Sul modo di calcolare le saette di inflessione dei Ponti metallici a travate rettilinee, per Giovanni Sacheri.

Memoria letta ed approvata per la stampa negli Atti della Società nelle Adunanze successive 3 giugno e 3 dicembre 1873.

Signori,

Le condizioni di resistenza dei ponti di ferro a travate rettilinee, ci offrono un interminabile argomento di studio. Pochi problemi di pratica applicazione riuscirono come questo ad affaticare le menti di tanti ingegneri; e mentre una serie quasi indefinita di opere ardite e grandiose va sorgendo ogni giorno con rapidità incredibile, la scienza e la pratica progrediscono di pari passo; ed è bello il sorprenderle nel più ammirabile accordo, mentre si studiano di dare vicendevolmente alle loro creazioni una sempre nuova e più caratteristica impronta.

Con tutto ciò il problema dei ponti a travate rettilinee attende ancora dal lato scientifico una soluzione che più rigorosamente si attenga alle condizioni della pratica, e che permetta di superare in alcun modo le gravi difficoltà dell'analisi, senzachè debbansi alterare per queste i precisi termini nei quali il problema deve essere posto.

1. — Voi tutti conoscete quella relazione fondamentale tra i momenti inflettenti di tre appoggi consecutivi, che

Enrico Bertot comunicava pel primo nel 1855 alla Società degli Ingegneri di Parigi; che Clapeyron e Bresse ciascuno per proprio conto trovarono pure da loro stessi nel 1857; e che scoprivasi una quarta volta ancora da Heppel, nell'India, a Madras (1858).

Quell'espressione, dalla quale partono tutti i metodi di calcolo fin qui conosciuti dei ponti a travate rettilinee, presuppone anzitutto la uniforme ripartizione di un peso morto su tutta la lunghezza di una o più travate; e sostituisce così alla condizione pratica di un convoglio che successivamente cammina sul ponte, e che si inoltra su ciascuna travata per un tratto di lunghezza variabile da un istante all'altro, la condizione ipotetica più o meno sfavorevole di una serie di posizioni staccate ed indipendenti non solo, ma per le quali supponesi perfino che la lunghezza del convoglio sia un multiplo esatto della lunghezza delle travate.

Il Bresse nella terza parte della sua Meccanica applicata del 1865 fu l'unico, per quanto io sappia, che abbia studiata a dovere la questione, anche dal lato della variabilità nella ripartizione dei pesi, ed arrivò ad alcuni risultati che in certi casi saranno molto utili, ma non ci diede da questo lato una soluzione nel vero senso della parola; poiché disgraziatamente quei risultati finali non sono che simboli, i quali ingegnosamente nascondono numerosi calcoli di integrabilità complicatissimi, e poco men che impraticabili.

2. — La relazione dei tre momenti inflettenti presuppone inoltre che sia costante il momento d'inerzia della sezione resistente per tutta la lunghezza della travata; una ipotesi più generale condurrebbe egualmente ad una inestricabile complicazione nei calcoli. Eppure ove si noti che l'unico scopo nostro è quello precisamente di stabilire una razionale variazione di questa sezione resistente in proporzione della grandezza degli sforzi, ben si comprenderà che la relazione dei tre momenti inflettenti sugli appoggi, della quale ci serviamo come di punto di partenza, non sarà la

vera, e che anzi non sarà mai possibile di averne una sola valevole per tre punti consecutivi qualunque, essendoché questa relazione è necessariamente variata dalla dissimmetria nella distribuzione delle lastre di due travate contigue, e deve andare successivamente variando col mutarsi delle travate che si considerano.

Né sarebbe così facile cosa di trovare analiticamente qual possibile divario vi sia, fra i risultati di calcoli cosifatti, e quelli che dovrebbero derivare da un più vero stato di cose, tanto da poter dire se sia in ogni caso praticamente trascurabile l'errore. Ma la sola analogia di certi casi più semplici, i quali ci permettono una soluzione più rigorosa, ci condurrebbe ad ammettere che per la forma di eguai resistenza si aumenterebbero da $\frac{1}{8}$ ad $\frac{1}{6}$ i momenti sugli appoggi, e sarebbero invece diminuiti quelli sul mezzo delle travate (1).

Le quali considerazioni, se ci spiegano per una parte la precauzione sempre seguita dai pratici di provvedere più largamente e con un certo criterio, alla stabilità delle travi in prossimità delle pile, ci addimostrano per altra parte quanto poco siasi fin qui progredito dal lato teorico in così difficile ed importante questione.

