

# Studio della statica di una speciale trave incernierata agli estremi

*Della trave inflessa incernierata agli estremi e caricata con legge  $p(x)$  in uno dei piani principali si studia con applicazione di serie trigonometriche l'equazione della linea elastica ed il valore della componente assiale delle reazioni vincolari.*

Ci proponiamo in questa breve nota lo studio statico di una trave incernierata agli estremi; vincolata cioè in modo che ai suoi estremi non siano consentiti spostamenti di sorta pur essendo permesse rotazioni. Per semplicità consideriamo la sezione costante ed il carico in uno dei piani principali della trave.

Siano  $E, J$  modulo di elasticità e momento di inerzia della trave,  $l$  la sua lunghezza,  $H$  la componente assiale della reazione (positiva in senso traente) delle cerniere,  $x$  l'ascissa corrente,  $y(x)$  la linea elastica,  $p(x)$  il carico corrente.

Avremo come è facile ricavare per la  $y(x)$  la equazione colle condizioni agli estremi:

$$(1) \quad \begin{aligned} EJy^{IV} - Hy'' &= -p(x) \\ y(0) = y(l) = y'(0) = y'(l) &= 0 \end{aligned}$$

Sviluppato  $p(x)$  in serie di seni:

$$p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m \operatorname{sen} m \frac{\pi}{l} x$$

si vede che le (1) sono formalmente soddisfatte da:

$$(2) \quad y(x) = - \sum \frac{p_m}{EJ \frac{m^4 \pi^4}{l^4} + H \frac{m^2 \pi^2}{l^2}} \operatorname{sen} m \frac{\pi}{l} x$$

inoltre, se la serie in cui si è sviluppato  $p(x)$  converge in media quadratica la (2) è effettivamente la soluzione di (1).

Si tratta ora di calcolare la  $H$  che ovvie considerazioni fisiche ci fanno cercare nel campo dei reali positivi.

Se la linea elastica è data da (2) la lunghezza

di tale linea, trascurati i termini di grado superiore al secondo nelle derivate prime, è:

$$1 + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m^2}{\left( EJ \frac{m^3 \pi^3}{l^3} + H \frac{m \pi}{l} \right)^2}$$

il che ci dice che l'allungamento assiale è dato da

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m^2}{\left( EJ \frac{m^3 \pi^3}{l^3} + H \frac{m \pi}{l} \right)^2}$$

ora tale allungamento deve essere accompagnato da una reazione vincolare data da

$$H = \varepsilon EA$$

dove  $A$  è la sezione della trave.

Risulta allora che  $H$  viene fornita dall'equazione

$$(3) \quad H = \frac{1}{4} EA \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p_m^2}{\left( EJ \frac{m^3 \pi^3}{l^3} + H \frac{m \pi}{l} \right)^2}$$

che in campo reale positivo non ha che una sola soluzione.

Per un calcolo numerico è più che sufficiente considerare al posto della (3) l'equazione di 3° grado

$$H = \frac{1}{4} EA \frac{p_1^2}{\left( EJ \frac{\pi^3}{l^3} + H \frac{\pi}{l} \right)^2}$$

che si ottiene trascurando i termini oltre il primo nella serie che compare in (3).

Eugenio Frola

Politecnico di Torino.

a Giuseppe Albenga

## Qualche considerazione sul principio di De Saint-Venant

*I. Esposizione critica dello sviluppo del problema. - II. Proposta di un metodo di studio approssimato delle strutture elastiche complesse pensate come scomposte in più solidi longilinei continuamente collegati fra loro.*

I. - Il principio di De Saint-Venant è nato come giustificazione introduttiva a quella teoria delle travi snelle, di sezione trasversale compatta e costante o solo lentamente variabile lungo un asse rettilineo o a grande raggio di curvatura, che tanta parte ha avuto nello svolgersi della scienza del costruire.

Tuttavia i trattatisti dell'elasticità usano enunciarlo sotto una forma molto generale:

« Secondo questo principio, le deformazioni unitarie prodotte in un corpo dall'applicazione, ad una piccola zona della sua superficie, di un sistema di forze staticamente equivalente ad una risultante nulla e ad un momento nullo sono trascurabili a

distanze grandi rispetto alle dimensioni lineari della zona ».

Così il Love <sup>(1)</sup>, e con lui quasi tutti.

