a Giancarlo Vallauri

Sul concetto di banda passante di un circuito selettivo

È analizzato il concetto di banda passante di un circuito selettivo in relazione alla sua dipendenza dagli elementi circuitali ed alla sua applicazione ai problemi del rumore.

1. - Una delle grandezze più spesso usate in radiotecnica per caratterizzare il comportamento dei circuiti selettivi è la « banda passante », B, intesa come scarto fra le due frequenze f_1 ed f_2 in corrispondenza alle quali la risposta del circuito ha un'attenuazione di 3 decibel rispetto alla risposta massima, che si ha ad una frequenza f_0 compresa fra f_1 ed f_2. La banda passante è soprattutto usata in relazione allo studio dei circuiti risonanti, isolati o variamente accoppiati fra loro, ed è fondamentale per lo studio degli amplificatori di alta frequenza e per i ricevitori.

La sua introduzione in radiotecnica è probabilmente legata al fatto che le due frequenze f_1 ed f_2 sono, di solito, agevolmente riferibili agli elementi del circuito, per cui è generalmente possibile esprimere la banda passante B conoscendo la costituzione del circuito. La scelta della banda passante B, avvenuta in tempi ormai lontani, si è dimostrata avveduta perchè essa si adatta agevolmente per caratterizzare il comportamento dei circuiti anche di fronte al rumore, argomento la cui importanza non poteva certamente essere prevista quando si è cominciato ad usare il concetto di banda passante. Occorrono, peraltro, alcune precisazioni, per cui è sembrato interessante rivedere il concetto stesso di banda passante con metodi moderni, dandone una definizione generale e mostrando la ragione della sua adattabilità ai problemi del rumore. Dalla definizione di banda passante è derivata, in maniera del tutto naturale, quella di « larghezza di banda » di una funzione di rumore e si è trovata una singolare rispondenza fra la sua definizione e quella di un'analoga grandezza ottica, la « larghezza di una riga spettrale », introdotta per via completamente diversa.

2. - Il comportamento di un circuito lineare al variare della frequènza è caratterizzabile mediante una grandezza complessa, funzione della frequenza, detta « caratteristica di frequenza » $A(f)$ del circuito. La risposta del circuito ad una perturbazione impressa qualunque ha come spettro complesso il prodotto di $A(f)$ per lo spettro $G_1(f)$ della perturbazione stessa: detto $G_2(f)$ lo spettro complesso della risposta del circuito si ha, cioè:

$$G_2(f) = A(f) \cdot G_1(f). \tag{1}$$

Se il circuito è un semplice bipolo (ad esempio, un circuito risonante parallelo) a cui sia applicata una corrente i(t) (perturbazione impressa), nella forinola (1) $G_1(f)$ rappresenta lo spettro complesso di i(t), $G_2(f)$ lo spettro complesso della tensione ai capi del bipolo (risposta del circuito) ed $A(f)$ è l'impedenza complessa del bipolo. Nel caso di un quadripolo (ad esempio, un amplificatore lineare) la perturbazione impressa può essere la tensione applicata all'ingresso e la risposta la tensione in uscita; in tal caso la caratteristica di frequenza $A(f)$ è il rapporto di trasduzione del quadripolo (rapporto di amplificazione, nel caso dell'amplificatore).

Nei casi che interessano il presente studio, il modulo A(f) di $A(f)$ partendo da valori trascurabili in corrispondenza a frequenze sufficientemente basse, va crescendo al crescere di f per poi discendere nuovamente fino a raggiungere valori trascurabili per valori sufficientemente elevati di f. Fra la regione in cui A(f) cresce e quella in cui decresce vi è una regione più o meno ampia in cui la funzione varia relativamente poco: in questa regione è individuabile una frequenza f_0 a cui corrisponde un massimo assoluto $A(f_o) = A_o$ della funzione. Le due frequenze f_1 ed f_2, rispettivamente inferiore e superiore ad f_0 in corrispondenza alle quali è:

$$A(f_1) = A(f_2) = \frac{A(f_0)}{\sqrt{2}}, \tag{2}$$

delimitano una banda di frequenza $B = f_2 - f_1$ che, per definizione, si assume quale « banda passante » del circuito.

