

RASSEGNA TECNICA

La "Rassegna tecnica", vuole essere una libera tribuna di idee e, se del caso, saranno graditi chiarimenti in contraddittorio; pertanto le opinioni ed i giudizi espressi negli articoli e nelle rubriche fisse non impegnano in alcun modo la Società degli Ingegneri e degli Architetti in Torino

QUESTO FASCICOLO CONTIENE ARTICOLI DI **ELETTROTECNICA** DEDICATI DAGLI AUTORI AL PROF. **GIANCARLO VALLAURI** PER IL SUO SETTANTESIMO ANNO

Fenomeni di diffusione di correnti transitorie in conduttori

Si estende al caso delle correnti transitorie lo studio della distribuzione della densità di corrente nella sezione trasversale dei conduttori, ch'è in genere limitato al caso delle correnti periodiche. Si esaminano i comportamenti per impulsi di corrente costante e per impulsi di corrente smorzata con legge esponenziale.

Lo studio della distribuzione della densità di corrente nella sezione trasversale dei conduttori è di importanza fondamentale per il calcolo di cadute di potenziale, perdite di potenza, forze, coppie. In genere l'esame viene limitato al caso di correnti periodiche; tuttavia l'importanza odierna sempre crescente della tecnica degli impulsi in radiocomunicazioni e in radiomisure fa desiderare che l'esame venga esteso alle correnti transitorie.

J. A. Stratton (1) ha trattato il caso generale della soluzione transitoria dell'equazione delle onde; K. W. Miller (2) ha esaminato la diffusione di correnti di tipo $I_0 \cdot U(t)$, dove $U(t)$ è la funzione unitaria di Heaviside, nell'interno di conduttori. Scopo del presente lavoro è di studiare la distribuzione della densità di correnti di forma $I_0[U(t) - U(t - T_0)]$, $I_0 e^{-at} \cdot U(t)$, $I_0 e^{-at} [U(t) - U(t - T_0)]$. Considereremo in primo luogo un'onda impulsiva piana *TEM*, incidente perpendicolarmente su una superficie piana (di equazione $z = 0$), limite di separazione fra un mezzo dielettrico perfetto e un « buon » conduttore. Assumeremo che entrambi i mezzi si estendano all'infinito in tutte le direzioni, eccetto alla superficie di separazione, e che l'asse z sia positivo nell'interno del conduttore.

Dalle equazioni di Maxwell, trascurando le correnti di spostamento, si trova che la distribuzione spaziale del vettore di campo magnetico viene descritta dalla equazione differenziale alle derivate parziali

$$(1) \quad \nabla^2 \bar{H} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$$

ove $h^2 = 1/\sigma\mu$ (σ = conduttività, μ = permeabilità del mezzo; nel caso del rame $\sigma = 5,6 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$, $\mu = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, $h^2 = 0,0142 \text{ m/s}^{1/2}$). Analogamente la distribuzione della densità di corrente nel conduttore è descritta dall'equazione differenziale

$$(2) \quad \nabla^2 \bar{J} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial \bar{J}}{\partial t}$$

Se $\bar{H} = \bar{H}_y$, le equazioni (1) e (2) si riducono rispettivamente alle seguenti

$$(3) \quad \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 J_x}{\partial z^2} = \frac{1}{h^2} \frac{\partial J_x}{\partial t}$$

La corrente fluisce in direzione perpendicolare a H_y e si distribuisce nell'interno del conduttore, se questo possiede conduttività finita. La corrente totale per una striscia di larghezza unitaria è

$$i(t) = \int_0^\infty J dz = (H_y)_{z=0}$$

Le equazioni (3) si ottengono anche nell'analisi della propagazione di un'onda *TEM* che si propaga lungo un piano di conduttività infinita; talvolta esse sono considerate come prima approssimazione per descrivere la propagazione di un'onda *TEM* che viaggia lungo un piano di conduttività finita. La correttezza di tale assunto dipende dalle condizioni ai limiti; la questione appare specialmente delicata quando si considerano campi transitori, tuttavia essa non verrà discussa nel presente lavoro.

1. - Impulsi di corrente costante.

