sui medesimi in determinate circostanze. Se gli sforzi molecolari tendono a staccare gli elementi materiali gli uni dagli altri agendo per tensione (almeno in una direzione) e se essi sono tali da raggiungere e sorpassare il limite di resistenza, il corpo si separa in sistemi distinti dando luogo al fenomeno della rottura, e le varie parti non hanno più alcuna azione reciproca. Lo stesso non può dirsi quando le azioni molecolari agenti intorno ad ogni elemento di volume sono tutti sforzi di compressione in guisa che siano impedite o diminuite le deformazioni laterali. In tal caso considerando una sezione piana del corpo determinata dalla direzione di due forze molecolari principali corrispondenti ad un punto ed indicando con p_{xx} e p_{yy} le componenti normali agenti sopra due elementi piani ortogonali fra loro ed alla sezione considerata e con p_{xy} la componente tangenziale, abbiamo dimostrato al numero 22 (Pag. 54) che lo sforzo tangenziale τ sopra un elemento piano qualsiasi, che faccia colla direzione della forza principale σ_1 un angolo α', è dato da

$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \operatorname{sen} 2\alpha'$$

ed il massimo valore τ_1 dello sforzo tangenziale τ si ottiene quando $\alpha' = 45$, cioè risulta

$$\tau_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

D'altra parte le formole del numero 21 (Pag. 59) (vedi anche le formole 291, pag. 344) dànno

$$\sigma_1 = \frac{p_{xx} + p_{yy} + \sqrt{(p_{xx} - p_{yy})^2 + 4p_{xy}^2}}{2}$$

$$\sigma_2 = \frac{p_{xx} + p_{yy} - \sqrt{(p_{xx} - p_{yy})^2 + 4p_{xy}^2}}{2}$$

quindi

$$\tau_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(p_{xx} - p_{yy})^2 + 4p_{xy}^2}.$$

Se i valori delle forze molecolari p_{xx}, p_{yy}, p_{xy}, arrivano ad essere e a mantenersi tali che τ_1 sia uguale o superiore al limite S_1 di resistenza allo scorrimento le molecole dell'elemento con-

siderato saranno sul punto di strisciare le une sulle altre oppure striscieranno effettivamente senza che il corpo possa separarsi in sistemi distinti incapaci di agire gli uni sugli altri, dando luogo a fenomeni analoghi in tutto a quelli che si manifestano nei corpi fluidi, la cui qualità caratteristica è appunto che le loro parti infinitesime soggette a sforzi di compressione possono muoversi e scorrere le une sulle altre senza che per questo sia alterata la continuità del sistema. La condizione

$$S_1 = \frac{1}{2}\sqrt{(p_{xx} - p_{yy})^2 + 4p_{xy}^2}$$

congiunta alle due equazioni dell'equilibrio molecolare nel piano

$$\frac{dp_{xx}}{dx} + \frac{dp_{xy}}{dy} = X \qquad \frac{dp_{xy}}{dx} + \frac{dp_{yy}}{dy} = Y$$

ed alle equazioni ai limiti, considerando un sistema piano di forze, sono sufficienti per determinare le forze molecolari e per conseguenza le condizioni di equilibrio del corpo al momento in cui sta per incominciare il movimento dovuto alla fluidità. Lo sforzo sotto l'azione del quale incominciano a manifestarsi i movimenti delle particelle materiali dicesi *pressione di fluidità*: è evidente che in un corpo isotropo lo scorrimento tenderà a prodursi nella direzione, nella quale lo sforzo tangenziale è massimo oppure la resistenza allo scorrimento è minima.

La resistenza allo scorrimento è forza passiva (Num. 3, pag. 16) ed agisce in quanto che è eccitata; in una determinata direzione essa può opporsi allo scorrimento nei due sensi, di qui la conclusione che in un corpo, i cui elementi di volume sono soggetti in tutte le direzioni a sforzi di compressione, considerando lo scorrimento in una data direzione, abbiamo infiniti stati di equilibrio possibili tutti racchiusi fra due stati limiti, oltre i quali incomincia lo stato di fluidità, e questi due stati sono rappresentati dalle due condizioni

$$+S_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \qquad -S_1 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}.$$

Se in tutte le direzioni $+S_1 = -S_1 = 0$ allora i due stati limiti vengono a coincidere in uno solo ed abbiamo il caso dei corpi fluidi ordinarî e più particolarmente dei liquidi.

Non appena incomincia a manifestarsi lo stato di fluidità il volume della materia, che compone il corpo, rimane costante, poichè

per decrescere ulteriormente dovrebbe aumentare la sua densità e quindi la pressione fra le sue parti infinitesime, cosa che non può avvenire perchè il materiale, in grazia della fluidità acquistata, sfugge all'eccedere della compressione; solo impedendo qualunque movimento in qualsiasi senso può essese aumentata la pressione subìta dalle varie parti del corpo. Avendo cura di mantenere in un corpo la *pressione di fluidità* si possono ottenere deformazioni notevoli e tali da cambiare completamente la sua forma, in guisa che esso può in certo qual modo essere considerato come un materiale plastico; soltanto lo spostamento molecolare avendo luogo per strisciamento e sotto forte pressione potrà avvenire, a seconda della natura del materiale, che questo rimanga in uno stato particolare di crudezza dovuta forse al non completo orientamento delle molecole secondo le loro naturali tendenze. Si potrà però ovviare facilmente a questo incoveniente in molti casi sottoponendo il corpo ad una operazione di ricottura, poichè aumentando in causa dell'elevazione della temperatura le distanze fra le minime particelle di materia è lecito supporre che durante il raffreddamento esse abbiano agio di disporsi in modo più confacente alla natura del corpo.

Queste proprietà, prevedute dalla teoria, sono state dimostrate vere dall'esperienza, e l'industria ne ha già tratto profitto, specialmente nella lavorazione dei metalli. Il Professor Tresca al Conservatorio di arti e mestieri a Parigi ha fatto una numerosa serie di esperienze, le quali hanno ampiamente provato il fenomeno della fluidità dei corpi solidi soggetti a forti pressioni, non che le leggi che abbiamo esposto, cioè la conservazione del volume durante il periodo di fluidità e la tendenza della materia a strisciare ed a sfuggire secondo la direzione di minima resistenza oppure secondo la direzione, nella quale è massima l'azione tangenziale, se la resistenza allo scorrimento è uguale in tutti i sensi. Nella seconda parte di quest'opera, al capitolo relativo alla perforazione delle lamiere ed alla lavorazione dei materiali, specialmente al laminatoio ed alla fucina, avremo occasione di descrivere particolareggiatamente le esperienze del Tresca, per ora sembra che possa essere sufficiente il dire che il fenomeno della fluidità dei corpi solidi sotto pressione conveniente è in perfetta analogia con quello dei liquidi. Tresca avendo fatto effluire un blocco cilindrico per un orifizio aperto nelle pareti del vaso, che lo conteneva, ha trovato tutte le circostanze accessorie, che si presentano nei liquidi, perfino quella della contrazione della vena fluida.

NOTA A.

Sui teoremi fondamentali della meccanica applicata alle costruzioni.

In questa nota ci proponiamo di esporre in modo affatto elementare e, per maggior semplicità, senza introdurre i simboli e le annotazioni degli algebristi moderni alcune proprietà delle funzioni omogenee di secondo grado o forme quadratiche, che hanno una grande importanza per lo studio dell'equilibrio dei corpi elastici, poichè da esse si possono dedurre con molta facilità i teoremi fondamentali della scienza delle costruzioni, e precisamente i teoremi di Castigliano, di Betti e quello di *correlazione* e perchè servono assai bene a mostrare la natura di questi teoremi e la loro analogia con certe proprietà, che si incontrano nello studio dei fenomeni fisici. Per giungere a questo risultato basta aver dimostrato che il lavoro di deformazione nei corpi elastici è una funzione omogenea di secondo grado (forma quadratica) delle deformazioni, e che le sue derivate prese rispetto a queste ultime quantità sono uguali alle forze, che mantengono il corpo in equilibrio: teorema che è stato ampiamente trattato al numero 35 del capitolo IV (Pag. 97).

Una funzione di n quantità si dice omogenea quando moltiplicando le variabili a $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ per un'indeterminata t la funzione si riproduce moltiplicata per la potenza t^m di t, in guisa che sussiste sempre la relazione

$$f(ta_1, ta_2, \ldots ta_{n-1}, ta_n) = t^m f(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, a_n) \quad (1)$$

l'esponente m dicesi grado di omogeneità della funzione.

Sono proprietà notissime di queste funzioni e che trovansi riportate e dimostrate in tutti i trattati d'analisi le seguenti:

Teorema I. — *Se le* n *variabili di una funzione omogenea sono rispettivamente ciascuna uguali ad una funzione omogenea lineare di* n *quantità e si sostituiscono questi valori nella funzione primitiva si ottiene ancora una funzione omogenea dello stesso grado delle nuove* n *quantità considerate come variabili indipendenti.*

Teorema II. — *Una funzione omogenea di grado* m *è uguale al quoziente della divisione per* m *della somma delle sue deri-*

vate prese rispetto a ciascuna delle sue variabili moltiplicate per la variabile rispetto alla quale è stata eseguita la derivazione (Teorema d'Eulero).

Teorema III. — *Le derivate parziali di una funzione omogenea di grado* m *prese rispetto alle sue variabili sono funzioni omogenee di grado* m − 1 *delle stesse quantità, che entrano nella funzione primitiva.*

Teorema IV. — *Se col simbolo generico* a, *oppure* a_r *ed* a_s, *si indicano una o due delle variabili della serie* $a_1, a_2, \ldots a_r, a_s, \ldots a_n$, *la somma* $f(a)^2$ *delle combinazioni binarie delle quantità* a *moltiplicate ciascuna per un coefficiente costante* $A_{r,s}$

$$f(a)^2 = \sum_1^n A_{r,s}\, a_r\, a_s$$

è una funzione omogenea di secondo grado. Infatti se nella funzione $f(a)^2$ invece di a $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ si pone ta $(ta_1, ta_2, ta_3, \ldots ta_n)$, contenendo ogni termine il prodotto di due quantità a, esso avrà come fattore t^2 ed in causa di questa sostituzione si riproduce la funzione primitiva moltiplicata per t^2

$$f(ta)^2 = t^2 f(a)^2.$$

Quindi la funzione

$$f(a)^2 = \sum_1^n A_{r,s}\, a_r\, a_s$$

è omogenea di secondo grado, e può dirsi che è la forma più completa di tali funzioni perchè contiene tutte le combinazioni binarie possibili delle m quantità date (quindi anche i quadrati delle medesime $a_r^2 = a_r a_r$).

Prendiamo in esame due serie di valori a e precisamente la serie $a'(a'_1, a'_2, \ldots a'_n)$ e la serie $a''(a''_1, a''_2, \ldots a''_n)$ ed i valori $f(a')^2$, $f(a'')^2$ ed $f(a'+a'')^2$ che assume la funzione omogenea $f(a)^2$ quando in essa si pongono invece delle variabili a le quantità a', a'' ed $(a'+a'')$. Eseguendo le sostituzioni indicate risulta

$$f(a')^2 = \sum_1^n A_{r,s}\, a'_r\, a'_s \qquad (2)$$

$$f(a'')^2 = \sum_1^n A_{r,s}\, a''_r\, a''_s \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} f(a'+a'')^2 &= \sum_1^n A_{r,s}\,[a'_r+a''_r]\,[a'_s+a''_s] = \\ &= \sum_1^n A_{r,s}\,a'_r\,a'_s + \sum_1^n A_{r,s}\,a''_r\,a''_s + \\ &+ \sum_1^n A_{r,s}\,[a'_r a''_s + a''_r a'_s] \end{aligned}\right\} (4).$$

Se si conviene di porre

$$f(a',\ a'') = \sum_1^n A_{r,s}\,[a'_r a''_s + a''_r a'_s] \qquad (5)$$

l'equazione (4), tenendo conto della (2) e della (3), diventa

$$f(a'+a'')^2 = f(a')^2 + f(a'')^2 + f(a',\ a'') \qquad (6)$$

in cui $f(a',\ a'')$ è una funzione omogenea di primo grado rispetto alle quantità a' ed a'' e che perciò potremo chiamare funzione omogenea bilineare rispetto alle due serie di valori a' ed a''.

Teorema V. — *Le derivate prese rispetto alle variabili* a *della funzione* $f(a)^2$ *quando in esse si faccia* $a=a'$ *ossia* $\frac{df(a')^2}{da}$ *sono rispettivamente uguali alle derivate della funzione bilineare* $f(a',\ a'')$ *prese rispetto alle corrispondenti quantità* a'', *ed analogamente le derivate prese rispetto alle variabili* a *della funzione* $f(a)^2$ *quando si faccia* $a=a''$ *sono rispettivamente uguali alle derivate della funzione bilineare* $f(a',\ a'')$ *prese rispetto alle quantità* a'. Infatti derivando la (2) rispetto ad una qualsiasi delle quantità a, $a_r=a'_r$ e la (3) rispetto ad una qualsiasi delle quantità a, $a_r=a''_r$ si ottiene

$$\frac{df(a')^2}{da_r} = \sum_{s=1}^{s=r-1} A_{r,s}\,a'_s + 2\,A_{r,r}\,a'_r + \sum_{s=r+1}^{s=n} A_{r,s}\,a'_s \qquad (7)$$

$$\frac{df(a'')^2}{da_r} = \sum_{s=1}^{s=r-1} A_{r,s}\,a''_s + 2\,A_{r,r}\,a''_r + \sum_{s=r+1}^{s=n} A_{r,s}\,a''_s \qquad (8).$$

Derivando la (5) successivamente rispetto ad a'_r e ad a''_r risulta

$$\frac{df(a', a'')}{da'_r} = \sum_{s=1}^{s=r-1} A_{r,s}\, a''_s + 2A_{r,r}\, a''_r + \sum_{s=r+1}^{s=n} A_{r,s}\, a''_s \qquad (9)$$

$$\frac{df(a', a'')}{da''_r} = \sum_{s=1}^{s=r-1} A_{r,s}\, a'_s + 2A_{r,r}\, a'_r + \sum_{s=r+1}^{s=n} A_{r,s}\, a'_s \qquad (10).$$

Confrontando l'equazione (7) colla (10) e l'equazione (8) colla (9) si vede che esse hanno i secondi membri uguali, quindi

$$\frac{df(a')^2}{da_r} = \frac{df(a', a'')}{da''_r} \qquad (11)$$

$$\frac{df(a'')^2}{da_r} = \frac{df(a', a'')}{da'_r} \qquad (12)$$

equazioni, che contengono il teorema enunciato.

Se si moltiplica la relazione (11) per a''_r e la (12) per a'_r risulta

$$\frac{df(a')^2}{da_r}\, a''_r = \frac{df(a', a'')}{da''_r}\, a''_r \qquad (13)$$

$$\frac{df(a'')^2}{da_r}\, a'_r = \frac{df(a', a'')}{da'_r}\, a'_r \qquad (14).$$

Dando ad r tutti i valori interi compresi da $r=1$ ad $r=n$ e sommando i risultati si ottengono le due equazioni seguenti

$$\Sigma \frac{df(a')^2}{da}\, a'' = \Sigma \frac{df(a', a'')}{da''}\, a'' \qquad (15)$$

$$\Sigma \frac{df(a'')^2}{da}\, a' = \Sigma \frac{df(a', a'')}{da'}\, a' \qquad (16).$$

In causa del teorema II

$$\Sigma \frac{df(a', a'')}{da'}\, a' = f(a', a'') = \Sigma \frac{df(a', a'')}{da''}\, a'' \qquad (17)$$

quindi

$$\Sigma \frac{df(a')^2}{da} a'' = \Sigma \frac{df(a'')^2}{da} a' = f(a', a'') \qquad (18)$$

equazione, che contiene una legge di reciprocità fra i valori della serie a' e quelli della serie a'' e le derivate della funzione primitiva quando in esse si pongano le quantità a'' ed a' invece delle variabili generiche a, e che può riassumersi nel seguente:

Teorema VI. — *Se si considerano due serie di valori* a' *ed* a'' *delle variabili* a *di una funzione omogenea di secondo grado* $f(a)^2$ *la somma delle derivate prime della funzione prese rispetto alle quantità* a *quando* a=a' *moltiplicate rispettivamente per i valori corrispondenti di* a=a'' *è uguale alla somma dei valori delle stesse derivate quando* a=a'' *moltiplicate pei valori corrispondenti di* a=a' *ed è uguale anche al valore della funzione bilineare* f(a', a'') *delle quantità* a' *ed* a''.

Se le quantità $a'(a'_1, a'_2, \ldots a'_n)$ ed $a''(a''_1, a''_2, \ldots a''_n)$ diventano uguali ossia se $a'_1 = a''_1$, $a'_2 = a''_2$, $\ldots$ $a'_r = a''_r$, $\ldots$ $a'_n = a''_n$

$$\left.\begin{aligned} \Big[f(a', a'')\Big]_{a'=a''=a} = f(a, a) = \sum_1^n A_{r,s} \, [a_r a_s + a_r a_s] = \\ = 2 \sum_1^n A_{r,s} \, a_r a_s = 2 f(a)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

cioè in tal caso la funzione bilineare prende un valore doppio della funzione primitiva. Ciò risulta anche dalla equazione (18): infatti pel teorema II

$$\Sigma \frac{df(a)^2}{da} a = 2 f(a)^2$$

quindi se nella (18) si fa $a' = a'' = a$ s'ottiene

$$\left.\begin{aligned} \Big[f(a', a'')\Big]_{a'=a''=a} = f(a, a) = \Sigma \Big[\frac{df(a', a'')}{da'} a'\Big]_{a'=a''=a} = \\ = \Sigma \Big[\frac{df(a')^2}{da} a''\Big]_{\substack{a'=a \\ a''=a}} = \Sigma \frac{df(a)^2}{da} a = 2 f(a)^2 \end{aligned}\right\} (19^{bis}).$$

Se i valori a' si suppongono uguali alle variabili a ed i valori a'' uguali ad $a+\delta a$ allora

$$\left.\begin{aligned} f(a', a'') = f(a, a+\delta a) &= \sum_1^n A_{r,s}\,[a_r(a_s+\delta a_s)+ \\ +a_s(a_r+\delta a_r)] &= 2\sum_1^n A_{r,s}\,a_r a_s + \sum_1^n A_{r,s}[a_r\delta a_s+ \\ +a_s\delta a_r] &= 2f(a)^2+\delta f(a)^2 \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{df(a'')^2}{da_r}a'_r\right]_{\substack{a'=a\\a''=a+\delta a}} &= a_r\left[\sum_{s=1}^{s=r-1} A_{r,s}(a_s+\delta a_s)+2A_{r,r}(a_r+\delta a_r)+\right. \\ \left.+\sum_{s=r+1}^{s=n} A_{r,s}(a_s+\delta a_s)\right] &= a_r\left[\sum_{s=1}^{s=r-1} A_{r,s}a_s+2A_{r,r}a_r+\right. \\ +\sum_{s=r+1}^{s=n} A_{r,s}a_s+\delta\left[\sum_{s=1}^{s=r-1} A_{r,s}a_s+2A_{r,r}a_r+\right. & \\ \left.\left.+\sum_{s=r+1}^{s=n} A_{r,s}a_s\right]\right] &= \frac{df(a)^2}{da_r}a_r+a_r\delta\frac{df(a)^2}{da_r} \end{aligned}\right\} \quad (21).$$

Pel teorema VI deve verificarsi la relazione

$$\Sigma\left[\frac{df(a')^2}{da}a''\right]_{\substack{a'=a\\a''=a+\delta a}} = \left[f(a', a'')\right]_{\substack{a'=a\\a''=a+\delta a}} = \Sigma\left[\frac{df(a'')^2}{da}a'\right]_{\substack{a'=a\\a''=a+\delta}}$$

ossia in causa della (20) e della (21)

$$\Sigma\frac{df(a)^2}{da}a+\Sigma\frac{df(a)^2}{da}\delta a = 2f(a)^2+\delta f(a)^2 =$$

$$= \Sigma\frac{df(a)^2}{da}a+\Sigma a\,\delta\frac{df(a)^2}{da}.$$

Ma pel teorema II

$$\Sigma\frac{df(a)^2}{da}a = 2f(a)^2$$

quindi rimane

$$\Sigma \frac{df(a)^2}{da}\,\delta a = \delta f(a)^2 = \Sigma\, a\,\delta \frac{df(a)^2}{da} \qquad (22)$$

equazione che contiene una legge di reciprocità analoga alla precedente e che può esprimersi mediante il seguente:

Teorema VII. — *La somma delle variazioni delle derivate prime di una funzione omogenea* f(a)² *di secondo grado di* n *quantità prese rispetto a queste stesse quantità moltiplicate per le variabili, rispetto alle quali è stata eseguita la derivazione, è uguale alla somma dei prodotti delle stesse derivate per le variazioni delle variabili, rispetto alle quali è stata eseguita la derivazione, ed uguale alla variazione della funzione primitiva.*

Riprendiamo l'espressione generale della funzione $f(a)^2$

$$f(a)^2 = \sum_{1}^{n} A_{r,s}\, a_r a_s$$

e supponiamo che i valori delle sue derivate prese rispetto alle variabili $a(a_1, a_2, \ldots a_n)$ siano ordinatamente uguali alle quantità $p\,(p_1, p_2, \ldots p_n)$. In tale ipotesi sussiste il seguente sistema d'equazioni

$$\left.\begin{aligned}
\frac{df(a)^2}{da_1} &= 2A_{1,1}\,a_1 + A_{1,2}\,a_2 + A_{1,3}\,a_3 + \ldots + A_{1,n}\,a_n = p_1 \\
\frac{df(a)^2}{da_2} &= A_{2,1}\,a_1 + 2A_{2,2}\,a_2 + A_{2,3}\,a_3 + \ldots + A_{2,n}\,a_n = p_2 \\
\frac{df(a)^2}{da_3} &= A_{3,1}\,a_1 + A_{3,2}\,a_2 + 2A_{3,3}\,a_3 + \ldots + A_{3,n}\,a_n = p_3 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{df(a)^2}{da_n} &= A_{n,1}\,a_1 + A_{n,2}\,a_2 + A_{n,3}\,a_3 + \ldots + 2A_{n,n}\,a_n = p_n
\end{aligned}\right\} \qquad (23).$$

La funzione $f(a)^2$ essendo omogenea di secondo grado rispetto alle quantità a il coefficiente di a_r nella sua derivata presa rispetto ad a_s sarà necessariamente uguale al coefficiente di a_s nella sua derivata presa rispetto ad a_r. Infatti i due termini si deducono entrambi dalla derivazione dello stesso termine della funzione pri-

mitiva $A_{r,s}\ a_r\ a_s$, quindi i coefficienti del sistema di equazioni (23) soddisfano alla relazione $A_{r,s} = A_{s,r}$ cioè i coefficienti delle colonne sono ordinatamente uguali ai coefficienti delle linee orizzontali ed il determinante Δ di quelle equazioni è un determinante simmetrico. Se si conviene di indicare con $\Delta_{r,s}$ il determinante minore corrispondente al termine del determinante delle equazioni, che si trova contemporaneamente sulla r^{esima} linea e sulla s^{esima} colonna, risolvendo le equazioni (23) rispetto alle variabili a_1, a_2, . . . a_n, risulta

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\Delta}\left[p_1\Delta_{1,1} + p_2\Delta_{2,1} + p_3\Delta_{3,1} + \ldots + p_n\Delta_{n,1}\right] \\
a_2 &= \frac{1}{\Delta}\left[p_1\Delta_{1,2} + p_2\Delta_{2,2} + p_3\Delta_{3,2} + \ldots + p_n\Delta_{n,2}\right] \\
a_3 &= \frac{1}{\Delta}\left[p_1\Delta_{1,3} + p_2\Delta_{2,3} + p_3\Delta_{3,3} + \ldots + p_n\Delta_{n,3}\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_n &= \frac{1}{\Delta}\left[p_1\Delta_{1,n} + p_2\Delta_{2,n} + p_3\Delta_{3,n} + \ldots + p_n\Delta_{n,n}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

in cui i determinanti minori $\Delta_{r,s}$ anderanno presi col proprio segno quando la somma dei loro indici è un numero pari e con segno negativo invece quando la somma dei loro indici è un numero dispari. Il determinante delle equazioni (23) essendo simmetrico, i valori dei determinanti minori corrispondenti a termini simmetrici saranno uguali fra loro, e sussiste la relazione generale

$$\Delta_{r,s} = \Delta_{s,r} \quad (25).$$

Le variabili a (a_1, a_2, . . . a_n) sono espresse per mezzo delle equazioni (24) e ciascuna di esse è una funzione omogenea di primo grado delle quantità p (p_1, p_2, . . . p_n) quindi in causa del teorema I la funzione $f(a)^2$ potrà essere espressa direttamente in funzione delle quantità p e risulterà una funzione omogenea di secondo grado delle medesime, in guisa che avrà sempre luogo la relazione

$$f(a)^2 = (\varphi p)^2 \quad (26)$$

quando si verifica la supposizione che le a e le p sono fra loro dipendenti per mezzo delle relazioni (23) oppure (24), che le

equivalgono completamente: la funzione $\phi(p)^2$ potrà chiamarsi funzione trasformata di $f(a)^2$.

Teorema VIII. — *Se una funzione omogenea di secondo grado* $f(a)^2$ *di* n *quantità* $a(a_1, a_2, \ldots a_n)$ *si esprime in funzione dei valori* $p(p_1, p_2, \ldots p_n)$ *delle sue derivate prese rispetto alle quantità* a, *le derivate della funzione trasformata prese rispetto alle quantità* $p(p_1, p_2, \ldots p_n)$ *sono uguali ordinatamente alle variabili primitive; cioè sussistono le relazioni*

$$\frac{d\phi(p)^2}{dp_1}=a_1 \qquad \frac{d\phi(p)^2}{dp_2}=a_2 \ \ldots \ \frac{d\phi(p)^2}{dp_n}=a_n.$$

Infatti abbiamo visto che quando le quantità a e p sono fra loro legate dalle relazioni (23) o (24) ha sempre luogo l'uguaglianza

$$f(a)^2=\phi(p)^2$$

e si possono indifferentemente assumere come variabili indipendenti le a o le p; le due funzioni $f(a)^2$ e $\phi(p)^2$ le chiameremo correlative. Pel teorema relativo alle derivate delle funzioni di funzione, riguardando le p come variabili indipendenti, deve verificarsi la seguente relazione

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\phi(p)^2}{dp_r}=\frac{df(a)^2}{dp_r}=\frac{df(a)^2}{da_1}\frac{da_1}{dp_r}+\frac{df(a)^2}{da_2}\frac{da_2}{dp_r}+\\&+\frac{df(a)^2}{da_3}\frac{da_3}{dp_r}+\ldots+\frac{df(a)^2}{da_n}\frac{da_n}{dp_r}=\Sigma\frac{df(a)^2}{da}\frac{da}{dp_r}\end{aligned}\right\}\quad(27)$$

e quindi in causa delle relazioni (23) e (24)

$$\begin{aligned}\frac{d\phi(p)^2}{dp_r}=&\frac{1}{\Delta}\left[2A_{1,1}a_1+A_{1,2}a_2+\ldots+A_{1,n}a_n\right]\Delta_{1,r}+\\&+\frac{1}{\Delta}\left[A_{2,1}a_1+2A_{2,2}a_2+\ldots+A_{2,n}a_n\right]\Delta_{2,r}+\\&+\frac{1}{\Delta}\left[A_{3,1}a_1+A_{3,2}a_2+\ldots+A_{3,n}a_n\right]\Delta_{3,r}+\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\\&+\frac{1}{\Delta}\left[A_{r,1}a_1+A_{r,2}a_2+\ldots+A_{r,n}a_n\right]\Delta_{r,r}+\ldots+\\&+\frac{1}{\Delta}\left[A_{n,1}a_1+A_{n,2}a_2+\ldots+2A_{n,n}a_n\right]\Delta_{n,r}\end{aligned}$$

e raccogliendo i fattori delle quantità a

$$\frac{d\phi(p)^2}{dp_r}=\frac{a_1}{\Delta}\left[2A_{1,1}\Delta_{1,r}+A_{2,1}\Delta_{2,r}+A_{3,1}\Delta_{3,r}+\ldots+A_{n,1}\Delta_{n,r}\right]+$$

$$+\frac{a_2}{\Delta}\left[A_{1,2}\Delta_{1,r}+2A_{2,2}\Delta_{2,r}+\ldots+A_{2,n}\Delta_{n,r}\right]+\ldots+$$

$$+\frac{a_r}{\Delta}\left[A_{1,r}\Delta_{1,r}+A_{2,r}\Delta_{2,r}+\ldots+A_{n,r}\Delta_{n,r}\right]+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+\frac{a_n}{\Delta}\left[A_{1,n}\Delta_{1,r}+A_{2,n}\Delta_{2,r}+\ldots+2A_{n,n}\Delta_{n,n}\right].$$

Tutti i coefficienti delle quantità a sono esprimibili col mezzo di determinanti, che hanno due colonne di elementi uguali ad eccezione del coefficiente di a_r, perchè i determinanti minori $\Delta_{1,r}$, $\Delta_{2,r}$, . . . $\Delta_{n,r}$ sono appunto quelli corrispondenti agli elementi della colonna r^{esima}. Quindi i coefficienti di tutte le variabili a saranno uguali a zero ad eccezione di quello di a_r, che sarà uguale al determinante Δ delle equazioni. Tenendo conto di queste osservazioni la formola (27) diventa

$$\frac{d\phi(p)^2}{dp_r}=\Sigma\frac{df(a)^2}{da}\frac{da}{dp_r}=\frac{a_r}{\Delta}\Delta=a_r \qquad (28)$$

a_r potendo essere una qualunque delle variabili a, ordinatamente corrispondente alla quantità p, rispetto alla quale si suppone eseguita la derivazione, l'equazione (28) contiene il teorema, che si voleva dimostrare.