Si può porre:

$$A(f) = A_o e^{a(f)}, \tag{3}$$

e considerare $a(f)$ come il coefficiente dell'attenuazione relativa ad A_o che si ha quando si passa dalla frequenza f_0 ad un'altra qualunque frequenza f; la sua misura in decibel sarà:

$$a'(f) = 20 \log_{10} \frac{A(f)}{A(f_0)} \text{ (dB)}. \tag{4}$$

In corrispondenza alle due frequenze f_1 ed f_2 si ha $a'(f_1) = a'(f_2) = -3$ dB, per cui la banda passante può anche definirsi come lo scarto fra le frequenze cui corrisponde un coefficiente di attenuazione di 3 dB rispetto ad A_o; per questo motivo la banda passante è anche qualche volta denominata « banda dei 3 dB ».

3. - Si è detto in precedenza che la banda passante B è generalmente riferibile agli elementi del circuito; sarà qui riportato l'esempio più semplice e noto di questa proprietà per mostrare come, ad un'analisi approfondita, la quistione sia in effetti più complessa di quanto normalmente sia ritenuto.

Si consideri a questo proposito il circuito risonante in parallelo di fig. 1; la caratteristica di frequenza, considerata per comodità funzione di ω invece che di f, coincide con l'impedenza complessa del circuito ed ha l'espressione:

$$A(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}. \tag{5}$$

Posto $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ e moltiplicando il numeratore ed il denominatore della (5) per $\omega_0 L$, si ottiene:

$$A(\omega) = \frac{\omega_0 L}{\frac{\omega_0 L}{R} + j\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}, \qquad (6)$$

il cui modulo è:

$$A(\omega) = \frac{\omega_0 L}{\sqrt{\frac{\omega_0^2 L^2}{R^2} + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \qquad (7)$$

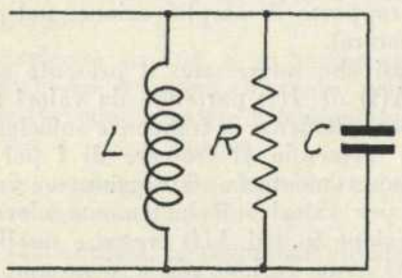

Fig. 1. - Circuito risonante parallelo.

Si ragiona poi, di solito, nel modo seguente: il massimo di A (ω) si ha per $\omega = \omega_0$ ed ha il valore $A_0 = R$. Le pulsazioni $\omega_1 = 2\pi f_1$ ed $\omega_2 = 2\pi f_2$ sono quelle che soddisfano all'equazione:

$$\frac{\omega_0 L}{\sqrt{\frac{\omega_0^2 L^2}{R^2} + \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad (8)$$

da cui si ricava agevolmente:

$$\left\{\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{-\omega_0^2 L + \omega_0^2 \sqrt{\omega_0^2 L^2 + R^2}}{2R}, \\ \omega_2 &= \frac{\omega_0^2 L + \omega_0^2 \sqrt{\omega_0^2 L^2 + R^2}}{2R}; \end{aligned}\right. \qquad (9)$$

si ha quindi:

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0^2 L}{R}. \qquad (10)$$

Ponendo $Q = R/(\omega_0 L)$ed f al posto di ω si ottiene la ben nota relazione:

$$f_2 - f_1 = B = f_0 Q, \qquad (11)$$

che mette in relazione la banda passante B col coefficiente di risonanza, $Q = R/(\omega_0 L)$, del circuito.

