

ATTI E RASSEGNA TECNICA

DELLA SOCIETÀ DEGLI INGEGNERI E DEGLI ARCHITETTI IN TORINO

RIVISTA FONDATA A TORINO NEL 1867

NUOVA SERIE . ANNO XXXIV . N. 5-6 MAGGIO - GIUGNO 1980

SOMMARIO

COSTRUZIONI AERONAUTICHE E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

FASCICOLO DEDICATO AL PROFESSORE INGEGNERE PLACIDO CICALA

Indice	pag. 224
Prefazioni	» 225
Elenco delle pubblicazioni	» 233
Saggi	» 237

Direttore: Giuseppe Fulcheri.

Vice Direttore: Roberto Gabetti.

Comitato di redazione: Dante Buelli, Vincenzo Ferro, Marco Filippi, Cristiana Lombardi Sertorio, Mario Oreglia, Francesco Sibilla, Giovanni Torretta, Gian Pio Zuccotti.

Segretaria di redazione: Elena Tamagno.

Redazione, segreteria, amministrazione: Società degli Ingegneri e Architetti in Torino, via Giolitti, 1 - Torino.

ISSN 0004-7287

Periodico inviato gratuitamente ai Soci della Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino.

NELLO SCRIVERE AGLI INSERZIONISTI CITARE QUESTA RIVISTA III

**COSTRUZIONI AERONAUTICHE
E
SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

**FASCICOLO DEDICATO
AL PROFESSORE INGEGNERE
PLACIDO CICALA**

INDICE

Notizie sull'attività scientifica e accademica di P. Cicala:

<i>Ricerche sull'aerodinamica dell'ala oscillante (Carlo Ferrari)</i> . .	pag. 225
<i>Ricerche di Scienza delle Costruzioni (Franco Levi)</i>	» 227
<i>Contributi nella teoria di ottimizzazione (Angelo Miele)</i>	» 229
<i>Carriera accademica e riconoscimenti (Ugo Rossetti)</i>	» 231
<i>Elenco delle pubblicazioni</i>	» 233
<i>Considerazioni didattiche sulla Scienza delle Costruzioni. L'equazione dei lavori virtuali</i>	» 237
<i>Problemi di ottimizzazione</i>	» 247
<i>Indagini sulle pareti sottili con i metodi asintotici</i>	» 265

La Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino, continuando la sua benemerita opera di onorare insigni Docenti del Politecnico di Torino, costretti a lasciare l'insegnamento per raggiunti limiti di età, accogliendo l'invito rivolto da Colleghi, Amici ed Allievi del prof. Placido Cicala, raccoglie in questo Fascicolo cenni informativi sulle ricerche da lui svolte in quasi mezzo secolo di un'attività così mirabile per l'importanza dei problemi trattati e dei risultati ottenuti da porlo fra gli studiosi italiani di maggiore fama nel mondo scientifico.

Detta attività si è esplicata essenzialmente in tre campi: 1) azioni aerodinamiche sui profili alari e su ali in moto non stazionario; 2) sviluppo di metodi di calcolo delle variazioni ed applicazioni alla Meccanica del volo; 3) Scienza delle costruzioni. Carattere comune, tipico di essa è la relativa semplicità dell'algoritmo usato rispetto alla complessità dei problemi trattati e al rigore delle soluzioni trovate, il che contrasta non poco con la (per me) deprecabile tendenza moderna di usare algoritmi complicati spesso per trattare problemi banali.

Sono qui commentate solo ricerche del primo gruppo, che comprende sedici Note e Memorie, compiute tutte nel primo periodo dell'attività scientifica di Cicala dal 1935 al 1942 e mostranti tutte quel carattere di geniale semplicità cui sopra ho accennato; è ovvio l'interesse che esse presentano per il problema delle vibrazioni alari, e in particolare del « flutter », problema fondamentale nelle Costruzioni aeronautiche; ma è da segnalare pure l'importanza che esse hanno per lo studio della locomozione dei pesci e degli uccelli, che ha attratto in questi ultimi anni l'attenzione di biologi, ingegneri, idrodinamici. Sono fondamentali per il gruppo qui considerato le due ricerche « Le azioni aerodinamiche su profili di ala oscillanti in presenza di corrente uniforme » e « Sul moto non stazionario di un'ala di allungamento finito ». La prima, pubblicata come Memoria dell'Accademia delle Scienze di Torino nel luglio del 1935 (Cicala allora aveva 25 anni!), riprende un problema che già era stato oggetto di studio da parte di Birnbaum, di Glauert, e di Küssner, e con procedimento originale ed elegante ne dà una soluzione più semplice, più completa e più rigorosa di quelle date dai predetti Autori. La seconda (del 1937 e pubblicata nei Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei) studia (prima in questo nel mondo) lo stesso problema per l'ala di allungamento finito; con una geniale estensione dello schema vorticoso equivalente all'ala, valido nel caso stazionario, al caso di moto non stazionario, ottiene l'equazione integro-differenziale che determina la distribuzione della circuitazione totale attorno ad ogni profilo lungo l'apertura alare, e che a buon diritto è chiamata « equazione di Cicala » ed è da porsi accanto all'equazione di Prandtl, cui si riduce nel caso della stazionarietà; quella parte del nucleo dell'equazione che rappresenta l'influenza della non stazionarietà è chiamata « funzione di Cicala ». Queste ricerche ebbero una larga risonanza internazionale, così che Enrico Pistolesi nel suo « Il contributo italiano al progresso della Aerodinamica e delle Costruzioni aeronautiche » (estratto dall'opera « Un secolo di progresso scientifico italiano 1839-1939 ») bene a ragione poteva dire: « P. Cicala ha svolto originali ed importanti ricerche sull'aerodinamica dell'ala oscillante, sia di apertura infinita, sia di apertura finita, acquistando all'Italia priorità e preminenza in questo difficile argomento », mentre aveva già detto in « Notizie sulla attività scientifica svolta in Italia nel campo dell'Aeronautica nel biennio 1935-1937 » (pubblicato in italiano e in tedesco negli Atti del Congresso della Lilienthal Gesellschaft di Berlino) « Una speciale segnalazione meritano gli importanti lavori di P. Cicala sulle azioni aerodinamiche che si esercitano sulle ali oscillanti o comunque generalmente deformabili. Su questo argomento si sono avuti in questi ultimi tempi numerosi lavori, tra i quali particolarmente interessanti quelli di Küssner e di Theodorsen, ma oso affermare che la teoria svolta da Cicala, oltre precedere almeno alcune di quelle degli altri ricercatori, ed essere in ogni caso del tutto indipendente, le supera per eleganza di metodo e semplicità di risultati ottenuti mediante bene ideati sviluppi in serie e l'uso delle funzioni di Hankel ». Varie, numerose applicazioni del metodo di Cicala, od estensioni per ali rettangolari od ellittiche, furono fatte in Italia e all'estero, e fra queste citerò qui i lavori di W. P. Jones e S. W. Sekan « Calculation of derivatives for rectangular wings of finite span by Cicala's method » (Brit. Aero. Res. Council. Rep. and Mem. No 1920, 1950) e dello Harvard Com-

putation Laboratory « Tables of the complete Cicala function » (Probl. Rep. No. 58, 1952). Lo stesso Cicala affinava il suo metodo nella Nota dell'Accademia delle Scienze di Torino del 1940 « Le teorie approssimate dell'ala oscillante di allungamento finito » facendo un'impostazione rigorosa del problema basata sulla considerazione del sistema vorticoso aderente e libero, che egli opportunamente riduce a sistemi di vortici a staffa elementari, da lui chiamati bivortici; gli era così possibile fare un raffronto tra il metodo originariamente da lui ideato e quelli successivamente proposti da altri Autori, dimostrandone (nella Nota ora citata ed in altre) la pratica equivalenza.

La stessa genialità dimostrata nell'affrontare teoricamente il problema delle vibrazioni alari appare nelle ricerche svolte da Cicala per studiarlo sperimentalmente: usufruendo soltanto di una piccola galleria del vento del diametro di 60 cm e non avendo a disposizione tutto quel complesso di raffinati strumenti che l'elettronica permette oggi di avere, egli è riuscito ad ottenere una ricca messe di risultati sperimentali, che non sono meno importanti di quelli trovati successivamente con ben altri mezzi all'estero, quando addirittura non li superino; questi risultati egli mette a raffronto con quelli teorici, indicando le cause della discordanza nei casi in cui questa si verifica. Queste ricerche sperimentali di Cicala costituiscono la migliore prova che ciò che conta non è tanto la ricchezza dei mezzi sperimentali, quanto la capacità dello sperimentatore.

Non posso chiudere queste note di presentazione senza ricordare quello che è stato il mio primo incontro con Cicala nel lontano 1930, lui timido studentello del 3° anno di ingegneria, appena venuto dal profondo Sud nel freddo Nord, ed io assistentello di Meccanica applicata, impacciato in quanto ancora verde di libera docenza appena conseguita l'anno prima; compresi già allora che le sue eccezionali qualità lo avrebbero portato ad una attività scientifica di eccezionale importanza, ed ora, vecchio docente in ritiro, sono lieto di potergli testimoniare che questa previsione si è completamente avverata, ed augurargli che egli possa ancora per parecchi anni continuare ad onorare con la sua scienza l'Italia.

CARLO FERRARI
professore emerito

La fama indiscussa che la Scuola torinese si è conquistata nel mondo in molti campi della scienza applicata ha trovato nuovo alimento nell'opera geniale di Placido Cicala. Né la sua riservatezza, né il suo carattere schivo e spesso ironico sono infatti riusciti a ridurre la risonanza di oltre centacinquanta memorie originali nelle quali egli ha profuso i frutti di una intuizione matematica impareggiabile e di una eccezionale capacità di sintesi, sempre controllate dalla rigorosa consapevolezza della portata dei risultati raggiunti.

Un profilo fedele della personalità scientifica di Cicala non può prescindere dal mettere in evidenza la speciale posizione in cui si colloca l'attività scientifica che Cicala viene svolgendo nel lungo periodo dalla sua laurea ad oggi. Per chiarire questo suo orientamento vale la pena di citare la premessa da lui stesso formulata al ciclo di conferenze tenute alla Purdue University. Egli fece allora notare che nei suoi lavori egli segue « un cammino scomodo: esposto al tiro dei matematici che possono trovarlo poco rigoroso, e al tiro degli ingegneri che possono trovarlo poco ingegneristico ». Per rendersi conto delle difficoltà di quel cammino fra i due fronti, basta sfogliare i recenti volumi dello *Handbuch der Physik* dove la trattazione dei problemi d'elasticità, di plasticità, della trave, è condotta in un linguaggio terribilmente ostico che rende problematico l'uso di quei lavori da parte di chi, in quei campi, deve veramente lavorare. Per rendersi conto della scomodità di quel cammino basta leggere il commento che l'autore di un testo intricatamente matematico sui gusci fa riguardo alla monografia [112] di Cicala: mentre apprezza il metodo geniale (*keen method*) ideato per la classificazione delle incognite e nota che « *the systematic approximation approach leads to impressive final results* » giudica « *inconvenient* » l'uso dei vettori nella rappresentazione della geometria del guscio, delle tensioni e deformazioni. Invece è proprio il pregio della trattazione di Cicala porre in evidenza che, con due successive derivate di un vettore, si ricavano tutte le caratteristiche geometriche che servono, evitando la formulazione tensoriale. La rappresentazione delle proprietà del corpo elastico isotropo con un simbolo tensoriale con due indici a pianterreno e due a primo piano è certamente elegante nella sua concisione (Cicala dice che ricorda i tram di Londra); però l'esplicita matrice d'elasticità è di uso immediato anche per riferimenti obliqui generici. Forse in troppe pubblicazioni oggi si adopera per il calcolo delle strutture il linguaggio che va bene per Fisica Superiore: si rende così « estremamente difficile » ciò che, se non facile, si può ridurre almeno a « moderatamente difficile ».

Volendo percorrere per sommi capi l'evoluzione del lavoro di ricerca di Cicala in campo strutturale un primo tema può individuarsi nei lavori sulle strutture a guscio con elementi di rinforzo longitudinali e trasversali (strutture alari con longheroni e centine, fusoliere con correnti e ordinate) tipiche delle costruzioni aeronautiche. Questa produzione, secondo Hadji Argyris, raggiunge il livello scientifico della eccellente letteratura tedesca del settore (H. Ebner, H. Wagner). A questo filone appartengono i lavori [5], [14], [21], [24], [27], [30], [32], [39], [40], [40 bis], [42], [48], [51] dell'elenco.

Un secondo filone, abbordato all'inizio della guerra, è quello attinente al problema, allora sul tappeto, del comportamento del cilindro sottile sotto compressione assiale: i risultati sperimentali indicavano il cedimento per tensioni comprese fra $1/5$ e $1/2$ della tensione critica calcolata secondo la teoria (lineare) della stabilità elastica. In una nota del 1940 [25] Cicala svolse un acuto esame della formulazione linearizzata. Introducendo il concetto di « ordine di grandezza di una derivazione » quando ancora la trattazione asintotica di Gol'denveizer non era nota, egli dimostrò che gli affinamenti della teoria lineare che diversi autori avevano introdotto, sperando di giustificare la divergenza anzidetta, erano irrilevanti. Successivamente prese a studiare il fenomeno con la teoria non lineare, sviluppando i complicati calcoli con una vecchia calcolatrice a levette. Mi raccontò la sua emozione quando trovò che col crescere della deformazione della parete, il carico che essa sosteneva diminuiva: allora egli non sapeva che, di là del fronte di guerra, Th.v. Karman e H. S. Tsien avevano da un anno pubblicato la scoperta del fenomeno. Egli lo comunicò in una nota che avventurosamente attraversò la linea gotica e più tardi apparve sull'*Aerotecnica* [41]. Sullo stesso indirizzo S. Dei Poli

sviluppo importanti ricerche, e Cicala stesso svolse per conto della Cornell University uno studio [68] sul comportamento dei pannelli cilindrici, con il quale diede conferma di risultati trovati da G. Welter in Canada.

Alla elastoplasticità Cicala dedicò una serie di studi [52], [58], [62], [65], [67]. In questa serie si nota lo studio volto a trarre conseguenze del concetto di Batdorf e Budianski che, in una teoria dall'applicazione assai laboriosa, presentavano la deformazione plastica come somma degli effetti degli slittamenti plastici che staticamente si producono sulle varie giaciture di scorrimento nelle particelle. Lo sviluppo, ricondotto dal Cicala con certe semplificazioni, al calcolo di integrali ellittici, interessò particolarmente gli autori della teoria, per la quale mancò poi un adeguato sviluppo dell'aspetto sperimentale di controllo.

Le conoscenze disponibili al momento sulle relazioni fra tensioni e deformazioni in campo elastoplastico vennero elaborate in una memoria [89] che costituisce una sintesi esemplare, fondata su una conoscenza esauriente della sovrabbondante bibliografia in argomento, atta a costituire un solido punto di riferimento per ulteriori sviluppi.

Rilievo emblematico assumono poi gli studi cui Cicala si è dedicato dal 1960 in tema di strutture a parete sottile. Sugli sviluppi di tali ricerche, nel cui ambito egli ha dato vita ad un nuovo originalissimo indirizzo, sistematicamente seguito dal suo gruppo di collaboratori, riferisce egli stesso in una comunicazione contenuta in questo stesso fascicolo. Volendo tuttavia delineare, in una immagine di sorprendente efficacia, una visione globale di un approccio che, col volgere degli anni, ha assunto importanza fondamentale, non possiamo far meglio che attingere dallo stesso Autore il seguente brano (cfr. P. Cicala, *Linear Shell Theories* - non in elenco).

« L'approccio asintotico opera nell'ambito della teoria tridimensionale come un prisma sulla luce composta; esso seleziona lo spettro dello stato di tensione in classi monocromatiche di soluzioni aventi diverse lunghezze di variazione, ciascuna governata da espressioni parametriche ».

Come spesso avviene, chi ha saputo, come Cicala, raggiungere l'essenziale, trova poi, con spontanea naturalezza, un linguaggio cristallino per rappresentarlo. E tale espressione, di forma quasi poetica, costituisce il suggello della perfezione raggiunta.

prof. FRANCO LEVI
Politecnico di Torino

La maniera più semplice e diretta di descrivere Placido Cicala è questa: egli è un asso fra i più valenti studiosi che fino ad oggi abbia avuto la scuola di ingegneria italiana. La sua personalità poliedrica ha molti aspetti pregevoli, umani e tecnici. Gli aspetti umani sono conosciuti solo da quelle persone che, come lo scrivente, hanno avuto la fortuna di essere a contatto con il professor Cicala per lungo tempo. Gli aspetti tecnici sono molteplici: c'è Cicala, il docente universitario, che insegna con la massima economia mentale; c'è Cicala, il ricercatore raffinato, che penetra in aree nuove e guarda a tali aree con gli occhi della originalità; e c'è Cicala, il consigliere tecnico a tu per tu, che dà una spiegazione semplice ad una domanda complicata. Probabilmente, questo terzo volto del professor Cicala è il meno conosciuto dal grande pubblico; ma è certamente conosciuto dalle persone che hanno avuto contatti tecnici con lui: tanti lavori hanno avuto luce come conseguenza, diretta o indiretta, del consiglio tecnico del professor Cicala, delle questioni basiche da lui sollevate, e degli stessi dubbi da lui espressi. Lo scrivente dà pubblico testimonio della influenza altamente positiva esercitata dal professor Cicala sui suoi collaboratori.

In ingegneria aeronautica, grandi progressi tecnici sono stati compiuti negli ultimi 30 anni come conseguenza dell'avvento di nuovi tipi di motori, cioè turboreattori e motori a razzo. Lo studio delle traiettorie ottime degli aeroplani a turboreattori e dei veicoli a razzo, sempre più importante per le più stringenti esigenze di progetto, porta a problemi matematici che appartengono al calcolo delle variazioni ed alla teoria del controllo ottimo. Questi problemi sono considerevolmente più complicati di quelli studiati dai grandi matematici del passato (Newton, Eulero, Lagrange, Weierstrass, Bolza, Bliss), a causa del fatto che le variabili di controllo, le variabili di stato, e persino le derivate delle variabili di stato sono soggette a disuguaglianze che devono essere soddisfatte lungo tutto l'intervallo d'integrazione e che portano a soluzioni discontinue: pertanto la ricerca di soluzioni ottime composte di archi differenti diventa importante.

Non è facile per un ingegnere penetrare in un campo tanto complesso delle matematiche. E non è facile per un ingegnere dedurre dai trattati classici quelle cognizioni che possono essere sfruttate con vantaggio nelle applicazioni tecniche. Pertanto l'attività di Cicala nel campo del calcolo delle variazioni e della teoria del controllo ottimo è notevole: I) per la formulazione ingegneristica dei concetti di base; II) per la estensione dei concetti di base allo studio di soluzioni discontinue; III) per il numero e varietà di applicazioni tecniche fatte. Nel seguito, lo scrivente esamina in dettaglio il contributo ingegneristico di Cicala nel calcolo delle variazioni e nella teoria del controllo ottimo, contributo attestato da numerosi articoli di ricerca (Pubblicazioni N° 63, 73, 79, 81, 85 dell'elenco) e da un libro (Pubblicazione N° 80).

Gli articoli del professor Cicala trattano l'applicazione del calcolo delle variazioni a problemi strutturali, problemi di meccanica del volo, e problemi di ricerca operativa nel campo economico, ecologico, idraulico, nucleare, industriale.

Nel campo di ottimizzazione strutturale, nelle note [63], [73] è determinata la distribuzione degli spessori di rivestimento alare che ne minimizza il peso per assegnate esigenze di rigidità torsionale e, in particolare, per data frequenza torsionale.

A problemi di volo ottimo si riferiscono le note seguenti:

[74] sulla determinazione della traiettoria di minimo tempo per date condizioni terminali.

[75], [76] sulla determinazione della traiettoria di minimo tempo in piano verticale, tenendo anche in conto la variazione di peso del velivolo; questi lavori, tra i primi apparsi sulle traiettorie ottime, hanno importanza nella meccanica del volo degli aerei a turboreattore o a razzo.

[77] sulle equazioni generali per le evoluzioni ottime di un aereo in un piano verticale, con caratteristiche aerodinamiche e di propulsione del tutto generiche; qui è introdotto il concetto di « valore indice » per la giunzione di archi diversi di traiettoria.

[78] sulla determinazione del programma ottimo di combustione per un aereo a razzo che vola a quota costante.

[79] sulla determinazione delle traiettorie ottime con discontinuità nelle variabili di controllo, con esame particolare delle singolarità del campo di rappresentazione.

[81] su vari problemi di ottimo in differenti campi della ingegneria; poiché questa nota è riportata per intero in questo fascicolo, si omettono i cenni sul contenuto.

Nella nota [85], l'esame è esteso alla determinazione della distribuzione ottima delle barre reattive in un reattore nucleare.

Nel 1957, il professor Cicala si recò negli Stati Uniti, invitato dalla Purdue University, Lafayette, Indiana. Qui egli tenne un ciclo di conferenze sul calcolo delle variazioni che culminò nel testo « *An Engineering Approach to the Calculus of Variations* ». Questo libro fu pubblicato a Torino dalla casa editrice universitaria Levrotto & Bella, senza però che se ne desse notizia adeguatamente diffusa. Tuttavia, l'importanza di tale volume fu capita dagli specialisti che ebbero occasione di conoscerlo, specialmente negli Stati Uniti; sicché due ristampe vennero esaurite.

Nel libro, Cicala si occupa dei cosiddetti metodi indiretti del calcolo delle variazioni, metodi ai quali Lagrange apportò contributi di straordinaria genialità. Cicala partì dai testi classici ben noti (Goursat, Courant, Tonelli, Bolza, Bliss) ma deviò da quelli in maniera notevole. Ingegnere moderno, Cicala dette importanza prevalente alla determinazione delle soluzioni ottime fatte di archi differenti.

Con il suo libro, Cicala mette a disposizione degli ingegneri per la prima volta i metodi indiretti del calcolo delle variazioni, senza necessità di prelieve cognizioni di analisi superiore. Infatti, tipicamente ingegneristica è l'originale giustificazione delle condizioni di estremo sulla base della teoria dei minimi ordinari. La relazione, che ne risulta, fra la variazione dei punti terminali dell'estremale è opportunamente posta in particolare rilievo. Di essa, l'autore si vale per ricavare le condizioni relative ai punti terminali della traiettoria e quelle relative alle eventuali transizioni fra archi componenti. Sulla stessa base, egli dà giustificazione e l'interpretazione della condizione di Weierstrass e presenta una tecnica che, nella giunzione di archi eterogenei, permette di individuare la via che conduce alla soluzione ottima fra quelle del suo intorno. Con trattazione sempre accompagnata da esempi applicativi, è presentata la costruzione dei campi di estremali, dai quali si può ottenere la prova di ottimo assoluto, costruzione che, purtroppo ancora oggi, pur con i poderosi strumenti di calcolo di cui si dispone, è attuabile solo per problemi non troppo complessi. Sempre sulla base della teoria dei minimi ordinari, l'autore sviluppa, infine, l'analisi relativa ai problemi con punti terminali variabili: in questo, suggerisce un'originale applicazione della relazione menzionata fra le variazioni delle coordinate terminali.

Nella opinione dello scrivente, il libro del professor Cicala costituisce un contributo importante per l'applicazione del classico calcolo delle variazioni alla teoria dei controlli ottimi ed all'ingegneria in genere: forse per la prima volta, il problema delle soluzioni discontinue è stato affrontato in forma sistematica.

Da quanto sopra è detto, l'importanza del contributo di Placido Cicala in questo settore appare evidente. La continua produttività scientifica del professor Cicala, non solo negli anni della gioventù, ma anche negli anni della maturità di studioso, è anche evidente. Pertanto, tutto lascia pensare che il raggiungimento del 70° compleanno sia per lui non un punto di arrivo, ma piuttosto un punto di partenza per successi ancora maggiori. Lo scrivente è sicuro di questo.

ANGELO MIELE

Professor of Astronautics and Mathematical Sciences
Rice University, Houston, Texas.

A conclusione delle testimonianze di Ferrari, Levi e Miele, alcuni cenni biografici e due parole di presentazione ai tre articoli del prof. Cicala che seguono.

Placido Cicala è nato a Messina il 9 giugno 1910: ha frequentato il Politecnico di Torino, dove si è laureato in Ingegneria Meccanica nel luglio 1932 conseguendo la lode, ed in Ingegneria Aeronautica nel luglio 1933, ancora con lode.

Nel 1934, entrato nella carriera universitaria per suggerimento del prof. M. Panetti, è assistente ordinario; nel 1936 consegue la libera docenza in Meccanica Applicata, mentre già nel 1935 gli viene conferito l'incarico di insegnamento del corso di Calcolo di Aeromobili. Nel 1942, a soli 32 anni, è vincitore del concorso alla cattedra di Costruzioni Aeronautiche ed è nominato professore straordinario presso la Facoltà di Ingegneria del Politecnico: nel 1945 ottiene la promozione a professore ordinario. Nel 1957 è trasferito alla cattedra di Scienza delle Costruzioni, sempre al Politecnico di Torino, cattedra di cui è tuttora titolare.

Nel periodo tra il 1948 ed il 1952, per missione del Ministero degli Esteri concordata con il governo argentino, il prof. Cicala ha tenuto corsi alla Escuela Superior de Aerotécnica e alla Università di Córdoba, nonché presso l'Università di La Plata.

Nel 1957 è stato visiting professor presso la Purdue University negli Stati Uniti, dove per 5 mesi ha partecipato a ricerche su traiettorie ottime e tenuto conferenze di Calcolo delle Variazioni.

Il prof. Cicala ha successivamente svolto un ciclo di conferenze sulle strutture a guscio presso varie Università statunitensi, tra cui la Stanford University, la Illinois University e la Yale University.

Fin dal 1940 è socio corrispondente della Accademia delle Scienze di Torino, di cui diviene socio nazionale nel 1953. Nel 1959 è socio corrispondente della Accademia Nazionale dei Lincei e ne diviene socio nazionale nel 1972. È altresì socio corrispondente dell'Istituto Lombardo, Accademia di Scienze e Lettere.

Nei primi anni della carriera universitaria, vinse attraverso concorso nazionale per esami, un cospicuo premio, l'alunnato Gori-Feroni, rinnovatogli per tre anni. L'Accademia delle Scienze di Torino gli conferì il premio Bressa internazionale. Fu inoltre insignito della medaglia d'oro di benemerita da parte del Ministero della Pubblica Istruzione ed ottenne vari altri riconoscimenti. Tra questi desidero particolarmente ricordare il conferimento del « Premio Torino », istituito dalla nostra Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino, per le persone ed enti che abbiano onorato con la loro attività il Piemonte.



L'on. Scalfaro consegna il trofeo e si congratula con il prof. Placido Cicala vincitore della Classe « Opere del pensiero, come contributi di studio, ricerca e progetto ».

Nella sessione del 1968 il premio Torino per la classe A (opere del pensiero, quali contributi di studio, di ricerca e di progetto) fu conferito a Placido Cicala con la seguente motivazione: « Mentalità matematica degna delle migliori tradizioni dell'Ateneo Torinese, ha dedicato integralmente la sua profonda attività di studioso e di ricercatore alla soluzione dei complessi problemi di Aerodinamica e di Scienza delle Costruzioni nel campo della plasticità e sul comportamento delle strutture a parete sottile, pervenendo a risultati che gli conferiscono chiara fama in campo internazionale.

In particolare si deve al Cicala la prima soluzione completa delle forze sull'ala oscillante ad allungamento finito che destò particolare interesse negli ambienti scientifici specializzati come « funzione del Cicala ».

Per la soluzione dei problemi di ottimizzazione nella meccanica del volo il Cicala estese per primo i metodi del calcolo tradizionale delle variazioni alle soluzioni discontinue. Nelle strutture a pareti sottili ha dato soluzioni nuove nei casi di instabilità elastica in campo non lineare.

Docente di Scienza delle Costruzioni e di Costruzioni aeronautiche nel Politecnico di Torino, ha svolto con successo il non facile compito di ambasciatore della cultura italiana all'estero, assumendosi l'onere di corsi di insegnamento presso varie università americane, dove è deferentemente apprezzato ».

Dopo queste brevi note biografiche, appaiono qui di seguito tre memorie che il prof. Cicala ha scritto espressamente per questo fascicolo. Come mi diceva personalmente giorni or sono, egli è stato particolarmente sensibile alla decisione della Società degli Ingegneri ed Architetti in Torino di consacrargli questo numero monografico: ai Soci di essa ha dedicato le tre note. In queste, pur essendo limitato al minimo indispensabile il formalismo specialistico, sono presentati concetti di base per vasti settori d'indagine, di interesse ingegneristico.

La prima nota è dedicata a considerazioni didattiche sulla Scienza delle Costruzioni, in particolare sulla efficienza dell'impiego dell'equazione dei lavori virtuali (che per molti di noi, suoi allievi, è parimenti diventata strumento basilare nella didattica della Scienza delle Costruzioni). La seconda e la terza sono relative a problemi scientifici particolarmente cari al Cicala e precisamente, a problemi di ottimo con soluzioni discontinue e ad indagini sulle pareti sottili con i metodi asintotici.

Chi desiderasse approfondire i temi delle tre memorie qui appresso pubblicate, troverà indicazioni necessarie nella bibliografia che segue.

prof. UGO ROSSETTI
Politecnico di Torino

Elenco delle pubblicazioni

1. *La stabilità nelle regolazioni di velocità e pressione nelle turbine a vapore*, A. (¹), Vol. 68, marzo 1933, p. 326-336.
2. *La regolazione della turbina a vapore a ricupero parziale*, « Ricerche d'Ingegneria », anno II, n. 1, gennaio 1934, p. 22-28.
3. *Comportamento delle ogive coniche a velocità ultrasonore*, « La Ricerca Scientifica », anno V, vol. II, n. 3-4, agosto 1934, p. 53-61.
4. *La flessione delle travi con piastra sottile*, A., vol. 69, gennaio 1934, p. 171-187.
The bending of beams with thin tension flanges, N.A.C.A. Tec. Mem., No. 769.
5. *Sulla torsione delle ali a sbalzo*, A., vol. 69, marzo 1934, p. 313-326.
Sulla torsione delle ali a sbalzo, Ae. (¹), vol. XIV, n. 7, luglio 1934, p. 827-853.
6. *Schema di calcolo di un castello motore*, Ae., vol. XV, n. 2, febbraio 1935, p. 170-179.
7. *La torsione dei solidi cilindrici a sezione allungata*, A., vol. 70, marzo 1935, p. 337-355.
8. *Il centro di taglio nei solidi cilindrici*, A., vol. 70, marzo 1935, p. 356-371.
9. *Le azioni aerodinamiche sui profili di ala oscillanti in presenza di corrente uniforme*, « Memorie R. Acc. delle Scienze di Torino », tomo 68, ser. 2, parte I, luglio 1935, p. 75-98.
10. *Misure d'elasticità coll'uso dei pendoli accoppiati*, « Ricerche d'Ingegneria », anno IV, n. 1, gennaio 1936, p. 1-8.
11. *Ricerche sperimentali sulle vibrazioni flesso-torsionali di un modello di ala con rigidità variabili*, A., vol. 71, giugno 1936, p. 554-579.
12. *Le azioni aerodinamiche sul profilo oscillante*, Ae., vol. XVI, n. 8, agosto 1936, p. 652-665.
13. *Le oscillazioni flessotorsionali di un'ala in corrente uniforme*, Ae., vol. XVI, n. 11, novembre 1936, p. 785-801.
14. *Le tensioni normali nella torsione di strutture con diaframmi rigidi*, Ae., vol. XVII, n. 2, febbraio 1937, p. 80-119.
15. *Ricerche sperimentali sulle azioni aerodinamiche sopra l'ala oscillante*, Ae., vol. XVII, n. 5, maggio 1937, p. 405-414.
16. *Sul moto non stazionario di un'ala di allungamento finito*, L. (¹), vol. XXV, serie VI, 2° semestre, agosto 1937, p. 97-102.
17. *Methoden zur Messung der Luftkräfte auf schwingenden Flügeln*, « Vorträge der Hauptversammlung d. Lilienthal Ges. », 1937, p. 256-257.
18. *Il problema aerodinamico del volo ad ala battente*, Ae., vol. XVII, n. 11, novembre 1937, p. 955-960.
19. *Ricerche sperimentali sulle azioni aerodinamiche sopra l'ala oscillante. II serie*, Ae., vol. XVII, n. 12, dicembre 1937, p. 1043-1046.
20. *La teoria e l'esperimento nel fenomeno delle vibrazioni alari*, Ae., vol. XVIII, n. 4, aprile 1938, p. 412-434.
Comparison of theory with experiment in the phenomenon of wing flutter, N.A.C.A. Tec. Mem., n. 887.
21. *Sul calcolo dell'ala bilongherone con rivestimento resistente al taglio*, Ae., vol. XIX, n. 1, gennaio 1939, p. 3-26.
22. *Le oscillazioni proprie di un corpo rigido sostenuto elasticamente*, A., vol. 74, aprile 1939, p. 381-391.
23. *Sulle travi di altezza variabile*, A., vol. 74, maggio 1939, p. 392-402.
24. *Sul calcolo dell'ala bilongherone con rivestimento resistente al taglio*, « Atti del V Convegno di Aerotecnica », Napoli 1938.
25. *Sulla stabilità dell'equilibrio elastico*, A., vol. 75, gennaio 1940, p. 185-222.
26. *La stabilità elastica del cilindro in parete sottile*, Ae., vol. XX, n. 5, maggio 1940, p. 355-373.
27. *Sul calcolo dei solidi cilindrici in parete sottile. Parte I*, Ae., vol. XX, n. 6, giugno 1940, p. 460-479.
28. *Sul calcolo dei solidi cilindrici in parete sottile. Parte II*, Ae., vol. XX, n. 7, luglio 1940, p. 595-612.
29. *Sul calcolo dei solidi cilindrici in parete sottile. Parte III*, Ae., vol. XX, n. 10, ottobre 1940, p. 735-746.
30. *Sul calcolo delle strutture alari a guscio*, « Atti del VI Convegno di Aerotecnica », giugno 1940.
31. *Sulla teoria non lineare di elasticità*, A., vol. 76, dicembre 1940, p. 94-104.
32. *Sui cassoni alari con pareti a traliccio diagonale*, Ae., vol. XXI, n. 3, marzo 1941, p. 183-204.
33. *Le teorie approssimate dell'ala oscillante di allungamento finito*, A., vol. 76, marzo 1941, p. 389-416.
34. *Ricerche sperimentali sulle azioni aerodinamiche sopra l'ala oscillante. Serie III*, Ae., vol. XXI, n. 1, gennaio 1941, p. 46-53.
35. *Lo stato attuale delle ricerche sul moto instazionario di una superficie portante. Parte I - Il problema bidimensionale*, Ae., vol. XXI, n. 9 settembre 1941, p. 557-591.
36. *Idem. Parte II - L'ala di allungamento finito*, Ae., vol. XXI, n. 11, novembre 1941, p. 671-685.
37. *Idem. Parte III - Resistenza e propulsione*, Ae., vol. XXI, n. 12, dicembre 1941, p. 759-769.
38. *Idem. Parte IV - Le ricerche sperimentali*, Ae., vol. XXI, n. 12, dicembre 1941, p. 770-773.
L'état actuel des recherches sur le mouvement non-stationnaire d'une surface portante, O.N.E.R.A., Trad. Tech., n° 1067.
39. *Sul calcolo delle strutture a cassone*, A., vol. 77, marzo 1942, p. 209-241.
40. *Sul calcolo del guscio a quattro correnti*, Ae., vol. XXII, n. 12, dicembre 1942, p. 588-621.
- 40 bis. *Calcolo delle Strutture di Aeromobili*, Edit. V. Giorgio, Torino, 1943, p. 532.
41. *Il cilindro in parete sottile compresso assialmente. Nuovo orientamento dell'indagine sulla stabilità elastica*, Ae., vol. XXIV, giugno 1944, p. 3-18.
42. *La struttura a guscio soggetta a carico trasversale uniforme*, A., vol. 80, giugno 1945, p. 114-120.