Mediante il metodo della trasformata di Fourier o di Laplace si dimostra che la distribuzione della densità di una corrente, che fluisce parallelamente alla superficie del conduttore ed ha forma $i = I_0 U(t)$, per una striscia di larghezza unitaria della superficie del conduttore è

$$(4) \quad J(z,t) = \frac{I_0}{h\sqrt{\pi t}} e^{-z^2/4h^2 t}$$

L'equazione (4) è ottenuta con l'ipotesi di condizioni iniziali di riposo. Essa presenta la forma della curva di probabilità normale, se si considera t come parametro. Tale curva appartiene alla famiglia di $erf(u)$ e delle sue derivate

$$\Phi_0(u) = \text{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-\lambda^2} d\lambda$$

$$\Phi_1(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}$$

$$\Phi_2(u) = -\frac{4u}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} = -2u \Phi_1(u)$$

$$(5) \quad \Phi_3(u) = 4\Phi_1(u) \left[u^2 - \frac{1}{2} \right]$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\Phi_{n+1}(u) = 2^n \Phi_1(u) \left[(-u)^n - \frac{n(n-1)}{4} (-u)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{32} (-u)^{n-4} - \dots \right]$$

In fig. 1 sono rappresentati i grafici delle funzioni $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$. Se si pone $u^2 = z^2/4h^2t$, l'equazione (4) viene scritta a t costante

$$(6) \quad J(z, t^*) = \frac{I_0}{2h\sqrt{t}} \Phi_1(u)$$

e a z costante

$$(7) \quad J(z^*, t) = \frac{-I_0}{2z^*} \Phi_2(u)$$

La distribuzione è stata discussa da K. W. Miller con riferimento all'equazione (6). Egli ha osservato che: a) la densità di corrente è infinita a $z = 0, t = 0$; b) le aree sotto le curve corrispondenti a valori differenti di t sono tutte uguali alla corrente totale i per striscia di larghezza unitaria; c) il punto di ordinata metà della massima si muove in profondità con una velocità proporzionale a h/\sqrt{t} ; d) la pendenza della curva $\frac{\partial J}{\partial z}$ è zero a $z = 0$ ed a $z = \infty$,

dato che attraverso la superficie di separazione con un mezzo non conduttore non ha luogo alcuna migrazione di corrente; e) il sottilissimo piede della curva che si protende all'infinito corrispondendo ad una assurda velocità di diffusione infinita si deve considerare come il risultato matematico di aver trascurato la corrente di spostamento nella (2).

La dipendenza dal tempo della distribuzione di densità può essere studiata per mezzo della (7), prendendo z come parametro. A profondità z costante la densità di corrente comincia da zero a $t = 0$ e raggiunge un massimo a $t = z^2/2h^2$ (cioè in corrispondenza di $u^2 = 1/2$), indi tende a zero nuovamente per $t \rightarrow \infty$. Dato che $\Phi_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2\sqrt{\frac{2}{\pi e}}$, i valori di massimo di $J(z, t)$ sono

$$(8) \quad J_{max} = \frac{I_0}{z} \sqrt{\frac{2}{\pi e}}$$

e variano inversamente alla profondità z .

Si consideri ora la distribuzione di densità di un impulso di corrente costante $I_0[U(t) - U(t - T_0)]$. Per $t < T_0$ la distribuzione è identica alla (7), ed in particolare per $t = T_0$ la densità raggiunge un valore massimo in corrispondenza di $z' = h\sqrt{2T_0}$. Per $t > T_0$, invece, i massimi di J oltre la profondità z' si riducono rapidamente. Pertanto in prima ap-

prossimazione si può assumere come profondità equivalente di penetrazione δ il valore z'

$$(9) \quad \delta = \sqrt{\frac{2T_0}{\sigma\mu}}$$

Tale profondità è proporzionale a $\sqrt{T_0}$ e per un conduttore di rame è approssimativamente $\delta = 0,17\sqrt{T_0}$ metri. Ad esempio $\delta = 0,1$ mm per $T = 10^{-6}$ s, $\delta = 0,5$ mm per $T_0 = 10^{-5}$ s.

Alla definizione della profondità equivalente di penetrazione si può anche giungere attraverso la considerazione delle perdite di potenza nel conduttore. Dalla perdita di potenza per unità di volume $P_v = \vec{E} \cdot \vec{J} = J^2/\sigma$ si ha la perdita di potenza istantanea totale per unità di superficie del conduttore

$$P_1 = \int P_v dS \text{ e la perdita di potenza media fino al tempo } t, P_m = \frac{1}{t} \int_0^t P_1 dt.$$

Prendendo come riferimento la potenza media fino al tempo T_0 ne risulta la « resistenza transitoria » $R_t = P_m/(I^2)_m$ per unità di superficie del conduttore

$$R_t = \sqrt{\frac{2\mu}{\pi\sigma T_0}}$$

Ponendo ora $R_t = 1/\sigma\delta'$ si può calcolare la profondità corrispondente ad una eguale resistenza per corrente continua

$$(10) \quad \delta' = \sqrt{\frac{\pi T_0}{2\sigma\mu}}$$

Il valore (10) è dello stesso ordine di grandezza del valore (9), dato che $\delta' = 0,89\delta$.

