Reactions hyperstatiques différées dans les solides visco-élastiques (*)

Dans un solide élastique si l'on introduit une liaison V supplémentaire après que les charges extérieures sont entrées en action on ne modifie évidemment en aucune manière l'état d'équilibre du système. Il n'en est plus de même si le corps est formé par un matériau visco-élastique, c'est-à-dire s'il est susceptible de donner lieu à un effet de fluage. Dans ce dernier cas en effet la déformation élastique est suivie par une déformation de fluage qui fait entrer en action toute liaison qui tendrait a fixer la position atteinte par les points du corps immédiatement après l'application des charges.

Proposons nous alors d'étudier la loi de variation dans le temps de la réaction X d'une liaison V, introduite après les charges, ayant pour effet d'empêcher le déplacement d'un point dans une direction donnée.

Soit δ_o le déplacement subi par un point P dans une direction p pendant la déformation élastique instantanée, X la valeur de la réaction hyperstatiqne qui aurait pris naissance en P au moment de l'entrée en action des forces si le déplacement de ce point dans la direction p avait été empêché par la présence de la liaison V, E le module élastique du matériau. Supposons d'autre part que le corps donne lieu à fluage linéaire (c'est-à-dire que la déformation de fluage en un point quelconque soit à chaque instant fonction linéaire de l'intensité des contraintes).

Evaluons alors le déplacement que le point P, supposé libéré de la liaison V, aurait subi à un instant t, sous l'effet des charges permanentes et de la réaction X, dans la direction p.

Si l'on désigne par $\varepsilon_o(t)$ la loi de variation du fluage spécifique en fonction du temps, le déplacement δ_1 provoqué par l'action des charges s'écrit:

$$\delta_1 = \delta_o(1 + E\varepsilon_o)$$

Quant à l'effet de la réaction X il comprendrait: *a*) une fraction élastique

$$\delta_2 = -X\frac{\delta_0}{X_0}$$

b) une fraction visco-élastique qui peut s'écrire:

$$\delta_3 = -\int_0^t X\frac{\delta_0}{X_0}E\frac{d\varepsilon_0}{dt}dt$$

En égalant à zéro la somme algébrique de ces déplacements, ce qui exprime la condition imposée au point P par la liaison V, on obtient l'équation du phénomène sous la forme:

$$\delta_0(1 + E\varepsilon_0) - X_0\frac{\delta_0}{X_0} - \int_0^t X\frac{\delta_0}{X_0}E\frac{d\varepsilon_0}{dt}dt = 0$$

Soit, en dérivant par rapport a t et en ordonnant les termes:

$$\frac{dX}{dt} + XE\varepsilon'_0 - X_0E\varepsilon'_0 = 0$$

Pour pouvoir préciser la condition limite qui accompagne cette équation il nous faut alors fixer l'origine des temps adoptée pour la loi de variation du fluage spécifique. Pour simplifier, nous supposerons de faire coincider cette origine avec le moment où la liaison supplémentaire V est appliquée au corps. Ce faisant nous ne restreignons en effet en aucune manière la portée de notre étude.

Avec cette hypothèse la condition limite s'écrit :

$$\mathbf{t = 0\ (\varepsilon_o = 0) \qquad X = 0}$$

En intégrant l'équation *a*) on aboutit alors, pour la loi de variation de X, à l'expression très simple:

$$X = X_0\left(1 - e^{-E\varepsilon_0}\right) \qquad a)$$

Il suffit d'introduire dans cette formule les données numériques qui caractérisent le fluage du béton pour se rendre compte de l'importance considérable que peut prendre le phénomène qui nous occupe. On trouve en effet que, pour un béton de qualité ordinaire, pour lequel on peut poser:

$$E = 200.000 \ \text{Kg/cm}^2$$

$$\varepsilon_0\ (\text{pour } t = +\infty) = \frac{1}{100.000}$$

la valeur finale de la réaction différée prend la valeur :

$$X_\infty = 0{,}8\ X_0$$

Bien entendu ces résultats numériques supposent que la liaison V soit parfaitement rigide. S'il n'en est pas ainsi, autrement dit si V présente également un comportement visco-élastique, la valeur finale de X résultera moins élevée. Pour l'évaluer il suffira de reprendre les raisonnements qui précèdent en introduisant dans l'équation *a)* un terme supplémentaire qui tienne compte du tassement de V.