3. — Ma poiché una soluzione diretta e definitiva non sarà forse, per le difficoltà dell'analisi, sì presto trovata, ho divisato che non sarebbe cosa affatto inutile di tentare dapprima lo studio del problema inverso, e di servirsi una buona volta, anche per questo genere di questioni, di quel lume quasi sempre proficuo della esperienza. Trattasi invero di una questione che più d'ogni cosa interessa la pratica, e che molti ingegneri si contenterebbero perfino di vedere anche solo praticamente risolta; a che dunque ostinarci nel voler arrivare alla meta per la via esclusiva di una intricata

(1) De l'état actuel de nos cennaissanees sur la résistance des matériaux, par M. J. Gaudard (Bulletin des Anciens Éléves de l'École centrale, 1870).

combinazione di cifre? Perché non dovremo servirci di tanti dati sperimentali somministratici dalle prove di collaudo di quelle innumerevoli opere di tutte dimensioni che già sussistono, e di quelle altre che si vanno ogni dì costruendo? E perché non ci basterà di cercare coll'analisi, e per un sufficiente numero di travate eseguite, le variazioni che nel valore dei momenti inflettenti in sugli appoggi deriveranno da una prestabilita ripartizione delle lastre ; e di constatare a tale scopo le differenze tra le saette di inflessione misurate, e quelle che, nelle corrispondenti ipotesi di ripartizione dei carichi, potranno, come in appresso vedremo, essere rigorosamente calcolate?

Anche per i ponti di una sola travata il calcolo delle saette di inflessione, ove lo si faccia tenendo conto delle variazioni del momento d'inerzia nelle diverse sezioni, riescirà di non lieve importanza; poiché ci permetterà di ben precisare quale influenza abbiano nell'inflessione di queste travate e le chiodature ed i giunti, che sono i soli elementi non assoggettabili a calcolo.

4. — Dietro queste considerazioni non si può a meno di desiderare una qualche soluzione del problema generale di determinare analiticamente le curve elastiche e le saette di flessione dei solidi di eguai resistenza ; ma questo problema non si trova neanche accennato ne' nostri più moderni ed estesi trattati teorico-pratici sulla resistenza dei materiali, e sulle costruzioni metalliche. Mi pare che le difficoltà d'ogni genere che la soluzione presenta, avrebbero dovuto bastare ad invogliare tutti gl'Ingegneri ad occuparsene ; e d'altronde la soluzione di questo problema interessa troppo direttamente le prove di collaudo delle travate. Ma per queste prove si è fin qui preferito di accontentarsi che la massima saetta di flessione misurata sul mezzo non ecceda una prestabilita frazione della lunghezza totale delle stesse travate. Come poi questa certa frazione siasi finora determinata, e tuttora si determini, non saprei dire. Essa potrà essere accettata ad ogni modo quale risultato di una

lunga esperienza; ma non potrebbe di certo presumersi quale ultima conseguenza dei calcoli fattisi in precedenza per disegnare la distribuzione delle lastre, e così quale risultato di vero controllo delle teorie applicate; essendoché non è in alcun modo possibile di accettare per il calcolo delle saette di flessione dei ponti a travate rettilinee, anche in via di grossolana approssimazione, l'ipotesi non vera del momento d'inerzia costante per ogni sezione, e tuttoché questa ipotesi abbia egregiamente servito in tutte le operazioni che valsero a dare lo studio completo del ponte.

E basterebbe a provare l'asserto il caso semplicissimo di un prisma di sezione rettangolare, appoggiato agli estremi e caricato di un solo peso nel mezzo. Qui il caso è così semplice, che ogni difficoltà nei calcoli è eliminata. Foggiate questo prisma a solido di eguai resistenza, e con questa forma, e sotto lo stesso peso voi lo vedrete piegarsi precisamente del doppio di quello che avrebbe piegato quando esso aveva sezione costante.

5. — Dicasi invero:

$2a$ la distanza degli appoggi;

b la larghezza costante della sezione trasversa del prisma;

c l'altezza della sezione, che sarà variabile assecondando il profilo d'un solido di eguai resistenza;

E il modulo di elasticità;

R il coefficiente di resistenza, per unità di superficie;

$2P$ il peso applicato nel mezzo;

x ed y le ascisse ed ordinate della curva di inflessione dell'asse del prisma, essendo l'origine nel punto di mezzo, dove è pure applicata la forza 2 P.

