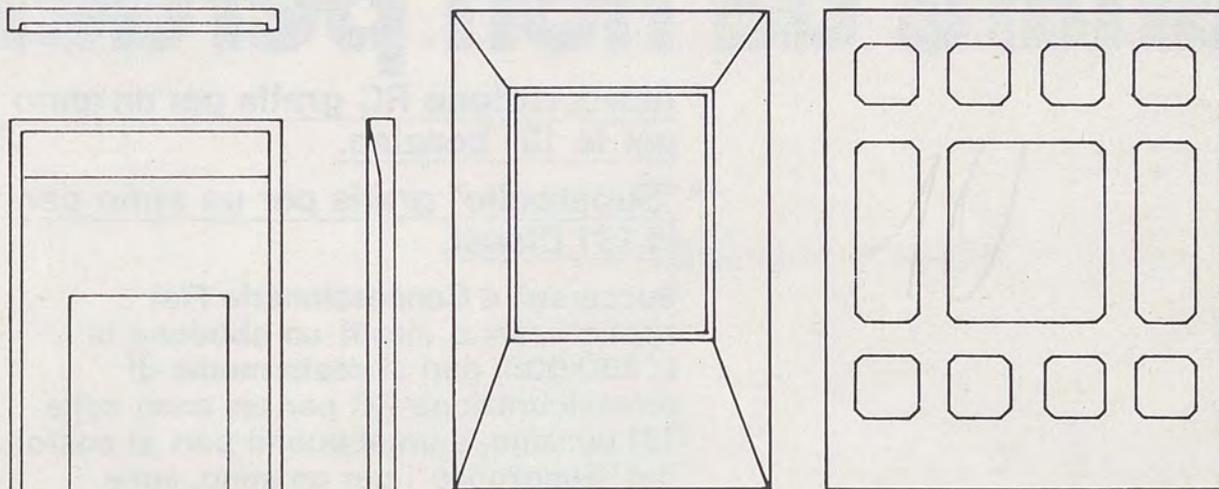




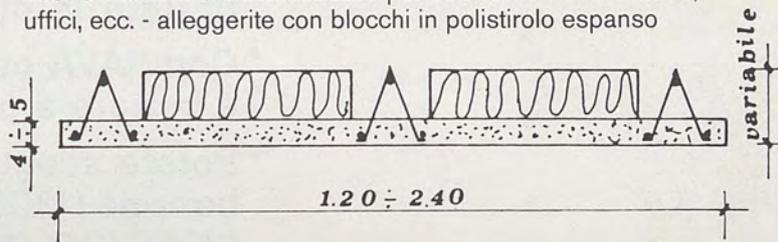
DIVISIONE PREFABBRICATI E MANUFATTI IN CEMENTO

Piazza Derna, 225 - 10155 TORINO - Telefoni 204107/265770

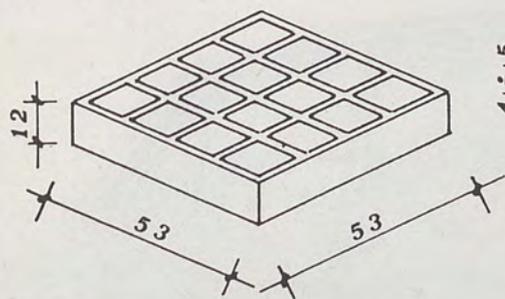
PANNELLI DI TAMPONAMENTO E MONOBLOCCHI PER FABBRICATI RESIDENZIALI, UFFICI E INDUSTRIALI



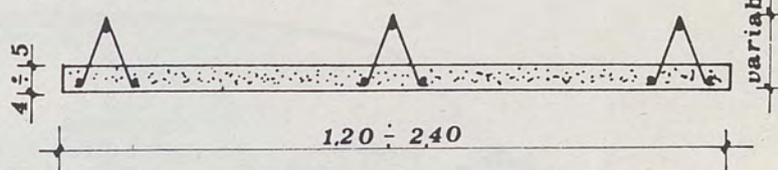
Lastre tralicciate in calcestruzzo per solai di civile abitazione, uffici, ecc. - alleggerite con blocchi in polistirolo espanso



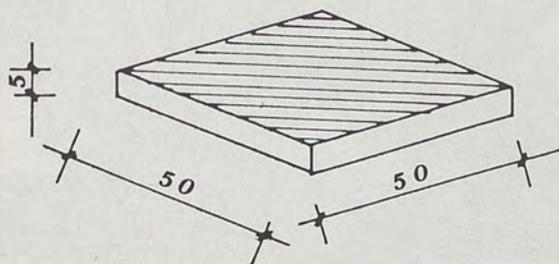
Grigliato per zone verdi e percorsi pedonali



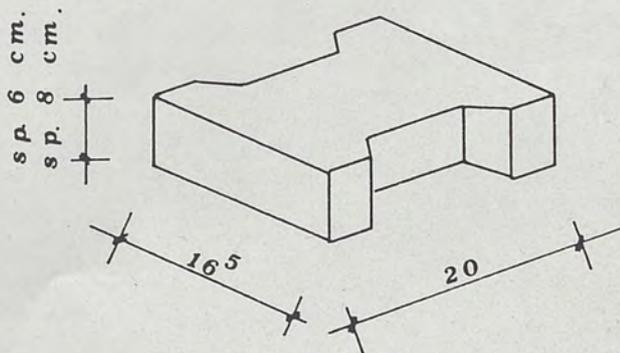
Lastre tralicciate in calcestruzzo per solai, ponti, viadotti, solai industriali, ecc.



Piastre pavimento in calcestruzzo rigate



Pavimento autobloccante in calcestruzzo "Behaton"



Oggi è tempo di acquisti fatti bene.

Fiat 131: un affare da non perdere.

* Assicurazione RC gratis per un anno per le 131 benzina.

* "Superbollo" gratis per un anno per le 131 Diesel.

Succursali e Concessionarie Fiat applicheranno infatti un abbuono di L. 250.000, pari al costo medio di un'assicurazione RC per un anno sulle 131 benzina, e un abbuono pari al costo del "Superbollo", per un anno, sulle 131 Diesel.

* **Massima valutazione dell'usato di tutte le marche, anche estere.**

* **Con SAVA potete ritirarla subito e iniziare a pagarla tra 3 mesi.**

* **Potete sceglierla tra 12 versioni: benzina (1300/1600/2000) o Diesel (2000/2500), berline o Panorama.**

FIAT



I contenuti della 131 Supermirafiori

Motore a doppio albero a camme in testa: nessun modello estero della sua categoria ha questa raffinata soluzione sportiva. * Velocità 160 e 170 km/h. * Volante regolabile. * Cambio a 5 marce. * Poggiatesta anteriori e posteriori. * Contagiri. * Sbrinatori alla base dei cristalli laterali anteriori. * Fari allo jodio. * Luci di retromarcia e retronebbia. * Rivestimenti esclusivi d'alta qualità. * Moquette integrale (anche nel bagagliaio).

ATTI E RASSEGNA TECNICA

DELLA SOCIETA DEGLI INGEGNERI E DEGLI ARCHITETTI IN TORINO

RIVISTA FONDATA A TORINO NEL 1867

NUOVA SERIE . ANNO XXXIV . N. 9 SETTEMBRE 1980

SOMMARIO

RASSEGNA TECNICA

- P. M. CALDERALE e G. FASOLIO - *Transitorio termico durante l'impianto di protesi ortopediche cementate e valutazione del suo effetto sui tessuti biologici* pag. 309
- V. ANSELMO, E. CARONI, F. DI NUNZIO e F. GODONE - *Precipitazioni di breve durata in Piemonte. Contributo preliminare* . » 315
- G. CHIRIATTI, G. PLESCIA e A. PORCU - *La linea elastica: formalizzazione/decidibilità* » 327

Direttore: Giuseppe Fulcheri.

Vice Direttore: Roberto Gabetti.

Comitato di redazione: Dante Buelli, Vincenzo Ferro, Marco Filippi, Cristiana Lombardi Sertorio, Mario Oreglia, Francesco Sibilla, Giovanni Torretta, Gian Pio Zuccotti.

Segretaria di redazione: Elena Tamagno.

Redazione, segreteria, amministrazione: Società degli Ingegneri e Architetti in Torino, via Giolitti, 1 - Torino.

ISSN 0004-7287

Periodico inviato gratuitamente ai Soci della Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino.

NELLO SCRIVERE AGLI INSERZIONISTI CITARE QUESTA RIVISTA III

IMPIANTI TELEFONICI DI PROPRIETÀ

Molte aziende, come industrie, banche, compagnie di assicurazione, enti pubblici, hanno l'impianto telefonico di proprietà, perché i calcoli economici sono evidenti:

- ammortamento in pochi anni** *il valore di una centrale telefonica dopo 5 anni è del 60%.*
- facilità di adeguamento** *sostituzione, applicazione di accessori, spostamenti, modifiche.*
- celerità d'intervento** *nessun impegno pluriennale a scadenza fissa, nessun deposito cauzionale.*
- consegne rapide.**

Altre informazioni potranno darvele i nostri tecnici. INTERPELLATECI!

INTERFONICI - RICERCA PERSONE - DIFFUSIONE SONORA
VENDITA APPARECCHI ED ACCESSORI TELEFONICI



RADIO TELEFONICA SUBALPINA

F. VIGNA - S. GASPARATO & C. - s.a.s.

TORINO - C.so DUCA DEGLI ABRUZZI 6 - TEL. 530300 - 530600

Prefabbricare un' esigenza di oggi



Al servizio
del progettista
e del committente



PREFABBRICATI PRECOMPRESSI VIBRATI IN C.A.

ING. PRUNOTTO

12060 GALLO GRINZANE ALBA (CN) TEL. (0173) 62032-62033

RASSEGNA TECNICA

La Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino accoglie nella « Rassegna Tecnica », in relazione ai suoi fini culturali istituzionali, articoli di Soci ed anche non Soci, invitati. La pubblicazione, implica e sollecita l'apertura di una discussione, per iscritto o in apposite riunioni di Società. Le opinioni ed i giudizi impegnano esclusivamente gli Autori e non la Società.

Transitorio termico durante l'impianto di protesi ortopediche cementate e valutazione del suo effetto sui tessuti biologici

P. M. CALDERALE () e G. FASOLIO (**)* analizzano, mediante la tecnica degli elementi finiti, il transitorio termico dovuto alla generazione di calore del cemento acrilico, usato normalmente per l'impianto di protesi ortopediche aventi uno stelo. Viene quindi valutata l'influenza della quantità e delle caratteristiche del cemento sul danneggiamento che possono subire i tessuti biologici. Il calcolo, effettuato per un particolare tipo di protesi di caviglia, fornisce indicazioni di carattere generale per qualunque tipo di artroprotesi con stelo.

INTRODUZIONE

L'uso del cemento acrilico ha reso possibile la soluzione di numerosi problemi relativi alla fissazione di articolazioni artificiali (artroprotesi). Il cosiddetto cemento acrilico è un materiale a due componenti. Un componente in polvere costituito principalmente da polimetilmetacrilato (PMMA) e un componente liquido costituito principalmente da monometilmetacrilato (MMA).

Dopo la miscelazione dei due componenti si sviluppa un processo di polimerizzazione con reazione esotermica. La miscela di monomero e polimero produce una pasta che deve essere utilizzata dopo circa 1,5-4 minuti sia per permettere la volatilizzazione del monomero citotossico, sia affinché la massa di cemento abbia ancora una sufficiente malleabilità per penetrare anche nelle più piccole cavità dell'osso.

Un tempo di attesa troppo lungo porta ad un eccessivo indurimento del cemento con la conseguenza di avere un cattivo ancoraggio con l'osso e addirittura laminazione.

Mentre si studiano sempre nuovi modelli di protesi e non è ancora chiarito il meccanismo di accoppiamento osso-protesi, il cemento acrilico rimane il mezzo di fissazione della quasi totalità delle protesi. Per il cemento acrilico non si sono registrati fondamentali miglioramenti da quando è stato per la prima volta usato da Charnley (1960).

Sia sulle caratteristiche del cemento che sugli effetti collaterali da esso prodotti esiste una vasta letteratura.

La temperatura ed il tempo di polimerizzazione dei vari cementi in commercio variano considerevolmente. Diversi fattori possono influenzare queste caratteristiche, per esempio il rapporto liquido-

polvere, il volume della miscela, la temperatura ambiente.

La quantità di calore generato e la massima temperatura raggiunta durante la polimerizzazione aumentano con l'aumentare della quantità di cemento usato.

In letteratura si rileva che la massima temperatura di polimerizzazione varia da 40 °C a 120 °C. Come è noto lo scollamento (mobilizzazione) è uno dei problemi più importanti in un impianto di artroprotesi. I processi che possono causare questo scollamento si verificano all'interfaccia osso-protesi. Sfortunatamente l'uso del cemento acrilico può danneggiare questa interfaccia.

Recenti studi di Feith (1975) concludono che l'elevata temperatura di polimerizzazione del cemento provoca modifiche nel tessuto osseo più gravi della necrosi corticale ischemica dovuta alla preparazione chirurgica della cavità midollare.

Nei dati riportati in letteratura non c'è accordo sui valori massimi di temperatura raggiunti all'interfaccia cemento-osso. Nella letteratura tedesca è riportato il valore di 56 °C come limite critico di temperatura. Feith (1975) afferma che mentre una temperatura di 56 °C può essere un limite per la denaturazione di certe proteine (Lehnartz, 1959), il limite per la necrosi cellulare dell'osso è significativamente più basso.

Recentemente Huiskes (1978) ha svolto un ampio e notevole lavoro esaminando l'influenza di alcuni parametri sulla temperatura raggiunta all'interfaccia cemento-osso. I principali risultati di questo studio sono riportati nelle figure da 1 a 5. Huiskes, rilevato che i valori all'interfaccia cemento-osso variano tra valori che sono al di sopra e al di sotto della soglia di necrosi, ritiene utile un'indagine sull'influenza dei parametri che entrano in gioco nel problema, ritenendo che questi siano la causa della dispersione dei valori riportati in letteratura.

(*) Politecnico di Torino.

(**) FIAT Auto Spa, Torino.

Huiskes ha per questo effettuato una analisi parametrica utilizzando la tecnica degli elementi finiti, prendendo in considerazione i seguenti fattori:

- Curva di polimerizzazione del cemento (fig. 1)

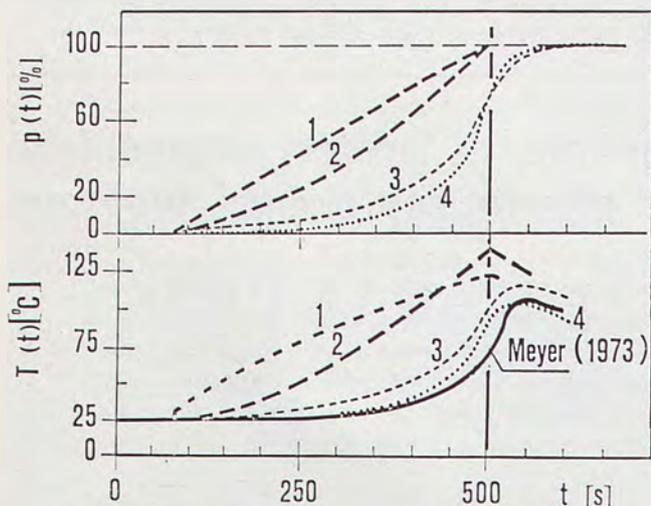


Fig. 1 - Quattro differenti curve di polimerizzazione. La curva 4 approssima meglio i risultati sperimentali ottenuti da Meyer. $p(t)$ = % del Metilmetacrilato polimerizzato in funzione del tempo. $T(t)$ = andamento della temperatura in funzione del tempo.

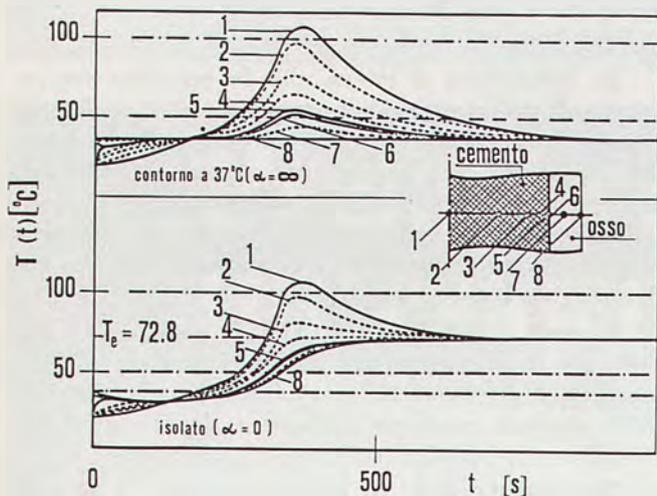


Fig. 2 - Temperatura in funzione del tempo per la condizione di refrigerazione vascolare ideale ($\alpha = \infty$) e per isolamento ideale ($\alpha = 0$).

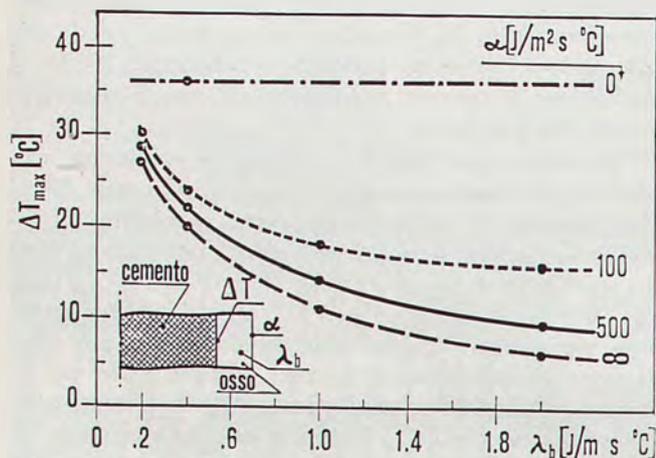


Fig. 3 - Influenza della conducibilità dell'osso sulla temperatura massima raggiunta all'interfaccia osso-cemento.

- Condizioni al contorno (fig. 2)
- Conducibilità e calore specifico dell'osso (figg. 3-4)
- Raggio interno del cilindro riempito di cemento (fig. 5).

Curva di polimerizzazione $p(t)$ è la funzione che rappresenta la frazione di monomero del cemento acrilico polimerizzato (PMMA) al tempo t . La generazione di calore è proporzionale alla derivata dp/dt .

Per quanto riguarda in particolare la curva di polimerizzazione, Huiskes ha sviluppato un modello matematico della generazione di calore (fig. 1 curva n. 4) che approssima nel miglior modo i risultati sperimentali. Le condizioni al contorno considerate sono comprese tra i due casi estremi, cioè isolamento completo ($\alpha = 0$) e raffreddamento vascolare ideale ($\alpha = \infty$); α è la conduttanza complessiva, cioè il parametro che lega il salto termico ΔT alla quantità di calore trasmessa.