Occorre peraltro osservare che nei ragionamenti che hanno condotto alla relazione (11) si è implicitamente ammessa l'indipendenza di R dalla frequenza, che in realtà non sussiste. La resistenza R, che rende conto delle perdite del condensatore e della bobina che compongono il circuito risonante, è in effetti funzione della frequenza: se, come spesso avviene nei circuiti usati in Radiotecnica, le perdite del condensatore sono trascurabili di fronte a quelle della bobina, R è la resistenza parallelo della bobina, legata alla pulsazione co ed al coefficiente di bontà Q_b della bobina dalla relazione $R = \omega L Q_b$. Le normali bobine sono progettate e costruite in modo che, nel campo delle frequenze di lavoro, Q_b sia sufficientemente costante, per cui R risulta approssimativamente proporzionale ad ω.

Il fatto che R non sia costante implica che la pulsazione cui corrisponde il massimo di A(ω) non sia la $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ a cui corrisponde l'annullamento del coefficiente dell'immaginario nella (6); il valor massimo di A (ω) non è perciò $A_0 = R$, ma può essere determinato, così come le pulsazioni ω_1 ed ω_2, solo se si conosce la legge di variazione di R in funzione della frequenza. Ne deriva che è assai più difficile, di quanto normalmente venga ritenuto, il problema di stabilire la relazione fra B e gli elementi del circuito. Ciò non toglie nulla all'utilità pratica di B ed alle relazioni normalmente ammesse fra B e gli elementi circuitali, perchè, se le perdite sono modeste e quindi R è abbastanza grande, l'approssimazione che dette relazioni offrono è più che sufficiente per le esigenze della tecnica.

Le considerazioni svolte nel caso semplice del circuito risonante valgono sostanzialmente anche negli altri casi più complicati.

4. - Si vuole ora indagare sull'applicazione del concetto di banda passante ai problemi inerenti al rumore.

Le tensioni e correnti di rumore applicate ai circuiti sono funzioni del tempo (funzioni di rumore), il cui andamento è del tutto ignoto a priori. Per ciò che riguarda il comportamento di un circuito di fronte al rumore, è giustificato parlare della perturbazione impressa al circuito e di spettro della risposta (come si è fatto nel n. 1) solo se si considera un intervallo di tempo interamente trascorso, in cui l'andamento della funzione di rumore è ormai completamente noto. In un intervallo di tempo diverso i detti spettri risultano generalmente diversi ed è perciò illusorio parlare, in tal senso, di comportamento di un circuito di fronte alle perturbazioni applicate quando mancano gli elementi per caratterizzarle a priori.

Ma nelle funzioni che rappresentano il rumore applicato normalmente ai circuiti, è possibile individuare delle regolarità statistiche che consentono lo studio del comportamento del circuito indipendentemente dalla conoscenza attuale dell'andamento delle sopra dette funzioni [1]. Tale studio è basato sull'uso di grandezze statistiche che, determinate dalla conoscenza dell'andamento delle funzioni nel tempo trascorso fino ad un certo istante t_0, si ammettono costanti anche per $t > t_0$. Le grandezze di questo tipo che interessano il presente studio sono la « potenza specifica », il « valore efficace » e la « densità spettrale ».

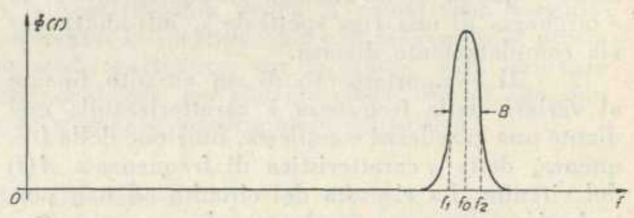

Fig. 2. - Generico andamento della densità spettrale del rumore termico filtrato da un circuito selettivo per alta frequenza.

([1]) S. MALATESTA, *Contributo allo studio statistico delle comunicazioni,* Alta Frequenza, 1952, XXI, p. 163.