Se si suppone di indicare con p' $(p'_1, p'_2, \ldots p'_n)$ e con p'' $(p''_1, p''_2, p''_3, \ldots p''_n)$ i valori delle derivate della funzione $f(a)^2$ quando invece delle variabili a si considerano le due serie di valori a' $(a'_1, a'_2, \ldots a_n)$ ed a'' $(a''_1, a''_2, \ldots a''_n)$ allora

$$\frac{df(a')^2}{da}=p' \qquad (29)$$

$$\frac{df(a')'^2}{da}=p'' \qquad (30).$$

Le equazioni (23) e (24) sono tutte lineari rispetto alle variabili a e p e non contengono termini indipendenti quindi vale per esse il principio della sovrapposizione degli effetti.

Se si considerano le serie di valori a, a', a'', $(a'+a'')$ e le corrispondenti serie dei valori di p, p', p'', $(p'+p'')$ in causa dell'equazione (6) sarà

$$\left.\begin{aligned} f(a'+a'')^2 &= f(a')^2 + f(a'')^2 + f(a', a'') \\ \phi(p'+p'')^2 &= \phi(p')^2 + \phi(p'')^2 + \phi(p', p'') \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

ma per la relazione (26) deve essere

$$\left.\begin{aligned} f(a')^2 = \phi(p')^2 \qquad f(a'')^2 = \phi(p'')^2 \\ f(a'+a'')^2 = \phi(p'+p'')^2 \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

quindi uguagliando i secondi membri delle equazioni (31), tenendo conto delle relazioni (32), risulta

$$f(a', a'') = \phi(p', p'') \quad (33)$$

da cui si ricava il seguente:

Teorema IX. — *In una funzione omogenea di secondo grado di* n *quantità* a $f(a)^2$ *se si considerano due serie* a' *ed* a'' *di valori delle variabili e le corrispondenti serie di valori* p' *e* p'', *che assumano le derivate della funzione* $f(a)^2$ *quando invece dei valori di* a *si mettono i valori* a' *ed* a'', *la funzione bilineare delle quantità* a' *ed* a'' *è uguale alla funzione bilineare correlativa delle quantità* p' *e* p''.

In causa del teorema V, formola (18), le funzioni bilineari sono esprimibili in funzione delle derivate della funzione primitiva e dei valori delle variabili, e precisamente

$$f(a', a'') = \Sigma \frac{df(a')^2}{da} a'' = \Sigma \frac{df(a'')}{da} a'$$

ed analogamente

$$\phi(p', p'') = \Sigma \frac{d\phi(p')^2}{dp} p'' = \Sigma \frac{d\phi(p'')^2}{dp} p'$$

da cui, ricordando la relazione (33), si ricavano le equazioni

$$\Sigma \frac{df(a')^2}{da} a'' = \Sigma \frac{d(p')^2}{dp} p'' = \Sigma \frac{df(a'')^2}{da} a' = \Sigma \frac{d(p'')^2}{dp} p'$$

che contengono il seguente:

Teorema X. — *In una funzione omogenea di secondo grado di* n *quantità* a $f(a)^2$ *la somma dei prodotti di una serie* a' *di valori di* a *pei valori, che assumono le sue derivate quando* $a=a''$, *è uguale alla somma dei prodotti dei valori* $\frac{d\phi(p'')^2}{dp}=a''$ *delle derivate della funzione correlativa* $\phi(p)^2$ *quando in luogo di* p *si mettano i valori* p'' *moltiplicati rispettivamente per i valori* p' *o viceversa*, ossia in ultima analisi il teorema VI sotto forma alquanto diversa.

Conservando i simboli usati precedentemente i teoremi esposti si riassumono nelle seguenti equazioni

$$f(a)^2=\phi(p)^2 \tag{34}$$

$$f(a)^2=\frac{1}{2}\Sigma\frac{df(a)^2}{da}a \tag{35}$$

$$\phi(p)^2=\frac{1}{2}\Sigma\frac{d\phi(p)^2}{dp}p \tag{36}$$

$$\frac{df(a)^2}{da}=p \tag{37}$$

$$\frac{d\phi(p)^2}{dp}=a \tag{38}$$

$$\Sigma p\delta a=\Sigma a\delta p=\delta f(a)^2=\delta\phi(p)^2 \tag{39}$$

$$\Sigma p'a''=\Sigma p''a'=f(a',a'')=\phi(p',p'') \tag{40}$$

$$\Sigma\frac{f(a')^2}{da}a''=\Sigma\frac{d\phi(p'')^2}{dp}p'=\Sigma\frac{df(a'')^2}{da}a'=\Sigma\frac{d\phi(p')}{dp}p'' \tag{41}.$$

Facciamo la convenzione che i seguenti simboli rappresentino $P(P_1, P_2, \ldots P_n)$, $P'(P'_1, P'_2, \ldots P'_n)$ e $P''(P''_1, P''_2, \ldots P''_n)$ tre sistemi di forze agenti sopra un corpo o sopra un sistema di corpi elastici nella medesima direzione ed applicate negli stessi punti $C(C_1, C_2, \ldots C_n)$

$\delta(\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n)$, $\delta'(\delta'_1, \delta'_2, \ldots \delta'_n)$ e $\delta''(\delta''_1, \delta''_2, \ldots \delta''_n)$ rispettivamente gli spostamenti dei punti C misurati nella direzione delle forze, che vi sono applicate, quando sul sistema agiscono le forze P, oppure le forze P' o P''

u, v, w gli spostamenti elastici di un punto misurati nel senso degli assi

p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, p_{xy}, p_{xz}, p_{yz} le sei componenti parallele agli assi delle forze molecolari

i_x, i_y, i_z, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz} le sei deformazioni elementari, distinguendo tutte queste quantità scrivendole senz'apice, con uno oppure con due apici secondo chè corrispondono al sistema di forze P oppure P' o P''.

Finalmente indichiamo con p, p' e p'' una qualunque delle forze elastiche in un punto qualsiasi del corpo, con π, π' e π'' gli elateri o reazioni elastiche risultanti (Num. 53) nello stesso punto, con a, a' ed a'', η, η' ed η'' le deformazioni e gli spostamenti corrispondenti ordinatamente sotto l'influenza delle forze P, P' e P'', e finalmente con Δs e ds, $\Delta\sigma$ e $d\sigma$ gli elementi di spazio e di superficie relativi al corpo considerato.

I.

Nel numero 35 del capitolo IV (Pag. 97), abbiamo dimostrato che il lavoro di deformazione di un corpo elastico è una somma od integrale esteso a tutto lo spazio occupato dal corpo, il cui termine generale (od elemento differenziale) è una funzione omogenea di secondo grado delle sei deformazioni i_x, i_y, i_z, g_{xy}, g_{xz}, g_{yz}, le quali entro lo spazio elementare Δs (purchè abbastanza piccolo) oppure ds possono essere considerate con molta approssimazione come aventi un valore costante; cioè il valor medio di queste funzioni entro l'elemento di volume considerato nell'ipotesi che esso si prenda abbastanza piccolo perchè nell'interno del medesimo le funzioni i_x, i_y, . . . abbiano dappertutto lo stesso segno e che la loro oscillazione, ossia la differenza fra il loro massimo e minimo valore sia minore di una determinata quantità k, che potrà essere tanto piccola quanto si vuole, cioè accostarsi come limite allo zero. Abbiamo inoltre dimostrato che il lavoro di deformazione per ogni elemento di volume è sempre necessariamente positivo (Num. 49) e che le sue derivate rispetto alle deformazioni i_x, i_y, i_z, ecc., sono uguali rispettivamente alle forze elastiche p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}, ecc. Partendo da queste proprietà in causa dei teoremi I ed VIII, ossia delle equazioni (34) e (38), si ricava immediatamente il seguente teorema: *Il lavoro di deformazione* d L *corrispondente ad un elemento qualsiasi di un corpo elastico è sempre esprimibile in funzione delle forze elastiche* p *che esso subisce e risulta una funzione omogenea di secondo grado di queste quantità. Le derivate del lavoro di deformazione di un elemento di volume espresso in fun-*

zione delle azioni elastiche p *prese rispetto alle stesse forze* p *sono ordinatamente uguali alle deformazioni* a *corrispondenti.* Ordinariamente si considerano forze e deformazioni unitarie, moltiplicando queste quantità per le dimensioni dell'elemento di volume (o superficie) si ottengono rispettivamente le forze e le deformazioni effettive subìte dall'elemento stesso (Num. 50). Analogamente il teorema VII, formola (39) applicato ai corpi elastici conduce per l'elemento di volume, e quindi, integrando, per tutto il corpo, alla seguente equazione

$$\delta(\Delta L)=\delta(f(a)^2)\Delta s=(\Sigma p\delta a)\Delta s=(\Sigma a\delta p)\Delta s$$

ossia: *La variazione del lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze oppure delle deformazioni è uguale alla somma (per ogni elemento di volume) dei prodotti delle forze elastiche per la variazione delle corrispondenti deformazioni, oppure è anche uguale alla somma dei prodotti delle deformazioni per la variazione delle forze elastiche corrispondenti.*

Questi due teoremi contengono implicitamente quelli relativi alle derivate del lavoro rispetto agli spostamenti η ed alle forze esterne P, nonchè quello dimostrato al numero 39 (Cap. IV, pag. 113) e che ha servito come lemma per la dimostrazione del teorema di Menabrea. Rappresentiamo con L, Γ e Λ il lavoro di deformazione di tutto il corpo secondochè esso è espresso in funzione delle deformazioni, delle forze elastiche oppure del prodotto di queste quantità; allora $L=\Sigma f(a)^2\Delta s=\int f(a)^2 ds$ e pei teoremi dimostrati relativamente alle funzioni omogenee

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma=\Sigma\,\phi(p)^2\Delta s=\int\phi(p)^2 ds\\
&\Lambda=\frac{1}{2}\Sigma\left(\Sigma\frac{df(a)^2}{da}a\right)\Delta s=\frac{1}{2}\Sigma\left(\Sigma\frac{d\phi(p)^2}{dp}p\right)\Delta s\\
&\frac{\delta(\Delta L)}{\Delta s}=\delta f(a)^2=\Sigma\frac{df(a)^2}{da}\delta a=\Sigma p\delta a=\Sigma a\delta\frac{df(a)}{da}=\Sigma a\delta p\\
&\frac{\delta(\Delta\Gamma)}{\Delta s}=\delta\phi(p)^2=\frac{d(\phi p)^2}{dp}\delta p=\Sigma a\delta p=\Sigma p\delta\frac{d\phi(p)^2}{dp}=\Sigma p\delta a
\end{aligned}\right\}(42).$$

Se si integrano queste espressioni trasformando gli integrali

col procedimento impiegato ai numeri 51 e 53 si ottiene per la prima

$$L=\Lambda=\frac{1}{2}\int\left(\Sigma\frac{df(a)}{da}\,a\right)ds=\frac{1}{2}\int(p_{xx}i_x+p_{yy}i_y+p_{zz}i_z+$$

$$+p_{xy}g_{xy}+p_{xz}g_{xz}+p_{yz}g_{yz})\,ds=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{xz}}{dz}\right)u+\\ +\left(\frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz}\right)v+\\ +\left(\frac{dp_{xz}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}\right)w\end{array}\right\}ds-$$

$$-\int\left\{\begin{array}{l}(p_{xx}\cos\alpha+p_{xy}\cos\beta+p_{xz}\cos\gamma)\,u+\\ +(p_{xy}\cos\alpha+p_{yy}\cos\beta+p_{yz}\cos\gamma)\,v+\\ +(p_{xz}\cos\alpha+p_{yz}\cos\beta+p_{zz}\cos\gamma)\,w\end{array}\right\}d\sigma=-\frac{1}{2}\Sigma(\eta\pi)\qquad(42^{bis})$$

ed in modo analogo per le altre, sostituendo ordinatamente le deformazioni oppure le forze elastiche pei loro differenziali

$$\delta L=-\Sigma(\pi\delta\eta)=-\int(\pi\delta\eta)\,ds\qquad(43)$$

$$\delta L=\delta\Gamma=-\Sigma(\eta\delta\pi)=-\int(\eta\delta\pi)\,ds\qquad(44).$$

Da queste formole appare come il lavoro di deformazione è una funzione, che dipende da tutti i valori che nell'interno del campo o spazio occupato dal corpo prendono gli spostamenti η e gli elateri π oppure le forze esterne P, che sono uguali e di segno contrario agli elateri, cioè è una funzione di campo rispetto alle funzioni η e π ed è funzione continua, poichè dando alle η od alle π una variazione arbitraria, ma inferiore in valore assoluto ad un numero k, la variazione corrispondente del lavoro di deformazione all'impiccolire di k può rendersi più piccola di qualsiasi quantità assegnabile. Supponiamo che una delle funzioni (η oppure π) da cui dipende il lavoro di deformazione L prenda entro

l'elemento di volume Δs_r una variazione ($\Delta\eta$ oppure $\Delta\pi$) dappertutto di ugual segno ed inferiore in valore assoluto ad un numero k, allora se l'espressione $\dfrac{\Delta L}{\int_{\Delta s_r} \Delta\eta\, ds}$ ovvero $\dfrac{\Delta\Gamma}{\int_{\Delta s_r} \Delta\pi\, ds}$ ammette un limite quando k e Δs_r tendono a zero

$$(L') = \operatorname*{limit}_{\substack{k=0 \\ \Delta s_r = 0}} \frac{\Delta L}{\int_{\Delta s_r} \Delta\eta\, ds} \qquad (\Gamma') = \operatorname*{limit}_{\substack{k=\infty \\ \Delta s_r = 0}} \frac{\Delta\Gamma}{\int_{\Delta s_r} \Delta\pi\, ds} \tag{45}$$

questo dicesi derivata della funzione L oppure Γ nel punto r. Evidentemente questa derivata dipende dalla posizione del punto r e dai valori delle η oppure delle π e prende in considerazione l'incremento della funzione dovuto non ad un incremento dato di una o più variabili, ma ad una variazione di un gruppo di valori vicini corrispondenti a tutti i punti di un elemento di volume, e potrà essere chiamata derivata di campo della funzione L o Γ. Si può facilmente far dipendere la derivata di campo (*) dalle derivate ordinarie della funzione L considerata come il limite di una funzione di n variabili quando n tenda ad aumentare diventando più grande di qualsiasi numero assegnabile. Infatti supponiamo scelto l'elemento di spazio Δs_r abbastanza piccolo perchè nel suo interno le η (oppure le π) abbiano tutte lo stesso segno, quando non siano costantemente uguali a zero, e perchè l'oscillazione dei loro valori sia inferiore ad un numero dato k; se si pone

$$\int_{\Delta s_r} \eta\, ds = \bar{\eta}\, \Delta s_r = \alpha \qquad \int_{\Delta s_r} \pi\, ds = \bar{\pi}\, \Delta s_r = \beta \tag{46}$$

nella quale $\bar{\eta}$ e $\bar{\pi}$ esprimono i valori medî delle funzioni η e π nel campo elementare Δs_r e si indica con L_1 o Γ_1 il valore, che assume la funzione L oppure Γ quando nell'interno del volume elementare Δs_r si sostituiscono i valori η o π coi valori costanti $\bar{\eta}$ e $\bar{\pi}$. la differenza $L_1 - L$ oppure $\Gamma_1 - \Gamma$, all'impiccolire di k, ossia al crescere del numero n di elementi, in cui il corpo si suppone diviso, potrà rendersi inferiore a qualsiasi quantità assegnabile. Ciò fa comprendere come si possa considerare il lavoro di deformazione L come il limite per $n = \infty$ di una funzione delle n quan-

(*) Donati, *Sul lavoro di deformazione nei corpi elastici* (Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1888). Veggasi anche Volterra, *Rendiconti della Regia Accademia dei Lincei*, 1887.

tità $\bar{\eta}\Delta s_r = \alpha_r$, in cui r prende tutti i valori interi compresi da $r=1$ ed $r=n$. Ritenendo quindi che al limite (per $k=0$ e $\Delta s_r = 0$ ossia per $n=\infty$) le quantità

$$\Delta L \quad \text{e} \quad \Delta L_1 \quad \int_{\Delta s_r} \Delta\eta\, ds \quad \text{e} \quad \Delta(\bar{\eta}\Delta s_r) = \Delta\alpha_r$$

abbiano fra loro rispettivamente come rapporto l'unità potremo scrivere

$$(L') = \text{limit}\frac{\Delta L}{\int_{\Delta s_r}\Delta\eta\, ds} = \text{limit}\frac{\Delta L_1}{\Delta(\bar{\eta}\Delta s_r)} = \text{limit}\frac{\Delta L}{\Delta\alpha_r} = \frac{dL}{d\alpha_r} \qquad (47).$$

La stessa considerazione può farsi per la funzione Γ.

Se ora si prende in esame una variazione $\Delta\eta$ (oppure $\Delta\pi$) in tutti i punti del corpo, la variazione totale del lavoro L (oppure Γ) considerato come limite di una funzione di n variabili (α oppure β) risulta

$$\delta L = \underset{n=\infty}{\text{limit}}\,\Sigma\frac{dL}{d\alpha_r}\delta\alpha_r = \underset{n=\infty}{\text{limit}}\,\Sigma\frac{dL}{d\alpha_r}\delta\bar{\eta}\Delta s_r$$

$$\delta\Gamma = \underset{n=\infty}{\text{limit}}\,\Sigma\frac{d\Gamma}{d\beta_r}\delta\beta_r = \underset{n=\infty}{\text{limit}}\,\Sigma\frac{d\Gamma}{d\beta_r}\delta\bar{\pi}\Delta s_r$$

ed in causa della (47), sostituendo alla sommatoria l'integrale, risulta

$$\delta L = \int (L')\delta\eta\, ds \qquad \delta\Gamma = \int (\Gamma')\delta\pi\, ds$$

ma le equazioni (43) e (44) dànno

$$\delta L = -\int \pi\delta\eta\, ds \qquad \delta\Gamma = -\int \eta\delta\pi\, ds$$

quindi potremo concludere (*) che: *Le derivate di campo del lavoro di deformazione dato in funzione degli spostamenti, prese rispetto agli spostamenti stessi sono per ogni punto del corpo, nell'interno ed alla superficie, uguali e di segno contrario agli elateri corrispondenti, e le derivate di campo dello stesso lavoro dato in funzione degli elateri prese rispetto a queste quantità sono uguali e di segno contrario agli spostamenti corrispondenti.*

Se ci riferiamo ad una porzione elementare del corpo Δs_r o $\Delta\sigma_r$

(*) Donati, Memoria citata.

allora invece degli elateri unitarî avremo gli elateri effettivi, uguali e di segno contrario alle forze esterne, che sollecitano il corpo, ed in base alle cose dette superiormente le derivate di campo del lavoro di deformazione verrà a coincidere colla derivata ordinaria della stessa funzione considerata come funzione degli spostamenti medî dei suoi elementi di volume oppure degli elateri effettivi agenti sui medesimi. Se si tiene presente la considerazione che le forze esterne P sono uguali e di segno contrario agli elateri effettivi l'enunciato del teorema superiore si trasforma nel modo seguente: *Le derivate del lavoro di deformazione, dato in funzione degli spostamenti rispetto agli spostamenti dei diversi punti sono uguali alle forze esterne applicate ai medesimi (elementi infinitamente piccoli aventi come centro il punto considerato): le derivate del lavoro di deformazione dato in funzione delle forze esterne rispetto alle forze applicate ai diversi punti dànno gli spostamenti che loro corrispondono*, cioè si ottiene il teorema sulle derivate del lavoro di deformazione conosciuto sotto il nome di teorema di Castigliano.

È quasi inutile avvertire che quando si tratta di forze esercitate in punti isolati, nel qual caso l'espressione del lavoro di deformazione in funzione delle forze esterne si riduce ad un numero finito di termini, l'enunciato del teorema si riferisce direttamente alle forze effettive applicate ai singoli punti. Quando invece si tratta di distribuzione continua di forze, sia agenti sulla massa degli elementi del corpo, sia sulle sue superficie, il teorema va riferito alle forze esercitate sopra porzioni elementari Δs di volume o $\Delta\sigma$ di superficie intorno al punto che si considera, ovvero alle forze unitarie che agiscono in quegli elementi (*).

Le equazioni (43) e (44) congiunte al teorema di Castigliano dànno

$$\delta L = -\Sigma(\pi\,\delta\eta) = \Sigma\left(\frac{dL}{d\eta}\delta\eta\right) = -\Sigma(\eta\,\delta\pi) = \Sigma\left(\frac{d\Gamma}{dP}\delta P\right) = \delta\Gamma.$$

Se questo risultato si combina colla proprietà dell'equilibrio stabile che l'energia potenziale deve essere un minimo (legge del Dirichlet) si arriva facilmente alla dimostrazione del teorema di Menabrea per mezzo delle considerazioni svolte al numero 40 e che qui ci sembra superfluo di ripetere. Riteniamo però opportuno di ritornare ancora una volta sopra un'osservazione (**) cioè

(*) Donati, Memoria citata.

(**) Donati, Memoria citata. Vedi anche Viola, *Annali della Società degli Ingegneri e degli Architetti italiani*, 1890.

che le funzioni $L=\Sigma f(a)^2\Delta s$ e $\Gamma=\Sigma\phi(p)^2\Delta s$ considerate in se stesse ed astrattamente non rappresentano il lavoro di deformazione di un corpo, ma semplicemente due funzioni di campo delle deformazioni o delle tensioni molecolari. Solo quando le deformazioni o le forze molecolari sono fra loro compatibili, cioè corrispondono ad uno stato possibile e reale di deformazione del corpo sotto l'azione di forze determinate L e Γ possono essere considerate come funzioni degli spostamenti e degli elateri o delle forze esterne ed in tal caso esse esprimono realmente il lavoro di deformazione del corpo, al quale si riferiscono. Le condizioni poi di compatibilità per le deformazioni (Num. 29) e le condizioni correlative fra le forze molecolari corrispondono esattamente alle condizioni di minimo delle funzioni L e Γ, che solo per questo ultimo speciale valore rappresentano il lavoro di deformazione del corpo. Infatti la condizione di minimo della funzione Γ compatibilmente colle condizioni imposte dal fatto che il sistema è in equilibrio, cioè nell'interno del corpo

$$\frac{dp_{xx}}{dx}+\frac{dp_{xy}}{dy}+\frac{dp_{xz}}{dz}+X=0$$

$$\frac{dp_{xy}}{dx}+\frac{dp_{yy}}{dy}+\frac{dp_{yz}}{dz}+Y=0$$

$$\frac{dp_{xz}}{dx}+\frac{dp_{yz}}{dy}+\frac{dp_{zz}}{dz}+Z=0$$

ed alla superficie

$$p_{xx}\cos\alpha+p_{xy}\cos\beta+p_{xz}\cos\gamma=p_{nx}$$

$$p_{xy}\cos\alpha+p_{yy}\cos\beta+p_{yz}\cos\gamma=p_{ny}$$

$$p_{xz}\cos\alpha+p_{yz}\cos\beta+p_{zz}\cos\gamma=p_{nz}$$

importa che, indicando con ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z tre funzioni arbitrarie dei punti del corpo, sia verificata l'equazione (*)

$$\int\left[i_x\delta p_{xx}+i_y\delta p_{yy}+i_z\delta p_{zz}+g_{xy}\delta p_{xy}+g_{xz}\delta p_{xz}+g_{yz}\delta p_{yz}\right]ds+$$

(*) Donati, Memoria citata.

$$+\int\left[\begin{array}{l}\varphi_x\left(\frac{d(\delta p_{xx})}{dx}+\frac{d(\delta p_{xy})}{dy}+\frac{d(\delta p_{xz})}{dz}\right)+\\ +\varphi_y\left(\frac{d(\delta p_{xy})}{dx}+\frac{d(\delta p_{yy})}{dy}+\frac{d(\delta p_{yz})}{dz}\right)+\\ +\varphi_z\left(\frac{d(\delta p_{xz})}{dx}+\frac{d(\delta p_{yx})}{dy}+\frac{d(\delta p_{zz})}{dz}\right)\end{array}\right]ds+$$

$$+\int\left[\begin{array}{l}\varphi_x(\delta p_{xx}\cos\alpha+\delta p_{xy}\cos\beta+\delta p_{xz}\cos\gamma)+\\ +\varphi_y(\delta p_{xy}\cos\alpha+\delta p_{yy}\cos\beta+\delta p_{yz}\cos\gamma)+\\ +\varphi_z(\delta p_{xz}\cos\alpha+\delta p_{yz}\cos\beta+\delta p_{zz}\cos\gamma)\end{array}\right]d\sigma=0$$

perchè le forze X, Y, Z, p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} ossia gli elateri interni e superficiali si suppongono dati in tutto il corpo, e quindi la loro variazione è necessariamente uguale a zero. Se i nove termini del secondo integrale di spazio si trasformano in modo analogo al seguente (Num. 51, pag. 147)

$$\int\varphi_x\frac{d(\delta p_{xx})}{dx}ds=-\int\frac{d\varphi_x}{dx}\delta p_{xx}ds-\int\varphi_x\delta p_{xx}\cos\alpha\,d\sigma$$

si ottiene immediatamente dall'equazione superiore

$$\int\left[\left(i_x-\frac{d\varphi_x}{dx}\right)\delta p_{xx}+\left(i_y-\frac{d\varphi_y}{dy}\right)\delta p_{yy}+\left(i_z-\frac{d\varphi_z}{dz}\right)\delta p_{zz}+\right.$$

$$+\left(g_{xy}-\left(\frac{d\varphi_x}{dy}+\frac{d\varphi_y}{dx}\right)\right)\delta p_{xy}+\left(g_{xz}-\left(\frac{d\varphi_x}{dz}+\frac{d\varphi_z}{dx}\right)\right)\delta p_{xz}+$$

$$\left.+\left(g_{yz}-\left(\frac{d\varphi_y}{dz}+\frac{d\varphi_z}{dy}\right)\right)\delta p_{yz}\right]ds=0$$

che deve verificarsi qualunque siano i valori δp_{xx}, δp_{xy}, ... ecc., cioè in tutti i punti del corpo dovranno verificarsi le sei equazioni

$$i_x=\frac{d\varphi_x}{dx},\quad i_y=\frac{d\varphi_y}{dy},\quad i_z=\frac{d\varphi_z}{dz},\quad g_{xy}=\frac{d\varphi_x}{dy}+\frac{d\varphi_y}{dx},$$

$$g_{xz}=\frac{d\phi_2}{dz}+\frac{d\phi_z}{dx},\quad g_{yz}=\frac{d\phi_y}{dz}+\frac{d\phi_z}{dy}$$

che è quanto dire che le deformazioni $i_x, i_y, \ldots$ ecc., dipendono dai valori delle derivate di tre funzioni delle coordinate dei punti del corpo e perciò soddisfano necessariamente alle condizioni di compatibilità trovate al numero 29 (*).

Risulta dalle cose svolte superiormente e nel numero 40, che: *In un corpo elastico o sistema di corpi elastici per determinati valori degli elateri il lavoro di deformazione è rappresentato dal valor minimo della funzione* Γ (*od* L) *subordinatamente alle condizioni imposte, cioè la nullità delle variazioni dei valori degli elateri; se il corpo o sistema di corpi è soggetto a reazioni incognite dovute a vincoli invariabili queste possono essere determinate mediante la suddetta condizione di minimo.*

Sotto questa forma la condizione di minimo relativa al lavoro di deformazione dei corpi elastici acquista maggiore generalità; più che delle forze esterne è tenuto conto del valore degli elateri, che sono elementi intrinseci allo stato del corpo e dipendenti dalla deformazione, che esso subisce, ed il teorema è valido anche per

---

(*) Queste considerazioni fanno anche comprendere perchè al numero 40 (Pag. 118) è stato detto che il teorema di Menabrea in relazione alle applicazioni che se ne fanno nella scienza delle costruzioni sarebbe forse più convenientemente enunciato nel modo seguente: *In un corpo elastico od in un sistema di corpi elastici mantenuto in equilibrio sotto l'influenza di forze esterne note e di reazioni incognite prodotte da vincoli o legami invariabili imposti al sistema le derivate prime del lavoro di deformazione espresso in funzione di tutte le forze note ed incognite prese rispetto alle reazioni incognite debbono essere uguali allo zero.* Non è infatti difficile comprendere come in un corso di meccanica applicata alle costruzioni svolto unicamente in relazione a scopi tecnici possa essere preferito un enunciato che, fornendo ugualmente le equazioni necessarie a risolvere i problemi costruttivi, si dimostra con somma facilità e risulta per così dire evidente dalle considerazioni svolte nella prima parte del numero 40 (Pag. 116) ed ha il vantaggio di non costringere la mente a riferirsi a concetti, che sviluppati completamente obbligano a supporre una scomposizione ideale del sistema in parti separate, ad estendere il nome di lavoro di deformazione ad una funzione (le funzioni $L=\Sigma f(a)^2\Delta s$ oppure $\Gamma=\Sigma\varphi(p)^2\Delta s$) che non lo rappresenta effettivamente pel corpo dato altro che per un suo valore, od almeno a prendere in considerazione queste funzioni, e ad immaginare deformazioni, che in realtà non possono essere verificate. Questo enunciato però ha l'inconveniente che il teorema in tal caso ha un significato molto più ristretto, accennato nelle considerazioni svolte al numero 40 (Pag. 116), e non si presta a considerazioni d'ordine generale.

sistemi in movimento. Infatti alla fine di ciascuno degli infiniti istanti successivi in cui può intendersi diviso il tempo della durata del moto gli elateri sono perfettamente determinati e sono uguali precisamente alle forze esterne diminuite delle componenti d'inerzia (Num. 51, pag. 150). È d'altronde naturale che debba essere così poichè in ultima analisi la condizione di minimo si riduce alle condizioni di compatibilità (Num. 29, pag. 78), che debbono sempre verificarsi in qualsiasi sistema di spostamenti elastici reali.