Il parametro termico più importante sembra essere la conducibilità dell'osso. Purtroppo non si dispone attualmente di valori attendibili per questo parametro. La refrigerazione vascolare ha invece una influenza minore sui valori di temperatura raggiunta all'interfaccia osso-cemento.

F. Burny ed al. (1976) hanno misurato in vivo su nove pazienti l'andamento della temperatura extraossea durante la polimerizzazione del cemento usato nell'impianto di una protesi d'anca. Sulla superficie esterna della parte prossimale del femore le massime variazioni di temperatura sono state di circa 3°C. Questo conferma che la zona interessata dallo sviluppo di calore durante la polimerizzazione si limita all'interfaccia osso-cemento, mentre all'esterno la variazione di temperatura è estremamente limitata dal raffreddamento vascolare, per cui risulta confermata l'ipotesi di una quasi ideale refrigerazione vascolare.

Partendo da queste ricerche, abbiamo approfondito lo studio dell'influenza dei parametri che possono essere modificati sia con una particolare scelta del tipo di cemento (quantità di calore generato durante la polimerizzazione) sia con la tecnica di intervento chirurgico (quantità di cemento). In particolare ci siamo riferiti ad un caso reale, accentuando in tal modo l'aspetto applicativo del nostro studio, ricavando tuttavia indicazioni che si possono ritenere di carattere generale.

PROTESI DI CAVIGLIA.

Il caso preso in considerazione è quello di una protesi totale di caviglia attualmente in fase di sperimentazione clinica.

Questa protesi raffigurata in fig. 6 è costituita da un componente talare, che è un guscio che ricopre l'astragalo, e da un componente tibiale munito di spallette laterali. In tal modo vengono sostituite le tre articolazioni della caviglia.

Nella progettazione di tale protesi si è ritenuto di non poter rinunciare all'utilizzazione di uno stelo per il componente tibiale. Infatti esso non

solo assicura la stabilità dell'impianto, ma permette di trasmettere il carico alla diafisi tibiale.

Ciò risulta corretto da un punto di vista strutturale, in considerazione della particolare forma dell'epifisi tibiale (peraltro resecata per permettere l'appoggio della protesi). Consente inoltre di estendere le indicazioni della protesi agli esiti di frattura comminuta del pilone tibiale, che rappresenta la situazione anatomopatologica di più frequente riscontro nell'ambito delle alterazioni dell'articolazione di caviglia che richiedono la sostituzione dell'articolazione naturale con una protesi.

La particolare situazione anatomica comporta alcune difficoltà tecniche per quanto riguarda l'impiego dello stelo. Infatti, a parte la difficoltà della sua introduzione nel canale midollare tibiale, facilmente superabile mediante l'uso della via d'accesso trasperoneale esterna, vi è la struttura del terzo inferiore della tibia che implica l'uso di una quantità abbondante di cemento. Infatti, come noto, il canale midollare si allarga notevolmente nel terzo inferiore ed è ripieno di spongiosa unicamente in corrispondenza della metaepifisi.

Lo stelo può essere quindi perfettamente contenuto dall'osso solo nel tratto distale metaepifisario ed in corrispondenza del suo apice, quando raggiunge il canale midollare del terzo medio. Rimane pertanto un ampio spazio endomidollare da colmare col cemento. Oltre ciò, per l'azione di stantuffo che si viene a creare durante l'introduzione dello stelo nella tibia, spesso si ha una abbondante penetrazione di cemento nel canale midollare, oltre l'apice dello stelo.

Questa situazione ci ha indotti a valutare quale è l'influenza della quantità di cemento sui valori della temperatura raggiunta nei componenti dell'impianto.

ANALISI TERMICA

È stato studiato il transitorio termico determinato dal calore di polimerizzazione del cemento acrilico in un impianto di protesi di caviglia del tipo precedentemente descritto. La struttura presa in esame è costituita da materiali diversi, cioè osso corticale e spongioso, cemento e protesi. Il programma di calcolo utilizzato si basa sulla tecnica degli elementi finiti, per la soluzione delle equazioni differenziali del problema termico. Poiché lo scopo della nostra indagine era quello di effettuare una analisi comparativa delle temperature al variare della quantità e delle caratteristiche del cemento, abbiamo ritenuto opportuno utilizzare una *mesh* non estremamente sofisticata.

Si è assunto infatti che la struttura fosse assialsimmetrica, cosa che non è rigorosamente vera. Adottando in compenso un numero sufficientemente grande di elementi, si è ottenuto il vantaggio di poter analizzare più configurazioni, con ridotti tempi di calcolo.

La *mesh* da noi adottata è rappresentata in fig. 7 ed è costituita da 220 elementi triangolari assialsimmetrici.

PROPRIETÀ DEI MATERIALI E CONDIZIONI AL CONTORNO

Nella tabella sono riportate le caratteristiche dei materiali, rilevate in letteratura.

La curva di polimerizzazione da noi adottata è quella indicata in fig. 1, curva n. 4, che sembra approssimare meglio il comportamento del cemento.

Per i motivi chiariti nell'introduzione, come condizioni al contorno abbiamo assunto quelle corrispondenti a refrigerazione vascolare ideale. Per quanto riguarda le condizioni iniziali, cioè la temperatura all'inizio del transitorio, abbiamo assunto la temperatura di 37 °C per il tessuto osseo e muscolare, di 20 °C per la protesi e di 25 °C per il cemento.

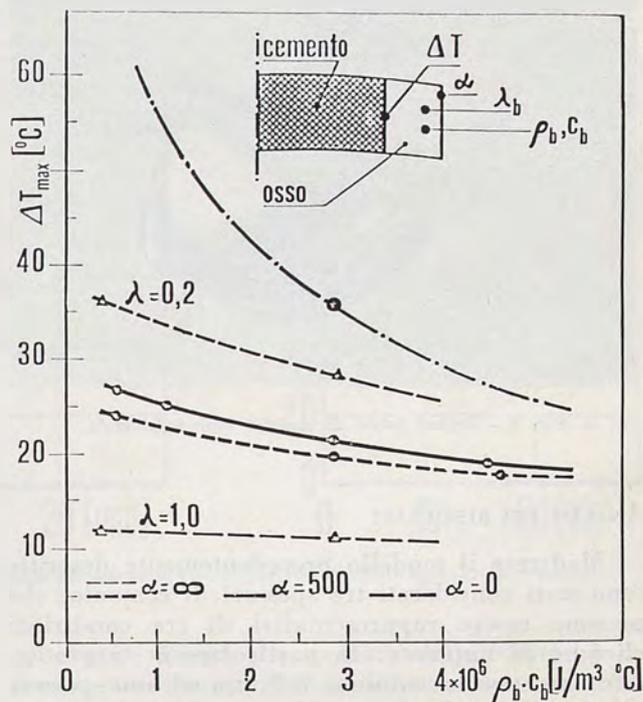


Fig. 4 - Influenza del calore specifico dell'osso sulla temperatura massima raggiunta all'interfaccia osso-cemento.

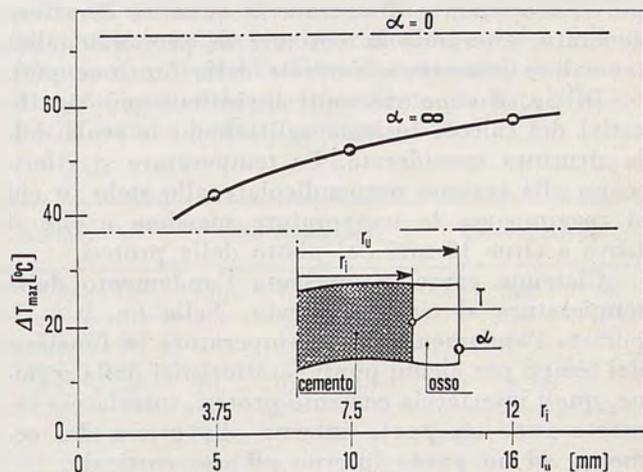


Fig. 5 - Influenza delle dimensioni dell'osso sulla temperatura massima raggiunta all'interfaccia osso-cemento.



Fig. 6 - Protesi totale di caviglia Pipino-Calderale.

ANALISI DEI RISULTATI

Mediante il modello precedentemente descritto sono stati considerati tre spessori di cemento, che possono essere rappresentativi di tre condizioni cliniche di impianto. In particolare è stato adottato uno spessore minimo di 2 mm ed uno spessore massimo corrispondente all'asportazione totale della spongiosa.

Allo scopo di analizzare l'influenza delle caratteristiche del cemento, in corrispondenza dello spessore massimo di cemento considerato, è stata poi raddoppiata e dimezzata la quantità di calore generata, alterando la costante di proporzionalità tra calore generato e derivata della funzione $p(t)$.

In fig. 8 sono riassunti i risultati più significativi del calcolo insieme agli schemi in scala della struttura considerata. Le temperature si riferiscono alla sezione perpendicolare allo stelo in cui si raggiungono le temperature massime e che si trova a circa 10 mm dal piatto della protesi.

Ciascuna curva rappresenta l'andamento della temperatura al tempo indicato. Nella fig. 9 è riportato l'andamento della temperatura in funzione del tempo per alcuni punti caratteristici della sezione, quali interfaccia cemento-protesi, interfaccia cemento-osso, un punto interno alla massa del cemento ed un punto interno all'osso corticale.

Osservando i diagrammi, si vede che, per quanto riguarda l'influenza dello spessore di cemento

sulla temperatura massima raggiunta dal cemento stesso, questa temperatura oscilla da 50 °C (in corrispondenza dello spessore minimo) a 115 °C circa (in corrispondenza dello spessore massimo). Invece all'interfaccia cemento-osso la temperatura varia da poco meno di 50 °C a circa 55 °C.

Dalla fig. 9 si vede chiaramente come in corrispondenza di spessori maggiori di cemento si hanno più prolungate permanenze a temperature elevate all'interfaccia osso-cemento. Ad esempio mentre allo spessore minimo considerato, raggiunto il valore massimo in circa 5 secondi, la temperatura diminuisce e scende a 40 °C dopo circa altri 5 secondi, dopo 30 secondi è già a 37 °C. In corrispondenza dello spessore massimo invece la temperatura è ancora 50 °C dopo 10 secondi e rimane superiore a 40 °C per tutto il transitorio considerato (90 secondi). I tempi sono stati conteggiati a partire dal tempo individuato dalla linea verticale in fig. 1.

La fig. 10 riporta invece l'influenza delle caratteristiche termiche del cemento (spessore massimo considerato). La curva intermedia si riferisce ai tipi di cemento per cui sono stati eseguiti tutti i calcoli precedenti, cioè ad un cemento comunemente reperibile in commercio. Le curve superiori ed inferiori si riferiscono a cementi ipotetici, aventi rispettivamente generazione di calore doppia e metà di quella del cemento considerato.

Si vede che la temperatura massima varia da 43 °C a 57 °C, quadruplicando la quantità di calore generata dal cemento; chiaramente l'influenza del calore generato sull'andamento della temperatura non è di tipo lineare, per cui mentre dimezzando la generazione di calore si osservano benefici sensibili, raddoppiandola il peggioramento non è altrettanto rilevante.

Ciò si vede oltretutto per i valori massimi raggiunti, anche per la durata del transitorio che si esaurisce in circa 30 secondi per la curva più bassa

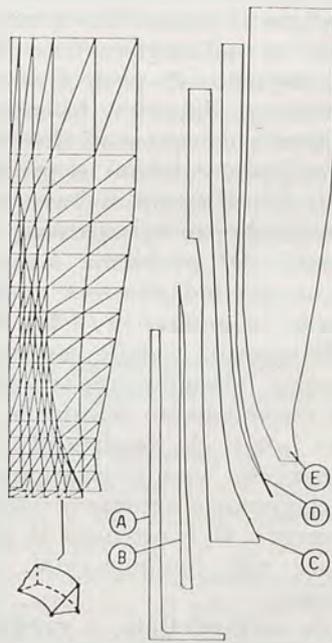


Fig. 7 - Schematizzazione agli elementi finiti: A: protesi, B: cemento acrilico, C: osso spongioso, D: osso corticale, E: muscolo.

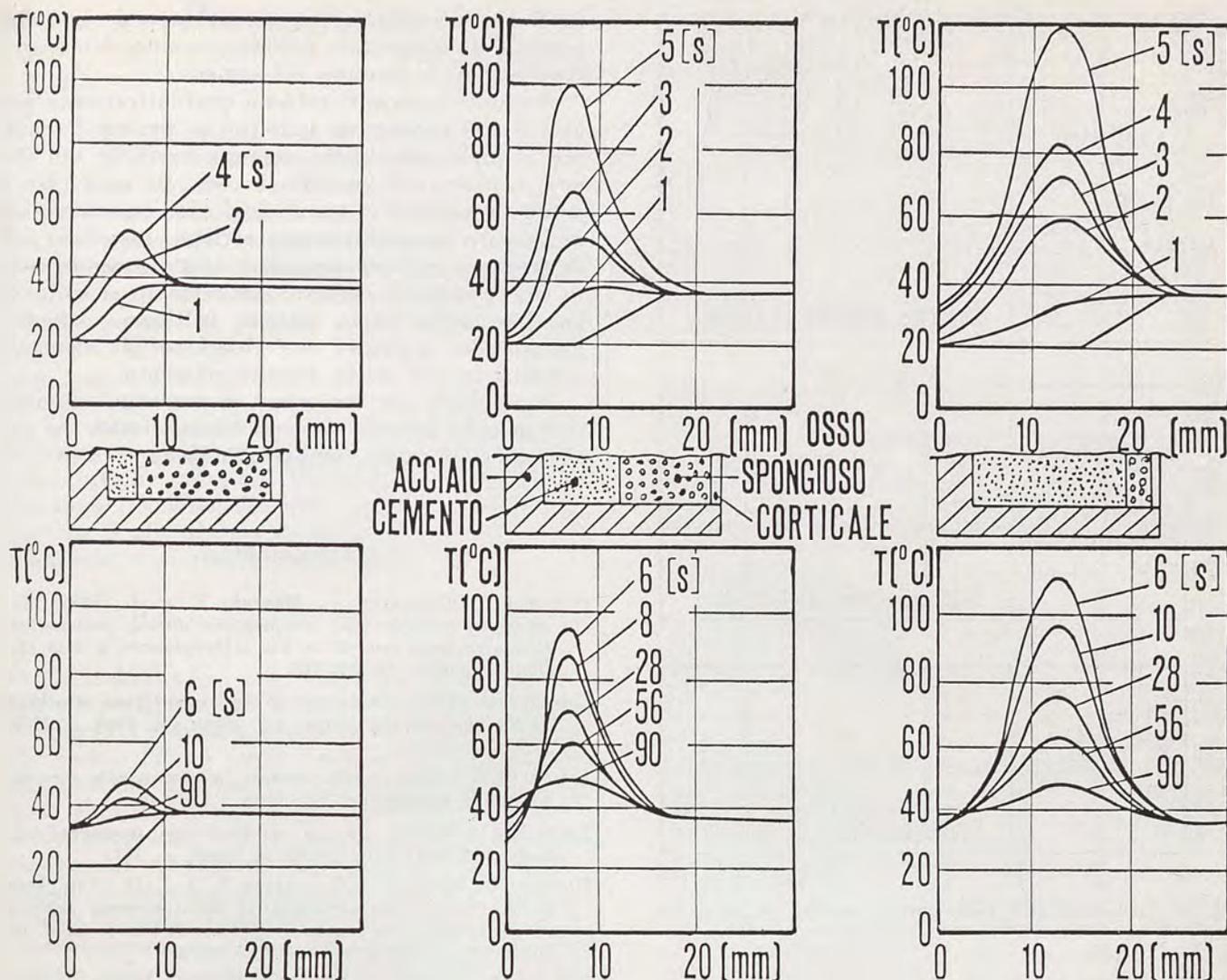


Fig. 8 - Andamento della temperatura in una sezione dell'accoppiamento osso-cemento-protesi per tre differenti spessori di cemento.

e che non è completamente esaurita dopo 30 secondi per le altre due curve.

CONCLUSIONI

È stata valutata quantitativamente l'influenza della quantità di cemento sull'andamento della temperatura nel sistema stelo protesi-cemento-osso per il caso di un tipo di protesi di caviglia.

Confrontando i risultati del calcolo con la curva di fig. 11, che indica la soglia di tollerabilità dei tessuti biologici, si rileva l'opportunità di li-

mitare al minimo lo spessore dello strato di cemento acrilico, il che certamente non comporta svantaggi dal punto di vista della resistenza, in quanto si tratta di un materiale avente caratteristiche meccaniche inferiori a quelle dei materiali che lo circondano.

Bisogna anche evitare la penetrazione di importanti quantità di cemento oltre l'apice dello stelo, che comunque va interamente avvolto dal cemento. È evidente l'utilità di avere steli rastremati o aventi geometria specificamente studiata allo scopo di evitare l'effetto pompa.

		Cemento		Acciaio		Osso spongioso		Osso corticale	
Calore specifico	[J/kg °C]	Cc	1.46×10^3	Cs	0.49×10^3	Csb	4.18×10^3	Ccb	0.677×10^3
Massa volumica	[kg/m ³]	ρ_c	1.19×10^3	ρ_s	7.8×10^3	ρ_{sb}	1.0×10^3	ρ_{cb}	2.6×10^3
Conduttività termica	[W/m °C]	λ_c	0.17	λ_s	0.15×10^2	λ_{sb}	0.67×10^{-1}	λ_{cb}	0.37
Temperatura iniziale	[°C]	Toc	25	Tos	20	Tosb	37	ToCb	37
Funzione di polimerizzazione	p(t)		Curva n. 4 in fig. 1						

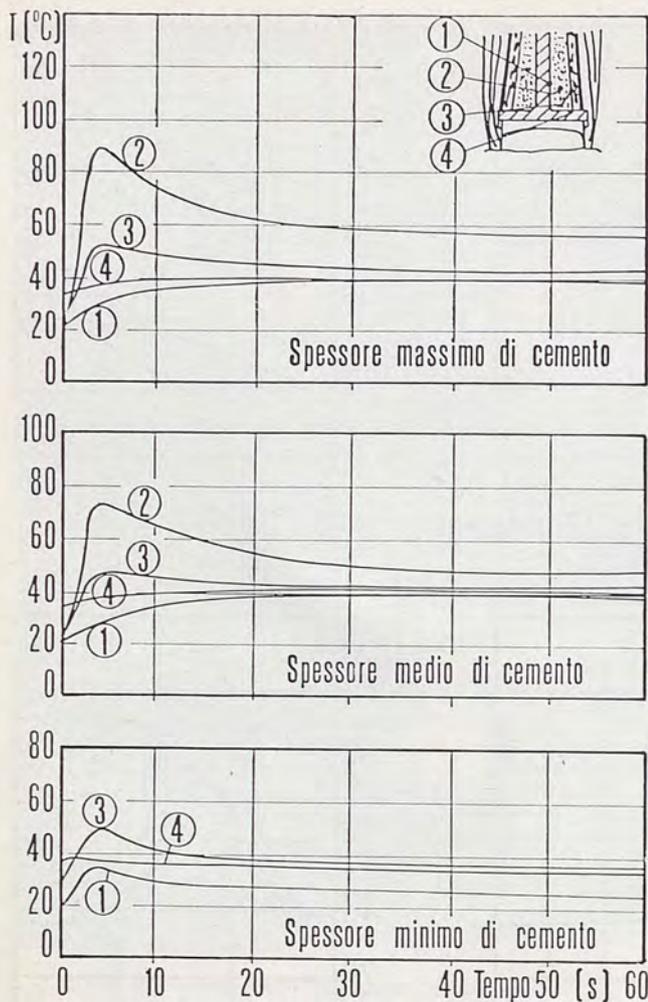


Fig. 9 - Andamento della temperatura in funzione del tempo per tre differenti spessori di cemento.