La potenza specifica w di una funzione di rumore y(t) (il cui andamento sia noto per $t \leq t_0$) è il valor medio dei quadrati dei valori che la funzione assume in un intervallo di tempo T, molto grande, precedente t_0:

$$w = \frac{1}{T}\int_{t_0-T}^{t_0} y^2(t)\,dt, \qquad (12)$$

o, con più rigore:

$$w = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t_0-T}^{t_0} y^2(t)\,dt. \qquad (13)$$

La potenza specifica è manifestamente il quadrato del valore efficace (secondo la definizione normale) della funzione y(t) prima di t_0:

$$w = Y_{eff}^2. \qquad (14)$$

Si ammette che per le funzioni di rumore w ed Y_{eff} conservino il medesimo valore anche per $t > t_0$.

Se y(t) rappresenta una tensione od una corrente, la potenza specifica può interpretarsi come la potenza media in una resistenza di 1 Ω ([2]). Come la potenza in una resistenza, la potenza specifica può pensarsi suddivisa fra le infinite frequenze che compongono lo spettro della tensione o della corrente:

$$w = \int_0^\infty \Phi(f)\,df; \qquad (15)$$

la funzione Φ (f) ([3]) che esprime la distribuzione della potenza specifica fra le frequenze dello spettro si dice comunemente « densità spettrale » della funzione y(t). La determinazione di Φ (f) avviene partendo dallo spettro di Fourier della funzione y(t) entro un intervallo di tempo T precedente a t_0 ed il suo andamento si ammette che rimanga il medesimo anche per $t > t_0$; la relazione fra Φ(f) e lo spettro complesso G(f) di y(t) è la seguente ([4]):

$$\Phi(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\left|G(f)\right|^2. \qquad (16)$$

Dalle relazioni (1) e (16) si ricava agevolmente ([5]) che, se una tensione od una corrente, la cui densità spettrale sia Φ_1 (f), sono applicate ad un circuito lineare, la cui caratteristica di frequenza sia A(£), la densità spettrale Φ_2 (f) della tensione o corrente di uscita ha l'espressione:

$$\Phi_2(f) = A^2(f) \cdot \Phi_1(f). \qquad (17)$$

Vale dunque la proprietà che un circuito lineare modifica la densità spettrale della tensione o della corrente che gli è applicata moltiplicandone il valore per il quadrato del modulo della caratteristica di frequenza del circuito.

Il tipo più semplice di distribuzione spettrale si ha nel caso del rumore termico, cioè della tensione e della corrente presenti in un conduttore per effetto del caotico moto termico dei suoi elettroni; nel rumore termico la potenza specifica è distribuita uniformemente dalle frequenze più basse alle più alte della gamma radio così che la densità spettrale è costante. Il suo valore, nel caso della tensione presente ai capi di una resistenza R, è:

$$\Phi(f) = 4kRT, \qquad (18)$$

dove k è la costante di Boltzmann e T è la temperatura assoluta del conduttore.

Se tale rumore è applicato ad un circuito lineare, la densità spettrale all'uscita risulta:

$$\Phi_2(f) = \Phi_1 A^2(f), \qquad (19)$$

dove con Φ_1 si è indicato il valore costante di $\Phi_1(f)$; la densità spettrale non è più costante e la sua distribuzione in funzione della frequenza coincide, a parte la costante moltiplicativa Φ_1, con quello medesimo di $A^2(f)$. Nel caso degli ordinari circuiti selettivi impiegati in alta frequenza essa risulta del tipo schematicamente indicato nella figura 2: si ha, cioè, una regione relativamente stretta dello spettro in cui $\Phi_2(f)$ ha valori non nulli. Appare naturale assumere quale larghezza di tale « banda » di frequenza il medesimo valore della banda passante del circuito che ha selezionato, per così dire, la banda stessa dallo spettro uniforme.