II.

Se si considerano i teoremi VI ed VIII, ossia se si combinano le equazioni (37) e (40) si ottiene la serie di uguaglianze

$$\Sigma \frac{df(a')^2}{da} a'' = \Sigma p' a'' = \Sigma p'' a' = \Sigma \frac{df(a''^2)}{da} a' \qquad (48)$$

che sussiste per tutti gli elementi di volume, che compongono un corpo elastico. Le p (derivate del lavoro di deformazione dell'elemento di volume espresso in funzione delle deformazioni prese rispetto a queste stesse quantità) esprimono le forze elastiche agenti intorno ad ogni elemento oppure, se si considerano con segno cambiato, le reazioni che l'elemento stesso oppone nelle varie direzioni alle azioni che esso subisce, le a rappresentano le deformazioni corrispondenti e ciò sia che ci riferiamo all'unità di misura (nel qual caso per applicare le uguaglianze (48) bisognerà moltiplicare ciascuna di esse per l'elemento di volume), sia che ci riferiamo alle forze elastiche ed alle deformazioni effettive, che si manifestano in ogni volume e campo elementare (Num. 50). Inoltre Σpa, $\Sigma p'a'$, ... rappresentano il doppio del valore del lavoro di deformazione del volume elementare, ma nello stesso tempo sono anche uguali al momento virtuale delle forze elastiche agenti sopra l'elemento considerato quando i punti del corpo subiscono piccolissimi spostamenti u, v, w, u', v', w', ecc.: infatti se in una direzione qualsiasi, per es., parallelamente all'asse delle x, consideriamo la componente p_{xx} della forza agente fra due punti m ed m' infinitamente vicini, il momento virtuale corrispondente alla medesima in causa di uno spostamento accompagnato da una deformazione infinitamente piccola è dato da

$$-p_{xx}u + p_{xx}\left(u + \frac{du}{dx}du\right) = p_{xx}\frac{du}{dx}du = pa.$$

A questo stesso risultato si arriva considerando la trasformazione dell'integrale

$$\int(\Sigma p a)\,ds=\int(p_{xx}i_x+p_{yy}i_y+p_{zz}i_z+p_{xy}g_{xy}+p_{xz}g_{xz}+$$

$$+p_{yz}g_{yz})\,ds=-\int(\pi\eta)$$

eseguita al numero 53 (Pag. 152); infatti le η esprimono simbolicamente gli spostamenti dei varî punti e gli elateri π le risultanti delle reazioni elastiche unitarie agenti sopra ciascun elemento di volume. Gli spostamenti e le deformazioni δ' ed a' e δ'' ed a'' corrispondono a due sistemi di spostamenti infinitamente piccoli, poichè sono le deformazioni elastiche subìte dai punti, cui sono applicate le forze, inoltre essi sono compatibili coi vincoli (qualunque essi siano) imposti al sistema, perchè per ipotesi sono gli spostamenti e le deformazioni corrispondenti a due stati di equilibrio, quindi pel principio delle velocità virtuali dovrà essere

$$\Sigma P'\delta''=\Sigma p'a'' \qquad \Sigma P''\delta'=\Sigma p''a' \tag{49}.$$

Ma l'equazione (40) dà la relazione $\Sigma p'a''=\Sigma p''a'$, che deve sempre verificarsi in ogni caso, dunque sussisterà sempre il seguente sistema di uguaglianze

$$\Sigma P'\delta''=\Sigma p'a''=\Sigma p''a'=\Sigma P''\delta' \tag{50}$$

da cui si ricavano le tre equazioni

$$\Sigma P'\delta''=\Sigma P''\delta' \tag{51}$$

$$\Sigma p'a''=\Sigma p''a' \tag{52}$$

$$\Sigma P''\delta'=\Sigma p'a'' \tag{53}.$$

Queste tre equazioni possono anche essere dimostrate usando il teorema X, infatti si è già osservato che le relazioni

$$\Sigma\frac{df(a')^2}{da}a''=\Sigma\frac{df(a'')^2}{da}a'=\Sigma\frac{d\phi(p')^2}{dp}p''=\Sigma\frac{d\varphi(p'')^2}{dp}p'$$

tenuto conto del teorema VIII equivalgono all'equazione

$$\Sigma p'a''=\Sigma p''a'.$$

L'equazione (51) contiene il teorema di Betti: *In un corpo elastico a due sistemi di forze applicate negli stessi punti e nelle medesime direzioni corrispondono due sistemi tali di spostamenti nelle direzioni delle forze che la somma dei prodotti delle forze del primo sistema per gli spostamenti corrispondenti al secondo è uguale alla somma dei prodotti delle forze del secondo sistema per gli spostamenti corrispondenti prodotti dalle forze del primo.* Se le forze P' e P'' si suppongono tali che sia $P'_1=1$ e $P''_2=1$ e

$$P'_2=P'_3=P'_4=\ldots=P'_n=0$$

$$P''_1=P''_3=P''_4=P''_5=\ldots--=P''_n=0$$

allora l'equazione (51) diventa

$$\delta'_2=\delta''_1 \qquad (54)$$

che contiene il principio o teorema di Maxwell: *In un corpo elastico o sistema di corpi elastici lo spostamento di un punto quando una forza è applicata ad un altro è uguale allo spostamento di quest'ultimo nella direzione in cui agiva la forza considerata quando la stessa forza è applicata al primo nella direzione, nella quale era stato misurato lo spostamento.* Non ci fermiamo sulle conseguenze di questi due teoremi poichè esse sono state esposte ai numeri 39, 72, 78, 79, ecc., e crediamo inutile mettere anche una volta in evidenza i varî ed importanti corollarî, che dai medesimi si deducono con facilità e senza bisogno di analisi speciale.

L'equazione (52) corrisponde esattamente all'equazione (51) e comprende un teorema analogo a quello di Betti relativo però alle forze e deformazioni elastiche: *In un corpo sollecitato da due sistemi di forze* P′ *e* P″ *agenti negli stessi punti e nelle medesime direzioni la somma dei prodotti delle forze o reazioni elastiche corripondenti alle forze del primo sistema* (P′) *per le deformazioni elastiche prodotte nei singoli punti e nelle direzioni delle anzidette reazioni elastiche dalle forze* (P″) *del secondo è uguale alla somma dei prodotti delle forze elastiche corrispondenti alle forze del secondo sistema* (P″) *per le deformazioni elastiche prodotte dalle forze* (P′) *del primo.*

Se l'equazione (52)

$$\Sigma p' a''=\Sigma p'' a'$$

si scrive mettendo in evidenza le forze molecolari e le deformazioni elastiche usando i simboli indicati superiormente, essa diventa

$$\Sigma[p'_{xx}i''_x+p'_{yy}i''_y+p'_{zz}i''_z+p'_{xy}g''_{xy}+p'_{xz}g''_{xz}+p'_{yz}g''_{yz}]\Delta S=$$
$$=\Sigma[p''_{xx}i'_x+p''_{yy}i'_y+p''_{zz}i'_z+p''_{xy}g'_{xy}+p''_{xz}g'_{xz}+p''_{yz}g'_{yz}]\Delta S$$

dalla quale integrando e trasformando l'integrale in due, uno esteso nell'interno del corpo e l'altro alla superficie del medesimo, servendosi del metodo impiegato ai numeri 51 e 53 del capitolo IV, risulta

$$\left.\begin{aligned}
&-\int\left[\begin{array}{l}\left(\frac{dp'_{xx}}{dx}+\frac{dp'_{xy}}{dy}+\frac{dp'_{xz}}{dz}\right)u''+\\ +\left(\frac{dp'_{xy}}{dx}+\frac{dp'_{yy}}{dy}+\frac{dp'_{yz}}{dz}\right)v''+\\ +\left(\frac{dp'_{xz}}{dx}+\frac{dp'_{yz}}{dy}+\frac{dp'_{zz}}{dz}\right)w''\end{array}\right]ds-\\
&-\int\left[\begin{array}{l}(p'_{xx}\cos\alpha+p'_{xy}\cos\beta+p'_{xz}\cos\gamma)u''+\\ +(p'_{xy}\cos\alpha+p'_{yy}\cos\beta+p'_{yz}\cos\gamma)v''+\\ +(p'_{xz}\cos\alpha+p'_{yz}\cos\beta+p'_{zz}\cos\gamma)w''\end{array}\right]d\sigma=\\
&=-\int\left[\begin{array}{l}\left(\frac{dp''_{xx}}{dx}+\frac{dp''_{xy}}{dy}+\frac{dp''_{xz}}{dz}\right)u'+\\ +\left(\frac{dp''_{xy}}{dx}+\frac{dp''_{yy}}{dy}+\frac{dp''_{yz}}{dz}\right)v'+\\ +\left(\frac{dp''_{xz}}{dx}+\frac{dp''_{yz}}{dy}+\frac{dp''_{zz}}{dz}\right)w'\end{array}\right]ds-\\
&-\int\left[\begin{array}{l}(p''_{xx}\cos\alpha+p''_{xy}\cos\beta+p''_{xz}\cos\gamma)u'+\\ +(p''_{xy}\cos\alpha+p''_{yy}\cos\beta+p''_{yz}\cos\gamma)v'+\\ +(p''_{xz}\cos\alpha+p''_{yz}\cos\beta+p''_{zz}\cos\gamma)w'\end{array}\right]d\sigma
\end{aligned}\right\}\quad(55)$$

equazione dalla quale si ricava pure il teorema di reciprocità fra gli elateri (π) e gli spostamenti (η) e quindi anche fra le forze esterne e gli spostamenti dei loro punti d'applicazione, perchè

allo stato di equilibrio le forze esterne sono uguali e di segno contrario agli elateri elastici (interni o superficiali), cioè si ricava ancora il teorema di Betti.

Finalmente l'equazione (53)

$$\Sigma P' \delta'' = \Sigma p'' a'$$

che, mettendo in evidenza le deformazioni elastiche e le forze molecolari esercitate sopra ogni punto mediante le convenzioni fatte superiormente, può anche scriversi

$$\left.\begin{aligned} \Sigma P' \delta'' = \Sigma [p''_{xx} i'_x + p''_{yy} i'_y + p''_{zz} i'_z + p''_{xy} g'_{xy} + \\ + p''_{xz} g'_{xz} + p''_{yz} g'_{yz}] \Delta s = \Sigma P'' \delta' \end{aligned}\right\} \quad (56)$$

contiene il teorema, che al numero 73 abbiamo chiamato teorema di correlazione, cioè: *In un corpo o sistema di corpi elastici sollecitati da due sistemi di forze agenti negli stessi punti e nella medesima direzione la somma dei prodotti delle forze del primo sistema* (P') *per gli spostamenti dei loro punti di applicazione prodotti dalle forze del secondo* (P'') *è uguale alla somma* (*integrale*) *delle forze molecolari corrispondenti alle forze del secondo sistema* (P'') *moltiplicate ciascuna per la deformazione elastica corrispondente prodotta dalle forze del primo* (P') *o viceversa.*

Al numero 51 abbiamo visto che gli elateri allo stato di equilibrio sono eguali e di segno contrario alle forze esterne, interne e superficiali X, Y, Z, p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}, che nel caso invece del moto gli elateri interni sono in ogni punto uguali e di segno contrario alle forze esterne X, Y, Z, diminuite della corrispondente componente d'inerzia. Riprendiamo le due equazioni

$$\Sigma (\pi' \eta'') = \Sigma (\pi'' \eta')$$

$$- \Sigma (\pi' \eta'') = \Sigma p'' a'.$$

Se supponiamo che gli elementi materiali di un corpo elastico siano in movimento, e consideriamo spostamenti η molto piccoli, sostituendo agli elateri π (π' oppure π'') le forze esterne P (P' oppure P'') diminuite delle corrispondenti componenti d'inerzia

$$m \frac{d^2 \eta}{dt^2} \left(m \frac{d^2 \eta^1}{dt^2} \text{ oppure } m \frac{d^2 \eta''}{dt^2} \right)$$

si ottiene

$$\Sigma\left(P'-m\frac{d^2\eta'}{dt^2}\right)\eta''=\Sigma\left(P''-m\frac{d^2\eta''}{dt^2}\right)\eta'$$

$$\Sigma\left(P'-m\frac{d^2\eta'}{dt^2}\right)\eta''=\Sigma p''a'.$$

Se le forze esterne sono tutte uguali allo zero, tanto alla superficie che nell'interno del corpo, allora

$$\Sigma\left(m\frac{d^2\eta'}{dt^2}\right)\eta''=\Sigma\left(m\frac{d^2\eta''}{dt^2}\right)\eta' \qquad -\Sigma\left(m\frac{d^2\eta'}{dt^2}\right)\eta''=\Sigma p''a'$$

equazioni che scritte impiegando i simboli comunemente usati in questo libro diventano

$$\left.\begin{aligned}&\Sigma m\left[\frac{d^2u'}{dt^2}u''+\frac{d^2v'}{dt^2}v''+\frac{d^2w'}{dt^2}w''\right]=\\&=\Sigma m\left[\frac{d^2u''}{dt^2}u'+\frac{d^2v''}{dt^2}v'+\frac{d^2w''}{dt^2}w'\right]\end{aligned}\right\}(52^{bis})$$

$$\left.\begin{aligned}&-\Sigma m\left[\frac{d^2u'}{dt^2}u''+\frac{d^2v'}{dt^2}v''+\frac{d^2w'}{dt^2}w\right]=\Sigma\left[p''_{xx}i'_x+\right.\\&\left.+p''_{yy}i'_y+p''_{zz}i'_z+p''_{xy}g'_{xy}+p''_{xz}g'_{xz}+p''_{yz}g'_{yz}\right]\Delta s\end{aligned}\right\}(56^{bis})$$

e contengono due teoremi relativi ai corpi elastici in movimento analoghi a quelli di reciprocità e di correlazione dimostrati superiormente nel caso dell'equilibrio. Questi due teoremi potranno essere distinti cogli stessi nomi e potranno servire nello studio delle vibrazioni elastiche in modo analogo a quello dei due teoremi superiormente considerati nello studio dei corpi elastici in equilibrio.

Richiamiamo che il lavoro di deformazione di un corpo elastico, L oppure Γ, secondochè esso è espresso in funzione delle deformazioni a, oppure delle forze elastiche p o delle forze esterne P, è uguale alla somma dei lavori corrispondenti a tutti i suoi elementi per cui

$$\left.\begin{aligned}&L=\Sigma f(a)^2 \quad \Delta L=\Sigma\Sigma\frac{df(a)^2}{da}\Delta a\\&\Gamma=\Sigma\phi(p)^2 \quad \Delta\Gamma=\Sigma\Sigma\frac{d\phi(p)^2}{dp}\Delta p\end{aligned}\right\}(57)$$

e che le deformazioni e le forze elastiche sono legate fra loro e colle forze esterne da relazioni lineari senza termine indipendente in guisa che fra loro esiste una corrispondenza univoca e, secondo i casi ed i dati del problema, le une possono essere considerate funzioni delle altre o viceversa. Supponiamo che il sistema di forze P'' sia identico a quello delle forze P' ad eccezione della forza P''_k che riterremo uguale a $P'_k + \Delta P_k$. Il principio delle velocità virtuali fornisce l'equazione

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^{k-1} P'\delta' + P'_k\delta'_k + \sum_{k+1}^{n} P'\delta' = \Sigma\Sigma \frac{df(a')^2}{da} a' = 2\Sigma f(a')^2 = \\ = 2\Sigma\phi(p')^2 = 2L = 2\Gamma \end{aligned}\right\} \quad (58)$$

ed il teorema di correlazione, tenendo conto delle relazioni (34), (53) e (57) dà l'altra equazione

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^{k-1} P'\delta' + \delta'_k(P'_k + \Delta P_k) + \sum_{k+1}^{n} P'\delta' = \\ = \Sigma\Sigma \frac{df(a')}{da}(a' + \Delta a') = 2\Sigma f(a)^2 + \Delta\Sigma f(a')^2 = \\ = 2\Sigma\phi(p')^2 + \Delta\Sigma\phi(p')^2 = 2L + \Delta L = 2\Gamma + \Delta\Gamma \end{aligned}\right\} \quad (59).$$

Dalla (59) sottraendo la (58) si ricava

$$\delta'_k \Delta P'_k = \Delta L = \Delta\Gamma \quad (60)$$

e poichè ΔP_k e $\Delta\Gamma$ sono quantità molto piccole, che dipendono l'una dall'altra in guisa che $\Delta\Gamma$ esprime l'incremento, che assume la funzione Γ quando la forza P_k prende l'incremento ΔP_k annullandosi contemporaneamente, per la definizione stessa di derivata si ottiene

$$\delta'_k = \text{limit} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta P_k} = \frac{d\Gamma}{dP_k}$$

ed in modo analogo

$$P'_k = \text{limit} \frac{\Delta L}{\Delta\delta_k} = \frac{dL}{d\delta_k}$$

equazioni che contengono come deduzione dal teorema di correlazione quello relativo alle derivate del lavoro più particolarmente applicato al caso, che più comunemente presentasi all'ingegnere,

cioè a quello di forze isolate agenti sopra un sistema elastico resistente.

Questo stesso risultato può essere raggiunto con molta semplicità nel modo seguente: Supponiamo che il sistema di forze P' coincida col sistema delle forze P e che il sistema P'' sia uguale a $P+\Delta P\,[P_1+\Delta P_1,\ P_2+\Delta P_2+\ldots+P_n+\Delta P_n]$ allora gli spostamenti dei loro punti d'applicazione saranno rappresentati rispettivamente dalle quantità $\lambda\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n)$ e $\lambda+\Delta\lambda\ (\lambda_1+\Delta\lambda_1, \lambda_2+\Delta\lambda_2, \ldots \lambda_n+\Delta\lambda_n)$. Il teorema di Betti fornisce l'equazione

$$\Sigma P''\delta'=\Sigma P'\delta'' \tag{51}$$

quello di correlazione dà

$$\Sigma P''\delta'=\Sigma p'a'' \tag{53}$$

quindi combinando le due equazioni e tenendo conto delle proprietà delle funzioni omogenee contenute principalmente nei teoremi VI e VII risulta nel nostro caso

$$P(\lambda+\Delta\lambda)=\Sigma\lambda(P+\Delta P)=\Sigma\left[p(a+\Delta a)\right]=\Sigma\left(\Sigma\frac{df(a)^2}{da}a\right)\Delta s_r+$$

$$+\Sigma\left(\Sigma\frac{df(a)}{da}\Delta a\right)\Delta s_r=2L+\Delta L=2\Gamma+\Delta\Gamma.$$

Il lavoro prodotto dalle forze esterne supposte costanti di intensità e direzione è il doppio (Teorema di Clapeyron, num. 53) del lavoro di deformazione, quindi togliendo da questa serie di uguaglianze la quantità

$$\Sigma P\lambda=2L=2\Gamma$$

rimane

$$\Sigma P\Delta\lambda=\Sigma\lambda\Delta P=\Delta L=\Delta\Gamma. \tag{61}$$

Se si suppongono uguali a zero gli incrementi ΔP di tutte le forze P ad eccezione di quello corrispondente alla forza P_k le equazioni (61) dànno la relazione

$$\lambda_k\Delta P=\Delta\Gamma.$$

Se invece si suppongono uguali a zero le variazioni corrispondenti ai punti d'applicazione delle forze esterne ad eccezione di quella corrispondente al punto k, $\Delta\lambda_k$ le stesse equazioni (61) dànno l'altra relazione

$$P_k\Delta\lambda_k=\Delta L$$

e quindi come precedentemente si ricava ancora il teorema di CASTIGLIANO

$$\left.\begin{aligned} \lambda_k &= \text{limit}\frac{\Delta\Gamma}{\Delta P_k} = \frac{d\Gamma}{dP_k} \\ P_k &= \text{limit}\frac{\Delta L}{\Delta\lambda_k} = \frac{dL}{d\lambda_k} \end{aligned}\right\} \quad (62).$$

Se nella (61) a P_k e λ_k si sostituiscono i valori forniti dalle (62) si ottiene

$$\Sigma\frac{dL}{d\lambda}\delta\lambda = \Sigma\frac{d\Gamma}{dP}\delta P = \delta L = \delta\Gamma$$

ossia l'equazione (54) (Num. 39, pag. 113), che al numero 40 ha servito come lemma per arrivare alle dimostrazione del teorema di MENABREA.

Non crediamo di insistere maggiormente sopra questo argomento ritenendo che quanto è stato detto possa essere sufficiente per mostrare la relazione che passa fra alcuni teoremi di fisica, ed in modo particolare della teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici, e le proprietà delle funzioni omogenee di primo e secondo grado, nonchè quella che passa fra i predetti teoremi, in guisa che ciascuno di essi può essere in vario modo collegato cogli altri. Ciò spiega anche come molti problemi possono essere stati risoluti in questo corso colle stesse formole, sia partendo dai teoremi sulle derivate del lavoro, sia da quello di correlazione.

NOTA B.

Cenni storici e bibliografici.

Complemento indispensabile di qualsiasi disciplina è la conoscenza della sua storia, del modo col quale essa ha avuto origine, del successivo incremento e delle cause del suo maggiore o minore sviluppo, non chè delle opere principali, che in certo qual modo servono a stabilirne il progresso. Un lavoro di questo genere non potrebbe trovar luogo in questo libro, in cui si sono voluti svolgere soltanto gli elementi della scienza delle costruzioni, quindi rimandiamo il lettore, che desiderasse acquistare ampie cognizioni su questo argomento, al bellissimo studio storico e critico messo come prefazione da Barré de Saint-Venant alla terza edizione del *Resumé des leçons données à l'École des ponts et chaussées sur l'application de la mécanique à l'établissement des constructions et des machines* di Navier. Qui ci limiteremo a dare soltanto sommariamente alcuni cenni sui progressi successivi di questa scienza ed a menzionare le opere recenti, che possono essere consultate con maggior profitto da chi vuole incominciare a studiare con una certa estensione questo ramo importantissimo dell'ingegneria.

È indubitato che gli architetti del Medio Evo avevano certe nozioni sulla statica e sulla resistenza dei materiali dedotte probabilmente per confronto mediante osservazioni ed in qualche caso anche mediante esperienze dirette; essi ragionavano e discutevano le unioni dei varî pezzi o parti componenti una costruzione, ma noi non possediamo alcun scritto, il quale ci informi fino a qual punto giungessero le loro cognizioni. « Essi cercavano incessantemente (dice Viollet le Duc nel *Dictionnaire raisonné de l'Architecture française* alla voce *Construction*), e la consuetudine non aveva alcun potere sopra di essi: cercando trovavano e non dicevano mai siamo arrivati . . . Tutti i loro sforzi tendevano ad equilibrare le forze ed a non considerare i punti d'appoggio che come colonne mantenute verticali per la neutralizzazione di tutte le azioni oblique . . . Essi conoscevano il principio della leva dritta ed angolare, e probabilmente non ignoravano quello della composizione delle forze, che può esserne dedotto così naturalmente quando le forze sono rettangolari, sebbene se ne attribuisca la scoperta a Stevin, che per il primo l'ha formulato nella sua *Statica* nel 1586. »

Le cognizioni erano ristrette entro questi limiti quando Galileo (*) colla sua potente intuizione poneva nel 1638 le basi scientifiche della teoria della resistenza dei materiali interpretando e ragionando le sue esperienze sulla resistenza delle travi sollecitate da forze normali all'asse e fondava in un solo tratto la teoria dei solidi di uniforme resistenza col determinare il profilo, che essi debbono avere per soddisfare a questa condizione, cioè perchè lo sforzo unitario massimo sia uguale in tutte le sezioni trasversali della travatura. Galileo supponeva che le forze molecolari fossero distribuite uniformemente nella sezione affaticata e quindi che la loro risultante passasse pel centro di gravità e che l'asse di rotazione della sezione potesse essere considerato come esistente alla estremità inferiore della sezione. In base a queste supposizioni esso arriva a risultati che l'analisi e l'esperienza hanno in seguito mostrato giusti nel loro insieme, e solo è errato il teorema relativo al rapporto esistente fra la resistenza alla rottura prodotta da uno sforzo longitudinale e quella prodotta da uno sforzo trasversale, poichè è il solo punto (**), sul quale influisca la sua doppia ipotesi, cioè la supposizione che gli sforzi molecolari siano tutti uguali in ogni sezione e che l'asse di rotazione si trovi al contorno della sezione stessa.

Le teorie di Galileo commentate e svolte da molti, fra i quali sono specialmente da citarsi il Padre Fabbri (1669), Vincenzo Viviani ed il Padre Grandi (***), spinsero i cultori della scienza ad occuparsi di questi argomenti. Infatti poco tempo dopo, e precisamente nel 1678, Roberto Hooke poneva la base della teoria dell'elasticità enunciando il suo celebre principio *ut tensio, sic vis*, sulla proporzionalità degli sforzi molecolari alle corrispondenti deformazioni, e Mariotte nel 1680 faceva osservare che l'asse di rotazione non poteva essere supposto al contorno della sezione trasversale dei solidi prismatici inflessi, perchè tutti i corpi, anche i più duri, più o meno cambiano di forma sotto l'azione degli sforzi, estendendosi o comprimendosi a seconda della natura degli sforzi stessi. Esso quindi suppone che l'asse di rotazione passi pel centro di gravità della sezione resistente; però un errore di calcolo sfuggito per inavvertenza lo conduce a trovare un risultato non giusto. Questo fatto non deve per altro impedire di considerare Mariotte come quello, che ha stabilito in modo quasi com-

---

(*) Galileo, *Dialoghi delle nuove scienze*, Firenze, 1885.

(**) Barré de Saint-Venant, Opera citata.

(***) *Illustrazioni* del Viviani e del Grandi, *ai Dialoghi delle nuove scienze* di Galileo, Firenze.

pleto, almeno pei prismi a sezione rettangolare, i principî sui quali riposa anche oggi la teoria della flessione delle travature. Ordinariamente, osserva Barrè de Saint-Venant (*), si considera J. Bernoulli come l'autore delle ipotesi in uso pel calcolo delle travi, ma ciò non è giusto nè giustificabile, poichè il suo scritto fu pubblicato nel 1705. Inoltre, sbagliando come Mariotte dal semplice al doppio, esso afferma nel suo lemma IV che la forza capace di rompere un solido prismatico incastrato orizzontalmente ad un estremo è la stessa che sarebbe necessaria qualora le fibre fossero tutte tese o compresse, e che la posizione dell'asse di rotazione è indifferente pei calcoli di resistenza. Malgrado che scienziati eminenti, come Leibnitz e Varignon, si siano occupati di questa questione, essa non fu risoluta esattamente ed in modo completo che nel 1713 da Parent, che primo ha fissato la posizione dell'asse di rotazione introducendo in un modo notevole ed originale insieme all'equazione d'equilibrio dei momenti la condizione necessaria per assicurare l'equilibrio di traslazione parallelamente all'asse del solido. Allo stesso risultato giungeva, partendo da considerazioni analoghe, Belfinger nel 1729, rettificando la conclusione erronea, che il Mariotte aveva trovato nel 1680.

Le cognizioni sulle applicazioni della meccanica al calcolo della stabilità e resistenza delle costruzioni arrivate a questo punto rimasero lungo tempo stazionarie, poichè gli scienziati si sentirono attratti più specialmeute dallo studio delle curve elastiche prese dalle aste sottili inflesse. La ricerca di queste curve, più geometrica che fisica, ha potuto progredire anche prima che i lavori posteriori di Coulomb, Young e Navier avessero fatto conoscere i valori del modulo di elasticità e risoluto completamente il problema della flessione delle travature. Dopo i primi saggi di Galileo sulla natura dellè curve elastiche e di qualche altro a lui posteriore, come i PP. Pardies e de Lanis, J. Bernoulli indicò nel 1691 sotto forma di enigma ed esplicitamente nel 1694 e nel 1705 la vera natura di queste curve, che furono in seguito classificate e studiate da Eulero sviluppando particolarmente quanto si riferisce alla resistenza delle colonne inflesse lateralmente da forze agenti secondo il loro asse, da Lagrange e da altri. Contemporaneamente per l'opera degli stessi scienziati, prendevano notevole incremento le ricerche relative alla resistenza e deformazione delle lamine e superficie elastiche.