(¹) A. = Atti dell'Accademia delle Scienze di Torino.
Serie Fisica.
Ae. = L'Aerotecnica.
L. = Rendiconti dell'Acc. Naz. dei Lincei.

43. *Sul dimensionamento dei correnti principali nelle strutture a guscio*, A., vol. 80, giugno 1945, p. 121-127.
44. *L'interruzione di parete nelle strutture alari a guscio*, A., vol. 80, giugno 1945, p. 128-133.
45. *Effetti di un carico tagliante nelle strutture alari a guscio*, A., giugno 1945, p. 134-139.
46. *Le tensioni caratteristiche per il guscio cilindrico*, L., serie VIII, vol. I, fasc. 6, giugno 1946, p. 735-739.
47. *Lo stato di tensione nel guscio cilindrico presso una accidentalità*, L., serie VIII, vol. I, fasc. 10, ottobre 1946, p. 1069-1073.
48. *Sul calcolo delle strutture a guscio*, Ae., vol. XXVI, n. 3, settembre 1946, p. 138-148.
Ae., vol. XXVI, n. 4, dicembre 1946, p. 216-229.
Ae., vol. XXVII, n. 1, febbraio 1947, p. 31-43.
Ae., vol. XXVII, n. 2, aprile 1947, p. 133-146.
49. *Recenti ricerche sulle vibrazioni alari*, Ae., vol. XXVII, n. 1, febbraio 1947, p. 54-59.
50. *Recenti ricerche sulle strutture a guscio*, Ae., vol. XXVII, n. 3, giugno 1947, p. 230-235.
51. *Il guscio a direttrice circolare, con correnti e pannelli uguali, soggetto a carichi trasversali*, «Monogr. Scientif. Ministero Aeronautica», n. 7, agosto 1947.
52. *Sull'analisi delle piccole deformazioni in campo elastoplastico*, L., serie VIII, vol. III, luglio 1947, p. 325-329.
53. *Effects of cutouts in semimonocoque structures*, «Journ. Aeron. Sciences», vol. 15, n. 3, March 1948, p. 171-179.
54. *Problemas de cálculo de las estructuras en pared delgada*, R. (2), año XII, n. 1-2, 1949, p. 165-193.
55. *Efectos de cargas torsoras actuando cerca del fuselaje sobre estructuras de alas con dos largueros*, R., año XII, n. 3, 1949, p. 517-54.
56. *Sobre las vibraciones alares de flexión y torsión*, R., Año XII, n. 4, 1949, p. 925-951.
57. *Sul comportamento elastico di una parete sottile quasi cilindrica*, L., serie VIII, vol. VII, fasc. 1-4, luglio 1949, p. 99-103.
58. *Sulle deformazioni plastiche*, L., serie VIII, vol. VIII, fasc. 8, maggio 1950, p. 583-586.
59. *On plastic buckling of a compressed strip*, «Journ. Aeron. Sciences», vol. 17, n. 6, June 1950, p. 378-379.
60. *Sul carico critico di una piastra compressa oltre il limite elastico*, L., serie VIII, vol. IX, fasc. 1-2, luglio 1950, p. 67-71.
61. *Sobre la teoría de Batdorf y Budianski de la deformación plástica*, R., año XIII, n. 2, 1950, p. 401-415.
62. *Column buckling in the elastoplastic range*, «Journ. Aeron. Sciences», vol. 17, No. 8, August 1950, p. 508-512.
63. *La distribuzione ottima degli spessori del rivestimento alare*, A., vol. 85, novembre 1950, p. 143-158.
64. *Sul criterio di rigidità delle strutture alari*, «Termotecnica», vol. 5, n. 2, febbraio 1951, p. 45-49.
65. *Sobre un problema de pandeo de placas en campo elastoplastico*, R., año XIV, n. 1, 1951, p. 29-45.
66. *Procedimiento aproximado para el estudio del pandeo elastoplastico*, R., año XIV, n. 1, 1951, p. 62-78.
67. *On plastic buckling of plates and a theory of plastic slip*, «Journ. Aeron. Science», vol. 18, No. 4, April 1951, p. 285-286.
68. *The effect of initial deformations on the behaviour of a cylindrical shell under axial compression*, «Quarterly of Applied Mathematics», vol. IX, No. 3, October 1951, p. 273-293.
69. *Sulla determinazione del comportamento del sistema pneumatico ammortizzatore*, A., vol. 86, dicembre 1951, p. 25-35.
70. *Determination of frequencies and modes above the fundamental by matrix iteration*, «Journ. Aeron. Sciences», vol. 19, No. 10, October 1952, p. 719.
71. *Su una teoria limite non lineare della piastra sottile curva in regime elastico*, Convegno «Recenti progressi della Scienza delle Costruzioni», Acc. Naz. dei Lincei, 1953.
72. *Aplicaciones de una calculadora analógica electrónica*, «Facultad de Ciencias de La Plata», serie III, n. 41, marzo 1954.
73. *Design of tubes for maximum torsional frequency*, «Journ. Aeron. Sciences», vol. 21, No. 9, September 1954, p. 646-647.
74. *Evoluzioni brachistocrone di un aereo*, A., vol. 89, novembre 1954, p. 3-12 (coaut. A. Miele).
75. *Brachistocronic maneuvers of a constant mass aircraft*, «Journ. Aeron. Sciences», vol. 22, n. 4, April 1955, p. 286-288 (coaut. A. Miele).
76. *Brachistocronic maneuvers of a variable mass aircraft*, «Journ. Aeron. Sciences», vol. 22, n. 8, august 1955, p. 577-578 (coaut. A. Miele).
77. *Le evoluzioni ottime di un aereo*, A., vol. 89, maggio 1955, p. 350-358.
78. *Generalized theory of the optimum thrust programming for the level flight of a rocket-powered aircraft. Part II*, «Jet Propulsion», vol. 26, No. 6, June 1956, p. 443-455.
79. *Soluzioni discontinue nei problemi di volo ottimo*, A., vol. 90, giugno 1956, p. 533-551.
80. *An engineering approach to the calculus of variations*, Levrotto & Bella, Torino 1957.
81. *Problemi di ottimo con soluzioni discontinue*, A., vol. 91, luglio 1957, p. 500-526.
82. *Sulla teoria della lastra ortotropa avente superficie media di rivoluzione o cilindrica*, A., vol. 92, novembre 1957, p. 30-64.
83. *Sobre el cálculo de las frecuencias propias y formas de oscilación*, «Facultad de Ciencias fisicomatemáticas», La Plata, serie tercera, tomo II, enero 1956, p. 3-16.
84. *Sobre el campo de tensión diagonal*, «Facultad de Ciencias fisicomatemáticas», La Plata, serie tercera, tomo III, agosto 1958, n. 206, p. 3-20 (coaut. G. L. Ventura).
85. *Optimum problems*, «Purdue Engineering Exp. Station», Res. Bull. No. 138, 1958.
86. *Scienza delle costruzioni. Parte I e II*, Levrotto & Bella, Torino, 1958.
87. *Sulla teoria elastica della parete sottile.*
Parti I, II, «Giorn. Genio Civile», anno 97, fasc. 4, aprile 1959, p. 238-256.
Parte III, Ibidem, fasc. 6, giugno 1959, p. 429-449.
Parte IV, Ibidem, fasc. 9, settembre 1959, p. 714-723.
88. *Sulla teoria elastica della parete sottile di rivoluzione e l'applicazione agli involucri iperboloidici (torri di refrigerazione)*, «Rendic. Corso di Perfez. Costruz. in C.A.», vol. X, Milano 1959.
89. *Le relazioni fra tensioni e deformazioni in elastoplasticità*, «Memorie Acc. d. Scienze di Torino», serie 3ª, tomo 4, parte I, n. 4, 1960, p. 161-253.

(2) Revista de la Facultad de ciencias exactas físicas y naturales, Universidad de Córdoba = R.

90. *Sulla teoria elastica della parete sottile cilindrica*, « Giorn. Genio Civile », anno 98, fasc. 12, dicembre 1960, p. 937-945.
91. *Teoria lineare della parete sottile e applicazioni*, L., vol. XXIX, fasc. 5, novembre 1960, p. 232-238.
92. *Membrane stresses in hyperboloid shells of revolution*, « Journ. Eng. Mech. Div. », Proc. A.S.C.E., October 1960, p. 147-159.
93. *Sulla teoria elastica della parete sottile con superficie media rigata*, A., vol. 95, novembre 1960, p. 62-68.
94. *Presentazione geometrica delle relazioni fondamentali d'elastoplasticità*, « Giorn. Genio Civile », anno 99, fasc. 2-3, febbraio 1961, p. 125-137.
95. *Perturbazioni locali e condizioni al contorno per la parete sottile elastica*, « Giorn. Genio Civile », anno 99, fasc. 5, maggio 1961, p. 358-367.
96. *Controlled approximation theory for thin elastic shells*, « Ist. Scienza Costruzioni », Politecnico Torino, May 1961.
97. *La parete sottile con superficie media rigata. Problemi relativi alle coperture « a ombrello »*, « Rend. Corso Perfez. Costruz. C. A. », vol. XIV, Milano 1961.
98. *La parete sottile elastica con superficie media di traslazione*, « Giorn. Genio Civile », anno 99, fasc. 7-8, luglio 1961, p. 527-541.
99. *Su certi stati di tensione nella parete sottile elastica*, A., vol. 96, 1962, p. 239-253.
100. *Elastic theory of hypar shells*, « Journ. Amer. Concrete Inst. », No. 1, January 1962, p. 85-101.
101. *Sul calcolo della parete sottile elastica*, A., vol. 96, p. 878-902, 1962.
102. *Consistent approximations in shell theory*, « Journ. Engin. Mech. Div. Proc. A.S.C.E. », August 1962, p. 45-74.
103. *Homogeneous stress states in helicoidal shells*, « Journ. Appl. Mech. », September 1962, p. 584-586.
104. *Volte conoidiche*, A., vol. 97, 1962, p. 325-340.
105. *Thin shells under assigned body and contour forces*, « Quart. Journ. Mech. Appl. Math. », February 1963, p. 93-108.
106. *A theory for elastic thin shells and edge effects*, « Bul. Politeh. Jasi », tomul VIII, fasc. 1-2, 1962, p. 373-378.
107. *Pannelli paraboloidici sollecitati a taglio*, A., vol. 97, 1963, p. 649-664.
108. *Stati di tensione nei pannelli paraboloidici sottili poco svergolati*, (coaut. G. L. Ventura), A., vol. 97, 1963, p. 1205-1222.
109. *Sulla risoluzione numerica delle equazioni del « guscio piatto »*.
La teoria elastica del pannello piatto di paraboloide iperbolico nella formulazione matriciale. (Parte I), « Rass. Tecn. Soc. Ing. Arch. Torino », XVII, 9, settembre 1963, p. 303-307.
Parte III. Il pannello paraboloidico poco svergolato, (coaut. G. L. Ventura), Ibidem, dicembre 1963.
Parte IV. Il pannello paraboloidico con due lati adiacenti incastrati, (coaut. G. L. Ventura, G. Siniscalco), Ibidem, luglio 1964, p. 211-217.
110. *A linear theory for thin shells based on a systematic classification of variables*, « Proc. World Conf. Shell Structures », S. Francisco, 1964, p. 543-552.
111. *Sul calcolo dei serbatoi assialsimmetrici*, « Costruz. Metalliche », n. 2, 1965.
112. *Systematic approximation approach to linear shell theory*, Levrotto & Bella, Torino 1965.
113. *Recenti sviluppi della teoria delle dighe ad arco*, « Rend. Corso Perfez. Costruz. C. A. », vol. 4, 1966.
114. *The calculation of axially symmetric vessels*, « Meccanica », No. 1/2, 1966, p. 58-60.
115. *Parametric expansions in the linear theory of cylindrical shells*, (coaut. A. M. Sassi Perino, G. Siniscalco), « Meccanica », No. 2, vol. II, 1967, p. 126-133.
116. *Teoria lineare della parete sottile*, Levrotto & Bella, Torino, 1967.
117. *Su una categoria di gusci di traslazione*, L., vol. XLIV, gennaio 1968, p. 63-68.
118. *Quasi-cylindrical translation shells*, « Meccanica », vol. III, No. 3, 1968, p. 187-190.
119. *Ricerche su strutture a guscio in corso presso l'Istituto di Scienza delle Costruzioni della Facoltà di Ingegneria di Torino*, (coaut. F. Algostino, G. M. Bo, G. Siniscalco, G. Surace), « Costruz. in C. A. - Studi e Rend. », vol. 6, 1969.
120. *Teoria lineare discretizzata delle strutture a guscio*, L., vol. XLVI, maggio 1969, p. 545-551.
121. *Indagini numeriche e analitiche sul pannello quadrilatero di guscio paraboloidico* (coaut. F. Plevna, G. Siniscalco). Pubbl. Ist. Sc. d. Costruz., Torino, 1969, p. 98.
122. *Sui limiti di applicabilità delle teorie elastiche del guscio cilindrico*, « Costruz. in C. A. - Studi e Rend. », vol. 6, Milano, 1969, p. 73-103 (coaut. A. M. Sassi).
123. *Metodo di calcolo del guscio piatto assialsimmetrico*, (coaut. F. Algostino, A. Russo, G. Siniscalco), « Olivetti Inform. Technology », Ottobre 1969.
124. *Parametric expansions in linear shell theory*, Colloq. IASS, Madrid 1969. I.A.S.S. Bulletin, No. 52, October 1973, p. 35-55.
125. *Calcolo di una voltina conica per serbatoio*, (coaut. F. Algostino), « Atti Rass. Tec. Soc. Ing. Arch. Torino », dicembre 1970.
126. *Rapid variation solution in shells*, (coaut. F. Algostino). Pubbl. Ist. Sc. d. Cost. Politecnico di Torino, 1970, p. 15.
127. *Le strutture a guscio. Parte I. La teoria lineare*, Levrotto & Bella, Torino, 1971, p. 69.
128. *Linear shell theory for rapid variation solutions*, « Meccanica », vol. VI, No. 1, 1971, p. 59-64.
129. *Sulla teoria bidimensionale delle strutture a guscio*, « L'Aerotecnica - Missili e spazio », n. 4, 1971, p. 209-216.
130. *Le vibrazioni libere del guscio cilindrico. Banco di prova delle teorie bidimensionali delle strutture a guscio*, « Atti 1° Congr. AIMETA », giugno 1971, p. 101-146.
131. *Un metodo di discretizzazione per la piastra elastica*, L., gennaio 1972, p. 57-61.
132. *Discretization method for elastic plates and shells*, AIMETA Res. Rep. No. 1, (coaut. F. Algostino), December 1972, p. 40.
133. *Un controllo dei metodi di discretizzazione per il guscio elastico*, L., vol. LIV, febbraio 1973, p. 150-153.
134. *Discretized solutions of junction problems in shells*, « Meccanica », vol. VIII, No. 1, 1973, p. 77-83.
135. *Sulla teoria non lineare del guscio elastico*, « L'Aerotecnica - Missili e spazio », n. 5, 1973, p. 325-331.
136. *On stress analysis of asymmetric vessels*, « Meccanica », vol. IX, No. 2, 1974, p. 111-120.
137. *Calculation of an asymmetric vessel by parametric expansions*, AIMETA Res. Rep., No. 3, June 1974, p. 25.

138. *Sulle tensioni critiche nelle strutture a guscio*, vol. « Omaggio a Ferrari », dicembre 1974, p. 120-122.
139. *Sulla elastodinamica delle strutture a guscio*, L., vol. LVI, marzo 1974, p. 338-342.
140. *On truncated ellipsoid shells*, (coaut. F. Algostino, G. Farraggiana, A. M. Sassi Perino), AIMETA Res. Rep., No. 4, marzo 1975.
141. *Experiences on asymptotic and discretized methods of shell analysis*, « Euromech 66 Colloq. », Warsaw, September 1975.
142. *Effects of angular discontinuities in a quasi-cylindrical shell*, (coaut. F. Algostino, C. Bosco), AIMETA Res. Rep., No. 5, December 1975, p. 50.
143. *Sul guscio rotondo quasi cilindrico con angolosità*, (coaut. G. F. Del Col), « Rend. Ist. Lombardo - Acc. d. Sc. e Lettere », vol. 110, 1976, p. 281-304.
144. *Shell research in the Politecnico di Torino*, « Problemi attuali di Mecc. Teor. Appl. » (M. Panetti), Torino, 1977, p. 139-148.
145. *Asymptotic approach to linear shell theory*, AIMETA Res. Rep., No. 6, 1977, p. 129.
146. *Linear shell theories*, « Atti Ist. Sc. d. Costruz. », Pol. Torino, n. 352, giugno 1977, p. 57.
147. *Linear shell theories. An asymptotic approach. Part I*, Levrotto & Bella, Torino, 1978.
148. *T-junction of cylindrical shells. Asymptotic approach*, AIMETA Res. Rep., No. 7, 1979, p. 28.
149. *Hypar shell panels under shear*, AIMETA Res. Rep., No. 8, 1979, p. 12 (coaut. F. Algostino).
150. *Asymptotic techniques for boundary problems in shells*, « IASS World Congr. on Shell Spat. Struct. », vol. 5, p. 119-133, Sept. 1979.
151. *Linear shell theories. An asymptotic approach. Part II*, Levrotto & Bella, Torino, 1980.

Considerazioni didattiche sulla Scienza delle Costruzioni.

L'equazione dei lavori virtuali

Si richiamano i concetti impliciti nell'equazione dei lavori virtuali e se ne mostra l'efficienza in due campi di impiego: nella formulazione relativa agli elementi finiti ibridi di Pian e nell'analisi linearizzata del comportamento della trave pressoinflessa.

Premessa.

Nell'ultima lezione del mio ordinariato ho esposto i criteri seguiti nella stesura del testo [86] e nello svolgimento del corso (dove non tutti gli argomenti del testo erano sviluppati). Quei criteri di economia, dettati dalla ristrettezza del tempo disponibile per il corso e dall'intento di meglio dirigere, entro quei limiti, lo sforzo di apprendimento degli allievi, costringevano a rinunce: presentazioni eleganti come la corrispondenza proiettiva fra centri di pressione e asse neutro, rappresentazioni espressive come quella dei poligoni funcolari, venivano sacrificate per favorire metodi ritenuti più consoni agli strumenti attuali di computo numerico. Queste scelte in gran parte poggiano su giudizi soggettivi: eventuali discordanze su questi punti non vanno interpretate come critiche a chi segua criteri differenti. Strumento essenziale in questa contrazione della materia si è mostrata l'equazione dei lavori virtuali: a questa sono dedicate queste considerazioni su concetti in gran parte noti, nella speranza che qualcuno vi trovi tuttavia qualcosa di utile.

1. Si scriva detta equazione nella forma ⁽¹⁾:

$$\int (\sigma^a \cdot \varepsilon^b) dV = \int \vec{\eta}^b \cdot d\vec{F}^a \quad (1)$$

Vi compaiono due sistemi indipendenti: una distribuzione a di tensioni le cui 6 componenti cartesiane sono $\sigma_x^a, \dots, \tau_{xz}^a$, associate a carichi composti da forze elementari $d\vec{F}^a$, e una configurazione b di spostamenti $\vec{\eta}^b$ a cui si associa la deformazione di componenti cartesiane $\varepsilon_x^b, \dots, \gamma_{xz}^b$. L'integrale a primo membro, esteso al volume del corpo contiene la somma dei 6 prodotti $\sigma_x^a \varepsilon_x^b, \dots, \tau_{yz}^a \gamma_{yz}^b$. Se le forze elementari a secondo membro sono distribuite sulla superficie S , si scrive $d\vec{F}^a = \vec{p}^a dS$ e si estende l'integrale dello scalare $\vec{p}^a \cdot \vec{\eta}^b$ alla superficie caricata; per una forza concentrata $\vec{F}^a = \int d\vec{F}^a$, con lo spostamento del punto di applicazione come fattore comune per i relativi incrementi, si ha $\vec{F}^a \cdot \vec{\eta}^b$ per il lavoro relativo. Se nella deformazione b si ha una frattura con dislocazione $\Delta\vec{\eta}^b$, sulla cui superficie il sistema a comporta le tensioni $\vec{\sigma}^a$ si ha il lavoro $-\int \vec{\sigma}^a \cdot \Delta\vec{\eta}^b dS$. L'espressione a secondo membro congloba nel lavoro esterno la somma di tutti questi termini, ove siano presenti.

Si prova che, se le tensioni a su ciascun elemento del corpo, insieme alle corrispondenti forze

esterne (elementari) verificano le 3 equazioni di equilibrio e agli spostamenti $\vec{\eta}^b$ corrispondono le deformazioni ε^b secondo le 6 relazioni lineari del tipo $\varepsilon_x = \partial u / \partial x$ (dove u è la proiezione di $\vec{\eta}$ sull'asse x) l'eguaglianza scritta sussiste. La prova rigorosa di questo enunciato si ottiene mediante quelle trasformazioni degli integrali multipli che estendono a spazi a più dimensioni la formula di integrazione per parti degli integrali semplici. Nel testo [86] è data una giustificazione tratta dal testo [40 bis, p. 8]: per il caso di coordinate curvilinee generiche la corrispondente espressione (ugualmente semplice) è ricavata nella monografia [112]. La funzione didattica di quella giustificazione (che si vale del principio dei lavori virtuali) sta nel mostrare l'universalità della (1), eguaglianza indipendente dalla causa che può aver creato la deformazione b e dagli effetti che le sollecitazioni a possono produrre: le proprietà fisiche del corpo non vi intervengono; anzi essa trova applicazione anche per situazioni irreali, in cui una data struttura viene sottoposta a ideali fratture, dislocazioni concentrate o diffuse.

Conseguenza immediata dell'indipendenza dei due sistemi è la possibilità di variare la scelta di uno dei due, per dedurre una proprietà dell'altro: con spostamenti b virtuali, si ha una proprietà integrale dell'equilibrio dello stato a , mentre con sforzi virtuali si trova una relazione, conseguenza della congruenza della deformazione b a meno delle dislocazioni esplicitamente poste in equazione. Di queste potenzialità della (1) è dato esempio nella sezione seguente a proposito di un metodo di risoluzione per elementi ibridi ⁽²⁾. Lo schema presentato, insieme col suo duale, costituiscono il complesso più generale fra i procedimenti di risoluzione delle strutture elastiche: si mostra appunto che vi rientra come via particolare la risoluzione mediante equazioni di elasticità delle strutture iperstatiche e la risoluzione per combinazione di configurazioni congruenti alla quale si impone l'equilibrio mediante equazioni dei lavori per spostamenti virtuali.

La stessa equazione costituisce lo strumento base nella deduzione dei teoremi sull'energia elastica. Fra questi conviene distinguere: quelli di reciprocità, quelli sulla variazione seconda dell'energia e quelli sulle variazioni prime. Tralasciando il primo gruppo (quelli entravano nel

⁽²⁾ I metodi per elementi finiti ibridi accennati sono sostanzialmente quelli ideati da Pian e Tong. Una rassegna su questi procedimenti e loro applicazioni è data da T. H. H. PIAN nella nota «Hybrid Models» a p. 59 del volume *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, Acad. Press, London, 1973, a cui si rinvia per bibliografia.

⁽¹⁾ Nel testo [86], Ediz. 1968, Parte II, Cap. III.

programma del corso) si consideri il secondo gruppo: qui serve di base, oltre alla (1), la proprietà di positività dell'energia accumulata in ogni particella elastica in stato di tensione (o, equivalentemente, deformazione). Nella Appendice X del testo [86] (Ediz. 1968) è dimostrato che una certa grandezza W subisce una diminuzione quando si passa da una configurazione irrealistica (ossia non verificante tutte le condizioni di equilibrio e di congruenza) ad una che in più soddisfa a una condizione nella forma (1): così, in particolare, se si parte da una configurazione equilibrata ma non congruente, quando si verifica un'equazione di elasticità, W diminuisce. Il minimo si raggiunge quando tutte le condizioni di congruenza siano verificate. Con la combinazione di una soluzione « principale » con definite « supplementari » non è detto che si raggiunga quel minimo assoluto: verificate le equazioni di elasticità si raggiunge il minimo nell'ambito del gruppo di soluzioni prescelte. Dunque le conclusioni ivi enunciate precisano completamente la situazione riguardante le soluzioni approssimate.

Com'è detto nell'Appendice citata, dalla quantità W si può ottenere una misura indicativa della rigidità della struttura per certe situazioni di carico: inoltre, seguendo le vie duali (per soluzioni equilibrate accostandosi alla congruenza o per soluzioni congruenti perfezionando l'equilibrio) si può giungere a valutazioni in difetto o in eccesso della stessa grandezza. La riduzione dello scarto fra i due valori con l'affinamento del calcolo dà una indicazione sulla relativa precisione. Purtroppo si tratta di valutazioni in media: localmente gli scarti possono essere più rilevanti; però tali apprezzamenti sono importanti, specialmente in indagini approfondite su schemi strutturali indicativi.

Dai teoremi del secondo gruppo (minima energia complementare, minima energia potenziale totale), come ovviamente da quelli del terzo, si deducono le equazioni relative all'annullamento di variazioni prime: ad esempio derivando il lavoro di deformazione L rispetto alle incognite X iperstatiche si hanno le equazioni di elasticità nella forma $\partial L / \partial X = 0$. Indubbiamente questi procedimenti presentano notevole eleganza formale: però la scrittura immediata delle stesse equazioni attraverso la (1) ha importanti vantaggi, fra i quali la trasparente evidenza e la illimitata adattabilità. Ad esempio, per scrivere le equazioni di elasticità per una struttura soggetta a variazioni termiche si possono ancora usare le equazioni $\partial L / \partial X = 0$, ma con il lavoro di deformazione modificato secondo Colonnetti: oppure si scrivono ancora le (1), tenendo presente che per il sistema b sono da sommare alle deformazioni elastiche quelle termiche. Questa è una ovvia realtà fisica, mentre l'aggiunta nel potenziale elastico unitario, del termine $\sigma \bar{\epsilon}$ (con la dilatazione termica $\bar{\epsilon}$) al termine elastico $\sigma^2/2E$ è meno immediata da giustificare. Con analoghi intendimenti di immediatezza, è presentata nel seguito l'impostazione sulla base della (1) per la teoria di elementi finiti ibridi. Nelle pubblicazioni su questi e analoghi problemi sono adottate formulazioni variazionali corrispondenti al terzo gruppo

sopra indicato: cioè, per scrivere equazioni di equilibrio o di congruenza si annulla la prima variazione di un funzionale (che però non gode di proprietà di massimo o minimo): la forma di questo funzionale deve essere modificata a seconda della scelta delle condizioni che sono verificate in partenza o per via variazionale. Un ordinato catalogo di queste diverse formulazioni è dato dallo stesso Pian ⁽³⁾.

2. Particolari considerazioni vanno svolte quando si voglia utilizzare l'equazione dei lavori virtuali fuori del campo *lineare*, campo nel quale si ammette che gli spostamenti η che si producono nella struttura siano così piccoli che si possa trascurare di fronte all'unità il rapporto η/L essendo L una lunghezza rappresentativa delle dimensioni della struttura. L'indagine diventa particolarmente difficile se si vuole esplorare un campo illimitato, aperto all'aumento di η : per gran parte delle applicazioni tecniche tale estensione non è richiesta. Si può anzitutto notare che nell'uso dei materiali delle costruzioni, mobili o fisse, si pone per loro natura un limite abbastanza basso per le deformazioni, fatta eccezione per casi speciali che conviene considerare a parte. Diciamo (ϵ) una quantità commisurata alla massima dilatazione ammessa e si stabilisca di esaminare il problema per piccoli valori di (ϵ). Volendo dare un significato definito alle considerazioni semplificate che si intende svolgere, bisogna porsi l'intento dell'esame al limite (ϵ) $\rightarrow 0$. Questo è un concetto certamente ostico, almeno a prima vista: esso dà l'impressione che si voglia uscire dalla realtà e portare la ricerca in seno all'analisi matematica. È naturale sentire l'opposizione a questo concetto a cui non si è consueti. Bisogna però pensare che al concetto di limite si fa richiamo solo per trarne una guida per l'impostazione della ricerca che poi va applicata alle quantità finite della realtà. Si può ancora obiettare che così non si è coerenti: si pensi però, per un esempio, di dovere utilizzare la funzione $\sin x$ per valori piccoli di x rispetto a 1: la conoscenza del fatto che per $x \rightarrow 0$ la funzione si approssima a x è certo utile nell'uso di quella funzione anche se il valore $x = 0$ non rientra nel campo in esame. In secondo tempo si penserà di valutare l'errore che si commette ponendo $\sin x \simeq x$. Lo studio da intraprendere è certo assai più difficile che la consultazione del piccolo calcolatore che ci dà $\sin x$: merita dunque esaminarlo nella prossimità di una situazione, sia pure, ideale. Allora, si esaminino le conseguenze coerenti con la condizione limite (ϵ) $\rightarrow 0$ per il problema del carico di punta. Scriviamo la formula di Eulero nella forma $\sigma/E = \pi^2 J / AL^2$ e diciamo b una lunghezza rappresentativa

⁽³⁾ T. H. H. PIAN, *Finite element methods by variational principles with relaxed continuity requirements*, Variational Methods in Engineering, Proc. Intern. Conf., Southampton, 1972, p. 3/1-3/24. Per difetti di equilibrio del sistema a o di congruenza del b , per l'uso della (1) si include il lavoro implicato da quelle deviazioni: per via variazionale, le condizioni addizionali entrano nel funzionale, che perde la proprietà di minimo, eccettuato il caso in cui le deviazioni siano prescritte.

delle dimensioni della sezione. Conseguentemente scriviamo $A \simeq b^2$ per esprimere il fatto che l'area della sezione è dell'ordine di b^2 , ossia che, al ridurre le dimensioni della sezione si mantiene finito il rapporto A/b^2 (costante se si fa una riduzione in scala). Analogamente per il momento d'inerzia si ha $J \simeq b^4$: quindi per le deformazioni corrispondenti al carico di Eulero sussiste la relazione $(\varepsilon) \simeq b^2/L^2$. Consideriamo ora la stessa trave soggetta ad azioni trasversali che le imprimano la curvatura $d^2\eta/dz^2$: poniamo che la derivata rispetto alla coordinata assiale z operi sugli ordini di grandezza come la divisione per la lunghezza L : questa ipotesi è accettabile per inflessioni rappresentabili mediante combinazione di funzioni circolari con lunghezza d'onda avente l'ordine L . Indichiamo con (η) l'ordine di grandezza degli spostamenti e con (ε_1) l'ordine delle relative deformazioni: poiché queste sono date dal prodotto della curvatura per la distanza dalla fibra neutra, si arriva alla relazione $(\varepsilon_1) \simeq (\eta) b/L^2$. Se si pone che $(\varepsilon_1) \simeq (\varepsilon)$ si conclude che: inflessioni dell'ordine delle dimensioni della sezione producono tensioni dell'ordine di quella critica di Eulero. Le relative rotazioni $d\eta/dz$ sono dell'ordine b/L : il loro quadrato è piccolo come $b^2/L^2 \simeq (\varepsilon)$ e perciò trascurabile rispetto a 1: non però rispetto ad una dilatazione. Infatti, supponiamo che l'asse della trave, senza variazione di lunghezza, subisca l'inflessione parabolica

$$\eta = \eta_0 (1 - 4z^2/L^2)$$

che corrisponde ad una freccia η_0 nella sezione $z = 0$, con spostamenti nulli per $z = \pm 1/2 L$. In conseguenza di questa deformazione, si produce un accostamento di questi punti estremi misurato da

$$\int (1 - \cos \phi) dz$$

essendo l'integrazione estesa da $-1/2 L$ a $1/2 L$ e ϕ l'angolo corrispondente alla pendenza $d\eta/dz$. La parentesi nell'integrando si può approssimare con $1/2 (d\eta/dz)^2$: si trova così il valore $64\eta_0^2/3L$ per l'integrale. In generale si conclude: inflessioni che producono tensioni dell'ordine di quella critica di Eulero danno dilatazioni apparenti (ossia rilevate sulla proiezione su z) dell'ordine (ε) . Dunque in queste condizioni si producono rotazioni moderatamente piccole ($\simeq \sqrt{(\varepsilon)}$) che debbono essere tenute in conto.

In base a queste considerazioni e alla equazione dei lavori virtuali si può sviluppare la teoria non lineare per travi snelle ($b/L \rightarrow 0$) con inflessioni corrispondenti a deformazioni $\simeq b^2/L^2$. Le deformazioni possono desumersi da espressioni del tipo della (16). Il calcolo delle corrispondenti tensioni è assai facilitato dal fatto che, sebbene l'elemento di volume subisca spostamenti relativamente considerevoli, nel suo riferimento spostato le proprietà elastiche possono essere espresse come per piccole deformazioni, sicché la non-linearità interviene solo nelle relazioni fra deformazioni e spostamenti. Assumendo queste tensioni come sistema a , si calcola la deformazione b per incrementi infinitesimi di spostamenti a partire dallo stato di defor-

mazione prima calcolato: così si pongono mediante la (1) le condizioni di equilibrio per la configurazione congruente anzidetta.

Definendo una configurazione semplice di base per la quale sia facile attuare sia l'equilibrio sia la congruenza con deformazioni $\simeq b^2/L^2$ e cancellando i termini non lineari negli spostamenti dallo stato di base, si ha l'usuale teoria linearizzata che permette di individuare i carichi critici. Nel seguito è presentata, ricavandola dal testo [40 bis], la trattazione relativa alla instabilità flessio-torsionale per l'asta avente esigua rigidezza alla torsione secondo St. Venant. La stessa trattazione si presta all'esame delle proprietà di reciprocità fra due configurazioni prossime a quella di base nell'ipotesi che queste differiscano per deformazioni piccole dallo stesso stato di base (posto, s'intende, che per quello non sia raggiunta la situazione critica). Si arriva così a relazioni bilineari simmetriche nei due spostamenti. La simmetria sussiste anche per deformazioni addizionali dell'ordine dei valori critici, ma con relazioni di forma non lineare ⁽⁴⁾.