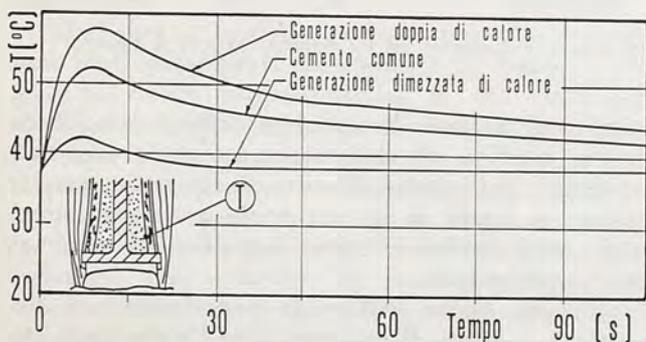


Fig. 10 - Influenza del calore generato sull'andamento della temperatura in funzione del tempo all'interfaccia cemento-osso.

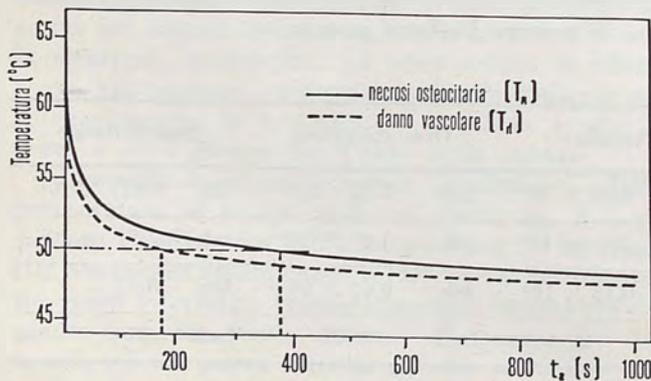


Fig. 11 - Temperature e tempi di esposizione che provocano danni ai tessuti biologici (Moritz ed Henriques, 1947).

Nel caso particolare esaminato non si ravvisano pericoli di sostanziale danneggiamento dei tessuti che vengono a contatto col cemento.

I risultati ottenuti valgono qualitativamente per altri tipi di protesi con stelo (ad es. protesi d'anca), per i quali andrebbero eseguite verifiche del genere esposto nel presente lavoro. In ogni caso i danni prevedibili ai tessuti biologici, in seguito ad un oculato uso del cemento acrilico, non sono tali da scoraggiare il suo uso, soprattutto tenendo conto che la zona di contatto del cemento si trova al massimo sulla faccia interna dell'osso corticale, lontana dal periostio ove risiedono gli elementi cellulari in più attivo rimaneggiamento.

È evidente che progressi si potranno ottenere sviluppando tipi di cemento caratterizzati da generazione di calore sempre più bassa.

BIBLIOGRAFIA

- BURNY F., D'HOLLANDER A., MONTENY E. e al. (1976), *Extraosseous variations of temperature during polymerization of acrylic cement in hip arthroplasties*, « Acta Orthop. Scand. », 47, 186-188.
- CHARNLEY J. (1960), *Anchorage of the femoral head prosthesis to the shaft of the femur*, « J. Bone Jnt. Surg. », 42-B, 28-30.
- CHARNLEY J. (1970), *Acrylic cement in orthopaedic surgery*, Churchill Livingstone, Edinburg - London.
- FEITH R. (1975), *Side effects of acrylic cement implanted into bone*, « Acta Orthop. Scand. », Suppl. n. 161.
- HUISKES R., DE WIJN J. R., SLOOFF T. J. J. H., VAN RENS J. G. (1977), *Thermo-dynamical finite element analysis of self curing bone cement (PMMA)*, 1st Europ. Conf. on Evaluation of Biomaterials, Strashbourg.
- HUISKES R., DE WIJN J. R. (1978), *Heat conduction in acrylic bone cement, a thermodynamic analysis*, 24th Ann. Meeting Orthop. Research Soc. Dallas.
- HUISKES R., SLOOFF T. J. J. H. (1978), *Temperature values in bone tissue during implantation of self-curing Polymethylmethacrylate*, Conference of the Europ. Soc. of Biomaterials, Brussel.
- LEE A. J. C., LING R. S. M. (1977), *The optimised use of PMMA bone cement and some limitations of its use in the fixation of upper limb prostheses*, « I. Mech. E. », C155/77, 41-44.
- LEE A. J. C., LING R. S. M., VANGALA S. S. (1974), *The mechanical properties of bone cements*, « J. Med. Eng. Technol. », 1, 137-140.
- LENNARTZ E. (1959), *Einführung in die chemische Physiologie*, Springer, Berlin.
- MEYER J. R., LAUTENSCHLAGER E. P., MOORE B. K. (1973), *On the setting properties of acrylic bone cement*, « J. Bone Jt. Surg. », 55 A, 149-156.
- MORITZ A. R., HENRIQUES F. C. Jr. (1947), *Studies of thermal injury*, « Am J. Path. », 23, 695.
- PIPINO F., CALDERALE P. M. (1976), *An ankle joint prosthesis of new design*, « Il Policlinico », vol. 83, 559-563.
- PIPINO F., CALDERALE P. M. (1977), *Biomechanical analysis of a new total ankle prosthesis*, 1st Mediterranean Conf. on Med. and Biol. Engineering, vol. II, 18, 9-12, Sorrento.
- PIPINO F., CALDERALE P. M. (1979), *Indicazioni e limiti delle artroprotesi di caviglia nelle lesioni legamentose inveterate*. Congresso SPILLOT, Aosta, febbraio 1977, « Minerva Ortopedica », vol. 30-7, 569-574.

Precipitazioni di breve durata in Piemonte.

Contributo preliminare

V. ANSELMO, E. CARONI, F. DI NUNZIO e F. GODONE (*) presentano i risultati di una elaborazione delle precipitazioni massime di durata una, tre, sei, dodici e ventiquattro ore registrate in Piemonte e pubblicate dal Servizio Idrografico in un quarantennio. Alcune carte con isoiete di ugual tempo di ritorno (10 e 50 anni) mostrano la distribuzione delle precipitazioni, mentre le equazioni delle linee di possibilità climatica, calcolate per 165 stazioni, permettono di ricavare rapidamente la quantità di precipitazione di assegnata durata per vari tempi di ritorno. Alcune considerazioni generali commentano il problema del calcolo della portata di progetto a partire dalle precipitazioni e dalle caratteristiche del bacino (**).

Premessa.

La conoscenza delle precipitazioni con durata inferiore al giorno è di notevole importanza per quasi tutte le indagini idrologiche e le applicazioni idrauliche. Nell'ambito della « teoria razionale » la portata Q allo sbocco di un bacino idrografico di superficie A si ricava dalla relazione

$$Q = C \frac{1}{3.6} i_{T_r, T_c} A \quad (\text{m}^3/\text{s}) \quad (1)$$

con A in km^2 e i_{T_r, T_c} in mm/ora essendo i l'intensità di precipitazione avente assegnato tempo di ritorno (T_r) e durata pari al tempo di corrivazione del bacino (T_c in ore). L'esame dei procedimenti che portano a ricavare il tempo di corrivazione dalle caratteristiche fisiche del bacino in esame e le considerazioni sul significato e sul valore numerico del coefficiente C esulano da questa premessa. Si deve però tener presente che le ipotesi su cui si fonda il cosiddetto « metodo razionale » non sono esenti da critiche per cui tale procedimento appare correttamente applicabile ad aree con superficie dell'ordine di un km^2 [15]. È stato infatti posto in luce con accurate indagini sperimentali fin dagli anni sessanta che il deflusso osservato alla sezione di chiusura di un bacino può intendersi originato dalla precipitazione in eccesso su un'area satura adiacente alla rete idrografica [20] [26] [27]. Le dimensioni di tale area variano non solo nel corso della precipitazione ma anche in funzione delle condizioni antecedenti all'evento esaminato inducendo variazioni, a parità di precipitazione, sia nella portata al colmo sia nel tempo di corrivazione [8].

Le tecniche dell'idrologia applicata tendono ad utilizzare l'analisi regionale correlando il deflusso di piena a parametri fisici e geografici. Questi mezzi sono noti da tempo anche in Italia [29] [30]; la formula

$$Q_{\max} = q_{100} \left(\frac{100}{S} \right)^\alpha \quad (2)$$

(*) C.N.R., Istituto di ricerca per la protezione idrogeologica nel bacino padano, Torino.

(**) Il lavoro è stato effettuato grazie alla collaborazione di personale assunto nell'ambito della Legge 285 dalla Regione Piemonte, Assessorato alla Pianificazione Territoriale e Parchi Naturali e distaccato presso l'Istituto per la protezione idrogeologica nel bacino padano (progetto 6.2): A. Assanti, S. Loi, A. M. Serafino hanno registrato i dati, L. Turtora ha condotto i calcoli all'elaboratore.

proposta da Gherardelli circa cinquanta anni fa e successivamente verificata con più numerosi dati sperimentali da Marchetti [34], pose in evidenza con diversi valori del coefficiente q_{100} la differenza dei fattori idro-meteorologici (cui Mongiardini cercò di dare un più preciso significato fisico [39]) che sono all'origine del diverso comportamento dei bacini italiani.

L'applicazione di queste formule ai bacini minori piemontesi porta a risultati insoddisfacenti; non è facile, d'altra parte, attuare tecniche recentemente proposte [40] [49] per la carenza di osservazioni di portata in bacini con superficie inferiore a 100 km^2 . L'attenzione per i corsi d'acqua con piccolo bacino imbrifero ha suggerito una recente modifica del valore dell'esponente α nella formula (2) per aree inferiori a 100 km^2 (0.5 anziché 0.67) [36]. La citata carenza di misure è comprensibile tenendo conto che i bacini minori attrezzati in passato in Piemonte avevano preminente interesse idroelettrico (testate delle vallate alpine). Bisogna riconoscere l'oggettiva complessità della regione piemontese: la precipitazione media annua, esemplificando con un parametro semplice, vi varia da meno 600 a oltre 2500 mm ; la disparità di costituzione geologica, di altimetria e morfologia sono all'origine di diversi regimi che caratterizzano i deflussi medi differenziando i corsi d'acqua alpini da quelli collinari. Tali disparità inducono analoghe differenze nella formazione dei deflussi di piena [1]. Dai risultati di un'applicazione della statistica alla relazione di Gherardelli-Marchetti [44] appare che al Piemonte, nell'ambito del bacino del Po, spettano i valori estremi del contributo di piena probabile: alla Dora di Bardonecchia il valore minimo, al Borbera il massimo.

L'ubicazione delle stazioni di misura delle portate in Piemonte era adatta a conoscere la disponibilità di acqua per la produzione di energia piuttosto che a raccogliere informazioni di carattere idrologico in generale e, in particolare, sulle portate di piena. A questa impostazione iniziale, mantenuta nel tempo nonostante le mutate esigenze di conoscenza, si deve la carenza di osservazioni nei bacini collinari.

Eventuali ricerche volte in altre direzioni, per esempio all'applicazione di modelli matematici [5], non sono attuabili per almeno due motivi, entrambi dovuti alla situazione di abbandono per carenza di mezzi e di persone in cui da anni versa il Servizio

Idrografico del Ministero dei Lavori Pubblici. I motivi citati sono:

a) le registrazioni idrometriche raccolte in passato non sono disponibili causa l'attuale e, presumibilmente definitiva, inagibilità degli archivi dell'Ufficio Idrografico per il Po;

b) le stazioni idrometriche attualmente operanti sono poche e sottendono bacini di grande estensione.

Venuto meno il preciso impegno dello Stato, in stridente difformità con le raccomandazioni della Commissione interministeriale nominata allo scopo di migliorare i Servizi esistenti [17], i restanti Enti pubblici hanno scarso interesse ad installare e gestire stazioni di misura: alcune stazioni dell'ENEL riguardano i deflussi di pochi corsi d'acqua alpini; le stazioni gestite dai Consorzi irrigui si limitano ad osservare, salvo casi particolari, le altezze idrometriche all'incile dei canali di derivazione; gli Uffici del Genio Civile compiono sporadiche osservazioni idrometriche. Il Servizio Idrografico Italiano era arrivato ad occupare uno fra i primi posti della graduatoria mondiale dei Servizi analoghi per densità degli strumenti pluviometrici ed è doveroso dire che ancora oggi gli « Annali Idrologici » italiani sono presi a modello. Per questo si può comprendere che, con la decadenza del Servizio, sia venuto a mancare un importante centro di raccolta di dati estremamente prezioso per un rapido e sicuro reperimento delle informazioni disponibili.

Da quanto detto sopra, è probabile che si dovrà ancora ricorrere al *metodo razionale*, per quanto esso sia impreciso, quale strumento di indagine per la definizione delle portate di piena. È opportuno osservare che la situazione sopra descritta comporta ancora, ad ulteriore riduzione della affidabilità del metodo, difficoltà nella verifica con un adeguato numero di dati sperimentali dei valori del tempo di corrivazione ricavato dalle usuali formule. La più nota di queste fu data da Giandotti [22]

$$T_c = \frac{4 \sqrt{A} + 1.5 L}{0.8 \sqrt{H_m - H_0}} \quad (3)$$

recentemente un'espressione è stata ricavata da dati sperimentali raccolti per alcuni corsi d'acqua piemontesi da Tournon [37]

$$T_c = 0.396 \frac{L}{\sqrt{i}} \left(\frac{A}{L^2} \cdot \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{i_v}} \right)^{0.72} \quad (4)$$

mentre Pezzoli [41] ha indicato, sottolineandone la semplicità di struttura, la relazione

$$T_c = 0.055 \frac{L}{\sqrt{i}} \quad (5)$$

In tali formule figurano esclusivamente parametri geometrici essendo A l'area del bacino (in km²), L la lunghezza dell'asta principale (km), H_m l'al-

titudine media e H_0 la quota della sezione considerata, i la pendenza media dell'alveo principale, i_v la pendenza media dei versanti. Un interessante confronto fra i risultati ottenuti con formule diverse e i valori osservati è stato condotto con dati di bacini delle Puglie con area compresa fra 40 e 90 km² circa [42].

I tempi di corrivazione *calcolati* con queste formule sono, talvolta, discordanti in quanto risentono delle caratteristiche dei bacini utilizzati per ricavare i coefficienti numerici; discordanti sono però anche, per lo stesso bacino, i tempi di corrivazione *misurati* in occasione di eventi diversi proprio per le ragioni esposte all'inizio. A titolo di orientamento si è osservato che i bacini colpiti da dissesti nel corso di recenti eventi alluvionali in Piemonte hanno mostrato tempi di corrivazione inferiori a otto ore [2] [3] [4]. È sconcertante dover segnalare che negli eventi citati (Val Pellice e Chisone, 19 maggio 1977; Orba e affluenti, 6 ottobre 1977; Toce e affluenti, 7 agosto 1978) non sia stato possibile avere alcuna registrazione dei livelli idrometrici verificatisi nei numerosi corsi d'acqua colpiti ad eccezione che nel Toce a Candoglia dove, però, il bacino sotteso è di oltre 1500 km² e la scala dei deflussi non è più attendibile causa un imponente abbassamento del fondo (1). Tale assenza di misure tende ad escludere ogni progresso nella conoscenza del comportamento dei corsi d'acqua della regione ed impedisce qualsiasi affinamento dei mezzi di indagine disponibili. Questa situazione ha spiacevoli conseguenze nella pratica quando si cerca di stabilire la portata di progetto per l'esecuzione di opere idrauliche: è usuale dover procedere a « calcolare » una portata di piena senza poter effettuare controlli con alcun dato « misurato » [24].

Recenti indagini hanno posto in evidenza il rapporto fra piogge intense e movimenti franosi [23], accentuando l'importanza di conoscere per ciascun bacino i valori critici e le frequenze delle precipitazioni di breve durata. L'intensità di precipitazione sembra avere un ruolo fondamentale nel determinare la mobilitazione rapida, con conseguenze talora impressionanti, dei depositi di materiali sciolti nei corsi d'acqua minori [7].

Nell'ambito di una convenzione stipulata dall'Assessorato alla Pianificazione Territoriale e Parchi Naturali con l'Istituto per la Protezione Idrogeologica nel Bacino Padano è stata completata la raccolta ed effettuata l'elaborazione dei dati delle precipitazioni con durata inferiore alle ventiquattro ore. Questa indagine intendeva preparare documenti di base per definire, a scala regionale, eventuali condizioni predisponenti a dissesti in concomitanza con eventi alluvionali. Nell'elaborazione è stata utilizzata una metodologia poco sofisticata ma sufficiente per tracciare su carte a grande scala le isoiete di ugual tempo di ritorno.

(1) La stazione di Candoglia, ufficialmente chiusa dal Servizio Idrografico col 1964, è attualmente seguita dall'Istituto Italiano di Idrobiologia del C.N.R. di Pallanza che ha ripreso anche ad eseguire misure dirette di portata per la ricostruzione della curva delle portate.

I dati a disposizione potranno essere utilizzati per la definizione di zone pluviometriche omogenee secondo gli esempi dati per altre regioni italiane [11] [18].

Dati a disposizione.