Queste parole non sono troppo precise, e si comprende quindi come negli ultimi decenni si siano avuti alcuni notevoli studi intesi a giungere sia ad una espressione suscettibile di dimostrazione matematica, sia alla dimostrazione stessa.

Ho sottolineato la parola *piccola* perchè dalla sua interpretazione si originano due diversi ordini di ricerche.

<sup>(1)</sup> A. E. H. LOVE, *Theory of Elasticity*, p. 132 (4th edition).

Infatti ci si può proporre di stabilire un teorema-limite che indichi il modo di tendere a zero delle componenti di tensione interna quando si fanno tendere a zero le distanze mutue dei punti d'applicazione delle forze esterne o, alternativamente, si può considerare il problema « in grande » di assegnare dei confini superiori agli errori commessi trascurando certe condizioni al contorno su di un'area piccola ma finita.

Dal primo punto di vista si è posto il von Mises <sup>(2)</sup> e ha rilevato una interessante conseguenza elastostatica delle distinzioni eseguibili tra i siste-

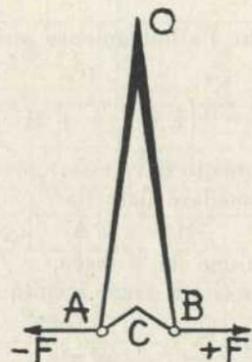


Fig. 1.

mi equilibrati dimostrando che gli sforzi prodotti nell'interno di un corpo semplicemente connesso da forze in equilibrio applicate sulla sua superficie entro una sfera di raggio  $\epsilon$  sono in generale infinitesimi come  $\epsilon$  e lo sono invece almeno come  $\epsilon^2$  se e solo se l'equilibrio delle forze è astatico.

Egli ha poi anche dimostrato falso il ritenere gli sforzi interni prodotti da più sistemi di forze esterne applicati ciascuno entro una sferetta di raggio  $z$  minori, come ordine di grandezza, se i sistemi sono equilibrati ciascuno per conto proprio che se lo sono solo a distanza.

Si può però dissentire dall'Autore citato sull'opportunità di estendere tanto il significato del principio di De Saint-Venant considerando, invece di uno solo, più sistemi di forze applicati su piccole aree... per concludere che il principio è falso!

Per affrontare il problema « in grande », cioè nell'unico modo che possa darci delle indicazioni quantitative nei casi concreti, è necessario, date le ardue difficoltà di calcolo, introdurre delle ipotesi particolari sulle forme geometriche da studiare: altrimenti sarebbe facilissimo trovare esempi in cui due forze opposte applicate a distanza finita, ma assai piccola rispetto, poniamo, alla massima corda inscrittibile nel corpo in esame, producono le massime sollecitazioni nei punti più lontani; così succede infatti nel corpo schematizzato in fig. 1, se AOB è di rigidità flessionale grande rispetto a quella del tratto filiforme ACB.

Lo Zanaboni ha dato la rigorosa dimostrazio-

ne <sup>(3)</sup> del teorema: « il lavoro di deformazione di un corpo elastico in equilibrio diminuisce per aggiunta di materia sulle parti scariche », e ha creduto, poggiandosi su questo, di arrivare ad una prova generale del principio di De Saint-Venant che fosse svincolata da ipotesi geometriche restrittive.

Ma, a parte l'obiezione « a priori » dell'impossibilità di ridurre questioni essenzialmente quantitative in termini invece qualitativi, le note ora ricordate sono, a mio avviso, criticabili perchè sapendo solo (v. fig. 2) che l'energia elastica immagazzinata in  $C_1 + C_2 + C_3$  è minore di quella che si avrebbe in  $C_1 + C_2$ , e questa è a sua volta minore di quella spettante a  $C_1$  isolato, non si può ancora

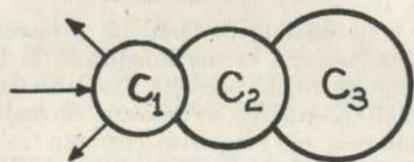


Fig. 2.

in alcun modo dedurre la ripartizione dell'energia fra le tre parti del corpo complessivo  $C_1 + C_2 + C_3$ .

Si tratta invero di tre distinti problemi d'equilibrio elastico e la loro intrinseca difficoltà consiste in questo: passando da uno all'altro, l'energia si ridistribuisce ogni volta in modo diverso.