Si conosce l'equazione di resistenza:

$$\frac{1}{6} R b c^2 = P(a-x). \qquad (1)$$

E così pure la differenziale di secondo ordine della curva

elastica.

$$\frac{1}{12} E b c^3 \frac{d^2 y}{d x^2} = P(a-x) \qquad (2)$$

Combinandole risulta:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{2R}{E} \frac{1}{c}$$

Osservisi che c è funzione di x; e si sostituisca il suo valore dedotto dalla (1)

$$c = \sqrt{\frac{6P}{Rb}} \sqrt{a-x}$$

nella equazione ora trovata, e si avrà l'equazione differenziale di secondo ordine della curva elastica pronta a poter essere integrata

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{2R}{E} \sqrt{\frac{Rb}{6P}} \frac{1}{\sqrt{a-x}} \qquad (3)$$

Integrandola una prima volta, e determinando per guisa la costante che ad $x = 0$ risponda $\frac{dy}{dx} = 0$, si trova

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4R}{E} \sqrt{\frac{Rb}{6P}} \left\{ \sqrt{a} - \sqrt{a-x} \right\}$$

Integrando ancora ed osservando che per $x = a$ si ha $y = 0$, si trova la equazione finita della curva

$$y = \frac{4R}{E} \sqrt{\frac{Rb}{6P}} \left\{ x\sqrt{a} + \frac{2}{3}(a-x)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}} \right\} \qquad (4)$$

Facendo $x = a$ e dicendo f la saetta cercata, si trova:

$$f = \frac{4}{3} \frac{R}{E} \sqrt{\frac{Rb}{6P}} a^{\frac{3}{2}}$$

Se c_1 è l'altezza della sezione del prisma corrispondente ad $x = o$, si avrà dalla (1)

$$\sqrt{\frac{Rb}{6P}} = \frac{a}{c_1}$$

epperò sostituendo, si avrà finalmente:

$$f = \frac{4}{3}\,\frac{R}{E}\,\frac{a^2}{c_1} \tag{5}$$

Quando invece il prisma ha la sezione rettangolare di altezza costante c_1, si sa che la saetta di flessione nel mezzo sarebbe data dall'espressione :

$$\frac{Pa^3}{3E}\,\frac{12}{bc_1^3}$$

la quale per essere

$$P = \frac{Rbc_1^2}{6a}$$

diventa eguale a

$$\frac{2}{3}\,\frac{R}{E}\,\frac{a^2}{c_1}$$

ossia alla precisa metà della saetta più sopra trovata.

I.

Determinazione delle saette di inflessione dei ponti metallici ad una sola travata.

6. — Ma il calcolo, che nel caso esposto è sì semplice, va indicibilmente complicandosi, e diventa pressoché impraticabile quando il peso si ripartisca uniforme su tutta la trave, e la sezione di eguai resistenza debba assumere la forma di un doppio T simmetrico, siccome appunto succede per le travate dei ponti.

La variabile che sta rinchiusa nel momento d'inerzia è la causa precipua di questa complicazione. Pure è possibile di sciogliere ogni difficoltà, trasportandosi per un solo istante dalle formole al disegno , dall'astratto al concreto. E poiché nelle travate dei ponti la variazione di sezione non può essere fatta insensibilmente , ed in un modo continuo, ma si può tutto al più contornare la curva teorica di eguai resistenza con successive aggiunte 0 diminuzioni di lastre di determinata spessezza, ne segue che per ogni tratto, comunque breve, compreso fra due risalti di estremità delle lastre, la sezione della trave, e quindi il momento d'inerzia, non variano.

Ed ecco allora venire molto ovvia l'idea di trar partito di questa favorevole condizione di cose in virtù della quale noi siamo per così dire invitati a tener conto delle più minute particolarità della pratica per poter semplificare i nostri calcoli, ed arrivare ad un risultato che ci riescirà ben più interessante, perché ancor più preciso e più vero di quello che non si sapeva per lo innanzi trovare.

Con questa osservazione, la integrazione delle due equazioni differenziali della curva elastica si eseguisce molto facilmente, e la difficoltà è per così dire tutta riversata sulla determinazione della costante. La qual *costante* non sarà veramente tale , che per tutte le sezioni di un dato tratto di travata, nel quale il momento d'inerzia non cambia; essa ci presenterà invece la singolarità di contenere a sua volta una variabile, che le assegnerà tanti valori quanti saranno i successivi tratti di travata determinati dai risalti di estremità di ogni lastra. Il valore di questa costante per un determinato tratto contiene allora la somma algebrica delle costanti di tutti i tratti antecedenti di travata a partire da un punto di origine, e fino al tratto che si considera; cosicché la determinazione di queste costanti potrà farsi in modo successivo ; e dovrà farsi dietro le condizioni della *continuità* della curva elastica in tutte quelle sezioni in cui precisamente avviene la *discontinuità* del valore del momento d'inerzia, ossia in tutte quelle sezioni nelle quali finisce o comincia una lastra di aggiunta.