Il Servizio Idrografico Italiano conduce osservazioni pluviografiche in Piemonte a partire dagli anni trenta. L'apparecchio ancora attualmente in uso è il pluviografo a vaschette basculanti con durata di registrazione settimanale. Tale strumento registra, in funzione del tempo, i rovesciamenti delle vaschette provocati dalla pioggia (uno in ragione di 0.2 mm precipitati nella bocca di 0.10 m²) su carta diagrammata avvolta intorno ad un tamburo rotante con avanzamento di 2-2.5 mm/ora. Tale avanzamento permette di apprezzare senza incertezze la quantità di pioggia caduta durante eventi gravi solo se il pennino scrivente è in perfette condizioni e se il meccanismo di trasmissione del movimento è ben regolato. Tali condizioni spesso non si verificano; in questi casi le incertezze sono insuperabili e risulta impossibile stimare la quantità di pioggia per intervalli di tempo inferiori all'ora. Il pluviografo a vaschette è di impiego diffuso; il suo comportamento è ben noto e recentemente sono stati realizzati sistemi di conteggio e registrazione automatica del numero di basculamenti. Tuttavia sarebbe augurabile che, senza ricorrere a sistemi più complessi, almeno alcune stazioni venissero dotate di apparecchi registratori mensili le cui caratteristiche permettono di registrare su carta con avanzamento di 10 mm/ora e anche oltre consentendo in tal modo una corretta misura delle precipitazioni più intense. Con tali apparecchi è già possibile procedere alla digitalizzazione e alla archiviazione automatica dei dati ⁽²⁾.

Gli « Annali Idrologici » del Servizio Idrografico riportano, per ciascun anno, nella Parte prima, alla sezione intitolata *Precipitazioni di massima intensità registrate ai pluviografi* (Tabella 3) le massime quantità di pioggia cadute in 1, 3, 6, 12 e 24 ore. Questi dati sono stati rilevati e pubblicati per il Piemonte a partire dal 1928; negli Annali anteriori al 1935, i dati si trovano nel volume *Elaborazione e studi*. La pubblicazione degli « Annali » è, purtroppo, ferma al 1971. Al fine di ottenere i dati in forma elaborabile, è stato necessario procedere alla loro tabulazione e successiva perforazione su schede; dopo un primo controllo è stato effettuato anche un trasferimento su nastro magnetico. In questa fase, è apparso che il trattamento automatico dei dati, la loro pubblicazione mediante riproduzione di tabulati dal calcolatore, e soprattutto la loro disponibilità in forma digitale porterebbe a ridurre al minimo le fonti di errore di lettura e trascrizione altrimenti

⁽²⁾ Vale la pena di consultare a questo proposito gli *Atti del Convegno* organizzato dal C.N.R. in collaborazione col Ministero dei Lavori Pubblici sull'*Aggiornamento delle Metodologie di Raccolta ed Elaborazione dei Dati Idrometeorologici*, Roma, 29-30 novembre 1978.

inevitabili. Non è stato effettuato alcun controllo dei dati pubblicati sugli « Annali »; è purtroppo certo che esistono errori all'origine e che un lavoro conclusivo su questo argomento dovrebbe ripartire dallo spoglio delle strisce originali. L'entità degli errori di partenza non può però essere tale da alterare le conclusioni d'insieme qui proposte.

Leggi di distribuzione utilizzate.

Supponendo valide alcune ipotesi (stazionarietà del processo e indipendenza delle variabili aleatorie) i valori misurati possono essere considerati estratti a caso da una « popolazione », ovvero da un insieme teorico di valori con associata probabilità. Se si incrementa il numero delle osservazioni, la frequenza empirica di successo che si constata tende ad approssimarsi ai « veri » valori di probabilità che sono propri della « popolazione » (si veda ad es. [51]). Si delineano così due diversi approcci al problema dell'analisi della probabilità di un evento. Il primo consiste nell'indagare sulla popolazione con considerazioni che prescindono dalla conoscenza di campioni da essa estratti. Un esempio elementare è costituito dal lancio di una moneta i cui possibili risultati, *testa* o *croce*, sono considerati equiprobabili in virtù della *indifferenza*, nota a priori, delle due facce sulla meccanica del lancio; la funzione di distribuzione viene così dedotta da un modello concettuale. Viceversa nel secondo caso si esaminano le proprietà del campione e, da queste, si inferisce sulla distribuzione della popolazione che può aver dato origine a tale campione.

In idrologia, per evidenti motivi, la strada solitamente percorsa è la seconda; si noti tuttavia come molte distribuzioni di uso comune derivino la loro formulazione da modelli concettuali talché la loro adozione risulta giustificata, oltre che dall'adattamento alla frequenza empirica, ottenuta tramite la taratura dei parametri della distribuzione, dalla conformità del modello al tipo di processo che si esamina.

La frequenza di non superamento corrispondente alla probabilità $P(x)$ che si verifichi l'evento « la variabile aleatoria X è minore o al più uguale al valore x » viene usualmente stimata con la relazione

$$F(x) = \frac{j}{N+1} \quad (6)$$

in cui N è la dimensione del campione e j l'indice del termine generico nella sequenza ordinata dei valori crescenti.

Le distribuzioni scelte per le regolarizzazioni sono la log-normale o legge di Galton-Gibrat, a due parametri, e la doppia esponenziale, o legge di Gumbel o dei valori estremi. Altre due distribuzioni (Gauss e Frechet) sono state inizialmente prese in considerazione, ma vista la bassa percentuale di superamento dei test, sono state abbandonate. In effetti la legge di Galton,

$$z = \frac{\log x - M_n}{\sigma_n}$$

$$F(x) = F[z(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\xi^2/2} d\xi \quad (7)$$

applicazione della distribuzione normale (gausiana) ai logaritmi della variata originale, ha spesso dimostrato buone capacità di adattamento alle serie di estremi idrologici [9] [16] [19] [29] [43]. Dal canto suo, la legge di Gumbel

$$z = a(x - x_0) \quad F(x) = F[z(x)] = e^{-e^{-z}} \quad (8)$$

è stata derivata teoricamente come distribuzione asintotica dei valori estremi [25] e viene pertanto correntemente impiegata nella regolarizzazione dei massimi annuali.

I parametri che compaiono nelle formule precedenti vengono stimati a partire dai valori della serie storica, tramite alcuni classici criteri. Per la log-normale è stato seguito il metodo della massima verosimiglianza che, nel caso specifico, coincide col metodo dei momenti applicato alla variata trasformata; si stimano M_n e σ_n della (7) rispettivamente come media e scarto quadratico medio dei logaritmi di x . L'applicazione della massima verosimiglianza alla doppia esponenziale è alquanto più laboriosa mentre il metodo dei momenti è immediato ma anche meno attendibile [45] così si è scelto il criterio del fattore di frequenza di Chow [14] che, pur improntato alla logica dei momenti, tiene però conto della dimensione del campione.

Per provare la bontà dell'adattamento al campione delle distribuzioni così tarate, sono stati eseguiti il classico test del chi-quadro e il test del segno (test w di Wine [50]).

Col primo, il campione di N valori viene diviso in K classi o intervalli, e, se p_j è la probabilità secondo la distribuzione usata, che la variabile sia compresa nella j -esima classe, ed f_j risulta invece il numero dei termini del campione che in essa ricadono, è dimostrato che il parametro

$$\chi^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(f_j - N p_j)^2}{N p_j} \quad (9)$$

segue la distribuzione chi-quadro con $NDF = N - r - 1$ gradi di libertà (se r è il numero dei parametri stimati). Il valore critico χ_0^2 , in base al quale l'ipotesi di buon adattamento viene rigettata se $\chi^2 \geq \chi_0^2$, corrisponde generalmente al 90% o al 95% di probabilità di non superamento [45]. È stato inoltre valutato il valore χ^2 secondo la formula di Yates, utilizzabile particolarmente nei casi in cui il numero dei gradi di libertà sia basso (prossimo a uno).

Il test del segno viene effettuato valutando quanti punti, corrispondenti alla distribuzione empirica del campione, stanno al di sopra o al di sotto della distribuzione adottata. Il minore di questi due valori viene messo a confronto con un

valore critico desunto dalla distribuzione binomiale, e, se quest'ultimo è a sua volta inferiore, il test si considera superato. In questa forma il test del segno non è un test esatto, ma offre ugualmente indicazioni molto utili.

Mentre il « potere risolutivo » del test del chi-quadro aumenta col crescere del numero dei dati raccolti, il test del segno ha maggiore efficacia sui piccoli campioni.

Le linee segnalatrici di possibilità climatica.

L'intensità di pioggia che può essere misurata in un dato intervallo di tempo ad un pluviografo aumenta al diminuire della durata di tale intervallo. Questa semplice osservazione ha dato origine al concetto di linea segnalatrice di possibilità climatica o pluviometrica la quale, in un primo momento, venne tracciata per inviluppare le massime altezze di pioggia, per le diverse durate allo scopo di fornire i valori insuperabili o *critici* per la località nella quale erano state fatte le misure. In alcune applicazioni dell'ingegneria civile, in particolare per il calcolo delle fognature, allo scopo di non avere strutture decisamente sovraddimensionate, si convenne poi di escludere i massimi e di procedere all'inviluppo dei cosiddetti secondi, terzi casi critici, introducendo in tal modo il concetto di rischio [48]. Col proseguire delle osservazioni pluviografiche nuovi massimi furono registrati e sorse il problema dell'aggiornamento di tali curve: in particolare quella dei primi casi critici perse il significato di *massimo* assumendo una connotazione probabilistica. Esaurienti discussioni ed esempi applicativi sono reperibili in letteratura [10] [11] [43]. Tenuto conto delle finalità pratiche prima enunciate, le curve di possibilità climatica sono state qui ricavate a partire dai valori di pioggia di assegnata frequenza per le diverse durate: ottenute, come già visto, le regolarizzazioni delle serie storiche dei massimi annuali di 1, 3, 6, 12 e 24 ore, si calcolano le altezze di precipitazione corrispondenti al tempo di ritorno voluto. L'espressione algebrica già in uso per i casi critici

$$h = a t^n \quad (10)$$

dove h è l'altezza di pioggia (mm), t la durata (ore), a ed n parametri di aggiustamento, viene adottata anche in questo caso; la stima dei parametri a ed n , dipendenti dal tempo di ritorno scelto, viene fatta per interpolazione col metodo dei minimi quadrati notando che, sul piano bilogarithmico, la relazione risulta lineare. I risultati ottenuti sono riportati negli elaborati allegati.

Una certa cautela deve essere usata nella ricerca di curve di possibilità climatica per bacini su cui non vi siano stazioni pluviografiche; in effetti, se di primo acchito il numero di stazioni elaborate appare ragguardevole, va tuttavia messo a confronto con l'area su cui queste sono distribuite, ricordando i limiti di superficie dei bacini per i quali può essere correttamente applicato il metodo razionale e quindi tenendo conto delle

variazioni nella pluviometria che le irregolarità orografiche, la quota e l'esposizione comportano.

Al momento attuale si può ancora tentare di infittire questi valori puntuali ricorrendo all'uso dei dati dei pluviometri (valori giornalieri rilevati alle ore 9 di ogni giorno) secondo una metodologia recentemente proposta [21]. Nell'ambito della ricerca scientifica sono state avanzate critiche tendenti a legare il rischio alla struttura di smaltimento, anziché, come esposto in questo paragrafo, alla precipitazione [12] [13] [33] [38].

Sono note altre formulazioni delle equazioni delle linee di possibilità climatica: partendo dal presupposto che le linee regolarizzatrici per le varie durate debbano essere parallele [28] [46] sono state ricavate espressioni di sintesi valide per qualsiasi tempo di ritorno e durata (da una a 24 ore).

Elaborati

Gli elaborati sono suddivisi in due gruppi: i primi relativi alle regolarizzazioni e i secondi alle possibilità climatiche.

A. REGOLARIZZAZIONI

A1. Tabulati. A titolo di esempio sono stati qui riprodotti gli elaborati relativi alla stazione pluviografica di Ivrea (3). Sono riportati i dati originali delle piogge intense e i risultati delle elaborazioni effettuate; per ogni valore di durata sono dati i principali parametri statistici e i valori che caratterizzano le distribuzioni di Galton e Gumbel. In particolare è espressa la relazione diretta e inversa fra la variabile ridotta z e l'altezza di precipitazione x ; la frequenza di non superamento $F(z)$, per Galton, si trova tabellata in molti testi (tabelle della distribuzione normale) ed è invece esplicitata nella forma $F(z) = \exp[-\exp(-z)]$ per Gumbel.

A titolo di esempio si calcola la frequenza di una pioggia di 30 mm per la durata di 1 ora ad Ivrea: per Galton è $z = 6.53155 \log(30) - 9.40008 = 0.248$, e dalle tabelle risulta $F(z) = 0.598$; per Gumbel si ha invece $z = 0.0944(30 - 23.57028) = 0.607$ e quindi $F(z) = \exp[-\exp(-0.607)] = 0.580$.

Volendo il tempo di ritorno si applica la relazione $Tr = 1/[1 - F(z)]$ ottenendo il valore (Galton) $Tr = 2.49$ anni.

Viceversa a partire dal tempo di ritorno (p. es. 25 anni) si ricava $F(z) = 1 - 1/Tr = 0.96$, e quindi:

z Galton (da tabella) = 1.75; $\log(x) = 0.1531 \cdot 1.75 + 1.43918 = 1.71$; $x = 10^{1.71} = 50.95$

z Gumbel = $-\ln[-\ln F(z)] = 3.20$; $x = 10.59 \cdot 3.20 - 23.57 = 57.46$

Sempre nel tabulato dopo i valori caratteristici relativi ai test effettuati, si trovano le ascisse e le

ordinate di due punti che consentono un rapido tracciamento delle rette di regolarizzazione su carta probabilistica e alcuni valori caratteristici di pioggia corrispondenti a tempi di ritorno di uso frequente.

A2. Per la stessa stazione sono riportate le rette di regolarizzazione ed i punti corrispondenti alle frequenze empiriche dei dati del campione.

L'esame dell'andamento della retta regolarizzatrice è sempre un valido controllo del grado di adattamento della legge adottata al campione in esame, indipendentemente dal risultato dei test.

A3. Per il Piemonte sono state tracciate le carte della piovosità per data durata e frequenza. I valori, riportati col metodo delle isoiete, non devono essere intesi come riferiti ad *un evento temibile*; essi forniscono invece, separatamente per ciascun sito, le altezze di pioggia, per le durate da una a 12 ore, che ci si attende non essere superate a meno di un rischio valutato tramite il tempo di ritorno. Si tratta quindi di valori estremi *puntuali* e, nell'applicazione a bacini di drenaggio, devono essere opportunamente corretti con i consueti metodi di ragguaglio all'area.

Le carte sono state prodotte per tempi di ritorno di 10 e 50 anni e sono qui riportati due gruppi di esse relative rispettivamente alle precipitazioni di durata tre e sei ore. Sono le durate più interessanti per una valutazione delle precipitazioni che possono coinvolgere i bacini medio-piccoli piemontesi. Per quanto riguarda la scelta dei tempi di ritorno, vale la pena di dare qualche precisazione. Un evento con tempo di ritorno 10 anni può essere considerato abbastanza grave da essere assunto quale condizione critica per molte opere idrauliche minori; d'altra parte, data la consistenza dei campioni disponibili, non sembra ragionevole, per lo scopo di queste carte, considerare tempi di ritorno superiori a 50 anni. L'esperienza dei recenti eventi alluvionali ha confermato che danni complessivamente gravi possono derivare da precipitazioni localmente anche modeste [6].

Per valori elevati del tempo di ritorno (200, 500, 1000 anni) in genere emergono i difetti insiti nel procedimento di regolarizzazione o si esaltano le divergenze fra la funzione di distribuzione adottata e la distribuzione empirica delle frequenze del campione in esame. Dopo anni di entusiasmo per la eleganza con cui i vari procedimenti, via via sperimentati, risolvevano il problema di assegnare la *portata o la precipitazione di progetto*, oggi si tende ad ammettere, pur accettandone i risultati, che il problema è risolto solo formalmente. *Questi valori possono essere considerati come parametri di progetto su cui l'idrologo e il funzionario che deve prendere decisioni operative concordano, sapendo che essi sono soggetti a serie incertezze ed errori* [47].

Occorre infine precisare che la corretta interpretazione delle carte qui proposte deve portare a concludere che (con riferimento, ad esempio, al tempo di ritorno di 50 anni) i 40 mm precipitabili in tre ore sull'alto bacino della Dora Riparia sono, per questo bacino, gravi tanto quanto gli oltre 100-120 mm possibili, nello stesso intervallo di

(3) La documentazione completa per le stazioni considerate è stata consegnata al Servizio geologico della Regione Piemonte, nell'ambito della citata convenzione.

TABELLA 1 - Stazione pluviometrica di IVREA

Numero dei casi = 35		Precipitazione di 1 ora	
Media X	=	29,2942	
Media X^2	=	996,9670	
Scarto quadratico medio X	=	11,9540	
Media $\text{Log } X$	=	1,4392	
Media $(\text{Log } X)^2$	=	2,0940	
Scarto quadratico medio $\text{Log } X$	=	0,1531	

Regolarizzazione secondo GALTON

$\text{Log } (X) = C \times Z + D$		$C = 0,15310$	$D = 1,43918$		
$Z = A \times \text{Log } (X) - B$		$A = 6,53155$	$B = 9,40008$		
Test del χ quadro:	χ^2	Yates	Tab χ	90%	95%
$NDF = 4$	6,000	3,550		7,779	9,488
Test del segno:	Segni —	Segni +	W (Wine)	90%	95%
	20	15		12	11
Punti per tracciamento retta:		Ascissa	Ordinata		
		27,5	0,5		
		43,2	0,9		
Valori per frequenza assegnata:		Pioggia in mm	Tempo di ritorno in anni		
		43,2	10,0		
		56,8	50,0		
		62,5	100,0		

Regolarizzazione secondo GUMBEL

$X = C \times Z + D$		$C = 10,59320$	$D = 23,57028$		
$Z = A \times (X - B)$		$A = 0,09440$	$B = 23,57028$		
Test del χ quadro:	χ^2	Yates	Tab χ	90%	95%
$NDF = 4$	5,600	3,550		7,779	9,448
Test del segno:	Segni —	Segni +	W (Wine)	90%	95%
	16	19		12	11
Punti per tracciamento retta:		Ascissa	Ordinata		
		27,5	0,5		
		47,4	0,9		
Valori per frequenza assegnata:		Pioggia in mm	Tempo di ritorno in anni		
		47,4	10,0		
		64,9	50,0		
		72,3	100,0		

TABELLA 2 - Possibilità climatiche

Stazione	Tempo di ritorno	GALTON		GUMBEL	
		<i>a</i>	<i>n</i>	<i>a</i>	<i>n</i>
IVREA	5	34,8	0,301	37,3	0,280
N. Oss. 35	10	40,5	0,295	44,8	0,265
	20	45,9	0,289	52,0	0,255
	30	49,1	0,286	56,2	0,250
	50	52,9	0,283	61,4	0,245
	100	58,1	0,279	68,4	0,239

tempo e con pari probabilità, sull'area dal Biellese al Lago Maggiore o sull'Orba. Le carte aiutano a porre in luce le diverse entità di afflusso che i vari corsi d'acqua possono dover sopportare. Tali diversità negli afflussi meteorici, a parità di frequenza, si traducono, compatibilmente con i fattori locali di natura geologica e morfologica, in differenze di densità di drenaggio, di sezione e di andamento degli alvei naturali; per mezzo di adattamenti di questo genere, talvolta ostacolati dai citati fattori geologici, i corsi d'acqua si dispongono a smaltire gli afflussi conseguenti agli eventi pluviometrici usuali.