ELEMENTI FINITI IBRIDI

1. Introduzione.

Una struttura sollecitata senza fratture presenta uno stato di deformazione che verifica le condizioni geometriche di congruenza, mentre le tensioni, insieme con le forze esterne, verificano le condizioni di equilibrio di ogni particella.

Le proprietà fisiche del corpo stabiliscono un legame fra tensioni e deformazioni che completa il sistema delle relazioni che reggono il comportamento statico della struttura. Ammettendo l'ordinaria elasticità, si scrivono equazioni lineari che stabiliscono una corrispondenza biunivoca fra le caratteristiche di deformazione e quelle di tensione nei valori attuali.

In base a queste considerazioni, si definiscono *configurazioni equilibrate*, sistemi di sforzi che soddisfano tutte le condizioni di equilibrio mentre le corrispondenti deformazioni in genere non verificano la congruenza, *configurazioni congruenti*, esenti da dislocazioni, a cui corrispondono sforzi che non rispettano tutte le condizioni d'equilibrio con i carichi assegnati e *configurazioni miste* che violano alcune condizioni di equilibrio ed alcune della continuità di deformazione. I due fondamentali metodi di risoluzione, ricerca della soluzione congruente fra le equilibrate e ricerca della configurazione equi-

⁽⁴⁾ L'impiego della (1) per situazioni in cui il corpo ha subito spostamenti relativamente grandi (si vedano per questo le (17) per $n = 0$), sia pure solo per lo stato a , richiede un attento esame nella valutazione del lavoro interno. Infatti, se per lo stato iniziale si stabiliscono le coordinate cartesiane ortogonali (su cui si basa la prova matematica) si trova che queste sono alterate nello stato di cui si esamina l'equilibrio: si deve perciò fare appello all'invarianza dell'integrando. Seguendo invece la prova del testo [86], la liceità dell'impiego appare evidente, sempre che la variazione di forma dell'elemento sia trascurabile.

La stessa prova è anche esposta nel più recente testo di Franciosi: questo, sia occorso indipendentemente o per ispirazione da quella, mostra che la prova appare convincente.

librata fra le congruenti presentano certi vantaggi rispetto ai metodi che si valgono di configurazioni miste: tali vantaggi, che non sono qui da precisare, non sono però tali da consigliarne l'uso esclusivo.

Le configurazioni equilibrate, congruenti o miste, nella cui combinazione si ricerca la soluzione effettiva possono interessare l'intero corpo oppure, frazionato questo in « elementi finiti », possono essere limitate ad un elemento o a più adiacenti, lasciando indeformato il rimanente. Per una via o per l'altra, le incognite del problema sono i moltiplicatori delle configurazioni che si mettono in combinazione. Nel caso di elementi finiti, ciascun moltiplicatore interviene nella valutazione dello stato di tensione in una regione limitata del corpo, ma attraverso le equazioni del sistema lineare risultante si concatena ai fattori relativi a tutti gli elementi.

Ad esempio, per una trave dritta con un piano di simmetria contenente l'asse, i carichi e le reazioni dei vincoli supposti normali all'asse e atti a precisare gli spostamenti delle sezioni vincolate, se si effettua un frazionamento in elementi costituiti ciascuno da una campata fra sezioni vincolate, si arriva all'equazione dei tre momenti. Le configurazioni equilibrate componenti sono rappresentate dai diagrammi dei momenti semplici, ciascuno limitato ad una campata, e dai sistemi supplementari estesi a due campate adiacenti. I moltiplicatori incogniti definiscono direttamente i momenti flettenti sugli appoggi sovrabbondanti.

Suddiviso il corpo in elementi finiti, resta individuato il sistema delle interfacce, da rilevare come ente essenziale nelle considerazioni che seguono. Nella scomposizione di una travatura in tronchi le sezioni di separazione costituiscono detto sistema: per una piastra piana si ha un grigliato di superfici normali al piano medio.

Quando si adotti la risoluzione ad elementi finiti per configurazioni equilibrate, le distribuzioni componenti debbono verificare, oltre le condizioni d'equilibrio all'interno degli elementi, la continuità degli sforzi sulle interfacce. Similmente, per configurazioni congruenti sono da evitare anche le dislocazioni sulle interfacce realizzando i sistemi detti compatibili. Quando l'attuazione di queste esigenze presenta particolari difficoltà, conviene ricorrere ad *elementi finiti ibridi equilibrati* o ad *elementi finiti ibridi congruenti*. Nel primo caso si costruiscono soluzioni equilibrate all'interno di ciascun singolo elemento e le si combina in modo da verificare la congruenza, entro accettabile approssimazione, per assegnate distribuzioni di spostamenti delle interfacce: poi si determina la combinazione di tali spostamenti che più approssima le condizioni di equilibrio delle forze trasmesse dagli elementi confinanti, con l'aggiunta degli eventuali carichi locali. Del procedimento duale non si darà qui cenno, perché per le prefisse finalità illustrative, non presenta particolarità concettuali.

Un'osservazione generale è opportuna ad evitare un'inesatta interpretazione degli esempi di applicazione che possono presentarsi per illustrare i metodi anzidetti. Si ricorre in questo, per semplicità, ad esempi di travature: per queste, ove si

resti nell'ambito della teoria delle travi, si possono costruire soluzioni particolari che, escluse, se mai, sezioni d'interfaccia, verificano sia l'equilibrio sia la congruenza. Può quindi svanire la distinzione fra le due fondamentali configurazioni: distinzione che va posta in rilievo in vista dell'applicazione a problemi più complessi.

2. Congruenza delle configurazioni equilibrate nell'elemento.

Si parte dall'espressione

$$\{S\} = [A] \{X\} + \{\tilde{S}\} \quad (2)$$

degli sforzi nella particella generica. La colonna $\{S\}$ contiene le grandezze che in un punto generico definiscono lo stato di sollecitazione. Qui ci riferiamo alla particella $dx dy dz$ di volume dV in coordinate cartesiane ortogonali per la quale le sei grandezze sono le componenti di tensione $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$: per il tronco infinitesimo dZ di trave, in generale si porranno in $\{S\}$ le sei caratteristiche di sollecitazione. La colonna $\{X\}$ contiene gli n moltiplicatori mediante i quali gli sforzi risultanti sono ottenuti mediante combinazione di configurazioni equilibrate. Il valore X_i di questa colonna moltiplica i 6 valori della colonna i nella matrice $[A]$ che rappresenta questa distribuzione di sforzi. La colonna $\{\tilde{S}\}$ contiene la distribuzione di sollecitazioni che fa equilibrio ai carichi, definita come le precedenti senza prelieve condizioni di congruenza. Tutte le matrici in (2), fatta eccezione per la colonna $\{X\}$, contengono funzioni delle coordinate, variabili da punto a punto con legge prefissata.

Alla colonna $\{S\}$ corrisponde una colonna $\{e\}$ di componenti di deformazione, definita in modo che il prodotto scalare $\{e\}^T \{S\}$ rappresenti il lavoro interno per la particella: se in $\{S\}$ sono contenute le componenti di tensione, in $\{e\}$ saranno scritte le componenti di deformazione $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Per il corpo elastico isotropo è $\{e\} = [C] \{S\}$ essendo

$$[C] = \begin{vmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{vmatrix}$$

con il noto significato dei simboli.

Sulle interfacce che contornano l'elemento considerato gli spostamenti siano assegnati mediante l'espressione

$$\{u\} = [B] \{Y\} + \{\bar{u}\} \quad (3)$$

Lo spostamento del punto generico di interfaccia può essere rappresentato dalle tre componenti cartesiane. La colonna $\{Y\}$ contiene m moltiplicatori mediante i quali quegli spostamenti sono espressi come combinazioni di prefissate distribuzioni. La relativa compatibilità è precisata dalla unica condizione che agli incroci di interfacce non esista discordanza di spostamenti. La colonna i

della matrice $[B]$ dà le componenti di una di queste configurazioni, congruenti nel senso anzidetto, da moltiplicare per il fattore Y_i . La colonna $\{\bar{u}\}$ contiene spostamenti prefissati. Di regola, questi intervengono solo quando l'elemento considerato confina col contorno del corpo per quella parte su cui gli spostamenti sono prescritti: se sulla parte di contorno esterno delimitante l'elemento sono prescritti sforzi, di questi si potrà tener conto nel calcolo degli sforzi $\{\tilde{S}\}$.

Scriviamo adesso l'equazione dei lavori virtuali per ciascuna delle configurazioni equilibrate che formano le colonne di $[A]$ e per le deformazioni che corrispondono alle sollecitazioni (2), con gli spostamenti sul contorno dell'elemento espressi da (3). L'equazione enunziata che si ottiene così può scriversi

$$\int [A]^T [C] \{S\} dV = \int [A]^T [D]^T \{u\} dS \quad (4)$$

A primo membro figura il lavoro interno, integrale di volume del prodotto delle tensioni e deformazioni anzidette: l'integrale a secondo membro, esteso alla superficie dell'elemento finito, contiene il prodotto degli sforzi di contorno corrispondenti agli $[A]$, per gli spostamenti (3). Eguagliandosi con la (4) due colonne di n termini, questa compendia n equazioni. Nel calcolo del lavoro esterno intervengono le forze superficiali espresse dal prodotto $[D] [A]$ mediante la matrice di trasformazione $[D]$ con la quale dalle 6 componenti di $[A]$ si ottengono tre che fanno lavoro con le componenti di $\{u\}$.

Effettuando le sostituzioni indicate, con le notazioni

$$\begin{aligned} \int dS [A]^T [D]^T \{\bar{u}\} &= \{F\}, \\ \int [A]^T [D]^T [B] dS &= [G], \\ \int [A]^T [C] [A] dV &= [H], \\ \int [A]^T [C] \{\tilde{S}\} dV &= \{\tilde{H}\} \end{aligned} \quad (5)$$

dalla (4) si ottiene

$$[H] \{X\} = [G] \{Y\} + \{F\} - \{\tilde{H}\} \quad (6)$$

Si noti che, nel calcolo delle matrici definite in (5), effettuati i prodotti matriciali nelle funzioni integrande, si dovranno effettuare, termine per termine, le integrazioni estese al volume o alla superficie dell'elemento considerato.

3. Applicazione ad una campata di trave diritta inflessa.

Si indicano con A_{i-1} , A_i gli estremi di un tratto, lungo l_i , di trave diritta e con $(i|i-1)$, $(i-1|i)$ le funzioni lineari nulle rispettivamente in A_i , A_{i-1} e unitarie all'estremo opposto. Le caratteristiche di sollecitazione che qui intervengono si riducono al momento flettente M e al taglio T : quindi la colonna degli sforzi risultanti e quella degli sforzi che fanno equilibrio ai carichi con momenti arbitrari agli estremi si riducono alle

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} M \\ T \end{Bmatrix}, \quad \{\tilde{S}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{M} \\ \tilde{T} \end{Bmatrix}$$

Trascurando le deformazioni dovute al taglio la matrice $[C]$ di deformabilità si scrive

$$[C] = \begin{bmatrix} 1/EJ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le soluzioni equilibrate in assenza di carichi danno taglio costante e momenti linearmente distribuiti. Quindi possiamo scrivere

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} M_{i-1+} \\ M_{i-} \end{Bmatrix}, \quad [A] = \begin{bmatrix} (i|i-1) & (i-1|i) \\ -1/l_i & 1/l_i \end{bmatrix},$$

$$[H] = \begin{bmatrix} 2\beta_i & \beta_i \\ \beta_i & 2\beta_i \end{bmatrix}$$

essendo $\beta = l/6EJ$ con EJ costante nel tronco e M_{i-1+} , M_{i-} i momenti flettenti nelle sezioni adiacenti a A_{i-1} , A_i dal lato interno. Se si vuole che questi siano i momenti risultanti in quelle sezioni, si costruiscono i momenti $\tilde{M}$ con valori nulli agli estremi. Da tali diagrammi si hanno le quantità

$$\{\tilde{H}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{K}_{i-1+} \\ \tilde{K}_{i-} \end{Bmatrix}$$

In questi calcoli gli integrali $\int dV$ sono sostituiti da $\int dz$: nei seguenti gli integrali $\int dS$ si riducono all'addizione dei valori sulle sezioni terminali.

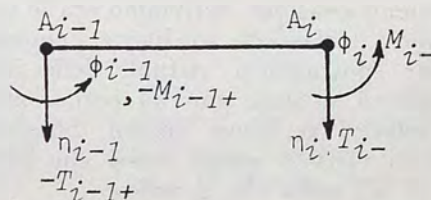


Fig. 1

La colonna $\{u\}$ è costituita dalla rotazione ϕ e dallo spostamento trasversale η con le convenzioni di segno di fig. 1. Per il successivo calcolo gli spostamenti η si considerano fissi, mentre le rotazioni costituiscono la colonna dei moltiplicatori Y . Si scrive quindi

$$\begin{aligned} \{Y\} &= \begin{Bmatrix} \phi_{i-1} \\ \phi_i \end{Bmatrix}, \quad \{\bar{u}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \eta \end{Bmatrix}, \quad [B] = \\ &= \begin{bmatrix} (i|i-1) & (i-1|i) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

la prima riga di quest'ultima matrice significando 1, 0 nel punto A_{i-1} e 0, 1 nel punto A_i . Così si trova

$$[D] = [(i-1|i) - (i|i-1)] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Premoltiplicazione per questa matrice lascia invariato il vettore $\{u\}$ relativo ad A_i mentre inverte il segno nell'altro estremo.

In base a queste relazioni, dalla (6) si hanno qui due equazioni

$$2\beta_i M_{i-1+} + \beta_i M_{i-} = -\phi_{i-1} + (\eta_{i-1} - \eta_i)/l_i - \tilde{K}_{i-1+} \quad (7)$$

$$\beta_i M_{i-1+} + 2\beta_i M_{i-} = \phi_i + (\eta_i - \eta_{i-1})/l_i - \tilde{K}_{i-} \quad (8)$$

Sommando alla (8) la (7) dopo avere accresciuto di 1 gli indici, posto che il grafico dei momenti non presenti salti di valore sulle dividenti ($M_{i-} = M_{i+} = M_i$) si ritrova l'equazione di Clapeyron.

Per i successivi sviluppi di questa applicazione è utile la relazione

$$[G] = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Si noti che le suindicate inversioni di segno in uno dei due fattori del lavoro esterno ai due estremi del tronco è in relazione col cambiamento di verso degli sforzi.

4. Equilibrio delle forze sulle interfacce.

I sistemi equilibrati dell'espressione (1) sono costruiti per ciascun elemento finito senza esigere la continuità di sforzi sulle interfacce con quelli degli elementi contigui. Scriviamo ora le condizioni di equilibrio tralasciate mediante l'equazione dei lavori per spostamenti virtuali delle interfacce. Poiché questo sistema non ha corpo, mancano i termini relativi ai lavori interni. Scegliendo per spostamenti virtuali quegli stessi che formano le colonne di $[B]$ nella (3), si scrive

$$\Sigma \int [B]^T (\{L\} + [D] \{S\}) dS = 0 \quad (9)$$

Nella colonna $\{L\}$ sono disposti eventuali carichi esterni operanti sull'interfaccia scomposti sulle stesse direzioni, locali o generali, adottate per la definizione degli $\{u\}$. L'addendo $[D] \{S\}$ rappresenta la distribuzione di forze superficiali derivanti dalle sollecitazioni (2). Il segno di sommatoria sta a indicare che si aggiungono in questa equazione gli effetti degli elementi confinanti. Concentriamo, al momento, l'attenzione sui contributi arrecati dallo stesso elemento e scriviamo i relativi sforzi nella forma

$$\{S\} = \{\tilde{S}\} + [A] [H]^{-1} ([G] \{Y\} + \{F\} - \{\tilde{H}\}) \quad (10)$$

che si ottiene sostituendo in (2) i valori di $\{X\}$ ricavati dalla (6). Si noti che, secondo la definizione in (5), $[H]$ è matrice quadrata, simmetrica, di cui si conosce il carattere definito positivo. Quindi sostituendo nella (9) l'espressione (10) si ha

$$\Sigma \int [B]^T (\{L\} + [D] \{\tilde{S}\}) dS + \Sigma \int [B]^T [D] [A] [H]^{-1} ([G] \{Y\} + \{F\} - \{\tilde{H}\}) dS = 0$$

Raccogliendo i termini nel secondo integrale che derivano dallo stesso elemento, per i quali sono fattori comuni quelli che provengono da $\{X\}$, si trova trasposto il prodotto indicato con $[G]$ nelle (5). Quindi, per quanto riguarda il singolo elemento il coefficiente della colonna $\{Y\}$ è dato da

$$[k] = [G]^T [H]^{-1} [G] \quad (11)$$

Il sistema ottenuto vale a determinare le incognite spostamento $\{Y\}$. Questa colonna la cui dimensione con riferimento alla (3) era indicata con m , nel sistema risultante va estesa a tutti i parametri di spostamento delle interfacce, per ciascuno dei quali la (9) fornisce un'equazione. Il premoltiplicatore di questa colonna costituisce la matrice di rigidezza $[K]$ della struttura, che viene costruita per *assemblage* delle rigidezze parziali (11): in ogni casella si sommano i lavori che, per gli spostamenti virtuali associati alla riga, fanno gli sforzi degli elementi confinanti originati dagli spostamenti associati alla colonna. L'equazione risultante è dunque

$$[K] \{Y\} = \Sigma [G]^T [H]^{-1} (\{\tilde{H}\} - \{F\}) - \Sigma \int [B]^T (\{L\} + [D] \{\tilde{S}\}) dS \quad (12)$$

5. Conclusioni.

Nel caso sopra considerato, gli spostamenti a cui si riferisce la matrice $[B]$ sono le rotazioni ϕ . Avendo costruito i « momenti semplici » $\tilde{M}$ con valori nulli agli estremi, l'equazione generale (9) nella riga relativa alla rotazione della sezione A_i , soggetta alla coppia C_i , conduce alla relazione

$$C_i + M_{i+} - M_{i-} = 0$$

Quella coppia può anche essere aggregata ai momenti $\tilde{M}$: allora le condizioni (9) si riducono alla continuità degli sforzi di interfaccia. Poiché questa è facilmente attuata nei sistemi supplementari, nel caso di travi allineate conviene l'uso dell'equazione dei tre momenti. Così, in tutti i casi in cui sia comodo stabilire la continuità sulle interfacce dei sistemi contenuti nella matrice $[A]$, si arresta il procedimento all'equazione (6): si attua così la risoluzione pura per sistemi equilibrati, col vantaggio della proprietà di minimo dell'energia complementare, ove questa sia utile. Peraltro, già per uno schema strutturale costituito da travi diritte inflesse, variamente collegate, è nota la convenienza di seguire altra via. Con la stessa impostazione del paragr. 3, per ciascuna trave la matrice (11) è

$$[k] = \beta_i^{-1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\frac{2EJ}{l} \right)_i \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

È facile vedere che le equazioni a cui conduce la (12) coincidono con quelle dei procedimenti fondati su configurazioni congruenti, formulati con incognite spostamenti. Con momenti semplici come sforzi $\{S\}$, il contributo dell'ultimo termine a secondo membro svanisce mentre il termine in $\{\tilde{H}\}$ dà i momenti d'incastro per rotazioni nulle ai due estremi della trave. L'addendo in $\{L\}$ introduce le coppie agenti sui nodi: l'addendo in $\{F\}$ introduce gli effetti degli spostamenti dei nodi. Se questi sono noti a priori, o trascurabili, si possono limitare le incognite $\{Y\}$ alle rotazioni: in caso contrario, si includono gli spostamenti nella stessa colonna (con conseguente modifica della matrice di rigidità) e si cancella il termine $\{F\}$. Si osservi che, in tali condizioni, si giunge a soluzioni che, entro ciascun elemento, verificano la congruenza (nell'ambito della teoria delle travi inflesse). Quando questo sia possibile, nell'attuare mediante le condizioni (12) l'equilibrio delle forze sulle interfacce, si rientra in un metodo di risoluzione per sistemi congruenti: il vantaggio della proprietà di minimo dell'energia potenziale totale può essere sfruttato, ove convenga. Questi procedimenti attraverso soluzioni esatte negli elementi e verifica approssimata dell'equilibrio (o della congruenza) sulle interfacce, possono risultare convenienti, come mostrato da Jirousek per le piastre.

È necessario segnalare un difetto dei metodi ibridi qui presentati: quando le sollecitazioni sull'elemento dipendano dagli spostamenti (come accade nel caso di vincoli elastici distribuiti, o di azioni d'inerzia o per inflessioni di travi soggette a carico di punta) il calcolo immediato della colonna $\{S\}$ nella (2) non è possibile. Si rinvia alla nota citata di Pian per indicazioni su accorgimenti ideati per ovviare a questo ostacolo.

Gli esempi presentati, se per la loro semplicità possono dare un'idea immediata della tecnica di applicazione, non sono peraltro atti a porre in evidenza i vantaggi di questi metodi ibridi: questi possono manifestarsi nella risoluzione di strutture complesse, scomponibili in parti separatamente analizzabili dagli strumenti di calcolo di cui si disponga, qualora questi siano inadatti all'elaborazione del sistema complessivo.

LA TRAVE PRESSO-INFLESSA

1. Più avanti è riportata dal testo [40 bis] una parte del paragrafo dove è studiata la stabilità alla flessotorsione per una trave soggetta ad un carico P di compressione e ad un momento flettente M . Qui, procedendo ad un esame sistematico delle semplificazioni adottabili in base alle considerazioni svolte nelle Premesse, che danno alla trattazione il carattere di teoria limite, si analizza un problema poco diverso. Per uno stato subcritico della trave stessa, soggetta alla compressione P corrispondente a deformazioni minori ma dell'ordine di quella di Eulero ($\varepsilon \simeq b^2/L^2$), vengono analizzate deformazioni addizionali a cui separatamente competano valori ridotti, definiti da $(\varepsilon)^{1+n}$ dove n è un numero positivo. La presenza di questo

esponente permette di linearizzare le espressioni: le relazioni riportate, però, permettono immediatamente la formulazione non lineare negli spostamenti che si esige quando sia $n = 0$.

2. Per il calcolo delle deformazioni si può fare uso dell'espressione

$$\varepsilon = \frac{d\vec{\xi}}{dl} \cdot \frac{d\vec{\eta}}{dl} + 1/2 \left(\frac{d\vec{\eta}}{dl} \right)^2 \quad (13)$$

Questa dà la dilatazione della fibra $d\vec{\xi}$, di lunghezza dl , per effetto degli spostamenti $\vec{\eta}$ comunque grandi, purché possa trascurarsi il quadrato della dilatazione stessa. Questa relazione può ricavarsi dalla deduzione che porta all'equazione (95) del testo [86] (Parte I, Ediz. 1968), facendo tendere a zero il tratto $A_1 A_2$ e quindi al limite $\delta/l \rightarrow \varepsilon$, $(\xi_2 - \xi_1)/l \rightarrow d\vec{\xi}/dl$, $(\eta_2 - \eta_1)/l \rightarrow d\vec{\eta}/dl$.

La coordinata vettoriale del punto generico della trave indeformata è scritta

$$\vec{\xi} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z \quad (14)$$

Qui $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono versori degli assi ortogonali x, y, z dei quali i primi due sono assi principali d'inerzia della sezione, il terzo è l'asse della trave. Lo spostamento del punto stesso è scritto nella forma

$$\vec{\eta} = \vec{i}(\xi - y\theta) + \vec{j}(\eta + x\theta) + \vec{k}(\zeta_0 + \zeta - x\xi - y\eta - w^*\theta) \quad (15)$$

dove $\xi, \eta, \zeta_0 + \zeta$ sono le componenti di spostamento del baricentro, ζ_0 essendo dovuto all'azione del carico P , ζ all'azione che produce quegli spostamenti e la rotazione θ . In conseguenza degli spostamenti ξ , si verifica una rotazione della sezione data da $\phi_y = -\xi$ se si trascurano le deformazioni dovute al taglio: si indicano con punto sovrapposto le derivazioni rispetto a z . Ne conseguono gli spostamenti $-x\dot{\xi}\vec{k}$: analoga spiegazione ha il termine $-y\dot{\eta}\vec{k}$. La rotazione θ della sezione intorno all'asse z produce lo spostamento nel piano stesso $\vec{j}\theta x - \vec{i}\theta y$: inoltre si riscontra uno svergolamento della sezione $-w^*\dot{\theta}\vec{k}$ secondo la teoria di Wagner-Vlasof della torsione con gradiente variabile. Questa teoria è riportata nel § 4 del testo [86] (Parte II, Ediz. 1968): è ivi indicato il metodo di calcolo della funzione $w^* \simeq b^2$ di x, y (designata con $\hat{w}$) per la sezione a parete sottile. Il trattato più completo su questo argomento è dovuto a Vlasof (Тонкостенные уругие стержни, Гос. Изд. Физ. Мат. Лит., Mosca 1959).

3. Per il calcolo della dilatazione della fibra parallela inizialmente a z la (13) si scrive nella forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_z = & \vec{k} \cdot (\partial\vec{\eta}/\partial z) + 1/2 (\partial\vec{\eta}/\partial z)^2 = \dot{\zeta}_0 + \\ & + \dot{\zeta} - \dot{\xi}x - \dot{\eta}y - \dot{\theta}w^* + \\ & + 1/2 (\dot{\xi} - y\dot{\theta})^2 + 1/2 (\dot{\eta} + x\dot{\theta})^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Il termine $\dot{\zeta}_0$ è dell'ordine (ε) per definizione: quelli della seconda riga hanno ordine di grandezza con esponente $1 + n$, per ipotesi. Posto che le derivazioni rispetto a z introducono un fattore $1/L$ negli ordini relativi, conseguono le relazioni

$$L\dot{\zeta}/b^2, \dot{\xi}/b, \dot{\eta}/b, \dot{\theta} \simeq (\varepsilon)^n \quad (17)$$

Quindi si trova che i termini nella terza riga hanno gli esponenti $1 + 2n$ nei relativi ordini. Nella (16) sono stati omessi i termini $(\vec{k} \cdot \vec{\partial}\eta/\partial z)^2$ a cui corrispondono esponenti $2, 2 + n, 2 + 2n$.

Per la deformazione virtuale, che corrisponde a spostamenti infinitesimali $\dot{\zeta}_v, \dot{\xi}_v, \dot{\eta}_v, \dot{\theta}_v$, dalla (16) si ricava l'espressione

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zv} = & \dot{\zeta}_v - x\ddot{\xi}_v - y\ddot{\eta}_v - \ddot{\theta}_v w^* + \\ & + (\dot{\xi}_v - y\dot{\theta}_v) (\dot{\xi} - y\dot{\theta}) + \\ & + (\dot{\eta}_v + x\dot{\theta}_v) (\dot{\eta} + x\dot{\theta}) \end{aligned} \quad (18)$$

La stessa relazione vale anche se si assume che gli spostamenti con indice v abbiano l'ordine dato dalla (17) con esponente $N > n$: così l'esponente di ordine di grandezza per i termini della prima riga nella (18) è $1 + N$, per quelli della seconda e terza $1 + N + n$ ⁽⁵⁾.

4. Si procede alla scrittura dell'equazione dei lavori virtuali assumendo come sistema a la tensione $E\varepsilon_z$ secondo la (16). Si suppone la trave vincolata con cerniere (sferiche) alle estremità, in serie con coppia prismatica ad un estremo. Così risulta $\dot{\zeta}_0 = -P/EA, \dot{\xi} = 0$ in conseguenza degli spostamenti virtuali $\dot{\zeta}_v$. Assumendo come sistema b gli spostamenti $\dot{\xi}_v, \dot{\eta}_v, \dot{\theta}_v$ successivamente, si trovano le relazioni corrispondenti alle (421), (422), (424) del foglio riprodotto, che prendono la forma

$$E \int dz \dot{\xi}_v (J_y \ddot{\xi} + R_y \ddot{\theta}) - P \int \dot{\xi}_v \dot{\xi} dz = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} E \int dz \ddot{\eta}_v (J_x \ddot{\eta} + R_x \ddot{\theta}) - \\ - P \int \dot{\eta}_v \dot{\eta} dz = \int p \eta_v dz \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} E \int dz \ddot{\theta}_v (R_y \ddot{\xi} + R_x \ddot{\eta} + C \ddot{\theta}) + \\ + \int (GJ_t - PJ_p/A) \dot{\theta}_v \dot{\theta} dz = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

essendo

$$J_y = \int_A x^2 dA, J_x = \int_A y^2 dA, J_{xy} = \int_A xy dA = 0$$

$$R_y = \int_A x w^* dA, R_x = \int_A y w^* dA, C = \int_A w^{*2} dA$$

$$J_p = \int_A (x^2 + y^2) dA, J_t = \int_A (\tau/G\dot{\theta})^2 dA$$

⁽⁵⁾ Si noti che nella terza parentesi in (15) sono tenuti in conto i termini di esponente $1 + n$. In una formulazione più precisa, estesa all'esponente $1 + 2n$, si trova che gli addendi in x, y diventano $-x(d\xi/dz + \theta d\eta/dz) - y(d\eta/dz - \theta d\xi/dz)$. Ciò modifica le (16), (18) ma non le relazioni che seguono. Anche nel caso più generale contemplato dalle (421), (422), (424) in cui alla trave sia applicato, oltre al carico di compressione, un momento flettente, le conclusioni sussistono inalterate.

posto che la trave sia soggetta al carico distribuito p nella direzione y .

I vari addendi nelle espressioni dei lavori (19) (21) hanno l'ordine $ELb^2 (\varepsilon)^{2+N+n}$: termini con esponenti più alti sono stati omessi. Una particolare considerazione è richiesta dal termine relativo alla rigidità torsionale GJ_t secondo la teoria di St. Venant: se la sezione fosse massiccia, e quindi $J_t \simeq b^4$, il relativo contributo nell'equazione (21) ammonterebbe all'ordine $ELb^2 (\varepsilon)^{1+N+n}$; allora esso prevarrebbe, rendendo trascurabile la deformazione torsionale. Invece, per sezioni aperte sottili tale rigidità risulta assai ridotta: quel termine assume secondaria importanza. Per questo è giustificato tener conto in modo approssimato delle deformazioni implicate, gli scorrimenti τ/G , senza adeguato esame della relativa congruenza.

Dalle (19)-(21), trasformandole mediante integrazioni per parti, come consueto, in modo che gli spostamenti virtuali appaiano come fattori comuni e, per l'arbitrarietà di questi, annullando le espressioni a fattore, si ottengono 3 equazioni differenziali: ad esempio dalla (20) si ha

$$(EJ_x \ddot{\eta} + R_x \ddot{\theta} + P\eta)'' = p$$

Le caratteristiche R_x, R_y della sezione stabiliscono un concatenamento fra le 3 equazioni; questo manca quando esse sono nulle (ossia il baricentro coincide col centro di taglio).

Per la trave di sezione variabile le (19)-(21) si prestano alla risoluzione approssimata: si esprimono gli spostamenti come combinazione di funzioni prescelte con fattori incogniti, determinati dalle equazioni scritte assumendo per le configurazioni virtuali le stesse funzioni. Il sistema diverge quando ci si accosta alla situazione critica, che, se $R_x, R_y \neq 0$, implica una deformazione flessotorsionale.

5. Sommando membro a membro le (19)-(21) si ottiene l'equazione

$$\begin{aligned} E \int [J_y \ddot{\xi}_v \ddot{\xi} + J_x \ddot{\eta}_v \ddot{\eta} + C \ddot{\theta}_v \ddot{\theta} + GJ_t \dot{\theta}_v \dot{\theta}/E + \\ + R_x (\ddot{\eta}_v \ddot{\theta} + \ddot{\theta}_v \ddot{\eta}) + R_y (\ddot{\xi}_v \ddot{\theta} + \ddot{\theta}_v \ddot{\xi})] dz - \\ - P \int (\dot{\xi}_v \dot{\xi} + \dot{\eta}_v \dot{\eta} + J_p \dot{\theta}_v \dot{\theta}/A) dz = \\ = \int p \eta_v dz \end{aligned} \quad (22)$$

Si nota che l'espressione a primo membro non cambia valore se si scambiano i due sistemi di spostamenti che vi compaiono, quello con indice v e quello senza indice. Questa simmetria assicura l'esistenza delle proprietà di reciprocità per la trave soggetta a flessotorsione, con sollecitazioni anche prossime alle critiche, per sistemi di deformazioni trasversali che implicino tensioni (sempre equilibrate) alquanto inferiori ai valori critici. Infatti si dimostra che la (22) vale anche quando abbiano la stessa entità i due sistemi che vi figurano, diciamo I quello senza indice e II con indice v .

90. *Instabilità torsionale delle aste compresse o riflesse.* - Il fenomeno di cedimento per flessione laterale delle aste compresse esaminato nei §§ 88-89 rappresenta una particolare forma sotto la quale l'instabilità elastica si può manifestare. In generale accade che lo spostamento delle varie sezioni nelle condizioni critiche non si riduce ad una semplice traslazione nella direzione di uno degli assi principali come sopra si è supposto: le sezioni ruotano invece l'una rispetto all'altra e le fibre longitudinali della trave si trasformano in generale in linee gobbe. Considereremo questo tipo di cedimento (nel quale rientra come caso particolare quello sopra esaminato) assumendo che il fenomeno avvenga sempre nel periodo elastico, ossia che ancora nelle condizioni critiche, il comportamento del materiale per qualsiasi punto del corpo sia definito dalla legge di Hooke. Ometteremo inoltre che le sezioni mantengano inalterata la loro forma. Vedremo che certi tipi di cedimento, specialmente per le sezioni in parete sottile, si manifestano come imbottimenti locali i quali alterano la forma della sezione. Escluderemo per il momento questi cedimenti: si dovrà poi, quando le varie forme di cedimento siano esaminate, determinare quale è quella che, per ciascun caso si manifesta (ossia quella corrispondente al carico critico più basso).

Nel piano della sezione fissiamo due assi ortogonali x, y baricentrici e indichiamo con ξ, η le componenti di spostamenti del baricentro sulla direzione dei due assi e con θ l'angolo di torsione. Supponiamo che la trave sia soggetta ad un carico assiale P e ad un momento flettente M il quale abbia asse parallelo a x : per evitare espressioni inutilmente complesse supporremo nullo il momento flettente rispetto all'asse y .

Al corpo che ha ceduto sotto il carico subenno le componenti di spostamento ξ, η , θ subiviamo una deformazione addizionale, costituita da una traslazione delle sezioni nella direzione x di valore ξ_v , variabile da una sezione all'altra secondo una legge arbitraria. Indichiamo come sistema A la configurazione di sperti per le condizioni critiche, come sistema B la deformazione addizionale ora indicata.