7. — Ed ora intendo di dimostrare col fatto che anche questa determinazione non dà luogo a complicazioni di calcoli ; e che anzi la semplicità dei risultati permette pure di scrivere l'equazione finita della curva elastica di qualsiasi tratto di travata colla espressione generica del termine costante.

Di questa espressione finale potranno senz'altro servirsi gli Ingegneri per qualsiasi loro travata ; ed essi se ne serviranno molto volontieri, perché i calcoli numerici da farsi per applicarla alla determinazione delle saette di inflessione, riescono così semplici, da poter essere con tutta sicurezza affidati a persona che appena conosca i rudimenti dell'algebra.

Ecco intanto lo svolgimento del calcolo.

Dicasi:

2 a la distanza degli appoggi ;

h l'altezza della travata misurata fra le tavole orizzontali più vicine;

e la spessezza delle lastre ;

i il numero delle lastre contenute in una determinata sezione ;

I_i il momento di inerzia di quella sezione ;

i_0 ed i_a il numero delle lastre contenute rispettivamente nelle due sezioni di estremità, e di mezzo della trave ;

E il modulo di elasticità;

p il peso uniformemente distribuito per unità di lunghezza ;

x ed *y* le ascisse ed ordinate della curva di inflessione dell'asse della travata, essendo l'origine in un punto d'appoggio.

Il momento d'inerzia per una sezione di un numero *i* di lastre sarebbe dato da

$$I_i = \frac{1}{12} b \left\{ (h + i e)^3 - h^3 \right\}$$

che può scriversi ancora

$$I_i = \frac{1}{12} b h^3 \left\{ 3 \frac{i e}{h} + 3 \left(\frac{i e}{h} \right)^2 + \left(\frac{i e}{h} \right)^3 \right\} \qquad (1)$$

Ordinariamente avviene che la frazione $\frac{i e}{h}$ è sufficientemente piccola da potersi trascurare la seconda e la terza potenza, e ritenere semplicemente

$$I_i = \frac{1}{4} b h^2 i e.$$

Riterrò per semplicità di scrittura quest'ultima espressione , sebbene nulla osti per maggior precisione di proseguire il calcolo attenendosi alla prima.

Il momento inflettente per una sezione posta a distanza x_i dall'origine (ed indico con questa ascissa qualsiasi sezione compresa nel tratto in cui la sezione ha un numero *i* di lastre) essendo:

$$-p a x_i + \frac{1}{2} p x_i^2$$

si potrà scrivere la seguente equazione differenziale del secondo ordine della curva elastica :

$$\left(\frac{d^2 y}{d x^2} \right)_i = \frac{2 p}{E b h^2 e} \frac{1}{i} (x_i^2 - 2 a x_i) \qquad (2)$$

Integrando una prima volta, si ha:

$$\left(\frac{d y}{d x} \right)_i = \frac{2 p}{E b h^2 e} \frac{1}{i} \left(\frac{x_i^3}{3} - a x_i^2 \right) + C'_i \qquad (3)$$

e dopo una seconda integrazione, si troverà l'equazione finita

$$y_i = \frac{2 p}{E b h^2 e} \frac{1}{i} \left(\frac{x_i^4}{12} - \frac{a x_i^3}{3} \right) + C'_i x_i + C''_i \qquad (4)$$

C'i e *C''i* simboleggiano appunto quelle due serie di costanti arbitrarie, le quali non possono determinarsi che successivamente, la prima a partire da *i*= n, ove si indiprima espressione, ed a partire da $i_0 + 1$ fino ad i per la seconda.

$$C'_i = C_n - \frac{2p}{Ebh^3e}\sum_{n}^{i_0+1}\frac{1}{i(i-1)}\left(\frac{1}{3}x^3_{i-1,i} - a\,x^2_{i-1,i}\right) \quad (9)$$

$$C''_i = -\frac{2p}{Ebh^3e}\sum_{1}^{i_0+1}\frac{1}{i(i-1)}\left(\frac{2}{3}a\,x^3_{i-1,i} - \frac{1}{4}x^4_{i-1,i}\right) \quad (10)$$

9. — Ordinariamente succede di dover calcolare soltanto la saetta di inflessione sul mezzo della travata; bisogna allora preparare il valore di C''_n facendo uso della espressione (10) ora scritta, nella quale si sostituirà alla lettera i la lettera n, ferma rimanendo la i_0.

La maggior parte dei costruttori sogliono tener conto, nella distribuzione delle lastre sul diagramma dei momenti inflettenti massimi, della parte di resistenza che in unione alle lastre orizzontali potranno opporre i ferri d'angolo destinati a riunire le tavole orizzontali al traliccio. In tal caso le formole date sono egualmente applicabili e basterà di cercare col calcolo, o più speditamente ancora col compasso sulla figura dove sono distribuite le lastre, a qual numero intiero o frazionario di lastre corrispondano i ferri d'angolo, ed aggiungere questo numero a quello che indica il numero di lastre per ogni sezione.