B. CURVE DI POSSIBILITÀ CLIMATICA

Per 165 stazioni pluviografiche con almeno 10 anni di osservazioni sono stati ricavati e tabellati i valori *a* ed *n* della relazione fra altezza di pioggia e durata (in ore) $h = a t^n$; questi parametri cambiano a seconda del tempo di ritorno e, in minore misura, a seconda della legge impiegata per la regolarizzazione delle frequenze. Statisticamente la legge di Galton sembra adattarsi meglio ad interpretare i dati dei pluviografi piemontesi, ma anche la legge di Gumbel fornisce quasi sempre valori affidabili. Maggiori cautele devono essere prese nell'impiego di stazioni con numero di osservazioni inferiore a 20. L'impiego di queste curve dipende dalla metodologia nel cui contesto sono previste.

Secondo il *metodo razionale* la portata al colmo (m^3/s) è, come si è detto, data dalla (1). Si voglia la portata al colmo, con tempo di ritorno $T_r = 30$ anni, ad una sezione che sottende un'area di 2.4 km^2 e per la quale si sia valutato, in qualche maniera, il tempo di corrivazione pari a $1^h 10'$ ed un coefficiente di deflusso $C = 0.7$. La definizione di questi parametri è delicata e controversa. Vale la pena di segnalare la dipendenza del coefficiente *C* dal tempo di ritorno dell'evento che si vuole indagare, secondo quanto è apparso da dati sperimentali 38 accuratamente analizzati; in base a ciò, il coefficiente *C* perderebbe, in senso stretto e con riferimento ad eventi estremi, il significato di rapporto fra deflusso e afflusso potendo assumere valori maggiori di uno.

Riprendendo l'esempio di calcolo proposto, si supponga di poter utilizzare i dati del più vicino

pluviografo (ancora ad es.: Ivrea). Per $T_r = 30$ anni, usando Galton si trova $a = 49.1$, $n = 0.286$ da cui $h = 49.1 \cdot t^{0.286} = 51.3$ essendo $t = 1.17$ ore. L'intensità risulta $i = 51.3/1.17 = 43.9 \text{ mm/ora}$ per cui, alla fine,

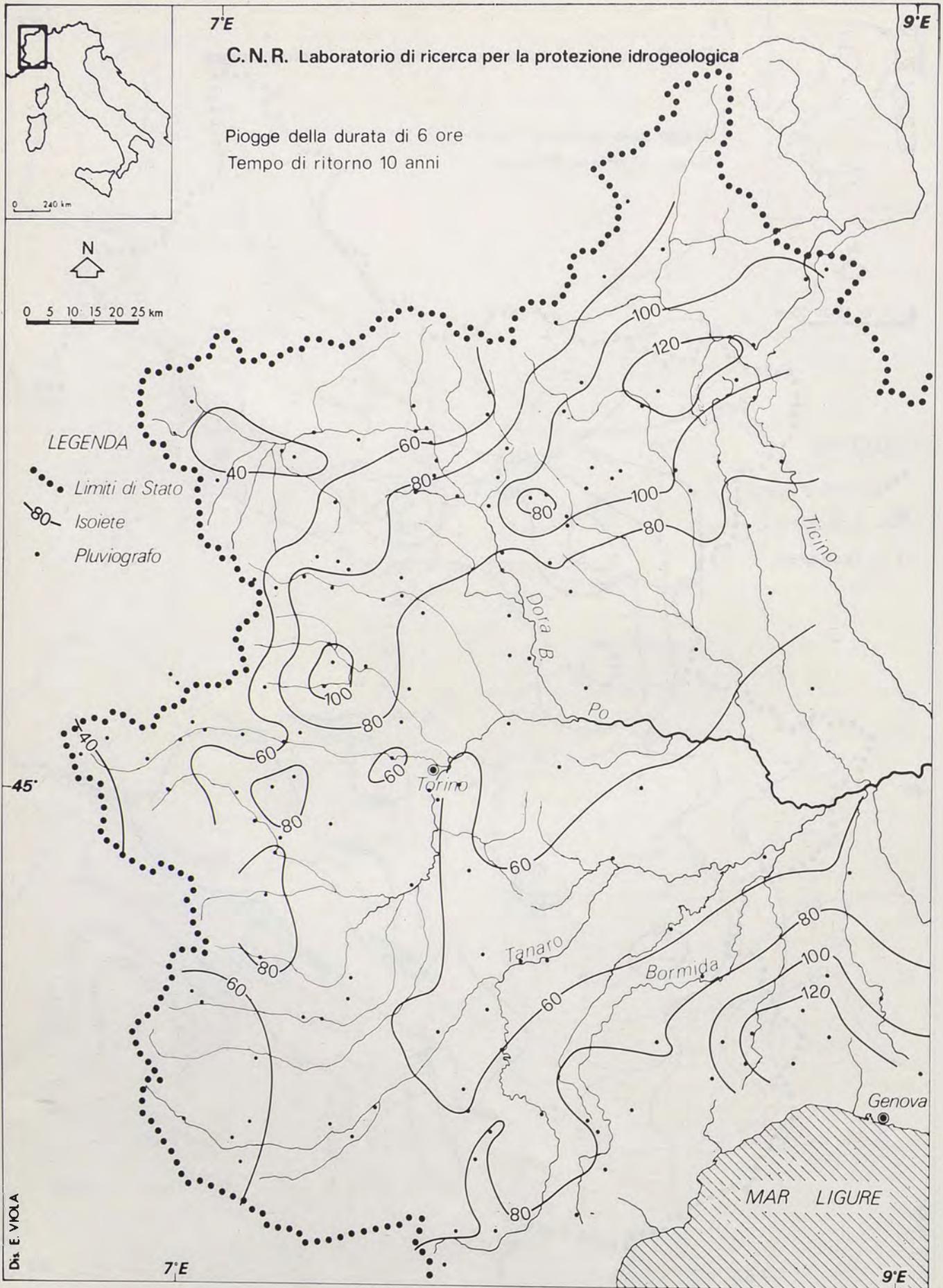
$$Q = 0.7 \cdot \frac{43.9}{3.6} \cdot 2.4 = 20.5 \text{ m}^3/\text{s}$$

Nelle opere di smaltimento dell'acqua piovana secondo il metodo di Paladini e Fantoli, qualora si utilizzino uno dei numerosi procedimenti diretti esposti nella vasta letteratura esistente al proposito, i coefficienti *a* ed *n* entrano direttamente nelle formule risolutive che forniscono sia la massima portata defluente [35] sia la dimensione della sezione in grado di smaltire detta portata [32].

Ringraziamenti - È doveroso ringraziare il dr. M. Dana dell'Assessorato all'Agricoltura - Servizio Forestale cui si deve la prima idea di raccogliere ed elaborare a scala regionale i dati delle precipitazioni di breve durata e l'ing. P. F. Brizio che, durante la sua permanenza presso l'Assessorato alla Tutela dell'Ambiente, estemporaneamente, preparò la prima stesura del programma per la regolarizzazione delle frequenze.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANSELMO V. (1978), *Considerazioni idrologiche sugli eventi del febbraio 1972 e febbraio 1974 nel « bacino terziario », piemontese*, « Boll. Ass.ne Mineraria Subalpina », Torino, 15, 4, 716-724.
- [2] ANSELMO V. (1978), *L'evento idrologico del 19 maggio 1977 nei bacini del Pellice e del Germanasca*, « Atti XVI Convegno Idraulica e Costruzioni idrauliche », Torino, memoria B3.
- [3] ANSELMO V. (1978), *L'evento idrologico del 6 ottobre 1977 nei bacini dell'Orba e affluenti (Piemonte)*, « Mem. Soc. Geol. It. », 19, 281-288.
- [4] ANSELMO V. (1979), *Il nubifragio del 7 agosto 1978 nel bacino del Toce*, « Boll. Ass.ne Mineraria Subalpina », Torino, 16, 2, 283-300.
- [5] ANSELMO V., UBERTINI L. (1979), *Transfer function-noise model applied to flow forecasting*, « Hydrological Sciences Bulletin », 24, 3, 353-359.
- [6] ANSELMO V. (1980), *Sul comportamento delle infrastrutture stradali in ambiente alpino nel corso di eventi alluvionali*, « Atti e Rassegna Tecnica Società Ingegneri e Architetti », Torino, 113, 2, 61-73.
- [7] ANSELMO V. (1980), *Three case studies of storm- and debris-flows in North-western Italy (Piemonte)*, « Interpraevent 1980 », Bad Ischl, VI/28 a.



- [8] BETSON R.P. (1964), *What is watershed runoff*, « Journ. of Geophysical Research », 69, 8, 1541-1552.
- [9] BUTERA L. (1972), *Sull'applicazione di alcune leggi probabilistiche a corsi d'acqua della regione piemontese*, « Atti e Rassegna Tecnica Soc. Ingegneri e Architetti », Torino, 1-2.
- [10] CAO C. (1967), *Sulle curve segnalatrici di possibilità pluviometrica*, « Atti X Convegno Idraulica e Costruzioni Idrauliche », Cagliari, 167-182.
- [11] CAO C., PAZZAGLIA G., PUDDU P. (1969), *Determinazione statistica delle curve di possibilità climatica pluviometrica. Applicazione alle piogge di durata inferiore alle 24 ore in Sardegna*, « Atti Convegno Idrologia e la Sistemazione dei piccoli bacini », Roma, 293-315.
- [12] CARONI E., ROSSO R. (1977), *Storm sewer capacity design under risk*, « Proc. XVII Congr. IAHR », Baden-Baden, paper C 67.
- [13] CARONI E., ROSSO R. (1978), *Un'applicazione del metodo italiano al dimensionamento di un sistema di smaltimento delle acque di pioggia in condizioni di rischio*, « Giornale del Genio Civile », fasc. 7-8-9, 279-289.
- [14] CHOW V.T. (1951), *A general formula for hydrologic frequency analysis*, « Trans. American Geophys. Union », 32, 231-237.
- [15] CHOW V.T. (1964), *Handbook of applied hydrology*, sect. 25. Mc Graw-Hill.
- [16] CICONI G.B., GIULIANO G., SPAZIANI F.M. (1974), *Indagine sulla distribuzione di probabilità delle portate di piena dei corsi d'acqua italiani*, « XIV Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche », Napoli.
- [17] Commissione interministeriale per lo studio della sistemazione idraulica e della difesa del suolo (1970), *Relazione conclusiva*, Roma.
- [18] DELLA LUCIA D., FATTORELLI S., PROVASI C. (1975), *Indagine sulla distribuzione spaziale delle piogge intense nel territorio montano delle Tre Venezie*, « Annali Centro di Economia Montana delle Venezie », 9, 183-205.
- [19] DELLA LUCIA D., FATTORELLI S., PROVASI C. (1976), *Determinazione delle zone omogenee per le piogge intense nel Trentino*, « Memorie Museo Tridentino Scienze Naturali », 21, 2.
- [20] DUNNE T. (1978), *Field studies of hillslope flow processes in Hillslope Hydrology*, (ed. H.J. Kirkby), Wiley.
- [21] GABELLA A. (1978), *Considerazioni sulla determinazione delle portate di massima piena con il metodo cinematico (o del tempo di corrivazione)*, « Atti e Rassegna Tecnica Soc. Ingegneri e Architetti », Torino, 111, 3-4, 83-93.
- [22] GIANDOTTI M. (1933), *La previsione delle piene e delle magre nei corsi d'acqua*, « Atti del Congresso IAHS », Lisbona.
- [23] GOVI M. (1979), *L'assetto geomorfologico nella valutazione dei rischi connessi ad eventi idrologici estremi*, Seminario su: « La pianificazione di bacino », Genova 17-20 luglio.
- [24] GREPPI P. (1979), *Studio idrologico del bacino del Torrente Elvo*, « Idrotecnica », 3, 83-93.
- [25] GUMBEL E.J. (1958), *Statistics of extremes*, Columbia University Press, N. Y.
- [26] HEWLETT J.D. (1961), *Soil moisture as a source of base flow from steep mountain watersheds*, « Southeastern Forest Experiment Station, Asheville, N.C., USDA Forest Service, Station Paper », no. 132.
- [27] HEWLETT J.D. and HIBBERT A.R. (1966), *Factors affecting the response of small watersheds to precipitations in humid areas*, Int. Symp. Forest Hydrology.
- [28] HORLER A. u. RHEIN H.R. (1961), *Die Intensitäten der Starkregen in der Schweiz*, « Schweizerische Bauzeitung », 79, 32, 559-563.
- [29] LAZZARI E. (1966), *Esame di alcune leggi probabilistiche usate per la previsione delle portate di piena*, « L'acqua », fasc. 6 p. 177-187.
- [30] LAZZARI E. (1967), *Studio probabilistico delle piene con particolare riferimento ai corsi d'acqua della Sardegna*, « L'Energia Elettrica », Milano, n. 4, p. 212-224.
- [31] LAZZARI E. (1977), *Previsione delle piene nei piccoli bacini*, « Atti XI conferenza regionale europea dell'ICID », Vol. 1, Roma, 10-12 maggio.
- [32] LOMBARDO G. (1964), *Sull'applicazione del metodo italiano al calcolo di progetto delle fogne bianche*, « Giornale del Genio Civile », p. 249-256.
- [33] LOMBARDO G. (1976), *L'impostazione probabilistica nel dimensionamento dei manufatti per lo smaltimento delle acque di pioggia*, « L'Energia Elettrica », Milano, n. 5.
- [34] MARCHETTI G. (1955), *Sulle massime portate di piena osservate nei corsi d'acqua italiani a tutto il 1953*, « Giornale Genio Civile », 112, 3-4, 193-206.
- [35] MARCHI E. (1961), *Sul calcolo delle portate di piena nelle reti di fognatura*, « Ingegneri Architetti Costruttori », Bologna, n. 7.
- [36] MELE P. (1976), *Contributi di massima piena dei corsi d'acqua italiani con piccolo bacino imbrifero*, « Giornale Genio Civile », 114, 7-8-9, 265-302.
- [37] MERLO C. (1973), *Determinazione mediante il « metodo razionale » della portata di massima piena di data frequenza nei « piccoli bacini »*, « Annali della facoltà di Scienze Agrarie », Vol. IX, Torino.
- [38] MOISELLO U. (1976), *Curve segnalatrici di possibilità climatica e calcolo delle portate di massima piena*, « Atti XV Convegno di Idraulica e Costruzioni Idrauliche », Roma.
- [39] MONGIARDINI V. (1959), *Sui contributi di massima piena dei corsi d'acqua italiani*, « Energia Elettrica », 7, 622-636.
- [40] Natural Environment Research Council (1975), *Flood Studies Report*, London.
- [41] PEZZOLI G. (1970), *Schemi e modelli matematici in idrologia*, Levrotto & Bella, Torino.
- [42] PUGLISI S., ZANFRAMUNDO P. (1978), *Osservazioni idrologiche in piccoli bacini del subappennino dauno*, « Giornale Genio Civile », 116, 10-11-12, 439-453.
- [43] QUAGLIA M. (1969), *Le massime precipitazioni orarie e giornaliere nella Valle d'Aosta*, « Atti e Rass. Tec. Soc. Ingegneri e Architetti », Torino, 6.
- [44] RAFFA U. (1962), *Le portate di piena probabili degli affluenti del Po*, « Annali Idrologici », Parte II, 149-171.
- [45] ROCHE M. (1963), *Hydrologie de Surface*, Gauthier Villars - Paris.
- [46] ROSSETTI M., ROSSETTI G. (1974), *Bacino idrografico del Po: valutazione probabilistica delle piogge critiche*, « Istituto di Geologia e Geografia », Parma.
- [47] SCHULTZ G.A. (1979), *New methods of hydrological computations used for the design of water resources projects*, « UNESCO, Int. Symp. on Specific Aspects of Hydrological Computations for Water Projects », Leningrado.
- [48] TONINI D. (1959), *Elementi di idrografia ed idrologia*, Vol. I, Libreria universitaria, Venezia.
- [49] WIDMOSER P. (1974), *Extremabflüsse aus vierzig kleinen Einzugsgebieten der Schweiz*, « Schweizerische Bauzeitung », 92, 32, 757-765.
- [50] WINE R.L. (1964), *Statistics for Scientists and Engineers*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs; N. J.
- [51] YEVIJEVICH V. (1972), *Probability and Statistics in Hydrology*, Water Resources Publications, Fort Collins.

La linea elastica: formalizzazione/decidibilità (*)

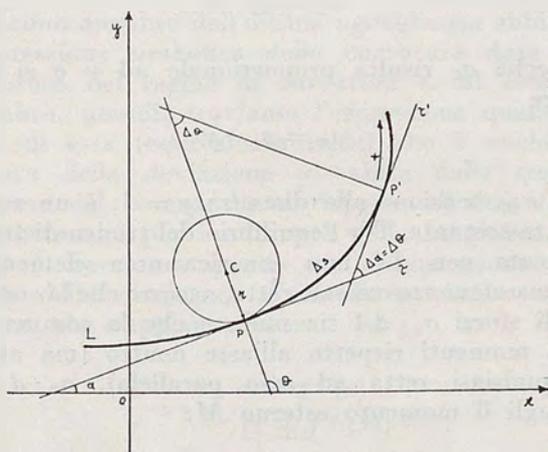
GIOVANNI CHIRIATTI, GIACINTO PLESCIA e ALESSANDRO PORCU (**)
 considerano come la crisi dei fondamenti della matematica ponga quesiti di congruenza e decidibilità alle scienze della natura e, in particolare, ai processi di matematizzazione dei modelli fisici. Dall'analisi dei processi di matematizzazione che conducono all'equazione differenziale della linea elastica, giungono alla sua storicizzazione, per ritrovare, quindi, gli interrogativi posti dai procedimenti di formalizzazione. Dialettica in nuce nel presente articolo per ovvie ragioni di sintesi, è suggerita dalla problematicità con cui è affrontato l'argomento: primo risultato d'un più ampio lavoro condotto fino alla proposizione delle questioni inerenti la formalizzazione della linea elastica in termini di Teoria delle Catastrofi, ormai evolutasi in forme applicate.

Un problema: dare una definizione rigorosa del concetto di curvatura d'una linea e fornire una misura, appare un problema d'ordine logico formale, squisitamente matematico e geometrico.