Lo sviluppo che incominciarono a prendere i grandi lavori nella seconda metà del secolo passato doveva necessariamente

(*) Opera citata.

richiamare l'attenzione degli studiosi sopra quelle ricerche, che più particolarmente potevano interessare l'ingegnere nell'esercizio della sua professione. Infatti nel 1773 COULOMB pubblicava la sua celebre memoria: *Essai sur une application des regles des maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'Architecture* (*Savants étrangers*, vol. VII, anno 1773) in cui, dice BARRÉ DE SAINT-VENANT, esso poneva quasi tutte le basi della teoria della stabilità delle costruzioni e mostrava che le questioni di equilibrio relative a queste opere possono essere trattate come problemi di massimo e minimo; ciò che, insieme alle ricerche teoriche di EULERO e LAGRANGE, era preludio al metodo dell'impiego del potenziale o lavoro meccanico seguito attualmente con successo da geometri eminenti. La memoria di COULOMB poco letta, e forse poco intesa, non influì molto sugli studi delle persone, che si occupavano di questo ramo di scienza applicata fino al 1820 circa, in cui NAVIER da un lato poneva le basi della meccanica molecolare colla sua memoria sopra le leggi dell'equilibrio e del moto dei corpi solidi elastici (*), e dall'altro nel suo corso di lezioni professato alla Scuola di ponti e strade riduceva ad un vero corpo di scienza lo studio razionale dei problemi costruttivi, ponendo e risolvendo pel primo problemi impliciti relativi all'equilibrio delle travature, ossia questioni, in cui il numero delle forze incognite è superiore alle condizioni d'equilibrio convenienti ai corpi rigidi.

Non è nostro scopo di esporre minutamente i successivi progressi fatti in questi ultimi settant'anni dalla teoria della resistenza dei materiali, tanto più che i richiami, note e date inserite nella parte prima di quest'opera sono sufficienti per far conoscere al lettore ciò che fra i medesimi vi è di più interessante. Ci limitiamo quindi ad accennare che la teoria matematica dell'elasticità si è sviluppata specialmente in causa dei lavori di POISSON, CAUCHY, LAMÉ, CLAPEYRON, BARRÉ DE SAINT-VENANT, CLEBSCH, KIRCHHOFF, GERING, mentre per opera di GREEN s'introduceva il metodo indicato nella meccanica analitica di LAGRANGE e conosciuto attualmente sotto il nome di *Metodo del potenziale*. Nello stesso tempo a MAQUORN-RANKINE, a MAC-CULLAGH, HAUGHTON, STOCKES, THOMSON, MAXWELL, KIRCHHOFF, NEUMANN, ecc., ed anteriormente all'illustre CLAUSIUS sono dovuti importanti lavori, che hanno mostrato i varî aspetti, che possono presentare le questioni relative all'equilibrio dei corpi elastici.

(*) *Mémoires de l'Institut*, vol. VII, anno 1821.

Durante questo stesso periodo di tempo lo studio dei problemi più direttamente relativi all'arte degli ingegneri faceva notevoli progressi cercando di soddisfare in modo esatto od approssimato ai varî casi, che lo sviluppo ognor crescente delle moderne costruzioni andava presentando. I principali giornali tecnici, e spesso anche gli Atti delle Accademie più conosciute (*), contengono in gran numero articoli e memorie relative ad argomenti, che interessano l'ingegnere costruttore. Riteniamo però sufficiente citare alcuni fra i principali trattati relativi a questa scienza, tanto più che nella parte seconda di quest'opera ad ogni argomento faremo seguire numerose indicazioni bibliografiche, che potranno utilmente servire al lettore desideroso di fare studî speciali.

Dopo i lavori di Bresse, Bertot e Clapeyron sulle travature ad asse rettilineo, e di Bresse, Darcel ed Albaret sugli archi, abbiamo in Francia il trattato di Bresse: *Cours de mécanique appliquée*, che riassume gli studî fatti su questi argomenti fino al 1866 e quelli pure importantissimi di Collignon, Contamin, Levy, Tresca e Flamant. Sono principalmente utili per chi voglia studiare la scienza delle costruzioni, in Germania i libri di Winkler, Grashof, Müller-Breslau e Culmann, a cui principalmente si deve, insieme al Professore Cremona ed al Professore Mohr, l'introduzione dei metodi geometrici nello studio dei problemi di costru-

---

(*) Indicazioni dei principali giornali ed atti di Accademie, in cui trovansi articoli relativi alla teoria della resistenza dei materiali.

Giornale del Genio civile. Torino - Roma.
Il Politecnico, Giornale dell'Ingegnere architetto. Milano.
L'Ingegneria civile e le arti industriali. Torino.
Annales des ponts et chaussées. Parigi.
Le Génie civil. Parigi.
Nouvelles annales de la construction par C. A. Oppermann. Parigi.
Der Civilingenieur. Lipsia.
Organ für dir Fortschritte des Eisenbahnwesens. Wiesbaden.
Zeitschrift des Architekten und Ingenieur Vereins zu Hannover. Hannover.
Zeitschrift für Bauwesen. Berlino.
Zeitschrift des Oesterreichischen Ingenieur und Architekten Vereins, Vienna.
Engineering. Londra.
The Engineer. Londra.
Scientific American-and illustrated journal of art, science and mechanics.
Atti e *Resoconti* dei lavori di varie Accademie e Società d'Ingegneri, fra le quali come esempio si citano specialmente l'Accademia delle Scienze di Parigi, la Società degli Ingegneri civili di Parigi, l'Accademia delle Scienze di Torino, quella dei Lincei, la Società degli Ingegneri ed Architetti italiani di Roma, ecc., ecc.

zione; in Inghilterra il trattato di Rankine, ed in Italia quelli di Curioni, Castigliano e Chicchi (*).

La teoria dell'equilibrio dei corpi elastici considerati in modo generale oppure sotto la forma di lamine o superficie elastiche o di linee puramente elastiche e flessibili sorta per opera di Galileo insieme alla scienza delle costruzioni propriamente detta, cioè a quel complesso di cognizioni, che hanno specialmente per scopo di determinare in modo esatto od approssimato le condizioni di stabilità e resistenza di una costruzione qualsiasi, fu da essa in certo qual modo separata in causa dei lavori di Bernoulli, Eulero e Lagrange: e questa separazione apparve ancora più netta quando specialmeute per opera di Navier e di Poisson, Couchy, Lamé, ecc., fu creata la teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici. I due rami di scienza crebbero separatamente, coltivato il primo più particolarmente dai fisici e dagli analisti, il secondo invece studiato con predilezione dagli ingegneri, ai quali esso forniva teoremi immediatamente applicabili nella pratica. I lavori però di Barré di Saint-Venant e di Clebsch principalmente e quelli di Grashof, Winkler, Rankine, Menabrea e Castigliano sembrano mostrare una certa tendenza a riunirli ancora, almeno nei loro principî fondamentali; anzi a questi ultimi due, e specialmente a Castigliano, si deve l'introduzione dell'uso dell'espressione del lavoro di deformazione nei calcoli ordinarî di resistenza, che si presentano agli ingegneri. Allo stato attuale

---

(*) Indicazione delle opere principali che trattano della resistenza dei materiali e specialmente di quelle più spesso citate in quest'opera.

Bresse M. — *Cours de mécanique appliquée.* Parigi, 1868-1880.

Collignon E. — *Cours de mécanique appliquée aux constructions.* Parigi, 1877.

Contamin V. — *Cours de résistance appliquée,* ecc. Parigi, 1878.

Levy. — *La statique graphique et ses applications aux constructions.* Parigi, 1886-87.

Tresca — *Cours de mécanique appliquée professé à l'École centrale des arts et manufactures* (litografato). Parigi.

Flamant — *Stabilité des constructions, Resistance des matériaux.* Parigi, 1886.

Barré de Saint-Venant — *Notes et appendices au Resumé des leçons données à l'École des ponts et chaussées,* ecc., par Navier. Terza edizione, Parigi, 1864.

Clebsch — *Théorie de l'élasticité des corps solides* avec des notes etendues de M. De Saint-Venant (Traduction de Flamant et Barré de Saint-Venant). Parigi, 1883.

Culmann — *Traité des statique graphique,* tradotto sulla seconda edizione tedesca da Glasser e Jaquier. Parigi, 1880.

Cremona L. — *I sistemi reciproci della statica grafica.* Milano, 1873.

delle cognizioni riteniamo che non sia più cosa possibile e pratica svolgere in modo completo la teoria dell'equilibrio delle costruzioni senza basarsi sulla meccanica molecolare: ciò risulta evidente specialmente quando si considera l'introduzione ormai fatta nei calcoli usuali dell'espressione del lavoro di deformazione e delle sue proprietà dipendenti dalla teoria della funzione potenziale e dalla sua forma di funzione omogenea di secondo grado combinate col principio delle velocità virtuali. Si concede facilmente, che, partendo da alcune ipotesi facili ad essere ammesse, si possa evitare lo studio delle condizioni di equilibrio dei corpi elastici svolto in modo generale quando si abbia per scopo soltanto un'istruzione affatto tecnica e che debba mettere capo unicamente al calcolo delle dimensioni necessarie alle membrature di una costruzione usuale; ma nessuno potrà certamente negare la necessità assoluta che un'ingegnere abbia nozioni esatte di meccanica e fisica molecolare per intendere convenientemente e giudicare con sicurezza intorno ai progetti ed ai problemi varî, che gli si possono presentare nell'esercizio della sua professione: opinare differentemente equivarrebbe ad ammettere che si possano sempre ricavare ottime conseguenze da premesse affatto incognite o soltanto imperfettamente note.

Grashof F. — *Théorie der Elasticität und Festigkeit mit Bezug auf ihre Anwendungen in der Technik.* Berlino, 1878.

Winkler E. — *Die Lehre von der Elasticität und Festigkeit mit besonderer Rüchsicht auf ihre Anvendung in der Technik.* Praga, 1867.

— *Vorträge über Brückenbau.* Vienna, 1875-87.

Müller-Breslau — *Vorlesungen über Brückenbau.* Berlino, 1880.

— *Die neuen Methoden der Festigkeitlehre und der Statik der Baukonstruktionen.* Lipsia, 1886.

Bach C. — *Elasticität und Festigkeit.* Berlino, 1890.

Rankine Macquorn W. I. — *A Manual of applied mechanics.* Londra, 1877.

Castigliano A. — *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications.* Torino, 1879.

Chicchi P. — *Corso teorico pratico sulla costruzione dei ponti metallici.* Torino, 1886.

Curioni G. — *Arte di fabbricare* il volume che tratta della *Resistenza dei materiali.* Torino, 1883.

Ceradini C. — *Meccanica applicata, Resistenza dei materiali.* Lezioni professate alla Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Roma (litografate), 1885.

Guidi C. — *Corso di meccanica applicata alle costruzioni*, professato alla Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Torino (litografato), 1889-90.

Sayno A. — *Note al Corso di scienza delle costruzioni* (litografate). Milano, 1884.

INDICE DELLA PARTE PRIMA

Al lettore . . . . . *Pag.* 5
Introduzione . . . . . » 7

CAPITOLO I.

Movimento ed equilibrio dei sistemi.

1. Generalità . . . . . *Pag.* 9
2. Velocità. Accelerazione. Forza viva . . . . . » 10
3. Forze attive e reazioni. Equazioni di Lagrange . . . . . » 15
4. Lavoro. Sue varie espressioni. . . . . » 17
5. Principio d'Hamilton, di D'Alembert ed equazioni di Lagrange » 20
6. Relazione fra il lavoro prodotto dalle forze motrici e la forza viva . . . . . » 23
7. Dell'equilibrio . . . . . » 26
8. Diverse specie d'equilibrio . . . . . » 28
9. Funzione potenziale e funzione ergale . . . . . » 29
10. Sistemi di forze che ammettono sempre una funzione potenziale . . . . . » 32
11. Energia potenziale . . . . . » 33
12. L'energia potenziale per piccole deformazioni è una funzione omogenea di secondo grado degli spostamenti dei punti del sistema . . . . . » 34
13. Relazione fra il lavoro delle forze interne e delle forze esterne » 35

CAPITOLO II.

Equilibrio molecolare.

14. Sistema molecolare. Forze molecolari . . . . . *Pag.* 38
15. Equazioni di equilibrio dei corpi elastici. Equilibrio del parallelepipedo e del tetraedro elementare . . . . . » *ivi*
16. Teorema di reciprocità relativamente alle forze molecolari . » 45
17. Superficie delle direzioni ed ellissoide delle intensità. . . . » 46
18. Ricerca delle tensioni principali e dei massimi sforzi tangenziali . . . . . » 50

19. Somma delle componenti normali delle forze agenti sopra tre elementi superficiali ortogonali. Diametri coniugati nell'ellissoide delle intensità . . . . . *Pag.* 54
20. Caso in cui una delle forze molecolari è uguale a zero . . » 56
21. Discussione di alcuni casi in cui $\sigma_3 = 0$ . . . . . » 58
22. Circolo molecolare. . . . . » 60
23. Problemi varî relativi all'equilibrio molecolare di un punto . » 65

CAPITOLO III.

Deformazioni infinitamente piccole dei corpi.

24. Deformazioni infinitamente piccole dei corpi. Loro rappresentazione . . . . . *Pag.* 69
25. Variazione delle deformazioni intorno ad un punto . . . . » 72
26. Ricerca delle deformazioni principali . . . . . » 75
27. Dilatazione cubica . . . . . » 76
28. Caso in cui alcune deformazioni siano uguali a zero . . . » 77
29. Equazione di compatibilità fra le espressioni delle deformazioni . . . . . » 78
30. Espressione delle deformazioni in un corpo a sezione trasversale infinitamente piccola . . . . . » 80
31. Metodi in uso pel calcolo delle deformazioni Δx, Δy, Δz, ω_x, ω_y, ω_z » 88
32. Espressione delle deformazioni elementari nei solidi a sezione trasversale infinitamente piccola . . . . . » 91
33. Espressione delle deformazioni elementari nei solidi che hanno una dimensione infinitamente piccola rispetto alle altre due . . . . . » 95

CAPITOLO IV.

Equilibrio dei corpi elastici.

34. Elasticità. Equilibrio dei corpi elastici. Teoria matematica dell'equilibrio dei corpi elastici. Teoria della resistenza dei materiali . . . . . *Pag.* 96
35. Funzione potenziale, energia potenziale e lavoro di deformazione ne' corpi elastici. Teoremi relativi. . . . . » 97
36. Principio della sovrapposizione degli effetti . . . . . » 102
37. Conseguenza del teorema relativo alle derivate del lavoro di deformazione prese rispetto alle deformazioni . . . . . » 103
38. Espressione del lavoro di deformazione in funzione delle forze esterne. Teorema di Castigliano. Conseguenze . . . . » 105
39. Teorema di reciprocità del Betti. Conseguenze. Teorema dei fattori alterni. . . . . » 109
40. Teorema di Menabrea . . . . . » 116
41. Relazioni fra il lavoro di deformazione e quello prodotto dalle forze esterne. Vibrazioni . . . . . » 121

42. Lavoro di deformazione del parallelepipedo elementare . . *Pag.* 123
43. Espressione delle forze elastiche in funzione delle deformazioni. . . . . » 127
44. Espressione delle forze elastiche principali . . . . . » 129
45. Espressione delle forze elastiche in funzione della dilatazione cubica e delle dilatazioni . . . . . » 133
46. Diverse espressioni del lavoro di deformazione unitario di un parallelepipedo elementare . . . . . » 135
47. Il valore del lavoro di deformazione espresso in funzione delle forze elastiche è indipendente dalla direzione degli assi coordinati . . . . . » 137
48. Il valore del lavoro di deformazione espresso soltanto in funzione delle deformazioni è indipendente dalla direzione degli assi coordinati . . . . . » 138
49. Il lavoro di deformazione può prendere la forma di una somma di quadrati. . . . . » 139
50. Proprietà del lavoro di deformazione del parallelepipedo elementare. . . . . » 141
51. Equazioni dell'equilibrio e del moto dei corpi elastici . . . » 146
52. Le equazioni del numero precedente determinano completamente l'equilibrio di un corpo elastico . . . . . » 151
53. Teorema di Clapeyron . . . . . » *ivi*
54. Problema di elasticità. Metodi di risoluzione . . . . . » 153
55. Equazione di coesione . . . . . » 155
56. In un corpo elastico a sezione trasversale infinitamente piccola sollecitato da forze soltanto sulle basi estreme tre forze elastiche sono nulle . . . . . » 156
57. Espressione delle forze molecolari nei solidi a sezione trasversale infinitamente piccola in funzione delle risultanti e dei momenti risultanti delle forze esterne ad ogni sezione . . . . . » 161
58. Influenza delle forze e dei momenti delle forze esterne ad ogni sezione nelle espressioni degli sforzi unitarî subìti dal materiale. Problema di Barré de Saint-Venant . . . . . » 168
59. Discussione intorno ai limiti d'approssimazione corrispondenti alle formole trovate nei numeri precedenti . . . . . » 171
60. Solidi elastici nei quali una sola dimensione è infinitamente piccola rispetto alle altre due. Difficoltà che si incontrano cercando una soluzione generale di questa questione . . » 172

CAPITOLO V.

Formole approssimate della resistenza dei materiali.

61. Classificazione dei corpi resistenti, che si incontrano nelle costruzioni . . . . . *Pag.* 173
62. Travatura. Sua definizione. Travature composte . . . . . » 175

63. Ipotesi fondamentali della resistenza delle travature . . *Pag.* 176
64. Formole di elasticità, di resistenza e di rottura . . . . . » 179
65. Analisi dell'effetto prodotto dagli sforzi esterni ad ogni sezione, loro composizione, caso della sollecitazione a flessione obliqua o deviata . . . . . » 183
66. Formola di elasticità e resistenza delle travature ad asse curvilineo tenendo conto dell'influenza della curvatura dell'asse . . . . . » 188
67. Formole generali per calcolare le deformazioni corrispondenti ad un punto dell'asse o ad una sezione normale di una travatura sommando l'effetto delle deformazioni elementari . . . . . » 193
68. Formole generali per calcolare le deformazioni corrispondenti ad un punto dell'asse o ad una sezione normale di una travatura dedotte derivando l'espressione generale del lavoro di deformazione . . . . . » 200
69. Formole generali per calcolare le deformazioni di un punto dell'asse o di una sezione normale di una travatura ad asse rettilineo soggetta a sollecitazione retta . . . . . » 202
70. Formole di deformazione delle travature ad arco tenendo conto della convergenza delle sezioni vicine . . . . . » 204
71. Proprietà relative alle travature simmetriche . . . . . » 208
72. Varî metodi in uso per il calcolo delle forze esterne ad ogni sezione di una trave e delle deformazioni . . . . . » 210
73. Correlazione fra le forze esterne ed interne e le deformazioni nei sistemi elastici soggetti successivamente all'influenza di due diversi sistemi di forze . . . . . » 231
74. Formole di coesione per le travature . . . . . » 244
75. Formole approssimate di elasticità e resistenza relativa alle grandi travature soggette a flessione retta; casi in cui possono essere applicate. Formola del Perissé. Sforzi di taglio, loro distribuzione . . . . . » 250
76. Osservazioni sulle formole relative alla resistenza delle travature . . . . . » 258
77. Problema del costruttore . . . . . » 260
78. Travatura ad asse rettilineo riposante sopra n appoggi disposta orizzontalmente e caricata di pesi P agenti nel piano verticale, che contiene l'asse e taglia tutte le sezioni secondo un asse principale d'inerzia . . . . . » 265
79. Travatura a fibra media circolare riposante in A ed in B sopra due appoggi di livello e caricata da pesi P applicati al suo asse . . . . . » 275
80. Travature composte . . . . . » 295
81. Travature combinate . . . . . » 298
82. Travature composte semplicemente connesse . . . . . » 303
83. Travature composte a connessione multipla. Sistemi articolati . . . . . » 307

84. Calcolo delle deformazioni e delle forze incognite nelle travature reticolari articolate . . . . . *Pag.* 311
85. Travature composte a connessione multipla rigida . . . . » 325
86. Travature reticolari simmetriche. Effetti delle variazioni di temperatura . . . . . » 328
87. Sistemi elastici superficiali di rivoluzione . . . . . » 330
88. Sistemi nei quali nessuna dimensione è prevalente sulle altre . » 341

CAPITOLO VI.

Movimenti vibratori nei corpi elastici e sollecitazioni dinamiche.

89. Sollecitazioni dinamiche. Formole per il calcolo dei movimenti vibratori nelle travature soggette a sollecitazione ed a deformazione piana . . . . . *Pag.* 345
90. Varie specie di sollecitazioni dinamiche. Metodo generale per determinare le massime deformazioni da esse prodotte . . » 350
91. Varie espressioni del lavoro di deformazione nelle travature. Casi particolari . . . . . » 352
92. Deformazioni elastiche sotto l'effetto di urti . . . . . » 360
93. Azione dinamica per urto di un carico uniformemente distribuito per metro corrente di trave . . . . . » 377
94. Velocità di propagazione degli impulsi nei corpi elastici. Suoi effetti . . . . . » 384
95. Valutazione pratica dell'effetto degli urti. Considerazioni relative agli urti che si verificano nei ponti . . . . . » 390
96. Effetto dei carichi in movimento sulle travature soggette a flessione . . . . . » 400
97. Carico uniformemente distribuito sull'asse di una travatura ad asse rettilineo animato da una determinata velocità di traslazione V . . . . . » 414
98. Osservazioni generali sulle sollecitazioni dinamiche . . . . » 424

CAPITOLO VII.

Risultati sperimentali.

99. Osservazioni ed esperienze . . . . . *Pag.* 428
100. Spostamenti e freccie di incurvamento . . . . . » *ivi*
101. Flessimetri . . . . . » 430
102. Micrometri moltiplicatori . . . . . » 433
103. Avvertenze necessarie quando si fanno esperienze sulla resistenza dei materiali da costruzione . . . . . » 440
104. Macchine per esperimentare la resistenza dei materiali . . . » 442
105. Risultati generali delle esperienze sulla resistenza dei materiali . » 448
106 Modi di sollecitazione più comuni . . . . . » 450

107. Risultati delle esperienze a tensione . . . . . *Pag.* 450
108. Osservazioni sulla resistenza a compressione . . . . . » 462
109. Risultati delle esperienze a compressione . . . . . » 464
110. Scorrimento semplice . . . . . » 470
111. Flessione o torsione . . . . . » 472
112. Influenza degli sforzi ripetuti . . . . . » 477
113. Coefficiente di sicurezza e conclusioni pratiche relative alla determinazione del limite dei carichi permanenti . . . . » 490
114. Fluidità dei corpi solidi . . . . . » 495

Nota A.

Sui teoremi fondamentali della meccanica applicata alle costruzioni . » 499

Nota B.

Cenni storici e bibliografici . . . . . » 529

ERRATA-CORRIGE

Pagina	*linea*	*invece di*	*leggasi*
16	21	(onde ne è venuto il principio di HOOKE che *la reazione è uguale e contraria all'azione*)	(onde ne è venuto il principio di HOOKE che *nei corpi elastici la reazione è uguale e contraria all'azione e proporzionale alla deformazione*)
17	11	$X \quad Y \quad Z$	$X,\ Y,\ Z$
17	22	$\alpha\,\beta\,\gamma \quad \alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1$	$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1$
18	12	$F\,\delta\cos\widehat{F\,\delta}\,s$	$F\,\delta\,s\cos\widehat{F\,\delta}\,s$
18	23	$F\cos\widehat{F\,\delta}\cdot\delta\,s$	$F\cos\widehat{F\,\delta}\,s\cdot\delta\,s$
19	18	$a\,b\,c$	$a,\ b,\ c$
19	19	$\psi_x\,\psi_y\,\psi_z$	$\psi_x,\ \psi_y,\ \psi_z$
22	3	un istesso	uno stesso
26	35	x, y, z	$X,\ Y,\ Z$
109	26	*forze del primo* (*).	*forze del primo* (*) (Vedi nota *A* in fine del volume).
119	18	reazioni	relazioni
120	25	qnantità	quantità
121	33	a coincidere col teorema del potenziale (**).	a corrispondere col teorema del potenziale (**) e come sia con esso in intima relazione.
152	18	$(p_{xx}u + p_{xy}v + p_{xz}w)$	$(p_{nx}u + p_{ny}v + p_{nz}w)$
219	19	esattamenta	esattamente
186	3	$E\,\theta\,I_y \operatorname{sen}\psi$	$E\,\theta\,I_z\cos\psi$
275	20	Form.	form.
314	12	sia	siano
447	29	(*Fig.* 106ª, *tav.* XVII).	(*Fig.* 104ª, *tav.* XVI).
448	2	FEDERHALT	FEDERHAFF

*Segue l'*ERRATA-CORRIGE

Pagina	*linea*	*invece di*	*leggasi*
40	7	uguale	uguali
51	7	$p_{xy}\cos\alpha+(p_{yy}-\sigma)\cos\beta+p_{yx}\cos\gamma=0$	$p_{xy}\cos\alpha+(p_{yy}-\sigma)\cos\beta+p_{yz}\cos\gamma=0$
56	29	$\frac{x^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}=0$	$\frac{x^2}{\sigma_1^2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}=1$
61	10	$\ldots+\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2+\ldots$	$\ldots+\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2+\ldots$
74	22	$\frac{x'^2}{(1+\varepsilon)^2}+\frac{y'^2}{(1+\varepsilon_2)^2}+\frac{z'^2}{(1+\varepsilon_2)^2}=1$	$\frac{x'^2}{(1+\varepsilon_1)^2}+\frac{y'^2}{(1+\varepsilon_2)^2}+\frac{z'^2}{(1+\varepsilon_3)^2}=1$
77	25	$\varepsilon_2=\frac{g_{xy}}{2}$	$\varepsilon_2=-\frac{g_{xy}}{2}$
80	30	superficie tangenti alle dette	superficie tangenti alle dette sfere deformate
92	25	$w=c_1+y\omega_x-x\omega_y+z'$	$w=c_1+y\omega_x-x\omega_y+w'$
92	32	$c_1=(ds+\delta)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\psi$	$c_1=(ds+\delta)\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\psi$
93	29	$u=ix+zx\theta_z-xy\theta_z+u_1$	$u=ix+zx\theta_y-xy\theta_z+u_1$
111	28	$p_1=q_1P_1+q_2P_2+q_3P_3\ldots+Q_nP_n$	$p_1=q_1P_1+q_2P_2+q_3P_3+\ldots+q_nP_n$
130	4	$\frac{a}{D}=\frac{A^2-G^2}{A^3-3AG^2+2G^2}$	$\frac{a}{D}=\frac{A^2-G^2}{A^3-3AG^2+2G^3}$
133	3	$=\frac{(m+1)^2+(m-1)-2}{m}$	$=\frac{(m-1)^2+(m-1)-2}{m}$
136	12	nella (79)	nella (84)
161	26	$L=\int dx\,dy\,dz\left[\frac{p^2_{xx}}{E}+\frac{p^2_{xy}}{G}+\frac{p^2_{yz}}{G}\right]$	$L=\frac{1}{2}\int dx\,dy\,dz\left[\frac{p_{xx}^2}{E}+\frac{p_{xy}^2}{G}+\frac{p_{xz}^2}{G}\right]$
162	21	$=\int dx\,dy\,dz\left[Ei_x^2+\ldots\right.$	$=\frac{1}{2}\int dx\,dy\,dz\left[Ei_x^2+\ldots\right.$
181	20	corrisopondenti	corrispondenti
182	4	$p_{xy}=S=\frac{Z}{A}+\frac{M_x}{I_x}y$	$p_{xz}=S=\frac{Z}{A}+\frac{M_x}{I_x}y$
185	19	$\ldots=\theta$	$\ldots=\theta^2$
186	20	sollicitazione	sollecitazione

L'ARTE

DI

FABBRICARE

CORSO COMPLETO

DI ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

per gl'Ingegneri, per gli Architetti, pei Periti in costruzione, pei Periti misuratori, per gl'Intraprenditori, pei Capomastri, e per quanti si trovano applicati o vogliono applicarsi all'esecuzione ed alla sorveglianza di costruzioni civili, stradali ed idrauliche

CON TAVOLE ILLUSTRATIVE

MECCANICA APPLICATA

ALLE

COSTRUZIONI

PER L'INGEGNERE

SILVIO CANEVAZZI

Professore nella Regia Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Bologna.

PARTE I

Teoria generale della resistenza dei materiali

TAVOLE

TORINO

Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO, Editore

4, Via Alfieri, 4

con Succursali in Roma, Napoli e Cagliari (per la Sardegna).

1891

La **MECCANICA APPLICATA ALLE COSTRUZIONI** consterà di due Parti coi rispettivi atlanti di Tavole. - L'associazione è obbligatoria per tutta l'opera. Prezzo della Parte prima (Testo e Tavole) Lire **16**.