2. - Impulsi di corrente smorzata esponenzialmente.

Quando la corrente totale per una striscia di larghezza unitaria della superficie del conduttore è di tipo esponenziale smorzato, $i(t) = I_0 e^{-at} U(t)$, la distribuzione della densità nella sezione trasversale del conduttore, nell'ipotesi di condizioni iniziali di riposo, è

$$(11) \quad J(z, t) = I_0 k \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi at}} e^{-z^2/4ht} + \text{Im} \left[e^{-at + jkz} \text{erfc} \left(\frac{kz}{2\sqrt{at}} + j\sqrt{at} \right) \right] \right\}$$

ove $t > 0$ e $k = \frac{\sqrt{a}}{h} = \sqrt{a\sigma\mu}$ ($k = 8,5\sqrt{a}$ m⁻¹ per il rame). L'equazione (11) si ottiene nel modo seguente. L'equazione (2), trasposta nel piano complesso, diviene:

$$(12) \quad \frac{d^2 J(z, s)}{dz^2} = \frac{s}{h^2} J(z, s)$$

ove $J(z, s)$ è la trasformata di Laplace di $J(z, t)$. La soluzione della (12) è del tipo

$$J(z, s) = A e^{-\sqrt{s} \frac{z}{h}} + B e^{\sqrt{s} \frac{z}{h}}$$

ove, in forza delle condizioni iniziali, $A = J(0, s)$,

$B = 0$. D'altro lato integrando $J(z, s)$ nella sezione trasversale del conduttore si ottiene

$$\int_0^\infty J(z, s) dz = I(s) = \frac{h}{\sqrt{s}} J(0, s)$$

ove $I(s)$ è la trasformata di Laplace della corrente totale, cioè $I(s) = \frac{I_0}{s + a}$. Ne segue

$$J(z, s) = \frac{I_0}{h} \frac{\sqrt{s}}{s + a} e^{-\sqrt{s} \frac{z}{h}}$$

la cui trasformata inversa è la (11).

La (11) è somma di un termine rappresentante la distribuzione per una corrente costante bruscamente applicata e del termine

$$(13) \quad I_0 k e^{-at} J_m e^{jkz} \text{erfc} \left(\frac{kz}{2\sqrt{at}} + j\sqrt{at} \right)$$

che tende a zero quando $a \rightarrow 0$. La funzione $\text{erfc}(\xi)$, che appare in (13) con argomento complesso, non è stata calcolata per ogni valore della fase dello argomento. Tuttavia una interpretazione approssimata della distribuzione si può ottenere facendo ricorso ai due sviluppi in serie

$$(14) \quad \text{erfc}(\xi) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} \left[\xi + \frac{2\xi^3}{1 \cdot 3} + \frac{4\xi^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots \right]$$

$$(15) \quad \text{erfc}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2} \left[\frac{1}{2\xi} - \frac{1}{4\xi^3} + \frac{1 \cdot 3}{8\xi^5} - \dots \right]$$

La serie (14) è convergente assolutamente e uniformemente per tutti i valori di ξ , mentre la serie (15) converge solo per valori di ξ non zero, nel primo quadrante. Nel caso presente la variabile $\xi = \frac{kz}{2\sqrt{at}} + j\sqrt{at}$ ha modulo $|\xi| = \left[\frac{k^2 z^2}{4at} + at \right]^{1/2}$ che è funzione delle due variabili z e t ed assume valore minimo a $z = 0, t = 0$, mentre per $z \neq 0$ assume un valore minimo in corrispondenza di $at = \frac{kz}{2}$.

Per valori di ξ sufficientemente piccoli si può assumere in accordo con la (14)

$$\text{erfc}(\xi) \cong 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \xi e^{-\xi^2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{kz}{2\sqrt{at}} + j\sqrt{at} \right] e^{-\frac{k^2 z^2}{4at} + at + jkz}$$

Di conseguenza il termine (13) può essere scritto approssimativamente

$$I_0 k e^{-at} J_m e^{jkz} - J_m \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{kz}{2\sqrt{at}} + j\sqrt{at} \right) e^{-\frac{k^2 z^2}{4at} - jkz} \right] = I_0 k \left[e^{-at} \sin kz - 2 \sqrt{\frac{at}{\pi}} e^{kz/2 + 4at} \right]$$

e la distribuzione totale per valori di ξ sufficientemente piccoli diviene

$$(16) \quad J(z, t) = \frac{I_0}{h\sqrt{\pi t}} (1 - 2at) e^{-z^2/4ht} + \frac{I_0 \sqrt{a}}{h} e^{-at} \sin kz$$