Partiamo dalla prima definizione non assiomatica, ma riferita al significato geometrico, della curvatura: la curvatura misura la rapidità ⁽¹⁾ con la quale una linea si discosta, nell'intorno di un punto, dalla tangente per il punto stesso.

La possibilità di dare a questo concetto una espressione formalmente rigorosa è indistricabilmente collegata all'acquisizione di tutto il bagaglio teorico concettuale fornito dal calcolo infinitesimale.

Fissati su una linea L un punto P e un verso di misurazione degli archi s , si prenda un punto P' su L che stacchi da P , nel verso positivo prefissato, un arco di curva Δs .



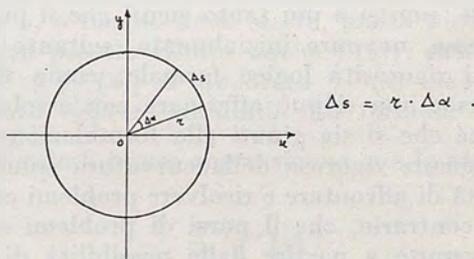
Le tangenti in P e P' , rispettivamente τ e τ' , formano tra loro un angolo $\Delta\alpha$ che rappresenta la deviazione della tangente τ quando si passa da P a P' . Tale deviazione è assunta quale misura della *curvatura totale* della linea L relativamente all'arco da P a P' . Il rapporto

$$\frac{1}{r_m} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$$

rappresenta la deviazione media della tangente per unità di lunghezza dell'arco $\overline{PP'}$: essa misura la *curvatura media* dello stesso. Il limite di $\frac{1}{r_m}$ per P' che tende a P è la misura della *curvatura* $\frac{1}{r}$ di L nel punto P

$$\frac{1}{r} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}$$

Diciamo che r è il *raggio di curvatura* della linea L nel punto P . Quest'ultima definizione è giustificata dal fatto che nel caso in cui L fosse un tratto di circonferenza il rapporto $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ sarebbe costante e uguale al raggio della circonferenza



stessa. Il raggio di curvatura rappresenta quindi il raggio di una particolare circonferenza (tra le infinite tangenti ad L in P) che viene denominata *cerchio osculatore* ⁽²⁾.

Il concetto di curvatura sembra a questo punto completamente chiarito: avendone offerto una definizione in qualche modo « operativa » che costituisce un procedimento per misurarla, una volta che sia stata data una rappresentazione analitica della linea L . Qui supponiamo di avere a disposizione la sua rappresentazione cartesiana ⁽³⁾

(*) La ricerca è una breve sintesi della parte introduttiva alla tesi *Per la critica della (non)-neutralità della scienza. Per una teoria dell'inneutralità*, discussa nel 1979 dagli Autori presso la Facoltà di Architettura del Politecnico di Torino, relatore il prof. Manfredo Montagnana.

(**) Neolaureati in architettura.

(1) La nozione di rapidità sembra mutuata dalla nozione fisica di velocità e risentire delle origini del concetto di derivata, nata come *flussione*.

(2) Il significato di cerchio osculatore e le sue proprietà presentano non poche difficoltà concettuali, specie se se vuol dare una spiegazione di carattere geometrico.

(3) Si potrebbe utilizzare anche una rappresentazione parametrica della forma $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$, che sarebbe più generale.

$$y = f(x).$$

Ciò implica che la linea L sia tagliata in un sol punto da ogni parallela all'asse y .

Indichiamo con x l'ascissa del punto P e con $x + \Delta x$ l'ascissa del punto P' . Sappiamo che la lunghezza di un arco infinitesimo $\Delta s = ds$ è data da

$$ds = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$$

e che, avendo indicato con α l'angolo che la tangente in P ad L forma col semiasse positivo delle ascisse, $\Delta\alpha$ rappresenta l'incremento di α quando la tangente passa dal punto P al punto P' di L . Inoltre, per definizione di derivata,

$$\text{tang } \alpha = f'(x); \quad \alpha = \text{arctg } f'(x);$$

$$d\alpha = d \text{ arctg } f'(x);$$

da cui abbiamo

$$d\alpha = \frac{f''(x)}{1 + f'^2(x)} dx.$$

Possiamo scrivere l'espressione analitica definitiva che dà la misura della curvatura in P di L .

$$\frac{1}{r} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{3/2}}.$$

Esaminando l'applicazione che il concetto matematico di curvatura d'una linea piana e la sua espressione analitica hanno nell'analisi della deformazione d'una trave sollecitata da momento flettente, non si è più tanto sicuri che il problema si ponesse, neppure inizialmente, soltanto in termini di rigore logico formale; come all'inizio era parso: non si può affermare con assoluta certezza né che si sia giunti alla formulazione matematicamente rigorosa della curvatura spinti dalla necessità di affrontare e risolvere problemi concreti, né, al contrario, che il porsi di problemi concreti sia avvenuto a partire dalle possibilità di risoluzione offerte da tecniche di calcolo già rigorosamente formalizzate.

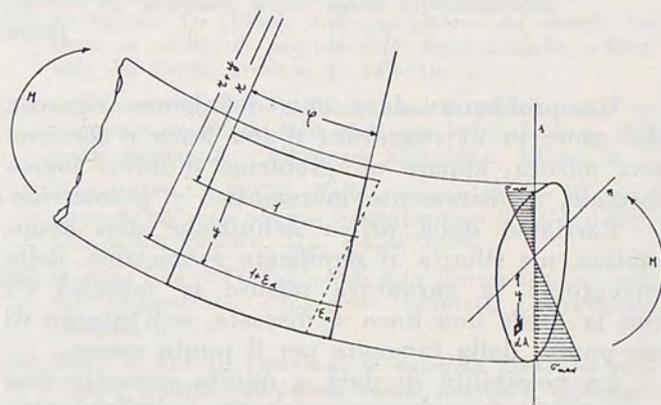
È forse il caso di esaminare secondo quale processo logico la formula matematica della flessione d'una linea diviene parte integrante dell'analisi deformazionale delle travi soggette a momento flettente.

Consideriamo un tronco di trave, di materiale perfettamente omogeneo e isotropo, di lunghezza unitaria e sezione qualunque (simmetrica rispetto ad un asse s , intersezione tra piano di sollecitazione coincidente col piano di flessione e piano della sezione) soggetto a momento flettente semplice, costante, agente nel piano contenente l'asse geometrico della trave. Si ipotizza che:

1) esista in ogni sezione un asse neutro n (che definisce lungo la trave un piano neutro di

fibre che conservano la loro lunghezza) e che le fibre al di sopra e al di sotto di esso siano soggette a tensioni normali (longitudinali) di segno opposto, aventi una distribuzione triangolare nel senso dell'altezza della sezione, con valori assoluti massimi in corrispondenza dei lembi inferiore e superiore di essa;

2) che le sezioni rette trasversali della trave si conservino piane e normali alle fibre deformate.



Una fibra longitudinale generica del tronco considerato subisce una variazione di lunghezza ϵ_x proporzionale alla sua distanza y dall'asse neutro. La tensione σ_x che compete a questa fibra è proporzionale alla variazione di lunghezza ϵ_x se si suppone di essere nel campo di validità della legge di Hooke:

$$\sigma_x = \epsilon_x \cdot E$$

cosicché σ_x risulta proporzionale ad y e si può porre

$$\sigma_x = \sigma_{1x} \cdot y$$

ove σ_{1x} , tensione alla distanza $y = 1$, è un coefficiente costante. Per l'equilibrio del tronco di trave, indicata con dA una generica area elementare della sezione trasversale retta, occorre che la somma degli sforzi $\sigma_x \cdot dA$ sia nulla e che la somma dei loro momenti rispetto all'asse neutro (ma anche a qualsiasi retta ad esso parallela), $\sigma_x \cdot dA \cdot y$ eguagli il momento esterno M :

$$\int_A \sigma_x \cdot dA = 0; \quad \int_A y \cdot \sigma_x \cdot dA = M$$

ovvero

$$\sigma_{1x} \cdot \int_A y \cdot dA = 0; \quad \sigma_{1x} \cdot \int_A y^2 \cdot dA = M.$$

La prima di queste ultime eguaglianze dice che l'asse neutro n deve essere baricentrico (cioè contenere il baricentro della sezione trasversale retta). Dalla seconda otteniamo

$$\sigma_x = \frac{M}{J}; \quad \sigma_x = \frac{M \cdot y}{J}.$$

Si passa quindi alla valutazione quantitativa delle deformazioni, avendone già presupposto la qualità. Le fibre del tronco di trave si deformano, nella ipotesi di momento flettente costante, secondo archi circolari concentrici: per la costanza dell'entità della deformazione l'asse geometrico si trasforma in una linea di curvatura costante, cioè in un arco circolare di centro O contenuto in un piano (piano di flessione) che coincide col piano di sollecitazione a causa della simmetria della sezione rispetto all'asse s . Se r è il raggio dell'asse geometrico deformato (rimasto di lunghezza unitaria nel tronco di trave considerato) una fibra distante y dall'asse neutro n subisce una dilatazione (o contrazione) ε_x tale che

$$\frac{1 + \varepsilon_x}{1} = \frac{r + y}{r} \quad \text{da cui}$$

$$\varepsilon_x = \frac{y}{r}$$

e quindi, essendo

$$\sigma_x = \varepsilon_x \cdot E \quad , \quad \sigma_x = E \cdot \frac{y}{r} .$$

Confrontando quest'ultima con l'espressione di σ_x in funzione del momento, abbiamo

$$\frac{M \cdot y}{J} = \frac{E \cdot y}{r} \quad \text{cioè} \quad \frac{1}{r} = \frac{M}{EJ} .$$

Al primo membro dell'ultima uguaglianza abbiamo l'espressione simbolica della curvatura data dal reciproco del raggio di curvatura r . Al secondo membro, quindi, troviamo l'espressione quantitativa di essa (equivalente reale) che è anche la misura della deviazione φ subita dalle sezioni estreme del tronco, l'una rispetto all'altra (curvatura media per l'unitarietà della lunghezza del tronco). Facciamo appello ora all'espressione analitica della curvatura d'una linea piana in un punto, che sappiamo essere

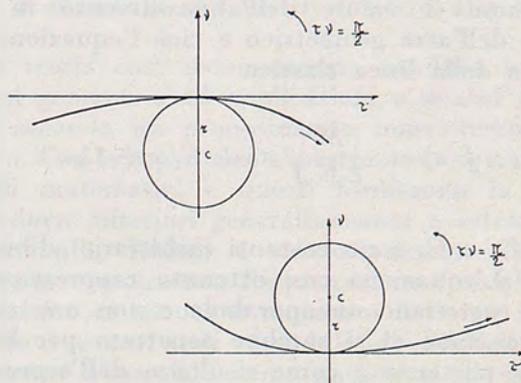
$$\frac{1}{r} = \pm \frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{3/2}}$$

L'introduzione della doppia possibilità di segno $+$ o $-$ può essere giustificata intuitivamente dal fatto che la misura della curvatura può assumere valori positivi o negativi a seconda che la linea descritta dalla funzione $y = f(x)$ sia convessa o concava. In effetti la formula così scritta è ambigua: essendo la curvatura l'inverso di una lunghezza, non ha senso che essa assuma valori negativi. D'altra parte, mentre è $[1 + f'^2(x)]^{3/2} > 0$, può essere $f''(x) > 0$ oppure $f''(x) < 0$, a seconda che la curva sia concava o convessa. Per superare l'ostacolo parrebbe più corretto scrivere

$$\frac{1}{r} = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'^2(x)]^{3/2}} ,$$

piuttosto che introdurre un'inutile ambiguità di segno che ci pare, al limite, concettualmente errata. La sua introduzione può avere anche un'altra spiegazione che, tuttavia, non offre giustificazione più plausibile: orientata la tangente τ nel verso in cui crescono gli archi e la normale ν a τ in modo

che $\tau\nu = \frac{\pi}{2}$, la seminormale positiva ν può trovarsi dalla stessa parte o dalla parte opposta della curva rispetto alla tangente τ . Nel primo caso, essendo τ e ν gli assi di riferimento, il punto C avrebbe ordinata positiva quindi $r > 0$ e $\frac{1}{r} > 0$; nel secondo avviene l'opposto.



Pur non entrando nel merito della correttezza concettuale e formale di quest'ultima spiegazione, sembra opportuno assumere la notazione con le barre di valore assoluto per evitare ogni equivoco, cosa che d'ora in avanti faremo.

Nel caso della deformazione di una trave l'inclinazione della tangente in un punto dell'asse geometrico deformato (linea elastica), rispetto all'asse x è, o meglio deve essere, molto piccola per cui molto piccola risulta anche $f'(x)$: nell'espressione $[1 + f'^2(x)]$ il quadrato $f'^2(x)$ può essere trascurato rispetto all'unità. La formula che dà $\frac{1}{r}$ può quindi essere approssimata con la seguente:

$$\frac{1}{r} = |f''(x)| .$$

Confrontando quest'ultima con l'espressione della curvatura in funzione del momento, abbiamo

$$|f''(x)| = \frac{|M|}{EJ}$$

che rappresenta l'equazione differenziale della linea elastica. Osserviamo tuttavia che facendo coincidere l'asse x con l'asse geometrico indeformato della trave, origine nell'estremità sinistra di questa e verso positivo a destra; l'asse y con verso positivo in basso affinché le ordinate risultino positive quando la trave è soggetta a momento flettente convenzionalmente positivo (fibre superiori compresse, inferiori tese); M e y'' hanno sempre segno opposto in quanto se $M > 0$ la linea elastica è

concava per cui $y'' < 0$, se $M < 0$ la linea elastica è convessa e $y'' > 0$.

Precisato ciò, supponiamo costanti, oltre ad M , anche E e J , il che equivale a dire che la trave è costituita da materiale omogeneo e isotropo ed ha sezione costante. Integrando una prima volta abbiamo

$$\int |f''(x)| dx = |f'(x)| = \frac{|M|}{EJ} x + C_1$$

che, data la supposta piccola entità delle deformazioni, può essere confusa con il valore dell'angolo di rotazione in ogni sezione della trave ($\alpha \approx \sim \text{tang } \alpha$). Integrando una seconda volta otteniamo il valore dell'abbassamento in ogni punto dell'asse geometrico e cioè l'equazione cartesiana della linea elastica

$$f(x) = \frac{|M|}{2EJ} x^2 + C_1 x + C_2,$$

dove C_1 e C_2 sono costanti (arbitrarie) d'integrazione. L'equazione così ottenuta rappresenta nel piano cartesiano una parabola e non una circonferenza come ci si sarebbe aspettato per le ipotesi di partenza e come risultava dall'espressione

$$\frac{1}{r} = \frac{|M|}{EJ}$$

che scritta nella forma

$$r = \frac{EJ}{|M|},$$

dove il secondo membro è costante, rappresenta proprio l'equazione d'una circonferenza espressa in coordinate polari.

Questa contraddizione è però solo apparente e nasce dall'aver eliminato nella formula esatta della curvatura la $f''(x)$.

Infatti partendo dall'espressione esatta

$$\frac{|f''(x)|}{[1 + f'^2(x)]^{3/2}} = \frac{|M|}{EJ}$$

indichiamo

$$y' = f'(x) = p$$

$$y'' = f''(x) = p'$$

e scriviamo

$$\int \frac{p'}{(1 + p^2)^{3/2}} dx = \int K dx \quad 1.$$

Risolviamo il primo membro in cui $p' dx = dp$

$$\int \frac{1}{(1 + p^2)^{3/2}} dp = p(1 + p^2)^{-1/2} + C_1.$$

Avendo in precedenza posto $y' = p$ possiamo scrivere la 1 nel seguente modo

$$\frac{y'}{(1 + y'^2)^{1/2}} = Kx + C_1.$$

Isolando la y' otteniamo

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{Kx + C_1}{\sqrt{1 - (Kx + C_1)^2}}$$

ed integrando

$$\int dy = y = -\frac{1}{2K} \int \frac{-2(Kx + C_1)^2}{\sqrt{1 - (Kx + C_1)^2}} dx;$$

$$y = -\frac{1}{K} \sqrt{1 - (Kx + C_1)^2} + C_2$$

In conclusione si ha

$$(y - C_2)^2 + \left(x + \frac{C_1}{K}\right)^2 = \frac{1}{K^2},$$

espressione che rappresenta l'equazione cartesiana d'una circonferenza di raggio $\frac{1}{K} = \frac{EJ}{|M|}$ e centro $C\left(-\frac{C_1}{K}, C_2\right)$.

Si comprende ora perché sia opinione diffusa che l'avvento del calcolo infinitesimale abbia reso possibile la corretta interpretazione e descrizione analitica di molti fenomeni fisici conosciuti in precedenza soltanto per via empirica e/o intuitiva: la possibilità di formalizzazione viene spesso confusa con la possibilità di conoscenza.

L'equazione differenziale della linea elastica offre un esempio di come un procedimento di calcolo renda generalizzabile l'analisi di un fenomeno fisico e, dando risultati coerenti alle ipotesi iniziali, eviti di percorrere ogni volta la via della sperimentazione diretta.

Sorge a questo punto una domanda: è stato uno strumento, una tecnica di calcolo a permettere la decifrazione e la descrizione di leggi fisiche come quella presa in esame?

Al di là delle prime incerte generalizzazioni rintracciabili già nella *δύναμις* aristotelica e nelle formulazioni d'Archimede, sarà solo nel Rinascimento che si manifesterà, pienamente cosciente, lo sforzo generalizzante l'idea prescientifica di forza e di equilibrio tra forze; di momento e di equilibrio alla rotazione. Sarà possibile solo allora a Leonardo, Stevin, Roberval operare progressivamente con le forze come fossero entità astratte e, per questa via, raggiungere risultati d'indubbia utilità pratica servendosi semplicemente della loro rappresentazione geometrica simbolica sempre meno legata a modelli sperimentali. Il crescente livello d'astrazione porta Varignon ad enunciare la legge generale di

un sistema di più forze non concorrenti, in un sistema di due sole forze che, essendo ottenuto per artifici geometrici di semplici scorrimenti lungo le rette d'azione e composizioni e scomposizioni di forze concorrenti, potrà essere considerato, sia per i suoi effetti fisici che in astratto, come sistema di vettori applicati, geometricamente descritto, equivalente al sistema dato. Un altro passo nell'astrazione e Varignon può enunciare l'altro fondamentale teorema dell'uguaglianza tra il momento di un sistema di forze rispetto ad un punto (polo) e il momento somma dei momenti delle singole forze rispetto al medesimo punto (proprietà additiva dei momenti rispetto ad un punto).

Il processo d'astrazione ha preso il suo avvio definitivo: da un procedimento induttivo si passa ad uno deduttivo, foriero di sempre nuove astrazioni e generalizzazioni via via più ampie.