Le ascisse x_{i-1}, risultano dal diagramma di distribuzione delle lastre; ma qui si noti essere buon uso dei costruttori di fare in alcuni casi, e sempre dove riesce possibile, avanzare una lastra ben oltre il contorno della curva dei momenti inflettenti per tener luogo di uno o di più coprigiunti indispensabili a rimediare la interruzione di una o di più lastre sottostanti; cosicché sarà bene nel segnare le diverse ascisse occorrenti al calcolo della saetta di inflessione di immaginare stralciati quei tratti estremi delle lastre che suppliscono alle discontinuità, e non danno luogo a maggior resistenza.

Per avere la espressione finale della saetta di inflessione sul mezzo di una travata, basterà di fare nella equazione (4)

$i=n$ ed $x=a$, prendere dalla espressione (7) il valore di C'_n e calcolare colla espressione (10) il valore di C''_n.
Si avrebbe così

$$f = \frac{2p}{Ebh^3e}\left\{\frac{1}{n}\,\frac{5}{12}a^4 + \sum_{n}^{i_0+1}\frac{1}{i(i-1)}\left(\frac{2}{3}a\,x^3_{i-1,i} - \frac{1}{4}x^4_{i-1,i}\right)\right\} \quad (A)$$

Nel caso di una travata a sezione costante, il termine simbolico si annulla, essendo le ascisse $x_{i-1,i}$ tutte eguali a zero ; sicché rimane la formola

$$f_1 = \frac{5}{6}\,\frac{p\,a^4}{E\,b\,h^3\,n\,e}$$

o meglio

$$f_1 = \frac{5}{24}\,\frac{p\,a^4}{E\,I}$$

siccome è comunemente registrata nei libri.

Non occorre dire che il termine simbolico consta di tutti termini necessariamente positivi, non potendosi avere mai $x > a$, e che quindi la saetta delle travate calcolata a dovere sarà sempre ben maggiore di quella che si avrebbe nella ipotesi del momento d'inerzia costante.

II.

Determinazione delle saette di inflessione dei ponti metallici a più travate.

10. — Nel caso di un ponte a più travate la soluzione di questo problema assume una importanza maggiore, e diventa di una necessità quasi assoluta per somministrare coi risultati delle prove di collaudo quel fondato criterio sulla bontà di esecuzione dell'opera, che diversamente non

potrebbesi avere. Ed infatti non basta che le amministrazioni prescrivano, siccome ordinariamente si suole anche per le opere più importanti e grandiose, che nelle esperienze la flessione massima da verificarsi non debba raggiungere una data frazione, un milleducentesimo, ad esempio, della luce libera delle travate; e che la Commissione tecnica incaricata del collaudo dell'opera constati che realmente nelle diverse prove eseguitesi, e sieno pure fatte nelle condizioni più sfavorevoli, le saette misurate risultarono tutte, e di molto, inferiori (siccome sempre avviene) a quel massimo prestabilito.

I risultati di quelle esperienze saranno accettabilissimi, ed io li ritengo sommamente preziosi; ma la conseguenza che si vorrebbe dedurre sulla intrinseca bontà di quella costruzione, e segnatamente sulla accuratezza di sua esecuzione, non mi pare plausibile. Forsechè dopo tanti calcoli eseguiti, e dopo aver fatta una sì larga parte ad un coefficiente di stabilità, e con tanta perizia adoperata immancabilmente da costruttori provetti in simili lavori, occorreranno ancora delle prove per potere unicamente dire che la massima deformazione sarà per tutte le travate sufficientemente minore di quella prestabilita? Non è un semplice criterio sommario sulla stabilità assoluta dell'opera, che si dovrebbe dalle prove di collaudo richiedere; ma bisogna invece che queste ci misurino il suo grado di stabilità, e ci mettano in luce quella voluta uniformità nelle condizioni relative di stabilità di una travata per rispetto alle altre, e per rispetto a diverse sezioni di una stessa travata. Chi ci assicura infatti che quella particolare saetta, la quale per condizioni di posizione (per la distribuzione adottata dei pesi, per la prestabilita disposizione delle lamiere, ecc.) sarà necessariamente riuscita la più piccola di tutte, non abbia tuttavia ad accennare ad un grado di stabilità relativa molto minore di quello che potrebbe essere accennato dalle altre deformazioni maggiori?