Alla frequenza f_0 cui corrisponde il massimo valore A_0 di A(f), la densità spettrale all'uscita del circuito è:

$$\Phi_2(f_0) = \Phi_1 A_0^2, \qquad (20)$$

mentre in corrispondenza alle due frequenze f_1 ed f_2 che delimitano la banda passante, essendo $A(f_1) = A(f_2) = A_0/\sqrt{2}$, risulta:

$$\Phi_2(f_1) = \Phi_2(f_2) = \tfrac{1}{2} A_0^2. \qquad (21)$$

Confrontando le relazioni (21) e (20) si ottiene:

$$\Phi_2(f_1) = \Phi_2(f_2) = \tfrac{1}{2}\Phi_2(f_0). \qquad (22)$$

Se ne deduce che in corrispondenza alle frequenze f_1 ed f_2 che delimitano la larghezza di banda, la densità spettrale è metà di quella massima e questa proprietà può essere scelta per formulare una definizione generale della larghezza di una banda di frequenza, indipendentemente dal caso particolare di rumore termico da cui si è partiti. Si assumerà dunque come larghezza di banda di una funzione di rumore ([6]) lo scarto fra le frequenze cui corrisponde un valore della densità spettrale metà di quello massimo raggiunto nella banda stessa.

Questa definizione ha una stretta analogia con quella della « larghezza di una riga spettrale » usata nell'ottica. La riga spettrale corrisponde nell'ottica alla banda di rumore dianzi considerata; in corrispondenza alla riga l'intensità luminosa specifica (che è la grandezza analoga della densità spettrale qui considerata) ha un andamento in funzione della frequenza del tutto simile a quello indicato nella fig. 2. Individuate le due frequenze f_1, ed f_2 a cui corrisponde un'intensità luminosa spe-

([2]) Le dimensioni della potenza specifica corrispondono alle unità V^2 od A^2, secondo che y(t) rappresenta una tensione od una corrente.

([3]) Le dimensioni di Φ (f) corrispondono alle unità V^2/Hz od A^2/Hz, secondo che y(t) rappresenta una tensione od una corrente.

([4]) J. L. LAWSON and G. E. UHLENBECK, *Threshold Signals,* McGraw-Hill, New York, 1950, p. 39.

([5]) Loc. cit., nota 1.

([6]) La definizione può, peraltro, essere estesa a qualunque altra funzione di comunicazione.

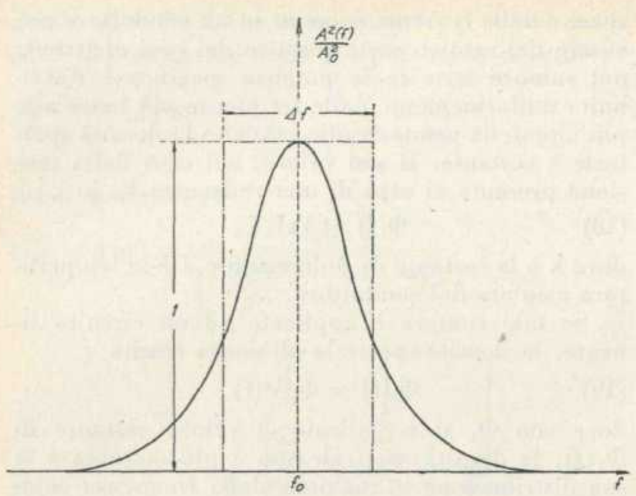

Fig. 3. - Δf è la base di un rettangolo di altezza 1 e di area uguale a quella sottesa dalla curva $A^2(f)/A_0^2$.

cifica metà di quella massima, si chiama larghezza della riga la differenza fra le due corrispondenti lunghezze d'onda [7].

L'analogia fra le due definizioni appare tanto più singolare in quanto il metodo seguito in ottica per giungere alla sopra detta definizione sembra essere del tutto estraneo a quello usato in radiotecnica [8]. Il punto di contatto sta probabilmente nella proprietà (valida, peraltro, rigorosamente nel solo caso in cui l'andamento della funzione spettrale sia esattamente rettangolare o triangolare) che, se si hanno due bande (righe) adiacenti di uguale valor massimo, sparisce praticamente ogni distinzione fra di esse, quando le due frequenze (lunghezze d'onda) centrali sono discoste fra loro di un intervallo pari alla larghezza della banda (riga).