In particolare, non si può affermare che l'energia diminuisca continuamente in una data parte, p. es.  $C_2$ , di questo corpo in accrescimento, neanche se l'aggiunta di materia avviene tutta a distanze dai punti d'applicazione delle forze maggiori di quelle dei punti di  $C_2$ .

Di questa ridistribuzione dell'energia si possono portare vari esempi; ne scelgo due:

Si abbia (v. fig. 3) una lastra cilindrica circolare completa e indefinita soggetta ad una pressione radiale uniforme lungo una sua sezione trasversale: — è noto che in questa condizione le generatrici della superficie media si deformano come sinusoidi smorzate. Se quindi si immagina di aggiungere, come  $C_2$ , un'aletta anulare in corrispondenza di uno dei cerchi nodali della deformata più vicini al circolo delle pressioni esterne, questa risulterà sensibilmente non sollecitata. Ma se poi, come  $C_3$  si aggiunge un'aletta lungo un circolo non nodale, anche lontano, si produrranno sforzi interni sia in essa che nella precedente ed in entrambe, se sufficientemente sottili in modo da poter funzionare come sensibili indicatrici degli spostamenti del cilindro, le sollecitazioni potranno essere rilevanti.

Oppure, si abbia (v. fig. 4) un'asta sottile AB soggetta a due forze assiali opposte applicate ad un breve tratto centrale A'B'; se l'aggiunta di materia avviene inscrivendo l'asta entro una cornice di rigidità crescente (tratteggiata in disegno) si richiama una compressione in AA', BB' ed eventualmente si può arrivare ad un cedimento per carico di punta!

<sup>(2)</sup> R. v. MISES, *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 51, p. 555 (1945).

<sup>(3)</sup> O. ZANABONI, *Rendiconti Lincei*, vol. 25, p/ 117; vol. 25, p. 595; vol. 26, p. 340 (1937).

La connessione non semplice dei corpi nei due esempi non è essenziale: gli esempi stessi sono in questa forma più facilmente intuibili ma l'aggiunta di membrane esilissime, analoghe al tratto filiforme di fig. 1, potrebbe farsi senza modificarne il significato.

Naturalmente con l'osservazione sulla stabilità si esce un po' dall'ambito consueto della teoria classica dell'elasticità ma, almeno per chi pensi che questa debba perfezionarsi fino a comprendere in un assetto logicamente unitario quella dei cosiddetti sistemi sottili, è stato forse non inutile aver notato la complessità fisica della questione dell'effetto degli accrescimenti di materia.

Credo che le cose dette siano sufficienti a porre in guardia contro l'ingannevole generalità di certi enunciati.

Il quadro dello stato attuale del problema deve però essere completato ricordando che fin dal 1931 il Supino <sup>(4)</sup> ha ottenuto un risultato esatto, e fondamentale, per il principio di De Saint-Venant « in grande » in quanto ha assegnato delle limitazioni quantitative per gli sforzi e gli spostamenti nell'interno di un corpo elastico piano ed a contorno convesso.

Per avere una misura della difficoltà analitica della questione, basta riflettere un poco da un lato sul carattere già elevato dei calcoli mediante i quali è stato raggiunto il risultato ora accennato e, d'altro lato, sulla natura praticamente assai restrittiva dell'ipotesi di contorno convesso: essa esclude proprio quei contorni frastagliati per i quali siamo più frequentemente indotti a dubitare della applicabilità delle solite formule approssimate e desidereremo sapere qualcosa di più preciso.

II. - Si comprende così l'interesse, anche applicativo, di pervenire ad una valutazione approssimata, e tuttavia abbastanza attendibile, dell'entità degli errori fatti colle formule usuali, e questo è lo scopo della presente nota.

Il punto di vista da cui mi porrò è il seguente:

« Ammessi trascurabili gli errori fatti applicando le formule della teoria semplificata delle travi ad elementi sufficientemente snelli e longilinei, si può impostare lo studio degli altri corpi considerandoli scomposti in due o più di tali solidi del De Saint-Venant uniti in modo continuo dalle azioni mutue scambiate, da calcolarsi come funzioni iperstatiche incognite secondo i soliti metodi ».

Quest'idea di assumere come elemento generatore dello spazio elastico un solido di De Saint-Venant rende possibile, caso per caso e in modo ancora abbastanza semplice, il calcolo della minima distanza  $\lambda = \lambda(\eta)$  dai punti di applicazione delle forze esterne al di là della quale una data grandezza elastica (densità d'energia o componenti di tensione o di deformazione) risulti minore di  $\eta$  in ogni direzione.