Si paragonino adunque le saette misurate con quelle rigorosamente calcolabili nel caso pratico e concreto proposto, e si procuri una buona volta di arrivare per ogni prova, e per ogni travata, ad un coefficiente di stabilità sperimentale, che in una costruzione teoricamente ben fatta col variare delle prove, e delle travate, dovrebbe anch'esso rimanere teoricamente costante. Da tutta la serie di quei coefficienti sperimentali, e dalla loro non grande variabilità sarà solamente possibile di trarre un'idea precisa, perché espressa in cifre, di quella uniformità di struttura, e di quella regolarità di lavoro che gli attuali progressi scientifici ed industriali ci permettono di conseguire, e che devono aversi essenzialmente di mira nel fare le prove.

11. — Per calcolare le saette di inflessione d'una qualsiasi travata occorrono prima d'ogni cosa i valori numerici dei momenti inflettenti in sugli appoggi corrispondentemente alle singole ipotesi di sovraccarico che si sono adottate nel fare le prove. E sarebbe pur ottima cosa se questi valori si potessero avere in modo più diretto e preciso procurandosi sperimentalmente, e per ogni prova speciale, le reazioni degli appoggi. Trattandosi di esperienze a peso morto non vi sarebbero poi grandi difficoltà da superare per congegnare gli apparecchi necessari per simili ricerche; e queste ci riuscirebbero di moltissimo giovamento, permettendoci di constatare le influenze che sui risultati teorici non possono a meno di esercitare tanti elementi non assoggettabili a calcolo.

In mancanza di queste prove converrà almeno di assicurarsi durante le operazioni di posa del ponte che le travate si trovino in condizioni approssimativamente identiche a quelle indicate dai calcoli; e non riescirà difficile di farlo, quando nel distribuire le lastre abbiasi avuta la buona avvertenza di far cadere la esistenza di qualche giunto in vicinanza dei punti di inflessione della travata. E basterà allora di adottare il procedimento che fu suggerito da Stoney, e praticato per il viadotto della Boyne (siccome rilevasi dagli Atti della Società degli Ingegneri civili di Londra, nel vol. xiv a pag. 456), per il quale essendosi tagliati e fatti uscire tutti i chiodi ribaditi delle due file laterali di un giunto della tavola superiore , corrispondente ad un punto teorico di inflessione, ebbesi tosto a verificare il chiudimento della fessura lasciata tra le due lastre disgiunte; indizio questo certissimo che quella sezione era tutt'altro che indifferente ai momenti inflettenti, e che perciò non verificavasi in quella sezione la creduta esistenza del punto di inflessione. Ma si potè facilmente far scomparire ogni effetto visibile di compressione coll'abbassare le estremità delle due travate laterali, ossieno i punti d'appoggio, l'uno di 25 millimetri, e l'altro di 13: ed essendosi allora riaperta la giuntura di $^2/_5$ di millimetro, si ordinò di rifare la chiodatura.

Con questa precauzione si può essere quasi certi che i valori dei momenti inflettenti sugli appoggi ancorché vengano calcolati colla nota relazione, epperciò nell'ipotesi del momento d'inerzia costante per tutta la lunghezza delle travate, non si scosteranno di troppo dal vero valore, o quanto meno l'approssimazione non riescirà minore di quella possibile ad ottenersi sia per la difficile valutazione precisa dei grandi pesi di carico e sovraccarico, sia per la impossibile ripartizione del tutto uniforme di questi pesi sulla unità di lunghezza e per tante altre consimili difficoltà che praticamente s'incontrano.

Trovati in un modo o nell'altro i momenti inflettenti sugli appoggi corrispondentemente a tutte quelle ipotesi di sovraccarico che nelle prove si vorranno adottare, più non vi sarà che da calcolare il valore teorico delle diverse saette di inflessione; ed è questa determinazione che forma precipuo oggetto di questo lavoro ; essendoché, come già dissi più sopra nel caso di una sola travata, non è più possibile per il calcolo teorico di queste saette di ritenere anche in via di grossolana approssimazione , l'ipotesi del momento d'inerzia costante per ogni sezione di travata.

Ed eccomi ora a dimostrare che anche nel caso più complesso dei ponti a più travate, il calcolo teorico non ci presenta gravi complicazioni, qualora si faccia uso di un procedimento analogo a quello che ho più sopra indicato al num. 6 parlando dei ponti ad una sola travata.