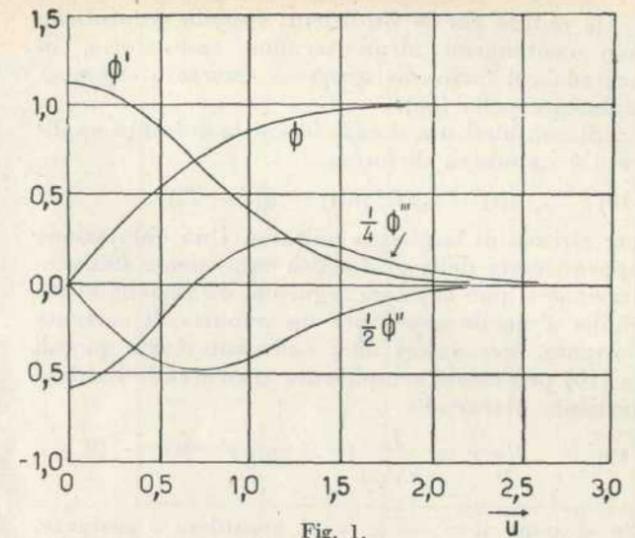


Fig. 1.

L'esame della (16) mostra che per piccoli valori di ξ , cioè nelle vicinanze della superficie del conduttore e al tempo $t \cong \frac{kz}{2a}$, la distribuzione è somma di una dello stesso tipo, ma di ampiezza minore, di quella corrispondente ad una corrente costante applicata bruscamente, e di un'altra consistente di una onda sinusoidale smorzata che possiede zeri ed inversioni di segno in corrispondenza delle profondità $z_i = \frac{n\pi}{k}$. Per il rame il primo zero ha luogo in corrispondenza di $z_i = 0,182/\sqrt{a}$ metri.

Per valori di ξ sufficientemente grandi, cioè alla superficie per $at > 0$ o vicino alla superficie per $at \leq \frac{kz}{2}$, la funzione $\text{erfc}(\xi)$ può venire rappresentata approssimativamente con pochi termini dello sviluppo asintotico (15),

$$\text{erfc}(\xi) \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\frac{kz}{2\sqrt{at}} + j\sqrt{at}} e^{-\frac{k^2 z^2}{4at} + at - jkz}$$

Corrispondentemente la (13) diviene

$$\frac{I_0 k}{\sqrt{\pi}} e^{-at} J_m \frac{1}{\frac{kz}{2\sqrt{at}} + j\sqrt{at}} e^{-\frac{k^2 z^2}{4at} + at} = -\frac{I_0 \sqrt{a}}{h \sqrt{\pi}} \frac{2(at)^{3/2}}{(kz)^2 + (2at)^2} e^{-kz/2 + 4at}$$

e la distribuzione totale della densità di corrente per valori di ξ sufficientemente grandi si può scrivere

$$(17) \quad J(z, t) \cong \frac{I_0}{h\sqrt{\pi t}} \left(1 - \frac{2a^2 t^2}{(kz)^2 + (2at)^2} \right) e^{-z^2/4ht}$$

Ad esempio per $at = 0$ la distribuzione è nuovamente quella corrispondente alla corrente costante applicata bruscamente; per $at \gg \frac{kz}{2}$ la (17) può essere semplificata scrivendo

$$J(z, t) \cong \frac{I_0}{2h\sqrt{\pi t}} e^{-z^2/4ht}$$

È da notare che le precedenti formule asintotiche non contengono alcun termine ondulatorio, in accordo col fatto che questo è smorzato esponenzialmente nella (16).

Si consideri ora il caso in cui la corrente applicata è impulsiva di forma

$$(18) \quad i(t) = I_0 e^{-at} [u(t) - u(t - T_0)]$$

per striscia di larghezza unitaria. Una valutazione approssimata della profondità equivalente di penetrazione si può ottenere seguendo un ragionamento simile a quello usato per un impulso di corrente costante. Per valori di z sufficientemente piccoli la (16) può essere semplificata trascurando l'ultimo termine, ottenendo

$$(19) \quad J(z, t) \cong \frac{I_0}{h\sqrt{\pi t}} (1 - 2at) e^{-z^2/4ht^2}.$$

Se si pone $u = \frac{z}{2h\sqrt{t}}$ e si considera z costante, tale relazione si può scrivere

$$(20) \quad J(z, u) = \frac{I_0}{2z} \left(1 - \frac{az^2}{2h^2 u^2}\right) \Phi_2(u).$$