La precisione dei calcoli dipenderà dal tipo e dal numero dei solidi elementari assunti e al limite, cioè per solidi infinitamente snelli e numerosi, po-

<sup>(4)</sup> G. SUPINO, *Annali di Matematica pura ed applicata*; ser. IV, to. IX, p. 91 (1931).

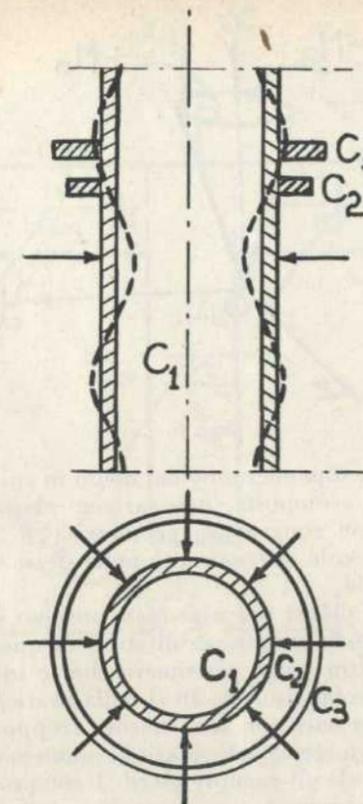


Fig. 3.

trebbe divenire grandissima, eventualmente conducendo ad una « dimostrazione del principio di De Saint-Venant » (nel senso di « determinazione della  $\lambda(\eta)$  ») sotto condizioni meno restrittive di quelle studiate dal Supino.

Qui mi limiterò a scomposizioni in due o tre parti.

Per esemplificare dico subito che ho in mente soprattutto lo studio di quelle varie forme di travi a T, I, Z, L, U sovente non abbastanza lunghe per essere tranquillamente trattate come sezioni che si mantengano piane durante la deformazione e che invece potrebbero utilmente pensarsi costituite da vari rettangoli, o comunque da più parti ciascuna calcolabile come trave.

Aggiungo anche che, in termini rigorosi, l'idea esposta è senz'altro criticabile: infatti le soluzioni

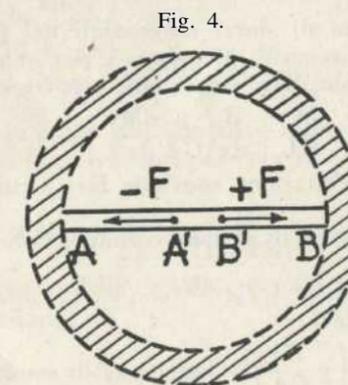


Fig. 4.

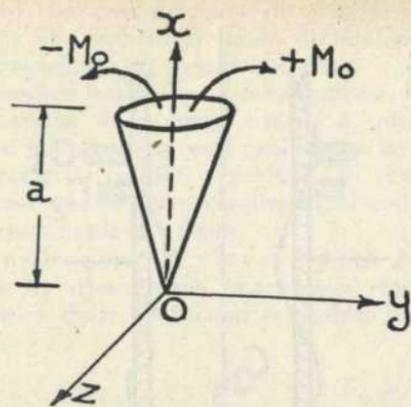


Fig. 5.

così ottenute dipenderanno dal modo in cui la struttura è stata scomposta, non saranno elasticamente corrette come congruenza geometrica e neppure esenti da piccole discontinuità nelle stesse sollecitazioni unitarie.

Ma, se i difetti ora accennati possono spiegare, storicamente, la mancanza di studi di questo tipo, è lecito d'altra parte presumere che le inesattezze a cui conducono risultino lievi nella pratica mentre i calcoli necessari non sono ancora troppo complicati e la loro stessa impostazione aiuta a raffinare il nostro modo di comprendere il comportamento fisico delle strutture.

Un caso elementare che si presta all'applicazione del metodo proposto è quello di un corpo, libero da vincoli, con un asse  $x$  ed un piano  $xy$  di simmetria e sollecitato in questo da due coppie opposte di intensità  $M_0$  su ciascuna metà di una sezione trasversale (v. fig. 5).

Per calcolare la legge d'estinzione di questi sforzi equilibrati, supporrò valide le solite espressioni approssimate del lavoro di deformazione  $\Phi$  per ciascuna metà del corpo considerata a sè.