12. — Ove dicasi:

μ il momento inflettente relativo ad una sezione qualunque d'una travata qualsiasi;

p il peso uniformemente distribuito per ogni unità di lunghezza della travata che si considera;

a la distanza dei due appoggi, ossia la lunghezza della travata ;

m' ed m" i momenti inflettenti in sugli appoggi;

x ed *y* le coordinate della curva elastica assunta dall'asse inizialmente rettilineo della travata, coll'origine nel primo punto d'appoggio ,

il valore di μ risulta dalla forinola nota :

$$\mu = A + Bx - \frac{1}{2} p x^2 \qquad (1)$$

nella quale *A* e *B* rappresentano due numeri da calcolarsi colle espressioni

$$A = m', \qquad B = \frac{1}{2} p a + \frac{m'' - m'}{a}. \qquad (2)$$

Ciò premesso, si immagini il diagramma della distribuzione delle lastre per quella travata ; e si notino a partire dal primo punto d'appoggio coi numeri progressivi 1, 2, 3.., *n—1*, *n*... ecc. i successivi tratti di travata pei quali la sezione resistente e quindi il momento d'inerzia rimane costante. Sieno per l'n^{ma} tratto:

x_n ed y_n le coordinate della curva elastica ;

i_n il numero delle lastre contenute nella sezione; il qual numero potrà riescire intiero od anche frazionario, dietro l'osservazione già fatta al num. 9.

Poi si ritengano ancora per *E*, *h*, *b* ed *e* le stesse significazioni del num. 7.

Assumendo ancor qui per il valore del momento d'inerzia di una sezione qualsiasi l'espressione approssimata

$$\frac{1}{4} b h^2 i e,$$

ma però colle stesse avvertenze indicata dal num. 7, si potrà scrivere la seguente equazione differenziale di secondo ordine della curva elastica per l'n^{mo} tratto di travata

$$\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_n = \frac{4}{E b h^3 e} \frac{1}{i_n} \left(A + B x_n - \frac{1}{2} p x^2_n\right) \quad (3)$$

Integrando una prima volta, ed introducendo una costante arbitraria C'_n, si trova:

$$\left(\frac{d y}{d x}\right)_n = \frac{4}{E b h^3 e} \frac{1}{i_n} \left(A x_n + \frac{1}{2} B x^2_n - \frac{1}{6} p x^3_n\right) + C'_n \quad (4)$$

Per determinare la costante C'_n immagino innanzi tutto di aver scritta una equazione analoga alla (4) col solo cambiamento dell'indice n in n—1. Questa sarà l'equazione differenziale di primo ordine della curva elastica corrispondente al tratto precedente di travata di numero n—1. Poi osservo che nella sezione comune ai due tratti, ossia là dove comincia o finisce una lastra d'aggiunta, devesi avere per la continuità della curva elastica

$$\left(\frac{d y}{d x}\right)_n = \left(\frac{d y}{d x}\right)_{n-1};$$

per cui designando con $x_{n-1,\,n}$ l'ascissa di quella sezione comune ai due tratti, si potrà dall'equazione ora scritta dedurre:

$$C'_{n-1} = C'_n - \frac{4}{E b h^3 e} \left(A x_{n-1,\,n} + \frac{1}{2} B x^2_{n-1,\,n} - \frac{1}{6} p x^3_{n-1,\,n}\right) \left(\frac{1}{i_n} - \frac{1}{i_{n-1}}\right)$$

Se nel passaggio dal tratto n—1 al tratto n^{mo} si incontra una lastra di più, si avrà:

$$i_{n-1} = i_n - 1.$$

Se invece nel tratto n^{mo} si ha una lastra di meno, allora si potrà scrivere

$$i_{n-1} = i_n + 1$$

facendo l'una e poi l'altra di queste due sostituzioni nella espressione ora trovata di C'_{n-1}, si avrà l'equazione determinatrice delle costanti successive C'_n ridotta alla espressione unica

$$C'_{n-1} = C'_n \frac{4}{E b h^3 e} \left(A x_{n-1,\,n} + \frac{1}{2} B x^2_{n-1,\,n} - \frac{1}{6} p x^3_{n-1,\,n}\right) \frac{1}{i_n (i_n \mp 1)} \quad (5)$$

ma colla avvertenza che nel determinare le costanti dei tratti successivi di una travata debbasi adoperare il segno — quando procedendo verso il punto d'origine il numero delle lastre diminuisce, ed il segno + quando procedendo nel medesimo verso il numero delle lastre aumenta.