Editore — AUGUSTO FEDERICO NEGRO — Torino
Roma - Napoli - Cagliari

MECCANICA APPLICATA

ALLE

COSTRUZIONI

LAVORO AD USO

degli Ingegneri, degli Architetti, dei Periti in costruzione
e degli studenti delle Regie Scuole d'applicazione per gli Ingegneri
e dei Corsi tecnici pei Periti in costruzione

PER L'INGEGNERE

SILVIO CANEVAZZI

Professore nella Regia Scuola d'applicazione per gli Ingegneri di Bologna

La pubblicazione del volume intitolato **Raccolta di progetti di costruzioni in legno ed in metallo** che avrebbe completato l'*Appendice* all'*Arte di fabbricare* del Professore Comm. Giovanni Curioni dovette rimanere in sospeso a cagione della morte di questo instancabile lavoratore. La di lui perdita fu una grave sventura per la scienza e per le scuole di ingegneria, perchè egli non solo avrebbe condotto a termine il suo colossale lavoro, ma si sarebbe altresì dedicato a rivedere o rifare quei volumi che avrebbero richiesto migliorie e modificazioni in rapporto col continuo progredire della scienza e dell'arte del costrurre.

Noi abbiamo però avuto la soddisfazione di trovare un saldo appoggio in un altro non meno valente scienziato, l'Ingegnere Cav. Silvio Canevazzi Professore nella Scuola di applicazione degli Ingegneri di Bologna, il quale si assunse l'incarico di allestire il volume tuttora mancante, e di ringiovanire gli altri volumi più bisognosi di essere riveduti o rinnovati.

Intanto essendosi esaurito il volume dell'*Arte di fabbricare* che tratta della *Resistenza dei materiali* e al quale occorrono appunto maggiori modificazioni per cagione delle nuove teorie che vanno generalizzandosi, il Professore Canevazzi, che da parecchi anni insegna la *Meccanica applicata alle costruzioni*, trovò opportuno di sostituire a quel volume il corso di lezioni che svolge con ottimi risultati ai suoi allievi ingegneri. Egli si accinse perciò a riordinare le molte memorie che aveva raccolte e ha diviso il suo lavoro in due Parti, cioè **Teoria generale della resistenza dei materiali** e **Statica delle costruzioni**. La prima Parte già pubblicata di quest'opera ebbe una lusinghiera accoglienza, e attualmente abbiamo posto mano alla stampa della seconda Parte.

Per la revisione e compilazione degli altri volumi egli si assicurò la collaborazione di altri distinti Professori ed Ingegneri e punto non dubitiamo che l'**Arte del fabbricare** così rimodernata non potrà a meno di riuscire di molta utilità agli studenti ed agli studiosi.

La *Meccanica applicata alle costruzioni* consterà di due Parti, *Teoria generale della resistenza dei materiali* e *Statica delle costruzioni*, e verrà pubblicata nello stesso formato delle opere del Professore Giovanni Curioni. Essa sarà illustrata da molte tavole. L'associazione è obbligatoria per l'opera intiera.

È uscita la Parte prima con 18 tavole al prezzo di Lire 16.

624(02):624.07 CAN

VERIFICA INVENTARIO 5-6-78
2306/B F.to

L'ARTE

DI

FABBRICARE

CORSO COMPLETO DI ISTITUZIONI TEORICO-PRATICHE

PER GLI INGEGNERI, PER GLI ARCHITETTI, PEI PERITI IN COSTRUZIONE,
PEI PERITI MISURATORI E PER QUANTI SI TROVANO APPLICATI ALLA DIREZIONE
ED ALLA SORVEGLIANZA DI COSTRUZIONI CIVILI, STRADALI ED IDRAULICHE

MECCANICA

APPLICATA

ALLE COSTRUZIONI

LAVORO AD USO

degli Ingegneri, degli Architetti, dei Periti in costruzione
e degli studenti delle Regie Scuole d'Applicazione per gli Ingegneri
e dei Corsi tecnici pei Periti in costruzione

PER L'INGEGNERE

SILVIO CANEVAZZI

Professore nella Regia Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Bologna

---

TAVOLE



TORINO

Presso AUGUSTO FEDERICO NEGRO, Editore

4, Via Alfieri, 4.

1890

Proprietà letteraria ed artistica, con riserva della traduzione.

Torino — Tipografia, Stereotipia e Calcografia di A. F. Negro — 1890

Fig. 1.

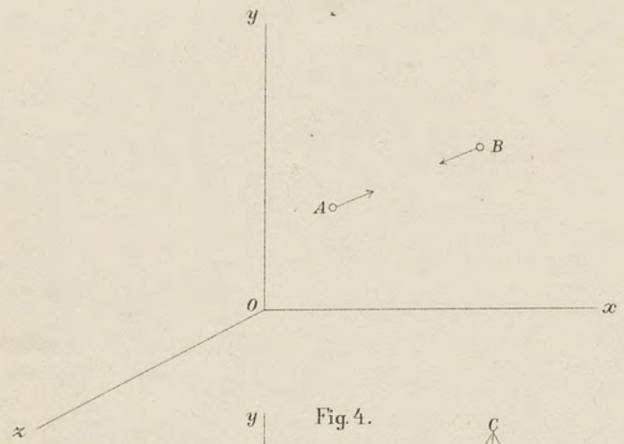


Fig. 2.

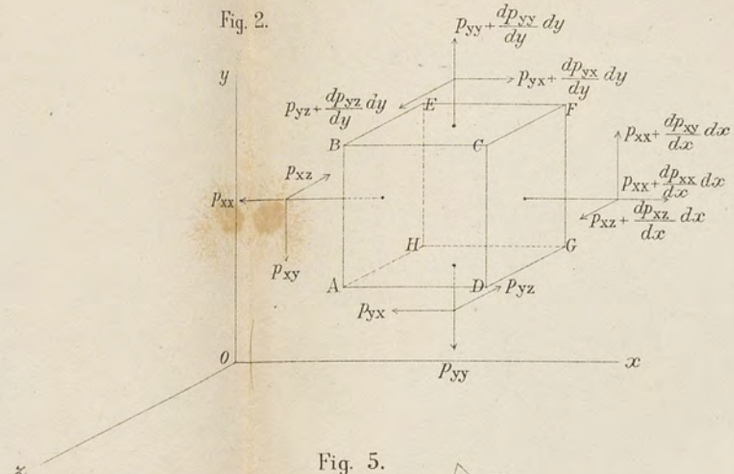


Fig. 3.

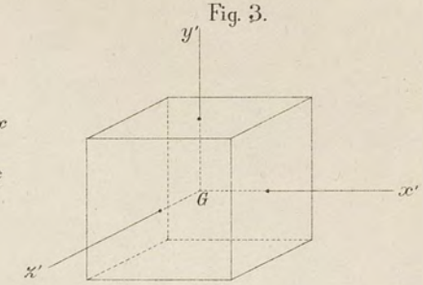


Fig. 4.

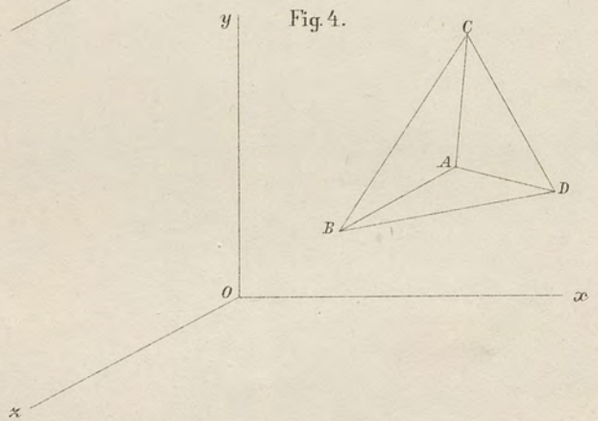


Fig. 5.

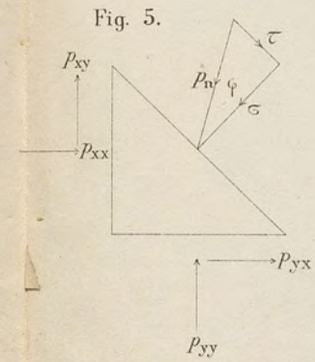


Fig. 6.

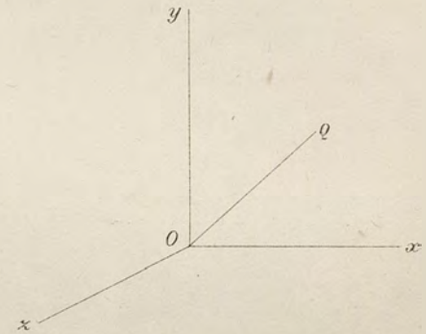


Fig. 7.

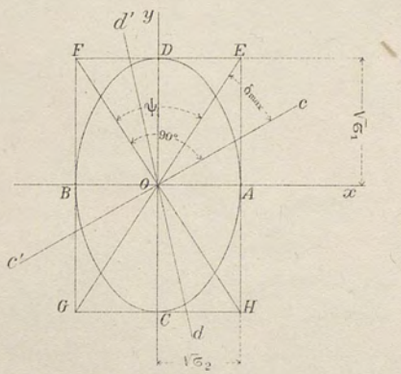


Fig. 8.

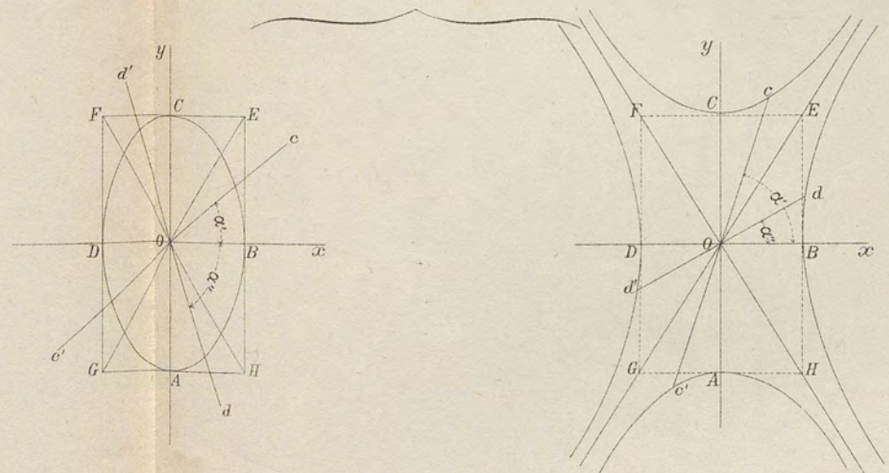


Fig. 9.

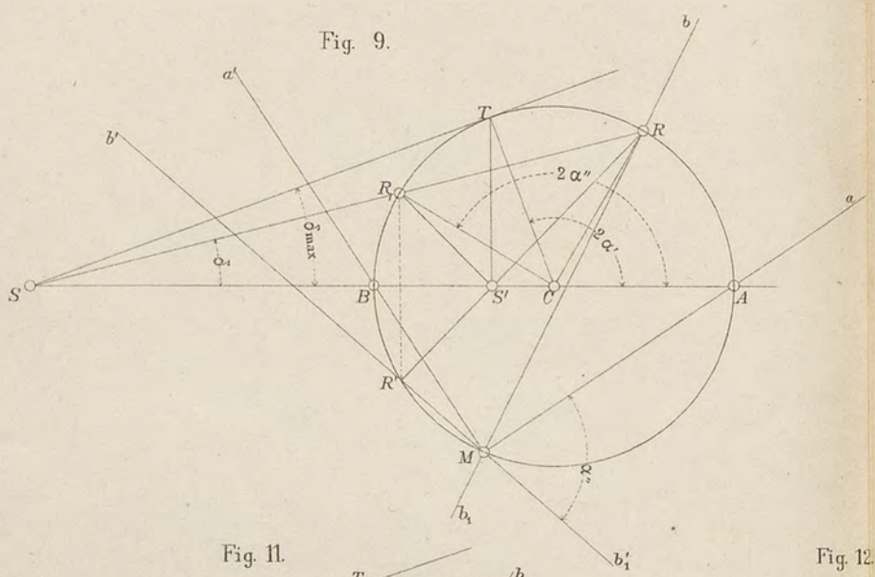


Fig. 10.

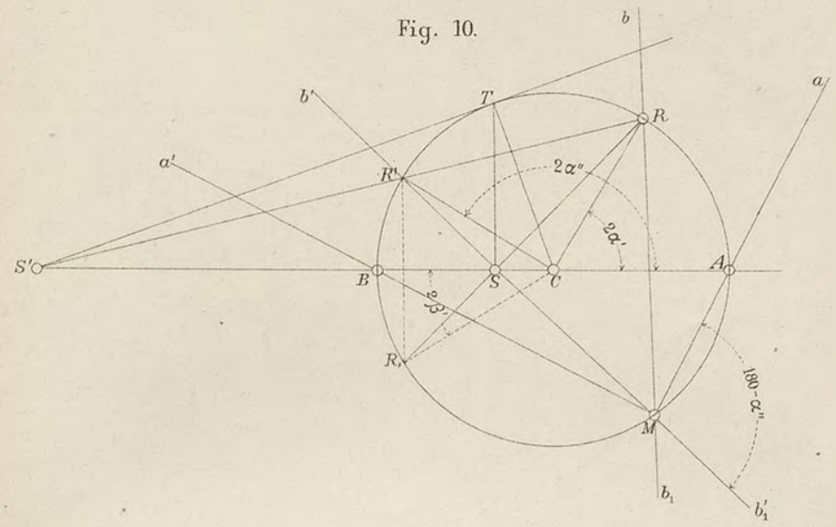


Fig. 11.

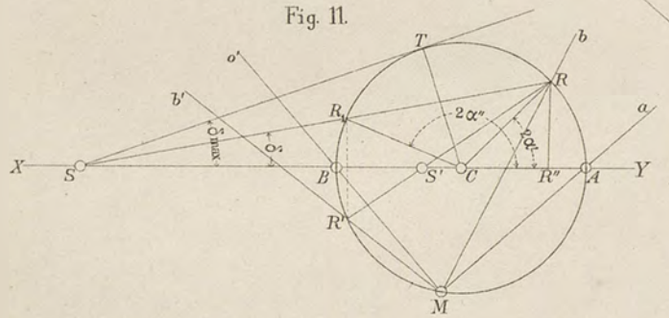


Fig. 12.

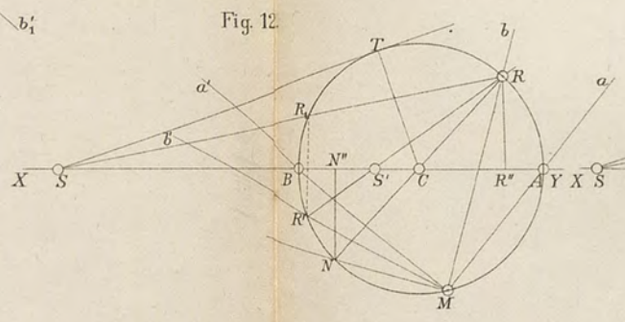


Fig. 13.

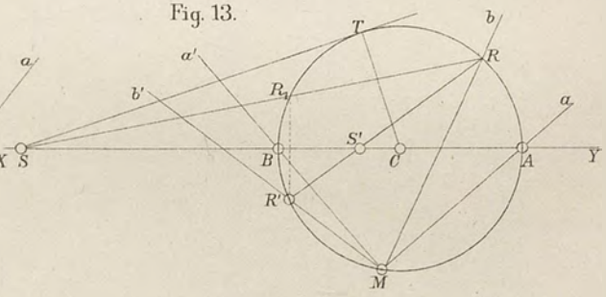


Fig. 14.

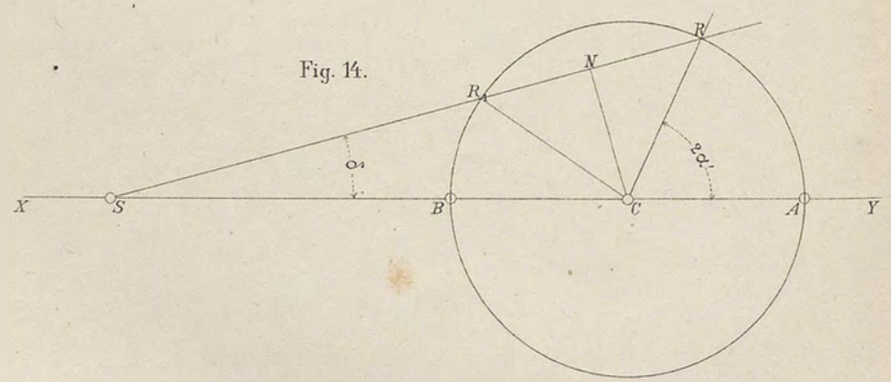


Fig. 15.

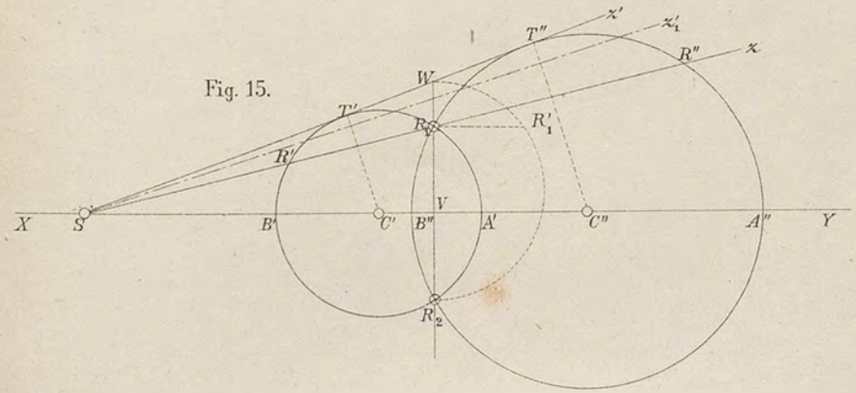


Fig. 16.

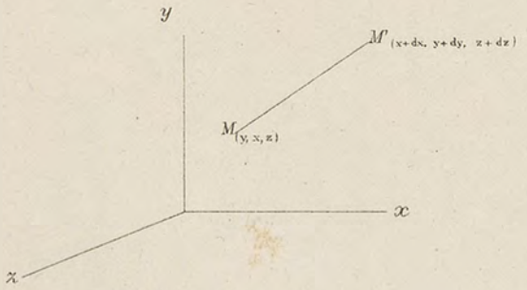


Fig. 17.

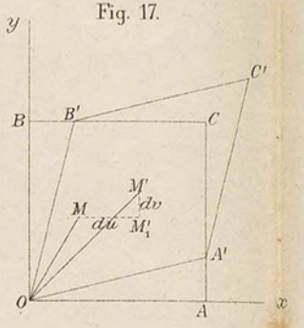


Fig. 18

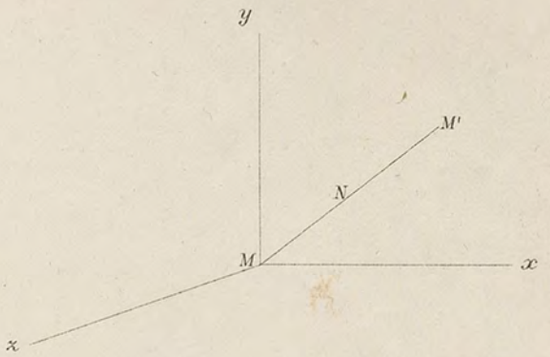


Fig. 19.(*)

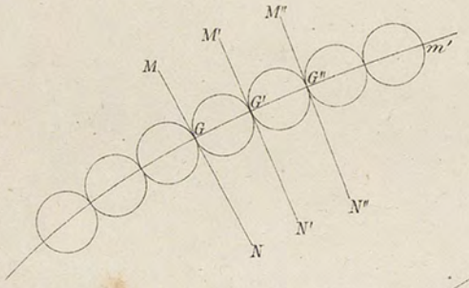


Fig. 20.

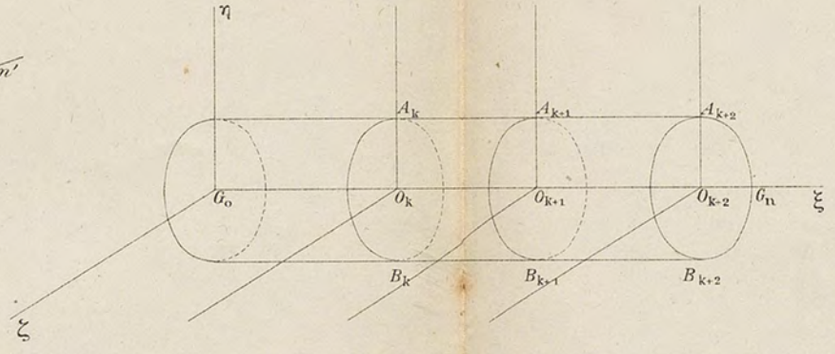


Fig. 21

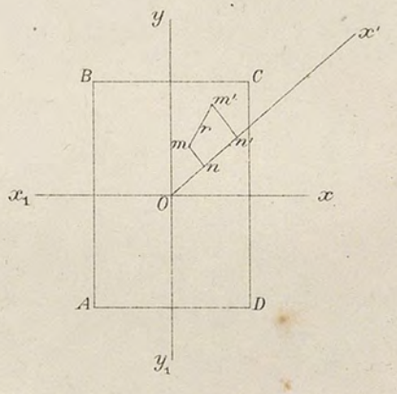


Fig. 22.

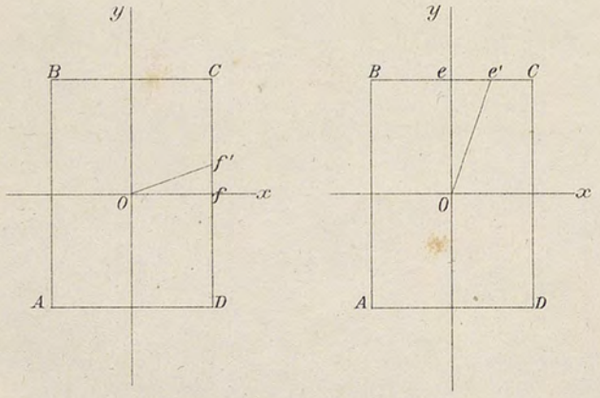


Fig. 23.

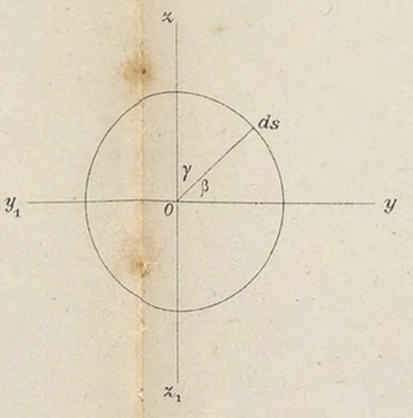
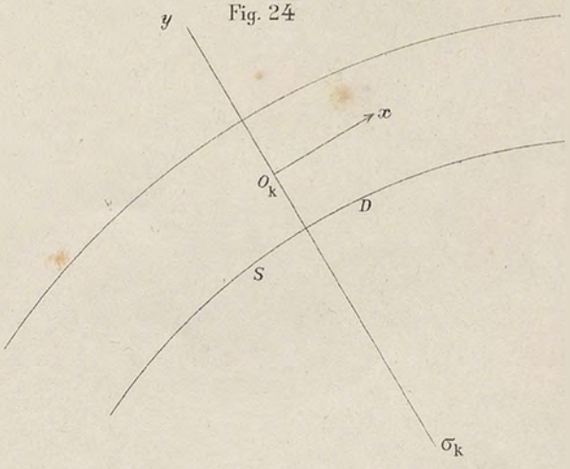


Fig. 24



(*) Questa figura corrisponde al numero 30 del testo.

Fig. 25.

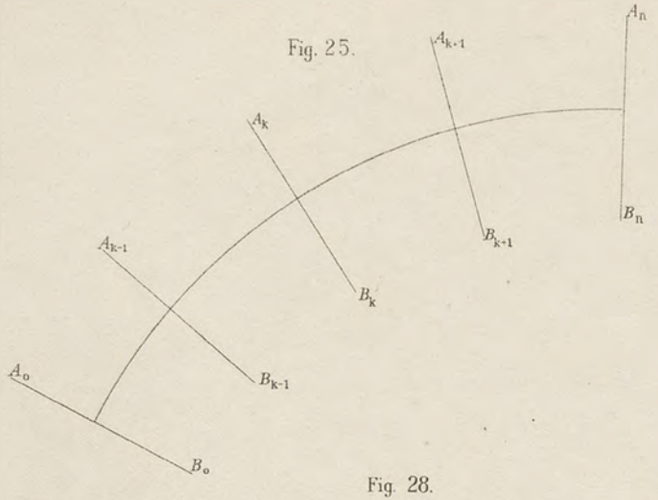


Fig. 26.

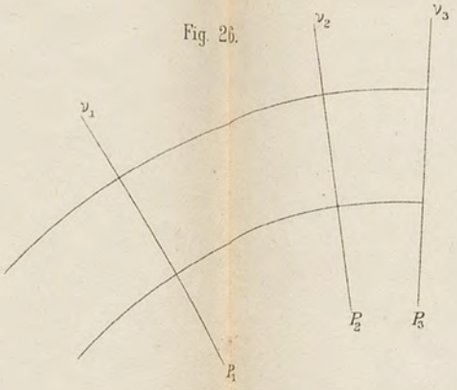


Fig. 27.

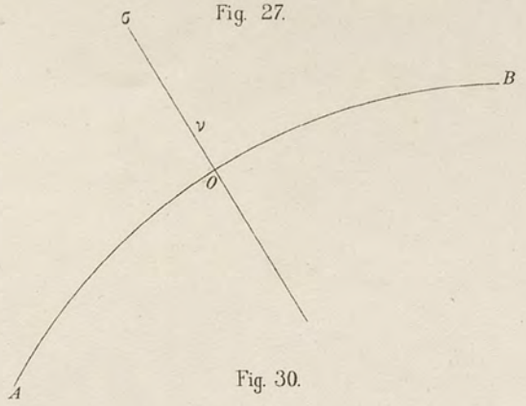


Fig. 28.

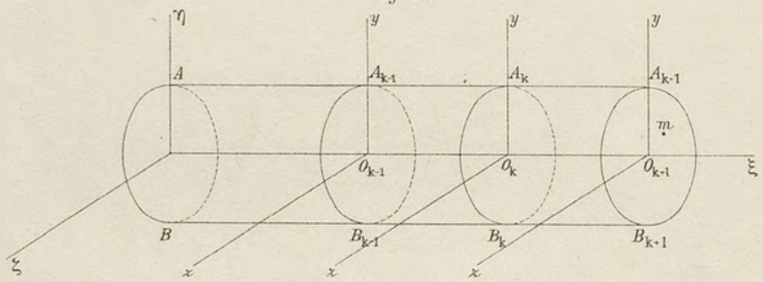


Fig. 29.

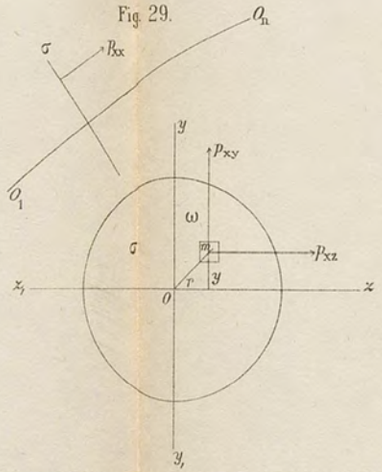


Fig. 30.

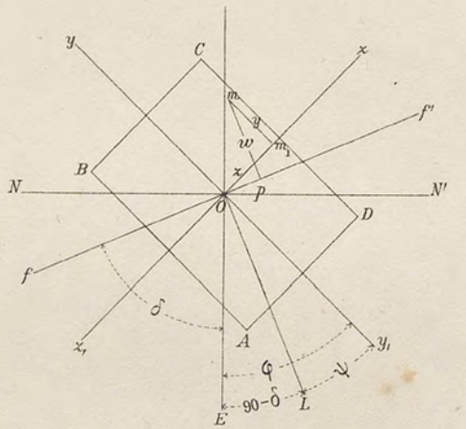


Fig. 31.

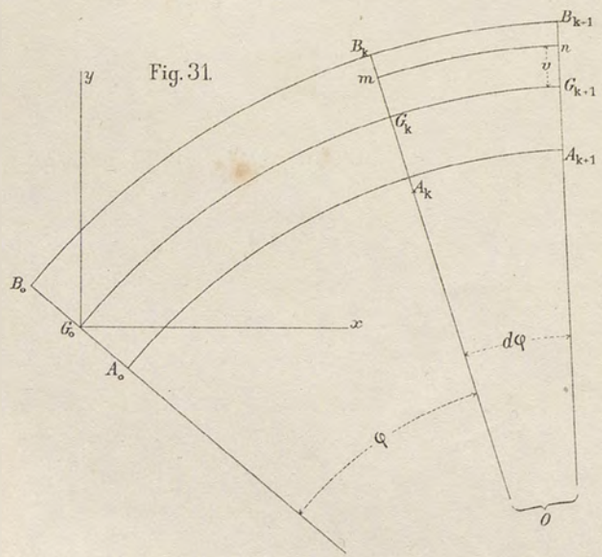


Fig. 32.

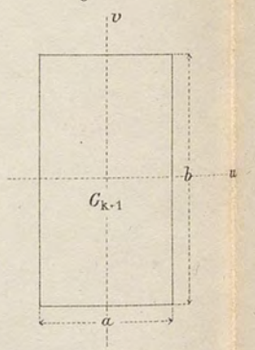


Fig. 33.