La fibra parallela a z , passante per il punto di ordinata y aveva nello stato A subito lo spostamento nella direzione x misurato da $\xi - y\theta$: la deformazione addizionale incrementa di ξ_v questo spostamento. Con ragionamento analogo a quello svolto per dedurre la (415) si trova che nel sistema B la fibra stessa ha subito in conseguenza della traslazione ξ_v la dilatazione:

$$\xi_v (\xi - y\theta)$$

Gli spostamenti ξ_v si accompagnano a rotazioni delle sezioni intorno a y misurate da ξ_v . La fibra di coordinata y , per effetto di questa rotazione che dà luogo agli spostamenti $x = -\xi_v x$, presenta la dilatazione:

$$-\xi_v x$$

La ha quindi in totale, per le dilatazioni del sistema B

$$\xi_v (\xi - y\theta) - \xi_v x \quad (418)$$

Le tensioni del sistema A possono essere poste sotto la forma:

$$\sigma_A = \sigma_0 - (\ddot{\xi}x + \ddot{\eta}y + \ddot{\theta}w^*) E \quad (419)$$

essendo:

σ_0 le tensioni che si hanno nel corpo ferma che si manifesti il cedimento rappresentato dalle ξ, η, θ ;
 $-E\xi x, -E\eta y$ le tensioni rispettivamente dovute alla rotazione

delle sezioni intorno a y e x

-E θw^* le tensioni dovute alla torsione: per queste ultime si ritiene applicabile la teoria di Wäqner (§ 85).

Nel calcolo del lavoro del complesso A di forze (carico P e momento M) per gli spostamenti del sistema B , poiché si considerano solo le σ parallele a z , si potrà applicare la relazione:

$$L_{AB} = \int \sigma_A \epsilon_B dV \quad (420)$$

Nel computo di questa secondo le espressioni (418) e (419) si potranno trascurare i termini del II ordine nelle componenti di spostamento ξ, η, θ e derivate, poiché nelle condizioni in esame (inizio del cedimento laterale) questi spostamenti sono infinitesimi.

Già come l'espressione (420) può essere scritta anche per $\xi = \eta = \theta = 0$, si potrà nel computo della (420) per $\xi, \eta, \theta \neq 0$ non considerare gli addendi risultanti dal prodotto di σ_0 per i termini di ϵ_B non contenenti ξ, η, θ termini che uguagliano il lavoro che P e M fanno per gli spostamenti ξ_v .

Si ottiene così dalle (418), (419), (420):

$$L_{AB} = E \int d\alpha \int \xi_v (x^2 \ddot{\xi} + x y \ddot{\eta} + x w^* \ddot{\theta}) dA + \int d\alpha \int \sigma_0 \xi_v (\xi - y\theta) dA \quad (421)$$

e quindi, essendo:

$$J_{xy} = \int x y dA = 0, \quad J_y = \int x^2 dA$$

$$R_y = \int x w^* dA, \quad P = - \int \sigma_0 dA, \quad M = \int y \sigma_0 dA$$

si ottiene:

$$E \int d\alpha \xi_v (J_y \ddot{\xi} + R_y \ddot{\theta}) - P \int \xi_v \xi d\alpha - M \int \xi_v \theta d\alpha = 0 \quad (422)$$

quando si consideri che $L_{AB} = 0$ se gli spostamenti ξ_v rispettano le condizioni di vincolo.

Analoga relazione sussiste se si scambiano gli assi x, y :

$$E \int d\alpha \eta_v (J_x \ddot{\eta} + R_x \ddot{\theta}) - P \int \eta_v \eta d\alpha = 0 \quad (423)$$

essendo:

$$J_x = \int y^2 dA, \quad R_x = \int y w^* dA, \quad \int x \sigma_0 dA = 0$$

Questa equazione viene ottenuta assumendo come sistema B quello corrispondente a spostamenti η_v secondo y e quindi a dilatazioni:

$$\epsilon_B = \eta_v (\dot{\eta} + x\dot{\theta}) - \dot{\eta}_v y$$

Analogamente, se si assume come sistema B quello corrispondente alle rotazioni θ_v delle varie sezioni intorno ai rispettivi baricentri, si ha:

$$\epsilon_B = -y\dot{\theta}_v (\xi - y\dot{\theta}) + x\dot{\theta}_v (\eta + x\dot{\theta}) - \dot{\theta}_v w^* \quad (424)$$

quindi, dalla:

$$L_{AB} = \int \sigma_A \epsilon_B dV + \int \tau_A \gamma_B dV$$

e dalle (419) e (423), posto:

$$\tau_A = G \dot{\theta} w^*, \quad \gamma_B = \frac{\dot{\epsilon}_B}{G} = \dot{\theta}_v w^*, \quad \sigma_0 = -\frac{P}{A} + \frac{M_y}{J_x}$$

si ha:

$$\int d\alpha (E R_y \ddot{\xi} \dot{\theta}_v + E R_x \ddot{\eta} \dot{\theta}_v + E C \dot{\theta}_v^2 + G J_x \dot{\theta}_v^2) - M \int \xi_v \dot{\theta}_v d\alpha - \int \frac{P J_x + M J_y}{A} \dot{\theta}_v^2 d\alpha = 0 \quad (425)$$

essendo:

$$C = \int w^{*2} dA, \quad J_x = \int (x^2 + y^2) dA$$

$$J_y = -\frac{A}{J_x} \int y (x^2 + y^2) dA, \quad J_z = \int x^2 dA$$

Per questo partendo dalla (22) con spostamenti virtuali infinitesimi, si esprima il carico nella forma $p + \lambda \Delta p$ essendo λ un parametro che si fa crescere da 0 a 1. Poiché le equazioni di equilibrio per il sistema (congruente) I sono lineari, con il fattore P costante, i relativi spostamenti possono scriversi nella forma $\xi + \lambda \Delta \xi$: per il II si scelga ξ_v nella forma $\Delta \xi d\lambda$. La (22) vale sempre che il sistema I sia equilibrato e quindi la si integra per λ da 0 a 1: con ciò l'integrando $p\eta_v$ diventa $(p + \frac{1}{2}\Delta p)\Delta\eta$ e analoga trasformazione subiscono gli altri termini. Separando gli addendi quadratici in Δ , per i quali la stessa equazione sussiste ove si parta da $p = 0$, si ottiene la stessa

(22) con $\Delta\xi$ al posto di ξ_v e analoghe sostituzioni: questa dunque vale quando gli esponenti n, N per la (17) siano uguali. Essi però debbono essere > 0 , essendosi omissi termini di ordine relativo $(\epsilon)^n$: ciò dà un'idea sull'errore relativo. Invece, per $n = 0$ nel prodotto delle espressioni (16), (18) sarebbero da includere i termini quadratici e cubici negli spostamenti I: con gli stessi spostamenti virtuali, si scrivono le condizioni di equilibrio per la teoria non lineare per deformazioni prossime a quella critica. Si noti dunque come l'equazione dei lavori virtuali serva di guida anche fuori del campo lineare, col sussidio di considerazioni asintotiche.

Problemi di ottimizzazione

Come introduzione alla presentazione della nota [81], il cui testo è riportato qui di seguito, Cicala espone i concetti essenziali dei suoi lavori [63, 74-81, 85] sul Calcolo delle Variazioni.

1. Premessa.

Nel seguito è riportato il testo di una nota che per la varietà dei problemi trattati si può ritenere di interesse generale. Questa introduzione è volta all'intento di facilitare la lettura della nota a chi non conoscesse i metodi del Calcolo delle Variazioni.

Questa elegante branca delle Matematiche si sviluppò principalmente su tre idee di portentosa genialità: il concetto di variazione di un funzionale che condusse Eulero alle sue equazioni basilari, il concetto dei moltiplicatori di Lagrange e quello di Weierstrass per la misura dell'influenza che sui risultati esercitano le deviazioni dal cammino ottimo. Idee nuove sui fondamenti apportarono forse pochi vantaggi ⁽¹⁾: quelle, invece, relative alla costruzione di algoritmi atti a trasferire agli strumenti di calcolo attuali il compito di risolvere i problemi di ottimo costituiscono una valida prosecuzione dell'indagine.

Purtroppo l'interesse dei matematici in questo settore si è volto al suo impiego geometrico o nella teoria delle funzioni piuttosto che ai problemi di ottimo. In ambienti più vicini all'ingegnere si è anche pensato piuttosto a utilizzazioni indirette, come la scrittura delle equazioni di equilibrio elastico. Così, diverse tendenze contribuirono ad oscurare la sostanziale utilità del classico Calcolo delle Variazioni nella pratica della ricerca di ottimizzazione ⁽²⁾.

Allo scopo di illustrare i caratteri dei problemi esaminati nei lavori citati e i procedimenti di risoluzione adottati, si discuteranno alcuni esempi semplici, trattati nel seguito con gli strumenti menzionati.

2. Un problema sulla disseminazione di disinfestanti.

Su un assegnato percorso, lungo il quale è misurata la coordinata t , sia nota la distribuzione w dell'infestazione da combattere (poniamo, insetti in una coltura): ne sia dato il diagramma, ad esempio il grafico triangolare della fig. 1 (b). Le

proprietà del disinfestante siano rappresentate dalla curva della fig. 1 (a) che dà, in funzione dell'impiego x del disinfestante (peso disseminato per unità di percorso), l'effetto relativo S : sia cioè Sw la parte distrutta della distribuzione w . La caratteristica assunta presenta un primo tratto (punteggiato in figura) di scarsa efficacia: questa poi cresce rapidamente con x per piegare con tendenza asintotica verso il valore 1: ciò significa che la disinfestazione totale non è raggiungibile: la curva è troncata ad un punto T corrispondente alla massima disseminazione x_2 fissata.

La fig. 1 (b) presenta i risultati dell'analisi per quanto riguarda la legge di variazione del consumo $y = \int x dt$ del disinfestante: i simultanei valori di x sono riportati nel grafico (c), per la prima metà dell'operazione: il diagramma si ripete simmetricamente rispetto alla coordinata t del punto di simmetria della distribuzione w . Le linee c si riferiscono ad una scarsa disponibilità di disinfestante: la disseminazione parte dal valore x_1 corrispondente al contatto K della caratteristica e si estende ad un breve tratto del ramo seguente. Con maggiore disponibilità J , si può raggiungere il limite T e, in genere allora ci si dovrà permanere per un certo intervallo: a tale fase, ad esempio, corrisponde il segmento HL della linea b del grafico (b). La « traiettoria » a corrisponde al caso limite in cui alla disseminazione massima si arriva per tornare immediatamente indietro ⁽³⁾.

3. Utilizzazione ottima di un salto idraulico variabile.

Questo problema si riferisce allo sfruttamento delle maree. Sia u la quota di marea, funzione nota del tempo t , y il livello nel serbatoio, comunicante col mare quando occorre, dal quale si eroga la portata x che attraversa la turbina. La potenza N di questa si suppone proporzionale al salto $y-u$ con un fattore dipendente da x secondo una caratteristica del tipo della curva $IKMT$ della fig. 2 (a).

Per il massimo sfruttamento del ciclo di marea, se non sono prefissati limiti per il tempo e la quota finali, la traiettoria ottima è costituita da una spezzata del tipo $A \rightarrow B \rightarrow Z \rightarrow h$ della fig. 1* ⁽⁴⁾. Questa mostra che l'afflusso alla turbina deve essere aperto solo quando il salto raggiunge un determinato valore; quindi si eroga la portata di potenza massima (tratto BZ). Dal punto Z , se non è previsto lo sfruttamento della fase di riempimento del serbatoio, questo è posto in comunicazione direttamente con il mare. Si osservi la limitazione

⁽³⁾ Impropriamente si dice « traiettoria » la linea che rappresenta la soluzione qualunque sia il significato delle coordinate dello spazio in cui essa è rappresentata.

⁽⁴⁾ Si distinguono con asterisco le figure di questa introduzione da quelle del testo.

⁽¹⁾ R. E. KOPP nel Cap. 7 del trattato *Optimization Techniques*, G. Leitmann, Academic Press, 1961, con riferimento al principio di massimo di Pontryagin afferma: « In comparison with the Calculus of Variations using the methods of Bliss, we find that the differential equations describing the auxiliary variables are the same as the Euler equations corresponding to the state variables... An extension of Weierstrass's and Cicala's work gives the Maximum Principle directly ».

⁽²⁾ A. MIELE, *Recent advances in gradient algorithms for optimal control problems*, J.O.T.A., 1975, pp. 361-430, in introduzione, dà un cenno sulla vastità dei campi nei quali le tecniche di ottimizzazione possono utilizzarsi con sostanziali vantaggi. Presenta quindi metodi di risoluzione numerica per il migliore uso degli attuali strumenti di calcolo.

nel salto utilizzabile: al di sotto della quota di Z l'eventuale capacità del serbatoio non è sfruttata.

Nella fig. 2 (c) sono indicate le traiettorie ottime per assegnati valori finali del livello nel serbatoio e del tempo: in questa analisi è anche assegnato un valore del salto al di sotto del quale la turbina non funziona (linea punteggiata P, T).

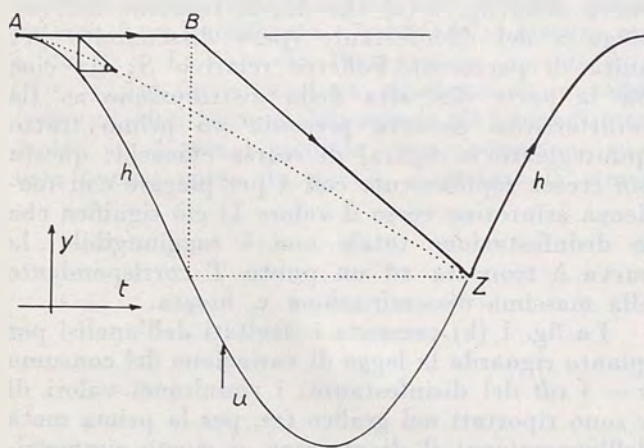


Fig. 1* - Sfruttamento ottimo di un ciclo di marea.
A → B Turbina ferma. B → Z Massima erogazione.
Z → h Riempimento del bacino.

4. Un problema di economia di mercato.

Si indichi con c la capacità produttiva di una industria in funzionamento normale, con $ct + y$ la quantità di merce prodotta e con $ct + u$ la quantità venduta al tempo t . La grandezza u è considerata una funzione assegnata del tempo t : la funzione y è da determinare: c è supposta costante: essa non interviene nella determinazione di y : la differenza $y - u$ è la scorta invenduta in magazzino: il suo accumulo comporta una spesa che viene espressa da $k \int (y - u) dt$ con k costante. La produttività $c + dy/dt$ può essere variata al di sopra o al di sotto di c della quantità x compresa fra i limiti $-x_1$ e x_2 prefissati. La variazione x rispetto al normale funzionamento comporta una spesa addizionale $k \int f dt$ essendo f una funzione nota di x , positiva per valori positivi o negativi di x : il suo grafico assunto è dato dalla bilatera della fig. 3 (a).

Si pone il problema di rendere minima la somma delle due perdite anzidette, indicata con kW , in un certo intervallo di tempo. Il diagramma h della fig. 3 rappresenta la fluttuazione delle vendite. La produzione y potrebbe seguire la medesima curva (esclusa la previsione di scorte) se le massime pendenze positive restassero inferiori alla produttività (incrementale) x_2 e se le pendenze negative non scendessero al di sotto di $-x_1$. Si eviterebbe così la perdita per accumulo di scorte ma risulterebbe rilevante la perdita per funzionamento anormale. La traiettoria di funzionamento ottimo per una fluttuazione periodica, con domanda oscillante fra valori massimi e minimi eccedenti i limiti di produttività ammessi è presentata nella fig. 2*. Si noti come con tale traiettoria si riduce l'impegno di magazzino rispetto al funzionamento costante $x = 0$ che stabilirebbe un collegamento orizzontale fra rami discendenti e ascendenti della

richiesta; inoltre si trae vantaggio del funzionamento a regime normale per un lungo tratto.

Se per la situazione terminale, ad un determinato tempo, si fissa anche un ammontare di scorta, si viene ad assegnare la posizione del punto finale. Le soluzioni per questi casi sono indicate dalle illustrazioni della fig. 3 (b), (c), (d): la prima si riferisce al caso in cui le fluttuazioni di mercato rientrano nei limiti ammessi della produttività: le figg. 3 (b), (d) si riferiscono ai casi in cui l'oscillazione della domanda supera quei limiti, rispettivamente in fase discendente o ascendente, come è previsto nella fig. 2*.

Si noti che nella trattazione variazionale non si è tenuto conto della produttività normale c che in effetti non interviene nel problema. Anche il fattore k , che è comune a tutti i computi di perdite, può essere ignorato nella determinazione della traiettoria ottima.

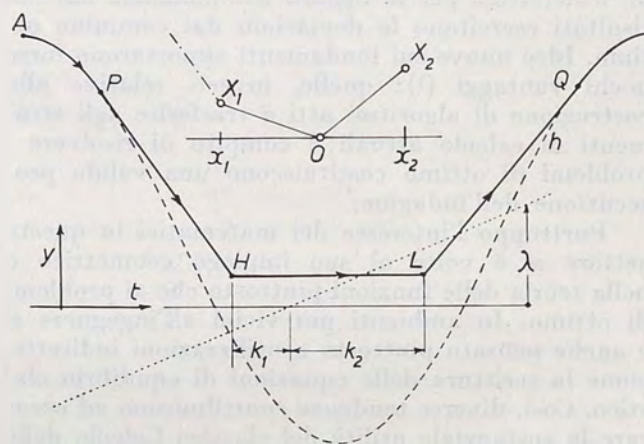


Fig. 2* - Sfruttamento ottimo di una richiesta fluttuante di mercato.
A → P Produzione pari alla richiesta P → H Produzione minima.
H → L Produzione normale di conduzione economica.
L → Q Produzione massima.

5. Dimensione del problema variazionale.

Negli esempi sopra presentati si è indicata con t la variabile « indipendente » di cui le altre si considerano funzioni: quando un siffatto problema è risolto, per ciascun valore di t , da quello iniziale t^A a quello finale t^Z si conosceranno quelli delle variabili dipendenti. La scelta della privilegiata t non è imposta da esigenze stringenti, salvo quella di incremento permanentemente positivo. Il tempo è certo la variabile che assicura questa proprietà; di fatti questa scelta è usuale nei problemi in cui il tempo interviene: è quella adottata nei problemi II e III, mentre nel primo con t si è indicato il cammino percorso nella disseminazione perché questo ha rilevanza precipua nell'operazione in esame. Dunque, in ogni caso, anche se il processo in questione coinvolge un numero qualunque di variabili e i risultati troveranno rappresentazione in uno spazio a molte dimensioni, la soluzione di questi problemi di ottimo condurrà a trovare una linea, ente unidimensionale che potrà chiamarsi percorso o traiettoria ottima in ogni caso. Se invece si cerca la forma ottima di una superficie, si entra in un problema bidimensionale: quando questo sia risolto, per ogni coppia di variabili indipendenti

si conoscerà un sistema di valori di funzioni e quindi si potrà tracciare, in senso lato, una superficie ottima nello spazio rappresentativo.

Il passaggio dalle questioni di ottimo unidimensionali alle pluridimensionali comporta un incremento di complessità scoraggiante: lo sviluppo inadeguato dello studio in questo settore rende obbligatorio il ricorso alla discretizzazione per la risoluzione di tali problemi che così vengono ricondotti a questioni di minimo ordinario. Si osserva, per inciso, che in vari settori applicativi, si adotta la formulazione variazionale, non però con uno scopo di ottimizzazione ma come trattazione alternativa rispetto a quella oggettiva. In questo caso l'indagine è limitata alla considerazione della prima variazione delle grandezze in gioco, sicché gli ostacoli accennati non si incontrano.

Nelle note menzionate, incluso il testo [80], affrontandosi questioni di ottimizzazione, si è limitato lo studio a problemi unidimensionali.

6. La formulazione di Mayer del problema unidimensionale.

Prima di iniziare l'indagine di ottimizzazione, il problema deve essere precisato da un certo numero di relazioni differenziali (1) a cui la traiettoria deve obbedire. Vi intervengono la variabile indipendente $t = y_0$, le funzioni incognite y_i , x_k (con i che va da 1 a $n - l$, con k che va da 1 a l) e insieme le derivate $\dot{y}_i = dy_i/dt$: il numero complessivo n delle incognite deve superare il numero m di queste condizioni: se lo eguaglia la traiettoria resta, in genere, vincolata da quelle condizioni e il problema di minimo, al più, deve limitarsi alla scelta dei valori terminali. Si nota dunque nelle (1) la presenza di variabili x le cui derivate non figurano: la loro eliminazione sarebbe idealmente possibile senza modificare l'ordine delle derivazioni; però di regola, queste variabili intervengono in relazioni non analitiche, rappresentabili con semplici diagrammi che necessariamente sono da usare direttamente. Delle altre variabili y compaiono le derivate prime e solo quelle: ciò significa che, se si partisse da una formulazione contenente, ad esempio, le quantità w , $\dot{w}$, $\ddot{w}$ si porrà $y_1 = w$, $y_2 = \dot{w}$ e si inserirà fra le (1) la relazione $\dot{y}_1 - y_2 = 0$: si rientra così nella formulazione presupposta, sostituendo $\dot{y}_2$ a $\ddot{w}$.

Moltiplicando ciascuna espressione q per un « moltiplicatore » λ e introducendo nelle equazioni di Eulero (4), (5) la somma F di detti prodotti si ottengono altre equazioni differenziali da associare alle (1). Il sistema differenziale è ora formato da $m + n$ equazioni in altrettante incognite: le originarie y e gli m moltiplicatori introdotti nella combinazione F . Qualunque soluzione di questo sistema gode della importante proprietà espressa dall'eguaglianza (6) che può essere formulata nei termini seguenti: fra due traiettorie vicine che verifichino le equazioni di Eulero oltre le condizioni (1), le variazioni delle coordinate (inclusa la t) dei punti terminali sono vincolate dalla relazione (6).

Nella formulazione di Mayer, il problema di ottimo viene ricondotto alla minimizzazione di una espressione del tipo (2), dipendente dalle coordinate $t, y_1, \dots, y_{n-l}$ dei punti terminali: per tener conto dei vincoli (3) a cui le stesse coordinate siano soggette, e della relazione (6) la condizione di annullamento della prima variazione di g si traduce nelle condizioni (7) che valgono sui due punti terminali. Vi intervengono i moltiplicatori μ (costanti, questi, mentre i λ sono funzioni incognite di t).

Nella formulazione più frequentemente usata la quantità da minimizzare viene espressa mediante un integrale definito da un estremo all'altro della traiettoria, eventualmente con aggiunta di una espressione del tipo della (2) (formulazione di Bolza). In questa forma si viene a porre in evidenza una delle variabili che risultano insieme conglobate nell'espressione (2). Le due formulazioni sono perfettamente equivalenti, sia per risultati sia per elaborazione: quella qui preferita ha il vantaggio logico di trattare allo stesso modo tutte le variabili da cui la quantità da minimizzare può dipendere: questo livellamento risponde al fatto che il sistema differenziale (1), (4), (5) che regge la traiettoria non dipende dall'espressione di g in (2), la quale può solo entrare nelle condizioni ai limiti.

È facile vedere come le operazioni anzidette vengono eseguite nel caso dei problemi suindicati. Partendo dal problema I si procede alla scrittura delle espressioni q . Introducendo gli integrali indefiniti

$$W = \int wS \, dt, \quad y = \int x \, dt \quad (a)$$

per rientrare nella forma generale (1), con le definizioni $y_1 = W$, $y_2 = y$ si scrive

$$\varphi_1 = \dot{y}_1 - wS = 0, \quad \varphi_2 = x - \dot{y}_2 = 0 \quad (b)$$

Con $F = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$ si ottiene l'espressione (14). Dunque in questo caso è $m = 2$, $n = 3$, $l = 1$. Per le relazioni (4) si ha

$$\dot{\lambda}_1 = 0, \quad \dot{\lambda}_2 = 0, \quad wS/dx = \lambda_2 \quad (c)$$

Volendo massimizzare la quantità M in (13) per un assegnato valore della J in (12) scriviamo la quantità G da sostituire nelle (7) nella forma

$$G = yA_1 - yZ_1 + \mu_1 (yZ_2 - yA_2 - J) \quad (d)$$

La prima delle (7) scritta per $j = 1$ conduce a porre $\lambda_1 = 1$. Se la si scrive per $j = 2$ si ottiene $\lambda_2 = \mu_1$: siccome la costante μ_1 è incognita, questa equazione non aggiunge alcuna informazione. Così per tutte le coordinate fisse, poiché la relativa condizione inserita nella G introduce un moltiplicatore incognito, la relativa (7) risulta inefficace.

Le medesime operazioni nel problema II conducono alle equazioni (20), (21). Si noti che anche qui risulta costante e unitario il primo moltiplicatore, perciò omissso dalla (19): lo stesso va detto per la (24) che conduce alle (25), (26). Si osservi inoltre il cambiamento di segno nell'introdurre la quantità W in g a seconda che si debba massimizzare o minimizzare l'intervallo: anche nella F si effettua lo scambio di segno affinché il primo moltiplicatore resti positivo.

7. La condizione di Weierstrass.

Supposto di aver tracciata una traiettoria in base alle equazioni sopra indicate, si deve constatare, secondo Weierstrass, che la quantità espressa della (9) deve restare positiva per qualsiasi punto della traiettoria stessa, per qualsiasi variazione nelle quantità x_k, y_i che le porti a valori x_k^*, y_i^* che ancora rispettino le (1). Per il problema I, considerando che $z_1 = \lambda_1 = 1, z_2 = -\lambda_2$ si scrive

$$E = \dot{y}_1 - \dot{y}_1^* + \lambda_2 (\dot{y}_2^* - \dot{y}_2)$$

La quantità in parentesi, in virtù della $\varphi_2 = 0$, si può scrivere $x^* - x$: quindi le variazioni da considerare sono variazioni di ascissa sulla caratteristica di fig. 1 (a). Indichiamo con S^* l'ordinata corrispondente alla nuova ascissa x^* : poiché la $\varphi_1 = 0$ sussiste con w invariato, sarà $\dot{W}^* = wS^*$. Quindi la E si esprime nella forma (17): questa significa che, se per il punto (come X in figura) rappresentativo dell'attuale situazione x, S si traccia una retta di pendenza λ_2/w , si deve constatare che nessun punto della caratteristica si trovi al di sopra di quella retta. D'altra parte, per la (16), λ_2/w è la pendenza della tangente alla caratteristica stessa: la condizione $E \geq 0$ ne impone la convessità. Dunque il tratto punteggiato OK non può essere utilizzato nelle traiettorie ottime.

Le medesime considerazioni per il problema II, con l'espressione (22) conducono alla convessità della caratteristica $N(x)$, tracciata per $y - u =$ costante (fig. 2a): gli archi IK, MT sono esclusi dal funzionamento. Per il problema III, in base alla (27), si riconosce che la caratteristica $X_1 OX_2$ della fig. 3 (a) deve stare al di sopra della retta di pendenza λ tracciata per il punto rappresentativo di funzionamento.

8. Traiettorie composte di archi eterogenei.

Tornando al problema I, supponiamo che nel percorrere la traiettoria ottima il punto rappresentativo sul diagramma della fig. 1 (a) stia come X sull'arco KT e che si incontrino sul tragitto valori crescenti di w : per la (16) λ_2 decresce e il punto X si sposta verso T . In quella posizione possiamo supporre che la caratteristica termini con un arrotondamento (infinitesimo) ingrandito in fig. 1 (a). Se il rapporto λ_2/w è minore della pendenza minima della caratteristica, il contatto resta fermo in T : ha così inizio un nuovo arco di traiettoria, con $x =$ costante $= x_2$. Per il punto di transizione deve sussistere la continuità della variabile y e, secondo la (8), anche per il moltiplicatore λ_2 , poiché non vi è alcun vincolo relativo alla posizione del punto di giunzione (H per la traiettoria b della fig. 1b). Questo tratto della traiettoria cessa quando λ_2/w torna al valore della pendenza della caratteristica in T . Analogamente, al decrescere di w , dai punti X dell'arco KT il contatto si porta verso K . Quando la pendenza λ_2/w supera quella della retta OK , il punto rappresentativo deve portarsi in O perché resti $E \geq 0$ e vi rimane nella fase finale, in cui la disseminazione del disinfectante è cessata.

Questo processo può immaginarsi come condotto da un filo teso che si adagi su una sagoma avente la forma della caratteristica: diverse posizioni del « filo conduttore » sono segnate con linee a tratto e punto, terminanti in una freccia, nella fig. 1 (a). Così ciascuna traiettoria della famiglia indicata nella fig. 1 (b) è individuata assegnando un valore a λ_2 : per ogni punto del percorso, il rapporto λ_2/w dà la direzione del filo conduttore: il punto di contatto stabilisce il valore x della disseminazione. Ciascuna soluzione corrisponde ad una definita disponibilità J di disinfectante che verrà utilizzato per il massimo effetto.

Si osserva che la (7) va presa in considerazione anche per $j = 0$. Essendo, per quanto è specificato a proposito della (4)

$$z_0 = -\dot{W} + \lambda_2 \dot{y} = -wS + \lambda_2 x$$

Se il punto iniziale e quello finale sono liberi, in questi deve essere $z_0 = 0$: ossia $\lambda_2/w = S/x$. Questa condizione è stata attuata operando come sopra è detto.

Alle analoghe considerazioni per il problema II si deve premettere l'osservazione che la caratteristica della fig. 2 (a) non è data semplicemente dalla curva $IKMT$ ma ovviamente, ove la soluzione ottima lo richieda, si può, attraverso lo stesso canale adduttore, espellere una certa portata x_b , senza sfruttarla attraverso la turbina: per queste situazioni vale la caratteristica tralata come mostra la fig. 2 (a). La condizione di convessità riduce la caratteristica di pratico impiego alla forma schematica segnata nella fig. 2 (b).

Posto $N = k_1 x (y - u)$ con $k_1 =$ costante, dalla (20) e dalla $\varphi_2 = 0$ si ha

$$\dot{\lambda} S = -k_1 x = k_1 S \dot{y} \quad (e)$$

Quindi, nelle condizioni $x = 0$ risulta $\dot{\lambda} =$ costante. Per il funzionamento corrispondente al vertice K_1 della fig. 2 (b) la condizione di Weierstrass richiede che sia

$$0 < \lambda < k_1 (y - u) \quad (f)$$

perché, per valori di λ fuori di questo intervallo, la retta di pendenza λ per il punto K_1 di coordinate x_1, N_1 taglierebbe il trapezio $OK_1 M_1 T_1$: quindi esisterebbero punti x^*, N^* per i quali la (22) darebbe $E < 0$. Sulla orizzontale per A , ossia con il serbatoio a massimo livello, si fissi un punto B' per l'inizio di funzionamento (fig. 3*), assegnando conseguentemente per λ il valore limite superiore secondo la (f), ossia $\lambda(B') = k_1 y(B') - k_1 u(B')$: quindi, secondo la (e), nei successivi istanti sarà $\dot{\lambda} = k_1 y - k_1 u(B')$. Lungo il ramo discendente della traiettoria, si raggiungerà in un punto C' il limite inferiore indicato dalla (f) quando sia $y = u(B')$. Il luogo di tali punti fornisce la linea delle giunzioni c' : in questi, λ attraversa il valore zero e quindi deve iniziarsi il funzionamento relativo al punto M_1 . La nuova pendenza delle traiettorie è $S \dot{y} = -x_1 - x_b$ mentre la (20) dà ancora $\dot{\lambda} S = -k_1 x_1$: perciò, a partire da C' si può scrivere

$$\dot{\lambda} (x_1 + x_b)/k_1 x_1 = y - u(B') \quad (g)$$

L'intersezione della linea c' con la curva h individua una particolare traiettoria $A \rightarrow B \rightarrow Z$ che, come si dimostra più avanti, fornisce il migliore sfruttamento del ciclo di marea fra tutte le traiettorie ottime che fanno capo alla linea h . Inoltre, mediante la (23) è dimostrato che l'intersezione della c' con le verticali individua le soluzioni ottime terminanti (con valore libero di y) ad un tempo definito $< t(Z)$ ⁽⁵⁾.

Sulle traiettorie che partono da punti, come B'' , oltre il punto B , la diminuzione del limite superiore indicato dalla (f) fa sì che si ritorni ad esso: ciò avviene quando $u = u(B'')$, nel punto C'' della fig. 3*. Il luogo di questi punti è una seconda linea di giunzioni c'' . Il contatto sulla caratteristica si riporta al punto 0: da qui in avanti resta $x = 0$, $\lambda = \text{costante} = k_1 y(C'') - k_1 u(B'')$ mentre la pendenza della caratteristica continua a diminuire. Si trova così a destra della linea c'' la regione x_0 della fig. 2 (c). Ovviamente le linee c' e c'' convergono sullo stesso punto Z della linea h .

Per il problema III la (25) dà una legge assai semplice per la variazione del moltiplicatore che dà la direzione del filo conduttore sul grafico dei costi, fig. 3 (a). Nella fig. 2* è segnata la spezzata analoga $X_1 O X_2$: è inoltre riportato il diagramma del moltiplicatore λ (linea punteggiata) corrispondente alla soluzione rappresentata. Questo assume il valore $-k_1$ all'inizio H della fase di funzionamento normale e il valore k_2 alla fine L : per queste due situazioni il filo conduttore assume le direzioni $O X_1$ e $X_2 O$ rispettivamente: nell'intervallo il contatto resta nel punto O . Durante il tratto PH della traiettoria il contatto è fermo nel punto X_1 : la linea a tratto e punto segna la direzione del filo conduttore relativa al punto P . Nel tratto antecedente i valori negativi di λ indicherebbero la permanenza di x sul valore x_1 : però la condizione $y \geq u$ stabilita per tutto il funzionamento vincola questo ramo della traiettoria a stare sulla curva h . Poiché il punto rappresentativo sulla caratteristica sta nel segmento $O X_1$ la condizione di Weierstrass è apparentemente violata; però il vincolo impone che sia $x > S u$: quindi si deve considerare la caratteristica come troncata nel punto di funzionamento, sicché la condizione di Weierstrass è rispettata ⁽⁶⁾. Il tratto LQ e la prosecuzione della traiettoria si svolgono con $x = x_2$.

⁽⁵⁾ I rami di traiettorie al di sotto della linea c' , ossia nel campo x_2 della fig. 2, comportano una certa perdita dovuta allo sfruttamento parziale della portata: tuttavia sono traiettorie ottime qualora, ad un tempo definito $< t(Z)$, si debba portare il serbatoio ad un livello prossimo a quello di bassa marea.

⁽⁶⁾ Situazioni del genere possono presentarsi in tutti i casi di vincolo « olonomo » ossia costituente un legame fra le variabili senza intervento delle derivate. Nell'esame di questi casi, nella nota [79], si suggeriva di includere la condizione eventuale, qui la $y - u = 0$, nell'espressione di F con un apposito moltiplicatore. Questo entra allora nella (25) che ne determina il valore, sussistendo la (26). Siccome, inoltre, per i punti P, Q di transizione esiste il vincolo $y - u = 0$, nelle corrispondenti (8) intervengono moltiplicatori μ ; la continuità di λ attraverso la giunzione non sussiste, la traiettoria può proseguire lungo la linea h con il valore di λ dettato dalla (26) e può proseguire indipendentemente nella prossima fluttuazione.