5. - La potenza specifica di una funzione la cui densità spettrale è Φ (f) è, secondo la formola (15):

$$w = \int_0^\infty \Phi(f)\, df ; \tag{23}$$

nel caso di rumore termico, filtrato da un circuito selettivo di caratteristica di frequenza *A(f)*, si ha per la (19):

$$w = \int_0^\infty \Phi_2(f)\, df = \Phi_1 \int_0^\infty A^2(f)\, df . \tag{24}$$

Se, come di solito, l'andamento di A(f) è regolare ed A_o è il suo valor massimo, si può sempre scrivere:

$$\int_0^\infty A^2(f)\, df = A_0^2\, \Delta f , \tag{25}$$

pur di scegliere opportunamente Af; deve essere precisamente :

$$\Delta f = \int_0^\infty \frac{A^2(f)}{A_0^2}\, df . \tag{26}$$

Ciò equivale a sostituire alla curva che rappresenta l'effettivo andamento di $A^2(f)/A_0^2$ un rettangolo di altezza 1 e base Δf tale che la sua area sia uguale a quella sottesa dalla curva (fig. 3). Con la posizione (26) la (24) può scriversi :

$$w = A_0^2\, \Phi_1\, \Delta f ; \tag{27}$$

il relativo valore efficace risulta :

$$Y_{eff} = \sqrt{W} = A_0 \sqrt{\Phi_1 \Delta f} . \tag{28}$$

Nel caso di un circuito selettivo avente $A_o = 1$ ed in cui agisca una tensione di rumore termico prodotta da una resistenza R, si ha, per la (18), $\Phi_1 = 4kRT$ e quindi :

$$Y_{eff} = 2\sqrt{kRT\, \Delta f} ; \tag{29}$$

ben nota formola che esprime la tensione efficace di rumore termico che compete ad una banda di frequenza Δf.

È interessante indagare in quale relazione sia Δf con la banda passante B del circuito. Se la curva di $A^2(f)/A_0^2$ è rettangolare, allora manifestamente Δf coincide con B ; lo stesso avviene se la curva è triangolare (fig. 4), perchè in tal caso Δf è metà della base e tale è anche B che è la differenza fra le frequenze f_2 ed f_1 per le quali, essendo $A(f) = A_o/\sqrt{2}$, l'ordinata risulta $A^2(f)/A_o^2 = 1/2$, cioè metà dell'altezza. Se la curva di $A^2(f)/A_o^2$ è gaussiana, cioè se vale la relazione:

$$\frac{A^2(f)}{A_0^2} = e^{-\frac{1}{a^2}(f-f_0)^2} , \tag{30}$$

si ha:

$$\Delta f = \int_0^\infty e^{-\frac{1}{a^2}(f-f_0)^2}\, df = \sqrt{\pi}\, a = 1{,}77\, a . \tag{31}$$

Le frequenze f_1 ed f_2 che delimitano la banda passante sono quelle che risolvono l'equazione :

$$\frac{A^2(f)}{A_0^2} = e^{-\frac{1}{a^2}(f-f_0)^2} = \frac{1}{2} ; \tag{32}$$

con passaggio ai logaritmi si ricava immediatamente :

$$(f - f_0)^2 = a^2 \ln 2 = 0{,}69\, a^2 , \tag{33}$$

da cui si ottiene :

$$f_1 = f_0 - 0{,}83\, a , \quad f_2 = f_0 + 0{,}83\, a . \tag{34}$$

Se ne deduce :

$$B = f_2 - f_1 = 1{,}66\, a ; \tag{35}$$

confrontando questa espressione con la (31), si ottiene:

$$\Delta f = \frac{1{,}77}{1{,}66} B = 1{,}06\, B . \tag{36}$$

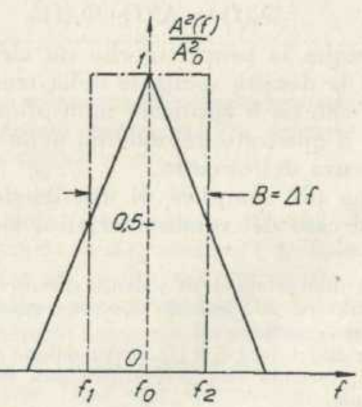

Fig. 4. - Se l'andamento di $A^2(f)/A_0^2$ è triangolare, Δf coincide con la banda passante B.

---
[7] E. PERUCCA, *Fisica generale e sperimentale*, U.T.E.T., Torino, 1942, p. 204.

[8] Loc. cit., nota 7.

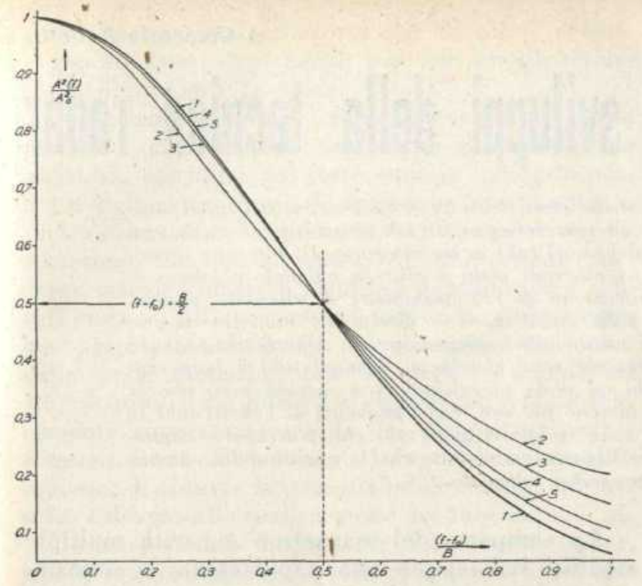

Fig. 5. - Confronto fra la curva gaussiana (curva 1) e le curve di $A^2(f)/A_0^2$ di ugual banda passante, corrispondenti al caso di un sol circuito risonante (curva 2), di due (curva 3), di quattro (curva 4) e di otto (curva 5) circuiti risonanti identici, isolati da opportuni amplificatori.

Anche in questo caso, dunque, si ha praticamente la coincidenza fra Δf e la banda passante B.

Si consideri ora un circuito risonante parallelo e, per semplicità, si supponga che le perdite siano piccole, così che possano praticamente ritenersi valide le relazioni dedotte nel n. 3. Ponendo, allora, nella (7):

$$\frac{\omega^2 L^2}{R^2} = \frac{1}{Q^2} = \frac{B^2}{f_0^2} , \tag{37}$$

e sostituendo f ad ω si ottiene:

$$\frac{A^2(f)}{A^2} = \frac{B^2}{f_0^2} \frac{1}{\frac{B^2}{f_0^2} + \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)^2} \tag{38}$$

Si può scrivere:

$$\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} = \frac{f^2 - f_0^2}{f f_0} = \frac{(f + f_0)(f - f_0)}{f f_0} ; \tag{39}$$

ma, se le perdite sono piccole, l'espressione (38) ha valori diversi da zero praticamente solo in un intorno assai piccolo di f_0. In questo intorno può, senza errore apprezzabile, porsi $(f + f_o) = 2f$, per cui la (38) diviene:

$$\frac{A^2(f)}{A_0^2} = \frac{B^2}{B^2 + 4(f - f_0)^2} . \tag{40}$$

Se ne deduce, per la (26):

$$\Delta f = \int_0^\infty \frac{B^2}{B^2 + 4(f - f_0)^2}\, df = \frac{B^2}{4} \int_0^\infty \frac{1}{\frac{B^2}{4} + (f - f_0)^2}\, df , \tag{41}$$

da cui [9]:

$$\Delta f = \frac{B^2}{4} \left| \frac{2}{B} \arctan \frac{2}{B}(f - f_0) \right]_0^\infty = 1{,}57\, B . \tag{42}$$