Per trovare il valore di u per cui $J(z, u)$ diviene massima, basta eguagliare a zero la derivata $\frac{\partial J}{\partial u}$,

ottenendo così la seguente equazione biquadratica

$$(21) \quad 4h^2 u^4 - 2(h^2 + az^2)u^2 + 3az^2 = 0$$

in cui è stato fatto uso delle relazioni (5). La radice positiva della (19) è

$$u^2 = \frac{1}{4} + a \left(\frac{z}{2h}\right)^2 + \frac{1}{4} \sqrt{1 - 10a \left(\frac{z}{h}\right)^2 + \left(\frac{az^2}{h^2}\right)^2}.$$

Per valori di a piccoli si può sviluppare il radicale in potenze di a e terminare la serie al termine di prima potenza, ottenendo

$$u^2 \cong \frac{1}{2} - a \left(\frac{z}{h}\right)^2.$$

Per $t = T_0$ la profondità z' per cui la densità di corrente raggiunge un valore massimo è quindi

$$(22) \quad Z' = h \sqrt{\frac{2T_0}{1 + 4aT_0}} = \sqrt{\frac{2T_0}{\sigma\mu(1 + 4aT_0)}}.$$

Tale valore può essere assunto in prima approssimazione come profondità equivalente di penetrazione di un impulso di corrente di forma esponenziale smorzata.

Lucio Vallese

Brooklyn, U.S.A. - Polytechnic Institute.

BIBLIOGRAFIA

- (¹) J. A. STRATTON, *Electromagnetic theory*, McGraw-Hill Co., New York, 1941.
- (²) K. W. MILLER, *Diffusion of electric current into rods, tubes and flat surfaces*, Trans. AIEE, voi. 66, 1947, p. 1446-1507.
- (³) E. JAHNKE, F. EMDE, *Tables of functions*.
- (⁴) CAMPBELL, FOSTER, *Fourier integrals for practical applications*, Van Nostrand Co., New York, 1948, p. 92.
- (⁵) J. BARKLEY ROSSER, *Theory and application of $\int_0^z e^{-x^2} dx$* , Mapleton House, Brooklyn, N. Y., 1948.

a Giancarlo Vallauri

Variazione dell'isolamento di conduttori con la temperatura

Si espongono i risultati di alcune misure di variazione della resistenza di coperture isolanti di conduttori in funzione della temperatura, entro e poco oltre i limiti normali di esercizio. L'entità della variazione è maggiore di quanto comunemente si crede ed il valore della resistenza, per una data temperatura sotto i 100 °C, può essere molto diversa secondo il ciclo di temperatura a cui è stato sottoposto in precedenza il materiale e l'umidità dell'ambiente.

Generalità. — La variazione della resistività degli isolanti solidi ed anche delle perdite dielettriche, col variare della temperatura, è un fenomeno universalmente noto, ma non tutti forse, anche se elettrotecnici, hanno un'idea abbastanza precisa dell'entità e dell'andamento della variazione. Sta il fatto che essa può essere molto diversa da un isolante all'altro e cambiare secondo le condizioni di prova.

Uno dei casi più interessanti in pratica è quello degli isolanti che ricoprono i conduttori delle macchine e degli apparecchi elettrici e, in questo caso, è particolarmente difficile la misura in condizioni analoghe a quelle di esercizio, specialmente riguardando alla costanza delle superfici di contatto ed alla misura esatta della temperatura dell'isolante.

Si descrive brevemente, di seguito, una serie di misure i cui risultati potranno forse avere qualche interesse anche per chi non è elettrotecnico, pur se eseguite, per la maggior parte, parecchi anni or sono.

Apparecchio usato per le prove. — È costituito da una scatola di metallo (fig. 1) aperta alle due estremità, entro la quale si dispongono i pezzi tagliati dal conduttore isolato in prova, lunghi 14 cm, in due strati sovrapposti in modo che, mettendo a nudo il conduttore ad uno degli estremi per il primo strato e all'altro estremo per il secondo strato e collegando tutti gli estremi di ciascuno strato, si possa applicare fra i due strati una tensione continua per misurare la resistenza ed eventualmente una alternata per misurare capacità e perdite.

Sul fondo e sui fianchi della scatola e sopra i due strati di conduttori si mette un foglio di mica-nite, come indicato nel disegno. Sopra ai conduttori si posa un pezzo di ferro a T, forato in più punti per diminuire la sua inerzia termica e per introdurre il bulbo di un termometro. Sopra ancora si dispone un blocco di piombo per mantenere una determinata pressione, che nelle misure eseguite era di circa 110 gr/cm² per la vaschetta larga 4 cm.