Indicando quindi con  $J = J(x)$   $A = A(x)$   $\chi = \chi(x)$  rispettivamente il momento di inerzia baricentrico, l'area ed il fattore di taglio di una delle due metà simmetriche rispetto al piano  $xz$ , si ha per l'intero corpo:

$$\Phi = \int_0^a \left[ \frac{M^2}{EJ} + \frac{\chi}{GA} \left( \frac{dM}{dx} \right)^2 \right] dx$$

dove l'uso della nota, formula  $T = \frac{dM}{dx}$  è legittimo data l'assenza di sforzi tangenziali nel piano  $xz$ .

Per il teorema di Menabrea e per una nota regola di calcolo delle variazioni, occorre che:

$$(1) \quad \frac{M}{EJ} = \frac{d}{dx} \left( \frac{\chi}{GA} \frac{dM}{dx} \right)$$

e di questa equazione conviene fare alcune applicazioni.

1) Nel caso di sezione costante, si ha la soluzione:

$$M = c_1 e^{x/k} + c_2 e^{-x/k} \quad \text{con } c_1, c_2 \text{ costanti arbitrarie e:}$$

$$(2) \quad k = \left( \frac{EJ}{GA} \right)^{\frac{1}{2}} = \text{lunghezza di smorzamento.}$$

In particolare, per un prisma a sezione rettangola di spessore totale  $h$  (parallelamente ad  $y$ ) avendosi  $\chi = 6/5$ ,  $E/G = 5/2$  risulta:  $k = h/4$  e se la lunghezza  $a$  del prisma è appena qualche volta maggiore di  $h$ , si ha sensibilmente:

$$M = M_0 e^{-4x/h}$$

Questa formula permette di dimostrare la cosiddetta « legge di ripartizione a 45° » dato che, supponendo  $M_0$  dovuto ad una forza concentrata sull'asse del prisma, l'eccentricità rispetto all'asse del mezzo prisma risulta appunto:

$$B = \frac{h}{4} e^{-4x/h}$$

e così, in quest'ultimo la funicolare del carico assiale e delle forze applicategli dall'altro mezzo prisma nasce con inclinazione  $\left( \frac{dB}{dx} \right)_{x=0} = -1$ .

Per qualunque forma costruttiva di sezione costante lo smorzamento è quindi tortissimo e solo per fattori di taglio praticamente già elevati ( $\chi = 3/4$ )  $k$  può eguagliare la dimensione trasversale  $d$ .

Dalla (2) si vede poi che per avere valori alti di  $k/d$  occorrerebbe accrescere  $\chi$  come  $(k/d)^2$ , cosa che è impossibile se ci si limita a contorni convessi della sezione trasversale ma è facile per esempio con forme a  $I$  ad anima sottilissima.

Inoltre si può osservare che nel legno, in cui  $E/G$  è notevolmente maggiore che nei corpi isotropi, le lunghezze  $k$  saranno sempre alquanto superiori.

2) Nel caso di un cono a sezione qualsiasi, con il vertice nell'origine, di asse  $x$  e semi-angolo d'apertura  $\varphi$  nel piano  $xy$ , si ha:

$$J = jx^4 \quad A = ax^2 \quad \text{con } j, a, \chi \text{ costanti, e posto:}$$

$$u = \frac{\alpha G}{\chi j E} \quad \text{si ricava la soluzione:}$$

$$(3) \quad M = c_1 x^m + c_2 x^n \quad \text{ove:} \quad m = \frac{3}{2} + \left( u + \frac{9}{4} \right)^{\frac{1}{2}} \quad n = \frac{3}{2} - \left( u + \frac{9}{4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Dal punto di vista fisico bisogna naturalmente supporre  $\tan \varphi$  abbastanza piccola, p. es. in pratica minore di  $1/5$ , anche per poter trascurare il lavoro di deformazione assiale delle due parti. Se si ha un cono completo  $c_2 = 0$ ; così, in questo caso:

$$M = M_0 (x/a)^m$$

Gli sforzi variano come la potenza  $p = m - 3$  e la loro legge d'estinzione è ben meno forte che nel caso precedente.

Per  $\tan \varphi = 1/5$ , per la sezione rettangolare piena, si trova:  $u = 100$ ;  $p \cong 8,6$  — il che significa che per  $x/a = 0,8$  le tensioni interne avrebbero circa il 15 % del loro valore superficiale.