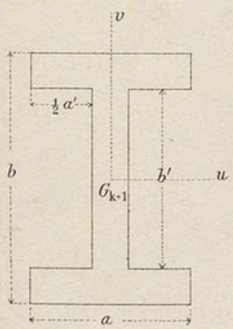


Fig. 34

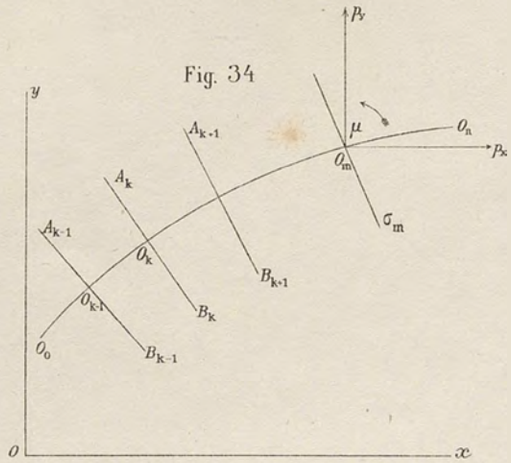


Fig. 35.

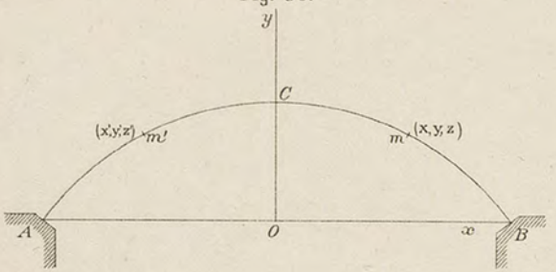


Fig. 36.

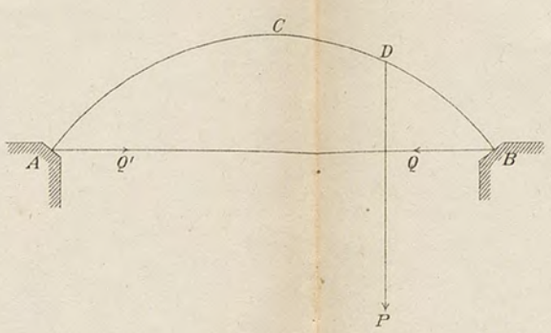


Fig. 37.

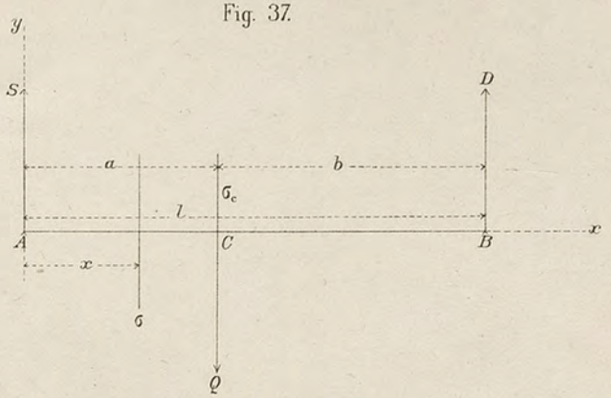


Fig. 38.

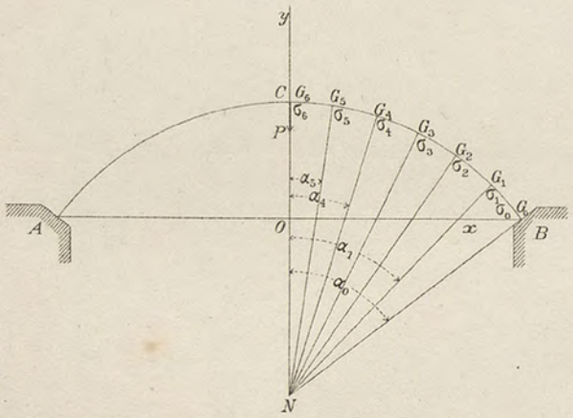


Fig. 39.

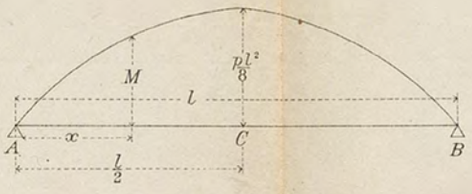


Fig. 40.

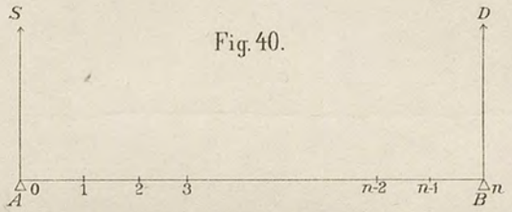


Fig. 41.

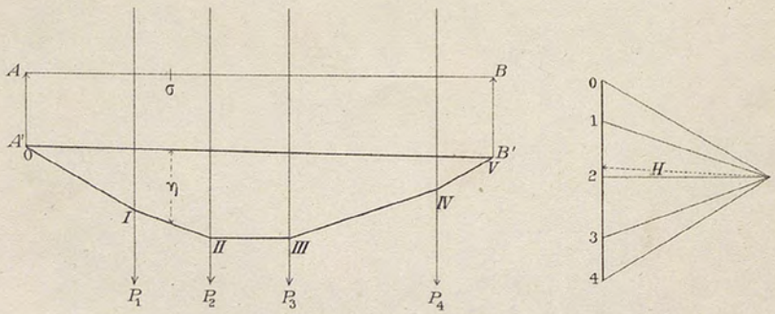


Fig. 42.

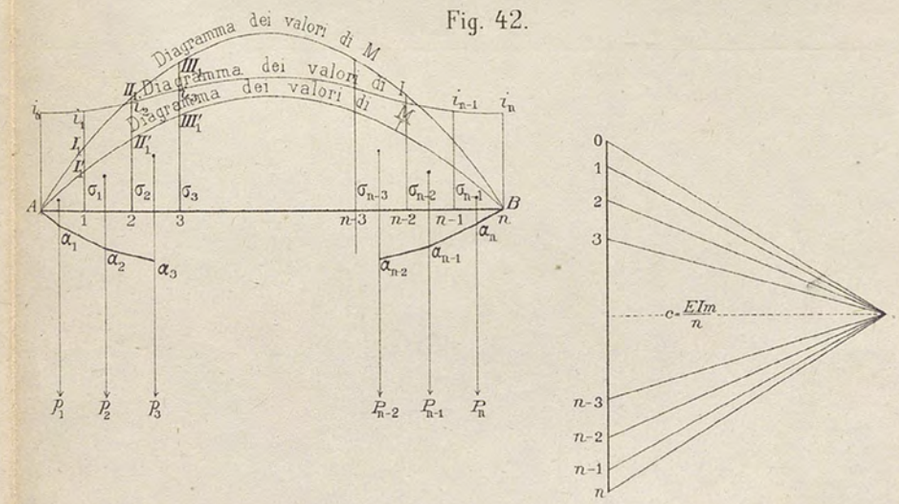


Fig. 43.

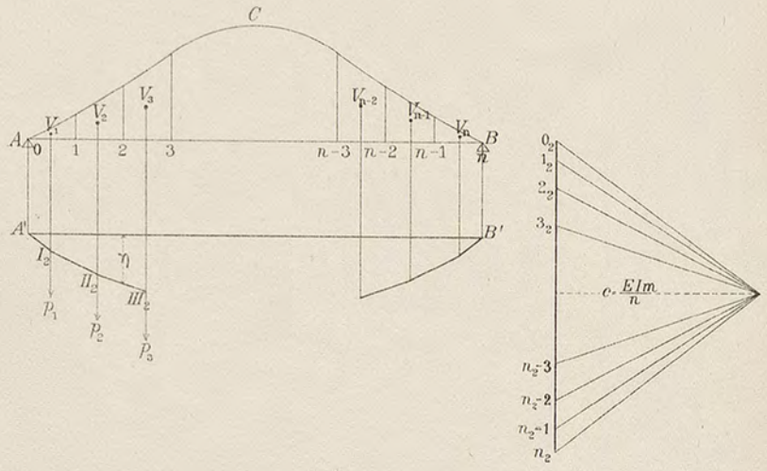


Fig. 44.

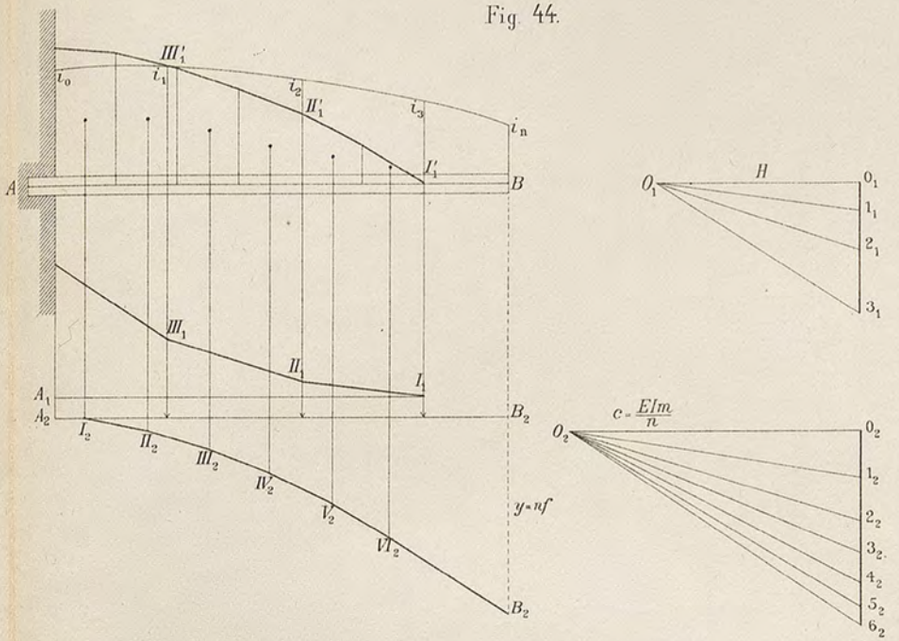


Fig. 45.

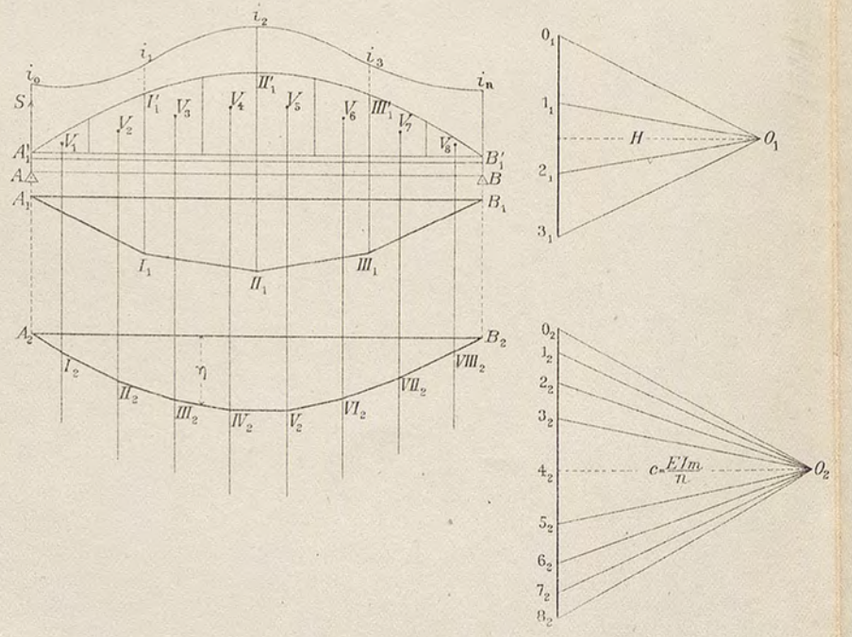


Fig. 46.

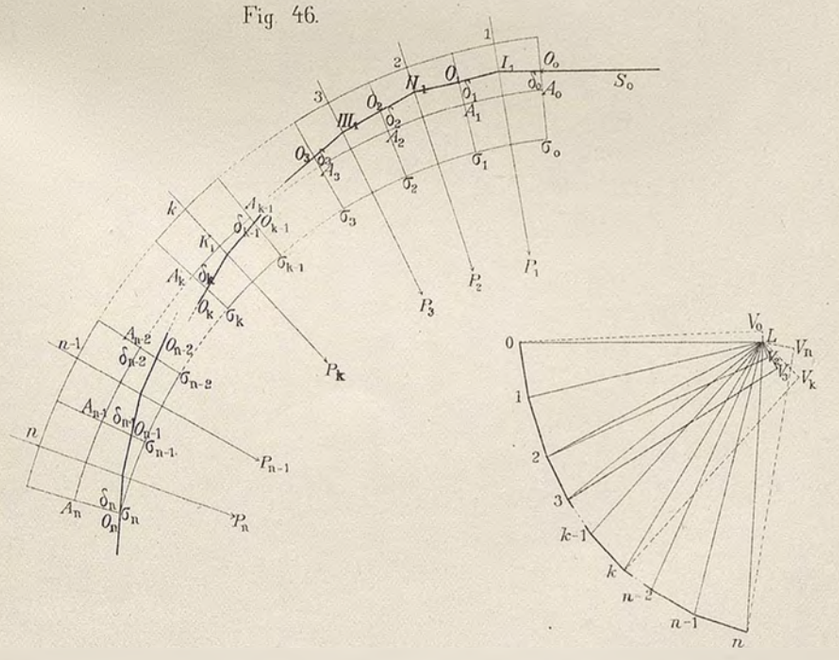


Fig. 47.

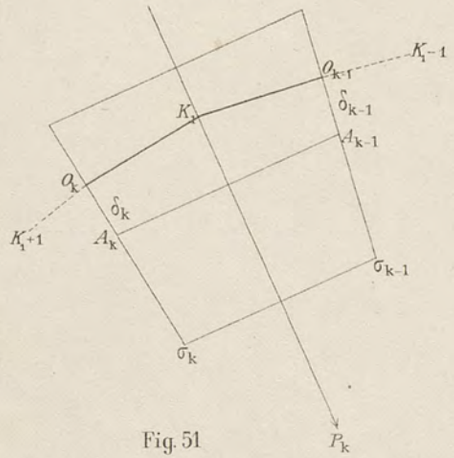


Fig. 48.

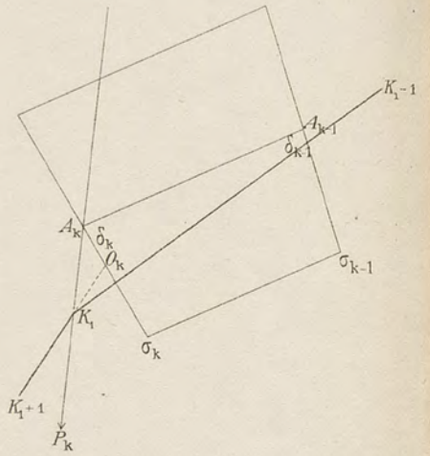


Fig. 49.

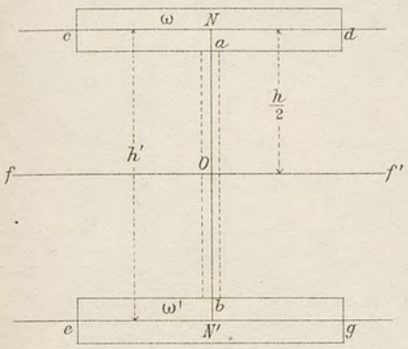


Fig. 50.

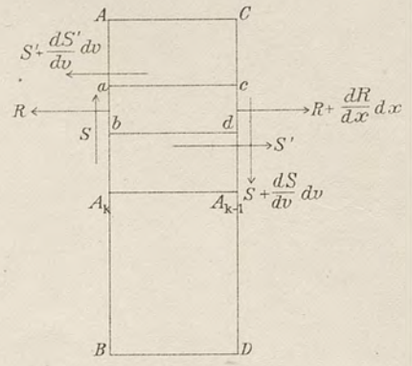


Fig. 51



Fig. 54.

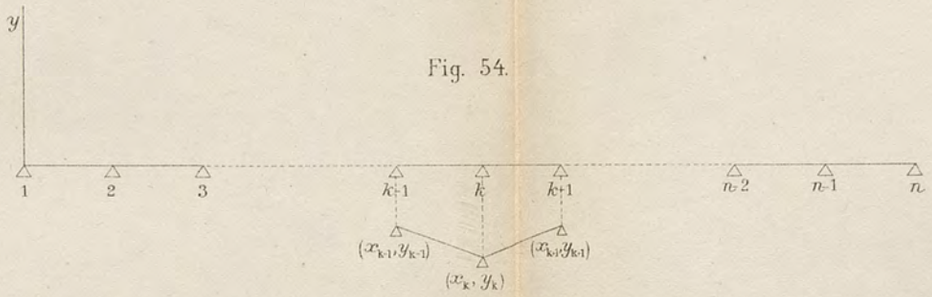


Fig. 53.

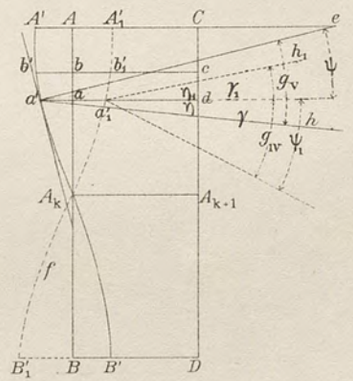


Fig. 52.

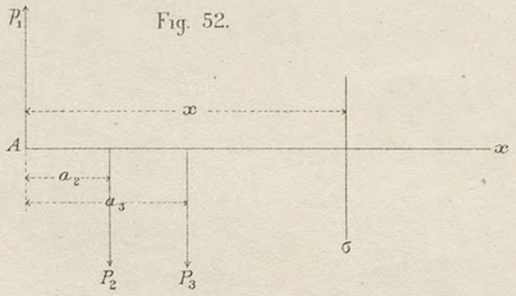


Fig. 55.

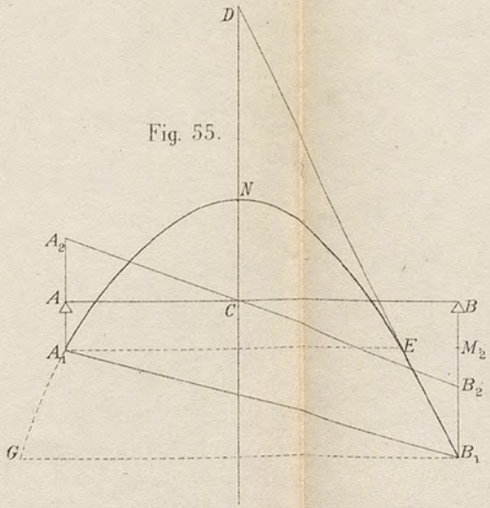
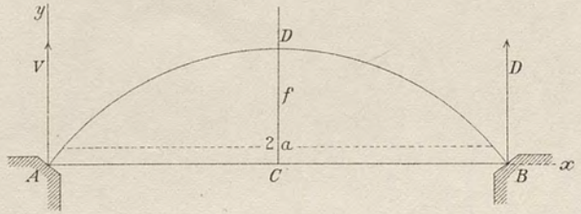


Fig. 56.



Studio d'un ponte ad archi in ferro

Elevazione

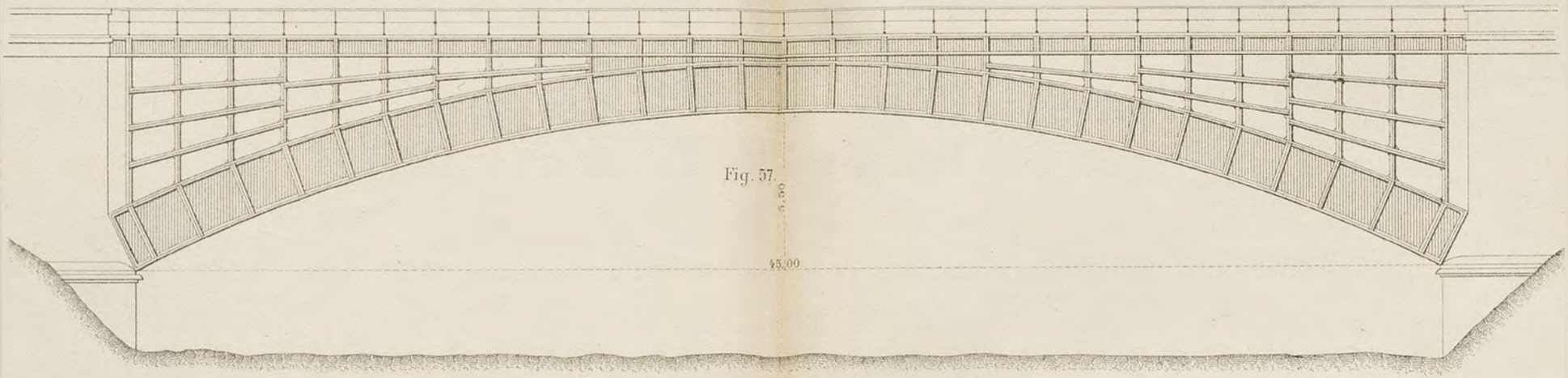


Fig. 57.

Schema geometrico dell'arco
pel calcolo dei momenti flettenti degli sforzi di taglio e delle componenti normali delle varie sezioni

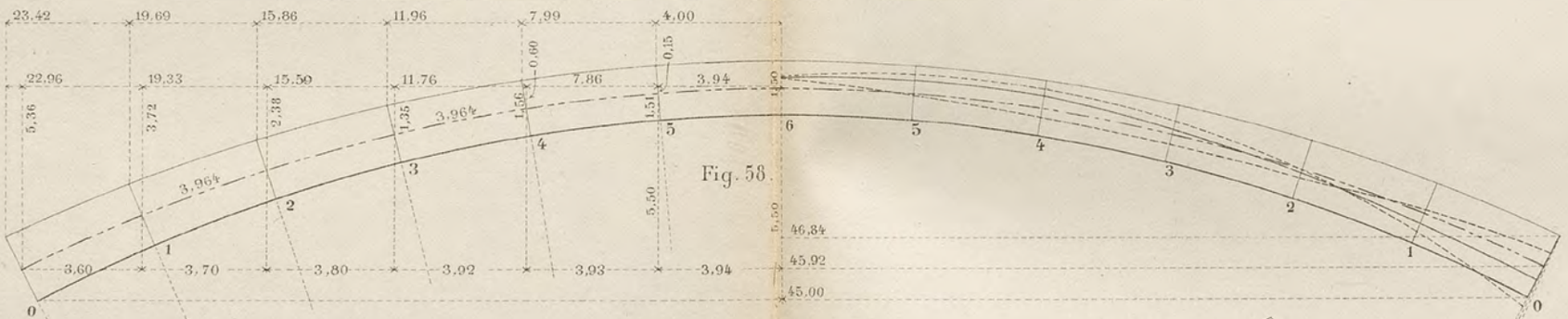
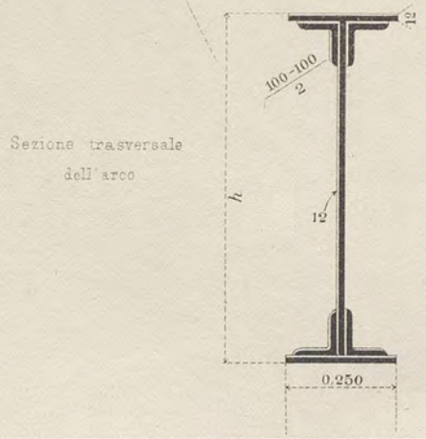


Fig. 58.

Fig. 59.



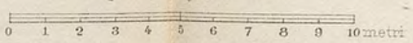
Sezione trasversale dell'arco

Fig. 60.

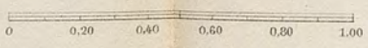


Scale

per le Fig. 57 e 58



per la Fig. 59



per la Fig. 61

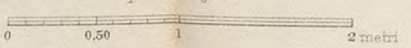


Fig. 61.

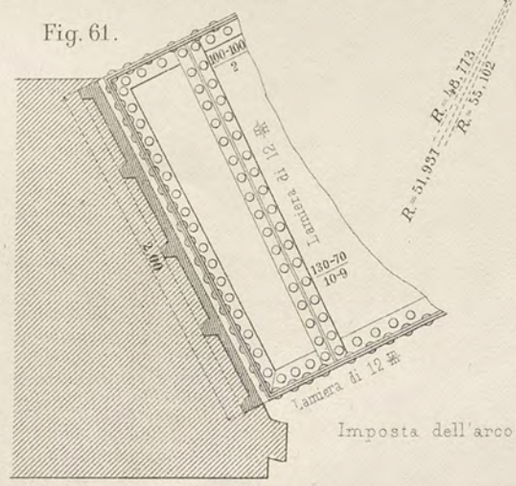


Fig. 62.

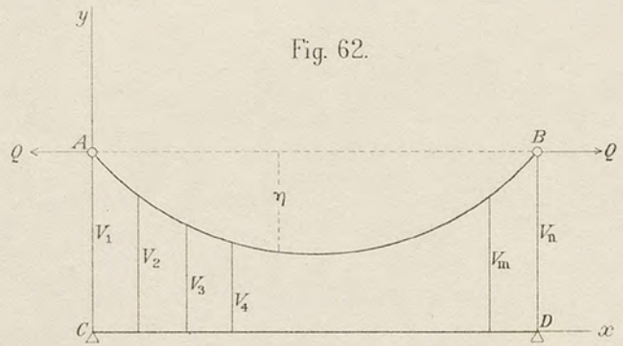


Fig. 63.

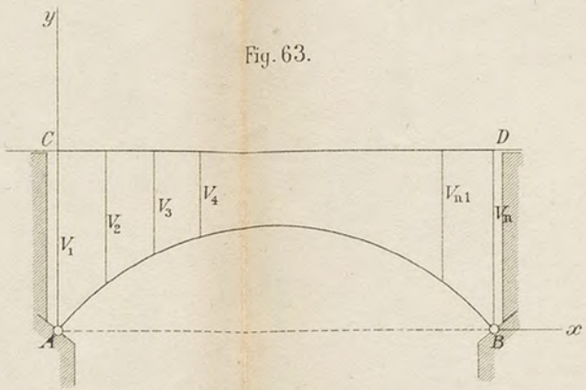


Fig. 64.

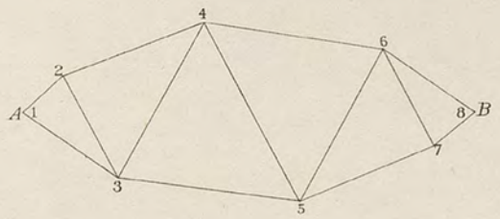


Fig. 65.

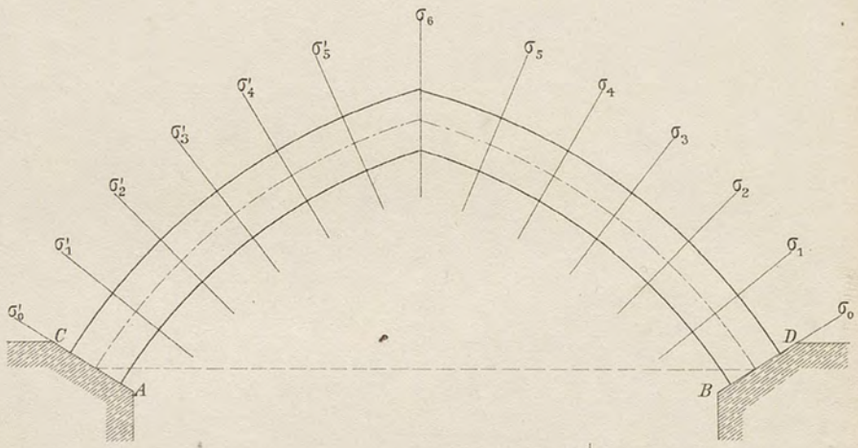


Fig. 66.

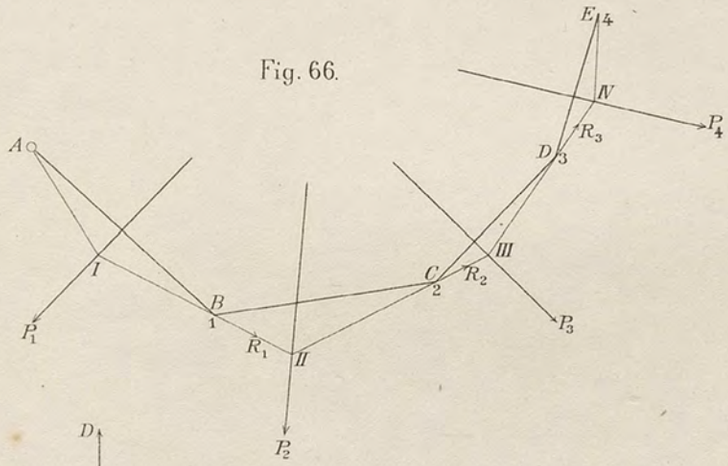


Fig. 67

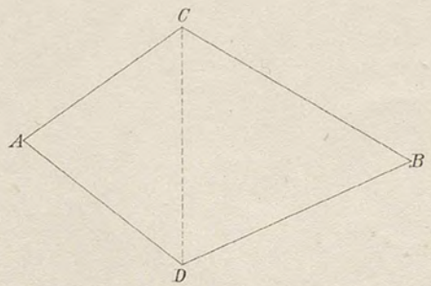


Fig. 68.