9. Traiettorie estremali e ottimali.

Le condizioni menzionate nel § 6 valgono ad individuare le soluzioni « estremali »: in questa denominazione si comprendono le traiettorie di massimo, di minimo e quelle eventuali atte solo ad annullare la variazione prima della quantità in oggetto: sulla definizione di detta quantità, si è visto che esiste una certa libertà di scelta, priva d'influenza su questo passo dell'analisi: è perciò naturale che esso non assicuri le proprietà di ottimo della soluzione.

Con la condizione del § 7 si entra nella scelta di ottimo, minimo o massimo a seconda del problema. La funzione di Weierstrass fornisce una misura della perdita a cui si va incontro deviando dal cammino indicato, come è mostrato nella discussione relativa all'equazione (11).

In queste considerazioni appare più netta la differenza fra le variabili y le cui derivate entrano nelle (1) e le x le cui derivate non vi figurano. Per le x si ammettono salti di valori, mentre per le y salti sono ammessi solo nelle derivate $\dot{y}$. Pertanto nella (6) e, di conseguenza, nelle condizioni (7) per i punti terminali e nelle (8) per le giunzioni, potranno sopraggiungere variazioni nelle x quando siano dettate dalle necessità delle (1), (4), (5). Così, nel porre le condizioni (10) per le deviazioni da introdurre nelle (9) sono considerate le quantità x^* come le $\dot{y}^*$. Poiché queste deviazioni sono di qualunque entità purché ammesse dalle (10), l'esplorazione delle proprietà di ottimo è a questo riguardo ampia. Così, nel problema I si è visto che la disseminazione ha inizio con un valore rilevante di x se la caratteristica di fig. 1 (a) presenta su un largo tratto iniziale una scarsa efficienza. La stessa affermazione è emersa per l'impiego della turbina nello sfruttamento delle maree: il tratto utilizzato della caratteristica è l'arco KM di fig. 2 (a). Con una caratteristica poligonale, come quella della fig. 3 (a) può risultare che le situazioni di impiego ottimo si concentrino in corrispondenza dei vertici.

È particolarmente suggestivo l'intervento dei moltiplicatori nelle scelte decisionali. In ciascun problema si presenta un diagramma caratteristico, del quale la condizione di Weierstrass esige la convessità: ove il diagramma presentasse concavità, il filo conduttore la scavalcherebbe, come s'è visto nella fig. 1 (a): un moltiplicatore o un rapporto di moltiplicatori stabilisce la pendenza della tangente nel punto di funzionamento e così indica il cammino ottimo. Nei problemi strutturali di minimo peso per assegnata rigidità, il grafico è quello che lega questo a quello: così, nel problema V , di minimo peso per una trave tubulare di assegnata frequenza torsionale, il rapporto fra incremento di peso w e di rigidità R (qui scritto come rapporto fra le derivate w', R') è definito dal moltiplicatore λ_1 secondo la (40): ne consegue la proporzionalità fra il gradiente dell'angolo di torsione e il valore $\sqrt{w'/R'}$ secondo le (42). Nei problemi di volo ottimo si presentano due grafici siffatti [77], [79]: uno di essi è la caratteristica di spinta del propulsore in funzione del consumo,

l'altro lega la portanza del velivolo alla resistenza aerodinamica.

Il « test » di Weierstrass, convenientemente usato, si è mostrato uno strumento poderoso nella costruzione delle traiettorie ottime formate da differenti archi e dotate di varie accidentalità. Al riguardo si osserva che il tracciamento del campo di traiettorie dà una chiara visione di queste transizioni e singolarità ed è perciò opportuno effettuarlo, almeno nell'intorno della traiettoria in esame anche quando il tema della ricerca non lo esiga. Inoltre questa illustrazione dei risultati ha importanza per rivelare i minimi relativi: si trovano infatti talora zone del campo per le quali a date posizioni dei punti terminali corrispondono più percorsi, tutti verificanti le condizioni menzionate per le traiettorie ottime. Allora la scelta dovrà farsi per confronto dei risultati. Alcuni esempi di tali situazioni sono presentati nella nota [79]. Purtroppo questa indagine è assai laboriosa: essa richiede, per la visione completa, una rappresentazione in uno spazio a $n - l$ dimensioni, male surrogata da eventuali sezioni piane. Per i problemi I-IV si sono presentati i campi piani di estremali: per il problema V (dove $n - l = 3$) si è indicato un procedimento analitico-numerico atto a rivelare l'intersezione di cammini contigui che si presenta sul contorno delle regioni a copertura multipla di estremali.

Ulteriori difficoltà si presentano nei problemi in cui la posizione dei punti terminali può essere variata. Se la posizione di un estremo si può far dipendere da un solo parametro, la prova della proprietà di ottimo per il cammino estemale si ottiene facilmente: detto ε_1 il parametro, $\varepsilon_1 = 0$ essendo la posizione del presunto minimo di g , si calcolerà la quantità $(1/\varepsilon_1) (\partial g / \partial \varepsilon_1)$ per un valore positivo e uno negativo di ε_1 , relativamente piccoli: i valori ottenuti debbono essere poco diversi e positivi. Se la posizione del terminale dipende dai due parametri $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, per due valori di segno opposto di ε_2 si ricercano i valori per cui $\partial g / \partial \varepsilon_1 = 0$ (mediante interpolazione fra punti dove ε_1 ha segni opposti, calcolando $\partial g / \partial \varepsilon_1$) e in questi si calcola la quantità $(1/\varepsilon_2) (\partial g / \partial \varepsilon_2)$: questa, come $(1/\varepsilon_1) (\partial g / \partial \varepsilon_1)$, deve essere positiva. L'estensione del procedimento ad un maggior numero di parametri è indicata nel § 9.4 del testo [80]. Per il calcolo delle dette derivate si usa l'espressione (6) come è fatto a proposito della relazione (23).

Come esempio di applicazione di questi concetti, si esaminerà il problema II per le traiettorie con punto iniziale fisso in A e punto terminale Z libero sulla curva h (fig. 3 *). La traiettoria $A \rightarrow B \rightarrow Z$ è stata indicata come soluzione di ottimo. Per provare questo si considera un percorso $A \rightarrow B' \rightarrow C'$ terminante sulla stessa linea per $t = t' < t^z$, $u = u'$. La (23) può essere scritta nella forma (7)

$$dW = -\lambda S du' + \lambda S dy' dt' \quad (h)$$

poiché è $N = 0$ nel punto terminale dove il salto

(7) Gli incrementi δ arbitrari come figurano nella (6), quando dipendono da un solo parametro si segnano con d : i loro rapporti sono derivate totali.

si annulla ($y = u'$). Il moltiplicatore λ è dato dall'equazione (g): quindi, posto $\Delta' = u(B') - u'$ si ha

$$\begin{aligned} dW/k_1 dt' &= \\ &= \Delta' (S \dot{u}' + x_1 + x_b) x_1 / (x_1 + x_b) \end{aligned} \quad (i)$$

essendo $\dot{u}' = du'/dt'$ la velocità di accrescimento del livello di marea, funzione nota di t' . La quantità (i) è positiva, come deve essere all'accostarsi ad un massimo. Per una traiettoria $A \rightarrow B'' \rightarrow C''$ terminante sulla linea h per $t = t'' > t^z$, $u = u''$, l'equazione (h) si semplifica perché nell'ultimo tratto della traiettoria è $\dot{y} = 0$. Si ha dunque

$$\begin{aligned} dW/k_1 dt'' &= \Delta'' S \dot{u}'', \\ \Delta'' &= u(B'') - u'' \end{aligned} \quad (j)$$

quantità negativa: dunque è provata la proprietà di ottimo della soluzione $A \rightarrow B \rightarrow Z$. Infatti, assumendo $g = -W$, $\varepsilon_1 = \Delta$ e osservando che $d\Delta/dt < 0$ sia per $\Delta = \Delta'$ sia per $\Delta = \Delta''$ risulta $\partial g / \partial \varepsilon_1 \partial \varepsilon_1 > 0$ ad ambedue i lati della soluzione $A \rightarrow B \rightarrow Z$.

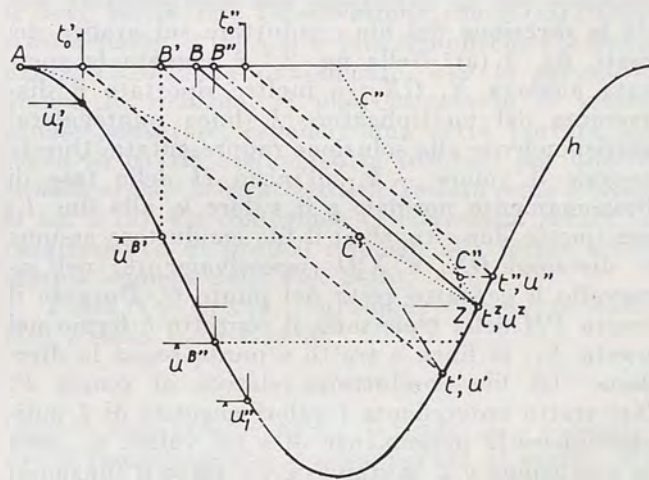


Fig. 3* - Confronto di traiettorie vicine alla $A \rightarrow B \rightarrow Z \rightarrow h$ di ottimo assoluto per lo sfruttamento di marea.

10. Utilizzazione ottima delle maree come problema di minimo ordinario.

È interessante confrontare questi risultati con quelli che si ottengono con la teoria dei minimi ordinaria. Si stabilisce per questo di sfruttare il ciclo di marea in una sola fase di lavoro, con l'erogazione massima x_1 , partendo dal livello massimo di marea: resta così un solo parametro da cui dipende la quantità

$$W = k_1 x_1 \int_{t_0}^{t'} (y - u) dt \quad (l)$$

In questa si esprime la quota y nella forma

$$y = u_0 - (t - t_0) x_1 / S \quad (m)$$

dove u_0 è il livello massimo di marea e t_0 il valore di t dal quale inizia il funzionamento, che cessa per $t = t'$ quando $y = u' = u_0 - (t' - t_0) x_1 / S$. Derivando rispetto a t' questa relazione si ha

$$S\dot{u}'/x_1 = dt_0/dt' - 1 \quad (n)$$

Dalla espressione integrale (l), derivando sotto il segno rispetto a t_0 con la (m) si ha

$$\begin{aligned} dW/k_1 x_1 dt_0 = \\ = u'_1 - u_0 + (t' - t_0) x_1/S = u'_1 - u' \end{aligned}$$

essendo u'_1 il valore di u per $t = t_0$. Quindi facendo uso della (n) si ha

$$dW/k_1 x_1 dt' = (u'_1 - u') (S\dot{u}' + x_1) \quad (p)$$

Questa espressione vale anche per $t = t''$. Si ritrova quindi la soluzione ottima corrispondente all'inizio del funzionamento per un livello di marea $u(B)$ pari a quello finale: con questa scelta è $dW/dt' = 0$: inoltre questa derivata è negativa per inizio ritardato e positiva per inizio anticipato, come si richiede per la soluzione ottima. Peraltro, il confronto dell'espressione (p) con le (i), (j) permette di confrontare i risultati dei metodi diretto e indiretto per situazioni di ottimo vincolato. Si nota al riguardo che l'espressione data dalla (i) indica un valore di dW/dt' più piccolo di quello dato dalla (p): ciò perché il valore $u(B')$ che entra in Δ' è minore del valore u'_1 nella corrispondente parentesi in (p) e in più, perché il successivo fattore in (i), dipendente dalle quantità positive $S\dot{u}'$, x_1 , x_b ha valore minore di $S\dot{u}' + x_1$. Ciò è vero per ogni $t' < t^z$. Quindi il funzionamento suggerito dall'analisi variazionale, pur comportando lo scarico inattivo della portata x_b , fornisce maggiore energia che il funzionamento a piena utilizzazione per pari valore del tempo finale (ossia quando si debba interrompere la manovra ad un dato istante $t' < t^z$). Similmente, per la manovra che cessa al tempo $t'' > t^z$, il valore dato dalla espressione (j), negativo come quello $(u''_1 - u'')$ $(S\dot{u}'' + x_1)$ dato dalla corrispondente (p) ha minor valore assoluto che questo secondo perché $u''_1 < u(B'')$ e a causa del minor fattore. Quindi il funzionamento suggerito dall'analisi variazionale, pur comportando l'arresto della turbina anticipato, risulta più vantaggioso che il funzionamento ininterrotto per pari livello finale (ossia quando insufficiente profondità del serbatoio non permetta di sfruttare il salto corrispondente alla massima utilizzazione) ⁽⁸⁾.

11. Considerazioni generali.

I problemi sopra accennati, trattati insieme con altri nella nota che segue mediante i «metodi indiretti» del Calcolo delle Variazioni, per la loro semplicità d'espressione analitica si presterebbero alla risoluzione con i «metodi diretti» che li riconducono alla ricerca del minimo di una funzione di pochi parametri. Si è visto, ad esempio, come la soluzione ottima per l'utilizzazione del ciclo di

⁽⁸⁾ Naturalmente, se tale limitazione di profondità del serbatoio non sussistesse, arrivati in C'' converrebbe continuare a erogare potenza: ciò vorrebbe dire che si è seguita una traiettoria errata, per aver tardato nell'inizio del funzionamento rispetto al punto B che avrebbe dato il massimo sfruttamento.

marea senza vincoli d'estremità salvo quello stabilito dal livello di marea, si ottenga con un calcolo immediato. Si deve però osservare che la soluzione sviluppata con il conforto del «test» di Weierstrass, il quale in ogni punto della traiettoria garantisce che non esista una deviazione che assicuri migliori risultati, offre garanzie che mancano all'altra via. Infatti, la riduzione del numero di parametri dai quali la soluzione si fa dipendere lascia il dubbio, specialmente vivo nei problemi più complessi, che la traiettoria così coartata possa scostarsi dall'ottimo. Come s'è visto, a proposito dello stesso problema, con il funzionamento interrotto ad un tempo antecedente a quello del punto Z o ad un livello superiore a quello dello stesso punto, il cammino, a prima vista vantaggioso, dell'impiego continuo della massima erogazione non è quello di migliore sfruttamento del salto. A parte queste incertezze nell'intuitiva impostazione ad un parametro, che possono essere superate con lieve aumento di complicazione, altre possono presentarsi, di laboriosa eliminazione: sempre per lo stesso problema, se lo sfruttamento del salto fosse effettuato da diverse utenze con differenti rendimenti, mentre ancora il test di Weierstrass indica sempre la via ottima in base alla direzione della tangente alla caratteristica complessiva, il calcolo discretizzato esige un esame concettualmente più complesso ⁽⁹⁾.

È necessario rilevare un sostanziale ostacolo all'impiego dei metodi indiretti: il problema di integrazione, sia pure unidimensionale, non pone condizioni solo per i valori iniziali della traiettoria, ma stabilisce condizioni su ambedue gli estremi. Mentre per il caso in cui le condizioni richieste si riferiscano solo ad un estremo esistono algoritmi facilmente programmabili per la costruzione della soluzione, nei problemi qui in esame il calcolo per questa via ha il carattere di tentativo. Così ad esempio, per il problema I ciascuna traiettoria è definita da un valore del moltiplicatore λ_2 che marca l'inizio della disseminazione: nel problema II si stabilirà l'inizio del funzionamento nei punti B' o B'' della fig. 3 e corrispondentemente si fissa λ , o viceversa: così in ogni caso si formulano posizioni iniziali a definire la traiettoria. Si avrà dunque una «stella di estremali» in uno spazio a $n - l$ dimensioni: fra queste traiettorie si deve cercare quella che conduce al punto assegnato, se il problema è ad estremi fissi. Mentre in uno spazio a due o tre dimensioni quella ricerca è possibile (anzi, si è visto, è istruttiva circa le singolarità nel campo e in più offre specifiche garanzie

⁽⁹⁾ Certamente la dimostrazione della proprietà di ottimo per la traiettoria dipendente da più parametri è laboriosa: lo si constata già nel caso di un solo parametro a proposito della relazione (p), la cui deduzione è più immediata che quella delle (i), (j), ma non è elementare. Il cenno dato nel precedente § 9 per la funzione g dipendente dai due parametri ε_1 , ε_2 mostra le difficoltà crescenti. Nell'uso dei metodi diretti, se la prova di ottimo è affrontata, la complessità si moltiplica col crescere del numero dei parametri. Con i metodi indiretti, tali questioni si presentano per i problemi con estremi liberi e quindi con ridotti gradi di libertà. Con estesi sondaggi numerici di confronto fra soluzioni concorrenti si possono evitare difficoltà analitiche, affrontando quelle numeriche.

circa il carattere di ottimo assoluto per il risultato) per valori più alti di $n - l$ l'onere è proibitivo praticamente, anche per gli attuali strumenti di calcolo. Varie vie sono state proposte per superare questa difficoltà: alcune passano per la riduzione del sistema differenziale in equazioni algebriche (o piuttosto disequaglianze, per molti casi pratici), altre attuano sul sistema differenziale il concetto incrementale per soluzioni contigue. Non è oggetto della presente introduzione entrare in questo settore: si limitano queste considerazioni alla segnalazione di alcuni vantaggi che i metodi classici conservano pur in presenza dello sviluppo di programmazione delle vie alternative.

Infine si deve rilevare che l'ottimizzazione ha importanza differente nei diversi campi. Per quanto riguarda la progettazione delle strutture, la molteplicità delle situazioni a cui queste vanno incontro spesso può rendere inefficaci i suggerimenti dell'analisi variazionale. Ad esempio, si è rilevato nella nota [73] che la soluzione di minimo peso per il rivestimento di un'ala per la quale sia assegnata la più bassa frequenza di vibrazione torsionale può portare ad un cattivo progetto per riguardo alle armoniche più alte che prevalentemente intervengono nelle oscillazioni in presenza di vento. Ben

maggiore rilevanza presentano i suggerimenti di ottimizzazione per le traiettorie di volo, tanto più quanto maggiore sia il rapporto fra il peso di propellente che si consuma rispetto al peso utile. Queste considerazioni debbono essere tenute in conto nell'intraprendere un calcolo di ottimizzazione, per adeguarne il costo ai vantaggi ⁽¹⁰⁾. In ogni caso, però, un esame del problema, semplificato attraverso convenienti schematizzazioni fino a ridurlo a dimensioni accettabili per la rappresentazione dei risultati nelle forme indicate, può rivelare le accidentalità che la soluzione presenta. In tutti i problemi di Ingegneria si presentano ineguaglianze ossia limitazioni del campo in cui certe variabili possono spaziare: queste restrizioni comportano discontinuità nelle traiettorie. Gli strumenti presentati indicano la via da seguire per la traiettoria ottima. I risultati di questa analisi orientativa possono suggerire o meno un approfondimento dell'indagine in vista dei relativi costi e vantaggi.

⁽¹⁰⁾ Per il problema V, nella formulazione (37) si ha $n - l = 3$. La ricerca di un eventuale inviluppo di traiettorie è condotta nel relativo § 3 (fig. 5). Questa indagine può essere omessa se si è disposti ad accettare come soddisfacente una traiettoria di ottimo relativo senza che sia rigorosamente accertata la proprietà di ottimo assoluto.

Problemi di ottimo con soluzioni discontinue ⁽¹⁾

A proposito di problemi variazionali tratti dalle applicazioni tecniche si mostra come l'estensione dei concetti di Weierstrass ai campi di soluzioni discontinue conduca con facilità a conclusioni esaurienti.

Simboli e formule fondamentali.

Il problema di Mayer consiste nella determinazione di una curva $A-Z$ lungo la quale sono verificate equazioni differenziali della forma

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(y_j, x_k, \dot{y}_i) &= 0 \\ \alpha &= 1, \dots, m; \quad j = 0, \dots, n - l; \\ k &= 1, \dots, l; \quad i = 1, \dots, n - l; \end{aligned} \quad (1)$$

e i cui punti terminali rendono minima una funzione ⁽²⁾

$$g = h(y_j^Z) - h(y_j^A) \quad (2)$$

e al tempo stesso soddisfano a condizioni del tipo

$$\begin{aligned} \psi_\beta(y_j^A, y_j^Z) &= 0 \\ (\beta &= 1, \dots, p \leq 2(n - l) + 1) \end{aligned} \quad (3)$$

Le variabili y_i, x_k sono considerate funzioni della indipendente $y_0 = t$. Le derivate rispetto a t

sono indicate con punto sovrapposto. Le x sono variabili *non derivate*: ossia $\dot{x}_k$ non appare nelle (1).

Costruita mediante moltiplicatori $\lambda(t)$ la funzione ⁽³⁾ $F = \lambda_\alpha \varphi_\alpha$ si scrivono le equazioni di Eulero

$$\ddot{z}_j = \partial F / \partial y_j \quad (j = 0, 1, \dots, n - l) \quad (4)$$

dove

$$z_i = \partial F / \partial \dot{y}_i, \quad z_0 = -\dot{y}_i z_i \quad (i = 1, \dots, n - l)$$

Per le x , essendo nulle le quantità z , le equazioni di Eulero si riducono a

$$\partial F / \partial x_k = 0 \quad (k = 1, \dots, l) \quad (5)$$

Di estrema importanza è la relazione

$$(z_j \delta y_j)^A = (z_j \delta y_j)^Z \quad (6)$$

la quale lega le variazioni δy_j delle coordinate terminali dell'arco (*estremale*) lungo il quale le equazioni di Eulero sono soddisfatte. Immediate

⁽³⁾ I termini che contengono due volte lo stesso indice letterale sono da considerare preceduti dal segno di sommatoria estesa al campo di variazione di quell'indice.

conseguenze ne sono le condizioni di estremo per i punti terminali

$$(z_j + \partial G / \partial y_i)^Z = 0 = (z_j - \partial G / \partial y_j)^A \quad (7)$$

dove

$$G = g + \mu_\beta \psi_\beta$$

essendo μ^β moltiplicatori costanti. Anche dalla (6) derivano le condizioni alla giunzione di archi differenti

$$\Delta z_j = \mu_c (\partial \psi_c / \partial y_j^K) \quad (8)$$

dove μ_c sono moltiplicatori costanti, $\psi_c = 0$ sono condizioni imposte alle coordinate del punto K di giunzione nel quale sussistono le condizioni $\Delta y_j = 0$. Con Δ si indica l'incremento che una variabile subisce nel passaggio da un arco al successivo. Sempre dalla (6) si deducono le proprietà della espressione

$$E = z_i (\dot{y}_i - \dot{y}_i^*) \quad (9)$$

dove $\dot{y}_i^*$ sono quantità soggette solo a verificare, insieme con le x_k^* , le condizioni

$$q_a(y_j, x_k^*, \dot{y}_i^*) = 0 \quad (10)$$

Si distingueranno con asterisco le quantità calcolate per $x_k = x_k^*$, $\dot{y}_i = \dot{y}_i^*$.

È condizione necessaria (Weierstrass) perché una soluzione renda minimo il valore di g , che, ponendo nella (9) valori arbitrari delle $\dot{y}_i^*$ che verifichino le (10), in un punto qualsiasi dell'estremale, sia $E \geq 0$.

Nello spazio le cui coordinate ortogonali sono tutte le variabili del problema per le quali è $z_j \neq 0$, si costruisce una stella di estremali tracciando le soluzioni che hanno origine comune e che ivi hanno $z_h = -\partial h / \partial y_h$, essendo y_h una delle coordinate, tale che $\partial h / \partial y_h \neq 0$. Si costruisce quindi il campo formato dal sistema di stelle di estremali aventi le origini su una parallela all'asse y_h (sostegno). Si definisce così un sistema di valori locali per ciascun punto Z della regione coperta; fra questi è $g^Z = h^Z - h^A$ essendo $A-Z$ estremale del campo e A punto del sostegno. Sia $N-Z$ una qualsiasi curva ammissibile, ossia verificante le (10), interamente situata nel campo. Si ha

$$(g^*)_N^Z - (g)_N^Z = \int_N^Z E dt \quad (11)$$

la funzione E essendo calcolata in base ai valori locali e alle derivate $\dot{y}_i^*$ lungo l'arco $N-Z$ ed essendo $(g^*)_N^Z = h^Z - h^N$, $(g)_N^Z = g^Z - g^N$. In particolare dalla (11) risulta che se, avvicinandosi N ad un punto D del sostegno, si ha $g^N \rightarrow 0$ ⁽⁴⁾, qualora l'integrale (11) sia positivo per ogni cam-

⁽⁴⁾ Ciò avviene se il campo è semplicemente coperto presso il sostegno.

mino ammissibile $D-Z$, rimane stabilito che l'estremale che fa capo a Z rappresenta la soluzione ottima per il problema a punti terminali fissi ⁽⁵⁾. La proprietà si estende a campi di soluzioni discontinue, se E è così costruita da abbracciare tutti gli archi componenti. Anche se E si annulla su archi (singolari) d'estremale, la differenza a primo membro della (11) può provarsi positiva per ogni variante di percorso. La prova è conclusiva quando il campo sia semplicemente coperto. L'esplorazione geometrica del campo rivela le soluzioni estremanti multiple: fra queste la (11) permette di effettuare i necessari confronti. In appoggio a quella esplorazione può usarsi un controllo numerico che denuncia l'esistenza di intersezioni fra elementi adiacenti della stessa famiglia (e quindi di involuppi); il procedimento è indicato nel seguito, a proposito dell'esempio V.

Per i problemi a punti terminali variabili, ossia quando per quei punti esista un certo numero $s = 2(n-l) + 1 - p$ di gradi di libertà, si richiede un'analisi supplementare che può essere condotta con un procedimento basato sulla introduzione di vincoli fittizi gradualmente soppressi. Per $s = 2$ esso comporta le seguenti operazioni: definiti i parametri $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ in modo che ad ogni coppia di valori corrisponda una posizione dei punti terminali, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ essendo la posizione per cui le (7) sono soddisfatte, si calcola $d_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_1}$ per $\varepsilon_2 = 0$, e $d_2 = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_2}$ per $\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_1} = 0$; l'ottimo rimane provato se $d_1, d_2 > 0$.

I. Distribuzione ottima di una data scorta di materiale localmente attivo.

Fite [2] tratta un problema di questa categoria, riferentesi alla migliore ripartizione di una data disponibilità di insetticida su una coltivazione infestata da insetti. Si suppone fissato il percorso $A-Z$ seguito per spargere l'insetticida e lungo di questo si misura coordinata t . Si conosce la distribuzione $v(t)$ di insetti e si vuole determinare la ripartizione $x(t)$ di veleno, la cui disponibilità è

$$J = \int_A^Z x dt \quad (12)$$

conoscendone l'effetto locale espresso da un fattore $S(x)$ e sapendo che l'effetto totale da massimizzare è rappresentato da

$$M = \int_A^Z w S dt \quad (13)$$

Indicando con y, W gli integrali indefiniti che nelle (12) e (13) si estendono all'intervallo $A-Z$, scriviamo

$$F = \lambda_1 (\dot{W} - wS) + \lambda_2 (x - \dot{y}) \quad (14)$$

$$g = W^A - W^Z, \quad J = y^Z - y^A \quad (15)$$

⁽⁵⁾ Per tale caso, $p = 2(n-l) + 1$ condizioni fissano altrettante coordinate dei punti terminali.

archi in cui il punto rappresentativo si trova ai limiti I o T (variabili col salto) della curva di potenza. Si deve però osservare che, se l'afflusso di acqua alla turbina può essere chiuso arrestando il gruppo, anche il punto O ($x = N = 0$) deve considerarsi come appartenente alla caratteristica. Di conseguenza, qualora il gruppo operasse in corrispondenza di un punto qualsiasi dell'arco $I-K$ (K essendo il punto di contatto della tangente per O) si verrebbe a violare la condizione di Weierstrass. Inoltre si osserva che se attraverso un condotto di scarico una certa portata x_b può effluire senza passare attraverso la turbina, la caratteristica del gruppo si viene a modificare, potendo essa traslarsi della ascissa x_b . Perciò le situazioni in cui il gruppo può operare in condizioni tali da dare $E \geq 0$ sono rappresentate dalla linea $O-K-M-M'-T'$. Quanto all'arco $M'-T'$ ottenuto per traslazione da $M-T$, si rileva che, esistendo di solito

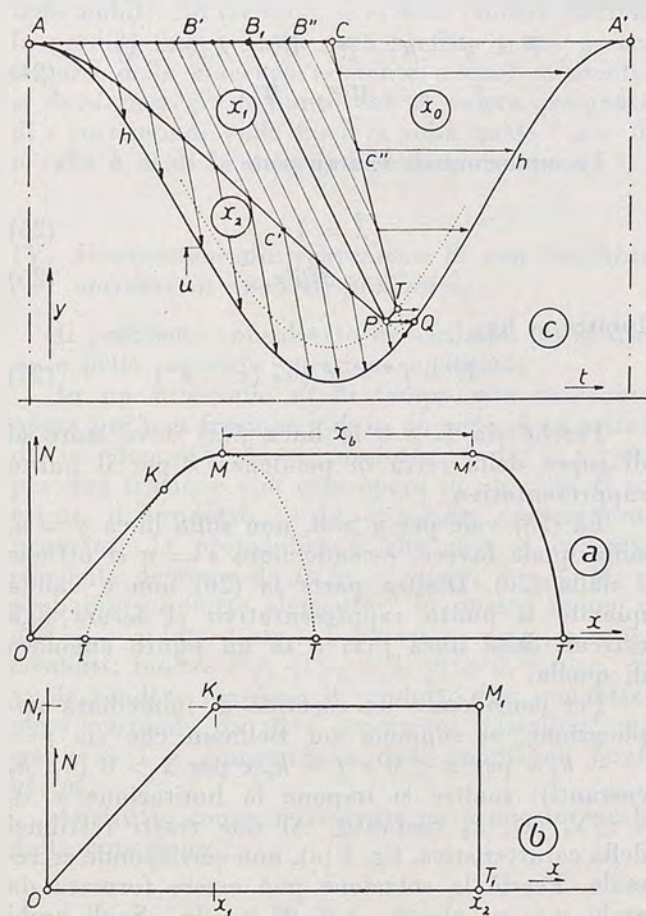


Fig. 2 - Utilizzazione idraulica delle maree.

(a) caratteristica portata-potenza - (b) caratteristica schematizzata - (c) soluzioni ottime a punto terminale fisso.

un limitatore di portata che non permette di spingere il funzionamento della turbina fino all'annullamento della potenza ma lo interrompe prima che la curva $N(x)$ mostri una diminuzione nelle sue ordinate, in realtà l'ultimo arco della caratteristica è un segmento normale all'asse delle portate. Inoltre, siccome la variazione di rendimento in prossimità della zona di massima potenza è esigua, l'arco $K-M$ della curva originaria si scosta assai poco dalla

direzione $O-K$. In definitiva la caratteristica può essere rappresentata mediante il trapezio $O-K_1-M_1-T_1$ della fig. 2 (b). I valori x_1 , x_2 e $k = N_1/x_1$ definiti in figura sono funzioni del salto.

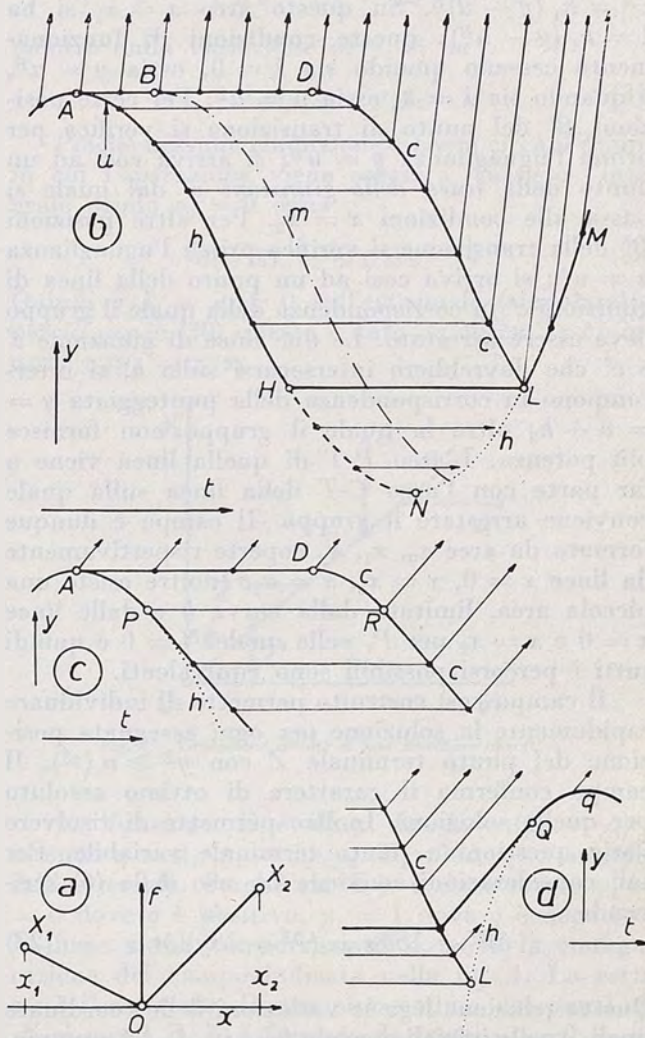


Fig. 3 - Regolazione ottima della produzione sotto domanda fluttuante.

(a) caratteristica della eccedenza di costo per variazione di produttività - (b), (c), (d) soluzioni ottime per punto terminale fisso.

Al tratto $O-K_1$ si trova facilmente che non corrisponde estrema singolare. Per il tratto K_1-M_1 questo sarebbe dato dalla condizione $\partial N_1 / \partial y = 0$ che potrebbe definire una linea $y - u = \text{costante}$, ove N_1 non avesse andamento monotono, come di solito succede. Restano perciò i funzionamenti: $x = 0$ (gruppo fermo), $x = x_1$ (gruppo operante a massima potenza), $x = x_2$ (gruppo a massima potenza, scarico simultaneo). Qui la ricerca potrebbe essere condotta coi procedimenti dell'ordinaria teoria dei minimi. Tuttavia molto opportunamente si può procedere alla costruzione del campo nel piano t, y facendo uso delle equazioni sopra indicate.