Con sezioni cave o articolate si trovano esponenti minori; per una piramide cava di contorno quadrato e pareti sottili  $p \cong 5,6$ ; per una sezione a  $I$  con ali ed anima sottili ed uguali fra loro  $p \cong 5$ .

3) Come curiosità, ci si può proporre di calcolare la forma da assegnare alla curva meridiana

$y = y(x)$  di un solido di rotazione perchè dalla equazione (1) risulti  $M(x)$  proporzionale ad  $y^3$  e quindi restino sensibilmente costanti le tensioni interne, calcolate dividendo  $M$  per il modulo di resistenza.

Posto ancora:  $J = j \cdot y^4$   $A = a \cdot y^2$  e definito  $u$  come dalla (3), si ricava per sostituzione nella (1):

$$(4) \quad u = 3y \frac{d^2 y}{dx^2}$$

L'integrale di questa equazione porge:

$$x = \left( \frac{3}{2u} \right)^{\frac{1}{2}} \int \left( \log \frac{y}{c_1} \right)^{-\frac{1}{2}} dy + c_2$$

ma si vede ancor meglio dalla (4) stessa che si tratta di una curva allontanantesi tanto rapidamente dall'asse  $x$  da non potersi più affatto applicare al volume da essa generato l'ipotesi di scomponibilità in due solidi abbastanza snelli.

Con questi esempi si è quindi chiarito come, se le formule usuali danno luogo ad errori che si possano ammettere trascurabili per solidi di una certa snellezza, gli errori commessi applicandole a solidi di snellezza metà siano nei casi pratici generalmente ancora limitati.

Ciò illustra il significato del principio di De Saint-Venant nel senso in cui esso viene comunemente inteso ed applicato e, in questo senso, dimostra che la sua validità è strettamente legata, anzi logicamente equivalente, all'ipotesi di piccolezza del lavoro di deformazione per taglio rispetto a quello per flessione.

La ricerca di un caso eccezionale in cui non si verificasse quell'estinzione rapida degli sforzi equilibrati su di una piccola zona che avviene sempre per le forme costruttive normali ci ha, come doveva, automaticamente portati al di fuori del campo di ragionevole applicabilità della nostra ipotesi.

Termino con un caso di interesse costruttivo: la trave a T, di luce  $L$ , soggetta ad un carico uniforme d'intensità  $p$ , pensata come scomposta nella costola e nelle due mezze ali.

Con le notazioni della fig. 6, supposta l'origine degli assi in mezzera ed indicando con

$$\mu(x) = p(L^2 - 4x^2)/8$$

il momento flettente dovuto ai carichi, il calcolo procede così:

Si assumono come funzioni iperstatiche incognite il momento  $M(x)$  che flette una mezza ala nel piano orizzontale e lo sforzo normale  $N(x)$  nel baricentro  $G_1$  della stessa.

Così si trascura la flessione propria dell'ala, e quindi anche il suo taglio nel piano verticale:

$$M_{y1} \cong 0; \quad T_{x1} \cong 0.$$

Invece quello orizzontale si determina osservando che — nella nostra ipotesi di ala sottile — la risultante  $N(x)$  degli sforzi orizzontali applicati alla mezza ala giace sensibilmente nel piano che la separa dalla costola; quindi il momento da cui deriva  $T_{y1}$  è:  $M - Nb/2$  ossia:

$$T_{y1} = \frac{d}{dx} (M - Nb/2).$$

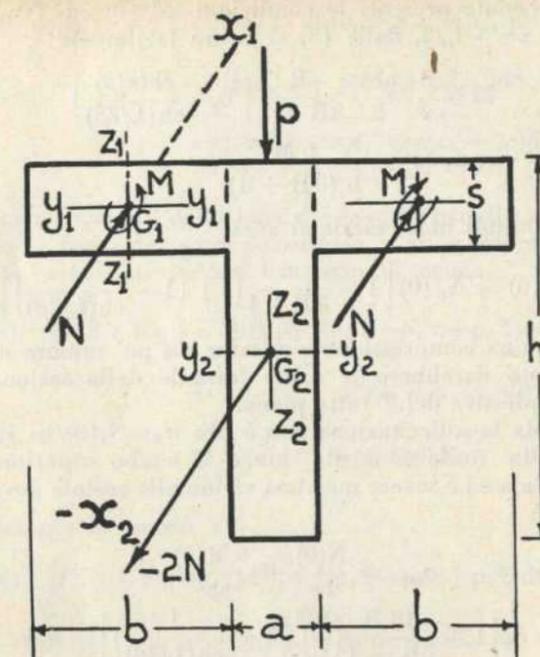


Fig. 6.