In questo caso — che, come si vedrà, è il più sfavorevole che si presenti in pratica — Δf differisce apprezzabilmente da B : è quindi errato, nelle formole del tipo (29), confondere, come qualche volta si fa, Δf con B quando il circuito selettivo sia un semplice circuito risonante.

Situazione più favorevole si incontra nel caso in cui il circuito selettivo è costituito da vari circuiti risonanti identici, fra loro isolati da amplificatori separatori. Si ha in tal caso, prescindendo dall'eventuale guadagno degli amplificatori:

$$A(f) = A_1(f) \cdot A_2(f) \cdot \ldots \cdot A_n(f) = A_1^n(f) ; \tag{43}$$

per cui, valendosi della (40), si ottiene:

$$\frac{A^2(f)}{A_0^2} = \frac{A_1^{2n}(f)}{A_0^{2n}} = \frac{B_1^{2n}}{[B_1^2 + 4(f - f_0)^2]^n} , \tag{44}$$

e quindi:

$$\Delta f = \int_0^\infty \frac{B_1^{2n}}{[B_1^2 + 4(f - f_0)^2]^n}\, df . \tag{45}$$

Con calcoli complicati solo formalmente [10] si ricava che il rapporto $\Delta f/B$ assume i valori 1,22, 1,15, 1,13, 1,11 corrispondentemente ad n = 2, 3, 4, 5 e tende ad 1,06 al crescere di n; esso tende, quindi allo stesso valore che $\Delta f/B$ ha nel caso della curva gaussiana (formola (36)). Ciò corrisponde al fatto che la curva rappresentativa della funzione (44) si approssima rapidamente, al crescere di n, ad una curva gaussiana; questa interessante proprietà è messa in evidenza nella fig. 5, dove sono fra loro raffrontate la curva gaussiana e le curve di $A^2(f)/A_o^2$ di uguale banda passante, corrispondenti al caso di un sol circuito risonante, di 2, di 4 e di 8 circuiti risonanti identici isolati da opportuni amplificatori. Da quanto visto deriva che negli amplificatori selettivi, attuati con vari stadi tutti accordati sulla medesima frequenza (come sono gli amplificatori a frequenza intermedia di molti ricevitori radar, ad esempio) Δf non differisce apprezzabilmente da B. In tutti gli altri casi di amplificatori selettivi, in cui con vari artifizi (circuiti risonanti accoppiati, circuiti risonanti con frequenze di risonanza opportunamente sfalsate fra loro) si riesce a rendere la curva di risposta più prossima a quella rettangolare, il rapporto $\Delta f/B$, a parità di numero di stadi, differisce ancor meno da 1. Se ne deduce che in tutti gli amplificatori di alta frequenza a più stadi, qualunque siano i circuiti selettivi usati, Δf non differisce apprezzabilmente da B.

Poiché lo studio del rumore si riferisce soprattutto ai ricevitori e quindi essenzialmente ad amplificatori di alta frequenza, risulta giustificata la pratica corrente di confondere Δf con B e risulta spiegata l'adattabilità del concetto di banda passante ai problemi del rumore.

Sante Malatesta

Livorno - Accademia Navale.

---
[9] Vale la formola:

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2}\, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + \text{cost} .$$

[10] Basati sulla relazione:

$$\int \frac{1}{(b + ax^2)^n}\, dx = \frac{x}{2b(n+1)(b + ax^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2b(n-1)} \int \frac{1}{(b + ax^2)^{n-1}}\, dx .$$