Di tutte queste costanti sarà la prima a conoscersi quella che corrisponde all'ordinata massima della parabola

$$\mu = A + B x - \frac{1}{2} p x^2$$

ossia all'ascissa

$$x_o = \frac{B}{p}$$

per la quale ascissa avendosi

$$\left(\frac{d y}{d x}\right)_o = 0$$

si troverà immediatamente colla equazione (4)

$$C'_o = - \frac{4}{E b h^3 e} \frac{1}{i_o} \left(\frac{A B}{p} + \frac{B^3}{3 p^2}\right). \quad (6)$$

Integrando l'equazione (4) si avrà l'equazione finita della curva clastica

$$y_n = \frac{4}{E b h^3 e} \frac{1}{i_n}\left(\frac{1}{2} A x^2_n + \frac{1}{6} B x^3_n - \frac{1}{24} p x^4_n\right) + C'_n x_n + C''_n \qquad (7)$$

Per $x_n = o$ avendosi $y_n = o$ ne risulta :

$$C''_1 = o.$$

Ma restano pur sempre da determinarsi tutte le altre costanti C''. Osservisi perciò che potrebbesi scrivere un'altra equazione analoga alla (7) col solo cambiamento dell'indice n in $n-1$; e che poi per quell'ascissa speciale della travata determinata dalla sezione comune ai due tratti di ordine $n-1$ ed n^{mo} si dovrà avere :

$$y_n = y_{n-1}$$

cosicché eguagliando i due secondi membri e poi ricavando C'' si trova:

$$\left.\begin{aligned} C''_n = C''_{n-1} + (C'_{n-1} - C'_n)\, x_{n-1,n} \\ - \frac{4}{E b h^3 e}\left(\frac{1}{2} A x^2_{n-1,n} + \frac{1}{6} B x^3_{n-1,n}\right. \\ \left. - \frac{1}{24} p x^4_{n-1,n}\right) \frac{1}{i_n (i_n \mp 1)} \end{aligned}\right\}$$

valendo per l'uso del segno positivo o negativo nel fattore dell'ultimo termine la stessa convenzione che già si è fatta più sopra per le costanti C' in proposito della espressione (5).

Combinando finalmente questa espressione (5) con quella ora trovata, vi sarà modo di eliminare le due costanti C'_n e C'_{n-1}, e si otterrà :

$$C''_n = C''_{n-1} - \frac{4}{E b h^3 e} \frac{1}{i_n (i_n \mp 1)} \left\{ \frac{3}{2} A x^2_{n-1,n} + \frac{2}{3} B x^3_{n-1,n} - \frac{5}{24} p x^4_{n-1,n} \right\}$$

Avendosi $G''_1 = o$, e simboleggiando con Σ la somma algebrica di tanti termini analoghi a quello genericamente segnato coll'indice n, i quali termini si otterranno col sostituire invece di n successivamente tutti i numeri a partire da $n = 2$ sino ad n si potrà scrivere senz'altro il valore generico della costante

$$C''_n = -\frac{4}{E b h^3 e} \sum_2^n \frac{1}{i_n (i_n \mp 1)} \left\{ \frac{3}{2} A x^2_{n-1,n} + \frac{2}{3} B x^3_{n-1,n} - \frac{5}{24} p x^4_{n-1,n} \right\} \qquad (8)$$

Per avere ad esempio il valore della saetta della curva elastica corrispondente alla ordinata massima della parabola dei momenti inflettenti, basterà che nell'equazione (7) si faccia

$$x_n = x_s = \frac{B}{p} \qquad y_n = f \qquad \text{ed} \qquad n = s$$

e servendosi allora della espressione (6) per il valore di C'_s, e della espressione (8) ora trovata per dedurre il valore di C''_s, si troverà, riducendo, l'espressione seguente della saetta cercata (astrazione fatta dal segno negativo, poiché fu preso l'asse delle y positive rivolto all'insù).

$$f = \frac{4}{E b h^3 e} \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{i_s}\left(\frac{1}{2}\frac{A B^2}{p^2} + \frac{5}{24}\frac{B^4}{p^3}\right) \\ + \sum_2^s \frac{1}{i_n (i_n \mp 1)} \left(\frac{3}{2} A x^2_{n-1,n} + \frac{2}{3} B x^3_{n-1,n}\right. \\ \left. - \frac{5}{24} p x^4_{n-1,n}\right) \end{aligned} \right\} \qquad (9)$$

Per avere il valore di questa saetta nell'ipotesi del momento d'inerzia costante, basterà di supporre tutte le ascisse $x_{n-1,n}$ eguali a zero ; ed allora il termine Σ si annulla, e rimarrà soltanto il primo termine.

Ove poi facciasi ancora in questo primo termine:

$$A = o \quad \text{e} \quad B = pa$$

si ricade sulla espressione del num. 9,

$$\frac{5}{6}\,\frac{p\,a^4}{E\,b\,h^3\,c}\,\frac{l}{i_0}$$

che dà il valore della massima saetta d'inflessione di una sola travata a sezione costante.

Torino, 3 giugno 1873.