Un nuovo punto di sutura si verifica allorché dallo studio delle forze che sollecitano le strutture (forze esterne) si passa, spinti dalla necessità di oggettivare i risultati teorici raggiunti, a considerare il comportamento dei materiali sotto il profilo della loro resistenza. Non è più lecito considerare le forze libere di muoversi nello spazio, svincolate dal loro punto d'applicazione: per l'equilibrio statico è necessario potersi riferire ad un sistema *definito* di sollecitazioni esterne.

Ancora una volta l'intuizione e la sperimentazione prendono il sopravvento e, ipotizzando deduttivamente il comportamento resistivo dei materiali, viene formalizzata una teoria sulla base di leggi « generali » che progressivamente si allontanano dalla sperimentazione.

Dal problema della mensola proposto da Galilei si passa agli esperimenti di Hooke sulla deformazione e via via si giunge alle formulazioni teoriche definitive sullo stato tensionale interno dei materiali.

Galilei, supponendo una distribuzione uniforme delle tensioni nella sezione d'incastro, non spiegava il meccanismo per il quale il materiale della sua mensola poteva opporsi ad una sollecitazione di rotazione, pur se giungeva alla corretta conclusione formale che la resistenza a flessione d'una trave a sezione rettangolare è direttamente proporzionale alla sua larghezza e al quadrato della sua altezza.

Era necessario dunque omogeneizzare la risposta resistiva del materiale alla sollecitazione esterna di rotazione. Un primo contributo giunge da Mariotte che osserva come all'istante della rottura le fibre alla sezione d'incastro della mensola presentano allungamenti proporzionali alla rispettiva distanza dal punto di rotazione ipotizzato ancora all'estremo inferiore della sezione d'incastro stessa. Tenendo presenti i risultati ottenuti da Hooke propone quindi una distribuzione triangolare delle tensioni. La successiva osservazione che nella medesima sezione le fibre inferiori risultano accorciate nell'istante della rottura, conduce Mariotte ad assumere come centro di rotazione il punto centrale della stessa sezione. Saranno Parent e Coulomb che, partendo dall'osservazione di Mariotte, giungeranno con procedimenti geometrici

ed analitici a formulare in forma definitiva l'ipotesi di partenza dandone una giustificazione coerente: le fibre della parte superiore, rispetto al centro di rotazione posto a metà altezza della sezione rettangolare, sono tese, compresse quelle inferiori; decomponendo gli sforzi nelle componenti orizzontale e verticale per ciascuna fibra e applicando le tre equazioni d'equilibrio, Coulomb conclude che

1) la somma delle componenti orizzontali è uguale a zero;

2) la somma delle componenti verticali deve essere uguale al carico applicato all'estremo libero della mensola;

3) il momento rispetto all'asse di rotazione di tutti gli sforzi presenti nelle fibre deve uguagliare il momento del carico rispetto allo stesso asse.

La teoria così sistematizzata conduce a conclusioni generali e ad applicazioni e analisi particolari secondo un procedimento nuovamente deduttivo. Così le esperienze s'interpretano attraverso modelli matematici e questi forniscono la base per dedurre ulteriori generalizzazioni e astrazioni.

Bernouilli, Eulero e successivamente Navier portano a compimento l'esplicitazione formale del meccanismo di tenuta a momento flettente introducendo i concetti di « modulo di elasticità » e « momento d'inerzia » come parametri di qualità il primo e di forma il secondo.

Più precisamente: Bernouilli ed Eulero avevano formulato la relazione di proporzionalità tra deformazione e momento flettente come

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{C}$$

con C costante di proporzionalità non ancora ben precisata. Spetta a Navier averla identificata nel prodotto $E \cdot J$ e aver quindi scritto l'espressione della deformazione per momento flettente come

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E J}$$

La sperimentazione sui materiali conduce progressivamente ad una verifica empirica delle teorie date e della loro applicabilità ai diversi materiali. La Scienza delle Costruzioni si *emancipa* definitivamente dai limiti dell'attuazione pratica per divenire prodotto teorico applicabile e riproducibile in forma allargata senza il peso oppressivo delle restrizioni materiali. Si legittimano intanto i concetti di *lavoro* e *lavoro virtuale*, già presenti in Descartes e portati alle estreme conseguenze da Lagrange.

Nel trattato *Mécanique analytique*, Lagrange affermava: « in quanto alla natura del principio dei lavori virtuali, bisogna convenire che non è tanto evidente in sé (s. n.) da poter essere eretto a principio primo (s. n.), ma lo si può considerare quale espressione generale delle leggi dell'equilibrio, [...] ». E in altro punto avverte: « Non si troveranno affatto figure in questa opera. I metodi che si espon-

gono non richiedono né costruzioni, né ragionamenti geometrici o meccanici (s. n.), ma solamente operazioni algebriche, [...] chi ama l'Analisi vedrà con piacere la meccanica divenire una nuova branca (s. n.), e mi sarà grato di averne esteso così il domani». La consapevolezza dell'enorme potenza dell'astrazione nella conoscenza scientifica è qui piena.

Se la pratica sperimentale non contraddice i risultati teorici si è sicuri della bontà della teoria ma non certo della sua intrinseca oggettività. Essa non è garantita neppure dalla adozione di strumenti di calcolo estremamente sofisticati che sono pur sempre storicamente determinati dalla prassi gnoseologica umana.

Bernouilli ed Eulero, esprimendo in maniera formalmente corretta la deformazione dell'asse geometrico d'una trave inflessa ancor prima che fosse approntata una teoria coerente e non contraddittoria del comportamento resistivo dei materiali, non fanno che confermarlo. Ma che ne è dell'obiettività universale dello strumento matematico se non è in grado di liberare la conoscenza e la scienza dai vincoli della storia e dar loro valore euristico?

Nell'esempio citato risultati concreti sono ottenuti utilizzando concetti astratti: l'equazione differenziale della linea elastica è ottenuta mettendo a confronto l'espressione della deformazione di un tronco di trave, ricavata da osservazioni di tipo eminentemente fisico, con l'espressione analitica astratta della flessione d'una linea.

Lecita questa operazione; donde nasce quest'ultima espressione?

Se $y = f(x)$ è una funzione continua insieme alla sua derivata prima in un certo intervallo $[a, b]$ e consideriamo l'arco di estremi $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$. Definiamo la lunghezza dell'arco di curva AB come l'estremo superiore della lunghezza delle poligonali inscritte. Postuliamo che la lunghezza d'una corda non supera mai quella dell'arco da essa sotteso e che per gli archi vale la proprietà additiva: se C è un punto intermedio dell'arco AB

$$AB = AC + CB.$$

Un procedimento classico nella teoria del calcolo integrale conduce rapidamente alla seguente formula per la lunghezza dell'arco AB :

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Si può ora definire la curvatura d'una linea piana (prima curvatura o flessione) come

$$\frac{1}{r} = \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \text{ e per } \Delta s \rightarrow 0 \quad \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds}.$$

Indicando con θ l'angolo che il raggio di curvatura in P forma col semiasse positivo delle x e con α l'angolo che la tangente in P alla curva forma sempre col semiasse positivo delle ascisse

($\theta = \alpha + 90^\circ$), notiamo che la variazione $\Delta\theta$ di θ , quando dal punto P si passa al punto P' sulla curva, è uguale alla variazione $\Delta\alpha$ di α , come si deduce geometricamente:

$$\Delta\theta = \Delta\alpha;$$

per un incremento infinitesimo di θ :

$$d\theta = d\alpha \text{ ed anche } \frac{d\theta}{dx} = \frac{d\alpha}{dx}.$$

Se la linea considerata è espressa dunque mediante un'equazione cartesiana del tipo $y = f(x)$, per definizione di derivata

$$\text{tang } \alpha = f'(x);$$

da cui

$$\alpha = \text{arctg } f'(x)$$

e quindi

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{f''(x)}{1 + [f'(x)]^2}.$$

Possiamo ora scrivere l'espressione della curvatura. Infatti se

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \text{ e } \frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{f''(x)}{1 + [f'(x)]^2}$$

allora

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{3/2}}$$

è la formula che dà la misura della curvatura di una linea piana in un suo punto.

Nella definizione di curvatura si afferma che essa rappresenta il limite del rapporto $\frac{1}{r_m}$ (curvatura media) quando P si avvicina indefinitamente a P' e r si approssima al raggio di curvatura r , cioè al raggio del cerchio osculatore.

Nell'equazione differenziale della linea elastica, la formula della curvatura

$$\frac{f''(x)}{[1 + f'^2(x)]^{3/2}}$$

si approssima con $f''(x)$.

La ricerca dell'espressione analitica della lunghezza d'un arco di curva si effettua partendo da un'approssimazione di esso con la poligonale inscritta costituita da un numero di corde via via crescente, affermando che le successive lunghezze di queste poligonali hanno come limite superiore la lunghezza dell'arco stesso.

Tre diversi problemi, tre diversi modi di affrontarli, tre risultati diversi, una sola *idea* base: l'*approssimazione*, da intendersi quale concetto primitivo, intuitivo, prescientifico.

Nel primo caso l'infinita approssimazione di P' a P è un « espediente », un procedimento che conduce a risultati esatti: la derivata, l'integrale.

Nel secondo l'approssimazione è la pura e semplice eliminazione d'una quantità *trascurabile*, o presunta tale, che intralcia lo svolgimento del calcolo e il risultato è una quantità *approssimata*.

Nel terzo l'infinita approssimazione d'una lunghezza con altre lunghezze è un artificio, basato su presupposti intuitivi, che permette di risalire al valore esatto della lunghezza cercata servendosi degli strumenti di calcolo disponibili: il calcolo infinitesimale. Approcci diversi, dunque, per problemi diversi, una sola comune origine: la necessità di esprimere quantitativamente un fenomeno sia esso astratto che concreto.

Il calcolo infinitesimale ha mosso i suoi primi passi come metodo per il calcolo di aree e volumi. Lo stesso concetto di derivata è nato come « misura » di variazioni. Purtroppo non riusciremmo a comprendere perché i matematici greci, pur capaci di risolvere problemi complicatissimi, non seppero compiere quel salto dal metodo di esaurimento al calcolo infinitesimale e integrale che fu possibile a partire dal '600 in forma esplicita, né a decifrare l'arcano dell'incommensurabilità e dei numeri irrazionali, se pensassimo ai nuovi algoritmi come a pure evoluzioni dei metodi di misurazione.

La certezza dell'esistenza del valore esatto è alla base della ricerca di un algoritmo che sia in grado di esprimerlo sia nei classici che nei moderni. Ma gli uni e gli altri sono stati costretti ad esprimerlo approssimativamente affermando, in definitiva, la sua irraggiungibilità. Lo sforzo, quindi, non è tanto quello di approssimarlo il più possibile (il che è vero soltanto in determinati casi, all'interno della logica formale) quanto quello di spogliarlo dal mistero dandone una *definizione esatta*: il processo d'assiomatizzazione delle matematiche ne è una risposta.

Cosa si intende per approssimazione e in quale modo il problema è stato affrontato storicamente?

Possiamo fare una distinzione secondo due aspetti fondamentali uno, più classico, legato a problemi geometrici; l'altro più moderno, che giunge a maturità con l'invenzione del calcolo infinitesimale legato a procedimenti matematici.

Progressivamente si fece strada l'idea che si trattava, e si tratta, di stabilire un criterio che permetta di trovare, partendo dalle approssimazioni, il *valore più probabile* del valore esatto, di

cui, ovviamente, il ricercatore ha solo un'idea congettuale.

È sostanzialmente evidenziata la problematica del *credibility gape* o *intervallo di confidenza*: quanto credere nell'approssimazione trovata. Si deve però supporre che esista un valore esatto, e questo primo assunto è divenuto ragionevole solo alla luce della moderna teoria dei numeri reali.

Una risposta fu elaborata da Gauss e consiste nel fissare in prima ipotesi la scelta del valore più probabile e ricavare di conseguenza la distribuzione dell'errore.

Più tardi Bessel, rifacendosi a Laplace, fissò la distribuzione di probabilità dell'errore cercando di ricavarne la stima del valore più probabile del valore vero.

All'interno della matematica si è quindi fatta strada una vera e propria teoria: la « teoria dell'approssimazione ». Generalmente in molti problemi le approssimazioni possono essere identificate con *gli elementi di uno spazio metrico* X ; se si prende in osservazione l'approssimazione \tilde{x} dell'oggetto x , l'errore commesso può essere identificato con la distanza $\rho(\tilde{x}, x)$ tra gli elementi \tilde{x} ed x .

Le approssimazioni d'insieme in uno spazio metrico sono tuttora tema d'indagine non essendo ancora conosciuta la risoluzione dei problemi che vengono a porsi quando si è cercata l'approssimazione d'un sottoinsieme particolare nello spazio metrico X .

Nelle applicazioni pratiche si fa molto uso della approssimazione degli spazi di Banach inerenti al caso in cui gli approssimanti siano formati da sottospazi lineari di dimensione finita. Tuttavia quella formulazione non è vantaggiosa nella pratica perché contiene sottosequenze composte del medesimo sottospazio di X . Perciò il più delle volte si costruisce un approssimante partendo dalle basi algebriche dello spazio X : se esistono e sono date, hanno proprietà utili per lo studio di certe classi di problemi. Quando è possibile per alcuni spazi costruire algoritmi che determinano l'approssimazione ottimale, questa è caratterizzata dal « teorema dell'alternanza »: base per gli algoritmi numerici che determinano i polinomi dell'approssimazione ottimale. Dagli spazi di Banach si perviene al dominio di un operatore. Le famiglie di operatori assunte come approssimazione degli spazi soddisfacenti una certa condizione (K), vengono definite come approssimazione dell'operatore in alcuni casi specifici. Le soluzioni approssimate con gli operatori sono molto utilizzate per le equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali.

La definizione di lunghezza di un arco di curva piana (e analogamente per una curva sghemba nello spazio \mathcal{R}^3) si basa su un concetto fonda-

mentale del calcolo infinitesimale, che gioca pure un ruolo primario in altri settori della matematica: la possibilità di *approssimare indefinitamente un elemento dello spazio considerato, mediante altri elementi dello stesso spazio*. Qui si afferma in sostanza che la successione dei perimetri dei poligoni inscritti (o circoscritti) *approssima indefinitamente* un certo numero reale L , che chiamiamo lunghezza dell'arco di curva.

Medesimo presupposto si assume nello studio della deformazione dell'asse geometrico d'una trave inflessa. Da un punto di vista strettamente geometrico matematico si tratta anche lì di esprimere, attraverso un'approssimazione *indefinita*, la curvatura della *linea elastica* suddividendo appunto la trave in tronchi sempre più piccoli. Tuttavia lo studio del comportamento fisico della trave viene ricondotto ad un caso «ideale» di deformazione costante in ogni punto del suo asse, cosicché il procedimento è ridotto a semplici rapporti geometrici tra segmenti e archi di curva *finiti*.

Partendo da un caso meno particolare per scrivere l'equazione delle deformazioni lungo una trave comunque inflessa, anche il modello fisico necessita dell'uso di elementi infinitesimi e d'un procedimento d'indefinita approssimazione per essere esplicitato formalmente.

Al di là di una maggiore precisione su che cos'è una *successione*, il problema è di introdurre una definizione rigorosa del concetto di approssimazione di un numero reale (L) mediante altri numeri reali. In realtà i matematici moderni hanno capovolto il problema, usando il metodo assiomatico: la soluzione non sta nel definire il concetto di approssimazione nello spazio \mathcal{R} , che peraltro non sarebbe per ora definito, ma sta nel definire \mathcal{R} stesso mediante un blocco di assiomi che consentano di costruire i suoi elementi (i numeri reali) attraverso un processo che corrisponderà in ultimo alla nostra idea intuitiva di approssimazione. In altri termini, se vogliamo capire quale processo di astrazione ci porta dai perimetri dei poligoni (calcolabili con tecniche note fin dall'antichità) alla lunghezza dell'arco di curva (che per ora non è definita), i matematici moderni ci portano verso un approfondimento del concetto di numero reale e quindi verso una definizione assiomatica di \mathcal{R} .

Anche in questo settore specifico — lo studio dei numeri reali — il metodo assiomatico consiste nell'astrarre inizialmente da qualsiasi riferimento intuitivo: estremizzando, diciamo che non intendiamo affatto parlare di numeri reali, ma di enti astratti generici ai quali attribuiamo mano a mano le proprietà che ci paiono più opportune, tanto che potremmo utilizzare le stesse proprietà, sia pure con modifiche tecniche, per definire altri spazi *simili* ad \mathcal{R} . Ma conviene fare attenzione fin da

queste considerazioni preliminari: nel precisare gli *assiomi* imposti a questi enti astratti, i matematici tengono ben presenti le *proprietà* che fino a ieri — prima di iniziare il processo di assiomatizzazione — erano disposti ad accettare quali conseguenze d'una definizione intuitiva sottoposta ad una critica logica e metodologica.

La critica alle definizioni intuitive di numero reale parte dalla necessità — da noi già indicata — di comprendere i meccanismi che permettono di utilizzare i numeri razionali (per la definizione di \mathcal{Q} rimandiamo a manuali reperibili, esprimibili come frazioni oppure come decimali limitati o illimitati periodici, per definire e rappresentare i numeri irrazionali ($\sqrt{2}$, π , e ,...)). Si tratta cioè di precisare meccanismi di approssimazione.

Ma non andiamo oltre nel problema della definizione dell'insieme \mathcal{R} : non semplice da affrontare, ma presente in qualsiasi testo universitario di Analisi.

La nozione di applicazione è derivabile dal progressivo astrarsi del concetto di funzione del calcolo differenziale. Con la sua definizione solo approssimativamente precisa è possibile intervenire all'interno di *strutture matematiche* particolari, analizzando più dettagliatamente ambiti ove sono possibili «applicazioni concrete». Il concetto viene ad assumere specifiche suddivisioni e, dal versante della calcolabilità effettiva, pone questioni oltre che pratiche anche teoriche, costringendo alla riddiscussione continua del rapporto tra modello matematico *puro* e scienza e tecnica applicata.

Prima che si giungesse ad una nozione generale quale quella utilizzata nell'insiemistica (quindi all'interno del discorso matematico) come *corrispondenza tra oggetti di una classe o di un insieme e oggetti di un'altra classe*, la definizione di applicazione ha assunto varie espressioni nel corso del tempo e intorno a filoni di pensiero. Ma in tutte le teorie essa è dedotta da un Assioma generale di esistenza di una problematica per la quale è possibile stabilire un nesso tra teoria e applicabilità con una serie di regole prestabilite. Tant'è che, il più delle volte, la traduzione negli oggetti fisici o teorici delle formule generali viene associata all'approntamento di uno specifico algoritmo che oggi consiste, per gran parte delle questioni, in un dispositivo meccanico o elettronico quale può essere ad esempio un calcolatore.