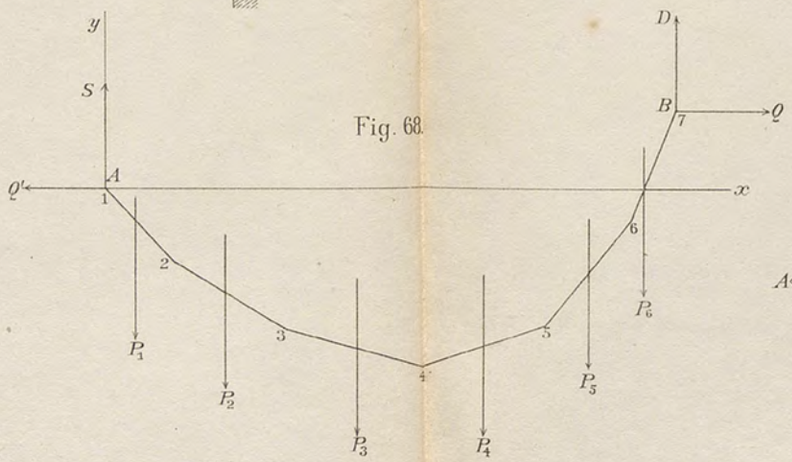


Fig. 69.

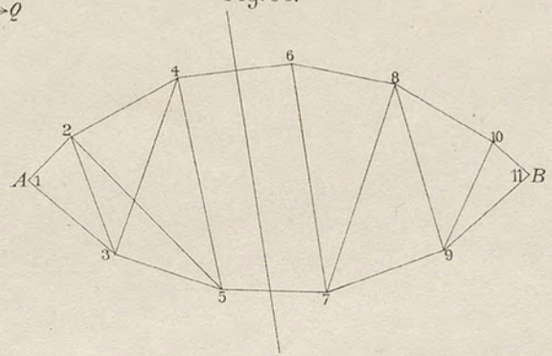


Fig. 70.

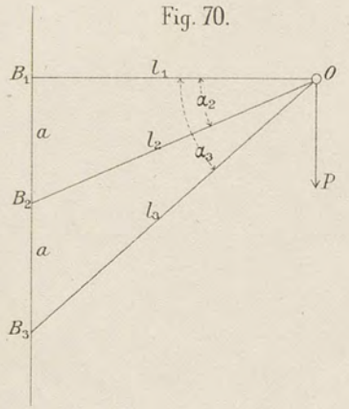


Fig. 71.

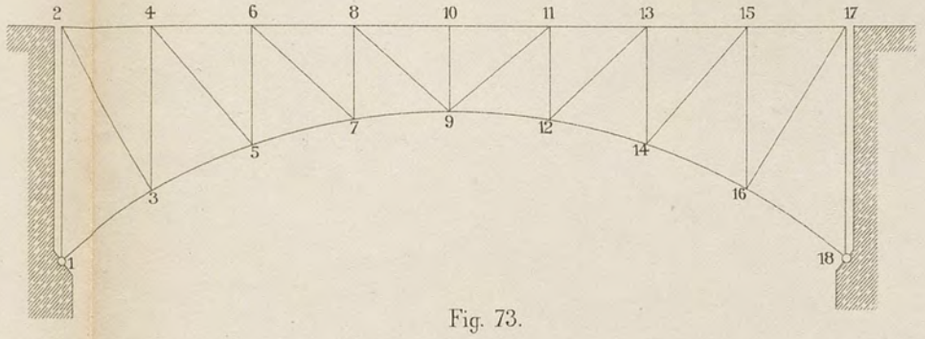


Fig. 72.

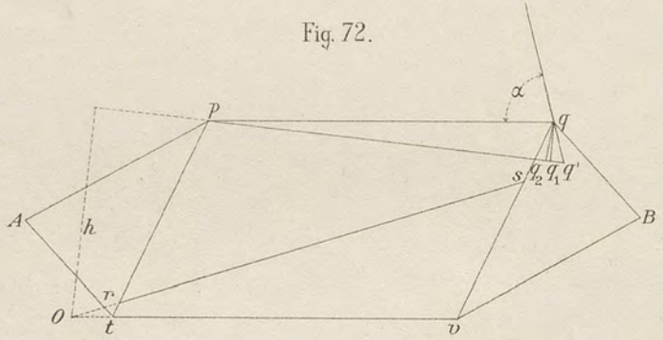


Fig. 73.

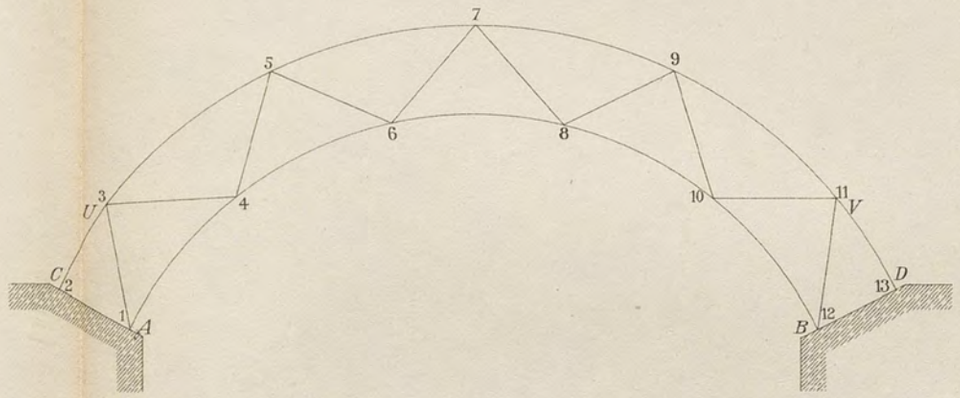


Fig. 74.

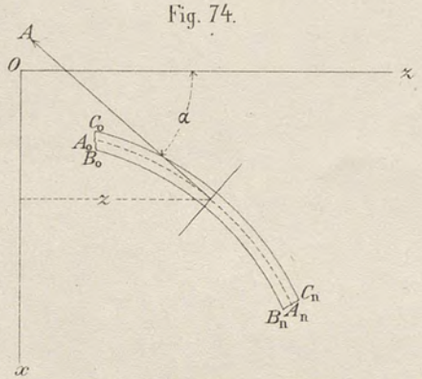


Fig. 75.

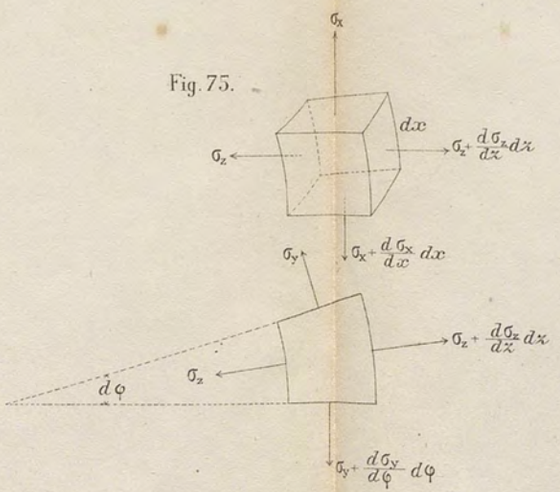


Fig. 76.

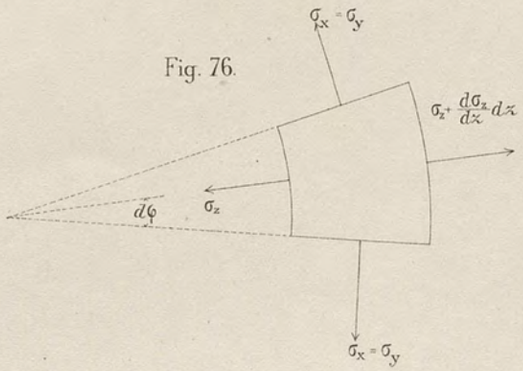


Fig. 77.

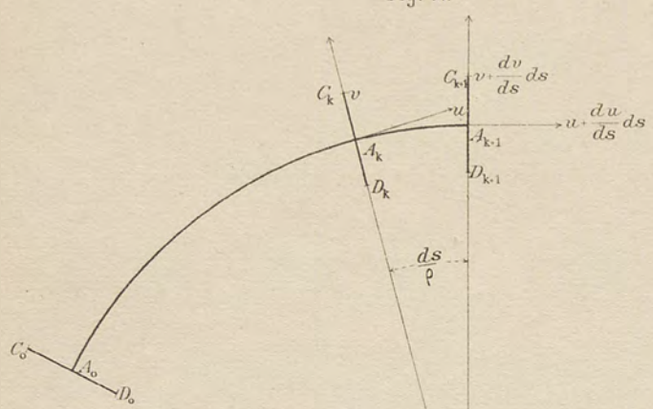


Fig. 78.

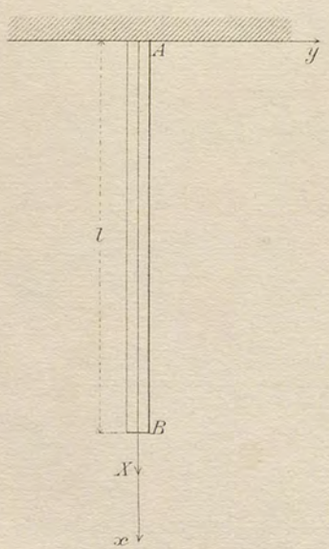


Fig. 82.

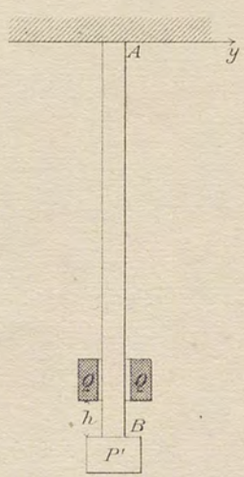


Fig. 79.

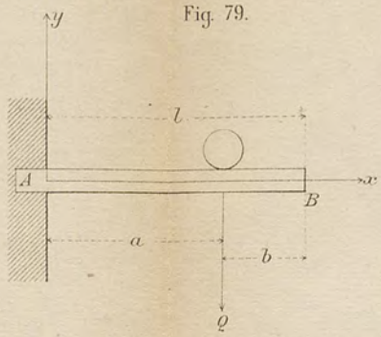


Fig. 80.

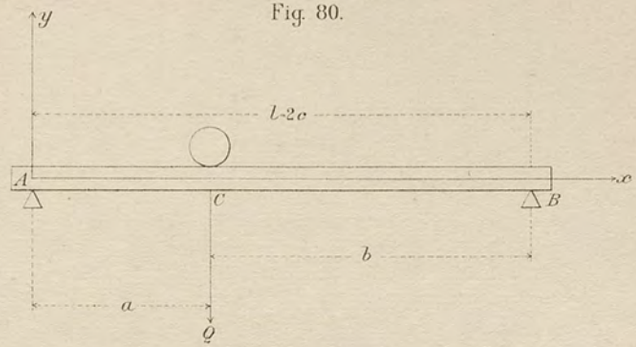


Fig. 83.

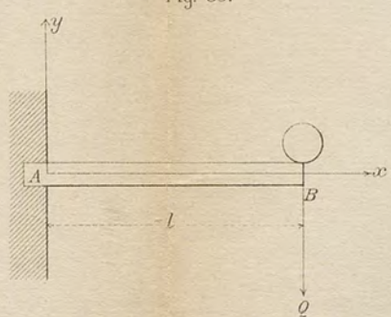


Fig. 81.



Fig. 84.

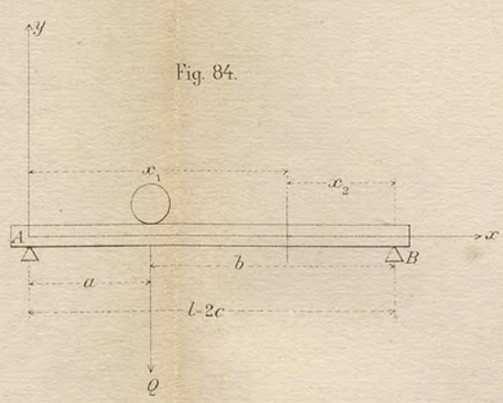
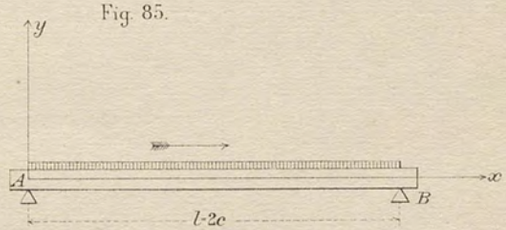


Fig. 85.



Apparecchi scriventi per la prova delle travate metalliche

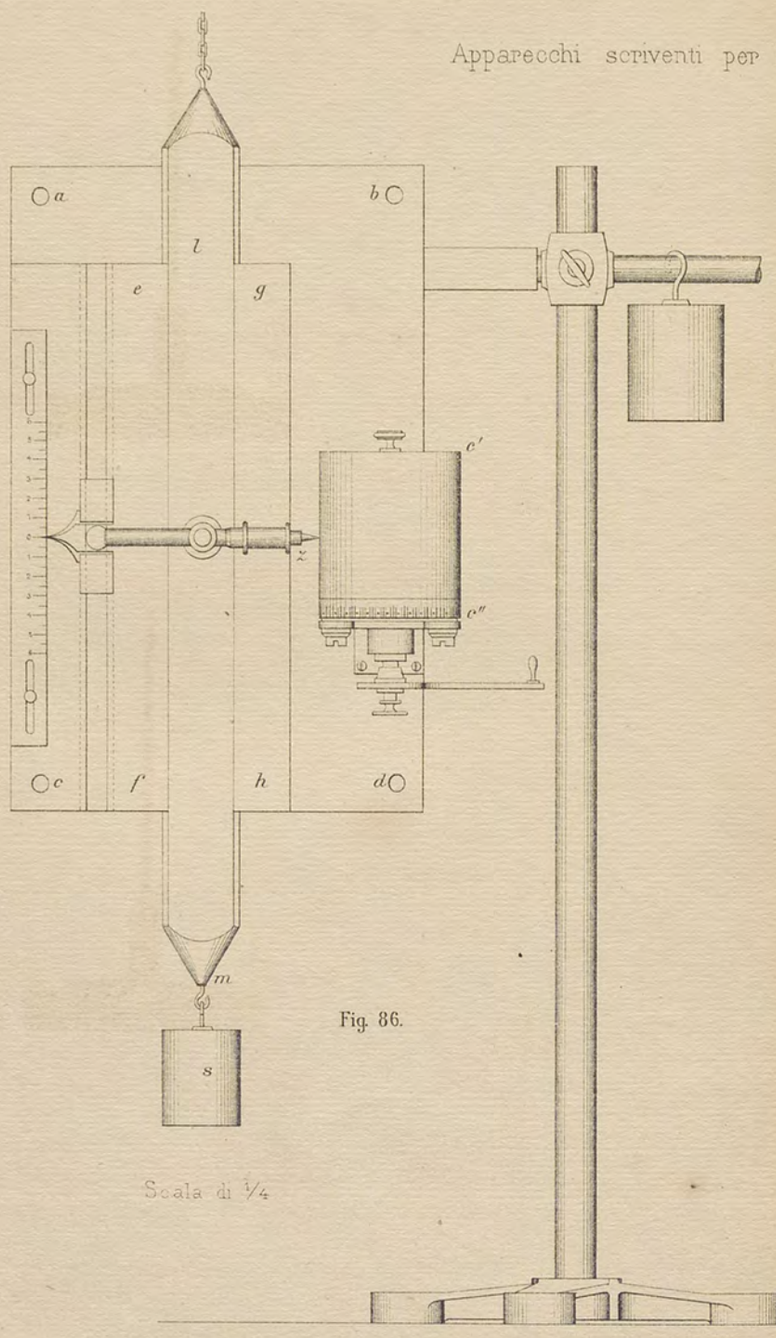


Fig. 86.

Scala di 1/4

Fig. 87.

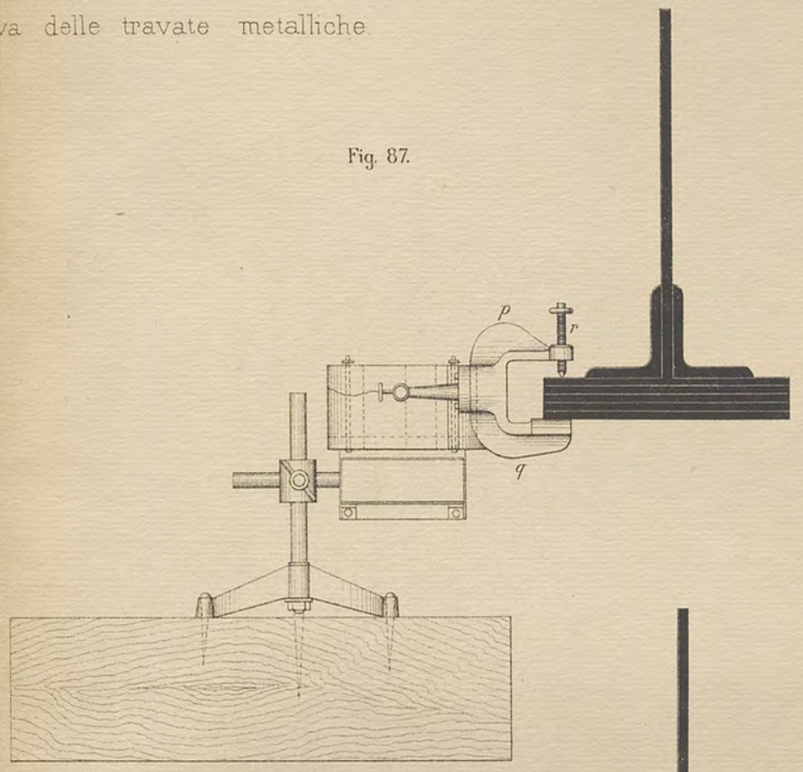
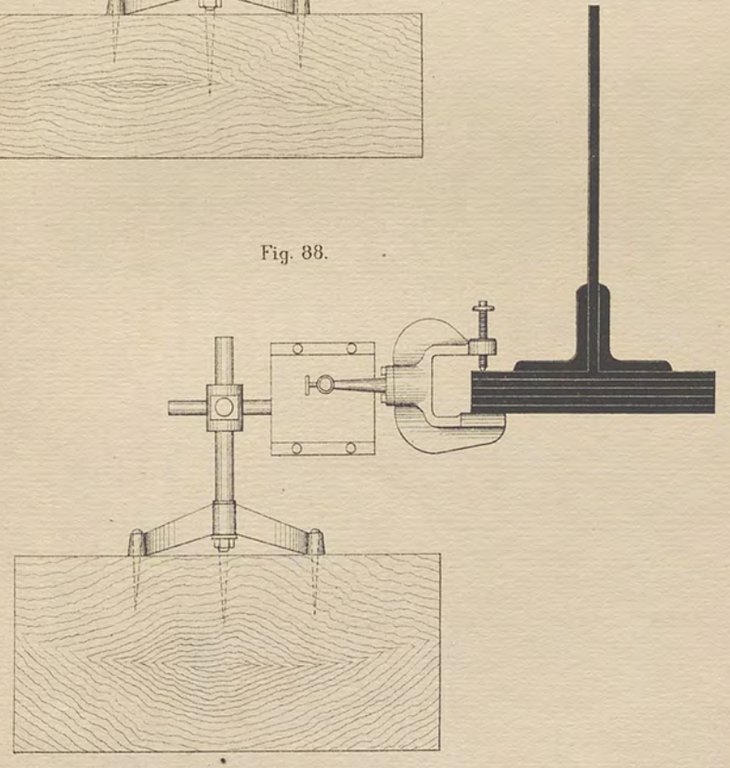
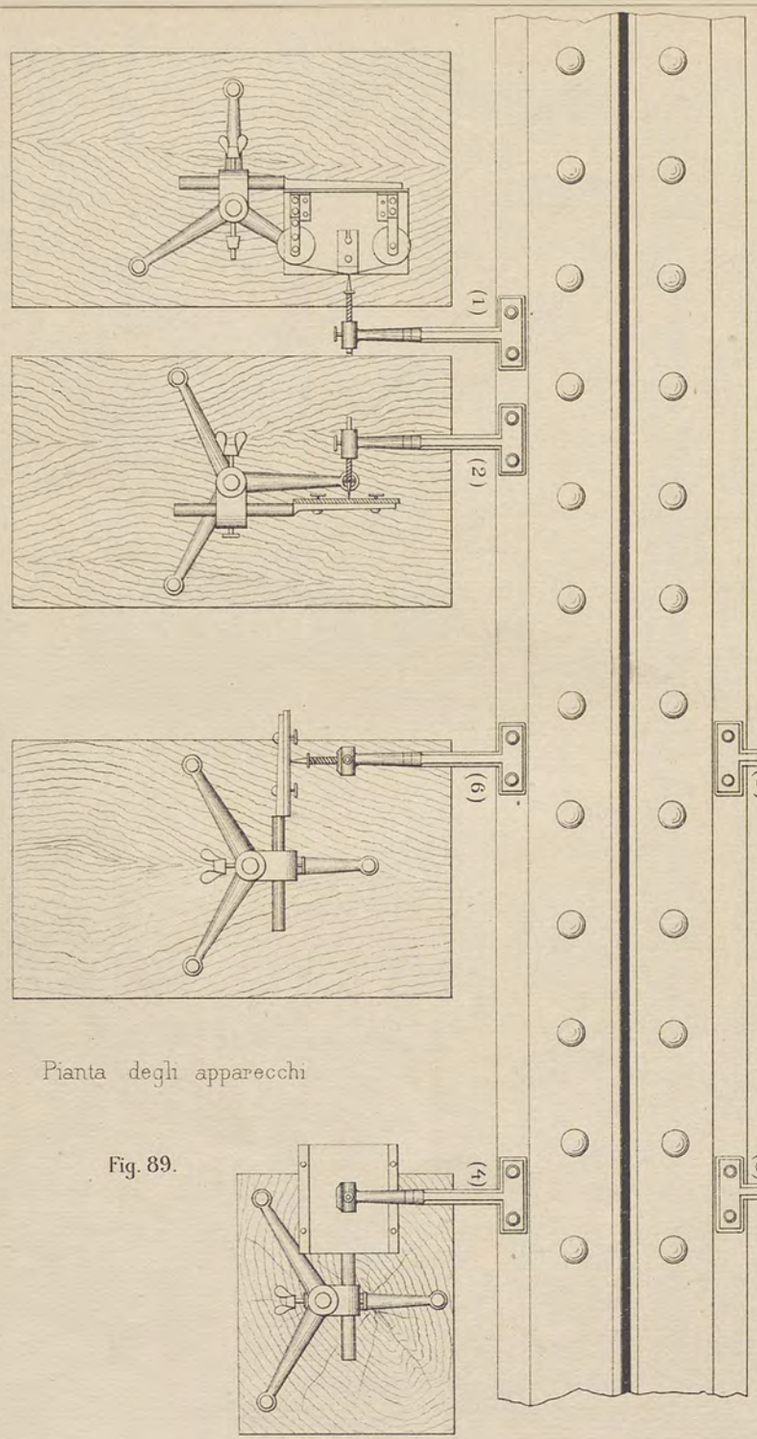


Fig. 88.





Pianta degli apparecchi

Fig. 89.

Apparecchi scriventi per la prova delle travate metalliche

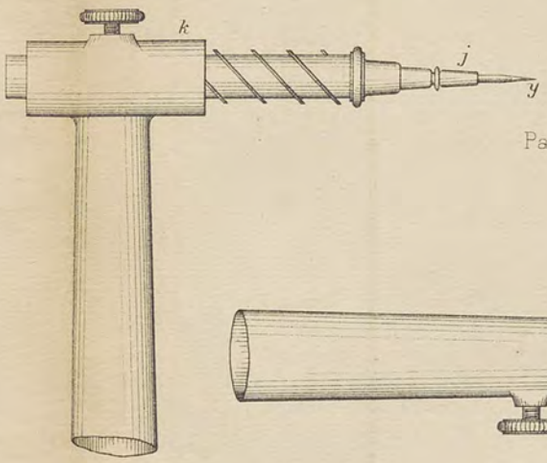
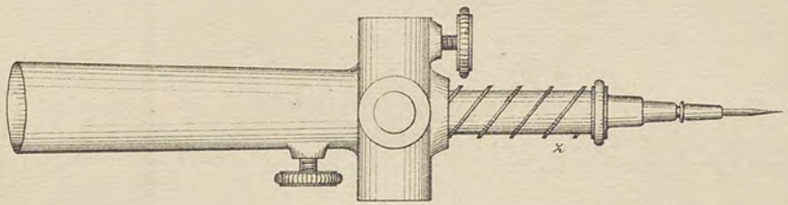


Fig. 91.

Particolari dei portalapis

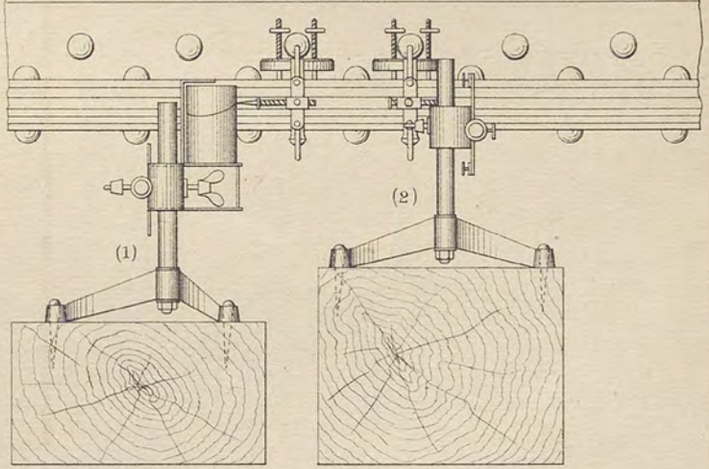
Grandezza naturale



Le figure 89 e 90 sono nella scala di 1/10

Vista di fianco degli apparecchi 1 e 2

Fig. 90.



Micrometro moltiplicatore dell' Ing. A. Castigliano

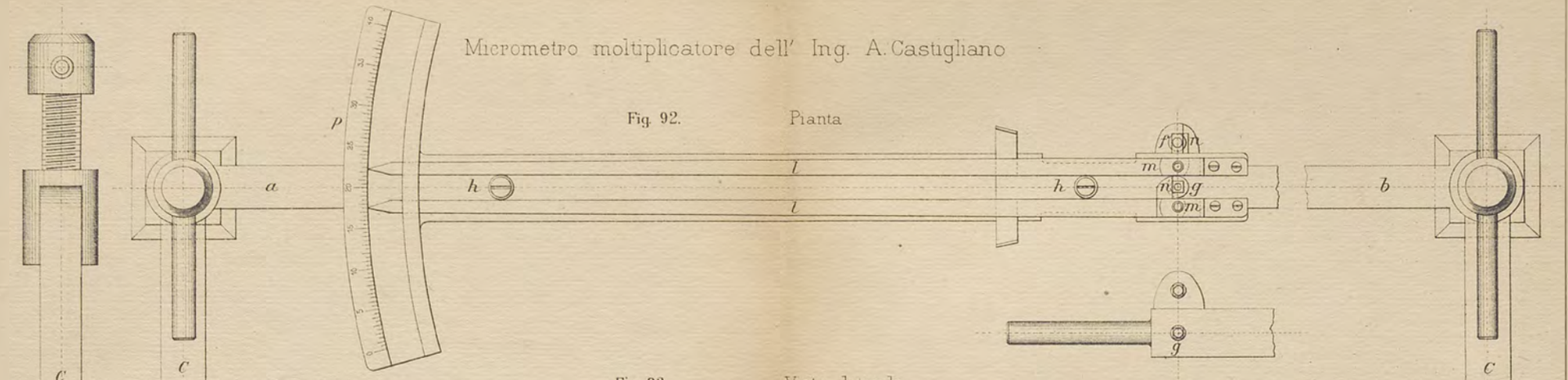
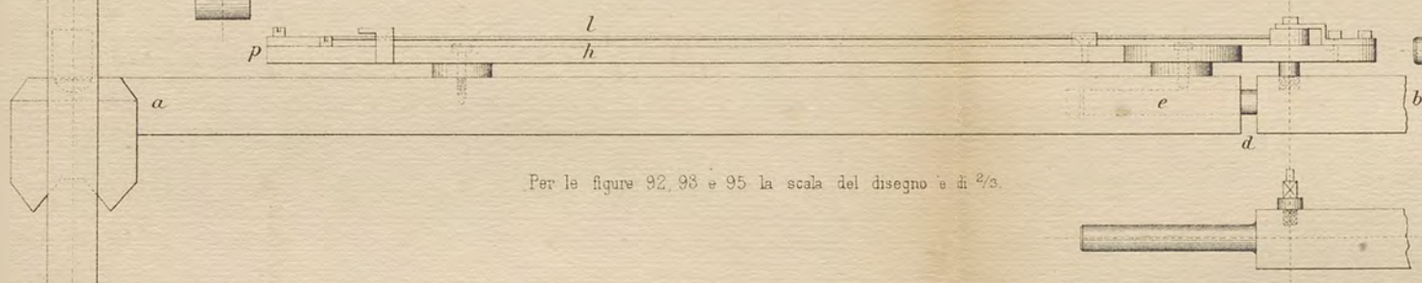


Fig. 92. Pianta

Fig. 93. Vista laterale



Per le figure 92, 93 e 95 la scala del disegno è di $^2/_3$.