Il ne serait pas difficile de démontrer que la loi de variation de la réaction X reste inchangée si l'on suppose d'introduire simultanément plusieurs liaisons différées.

Franco Levi

Observations sur l'application du calcul des probabilités au dimensionnement du béton précontraint (*)

Pour vérifier les conditions d'équilibre des constructions on s'est pendant longtemps contenté de comparer les valeurs des contraintes provoquées par les charges prévues avec les contraintes admissibles; ces dernières se déduisant des contraintes de rupture correspondantes par l'application de marges de sécurité qui s'efforçaient de tenir compte de toutes les incertitudes du problème.

Plus récemment on a soutenu, non sans raison, qu'il était plus logique d'essayer de suivre le comportement de la construction, supposée soumise à des charges croissantes, jusqu'à la fin de la résistance. Ceci afin d'évaluer les marges de sécurité réellement disponibles, eu égard aux lois efforts-déformations des matériaux mis en oeuvre.

Dans un cas comme dans l'autre les marges de sécurité que l'on se fixe sont établies en fonction de l'imprécision avec laquelle on connait toutes les données du problème. Ce qui signifie par exemple qu'un projeteur qui calcule « à la rupture » ne considère la multiplication de la charge de service par la marge de sécurité à la rupture que comme un artifice de calcul destiné à faire entrer en ligne de compte, en plus de l'augmentation que la charge peut effectivement subir, les diminutions éventuelles des résistance, les imprécisions des formules employées etc.

C'est en partant de ces dernières considérations que certains calculateurs se sont demandés s'il ne serait pas plus logique, et en même temps plus précis, d'éviter toute fiction en recourant purement et simplement à l'application systématique du calcul des probabilités.

En principe le procédé auquel on est conduit est alors très simple: à partir des lois de dispersion des variables on calcule la probabilité de rupture de la section donnée et on la compare avec la limite que l'on considère acceptable sur la base des conditions de sécurité requises.

Mais ce schéma si séduisant se complique considérablement quand on examine en détail les opérations qu'il comporte. C'est ce que nous allons nous efforcer de montrer à présent.

La fixation de la limite admissible de la probabilité de rupture ne constitue pas une difficulté insurmontable. Des études très intéressantes ont été conduites sur ce point parmi lesquelles je citerai celle de M. Torroja qui propose de s'inspirer à des principes analogues à ceux que l'on adopte dans le domaine des assurances.

Beaucoup plus malaisée par contre l'étude des lois de dispersion des données du problème.

Il est tout d'abord évident que pour établir la loi de dispersion des propriétés mécaniques des matériaux il faudra necessairement procéder à un très grand nombre d'essais. Ne pouvant recommencer l'étude statistique à propos de chaque cas particulier, on sera donc conduit à se servir des résultats obtenus dans des conditions plus ou moins comparables. On entrevoit immédiatement le danger de telles généralisations, surtout si l'on songe qu'il suffit de quelques petits changements dans les conditions opératoires: un perfectionnement technique, la pénurie d'une matière première, un manque de main d'oeuvre spécialisée par exemple pour modifier profondément l'allure des phénomènes étudiés.

A plus forte raison ces observations peuvent elles s'appliquer à l'établissement des lois de dispersion des charges extérieures à propos desquelles on peut même se demander s'il existe des bases rationnelles pour une étude statistique.

Pour d'autres facteurs d'incertitude

(*) Comunicazione presentata al 1° Congresso Intern. del Cemento armalo precompresso.