Tralasciando l'aspetto inerente strettamente al calcolo prenderemo in considerazione la descrizione particolareggiata di applicazioni e *dei meccanismi della loro realizzazione nel modellare situazioni* fisiche, ma la nozione viene estesa ad aspetti sociali, economici, biologici e topologici.

I parametri che caratterizzano un sistema fisico (o altri) possono non presentarsi o non essere in-

dipendenti giacché alcuni valori di essi limitano valori degli altri. Se le limitazioni sono considerate tali che il valore di uno è completamente definito dagli altri si avrà ciò che si definisce *dipendenza funzionale* (temperatura calcolabile a partire dal volume). Questa può essere la fonte dell'insieme di funzioni, o applicazioni, che appaiono nei modelli matematici. Per molto tempo, dopo lo sviluppo della matematica classica, si sono considerate solo applicazioni definite attraverso la descrizione, in maniera esplicita, del modo di calcolare i valori (con precisione arbitraria), o, alcune volte, quelle descritte con formule esplicite di un qualsiasi frammento simbolico. Ad esempio una funzione $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ veniva espressa dalle formule $y = x^2$ ecc. Se soltanto dopo che furono posti i fondamenti del linguaggio degli insiemi divenne possibile definire la nozione generale di applicazione, con l'approntamento di regole di calcolo con dispositivi meccanici o elettronici, mutate dalla scrittura decimale, è possibile approntare qualsiasi modello per qualsiasi ente fisico. Ciò però non ha validità generale, giacché l'insieme sul quale è dato l'algoritmo non è univocamente definito (vedi le tecniche di Gödel e di Church).

La congettura di applicazioni generali e/o *arbitrarie*, connessa all'evoluzione del concetto d'insieme *arbitrario*, è tuttora tema di dibattito tra le varie scuole sui fondamenti della matematica. Spesso il dibattito sfocia in problematiche di logica o di definizione di linguaggio (logicista, intuizionista, assiomatico-costruttivista). La scuola assiomatica o costruttivista, che generalmente presiede alla problematica della calcolabilità, seppur continua ad applicare sistemi complessi di algoritmi rimane ancora dibattuta tra il decidibile / indecidibile di una particolare operazione meccanico-matematica. Tutto ciò rimane legato alla risoluzione del «problema di Gödel» sulla incompletezza: *una opportuna estensione del linguaggio e dei suoi mezzi deduttivi può rivelare delle affermazioni che si formulano nel vecchio linguaggio e sono vere, ma la cui veridicità non si presta ad essere stabilita con mezzi deduttivi del vecchio linguaggio*. Rimuovendo questa problematica l'accettabilità del modello viene risolta dal ricercatore a partire da convinzioni individuali o collettive. Non solo. Tutte le concezioni positive prodotte per sostituire quelle classiche, incomplete e contraddittorie, restringono l'arco di nozioni che si pongono come legittime e le affermazioni che vengono ritenute vere o abbiano significato. Ciò contrasta con i bisogni delle applicazioni, specie nelle scienze fisiche, ove si richiedono mezzi per riconoscere il reale ma, nello stesso tempo, si devono far dipendere dalle difficoltà delle strutture matematiche. Parafrasando Gödel, secondo il quale esisterebbe sempre un'affermazione vera dell'aritmetica non deducibile dagli

assiomi, si può affermare che i modelli matematici non deducono le leggi fisiche, anche se questo assunto generale impera tuttora in tutti i campi e le culture: anche tra gli empiristi o sperimentalisti che regolano le loro «scoperte» secondo assiomi predeterminanti l'esperimento o la sequenza statistica di dati tratti dalla verifica diretta. La *non esprimibilità* dà luogo ad un infinito completamento degli assiomi dell'aritmetica con testi i cui elementi non appartengono all'insieme del testo originario senza che, con tutto ciò, ad ogni salto del procedimento il sistema degli assiomi risulti completo (Tarski, per certi versi, e Gödel). Ecco il paradosso: per comprendere la logica vera solo sui numeri interi sono necessarie infinite nuove definizioni. Per quanto dispiegata e complessa sia la premessa, la *verità* non può scaturire meccanicamente. Se ciò è rigorosamente formalizzato e *scientifico* per la teoria dei numeri, maggiori limitazioni e paradossi sono *applicabili in altri domini del sapere*.

È abbastanza noto che l'impossibilità di congruenza tra modello matematico e modello fisico ha prodotto molteplici ricerche, teorie e tecniche di approssimazione. La risoluzione di tale controversia impegna forse le più importanti capacità intellettuali.

Al di là delle diversità metodologiche e dei punti di vista di partenza, per la trattazione generale o particolare, anche nella scienza per le costruzioni tutta la problematica è enucleabile intorno alla possibilità/impossibilità di fornire modelli formali alla meccanica e statica dei materiali e delle strutture.

È pur vero che qui permane, e per certi versi prevale, una visione intuizionista dell'operare scientifico. Forte dei grandi contributi per la realizzazione dell'*arte del costruire*, retaggio della figura classica del *costruttore-architetto*, fornito di uno speciale *senso* identificabile tra l'empirico e l'artistico. Aspetto da non sottovalutare giacché presente in tutti gli altri campi del sapere: dalla scuola intuizionista nelle matematiche alla visione einsteniana nella fisica. Ma fondate su un equivoco e una necessità nello stesso tempo. Tutte le grandi sintesi hanno avuto in sé il momento dell'intuizione, la quale non ha mai trasceso di molto il preesistente ed il successivo. Parimenti: senza il salto di creatività nessun nuovo paradigma si è imposto nella storia.

Il *costruttore-architetto* è pertanto costretto a ratificare sostanzialmente o a sviluppare una teoria tecnica che altri hanno elaborato. Oggi più che ieri. Giacché la complessità delle nozioni scientifiche presenti in qualsiasi attività cresce iperbolicamente. Lo *scienziato-architetto*: l'altra faccia dell'operatore culturale, è perciò sempre più sostituito dal tecnicismo ingegneristico: figura spuria

della crescente matematizzazione nelle scienze strutturali. La stessa forma artistica viene sempre meno a dipendere dall'intuizione del sensibile e sempre più si conforma alla capacità di disposizione organica delle varie teorie e tecniche costruttive. Chi esegue un singolo *progetto*, chi fornisce tipologie diversificate, chi sviluppa un argomento di ricerca su un fenomeno strutturale accetta, nolente e volente, un criterio scientifico d'una precisa teoria costituita dall'espressione matematica di un fenomeno fisico. Quando si conduce a rivisitazione il nucleo di una problematica, o si adegua alle nuove formalizzazioni la teoria fisica, o s'interpreta un nuovo fenomeno fisico con paradigmi matematici preesistenti; e il gioco è fatto.

Essenzialmente tutta la ricerca strutturale ruota intorno ad alcune questioni fondamentali: *da una parte l'Architettura con la creazione di sempre nuovi problemi contingenti; dall'altra la Meccanica con due fondamentali direttive di ricerca: l'una tendente ad approfondire sempre di più le ricerche sull'effettivo comportamento dei materiali (cosa che ha riflessi immediati sulla definizione dei modelli di struttura del materiale più ricchi e più sofisticati — se si vuole — di quello elementare, costituzione puntuale); l'altra, consistente nella completa assiomaticizzazione delle teorie strutturali (s. n.)* (4).

(4) S. De Pasquale, *Scienza delle Costruzioni*, Milano, Tamburini, 1975, allegato *Considerazioni e discorso sul metodo* p. 13.

Quando problemi d'indcidibilità insorgono nelle scienze esatte e si ripercuotono in tutti gli altri settori del sapere, che fare? È ancora valida l'alternativa intuizionista basata sull'empirismo del contingente attendendo tempi futuri migliori o peggiori, e l'alternativa idealista fondata sull'abbandono del preesistente, non più fornitore di soluzioni per il nuovo, e la costruzione di una sintesi determinata da un particolare nesso storico?

Dare libertà di dibattito ad altre ipotesi è la prima condizione per non riprodurre impasse nel sociale e nella ricerca scientifica. Vagliare secondo un'ottica nuova tutte le teorie, affrontabili qui e fuori, comunque connesse alla progettualità architettonica, è già un percorso di ricerca. Ma per confutare le teorie esistenti non è sufficiente ritrovare i prodromi teorici in altri teorici preesistenti, né stabilire le filosofie di appartenenza abbinata ad epoche storiche ed appellarsi al progresso scientifico; men che mai credere nella verifica dell'applicabilità, giacché scienziati non sospetti di catastrofismo sono adeguatamente coscienti che tutte le teorie, le più incoerenti e le meno rigorose, sono suscettibili di *applicazione* e non tutte le *applicazioni* possiedono barlumi di scientificità.

torin edile

10154 Torino - Via Sandro Botticelli, 36
Tel. (011) 26.48.41-26.70.15

CAMINETTI PREFABBRICATI



CAMINETTO RETTANGOLARE
ANGOLARE E A PARETE



NOVITÀ - FORNO A LEGNA IN
REFRATTARIO PER PANE - PIZZE



FORNELLA
GRILL
CON
FUNZIONE DI
BISTECCHIERA E GIRAROSTO

VELUX

Finestre per Tetti

iris

CERAMICA



ILAPEDRETTI

Prefabbricati civili e industriali

MATERIALI PER EDILIZIA

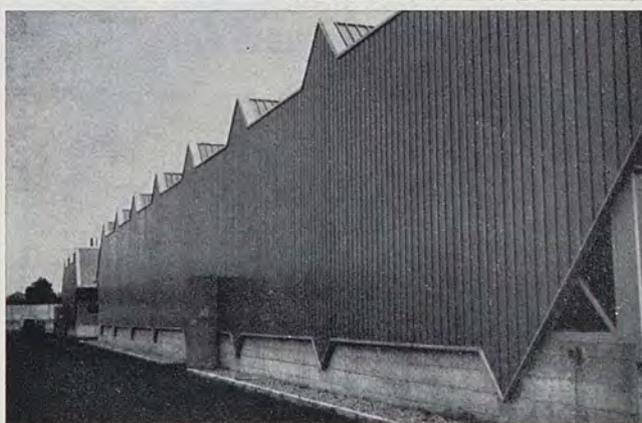
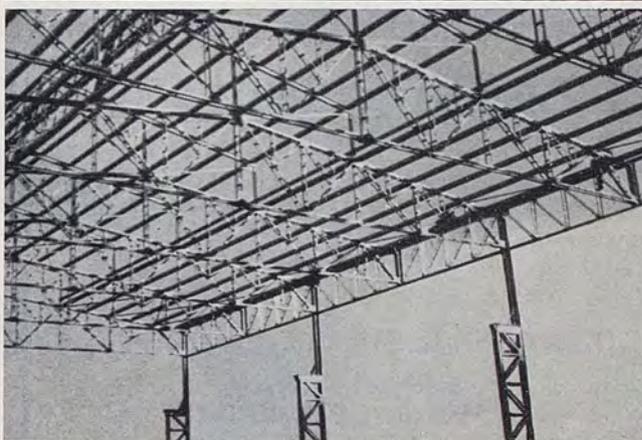
calce - cementi comuni e speciali - laterizi - eternit - tubi
in plastica - materiali isolanti - prodotti chimici - pavimenti e
rivestimenti per interni ed esterni - attrezzi edili - refrattari
- manufatti in cemento - porte per caldaie e per cantine -
scale retrattili - collanti per piastrelle - battiscopa in legno,
resina e ceramica - faldali in lamiera - lucernari - ondulati
plastici - tegole canadesi - caminetti - solai precompressi

EDIFICI

CIVILI - INDUSTRIALI - AGRICOLI

ORTECO

CARPENTERIA METALLICA



Torino - c. M. D'Azeglio 78 - tel. 688792

Banco di Sicilia

Istituto di Credito di Diritto Pubblico

Presidenza e Amministrazione Centrale in Palermo - Patrimonio: L. 150.815.294.287

Acireale
Agrigento
Alcamo
Ancona
Bologna
Caltagirone
Caltanissetta
Catania
Enna

Firenze
Gela
Genova
Lentini
Marsala
Messina
Mestre

Sedi e Succursali:



Milano
Palermo
Perugia
Pordenone
Ragusa
Roma
S. Agata Militello

Sciaca
Siracusa
Termini Imerese
Torino
Trapani
Trieste
Venezia
Verona
Vittoria

250 Agenzie in tutta Italia

Uffici di rappresentanza a Bruxelles, Copenaghen, Francoforte Sul Meno, Londra, New York, Parigi e Zurigo
Sezioni speciali per il: Credito Agrario e Peschereccio,
Credito Minerario, Credito Industriale, Credito Fondiario, Finanziamento Opere Pubbliche.

Tutti i servizi di Banca, Borsa e Cambio

CATELLA FRATELLI

MARMI - GRANITI - PIETRE

CAVE PROPRIE - STABILIMENTI - SEGHERIE

torino - via montevecchio 27 - tel. 545.720 - 537.720

BANCA SUBALPINA

SOCIETÀ PER AZIONI

Capitale Sociale e Riserve L. 9.195.784.763

SEDE SOCIALE E DIREZIONE GENERALE

TORINO - VIA SANTA TERESA, 26

Telex: 221403 SUBDIR I

OGNI OPERAZIONE DI BANCA E BORSA

BANCA AGENTE
PER IL COMMERCIO
DEI CAMBI

CASSETTE di SICUREZZA

FILIALI

TORINO

VIA SANTA TERESA, 26 - TEL. 51.25.66

Telex: 221402 SUBANK I

Agenzia n. 1 - Corso Peschiera, 237/A - Tel. 33.59.714

Agenzia n. 2 - Corso Orbassano, 213/B - Tel. 39.97.62

Agenzia n. 3 - Corso Vitt. Emanuele, 6/A - Tel. 87.66.68

Agenzia n. 4 - Largo Toscana, 52 - Tel. 73.83.13

Servizio di Cassa presso SAIPO S.p.A.

- Torino, Via Garibaldi, 42 - Tel. 51.84.36

- Settimo, Viale E. Schueller - Tel. 800.35.20

MILANO

VIA A. MANZONI, 9 - TEL. 80.81.41

Telex: 312602 SUBANK I

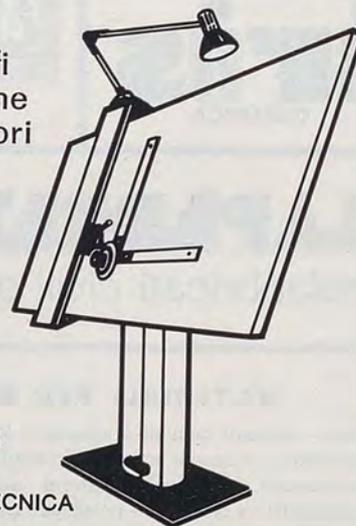
Agenzia Interna SNIA VISCOSA S.p.A.

Via Montebello, 18 - Tel. 63.08.63

ARTERO®

DISEGNO · GRAFICA · INGEGNERIA

Tavoli
e Tecnografi
di precisione
delle migliori
marche



**BIEFFE
NEOLT
FERRES
ZUCOR
MUTOH
KULLMAN
PERFECTUS**

ASSISTENZA TECNICA

10122 TORINO VIA S. FRANCESCO D'ASSISI 11

Tel. (011) 547246 · 516289



REM CRAVERO S.R.L.

COSTRUZIONI IMPIANTI SPORTIVI

VINOVO (Torino)
Via La Loggia, 82
Telefoni
965.31.53 (3 linee ric. aut.)

Impianti in terra battuta

Tennis - Bocce - Piste - Pedane atletica

Tappeti erbosi

Campi calcio EVERGREEN - CELLSYSTEM

Impianti esenti da manutenzione

Tennis - Pallavolo - Pallacanestro - Piste e pedane atletica in SYSTEMFLOOR

Produzione terre speciali

Concessionaria esclusiva

Applicazione SYSTEMFLOOR

Campi di calcio

in EVERGREEN e CELLSYSTEM
per il Piemonte e la Liguria



FINANZIAMENTI A MEDIO TERMINE

CENTROUNO

All'industria

per il rinnovo, l'ampliamento o la costruzione di impianti industriali

All'esportazione

per lo smobilizzo dei crediti nascenti da esportazioni di merci e servizi e/o lavori all'estero

Al commercio

per l'acquisizione, la costruzione il rinnovo e l'ampliamento dei locali e delle attrezzature necessarie all'esercizio commerciale

Sconto effetti

per la vendita con riserva di proprietà e con pagamento rateale differito di macchinari nuovi



MEDIOCREDITO PIEMONTESE

**il filo diretto tra il credito a medio termine
e le piccole-medie imprese**

Sede: Piazza Solferino 22 - 10121 Torino
Telefoni: (011) 534.742 - 533.739 - 517.051



dal 1938

asfalt - c. c. p. S. p. A.

- COPERTURE IMPERMEABILI
- ASFALTI COMUNI E A FREDDO
- ASFALTI COLORATI
- COSTRUZIONE E PAVIMENTAZIONI:
STRADE - CAMPI SPORTIVI
MARCIAPIEDI E CORTILI
- FORNITURA DI PRODOTTI BITUMINOSI

10154 TORINO - STRADA DI SETTIMO 6 - TEL. (011) 20.11.00 - 20.10.86

DOTT. ING. VENANZIO LAUDI

s. a. s. di LAUDI G. & C.

IMPIANTI RAZIONALI TERMICI E IDRICO SANITARI

TORINO - VIA MADAMA CRISTINA, 62 - TEL. DIREZIONE: 683.226 - TEL. UFFICI: 682.210

**C'è chi
ha un consulente, chi una segretaria,
chi un amico, chi una cassaforte.
E chi un conto corrente al Sanpaolo.**

Certo, se proprio vuoi complicarti la vita, puoi continuare a farti ricordare le scadenze dalla segretaria, farti consigliare gli investimenti migliori da quell'amico che "se ne intende", a rischiare i tuoi valori fidandoti della buona sorte.

Ma sei proprio sicuro di volerti complicare la vita? o non preferiresti forse poter contare su qualcuno che risolve, con te o per te, tutti questi e tanti altri problemi?

Pensaci: questo "qualcuno" c'è. E' il Sanpaolo.

Lo trovi in tutta Italia con 300 Filiali, all'estero con una Filiale a Francoforte e Rappresentanze a Londra, Parigi, Tokyo (A.I.C.I.) e Zurigo, e con oltre 2000 corrispondenti in tutto il mondo.

Il Sanpaolo: una banca dinamica, completa, aperta, disponibile, elastica e, senz'altro, giovane. A dispetto della sua esperienza plurisecolare. Anzi proprio per questo.

**Sanpaolo: la banca
di fiducia da oltre 400 anni**

SANPAOLO

**ISTITUTO BANCARIO
SAN PAOLO DI TORINO**

programma maniglie in resina

OLIVARI[®]

FRESIA

REPARTO ARTICOLI per FALEGNAMI
Tel. 850.828 - 850.891