La costola è a sua volta soggetta a:

$$N_{x2} = -2N \quad T_{x2} \cong \frac{d\mu}{dx} \quad M_{y2} = \mu - N(h-s)$$

mentre per la simmetria sono mille le altre tre caratteristiche di sollecitazione.

Si ha allora:

$$\Phi = \frac{1}{E} \int_0^L \left\{ \frac{12 M^2}{sb^3} + N^2 \left( \frac{1}{bs} + \frac{2}{ah} \right) + \frac{6}{ah^3} [\mu - N(h-s)]^2 + 2\chi(1+\nu) \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{M - Nb}{2} \right)^2 + \frac{[d\mu]^2}{2ah} \right\} \right\} dx$$

dove, al solito,  $\nu$  è il coefficiente di Poisson.

Per una sezione rettangolare si può prendere  $2\chi(1+\nu) = 3$  e scrivere le equazioni variazionali:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{4M}{b^2} - M'' + \frac{b}{2} N'' = 0 \\ N \left( \frac{2}{bs} + \frac{4}{ah} \right) - \frac{3}{s} \left( \frac{b}{2} N'' - M'' \right) + \frac{12(h-s)}{ah^3} [N(h-s) - \mu] = 0 \end{cases}$$

Dato lo scopo più che altro indicativo del presente calcolo, si trascura per brevità  $s$  rispetto ad  $h$ , ponendo:

$$\frac{bs}{ah} = R; \quad N_0(x) = \frac{6\mu(x)}{h} \cdot \frac{R}{(1+8R)} = \text{valore di } N(x)$$

nelle ipotesi della teoria semplificata ordinaria della flessione;

$$\beta^2 = \frac{b^2}{4} \left( 1 + \frac{3}{1+8R} \right).$$

Tenute presenti le condizioni  $M=0$  ed  $N=0$  per  $x = \pm L/2$ , dalle (5) si ricava facilmente:

$$M = \frac{3}{4} \cdot \frac{pb^3}{h} \cdot \frac{R}{8R+1} \left( 1 - \frac{\text{ch}(x/\beta)}{\text{ch}(L/2\beta)} \right)$$

$$N = N_0 - \frac{6M}{b(8R+1)}$$

Quindi in mezzeria si avrà:

$$N(0) = N_0(0) \left[ 1 - \frac{6}{8R+1} \left( \frac{b}{L} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{\text{ch}(L/2\beta)} \right) \right]$$

cioè una compressione risultante un po' minore di quanto darebbero le solite formule della sezione complessiva del T tutta piana.

Ma la sollecitazione non è più  $\sigma_0 = N_0(0)/bs$  ripartita uniformemente lungo il lembo superiore dell'ala ed è invece massima vicino alla costola dove vale:

$$\sigma_{\max} = \frac{N(0)}{bs} + \frac{6M(0)}{sb^2} = \sigma_0 \left[ 1 + \frac{48R}{8R+1} \left( \frac{b}{L} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{\text{ch}(L/2\beta)} \right) \right] = \sigma_0 \varphi$$

ed è quindi sempre maggiore di  $\sigma_0$ .

In pratica,  $L$  è molto maggiore di  $\beta$  e si può trascurare il termine iperbolico.

Il fattore  $\varphi$ , che si ritrova uguale considerando la costola invece della mezza ala, dà — per  $R=1$ ,  $\frac{b}{L} = \frac{1}{7}$  — un aumento di  $\sigma_{\max}$  rispetto a  $\sigma_0$  dell'11 % circa e darebbe il 30 % nel caso di trave perfettamente incastrata, per cui occorre sostituire ad  $L$  la distanza  $L/\sqrt{3}$  tra i punti di momento nullo.