Nella fig. 3 (c) è indicato il tracciato nella ipotesi che sia $k = k_1(y - u)$ per $y - u > k_2$, $k = 0$ per $y - u < k_2$, essendo k_1, k_2, x_1, x_2 costanti. L'origine viene situata sul vertice A della curva h dei livelli di marea $u(t)$, condizione iniziale ovvia-

mente ottima ⁽⁸⁾. Da un punto qualsiasi B del tratto $A-C$ di linea $x = 0$ (dove C corrisponde al minimo del diagramma h) può dipartirsi un arco $x = x_1$: basta assumere per il moltiplicatore λ^A (che rimane costante sulla linea $x = 0$) il valore $\lambda^A = k_1 (y - u)^B$. Su questo arco $x = x_1$ si ha $\lambda = k_1 (y - u^B)$; queste condizioni di funzionamento cessano quando sia $\lambda = 0$, ossia $y = u^B$, o quando sia $\lambda = k$, ossia $u = u^B$. Per certe posizioni B' del punto di transizione si verifica per prima l'uguaglianza $y = u^B$; si arriva così ad un punto della linea delle giunzioni c' dal quale si passa alle condizioni $x = x_2$. Per altre posizioni B'' della transizione si verifica prima l'uguaglianza $u = u^B$; si arriva così ad un punto della linea di giunzioni c'' in corrispondenza della quale il gruppo deve essere arrestato. Le due linee di giunzione c' e c'' che dovrebbero intersecarsi sulla h , si interrompono in corrispondenza della punteggiata $y = u + k_2$ oltre la quale il gruppo non fornisce più potenza. L'arco $P-T$ di quella linea viene a far parte con l'arco $C-T$ della linea sulla quale conviene arrestare il gruppo. Il campo è dunque formato da aree x_0, x_1, x_2 coperte rispettivamente da linee $x = 0, x = x_1, x = x_2$. Inoltre esiste una piccola area, limitata dalla curva h e dalle linee $x = 0$ e $x = x_2$ per P , nella quale $N = 0$ e quindi tutti i percorsi possibili sono equivalenti.

Il campo così costruito permette di individuare rapidamente la soluzione per ogni assegnata posizione del punto terminale Z con $y^Z \geq u(t^Z)$. Il campo conferma il carattere di ottimo assoluto per quelle soluzioni. Inoltre permette di risolvere varie questioni a punto terminale variabile. Per tali considerazioni conviene far uso della (6) scrivendo

$$\delta W + \lambda \delta y = (N + \lambda S \dot{y}) \delta t. \quad (23)$$

Questa relazione lega le variazioni delle coordinate finali, quelle iniziali essendo fisse in A . Ad esempio, se si assegna t^Z ma non il corrispondente livello nel serbatoio, la soluzione ottima si ha nella intersezione della linea $t = t^Z$ con la c' , per $t^Z < t^P$. Infatti, quando t è fissato, dalla (23) si ha $\delta W / \delta y = -\lambda S$. Questa derivata assume valori positivi al di sotto e negativi al di sopra di quella intersezione che perciò fornisce l'ottimo ricercato. L'energia ricavata cresce con t^Z finché si arriva al punto P . Infatti dalla (23), indicando con W^Z il massimo di W ottenuto per un assegnato t^Z , si deduce $dW^Z/dt^Z = N$. Oltre il punto P questa derivata si annulla. Il massimo ricavo di energia si ha dalla soluzione $A - B_1 - P$. Successivamente tale valore non può essere superato; se il ciclo deve ripetersi, il bacino può essere posto in comunicazione col mare in qualsiasi momento.

Il problema per il caso in cui diversi turboalternatori possono lavorare in parallelo venne preso in considerazione da Faedo [4] che affrontò varie questioni di esistenza. Il procedimento qui indicato

⁽⁸⁾ A meno che il gruppo possa invertire il suo funzionamento pompando acqua nel bacino, che allora potrebbe convenire, almeno in linea teorica, invasare acqua ad un livello maggiore durante l'alta marea.

mostra che la soluzione non differisce per nulla dal caso precedente: i gruppi dovranno essere tutti fermi o operare simultaneamente.

III. Massimo profitto dalla domanda fluttuante di un prodotto commerciale.

Bellman [5] analizzò un problema che presenta qualche analogia col precedente:

Sia u la fluttuazione della vendita, funzione nota del tempo t , e y la fluttuazione della produzione, che si vuole mantenere $\geq u$ con la condizione di rendere minime le perdite W in un certo intervallo di tempo: queste si considerano rappresentate da una spesa derivante dal prodotto inventato, espressa da $\int (y - u) dt$ e, in più, dalla spesa provocata dalla variazione di capacità di produzione, rappresentata da $\int f dt$ dove f è una funzione sempre positiva di tale variazione $x = \dot{y}$. Si scrive quindi

$$\begin{aligned} F &= y - u + f - \dot{W} + \lambda (\dot{y} - x) \\ g &= W^Z - W^A. \end{aligned} \quad (24)$$

Le equazioni di Eulero sono

$$\dot{\lambda} = 1 \quad (25)$$

$$\lambda = df/dx. \quad (26)$$

Inoltre si ha

$$E = f^* - f + \lambda (x - x^*). \quad (27)$$

Perché sia $E \geq 0$ la linea $f(x)$ deve stare al di sopra della retta di pendenza λ per il punto rappresentativo.

La (25) vale per $y > u$, non sulla linea $y = u$, sulla quale invece, essendo noto $x = \dot{u}$ si ottiene λ dalla (26). D'altra parte la (26) non è valida quando il punto rappresentativo si ferma agli estremi della linea $f(x)$ o in un punto angoloso di quella.

Per considerare un esempio di immediata applicazione, si suppone col Bellman che sia $f = -k_1 x$ per $x < 0$ e $f = k_2 x$ per $x > 0$ (k_1, k_2 costanti); inoltre si impone la limitazione $x_1 \leq x \leq x_2$ (x_1, x_2 costanti). Ai due tratti rettilinei della caratteristica, fig. 3 (a), non corrisponde estremo. Perciò la soluzione può essere formata da archi $y = u, x = x_1, x = 0, x = x_2$. Sugli archi $y = u$ sarà $\lambda = -k_1$ per $\dot{u} < 0$ e $\lambda = k_2$ per $\dot{u} > 0$. Considerando il punto angoloso nel vertice O della caratteristica come caso limite di un raccordo continuo, si nota che nei punti dove $\dot{u} = 0$, λ si può ritenere assuma ogni valore compreso fra $-k_1$ e k_2 . Analogamente, dove $\dot{u}$ raggiunge il valore limite x_2 , λ può passare a qualunque valore $> k_2$; dove $\dot{u}$ raggiunge x_1 , si può assegnare a λ qualsiasi valore $< -k_1$.

La configurazione del campo è indicata nella fig. 3 (b) per il caso in cui sia sempre $x_1 < \dot{u} < x_2$. I tratti $x = 0$ coi quali dal ramo discendente della curva h che rappresenta $u(t)$ si passa alla linea di giunzioni c , hanno tutti lunghezza uguale a

$k_1 + k_2$; infatti lungo di essi vale la (25), mentre $\lambda = -k_1$ sul ramo discendente della h , $\lambda = k_2$ nel passaggio alla linea $x = x_2$ che si stacca dai punti della c . Quest'ultima interseca il ramo ascendente della h in un punto L che individua il ponte $H-L$, collegamento ottimo fra i due rami della h situati al di sopra di esso. La fig. 3 (c) illustra il caso in cui $\dot{u} < x_1$ sull'arco punteggiato della h che ha inizio in P . Da P parte una linea $x = x_1$ dalla quale si può deviare in qualsiasi punto per seguire una linea $x = 0$. Nella fig. 3 (d), sul tratto punteggiato della h che termina in Q si ha $\dot{u} > x_2$; in questo caso il ponte che fa capo ad L perde il suo valore, il collegamento comune per tutti i cammini che si incanalano lungo il ramo $Q-q$ essendo fornito dalla linea $x = x_2$ tangente alla h in Q . Mediante questo campo resta provata la proprietà di ottimo delle soluzioni indicate, per qualsiasi punto terminale nella regione coperta. Inoltre possono risolversi problemi a punto terminale mobile. Ad esempio, se si deve rendere minima la perdita fino ad una data prefissa senza preoccuparsi della giacenza esistente a quel momento, si deve ricercare il punto che al valore assegnato di t corrisponde sulla linea m sulla quale è $\lambda = 0$, o sulla h al di là della intersezione con la m .

IV. Destinazione più conveniente di una macchina operante in due cicli produttivi.

Il problema considerato da Bellman [6] si traduce nella seguente questione analitica:

In un intervallo dt di tempo una macchina opera per una frazione $\gamma_1 dt$ in un ciclo A ed estrae da un deposito y_1 un prodotto $-dy_1 = \gamma_1 r_1 dt$; per una frazione $\gamma_2 dt$ essa opera in un ciclo B ed estrae il prodotto $-dy_2 = \gamma_2 r_2 dt$; contemporaneamente la probabilità p che essa si conservi efficiente decresce di $dp = -p(q_1 \gamma_1 + q_2 \gamma_2) dt$; il probabile prodotto elementare in questo tempo è $dW = -p(dy_1 + dy_2)$. I fattori r_1, r_2, q_1, q_2 sono costanti; inoltre è $\gamma_1 + \gamma_2 = 1$, $\gamma_1 \geq 0, \gamma_2 \geq 0$. Si vuole rendere massimo il prodotto che può ottenersi partendo da date condizioni iniziali y_1^A, y_2^A con $p = 1$ e giungendo a date condizioni finali y_1^Z, y_2^Z .

Anzitutto conviene ricavare un primo integrale dalla equazione

$$\frac{\dot{p}}{p} = \frac{q_1}{r_1} \frac{\dot{y}_1}{y_1} + \frac{q_2}{r_2} \frac{\dot{y}_2}{y_2}$$

la quale fornisce

$$p = (y_1/y_1^A)^{\alpha_1} (y_2/y_2^A)^{\alpha_2} \quad (28)$$

essendo $\alpha_1 = q_1/r_1, \alpha_2 = q_2/r_2$. Si scrive perciò

$$\begin{aligned} F &= \dot{W} + p\dot{y}_1 + p\dot{y}_2 + \\ &+ \lambda_1 (\dot{y}_1 + \gamma_1 r_1 y_1) + \lambda_2 (\dot{y}_2 + \gamma_2 r_2 y_2) \quad (29) \\ g &= W^A - W^Z \end{aligned}$$

considerandosi come variabili dipendenti y_1, y_2, W

e la non derivata γ_1 . Le equazioni di Eulero per $y_1 = y_1, y_2$ rispettivamente sono

$$\dot{\lambda}_1 + \dot{p} = \lambda_1 r_1 \gamma_1 + (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) (\partial p / \partial y_1) \quad (30)$$

$$\dot{\lambda}_2 + \dot{p} = \lambda_2 r_2 \gamma_2 + (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) (\partial p / \partial y_2)$$

mentre dalla variazione di γ_1 si ha

$$\lambda_1 r_1 \gamma_1 = \lambda_2 r_2 \gamma_2 \quad (31)$$

Poiché nessuna condizione è posta circa il tempo in cui l'operazione viene eseguita, sussiste l'integrale primo $z_0 = 0$ ossia

$$\lambda_1 r_1 \gamma_1 y_1 + \lambda_2 r_2 \gamma_2 y_2 = 0 \quad (32)$$

Quindi è $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ sull'estremale (singolare) e perciò per le (30) questo è dato da $\partial p / \partial y_1 = \partial p / \partial y_2$ ossia $y_1/y_2 = \alpha_1/\alpha_2$.

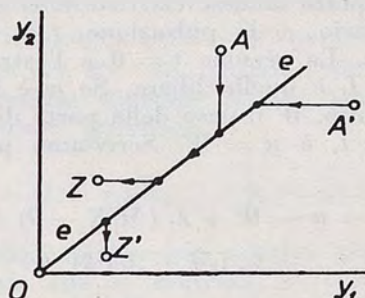


Fig. 4 - Conduzione ottima di una macchina operativa.

La funzione E è data da $E = (\gamma_1^* - \gamma_1) q$ essendo $q = \lambda_1 r_1 y_1 - \lambda_2 r_2 y_2$. Il valore q si annulla sull'estremale. Perché sia $E \geq 0$ deve essere $\gamma_1 = 0$ dove q è positivo, $\gamma_1 = 1$ dove q è negativo. In base a tali considerazioni si trova la configurazione del campo indicata nella fig. 4. La retta $e-e$ è l'estremale. Il cammino ottimo dai punti A, A' ai punti Z, Z' è formato da tratti $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$ e tratti d'estremale. Lungo le linee $\gamma_1 = 0$ è $\dot{y}_1 = 0, \lambda_2 = 0$ e inoltre

$$\dot{q} = \left(\frac{\alpha_1}{y_1} - \frac{\alpha_2}{y_2} \right) p r_1 y_1 \dot{y}_2 \quad (33)$$

mentre sulle $\gamma_2 = 0$ è $\dot{y}_2 = \lambda_1 = 0$ e

$$\dot{q} = \left(\frac{\alpha_1}{y_1} - \frac{\alpha_2}{y_2} \right) p r_2 y_1 \dot{y}_2 \quad (34)$$

Osservando che il fattore in parentesi nelle (33) e (34) è positivo al di sopra e negativo al di sotto dell'estremale $e-e$, si constata che la condizione $E \geq 0$ è soddisfatta sulle traiettorie indicate dalla fig. 4.

V. Strutture di minimo peso soggette a condizioni concernenti gli autovalori.

Un esempio tipico di questa classe di problemi è il progetto di una trave di minimo peso le cui oscillazioni torsionali libere è prescritto che raggiungano una data frequenza. Il problema è stato trattato in una nota precedente [7], con procedi-

mento differente; qui si introdurrà una prescrizione addizionale, fissando un limite inferiore per le rigidità torsionali; inoltre si controllerà la proprietà di minimo di soluzioni particolari.

1. — La trave resista a torsione secondo la teoria di St. Venant ed abbia asse elastico rettilineo sul quale siano disposti i centri di massa di ogni sezione. In tal caso la trave potrà effettuare vibrazioni torsionali secondo le equazioni

$$M = R\dot{\vartheta} \quad (35)$$

$$\dot{M} + J\omega^2\vartheta = 0 \quad (36)$$

nelle quali M è il momento torcente, R la rigidità torsionale, ϑ l'angolo di torsione, J il momento d'inerzia rispetto all'asse elastico della massa d'un tronco unitario, ω la pulsazione, t la coordinata lungo l'asse. La sezione $t = 0$ è l'estremità vincolata, $t = L$ è quella libera. Se w è il peso del tronco unitario, $\bar{W}$ il peso della parte di trave fino alla sezione t , è $w = \bar{W}$. Scriviamo perciò $g = \bar{W}^Z$ e

$$F = w - \bar{W} + \lambda_1 (M/R - \dot{\vartheta}) + \lambda_2 (\dot{M} + J\omega^2\vartheta) \quad (37)$$

Le dimensioni degli elementi delle sezioni si suppongono note in funzione di t e di una variabile x che può essere, ad esempio, lo spessore di una parete trattandosi di trave cava. Perciò w e R sono funzioni note di x e t . Si trascura l'effetto di x su J che viene pertanto ad essere una funzione nota di t .

Si fissa inoltre la condizione $R \geq R_m$ essendo R_m una funzione assegnata di t . Per brevità chiamiamo archi (a) della soluzione quelli in cui essendo $R > R_m$, x figura come variabile; archi (b) saranno quelli in cui $R = R_m$. Sia per gli uni che per gli altri sussistono le equazioni di Eulero

$$\dot{\lambda}_1 + J\omega^2\lambda_2 = 0 \quad (38)$$

$$\dot{\lambda}_2 = \lambda_1/R \quad (39)$$

mentre solo sugli archi (a) è

$$w' = \lambda_1 MR'/R^2 \quad (40)$$

dove

$$w' = \partial w / \partial x, \quad R' = \partial R / \partial x$$

Inoltre si ha

$$E = w^* - w + q/R^* - q/R \quad (41)$$

essendo

$$q = \lambda_1 M.$$

La discussione della condizione $E \geq 0$ può essere effettuata con l'aiuto del grafico $w(1/R)$. La

curva deve stare al di sopra della retta di pendenza $-q$ condotta per il punto rappresentativo. Finché $R > R_m$, secondo la (40), $-q$ è la pendenza del diagramma. Lungo gli archi (b), $-q$ deve superare la pendenza del diagramma all'estremo $R = R_m$. Alla giunzione di archi dei due tipi, per ovvie condizioni fisiche si ha $\Delta\vartheta = \Delta M = \Delta\dot{M} = 0$. Inoltre le (8) stabiliscono che i moltiplicatori siano continui e sussista la condizione

$$\Delta w + q\Delta(1/R) = 0 \quad (42)$$

Siccome il diagramma $w(1/R)$ sta, di regola, al di sopra della tangente in un suo punto qualsiasi, esso può soddisfare la condizione di Weierstrass su tutta la sua estensione e inoltre la transizione fra gli archi dei due tipi avvengono senza variazione brusca di x .

Agli estremi della trave si ha $M^Z = \vartheta^A = 0$; inoltre, essendo ϑ^Z e M^A valori liberi è per le (7) $\lambda_1^Z = \lambda_2^A = 0$. Si osserva di conseguenza che lo stesso sistema differenziale omogeneo vale per le variabili M , ϑ come per i moltiplicatori λ_1 , λ_2 . Quindi sull'intera trave deve essere $\vartheta/\lambda_2 = \text{costante}$. Tale proprietà facilita considerevolmente la risoluzione del sistema che può effettuarsi col procedimento seguente.

Sia

$$\eta = \dot{\vartheta}/M^A$$

$$H = 1 - \int_0^L J\omega^2 dt \int_0^L \eta dt$$

$$\chi^2 = (w'/R') (R'/w')_m^A$$

$$\chi_m^2 = (w'/R')_m (R'/w')_m^A$$

dove gli indici m distinguono i valori calcolati per $R = R_m$. In base alle (35), (36) si ha

$$R\eta = H \quad (43)$$

Fissato un valore R_0 , le integrazioni si effettueranno per passi dalla sezione $t = 0$ mediante l'equazione $\eta R_0 = \chi$ e la (43) lungo gli archi (a) caratterizzati dalla condizione $|H| > \chi_m R_m/R_0$; lungo gli archi (b), sui quali è $|H| < \chi_m R_m/R_0$ si adopera la (43) con $R = R_m$. Il valore R_0 deve essere tale che le integrazioni diano $H = 0$ nella sezione $t = L$.

In pratica il calcolo è ulteriormente semplificato dal fatto che la funzione χ varia assai poco con x ; ove χ possa ritenersi indipendente da x , sarà $\chi = \chi_m$, funzione nota di t , sugli archi (a). Se queste condizioni sussistono sull'intera trave e si ha $R > R_m$, allora

$$R_0 = \int_0^L J\omega^2 dt \int_0^L \chi dt.$$

Generalmente la frequenza prescritta è quella della prima armonica. Il calcolo potrebbe però effettuarsi allo stesso modo per una armonica superiore. Basta considerare che sugli archi (a) è $\eta R_0 = \pm \chi$ il segno essendo precisato in base all'integrazione lungo gli archi (b) che si trovano

in corrispondenza dei nodi di vibrazione. Naturalmente la frequenza prescritta deve essere superiore a quella che si avrebbe ponendo $R = R_m$ su tutta la trave. Qualora la distribuzione di rigidità sia determinata per un'armonica superiore, la trave può risultare mal proporzionata per ciò che si riferisce alla prima armonica.

2. — Per una sezione in parete sottile, la derivata R' può essere calcolata mediante l'uguaglianza

$$G/R = \sum_1^N u_r^2 l_r / s_r$$

dove G è il modulo tangenziale, u_r è il flusso nel generico pannello corrispondente ad un momento torcente unitario, s_r è lo spessore del pannello, l_r lo sviluppo dell'arco che ne costituisce la sezione della superficie media, N è il numero dei pannelli sulla sezione della trave. Il pannello $r = 1$ ha lo spessore $s_1 = x$ che viene variato. Si trova quindi

$$GR'/R^2 = u_1^2 l_1 / x^2 - 2 \sum_1^N u_r (\partial u_r / \partial x) (l_r / s_r) \quad (44)$$

Se la sezione è staticamente determinata (ossia doppiamento connessa) la derivata $\partial u_r / \partial x$ è nulla perché c'è una sola distribuzione di flussi che faccia equilibrio al momento unitario. Se la sezione è più volte connessa, la sommatoria nella (44) si annulla ugualmente per l'equazione dei lavori; infatti $\partial u_r / \partial x$ sono flussi che hanno risultante e momento nullo e i termini $u_r / G s_r$ rappresentano un sistema di scorrimenti compatibili. Quindi in ogni caso

$$R' = R^2 u_1^2 l_1 / G x^2.$$

Sostituendo nella (40) e tenendo conto che $\lambda_1 / M = k$ (costante) e che $M u_1 / x$ è la tensione tangenziale τ nel pannello il cui spessore viene variato si trova

$$\tau^2 l_1 / G w' = k.$$

Se si varia solo lo spessore del pannello, w' / l_1 rappresenta il peso specifico del materiale che lo costituisce; quindi se il pannello è omogeneo, la condizione variazionale concorda con la nota proprietà che il pannello di minimo peso è quello uniformemente sollecitato. Però questa proprietà non sussiste se, cambiando lo spessore del pannello, altri elementi modificano la loro sezione in misura dipendente dalle altre variabili. Questo avviene, per esempio, in una struttura alare, nella quale i correnti longitudinali ricevono aiuto dal rivestimento. In questi casi la condizione di sollecitazione uniforme può scostarsi da quella di minimo peso.

3. — Per quanto la soluzione trovata soddisfa alle condizioni di estremo e la condizione $E > 0$ sia verificata lungo di essa, tuttavia le condizioni soddisfatte non possono rigorosamente considerarsi come sufficienti a provare che la soluzione renda minimo il peso. In primo luogo, per il problema con punti terminali fissi, deve controllarsi che la solu-

zione non sia intersecata da elementi contigui. L'esame può svolgersi nello spazio delle coordinate t, ϑ, M nel quale si proietta la stella di estremali con origine nel punto A di coordinate $t = \vartheta = 0, M / M^A = 1$. In questo calcolo, la proporzionalità fra le variabili e i moltiplicatori, legata alle condizioni di estremo libero che si hanno per alcune coordinate, può non sussistere. Quindi si deve tenere in conto, oltre la (43), una equazione analoga per i moltiplicatori, ossia

$$R\xi = X \quad (45)$$

essendo

$$\xi = \dot{\lambda}_2 / \lambda_1^A \quad k_1 = \lambda_2^A / \lambda_1^A$$

$$X = 1 - \int_0 J \omega^2 dt (k_1 + \int_0 \xi dt).$$

Le integrazioni si effettuano, come per la (43), mediante l'equazione $\xi \eta R_0^2 = \chi^2$ quando $\sqrt{HX} > \chi_m R / R_0$ e con $R = R_m$ quando $\sqrt{HX} < \chi_m R_m / R_0$. La soluzione dipende da due parametri che vengono definiti scrivendo

$$1/R_0 = (1 + \varepsilon_1) / \bar{R}_0 \quad k_1 = \varepsilon_2 / J_0 L \omega^2.$$

Sono soprallineati i valori relativi alla soluzione fondamentale che si esamina ($\vartheta = \vartheta, M = M, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$) e si indica con J_0 un valore di riferimento. Siano ϑ', M' i valori che corrispondono ad una coppia $\varepsilon'_2, \varepsilon'_1$ di parametri e siano ϑ'', M'' quelli corrispondenti ad una seconda $\varepsilon''_2, \varepsilon''_1$. Indi si costruisce il determinante

$$D = \begin{vmatrix} \bar{\vartheta} & \bar{M} & 1 \\ \vartheta' & M' & 1 \\ \vartheta'' & M'' & 1 \end{vmatrix}$$

Esso non deve mutare segno lungo l'intera soluzione se questa rende minimo il peso. L'inversione di segno rivela l'esistenza di un inviluppo.

Un'applicazione numerica venne sviluppata supponendo J costante, $\chi = 1$ e assumendo $R_m = 0,2088 JL^2 \omega^2$. Il diagramma $\vartheta(t)$, linea a della fig. 5, è rettilineo fra le sezioni 0 e 0,75 L ; da qui all'estremità libera la rigidità è costante e il diagramma di ϑ sinusoidale. Nel primo tratto si ottiene

$$R = \left(0,4900 - \frac{2 L^2}{t^2} \right) JL^2 \omega^2.$$

Si è assunto $\varepsilon'_1 = 0,1, \varepsilon'_2 = 0, \varepsilon''_1 = -0,1, \varepsilon''_2 = 0,43$. I valori ottenuti per D in un certo numero di sezioni, divisi per $|\varepsilon| = \varepsilon'_1 \varepsilon'_2 - \varepsilon'_2 \varepsilon'_1$ sono rappresentati nella fig. 5 (a). La linea d rappresenta nella stessa scala, peraltro arbitraria, i valori del determinante

$$\begin{vmatrix} \partial \vartheta / \partial \varepsilon_1 & \partial M / \partial \varepsilon_1 \\ \partial \vartheta / \partial \varepsilon_2 & \partial M / \partial \varepsilon_2 \end{vmatrix}$$

La concordanza delle due espressioni è eccellente, se si considera che per i parametri ε si erano as-

sunti valori abbastanza alti da rendere facilmente valutabile D . Ambedue i calcoli indicano che D mantiene segno costante su tutta la trave; quindi la prova delle condizioni di ottimo si può ritenere ultimata per il caso di punti terminali fissi. I valori di $\partial\theta/\partial\varepsilon_1$, e $\partial\theta/\partial\varepsilon_2$ sono rappresentati dalle linee b e c della fig. 5.

Per completare la prova si tiene conto del fatto che θ^Z è valore libero. In questa analisi è di aiuto la (6) dalla quale si ha

$$\partial W^Z/\partial\theta^Z = -\lambda_1^Z.$$

Nella fig. 5 (b) i vettori OP' e OP'' hanno componenti M' , $\theta' - \bar{\theta}$ e M'' , $\theta'' - \bar{\theta}$ mentre OL' e OL'' hanno componenti M' , λ_1' e M'' , λ_1'' , tutte le quantità essendo calcolate per $t = L$. Ammettendo

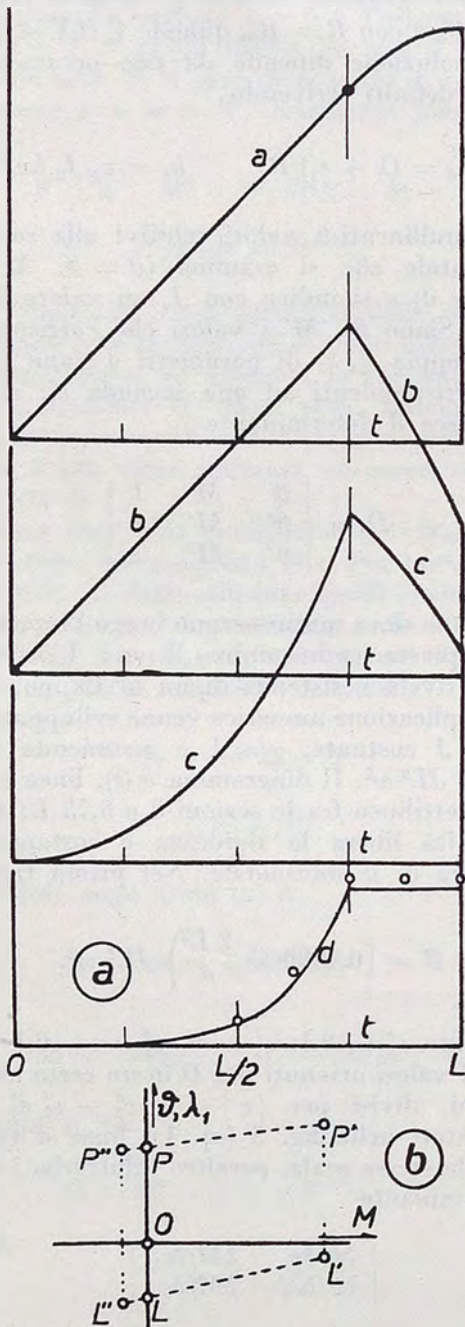


Fig. 5 - Verifica delle condizioni sufficienti per la prova di ottimo per la soluzione del problema V.

tendo lecita l'interpolazione lineare, alla soluzione per cui $\theta - \bar{\theta}$ è rappresentato da OP e M è nullo, corrisponde il valore di λ_1 rappresentato da OL . Si ha quindi per questa

$$\frac{1}{\theta - \bar{\theta}} \frac{\partial W}{\partial \theta} > 0.$$

Si può perciò ritenere provato che la soluzione $\theta = \bar{\theta}$ fornisce un minimo per W^Z .

4. — Si considererà il problema dei paragrafi precedenti per la struttura che si scosti dalla teoria di St. Venant in quanto la torsione vi produca anche sforzi normali alle sezioni. Limitando l'analisi ad un caso puramente schematico, si suppone che la struttura sia formata da due travi parallele e di altezza costante, collegate superiormente e inferiormente da pareti sottili. Si ha dunque una sezione a cassone rettangolare di larghezza b costante. Si suppongono anche costanti le rigidezze flessionali S' , S'' delle due travi, essendo S il prodotto del modulo d'elasticità per il momento di inerzia della sezione. In tali condizioni l'equazione (35) viene sostituita da

$$M = R\dot{\theta} - C\ddot{\theta} \tag{46}$$

essendo $C = b^2 S' S'' / (S' + S'')$, mentre la (36) sussiste invariata.

Introducendo le nuove variabili $\beta = \dot{\theta}$ (gradiente di torsione) e $\gamma = C\beta$ (momento flettente nelle travi, a meno d'un fattore costante), scriviamo

$$F = w - \dot{W} + \lambda_1 (M + \dot{\gamma} - R\beta) + \lambda_2 (\dot{M} + J\omega^2 \dot{\theta}) + \lambda_3 (\beta - \dot{\theta}) + \lambda_4 (\gamma/C - \dot{\beta}) \tag{47}$$

da cui si ottengono le equazioni di Eulero

$$\lambda_3 + \dot{\lambda}_4 - R\lambda_1 = 0 \tag{48}$$

$$\dot{\lambda}_3 + J\omega^2 \lambda_2 = 0 \tag{49}$$

$$\lambda_1 = \dot{\lambda}_2 \tag{50}$$

$$\lambda_4/C = \dot{\lambda}_1 \tag{51}$$

$$w' = \lambda_1 R' \beta. \tag{52}$$

Se, come nel caso già considerato, è prescritta una condizione $R \geq R_m(t)$, la soluzione conterrà archi sui quali, essendo $R = R_m$, l'equazione (52) non è valida. Alla giunzione di questi archi con quelli dell'altro tipo si hanno le condizioni

$$\Delta\beta = \Delta\theta = \Delta M = \Delta\gamma = 0$$

mentre le (8) danno

$$\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2 = \Delta\lambda_3 = \Delta\lambda_4 = 0$$

$$\Delta w = \lambda_1 \beta \Delta R.$$

I valori nelle sezioni terminali sono soggetti alle condizioni

$$\beta^A = \vartheta^A = M^Z = \gamma^Z = 0$$

mentre per le coordinate libere γ^A , M^A , ϑ^Z , β^Z si ha dalle (7)

$$\lambda_1^A = \lambda_2^A = \lambda_3^Z = \lambda_4^Z = 0.$$

Inoltre si ha

$$E = w^* - w + \lambda_1 \beta (R - R^*).$$

Per la condizione $E \geq 0$ tutto il diagramma $w(R)$ deve trovarsi al di sopra della retta di pendenza $\lambda_1 \beta$ condotta per il punto rappresentativo. Siccome il diagramma può ritenersi rettilineo, le condizioni alla giunzione di archi di differente natura possono essere soddisfatte con variazioni finite del valore di x .

Si osserva ancora che i sistemi differenziali a cui sono soggetti i due gruppi di variabili β , ϑ , M , γ e λ_1 , λ_2 , λ_3 , λ_4 sono perfettamente identici. Essendo essi omogenei, anche in questo caso sarà $\lambda_2/\vartheta = \text{costante}$.

Siccome β si annulla nella sezione vincolata, in prossimità di questa, per la condizione $E \geq 0$ si dovrà avere $R = R_m$. Nel tronco successivo, del tipo per cui $R > R_m$, si entrerà con una brusca variazione nel valore di R . Consideriamo ad esempio, il caso in cui sia w'/R' costante. Per la (50) e la proporzionalità fra λ_1 e β , sarà $\gamma = 0$ nel tronco $R > R_m$, e quindi anche nella sezione di giunzione col primo tronco $R = R_m$. Si potranno dunque condurre le integrazioni per questo mediante le equazioni (46) e (36) partendo da un valore assunto per $C\vartheta^A/LM^A$, arrestandole alla sezione K dove si trova $\vartheta = 0$, dove perciò avrà inizio il tronco $\vartheta = 0$. Così può ovviamente proseguirsi. Supponendo che sia $R > R_m$ in tutta la parte restante di trave, allora vi si potrà scrivere

$$\vartheta = \vartheta^K + \dot{\vartheta}^K (t - t^K).$$

Così si può determinare M^Z . Il valore inizialmente assunto deve essere tale da dare $M^Z = 0$.

5. — Problemi simili a quelli sopra considerati possono formularsi in molte questioni di progetto. Ad esempio, la determinazione di un'asta di minimo peso atta a resistere in campo elastico ad un carico di punta assegnato costituisce un problema del tutto analogo al precedente. Tale è pure il problema del progetto di una struttura alare di minimo peso per una data velocità di instabilità torsionale. In generale si può affermare che tutti i problemi che si riducono ad un sistema differenziale autoaggiunto, danno luogo a questioni variazionali notevolmente semplificate dal fatto che variabili e moltiplicatori obbediscono a sistemi di equazioni fra loro simili.

NOTE BIBLIOGRAFICHE

- [1] P. CICALA, *An Engineering Approach to the Calculus of Variations*, Levrotto & Bella, Torino, 1957.
- [2] W. L. FITE, *Maximization of Return from Limited Resources*, « Journ. Soc. Industrial Applied Math. », vol. 1, p. 73, 1953.
- [3] F. BERTOLINI, *Su un problema di Calcolo delle Variazioni studiato da M. R. Gibrat*, « Rendic. Circ. Mat. Palermo », serie II, tomo 5, p. 43, 1956.
- [4] S. FAEDO, *Esistenza dell'estremo in un problema di Calcolo delle Variazioni riguardante il funzionamento delle centrali alimentate dalle maree*, « Annali Mat. Pura Appl. », tomo 40, p. 321, 1955.
- [5] R. BELLMAN, I. GLICKSBERG, O. GROSS, *The Theory of Dynamic Programming as Applied to a Smoothing Problem*, « Journ. Soc. Industrial Applied Math. », vol. 2, p. 82, 1954.
- [6] R. BELLMAN, R. S. LEHMAN, *On the Continuous Gold-mining Equation*, « Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. », vol. 40, p. 115, 1954.
- [7] P. CICALA, *La distribuzione ottima degli spessori del rivestimento alare*, questi « Atti », vol. 85, 1950-51.

Indagini sulle pareti sottili con i metodi asintotici

P. CICALA presenta i concetti essenziali dell'indirizzo di ricerca su strutture a parete sottile, seguito con i suoi collaboratori specialmente in questo ultimo ventennio. Obiettivo di questi studi è il sistematico ordinamento delle semplificazioni che tale calcolo può adottare nell'intento di giungere a conclusioni orientative sul modo di resistere di queste strutture e alla valutazione approssimata di deformazioni e sforzi, senza pretendere di arrivare ad un calcolo preciso di dette grandezze, al quale si deve invece tendere con i procedimenti numerici discretizzati.