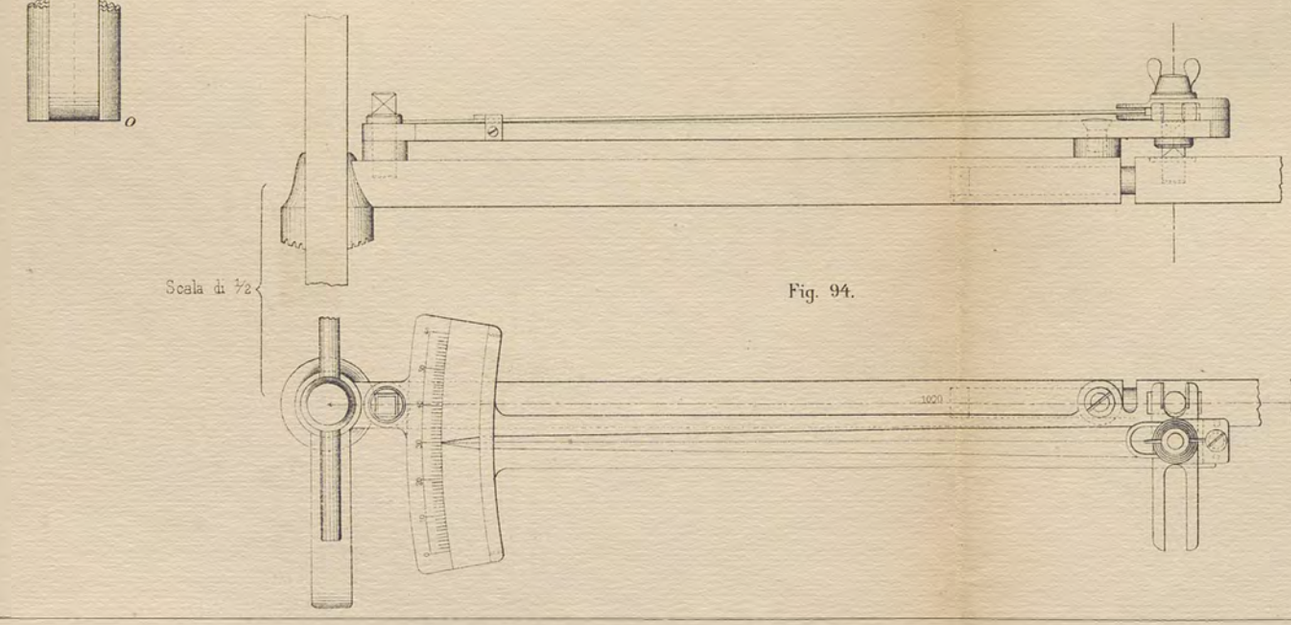


Fig. 94.

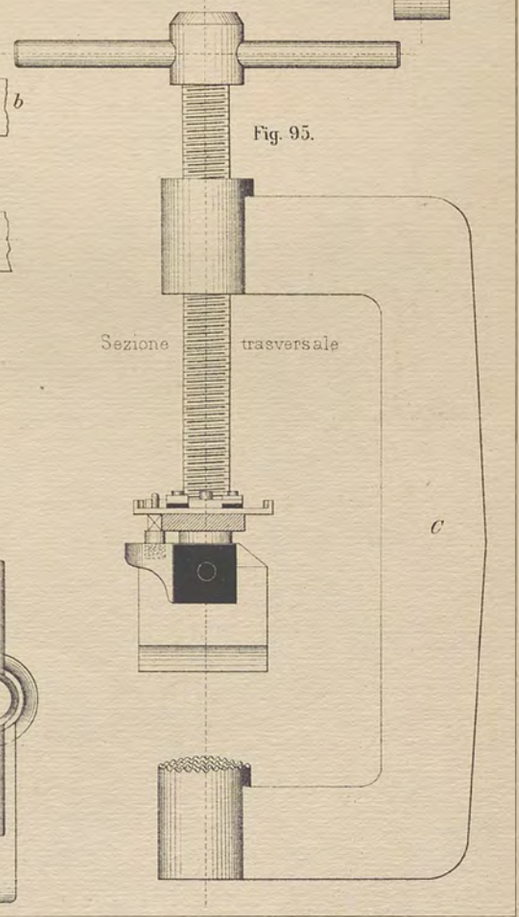


Fig. 95.

Fig. 101. Pianta

Scala di 1/3

Fig. 102. Fianco

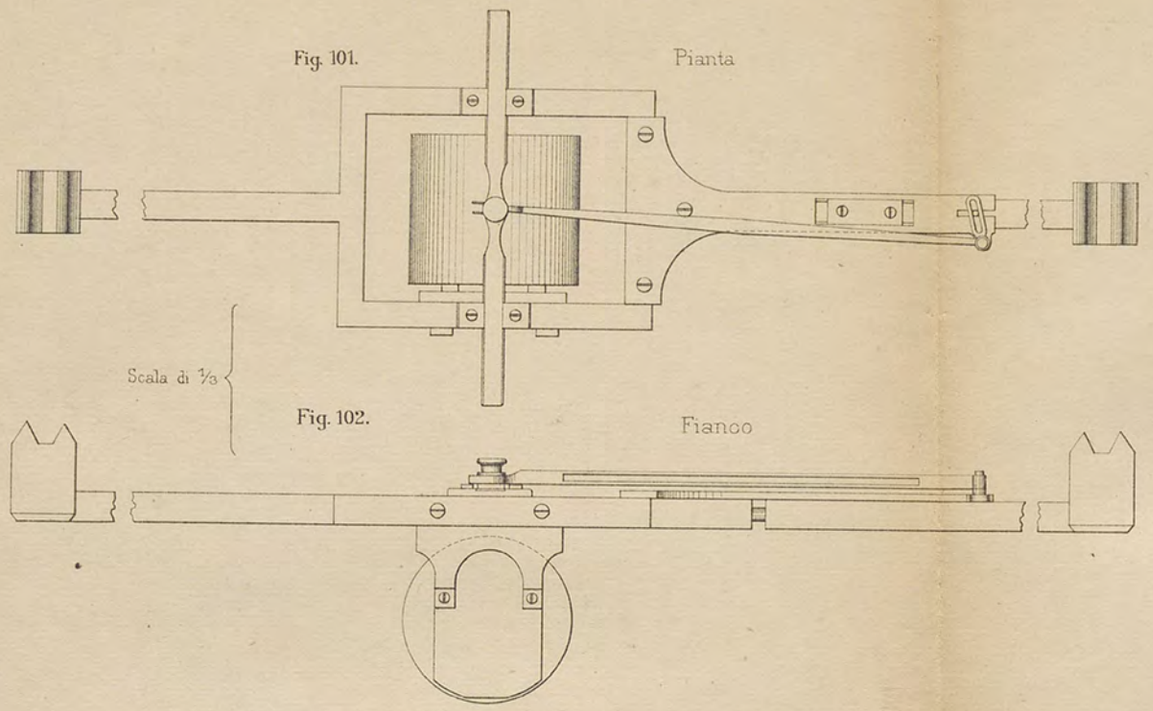


Fig. 96 e 97.

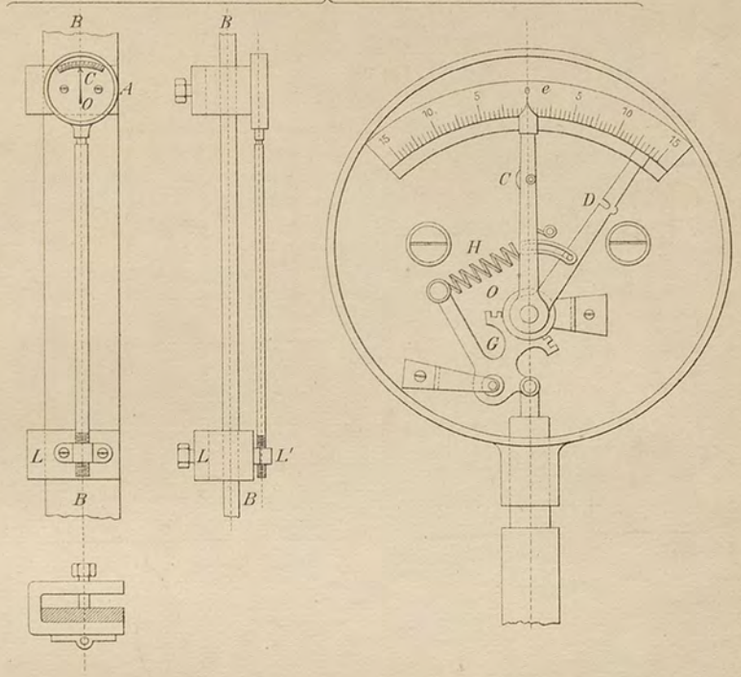


Fig. 99. Disegnatore degli allungamenti del Prof. W. Fränkel.

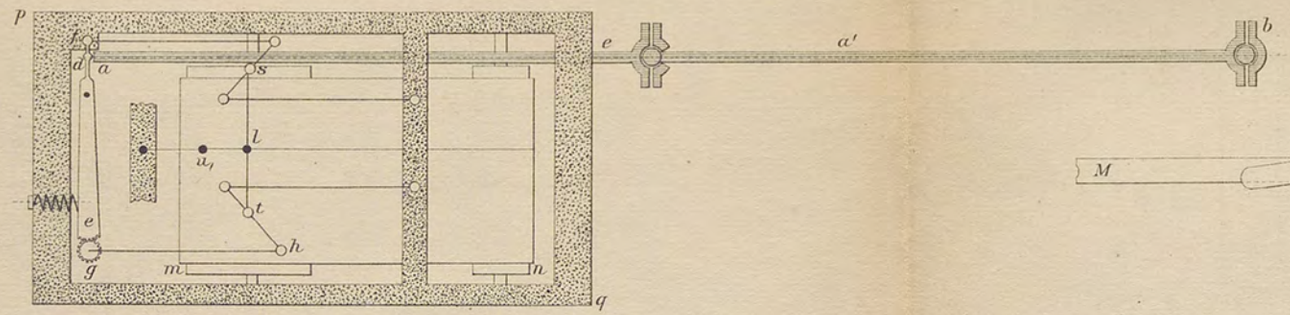


Fig. 98.

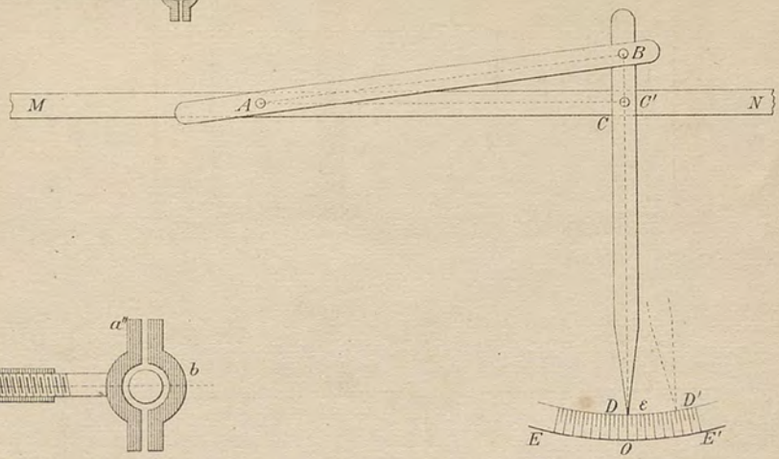


Fig. 100. Particolari di costruzione dell'asta *ab*

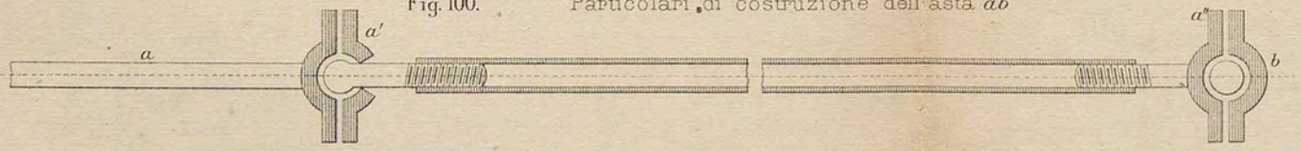


Fig. 104.

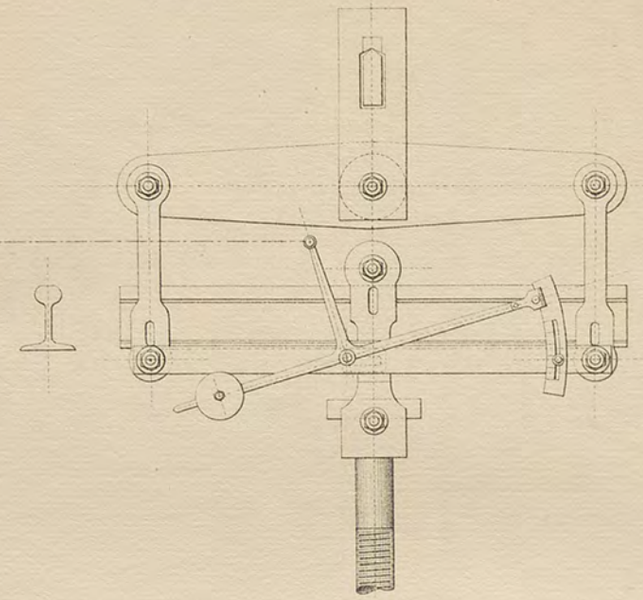
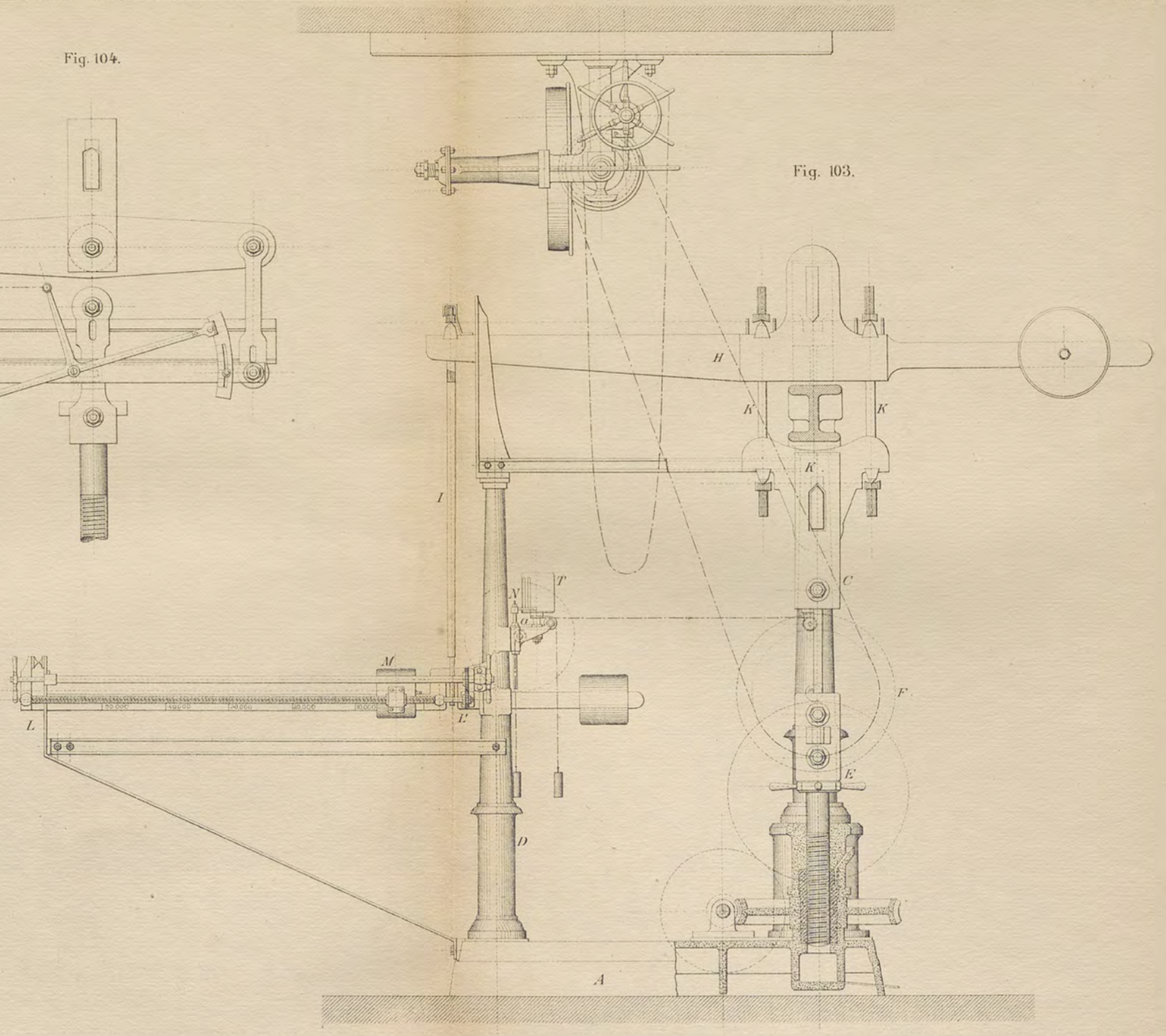


Fig. 103.



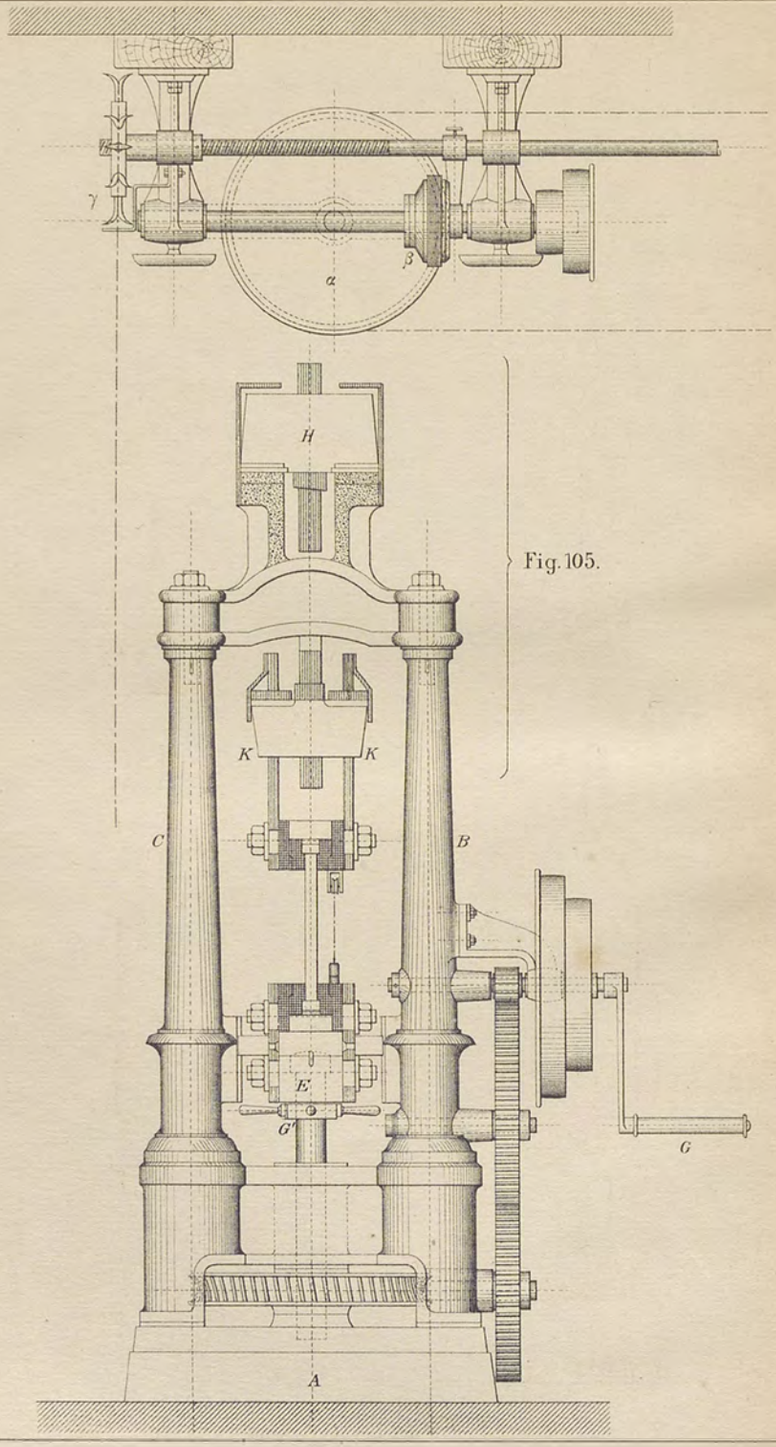


Fig. 105.

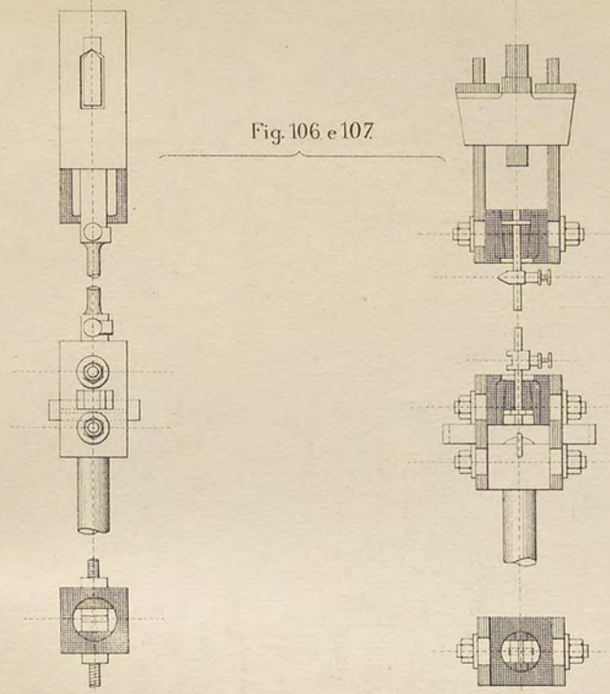


Fig. 106 e 107

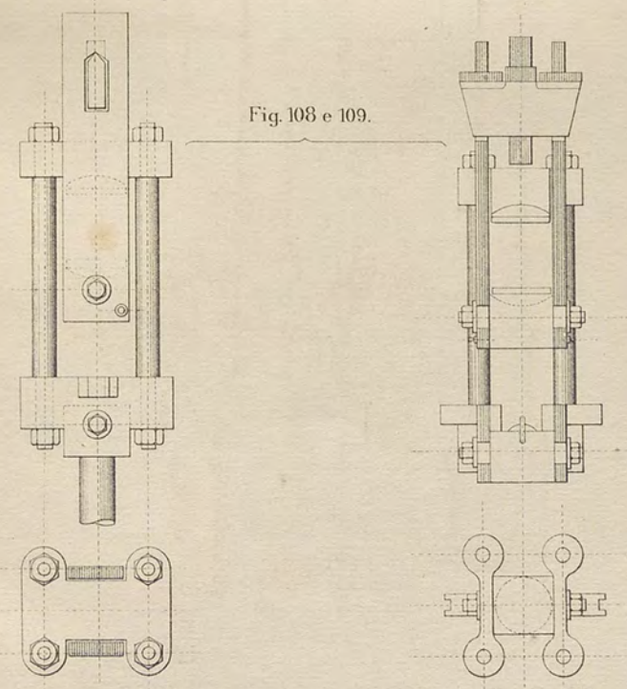


Fig. 108 e 109.

Fig. 110.

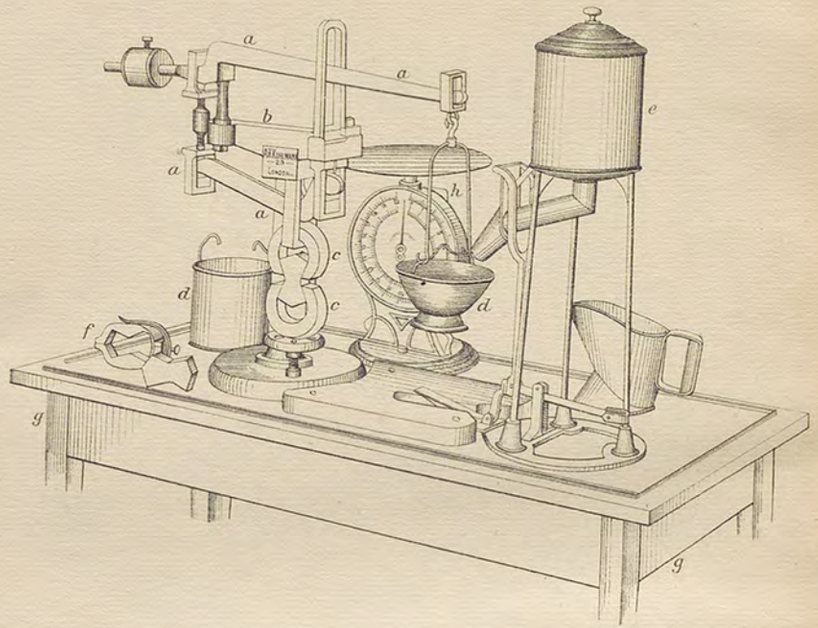


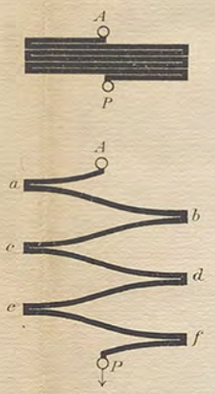
Fig. 111.



Fig. 112.



Fig. 113.



WINKLER

LAUNHARDT WEYRAUCH

LIPPOLD

Fig. 114.

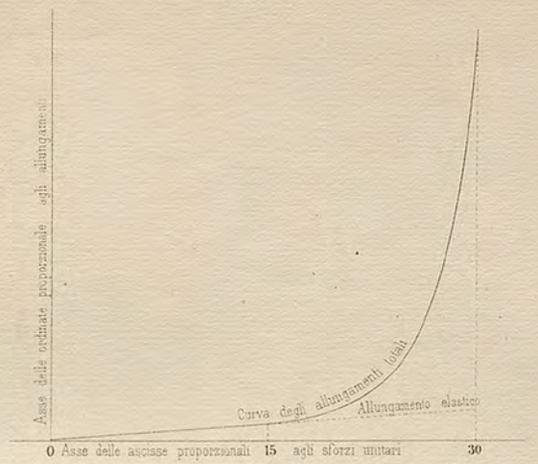


Fig. 115.

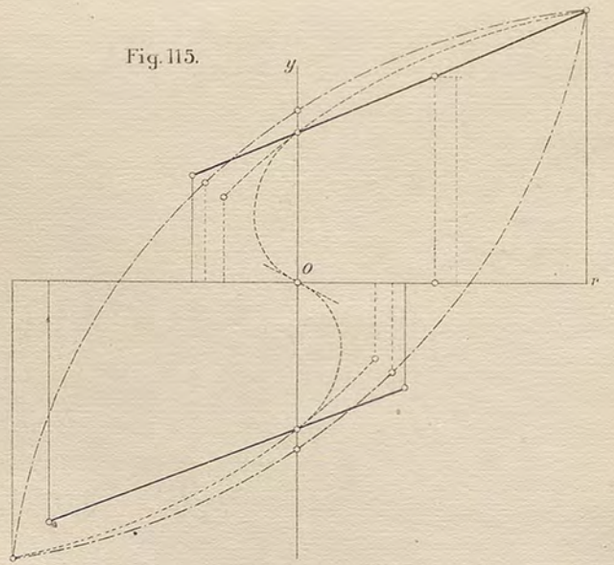
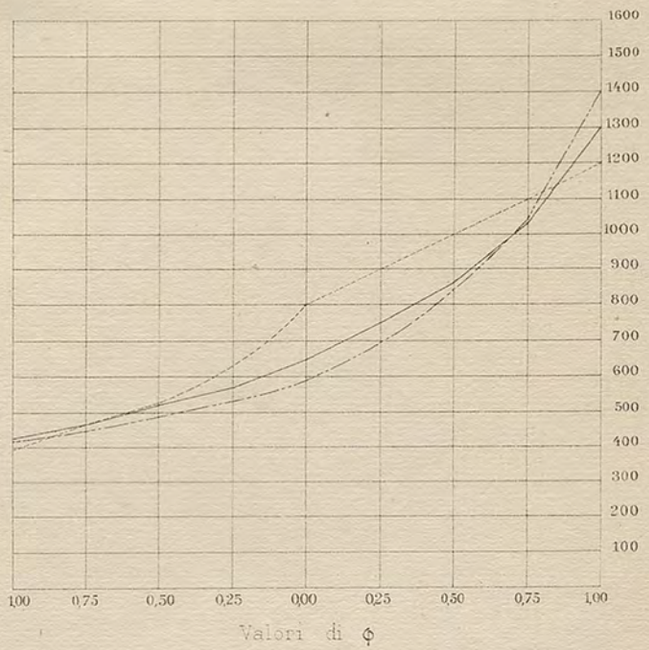


Fig. 116.(*)



(*) Dalle Lezioni di meccanica applicata alle costruzioni del Prof. C. Ceradini.