Agli estremi dell'ala si ottiene per la sollecitazione minima:

$$\sigma_{\min} = \sigma_0 \left[ 1 - \frac{48R+12}{8R+1} \left( \frac{b}{L} \right)^2 \left( 1 - \frac{1}{\text{ch}(L/2\beta)} \right) \right] = \sigma_0 \psi$$

e siccome l'annullarsi di questa fornisce evidentemente un limite per eccesso alla applicabilità delle formule ora ricavate, si potrebbe determinare la larghezza efficace  $2b$  massima per l'intera ala, trovando per la trave incastrata:

$$(6) \quad (2b)_{\text{eff}} \cong 0,26 L$$

Questo corrisponde certo ad una esagerata estrapolazione dell'ipotesi di « ala snella » ed è quindi abbastanza notevole che sia ancora limitato l'errore rispetto a quanto si deduce nella teoria esatta dell'ala indefinita dovuta al von Karman <sup>(5)</sup>.

Il segno dell'errore poteva prevedersi: esso è sostanzialmente dovuto all'aver supposto che i carichi orizzontali applicati alla mezza ala ne influenzassero *immediatamente tutta* la sezione, e se nella (6) si sostituisse  $L - (2b)_{\text{eff}}$  ad  $L$  si troverebbe sensibilmente il risultato esatto.

Così si può definire la trave a T « nel senso ordinario » come quella per cui i fattori  $\varphi$ ,  $\psi$  si discostano poco dall'unità, e da questa seconda approssimazione si vede la fortunatamente larga applicabilità delle nostre solite formule di prima approssimazione derivate dal principio di De Saint-Venant.

Tuttavia in altri casi di calcolo, ancora elementare ma più laborioso, che si potrebbero fare per esempio studiando la flessione deviata e mettendo in conto le rigidità torsionali delle varie parti, risulterebbero fattori correttivi notevolmente maggiori e tali quindi da giustificare bene il ricorso al metodo qui proposto.

Livio Norzi

<sup>(5)</sup> TH. v. KARMAN, *Festschrift August Föppl's*, p. 114 (1923).

a Giuseppe Albenga

## Sopra i teoremi di reciprocità della Scienza delle Costruzioni

Mediante il teorema dei lavori virtuali si deducono elementarmente i principi di reciprocità del Betti e del Colonnelli. Si delinea anche storicamente il problema ponendolo in relazione con analoghi problemi dell'elettrotecnica, dell'idraulica e della termotecnica.

1. - È notissimo per la fecondità delle applicazioni il teorema di reciprocità fra forze e spostamenti elastici che Enrico BETTI diede nel 1872 <sup>(1)</sup>, in sostanza trasportando nel campo energetico il teorema elementare del quadrato della somma di due numeri, esteso poi da Luigi DONATI nel 1899 alle reti di conduttori elettrici <sup>(2)</sup>, poi da Umberto PUPPINI nel 1911 allo studio delle falde artesiane <sup>(3)</sup> e nel 1916 al movimento del calore <sup>(4)</sup> e in-

fine da Marcello LELLI nel 1923 alle falde freatiche <sup>(5)</sup>.

Notissimo è pure ormai il cosiddetto *teorema di Land* o principio di reciprocità fra sollecitazioni e spostamenti che, esposto nel 1887 da Roberto LAND per la trave continua <sup>(6)</sup> e dimostrato in generale da Giuseppe ALBENGA <sup>(7)</sup>, che per primo ne fece poi sistematica applicazione allo studio delle linee d'influenza, apparve in seguito come caso particolare

<sup>(1)</sup> E. BETTI, *Teoria dell'elasticità*, Nuovo Cimento, 1872.

<sup>(2)</sup> L. DONATI, *Relazione generale fra le correnti in una rete di fili conduttori*, Rendiconti delle Sessioni della R. Accademia dell'Istituto di Bologna, 1899-1900.

<sup>(3)</sup> U. PUPPINI, *Principio di reciprocità nei moti regolari dell'acqua*, Il Monitore Tecnico, 1911.

<sup>(4)</sup> U. PUPPINI, *Principio di reciprocità fra temperature e flussi di calore*, Il Monitore Tecnico, 1916.

<sup>(5)</sup> M. LELLI, *Il principio di reciprocità per le falde freatiche*, Il Monitore Tecnico, 1923.

<sup>(6)</sup> R. LAND, *Die Gegenseitigkeit elastischer Formänderung als Grundlage einer allgemeinen Darstellung der Einflusslinien aller Trägerarten*, Wochenblatt für Baukunde, 1887.

<sup>(7)</sup> G. ALBENGA, *Sul teorema di reciprocità di Land*, Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, 1915.