1. Premessa.

Nell'analisi del comportamento statico di una struttura a parete sottile, piana (piastra) o curva (guscio) debbono necessariamente adottarsi approssimazioni; altrimenti lo studio, sia pur semplificato dalle ipotesi di piccole deformazioni (linearità geometrica) e di comportamento elastico (linearità fisica), volto alla struttura tridimensionale presenterebbe difficoltà insormontabili: per la abituale riduzione al problema bidimensionale si presentano sostanzialmente due vie: (a) quella, diciamo, *aprioristica*, (b) la *asintotica*. La via (a), generalmente adottata nei testi su queste strutture, parte da ipotesi riguardanti, di solito, la cinematica delle deformazioni (in particolare: l'ipotesi della conservazione delle normali) ⁽¹⁾. La via (b) si basa sulla rappresentazione delle funzioni incognite (componenti di spostamento e di tensione) in serie di potenze di un parametro « piccolo » che indichiamo con δ : è questa la via seguita nelle indagini in oggetto.

Occorre subito precisare che la distanza fra le due vie non è così grande quanto appare dalle due definizioni. In realtà, le ipotesi « aprioristiche » sono nate da felici intuizioni di scienziati che hanno saputo vedere verso quale comportamento la struttura deve tendere quando se ne faccia sempre più piccolo lo spessore. In secondo luogo, giungendo attraverso ipotesi semplificative ad una formulazione, spesso si svolge l'esame dell'ordine di errore per ricercare quale potenza di δ ne rappresenti il comportamento. Dunque ciò che contraddistingue la via (b) è la sua sistematicità, cioè lo sviluppo in forma deduttiva dell'intera indagine, senza introduzione di semplificazioni da giustificare a posteriori. Questa via, a prescindere dal pregio di logicità, ha il vantaggio di guidare anche dove l'intuizione ha difficoltà ad avanzare. I metodi asintotici vennero seguiti in qualche lavoro di E. Reissner e di studiosi della sua scuola, per problemi relativi al guscio cilindrico e inoltre dai ricercatori sullo « strato limite » del quale si

dirà più avanti. H. S. Rutten (*Asymptotic approximation in the three-dimensional theory of thin and thick elastic shells*, Nederl. Boekdruk Ind., 's-Hertogenbosh 1971) sviluppò una trattazione generale, però di scoraggiante complessità, come ammesso da un autorevole studioso in questo campo. Nella letteratura sovietica si trovano vari lavori di indirizzo asintotico. Il più autorevole e conosciuto autore in questo indirizzo è Gol'denveizer, il quale, nella più recente edizione del suo trattato *Теория упругих тонких оболочек*, Издат. Наука, Mosca 1976), pur partendo sempre da un'impostazione aprioristica, diede più largo sviluppo alla trattazione asintotica che nella precedente edizione. In tutte le sue ricerche su pareti sottili, Cicala si orientò su questo cammino, attraverso il quale trovano giustificazione tutte le semplificazioni che menti acute avevano suggerito in questo campo. Sin nella nota [25] del 1940, sulla teoria non lineare del guscio cilindrico, venne introdotto il concetto di « ordine di grandezza della derivazione », concetto essenziale ⁽²⁾ per l'attuazione del metodo asintotico nella risoluzione di sistemi differenziali: senza di esso, l'operazione di sviluppo in serie di potenze di δ si presenta impossibile, come mostra l'esempio più avanti presentato. Nel lavoro [96] vennero riordinati i concetti del metodo asintotico sviluppati nelle note precedenti. In forma più sistematica il metodo è svolto nella monografia [112]. Di questa è pubblicata una riedizione, tendente a migliorare la tecnica deduttiva del procedimento. Una prima parte [147] è uscita nel 1978: una seconda [151] è uscita di recente. Le considerazioni qui svolte intendono presentare le linee essenziali del metodo.

2. Ordine di grandezza relativo asintotico.

Attraverso il parametro δ si inserisce idealmente la struttura in esame in un gruppo di cui ciascun elemento differisce dalla struttura originaria in quanto una prefissata dimensione segue la variazione di δ quando questo tenda a zero. Di solito si considera come proporzionale a δ soltanto lo spessore di parete: ciò significa che

⁽¹⁾ Si noti che le ipotesi di partenza, come quella menzionata, non bastano a ridurre il sistema ad una forma atta all'applicazione: altre semplificazioni sono sempre introdotte nel corso della trattazione aprioristica. Hanno carattere più coerente ma più assiomatico certe moderne trattazioni che, per potere studiare il comportamento del guscio per spessore tendente a zero, postulano una proprietà peculiare del materiale (che per un elemento infinitesimo la risultante delle tensioni su una faccia possa passare a distanza finita dalla faccia stessa, secondo Günther).

⁽²⁾ Tale idea è così singolare che un docente di Ingegneria, pur dotato di preparazione matematica, ritenne di doverla combattere nel modo più aspro in una comunicazione presentata all'Accademia delle Scienze di Torino. Si nota che la prima edizione del trattato di Gol'denveizer è datata del 1953, ma qui disponibile assai più tardi, e che i lavori di E. Reissner sugli sviluppi parametrici sono del 1964.

per $\delta \rightarrow 0$ la parete si approssima idealmente alla sua superficie media, senza che questa vari né si modifichi la posizione degli orli. La formulazione asintotica conseguente, per due incognite qualunque A, B (omogenee, o meglio, adimensionali) fornisce l'ordine relativo di grandezza di A rispetto a B nella forma di potenza di δ , di cui diciamo μ l'esponente. Dal punto di vista matematico la determinazione di μ ha un significato preciso: significa che per $\delta \rightarrow 0$, le quantità A e $B\delta^\mu$ mantengono un rapporto finito. Meno preciso è il significato dell'ordine relativo di errore di un'espressione di sviluppo in serie di potenze di δ o del risultato di un processo iterativo. È facile infatti determinare l'esponente μ corrispondente al primo termine del residuo trascurato: però questo, a rigore, non può dare un'idea quantitativa sull'errore, finché non si sia accertata la convergenza della serie: e queste, di regola in realtà, sono di tipo semiconvergente. Del resto, quando anche si sappia che sia, poniamo, $\mu = 2$ per il primo sommando trascurato e che questo predomini nel residuo, questo ci autorizza ad affermare solo che, se si dimezzasse lo spessore di parete l'errore si ridurrebbe, grosso modo, alla quarta parte. Queste considerazioni non debbono indurre a ritenere inefficiente il procedimento asintotico: le medesime incertezze sussistono per i risultati dell'impostazione aprioristica: se mai, possono scomparire dallo schema ideale creato a rappresentare la struttura. Solo quando fosse disponibile una discretizzazione funzionante per il corpo tridimensionale, si potrebbe conoscere esattamente la reale situazione: i risultati ottenibili, poniamo, con elementi finiti bidimensionali, sono affetti dalle stesse incertezze che il metodo asintotico segnala per la formulazione bidimensionale su cui essi sono basati.

3. La lunghezza di variazione.

Sia V una variabile (resa adimensionale rapportandola a quantità indipendenti da δ) che dipende dalla coordinata x_1 oltre che dal parametro δ : ne tracciamo il diagramma sull'ascissa x_1 e siano $D_1 V$ le relative pendenze. Affermando che sia $V \simeq \delta^\mu$ si intende che il diagramma si può ottenere da un grafico base moltiplicandone le ordinate per δ^μ , con modifiche « lievi » per valori di δ sufficientemente piccoli: si impiccoliscono dunque le ordinate per $\mu > 0$, si ingrandiscono per $\mu < 0$. È naturale pensare che altrettanto possa dirsi per il diagramma di $D_1 V$, tracciato sulla stessa ascissa: occorre invece introdurre nella risoluzione di un sistema differenziale dipendente da δ , il concetto che la variazione di $D_1 V$ possa essere retta da una diversa potenza di δ , diciamo $\delta^{\mu-\alpha}$: per $\alpha > 0$ ciò significa che per $\delta \rightarrow 0$ avviene una contrazione nelle ascisse, per cui le pendenze crescono rispetto alle ordinate: in termini geometrici più precisi, si riducono le sottotangenti del grafico. Detta L_0 una lunghezza di riferimento (indipendente da δ) si scrive

$$D_1 V \simeq V/L_1, \quad L_1 \simeq L_0 \delta^\alpha$$

È detta *lunghezza di variazione* la quantità L_1 , intervallo in cui la funzione V può subire una variazione dello stesso ordine del suo valore massimo. Ad esempio, per una funzione sinusoidale si può considerare come lunghezza di variazione la lunghezza d'onda (o la sua quarta parte, poiché il denominatore 4 non altera gli ordini di grandezza). Così, per una funzione esponenziale smorzata, si può dire lunghezza di variazione il tratto in cui essa assume valori « trascurabili » rispetto all'iniziale, pur rilevando che la qualifica di trascurabilità non ha valore assoluto fuori del limite.

Per applicare questi concetti allo studio in oggetto, si consideri sulla superficie media Σ un sistema qualsiasi di coordinate curvilinee ξ_1, ξ_2 . Lungo una linea $\xi_2 = \text{costante}$ si misuri lo sviluppo x_1 e si ponga $D_1 V = (\partial V / \partial \xi_1) (d\xi_1 / dx_1)$: analoga definizione si pone per $D_2 V$ e si scrive $D_2 V \simeq V/L_2$ con $L_2 \simeq L_0 \delta^\beta$. Si ha così

$$D_1 V \simeq \delta^{-\alpha} V/L_0, \quad D_2 V \simeq \delta^{-\beta} V/L_0 \quad (1)$$

Secondo Gol'denveizer si dicono *indici di variabilità* gli esponenti α, β che misurano la tendenza alla ripidità dei grafici delle variabili lungo le linee coordinate.

4. Classi di soluzioni.

Parlando di uno *stato di tensione* (o semplicemente, *stato*) ci riferiamo ad una configurazione di spostamenti (continui) e delle corrispondenti deformazioni alle quali, nel corpo elastico, corrispondano tensioni le quali verifichino le condizioni indefinite di equilibrio. Si specificherà se si tratta di soluzioni *omogenee*, originate da carichi sugli orli del guscio, in assenza di termini di carico nel sistema differenziale, o di soluzioni *non omogenee* corrispondenti a termini di carico nelle equazioni di equilibrio o nelle equazioni di elasticità (dislocazioni o « deformazioni impresse »): ci si riferisce a soluzioni *particolari*, nella cui costruzione si prescinde dalle condizioni al contorno, intendendo che sugli orli siano ammessi gli spostamenti richiesti dalla soluzione stessa, essendo esercitate esattamente le tensioni che entrano nella soluzione particolare in esame. Diremo *stati di classe α, β* le soluzioni (nel senso specificato) del problema bidimensionale che soddisfino in ogni punto della superficie media alle condizioni (1) con assegnati indici di variabilità.

È facile vedere che non è possibile costruire le espressioni delle incognite V , componenti di spostamento o di tensione, in forma di sviluppo parametrico, ossia in serie di potenze di δ senza tener conto delle lunghezze di variazione per la classe in esame. Si consideri ad esempio un guscio cilindrico di spessore h e sia x la coordinata misurata secondo le generatrici: la superficie media sia un cilindro circolare di raggio R , troncato sulla sezione $x = 0$ ed indefinitamente esteso dal lato $x > 0$. Si applichi sulla sezione libera una distribuzione uniforme di carichi radiali. Se si volesse costruire lo sviluppo parametrico di una incognita V qual-

siasi per un assegnato valore di $r = x/R$ si troverebbe l'operazione impossibile perché per $\delta \rightarrow 0$ si annulla V e tutte le sue successive derivate rispetto a δ . Invece lo sviluppo è possibile per $x = rR\delta^{0.5}$. Infatti lo stato di tensione in esame appartiene alla classe $\alpha = 1/2$, $\beta = 0$ (poste le coordinate ξ_1 assiale e ξ_2 circonferenziale) ⁽³⁾: la coordinata $x = \xi_1$ va posta in relazione con la relativa lunghezza $L_1 = \sqrt{hR} = R\sqrt{\delta}$. Gli ordini relativi di grandezza delle incognite, le conseguenti semplificazioni nelle equazioni di elasticità e di equilibrio e il processo di risoluzione variano da una classe all'altra.

5. Il poliedro di rappresentazione.

La trattazione asintotica scinde la teoria generale delle strutture a parete sottile in teorie « monocromatiche », ciascuna valida per date lunghezze di variazione ossia per una coppia di indici α , β assegnati. Occorre anzitutto distinguere fra valori « forzati » degli indici e valori « naturali ». Se sulla parete viene distribuito un sistema di carichi o dislocazioni (ad es., da effetti termici), a seconda che la legge di distribuzione lungo le linee coordinate sia più o meno ripida, si può corrispondentemente definirne le lunghezze di variazione: la relativa soluzione non omogenea avrà assegnati valori forzati per gli indici. Se si ha una distribuzione di forze o dislocazioni lungo una linea della superficie media, il relativo indice di variabilità stabilirà un indice forzato per la corrispondente configurazione interna: la legge di propagazione entro la parete degli effetti di quelle azioni sarà costituita da stati di una o più classi, secondo indici naturali.

Ancora una precisazione deve farsi circa la geometria della parete: qui si considera il parametro δ come legato solo allo spessore: allora, per la struttura a guscio i raggi di curvatura normale della superficie media restano dello stesso ordine delle dimensioni generali, poiché non variano con δ . In questo caso, come lunghezza di riferimento L_0 per definire $\delta = h/L_0$ si può assumere la massima distanza di due punti della superficie media o il suo raggio minimo di curvatura normale, indifferentemente. In queste condizioni il poliedro di rappresentazione assume la forma rappresentata prospetticamente nella fig. 1. Omettendo indicazioni relative alla costruzione di questo solido, si preciserà solo, in anticipo rispetto ai necessari chiarimenti, che le coordinate dei punti di contorno daranno indicazioni essenziali riguardo alla forma dell'equazione differenziale risultante per ciascuna classe: per i vari termini di quella equazione, la coordinata r dà l'ordine di derivazione rispetto a ξ_1 , la s dà l'ordine di $\partial/\partial\xi_2$, la n dà l'esponente di δ per il coefficiente dello stesso ter-

mine. Ad esempio, al punto C corrisponderà un addendo $a\delta^2 D_1^8 V$ dove a è un fattore indipendente da δ . Ad ogni classe corrisponde un piano tangente al poliedro (ossia, contenente punti del contorno ma non secante): la pendenza dell'intersezione di questo piano col piano rn sul piano $n = 0$ misura l'indice α : la pendenza dell'intersezione col piano sn dà β . Ad esempio, il piano tangente con contatto sul trapezio $ABCD$ rappresenta la classe $\alpha = 1/2$, $\beta = 1/2$. Nella relativa equazione risultante entrano termini contenenti D_1^4 (punto A), D_2^4 (punto B), $\delta^2 D_1^8$ (punto C), $\delta^2 D_2^8$ (punto D).

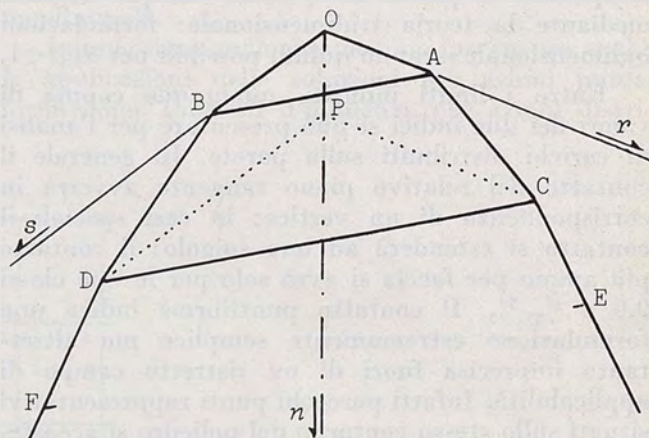


Fig. 1 - Il poliedro rappresentativo.

Punti $A(r, s, n) = (4, 0, 0)$ $B(0, 4, 0)$ $C(8, 0, 2)$ $D(0, 8, 2)$ $P(0, 0, 2)$
 $E(10, 0, 4)$ $F(0, 10, 4)$.

I punti rappresentativi, interni o sul contorno del poliedro hanno una distribuzione discreta: infatti le coordinate r , s , ordini di derivazione non possono essere che numeri interi; inoltre, per il guscio in cui il parametro δ è solo legato allo spessore, i punti rappresentativi si trovano su piani corrispondenti a valori pari di n , a partire da zero. La distanza, misurata nella direzione n di un punto rappresentativo dal piano tangente corrispondente ad una certa classe dà il valore per l'esponente μ nella potenza δ^μ che misura l'ordine di grandezza del termine rappresentato da quel punto, rispetto ai termini fondamentali dell'equazione risultante. Cosicché, ad esempio, per la classe $\alpha = 0$, $\beta = 0$ il cui piano tangente $n = 0$ tocca il poliedro secondo il triangolo ABC , rispetto al quale i punti più vicini stanno nel piano $n = 2$, per la teoria di prima approssimazione che tiene soltanto in conto i termini del triangolo di contatto, l'errore relativo è $\simeq \delta^2$: invece la teoria di prima approssimazione per la classe $1/2, 1/2$ sopra menzionata, poiché i punti più vicini al piano del trapezio $ABCD$ si trovano a distanza $1/2$, è affetta da errori dell'ordine $\delta^{0.5}$, quindi relativamente rilevanti; va fatta eccezione per particolari casi, per i quali i punti più vicini al piano $ABCD$ si trovano a distanza unitaria: in questi casi si hanno errori $\simeq \delta$, ordine di approssimazione generalmente ritenuto accettabile.

⁽³⁾ Trattandosi di una soluzione assialsimmetrica ($D_2 = 0$) si dovrebbe scrivere $\beta = -\infty$: però la teoria di questo caso non differisce da quella corrispondente a soluzioni ad andamento circonferenziale sinusoidale con poche onde ($L_2 \simeq R$).

6. Restrizioni nei valori degli indici α , β .

Il poliedro (fig. 1) è limitato dai piani rn , sn e da tre facce: il triangolo OAB , il trapezio $ABCD$ e una faccia illimitata contornata dal lato CD e da due rette di inclinazione unitaria nei due piani coordinati. Questa ultima faccia rivela una limitazione nei valori α , β ; nel piano che la contiene, corrispondente dunque alla classe $\alpha = 1$, $\beta = 1$, si trovano infiniti punti rappresentativi: ciò indica l'impossibilità di ridurre la trattazione di questi stati alla forma bidimensionale, con un sistema differenziale di ordine finito. Uno stato di tensione le cui lunghezze di variazione siano piccole come lo spessore di parete deve essere dunque trattato mediante la teoria tridimensionale: formulazioni bidimensionali saranno quindi possibili per α , $\beta < 1$.

Entro i limiti indicati, qualunque coppia di valori dei due indici si può presentare per l'analisi di carichi distribuiti sulla parete. In generale il contatto del relativo piano tangente avverrà in corrispondenza di un vertice: in casi speciali il contatto si estenderà ad uno spigolo: il contatto più ampio per faccia si avrà solo per le due classi 0,0 e $1/2, 1/2$. Il contatto puntiforme indica una formulazione estremamente semplice ma altrettanto imprecisa fuori di un ristretto campo di applicabilità. Infatti parecchi punti rappresentativi situati sullo stesso contorno del poliedro si accosteranno al piano tangente, indicando un valore basso per l'esponente μ dell'ordine di errore. Una teoria con questo carattere trova applicazione, come si dirà più avanti, per il guscio cilindrico (soluzioni polinomie) caso per il quale, peraltro, il vertice di contatto si presenta relativamente « appuntito ». In generale dunque, per carichi distribuiti, siano forze o dislocazioni si adotta la formulazione della classe 0,0 o della classe $1/2, 1/2$.

La stessa possibilità di scelta e la medesima limitazione nell'applicazione pratica si presenta per la distribuzione dei carichi situati lungo una linea della superficie media. Supposto che questa venga assunta come linea $\xi_1 = \text{costante}$, resta definito il valore forzato per l'indice β : i valori possibili dell'indice naturale α che definisce la lunghezza propria della legge di propagazione entro la parete saranno precisati ricercando i piani tangenti al poliedro paralleli alla retta $n = \beta s$ del piano ns . Consideriamo ad esempio il caso in cui sia $\beta = 0$, ossia la distribuzione di carico sulla linea che diciamo « sostegno » della perturbazione relativa, sia graduale, ossia tale che la derivata rispetto alla coordinata misurata lungo il sostegno abbia l'ordine del rapporto fra la funzione di distribuzione e L_0 . In termini geometrici, si richiede che il diagramma di carico non sia mai così ripido che il segmento sottotangente diventi di ordine più piccolo che L_0 . Per questo valore $\beta = 0$ si trovano tre piani tangenti al poliedro: quello della classe 0,0, quello della classe $1/2, 0$ e quello della classe 1,0: su queste classi ci soffermeremo nel seguito. Partendo invece dalla direzione corrispondente a $\beta = 1/2$ si trova, ancora una volta, l'importante classe $1/2, 1/2$ e la classe $1, 1/2$. Il valore forzato $\beta = 1$ è da escludere,

per quanto s'è detto, dalla formulazione bidimensionale.

Riguardo ai valori naturali sopra trovati per α si deve osservare che essi si realizzano se la conformazione della struttura lo consente. Tale restrizione interessa specialmente l'indice $\alpha = 0$: se una seconda linea di discontinuità, in particolare un orlo, vincolato o libero, è situato ad una distanza $\ll L_0$ dal sostegno, forzatamente il valore di α dovrà portarsi a $1/2$ (escludendo distanze che si approssimino allo spessore).

7. Campo di validità di una formulazione bidimensionale.

Sarebbe ben difficile precisare il campo di validità per le travi della teoria di St. Venant. È noto che se la trave è « troppo corta » rispetto alle sue dimensioni trasversali o se il raggio di curvatura della linea d'asse è « troppo piccolo » la teoria cade in difetto: sarebbe però difficile dare valore quantitativo a queste restrizioni: bisogna possedere dati forniti da un calcolo di affinamento per giungere ad una valutazione quantitativa dell'errore nel caso specifico in esame e quindi decidere se questo sia accettabile o meno nell'applicazione specifica dei risultati. Non è da sorprendersi se limitazioni altrettanto vaghe si incontrino nella trattazione della parete sottile: e non è colpa della trattazione asintotica se questa le pone in luce, laddove una formulazione aprioristica può dare per assolutamente definito un problema che lo è solo nell'ambito delle ipotesi che essa accetta.

Ciò premesso, si nota che, quando si adotti una formulazione di prima approssimazione, cioè si tengano in esatto conto solo i termini relativi al contatto di un piano relativo a certi valori, poniamo $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ove si estenda l'applicazione ad una situazione $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, si va incontro ad errori $\simeq \delta^\mu$ essendo μ misurato dalla distanza minima del corrispondente nuovo piano tangente dagli altri punti rappresentativi nel poliedro, che nel caso considerato staranno nel piano $n = 2$. Si vedrà che appartiene alla classe 0,0 la nota *teoria membranale*: i punti del piano $n = 2$ intervengono nelle cosiddette teorie flessionali. È noto che, se il diagramma di carico è ripido, la teoria membranale è in errore; tuttavia non è infrequente l'applicazione di questa teoria a situazioni di carico parziale, con diagrammi bruscamente interrotti, dove la sottotangente sopra menzionata va a zero. Questa incoerenza non ha necessariamente effetti catastrofici: per quanto riguarda le tensioni medie entro lo spessore, la situazione reale costituisce un raccordo continuo fra i valori ai due lati della discontinuità: si aggiungono però sforzi flessionali locali, che aggravano la sollecitazione della parete. La trattazione asintotica porta ad una valutazione semplice, se si vuole di prima approssimazione, di quegli effetti locali.

Un problema di particolare interesse concerne le azioni concentrate, forze o dislocazioni: queste costituiscono una astrazione limite, che però conviene adottare per il vantaggio analitico. La pro-

pagazione di questi effetti si può ritenere « isotropa » nel senso che i due indici α, β assumano lo stesso valore. Se i risultati vanno utilizzati per l'esame di un'azione « quasi concentrata » si deve tener presente che lo studio del campo in un ambito di distanze carico-punto sollecitato dell'ordine dello spessore va effettuato con analisi tridimensionale: ci sarà poi una regione da trattare con la teoria relativa alla classe $1/2, 1/2$; infine, a distanze $\simeq L_0$, si può usare la teoria membranale. Certamente, se invece di una teoria di prima approssimazione, se ne adotti una che tenga in conto anche termini che coprono una più ampia regione del poliedro, si possono con questa trattare insieme più zone d'influenza, evitando le incertezze insite alla transizione. Si va però incontro alle cresciute difficoltà del problema analitico. Infatti, nella letteratura sulle azioni concentrate si trovano trattazioni che si valgono della teoria di prima approssimazione

della classe $1/2, 1/2$ (detta in tale applicazione teoria del « guscio piatto », *shallow shell*, пологий оболочка, in accordo col fatto che la regione interessata si scosta poco dal piano tangente alla superficie media nell'origine). Altre trattazioni si valgono (Vlasov) della teoria membranale. Il raccordo fra le regioni di validità delle due soluzioni è oggetto di studio non ancora svolto. Si osserva che, per facilitare la trattazione analitica, ancora complessa nella teoria del guscio piatto, è stato proposto (G. N. Chernishev, P. M. M., Vol. 27, p. 172-184) di adottare una trattazione che tenga in conto solo termini relativi al contatto sul segmento CD e di una comprendente quelli corrispondenti ad AB , dalla quale seconda si dovrebbe passare alla teoria membranale.

Imprecisioni analoghe possono incontrare anche le applicazioni delle soluzioni per azioni puntiformi come funzioni d'influenza per azioni distri-

	U_0	S_0	T_0	U_1	S_1	T_1	U_2	S_2	T_2										
E_0	...	0 1 1	1 1	...	1 2 1	...	...	...	...										
	...	1 1 0	1 1	...	1 2 1	...	...	...	...										
	...	1 1 1	0 1	...	2 2 2	...	...	...	...										
I_0	0 1 1	0 0 2	...	1 1 2	1 1 1	...	...	2 2 2	...	2									
	1 1 1	0 0 2	...	2 2 2	1 1 1	...	...	2 2 2	...	2									
	1 0 1	2 2 0	...	1 1 2	1 1 1	...	...	2 2 2	...	2									
E_1	...	1 2 1	0	...	0 1 1	...	...	1 2 1	...										
	...	1 2 1	0	...	1 1 0	...	...	1 2 1	...										
	...	2 2 2	0	...	1 1 1	0 1	...	2 2 2	...										
N_0	1 1 0	...	0 2	0	...	1 1	1 1 0	...	0 2		U_3	S_3	T_3						
	1 1 1	...	2 0	0	...	1 1	1 1 1	...	2 0		...	...	1 1						
	...	0 0 2	...	0	1 1 1	...	...	0 0 2	...	0	...	1 1 1	...	1					
I_1	1 1 2	1 1 1	...	0 1 1	0 0 2	...	1 1 2	1 1 1	...	2	...	2 2 2	...	2					
	2 2 2	1 1 1	...	1 1 1	0 0 2	...	2 2 2	1 1 1	...	2	...	2 2 2	...	2					
	1 1 2	1 1 1	...	1 0 1	2 2 0	...	1 1 2	1 1 1	...	2	...	2 2 2	...	2					
E_2	...	...	1 1	...	1 2 1	0	...	0 1 1	1 1		...	1 2 1	...						
	...	...	1 1	...	1 2 1	0	...	1 1 0	1 1		...	1 2 1	...						
	...	...	...	...	2 2 2	0	...	1 1 1	0 1		...	2 2 2	...						
N_1	...	...	1 1	...	0 2	0	...	1 1	1 1 0	...	0 2	...	1 1	...	0 2	...	1 1	...	1 1
	...	...	1 1	...	2 0	0	...	1 1	1 1 1	...	2 0	...	1 1	...	2 0	...	1 1	...	1 1
	...	1 1 1	...	...	0 0 2	...	0	1 1 1	...	0	...	0 0 2	...	0	...	1 1 1	...	1	...
I_2	...	2 2 2	...	1 1 2	1 1 1	...	0 1 1	0 0 2	...	1 1 2	1 1 1	...	1	...	2 2 2	...	2	...	2
	...	2 2 2	...	2 2 2	1 1 1	...	1 1 1	0 0 2	...	2 2 2	1 1 1	...	1	...	2 2 2	...	2	...	2
	...	2 2 2	...	1 1 2	1 1 1	...	1 0 1	2 2 0	...	1 1 2	1 1 1	...	1	...	2 2 2	...	2	...	2
E_3	...	1 2 1	...	...	0 1 1	1 1	...	1 2 1	0	...	...	0 1 1	1 1	...	1 2 1	...			
	...	1 2 1	...	...	1 1 0	1 1	...	1 2 1	0	...	...	1 1 0	1 1	...	1 2 1	...			
	...	2 2 2	...	...	1 1 1	0 1	...	2 2 2	0	...	...	1 1 1	0 1	...	2 2 2	...			
N_2	...	...	2 2	...	...	1 1	1 1 0	...	0 2	0	...	1 1	1 1 0	...	0 2	...	0 2	...	0
	...	...	2 2	...	...	1 1	1 1 1	...	2 0	0	...	1 1	1 1 1	...	2 0	...	2 0	...	0
	...	2 2 2	...	...	1 1 1	...	...	0 0 2	...	0	...	1 1 1	...	0	...	0 0 2	...	0	...
I_3	...	3 3 3	...	...	2 2 2	...	1 1 2	1 1 1	...	0 0 1	0 0 2	...	0	1 1 2	1 1 1	...	1	...	1
	...	3 3 3	...	...	2 2 2	...	2 2 2	1 1 1	...	1 1 1	0 0 2	...	0	2 2 2	1 1 1	...	1	...	1
	...	3 3 3	...	...	2 2 2	...	1 1 2	1 1 1	...	1 0 1	2 2 0	...	2	1 1 2	1 1 1	...	1	...	1
E_4	...	...	...	...	1 2 1	...	...	0 1 1	1 1	...	1 2 1	0	...	...	0 1 1	1 1	...	1 1	...
	...	...	...	...	1 2 1	...	...	1 1 0	1 1	...	1 2 1	0	...	...	1 1 0	1 1	...	1 1	...
	...	...	...	...	2 2 2	...	...	1 1 1	0 1	...	2 2 2	0	...	...	1 1 1	0 1	...	0 1	...
	1 1 1	1 1 1	1 0 1	1 0 1	1 1 0	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 0 1	1 0 1	1 1 0	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 0 1			

Fig. 2.

buite. Per il calcolo degli effetti di carichi collocati a distanze $\simeq L_0$ si possono applicare i risultati delle trattazioni membranali, ma per quelli entro un raggio $\simeq L_0 \delta^{0.5}$ debbono applicarsi le soluzioni di classe $1/2, 1/2$, passando alla trattazione tridimensionale per azioni a distanza $\simeq h$. Piuttosto conviene, se la distribuzione delle azioni dette, forze o dislocazioni, è graduale o associabile alla classe $1/2, 1/2$ valersi dei risultati trovati per queste classi nelle soluzioni dette « localizzate ».

Da queste considerazioni appare l'opportunità dell'uso della rappresentazione indicata, nel definire le classi che intervengono. Indicazioni quantitative al riguardo possono ottenersi da calcoli più accurati, come svolti per il guscio cilindrico nella nota [122]. Un'analoga rappresentazione in uno spazio a 4 dimensioni vale per problemi dinamici [139], [144].

Si deve osservare che le considerazioni svolte sugli ordini di approssimazione si riferiscono alle soluzioni particolari, non ai problemi al contorno nel loro complesso: in questi entrano, come si dirà avanti, le soluzioni particolari combinate: ulteriori semplificazioni adottate nella combinazione possono introdurre ulteriori incrementi negli errori relativi. Ancora con riferimento alle soluzioni da combinare, si esporranno i concetti fondamentali per la costruzione delle classi più importanti.

8. La matrice μ dei coefficienti del sistema.

Nella trattazione generale [96] e successive edizioni [112], [147] si è voluto evitare la scrittura delle equazioni della teoria bidimensionale: la forma generale di queste relazioni dalla quale si possano ricavare i termini caso per caso significativi costituirebbe un sistema differenziale con infinite incognite. Si è perciò adottato un procedimento che permette di condurre sugli esponenti μ le operazioni atte ad individuare, equazione per equazione, gli ordini di grandezza relativi dei termini: così la scrittura esplicita viene limitata ai termini essenziali per l'approssimazione prestabilita. Il sistema viene scritto in forma simbolica matriciale: da questa si ricavano gli esponenti μ che danno gli ordini di grandezza per i coefficienti delle incognite. Non si presenta qui la formulazione generale né la sua deduzione: per questo si rinvia ai lavori sopra citati: si presenta solo una di queste matrici di esponenti (fig. 2).

Le colonne U si riferiscono agli spostamenti, le S alle componenti di tensione parallele alla superficie media Σ , le T alle componenti trasversali. Ciascuna terna di colonne corrisponde ai termini nello sviluppo nella serie di Legendre per le tre variabili della terna. Le proprietà di ortogonalità di quelle funzioni della coordinata normale alla parete nell'intervallo h , fanno sì che i termini con indice 0 diano il valor medio della relativa grandezza: quelli di indice 1 ne diano il momento rispetto al punto di mezzo: i « momenti » di ordine superiore seguono con indici crescenti. Per ciascun indice si hanno 9 incognite e corrispondentemente 9 equazioni. Le tre equazioni di equi-

librio occupano le tre righe con testata E : le equazioni I sono le relazioni di elasticità per le fibre parallele a Σ : le N si riferiscono alle relazioni dove intervengono scorrimenti e dilatazione delle fibre normali a Σ . Per ciascun termine in equazione si riporta nella tabella il valore $n - \alpha r - \beta s$ dove n è l'esponente di δ (ossia di h nel caso in cui solo h dipenda da δ), r è l'ordine di derivazione $\partial/\partial\xi_1$, s quello di $\partial/\partial\xi_2$: ove più termini per la stessa incognita entrino nella stessa equazione, il valore più piccolo della espressione indicata è riportato in tabella. I punti indicano le posizioni vuote. La matrice di fig. 2 si riferisce alla classe 1,0: per questa, la derivazione rispetto a ξ_1 sottrae una unità nel computo dell'esponente μ .

Si noti che, escluse le prime sottomatrici 9×9 , le successive hanno carattere ripetitivo lungo la diagonale principale e le parallele: cioè, i successivi blocchi ricopiano la medesima distribuzione di numeri. Questa importante proprietà ha permesso di desumere, dalla prima parte della tabella, le conclusioni essenziali che si debbono ottenere dalla matrice di ordine infinito.

9. La matrice μ reciproca.

Per valori positivi degli indici α, β le proprietà (1), ove in ciascuna equazione si considerino solo i termini predominanti, permettono di condurre il processo di eliminazione di incognite in un sistema differenziale come se si trattasse di equazioni algebriche: infatti, se l'operatore D_1 (o D_2) viene applicato al prodotto fV , dove f sia un fattore geometrico che nella derivazione mantiene invariato il suo ordine di grandezza, il prodotto VD_1f risulta trascurabile rispetto a fD_1V : l'operazione ha lo stesso risultato come se D_1 fosse un moltiplicatore. In particolare, si può costruire la matrice reciproca del sistema algebrico a cui quello differenziale viene ricondotto per l'esame degli ordini di grandezza delle incognite. Indichiamo come « matrice μ reciproca » la trasposta della matrice contenente gli esponenti che danno gli ordini di grandezza degli elementi nella matrice reciproca del sistema algebrico. Ciascuna riga della μ reciproca dà gli ordini di grandezza delle incognite corrispondenti ad un termine di carico unitario introdotto nell'equazione che abbia nel sistema lo stesso posto di quella riga. Dall'esempio che segue si vedrà come da tali risultati si possa ottenere la trasformazione in forma triangolare del primitivo sistema, secondo disposizioni in generale differenti per le varie situazioni di carico.

Si consideri un sistema di 5 equazioni lineari in altrettante incognite, per il quale sia C (fig. 3) la matrice di esponenti per i coefficienti: come sopra i posti vuoti sono segnati con punto: la matrice μ reciproca è indicata con C^{-1} . La prima riga di questa indica che per un carico $\simeq \delta^0$ nella prima equazione, le incognite, diciamo x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 , assumono rispettivamente gli ordini $\delta^0, \delta^0, \delta^2, \delta, \delta$. Sostituendo nella prima equazione si trova che l'addendo in x_2 è $\simeq \delta^0$, mentre quelli in x_3 e x_5 sono $\simeq \delta^2$ e quindi possono essere trascurati:

dunque il « termine di testa », secondo lo schema C_1 è quello in x_2 nella equazione 1. Così, sommando alle righe di C la prima riga di C^{-1} si individuano i termini predominanti e quindi si trova modo di calcolare una dopo l'altra le incognite x_2, x_1, x_4, x_5, x_3 . Analogamente, in base alle righe 2, 3, 5 della C^{-1} si ottengono le triangolarizzazioni indicate con C_2, C_3, C_5 .

Si osservi che nei vari schemi triangolari si scambiano nelle posizioni di testa gli elementi che si ritrovano sulle varie ipotenuse dei triangoli (pivots). Si noti inoltre che, se due righe della matrice C^{-1} differiscono per un addendo costante esse danno luogo al medesimo schema triangolare. Le medesime operazioni effettuate sulla matrice di fig. 2

relativa matrice μ analoga a quella della fig. 2, la sottomatrice delle prime 15 righe e colonne si può considerare rappresentata (con deviazioni non significative) dalla matrice C della fig. 3 quando si facciano corrispondere ordinatamente alle 5 equazioni le terne E_0, I_0, E_1, N_0, I_1 : le 5 incognite corrispondono rispettivamente alle terne U_0, S_0, T_0, U_1, S_1 . La prima riga in C^{-1} corrisponde al caso in cui si introduca un carico unitario nelle equazioni E_0 (equazioni di equilibrio alla traslazione dell'elemento di guscio): queste equazioni nelle incognite S_0 (tensioni medie parallele a Σ) costituiscono il sistema di testa (riducibile ad un'equazione del II ordine). Le tensioni S_1 (componenti flessionali) risultano piccole come δ rispetto alle

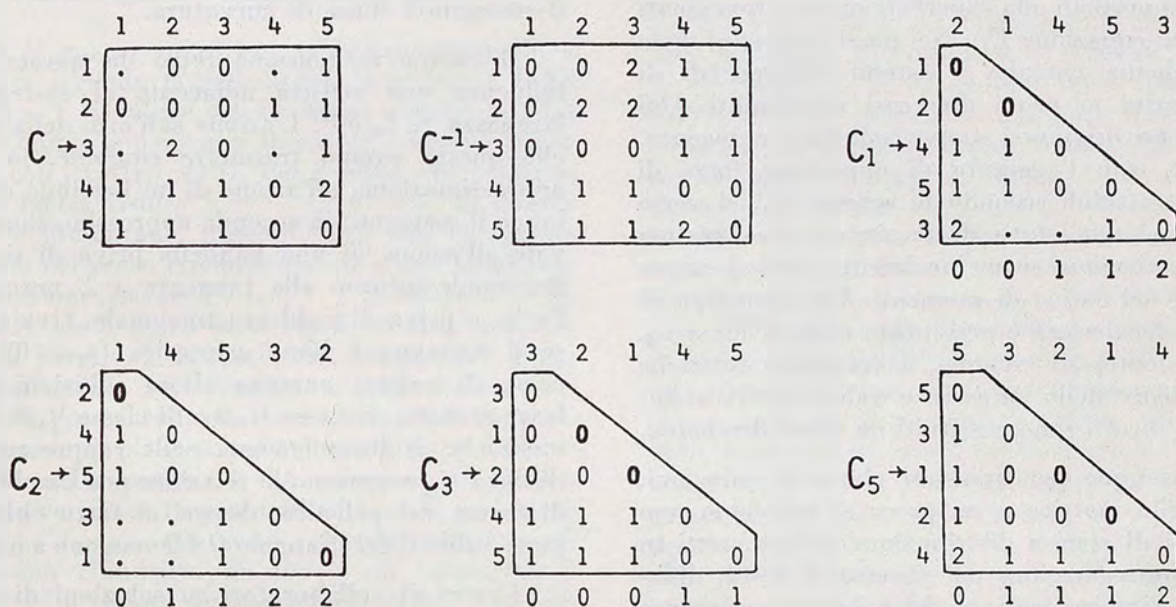


Fig. 3.

danno luogo ad un sorprendente risultato: la μ reciproca della matrice infinita in figura è di dimensioni 12×12 quando si aggruppino in una riga tutte quelle che danno la stessa triangolarizzazione e similmente si aggruppino in una colonna quelle che ripetono gli stessi valori. Sotto la linea punteggiata è segnata la classificazione delle incognite (ossia i relativi μ) per uno di questi schemi ripetitivi. Sono marcati con circoletto i termini « fondamentali » nelle varie equazioni, ossia quelli per cui la somma dell'esponente per l'incognita e di quello del coefficiente dà il minimo valore. Quelli corrispondenti al sistema di testa per uno degli anzidetti gruppi infiniti di incognite, sono marcati con un segno particolare.

10. La classe 0,0 di soluzioni.

La proprietà $\alpha = \beta = 0$ significa che per questa classe la derivazione rispetto alle coordinate non altera l'ordine di grandezza delle incognite. Nella

S_0 , mentre le T_0 (tensioni tangenziali trasversali a Σ) sono piccole come δ^2 . Gli spostamenti medi U_0 e le rotazioni U_1/h sono dello stesso ordine delle S_0 . Questo tipo di soluzione costituisce lo « stato membranale ». Poiché il sistema di testa è formato da equazioni differenziali, possono costruirsi soluzioni omogenee di questo tipo.

Lo schema C_2 corrisponde all'introduzione di termini noti (dilatazioni medie impresse, ad esempio per variazioni termiche costanti nello spessore) nelle equazioni I_0 : da queste, che costituiscono un sistema differenziale del II ordine, si calcolano gli spostamenti medi U_0 : in base a questi si calcolano le rotazioni U_1/h , dello stesso ordine, mediante la condizione relativa agli scorrimenti trasversali (nulli). Ne conseguono sforzi flessionali S_1 , piccoli come δ rispetto al valore che corrisponderebbe alla stessa dilatazione impedita: gli sforzi medi S_0 e quelli di taglio trasversale $T_0 \simeq S_1 \delta$ sono ancora più piccoli. A questo tipo appartengono soluzioni omogenee: le « inestensionali ».

Dall'esame del sistema completo (nella forma corrispondente alla fig. 2) risulta che, eccettuati i due sottosistemi di testa per le soluzioni membranali e inestensionali, tutti gli altri « pivots » sono costituiti da equazioni algebriche: dunque solo da quelli menzionati possono provenire soluzioni omogenee: l'ordine complessivo del sistema della classe 0,0 è 4, come risulta dalle coordinate dei vertici del triangolo OAB della fig. 1.

Lo schema C_3 corrisponde all'applicazione di momenti distribuiti sulla parete: questo carico va considerato quando si voglia tener conto di forze esterne applicate sulle facce del guscio, invece che distribuite nel volume, come deve supporre per lo stato membranale. L'effetto diretto di questi momenti è costituito da sforzi taglianti trasversali (e tensioni normali alla superficie media provenienti dalla terza equazione E_1). Nei passi successivi dello stesso schema entrano i sistemi differenziali di testa relativi ai primi due casi menzionati. Qui non devono originarsi nuove soluzioni omogenee. Del resto, con l'aggiunta di opportune forze di volume, trattabili secondo lo schema C_1 , si viene a costituire uno stato di tensione « localizzato » la cui distribuzione segue localmente quella (sempre graduale) del carico di momenti. Un altro tipo di soluzione localizzata è presentato dallo schema C_5 , corrispondente, ad esempio, a variazioni termiche con gradiente nello spessore e valore medio nullo: gli effetti diretti sono costituiti da sforzi flessionali.

Così dunque per qualsiasi classe di soluzioni, in base alla matrice μ reciproca si individua uno o più tipi di stati a distribuzione diffusa, retti in prima approssimazione dal sistema di testa, differenziale, comprendenti anche soluzioni omogenee che interverranno nelle condizioni al contorno o alle giunzioni: inoltre si presentano stati localizzati che intervengono solo in relazione con le forze o dislocazioni impresse. Così per la classe $1/2, 1/2$ si trova un solo sistema differenziale di testa, di 8° ordine, le cui soluzioni presentano leggi ripide di variazione (con sottotangenti $\simeq L_0 \delta^{0.5}$). La teoria per questo tipo della detta classe presenta strette analogie con quella del guscio piatto. Entrano inoltre, come in ogni classe, tipi di soluzioni localizzate.

11. Soluzioni di striscia.

S'è già detto che da una distribuzione graduale di carico lungo una linea $\xi_1 = \text{cost.}$ di Σ si propaga nel guscio un campo di tensioni composto da soluzioni con indici di variabilità $\alpha = 0, 1/2$ e 1. Dunque, oltre la menzionata soluzione membranale, interviene la soluzione di classe $1/2, 0$; posto che il sostegno non sia linea asintotica di Σ , o meglio, che lungo di esso la curvatura normale di Σ non si approssimi a zero. Lo studio di queste soluzioni è classico nella teoria del guscio: dette « edge

effects » da Love, furono oggetto di classiche trattazioni (H. Reissner, E. Meissner ed altri). È considerevole merito dell'impostazione asintotica l'aver ridotto, senza aumentarne l'errore relativo, l'equazione risultante alla semplice forma

$$D_1^2 \left(\frac{h^2 h_2}{12 (1 - \nu^2)} D_1^2 w \right) + h_2 \varrho_2^2 w = 0 \quad (2)$$

Qui ϱ_2 è l'anzidetta curvatura, ν è il coefficiente di Poisson, $h_2 d\xi_2$ è l'arco di linea $\xi_1 = \text{cost.}$ che corrisponde a $d\xi_2$. Con l'esclusione menzionata, la (2) vale per qualsiasi linea di sostegno tracciata su qualsiasi Σ , con errore relativo $\delta^{0.5}$: l'errore si riduce a $\simeq \delta$ con l'aggiunta di due addendi dipendenti dalla torsione di Σ , che quindi son nulli se il sostegno è linea di curvatura.

Il campo di tensione retto da questa teoria influenza una striscia adiacente al sostegno, di larghezza $\simeq L_0 \delta^{0.5}$. L'azione sull'orlo della striscia che questo campo trasmette equivale, in prima approssimazione, all'azione di un flessibile disposto lungo il sostegno: in seconda approssimazione equivale all'azione di una bandella priva di rigidità flessionale intorno alla tangente a Σ normale all'orlo, e priva di rigidità torsionale. Ovviamente, se il sostegno è linea asintotica ($\varrho_2 = 0$) la (2) cessa di valere: entrano allora soluzioni di più larga striscia, di classe $1/3, 0$ o di classe $1/4, 0$. Queste modifiche di formulazione, nella rappresentazione di fig. 1 si presentano in relazione con cambiamenti di forma del poliedro, dovuti al fatto che alcuni punti salienti del triangolo OAB vengono a mancare.

Lavori di collaboratori su soluzioni di striscia sono comunicati nella nota [124]. Uso delle soluzioni di classe $1/3, 0$ è fatto in [97], [100], [103], secondo uno studio iniziato in [93]. È opportuno tener presente che la trattazione per queste soluzioni di striscia può essere ricavata dalla teoria per la classe $1/2, 1/2$: questo implica che, quando sia da determinare il campo in prossimità di punti di zero per ϱ_2 , conviene far uso della trattazione relativa alla classe $1/2, 1/2$ se si vogliono evitare i problemi di transizione da una formulazione all'altra.

La classe 1,0 contiene soluzioni di striscia con larghezza $\simeq h$ della zona influenzata: queste sono dette soluzioni di strato limite. I tipi essenziali in questa classe sono 4: ad uno di essi si riferisce la fig. 2. Il sistema di testa per questi, nella forma bidimensionale, comporta una serie infinita di equazioni: ove si reintroduca la coordinata normale a Σ , nel campo di questa coordinata e di ξ_1 la soluzione di detto sistema per due tipi è fornita da funzioni armoniche, per gli altri due da funzioni biarmiche: ciò vale per questo primo passo, sia per la piastra sia per il guscio qualsiasi. L'esame mediante la matrice μ reciproca rivela ancora 8 tipi, per i quali il sistema di testa è del primo ordine

(F. Algostino, *Sugli stati di strato limite nei gusci*, Rend. Acc. Naz. Lincei, 1977, p. 791-796). Soluzioni di questi particolari tipi non intervengono nei problemi al contorno: però la loro individuazione, che mostra la loro derivazione da un sistema di ordine complessivo pari a 8, ha interesse a conferma del fatto che le soluzioni di strato limite, pur presentandosi in serie infinita sulla normale all'orlo non costituiscono un sistema completo. A questa serie, per permettere l'attuazione delle condizioni (cinematiche o statiche) punto per punto dell'orlo, vanno aggiunte le soluzioni di un sistema di 8° ordine: questo è l'ordine del sistema in ogni caso disponibile, misurato dalle coordinate dei punti C, D del poliedro, fig. 1.

12. Teoria del cilindro lungo e teorie affini.

Per il guscio cilindrico, se la coordinata ξ_1 è misurata secondo le generatrici, il triangolo OAB della fig. 1 si riduce ad un unico vertice situato in A . Quindi appare una faccia di contorno triangolare con i vertici APD . Per il piano che contiene questa faccia risulta $\alpha = -1/2$, $\beta = 0$. In questa classe si presentano, dunque, stati con variazione graduale nel senso circonferenziale e con lunghezza di variazione assiale $\simeq L_0 \delta^{-0.5}$: la relativa legge decrementale è tanto meno ripida quanto più sottile è la parete. Se la lunghezza del guscio è $\simeq L_0$ ossia dell'ordine delle dimensioni della sezione normale alle generatrici, queste soluzioni non possono svilupparsi: il piano tangente con $\alpha = 0$ tocca il poliedro nella punta A . Le soluzioni omogenee, dovendo verificare l'equazione $D_1^4 V = 0$, sono polinomie in ξ_1 : sono le note soluzioni membranali del guscio cilindrico. Se invece la lunghezza è $\simeq L_0 \delta^{-0.5}$ o supera questo valore, su un orlo normale alle generatrici (o in generale, obliquo rispetto ad esse) le soluzioni di questa classe vanno combinate con quelle di classe $1/2, 0$: i due sistemi, di 4° ordine nella coordinata ξ_1 consentono di porre le condizioni al contorno. Si nota che il sistema per la classe $-1/2, 0$ è di 8° ordine rispetto alla coordinata circonferenziale, come del resto è indicato dalla coordinata s del punto D .

La teoria relativa alla classe $-1/2, 0$ permette di analizzare situazioni di carico per le quali il comportamento del guscio si accosta a quello di una trave. In questa direzione, trattazioni semplificate si possono costruire per situazioni di carico corrispondenti ad ancora maggiori lunghezze di variazione nella direzione delle generatrici: per $\alpha < -1/2$, sempre con $\beta = 0$, il piano tangente contiene il lato PD e si stacca dal punto A . Allora, nel primo passo di approssimazione si affronta un problema nella sola variabile, coordinata circonferenziale: si studiano così problemi del guscio-trave.

Nel paragr. 4.11.5 del testo [147] si mostra che una teoria affine a quella della classe $-1/2, 0$ del guscio cilindrico si può costruire per ogni superficie media che possa generarsi deformando le generatrici secondo linee che assumano rispetto alla direzione originaria pendenze variabili da punto

a punto ma sempre $\simeq \delta^{0.5}$: così l'impostazione asintotica conduce all'estensione di detta teoria ad una ampia categoria di strutture a guscio «quasi cilindrico». Una struttura composta da elementi di superficie di traslazione con curvatura longitudinale piccola rispetto a quella trasversale venne trattata da F. Algostino (*Il guscio quasi cilindrico*, in [119]). A.M. Sassi studiò il guscio conico di piccola rastremazione (*Il guscio conico lungo*, Ist. Lombardo, Rend. Sc., 1972, p. 194-204). Del Col analizzò un problema di giunzione di gusci conico-cilindrici, anche qui per limitata rastremazione (*Sul guscio rotondo quasi cilindrico con angolosità*, in [143]).

13. Il guscio piatto.

Il guscio piatto (o «ribassato») si può generare collegando a δ non solo lo spessore, ma anche le curvature di Σ . Si assuma come lunghezza di riferimento L_0 ancora la massima dimensione L della parete, facendo variare la lunghezza R , rappresentativa dei raggi di curvatura normale di Σ , secondo la relazione $R \simeq L_0 \delta^{-1}$. Conseguentemente le pendenze di Σ su un piano base restano piccole come δ . Il poliedro rappresentativo modifica la sua forma, risultando troncato all'altezza del triangolo PCD , restando invariata la restante parte indefinita. Così PCD è faccia esterna: le corrisponde una classe 0,0 la cui teoria è analoga a quella della classe $1/2, 1/2$ per il guscio non piatto: ciò può pensarsi, immaginando che la trasformazione introdotta adagi sul piano $n = 2$ il triangolo OAB . Il tipo principale fra gli stati di questa classe è retto da un sistema di 8° ordine, che include fra i suoi termini fondamentali alcuni fra quelli che nella precedente formulazione erano classificati secondari. Subentrano inoltre semplificazioni geometriche derivanti dal fatto che in tutto il campo la geometria su Σ non differisce sostanzialmente da quella della proiezione sul piano base. Una netta differenza fra le due trattazioni appare nell'applicazione. Ad esempio, si debba trattare un guscio di rivoluzione di monta limitata. Per la determinazione del campo di tensioni presso il parallelo di orlo, si adoperi dapprima la teoria della classe $1/2, 0$ se le azioni sul contorno presentano poche onde di variazione, quella della classe $1/2, 1/2$ se il grafico di quelle sia accidentato (ad esempio, per vincoli concentrati). In entrambi i casi, la lunghezza di variazione per la propagazione della perturbazione all'interno del guscio risulta $\simeq \sqrt{hR}$ essendo $1/R$ la curvatura della sezione normale di Σ tangente all'orlo. Se la lunghezza trovata è assai minore che la dimensione massima della parete, il calcolo può effettuarsi con quelle teorie, con qualche eventuale semplificazione derivante dalla piccolezza della pendenza del meridiano.

Se invece risulta $L \simeq \sqrt{Rh}$, cioè se una perturbazione si propaga da un punto del contorno al suo opposto, allora si deve considerare il guscio come piatto. Ciò implica che le leggi di propagazione degli effetti di orlo, semplicemente esponen-

ziali nel primo caso, sono da calcolare con l'uso delle funzioni di Bessel nel secondo. Il cambiamento è intervenuto perchè nelle equazioni il termine $\eta_2 V$ (dove $\eta_2 \simeq 1/L$ è la curvatura geodetica della linea $\xi_1 = \text{cost.}$), trascurabile rispetto a $D_1 V$ quando $L \gg \sqrt{Rh}$, non lo è quando $L^2 \simeq Rh$. Questa è la relazione caratterizzante il campo di applicazione della teoria del guscio piatto, che spesso viene legato alla piccolezza della pendenza $\simeq L/R$ di Σ .

Quando è lecito, conviene sfruttare le semplificazioni derivanti dalla limitata pendenza di Σ , utilizzando al tempo stesso le facilitazioni di calcolo che, per il guscio non piatto offre la scomposizione del sistema di 8° ordine in due del 2° (quelli degli stati membranali e inestensionali) e uno del 4° (quello degli stati di striscia). È opportuno pertanto introdurre il concetto di guscio «quasi piatto». Queste formulazioni ibride sono specialmente convenienti quando l'orlo corra lungo asintotiche [108], [109].

Si deve ancora osservare che per il guscio piatto le soluzioni di strato limite presentano qualche particolarità, piuttosto relativamente alla classificazione delle incognite che per i caratteri essenziali (F. Algostino, *Effetti di carichi a variazione ripida nel guscio piatto*, Rend. Acc. Naz. Lincei, 1977, p. 473-481). Si nota infine che la parete piana rientra nella stessa rappresentazione come il guscio piatto nel grafico di fig. 1, con la particolarità che il sistema di 8° ordine si scinde in due del 4°.

14. La combinazione delle soluzioni particolari.

Quanto precede dà un'idea sul procedimento di costruzione delle soluzioni particolari. Anzitutto si precisano le classi di soluzioni in gioco, in base alla configurazione dei «macroelementi». Si intendono con questo termine le porzioni di guscio per ognuna delle quali si possono costruire soluzioni continue. Linee di contorno dei macroelementi su Σ sono luoghi di discontinuità: in primo luogo gli orli, liberi o vincolati, in genere piuttosto collegati ad elementi di riquadro non del tutto rigidi né totalmente cedevoli. Anche linee interne di discontinuità sono da considerare: giunzioni attraverso le quali si presenta una variazione nella geometria di Σ o nella distribuzione di carichi. In base alla configurazione del macroelemento e dei carichi agenti il grafico della fig. 1, o uno analogo, indica le classi che intervengono nel campo. Per ciascuna di essa l'impostazione asintotica, attraverso la matrice μ e la μ reciproca individua i tipi di soluzione in relazione con le modalità di carico e per ciascuno fornisce il sistema differenziale in forma triangolare, nei suoi termini essenziali per il prefissato ordine di approssimazione. Questo lavoro preparatorio si svolge di regola sulla base di risultati acquisiti, deducibili per la via indicata ma in gran parte già ottenuti attraverso ipotesi suggerite da intuizione o da esperienze numeriche. Gli strumenti indicati sono particolarmente utili quando si debbano affrontare problemi nuovi o si voglia proce-

dere a controlli su formulazioni alternative: a questa seconda indagine si riferiscono i lavori [115], [122] e la nota di A. M. Sassi, *Sulla precisione della teoria di Donnell per il guscio cilindrico*, Atti Acc. delle Scienze di Torino, 1967, p. 837-854).

Delle soluzioni particolari così costruite per ciascun macroelemento si forma la combinazione

$$V = V_p + \sum A^h V^h \quad (3)$$

Si indica qui con l'indice p in alto il valore della variabile V , componente di spostamento o di tensione, calcolato tenendo conto dei carichi, forze o deformazioni impresse, e prescindendo dalla considerazione del contorno. La sommatoria si estende alle soluzioni omogenee che si possono creare imponendo sforzi o spostamenti sul contorno, qui inteso come costituito dall'orlo della parete: le azioni sulle facce si includono nel calcolo della soluzione p . Nelle soluzioni da includere nella sommatoria vi sono quelle di strato limite: con l'introduzione di queste si possono imporre condizioni specificate per ciascun punto della superficie di orlo. Questa specificazione trascende le necessità (o le possibilità) dell'applicazione. Invece, ove si prescinda da quelle soluzioni, si possono imporre 4 condizioni per ciascun punto della linea che contorna Σ . L'analisi asintotica di situazioni schematiche permette di determinare il contributo che le soluzioni di strato limite apportano su una caratteristica di orlo (forza risultante, spostamento medio) quando esse siano associate ad un determinato tipo fra gli altri esaminati (ad esempio, l'inestensionale). In base a questo esame si possono individuare certe caratteristiche combinate, tali che in queste il contributo dello strato limite si riduca all'ordine di una certa potenza di δ rispetto alla caratteristica stessa dello stato associato. In particolare, per lo stato inestensionale, nella quantità $Q + D_2 M$ (Q = forza tagliente trasversale, M = momento rispetto alla tangente a Σ normale all'orlo) il contributo dello strato limite è $\simeq \delta$, mentre in Q esso è $\simeq \delta^0$. Si giunge così alla forza tagliente «modificata di Kirchhoff». Con queste modifiche si vengono ad eliminare le soluzioni di strato limite (o meglio, si rende trascurabile il loro contributo). Quindi la sommatoria (3) va estesa a pochi tipi di soluzioni.

15. Determinazione degli ordini di grandezza dei fattori di scala.

Le soluzioni omogenee h a cui appartengono le variabili V nella sommatoria possono essere costruite stabilendo a piacere l'ordine di grandezza di una variabile: ad esempio stabilendo per le tensioni massime l'ordine σ , essendo questo un valore di riferimento comune per le tensioni. In base ad esso essendo definiti i carichi o le deformazioni impresse in base a σ/E (E = modulo di elasticità), si tratta di determinare gli esponenti per le potenze $\delta^h \simeq A$ che definiscono la grandezza dei fattori di scala A nella combinazione (3). Seb-

bene si tratti di un gruppo infinito di incognite per ciascun tipo di soluzione che interviene, il problema può essere trattato come se ciascuna sottomatrice fosse un semplice elemento: le operazioni di fig. 3 restano valide purché gli elementi diagonali degli schemi di risoluzione siano matrici quadrate (non singolari). Per questo occorre precisare la molteplicità di ciascun gruppo di soluzioni in relazione a quella delle condizioni in cui queste intervengono ⁽⁴⁾. Così, per un macroelemento con una semplice curva (chiusa) per contorno sotto condizioni uniformi si hanno 4 equazioni. Se il guscio è piatto, oppure se i carichi applicati hanno lunghezza di variazione $\simeq L_0 \delta^{0.5}$, intervengono le soluzioni del sistema di 8° ordine con molteplicità 4. Se il guscio non è piatto e il carico ha lunghezza di variazione L_0 intervengono le soluzioni membranali e inestensionali con molteplicità uno e con doppia quelle di striscia. In questo secondo caso lo schema triangolare è efficace, in quanto riduce notevolmente il numero dei valori V^h da calcolare esplicitamente. A questo effetto anche appare la convenienza della formulazione del guscio quasi piatto. Per la giunzione di due elementi con un solo contorno comune, in condizioni uniformi, si hanno 8 equazioni: ad esempio, per l'intersezione di due gusci cilindrici indefiniti di raggi assai diversi, intervengono le soluzioni di classe $1/2, 1/2$ con molteplicità 4 per il maggiore e quelle di striscia $1/2, 0$ con quelle del cilindro lungo, classe in $-1/2, 0$ per il minore, entrambe con molteplicità 2. Numerosi esempi sono svolti in [112] oltre che singolarmente in ognuno dei lavori elencati sui gusci. Si osserva che in molte applicazioni i procedimenti in uso portano ad errori relativi $\simeq \delta^{0.5}$ nei risultati: di regola però si tende a ridurre gli errori all'ordine δ . A tale dato conclusivo dovrebbe essere commisurata la precisione richiesta nella costruzione delle soluzioni componenti.

16. Considerazioni comparative.

Può sembrare strano che, mentre l'interesse prevalente della ricerca sui gusci si concentra sui metodi discretizzati di risoluzione (in particolare, per elementi finiti), gli studi menzionati vertano sulla formulazione analitica e in parte, sui fondamenti di questa. Questo indirizzo è giustificato dallo scopo dichiarato: ricerca di espressioni semplici, di uso immediato o elaborabili da un piccolo computer, le quali indichino, in via sia pure approssimata, il modo di resistere della parete sottile in situazioni generali di forma e di vincolo. A questa finalità il procedimento asintotico s'è mostrato ben efficiente per suggerire le semplificazioni

⁽⁴⁾ Ciascuno dei 4 tipi principali di strato limite ha molteplicità infinita: da qui appare il vantaggio della loro eliminazione previa.

adottabili attraverso un processo esente da stime soggettive. Esso ha la caratteristica di frazionare la risoluzione per classi e tipi distinti che, invece, la trattazione aprioristica include in un solo gruppo, con il vantaggio di evitare le difficoltà inerenti alla separazione dei campi di validità, ma comportando una complicazione che esclude soluzioni esplicite, fuorché per forme geometriche estremamente semplici. Da queste formulazioni aprioristiche generali si possono derivare quelle speciali per singole classi ⁽⁵⁾: si preclude però per questa via indiretta la possibilità di affinamenti o controlli, compromessi dalle ipotesi di base. Viceversa,

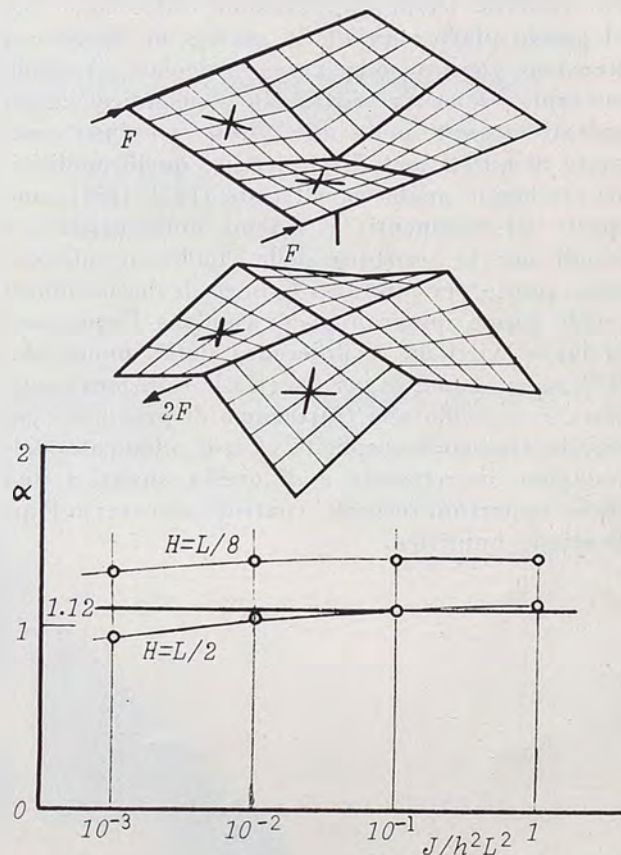


Fig. 4.

partendo da formulazioni speciali asintotiche, è possibile costruirne trattazioni che abbraccino più classi [148].

Le trattazioni discretizzate, che per la teoria generale costituiscono uno strumento indispensabile,

⁽⁵⁾ La teoria « ordinaria », come ad esempio nella forma data da B. BUDIAŃSKI e J. L. SANDERS, *On the « best » first-order linear shell theory*, Progress in Appl. Mech., 1963, p. 129-140, vale per $\alpha, \beta < 1$: quindi gli stati di strato limite ne restano fuori. Uno di questi, con molteplicità uno, è incluso nella trattazione di E. Reissner che tiene conto con certe approssimazioni delle deformazioni dovute al taglio trasversale. In certe formulazioni recenti si è fatto uso forse eccessivo dei più raffinati algoritmi matematici.

sono richieste anche per la determinazione delle soluzioni di certe classi, specialmente per la classe $1/2, 1/2$. Per questa, nelle note [132], [134] si è presentata una discretizzazione, per la quale Algostino preparò la programmazione: questo procedimento, che si vale di campi parziali di spostamenti e di tensioni e ne ricava le condizioni di equilibrio e, rispettivamente, di congruenza mediante l'uso dell'equazione dei lavori virtuali (in ciò simile ad un procedimento per elementi finiti), conduce ad equazioni, indefinite e al contorno, analoghe alle equazioni a differenze finite e come quelle direttamente legate al sistema differenziale, ma col vantaggio di rispettare in ogni caso le simmetrie di Betti. Sono inclusi in equazione i termini necessari per renderne lecita l'applicazione alla classe 0,0 del guscio piatto: quindi la piastra in flessione o estensione rientra come caso particolare. A titolo d'esempio, sono presentati in Appendice alcuni risultati ottenuti nella nota [149] con l'uso combinato di questi metodi numerici e quelli analitici. Per l'indagine analitica nel testo [147], [151] sono esposti gli strumenti: i sistemi differenziali e i metodi per la scrittura delle condizioni al contorno, punto per punto sulle linee di discontinuità o nelle forme integrali a cui conduce l'equazione dei lavori virtuali. A differenza dalla monografia [112], si sono omesse per brevità le soluzioni particolari, riservando alla trattazione di problemi specifici le risoluzioni esplicite. L'uso affiancato dell'indagine discretizzata e di quella analitica può fornire opportuni reciproci controlli attraverso l'applicazione numerica.

Appendice.

Si è considerata una struttura formata da quattro pannelli, quadrati in pianta di lato L , di paraboloide iperbolico, con un vertice a distanza H dal piano degli altri tre, contornati da travi di trascurabile rigidezza torsionale ma rigide per gli spostamenti verticali e munite di rigidezza flessionale EJ per gli spostamenti orizzontali (fig. 4). Se due pannelli adiacenti (marcati in figura) sono soggetti al carico verticale uniforme p , tendono a prodursi spostamenti in direzione opposta alle frecce, impediti dall'applicazione delle forze indicate, con $F = pL^3/2H$. Si consideri ora la struttura soggetta a forze opposte a queste. Rispetto ai lati vincolati (centrali nella figura in alto, laterali in quella in basso) si producono spostamenti U nella direzione delle forze anzidette, espressi da

$$F = \frac{2EU}{L^3} \left(\alpha_0 J + \alpha \frac{h^2 L^3}{H} \right) \quad (4)$$

Questa espressione è ottenuta mediante uso dell'equazione dei lavori, per spostamenti virtuali di scorrimento dei pannelli. Il coefficiente α_0 , calcolato per il telaio in assenza dei pannelli, vale 16.8. Il coefficiente α determinato in base alla teoria del guscio quasi piatto [108] vale 1.12. Con il metodo della nota [132], con suddivisione in 20 tratti per lato, si ottennero i valori segnati con circoletto nel diagramma della stessa figura. La conoscenza dei due coefficienti permette di determinare in base alla (4) la ripartizione della forza F fra telaio e pannelli.

La Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino accoglie nella « Rassegna Tecnica », in relazione ai suoi fini culturali istituzionali, articoli di Soci ed anche non Soci, invitati. La pubblicazione, implica e sollecita l'apertura di una discussione, per iscritto o in apposite riunioni di Società. Le opinioni ed i giudizi impegnano esclusivamente gli Autori e non la Società.

Direttore responsabile: **GIUSEPPE FULCHERI**

Autorizzazione Tribunale di Torino, n. 41 del 19 Giugno 1948

Spedizione in abbonamento postale GR III/70 - Mensile

STAMPERIA ARTISTICA NAZIONALE - CORSO SIRACUSA, 37 - TORINO