

sancite dalla « IX Conférence Générale des Poids et Mesures » (7).

L'adozione del watt (ed ovviamente dei suoi multipli e sottomultipli secondo potenze intere di 10) quale unità universale di potenza, in qualunque forma essa si manifesti, si va sempre più esten-

(7) Qualche Autore osserva che il termine « caloria » potrebbe essere sostituito da quello più proprio di « calore specifico dell'acqua ». Aggiungo, a questo proposito che in unità coerenti torna praticamente uguale all'unità il calore specifico a pressione costante dell'aria nelle condizioni ordinarie. Difatti si ha:

$$c_p = 1,004 \text{ joule/gr. } ^\circ\text{C.}$$

(8) $1 \text{ kcal/h} = (1000/860) \text{ watt} = 1,163 \text{ watt}$, quindi: $1 \text{ kcal} = 1,163 \text{ Wh}$. Risulta pertanto facile la conversione dei vari coefficienti che si incontrano nella termotecnica. Ad esempio i coefficienti di conduzione termica si esprimeranno in $\text{W/m. } ^\circ\text{C}$ ed i coefficienti di trasmissione del calore in $\text{W/m}^2, ^\circ\text{C}$. In termodinamica le energie specifiche si potranno esprimere in Wh/kg ; le entropie specifiche in $\text{Wh/kg. } ^\circ\text{C}$, ecc. Nella conversione da unità britanniche è utile ricordare che 1 kW equivale a $0,948 \text{ BTU/sec}$. Si tenga inoltre presente che $1 \text{ kW} = 102 \text{ kgm/sec}$.

dendo sia nei Laboratori scientifici sia nelle applicazioni pratiche, ed è opportuno contribuire a dare a tale adozione la maggior diffusione possibile. I bilanci energetici e la conseguente espressione dei rendimenti e dei fattori di efficienza, come pure la loro traduzione in risultati numerici divengono più semplici e più accessibili, poiché le trasformazioni di energie in atto negli impianti e negli apparecchi è resa più evidente.

L'impiego temporaneo di due notazioni parallele (ad esempio kcal/ora e watt) (8) sia sui diagrammi sia sulle macchine e sugli apparecchi, consentirà in quei campi nei quali vige ancora l'abitudine dell'impiego delle vecchie unità un passaggio graduale di cui non si tarderà ad apprezzare i benefici.

È da auspicare che anche le Associazioni tecniche italiane, seguendo l'esempio degli organismi internazionali sopra citati, contribuiscano in modo efficace a tale utile movimento di unificazione.

Cesare Codegone

La trave Vierendel Proposta di calcolo semplificato

L'Autore propone la risoluzione della trave Vierendel col metodo delle linee d'influenza delle sollecitazioni nelle sezioni che interessano; evita le notevoli complicazioni del calcolo esatto limitando il calcolo delle deformate ai soli elementi isolati dalla sezione oggetto della ricerca.

Il professionista, di solito assillato dall'urgenza del lavoro, è soggetto alla tirannia del tempo e, nei casi comuni, deve rinunciare al procedimento di calcolo esatto quando questo si presenta lungo e complicato.

Ad esempio, una delle ragioni per cui la trave Vierendel è spesso bandita dalle comuni costruzioni sta appunto nella complicazione del calcolo esatto, quando questo esige un impiego di tempo non compensato dall'entità del lavoro che il calcolatore deve compiere.

I metodi approssimati del Takabeia e dell'Engesser presuppongono delle limitazioni che non sempre si possono adattare alle esigenze del progetto senza pregiudizio della speditezza del calcolo; perciò propongo qui ai colleghi ingegneri un calcolo semplificato che si può indifferentemente applicare a travi Vierendel con elementi di sezione e di lunghezza comunque variabili e sollecitate da forze comunque applicate con direzioni arbitrarie.

Il calcolo si basa su complessi di tre diagrammi d'influenza delle sollecitazioni: momento flettente, sforzo di taglio e sforzo normale, per ciascuna sezione presa in considerazione.

Il tracciamento delle su dette terne di linee d'influenza, come si sa, è indipendente dalle forze applicate quindi serve alla risoluzione del problema qualunque sia l'ipotesi di carico che si possa presentare.

Come è noto, tagliato l'elemento preso in considerazione nella sezione S , immediatamente a destra del nodo che interessa e supposte applicate alle

faccie del taglio le sollecitazioni che agiscono su di esse cioè il momento flettente M , lo sforzo di taglio T e lo sforzo normale N incogniti e provocati gli spostamenti relativi delle due facce mediante una doppia V (costituita da due forze eguali e contrarie agenti sulla stessa retta d'azione) comunque applicata alle facce del taglio S , si otterrà una rotazione attorno al baricentro di S ed una traslazione relativa delle facce stesse: siano m/u la tangente dell'angolo di rotazione, d la traslazione, t ed n le componenti di d secondo la tangente e la normale alle facce del taglio.

La doppia V sposterà inoltre tutti i punti della trave e questi spostamenti non sono ostacolati dalla presenza dei vincoli perché si eseguisce l'operazione supponendo la Vierendel semplicemente appoggiata in A ed incernierata in B e quindi libera di muoversi e di deformarsi.

L'unica limitazione imposta dai vincoli è l'invariabilità della direzione della retta AB e l'immobilità di B .

Se si costruisce il diagramma degli spostamenti tenendo fissi altri due punti, ad esempio H e K , tenendo conto dello spostamento relativo, si devono assumere come rette basi dei diagrammi, le A_1B_1 per il corrente superiore e A_2B_2 per il corrente inferiore, come appare nella figura 1. Partendo da queste rette si misurano le componenti verticali y degli spostamenti dei punti di applicazione delle forze; le componenti orizzontali x degli spostamenti si misurano a partire dai montanti, come appare chiaro nella figura 1.

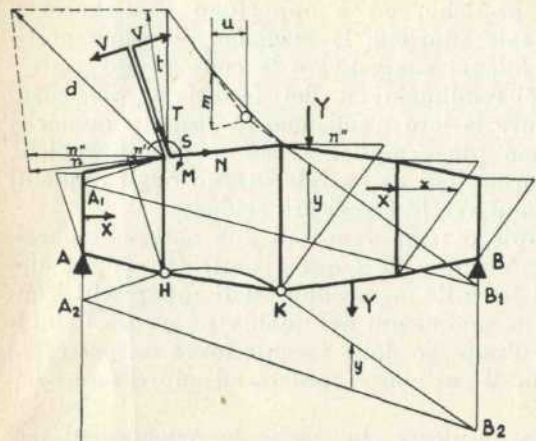


Fig. 1

$$\begin{aligned} m/u.M + tT + nN &= \Sigma Yy + \Sigma Xx \\ m'/u.M + t'T + n'N &= \Sigma Yy' + \Sigma Xx' \\ m''/u.M + t''T + n''N &= \Sigma Yy'' + \Sigma Xx'' \end{aligned}$$

Questo calcolo, se applicato in modo esatto, presenterebbe notevoli complicazioni e difficoltà che è mio proposito di evitare qui, ma poichè il peso elastico dei tratti di trave Vierendel non tagliati è molto piccolo in confronto del peso elastico dei suoi singoli elementi (da 1/50 ad 1/200) suppongo che i tratti di trave non tagliata siano perfettamente rigidi con che il calcolo viene semplificato in modo notevolissimo pur fornendo dei risultati pienamente accettabili.

Si osservi che nella figura 1 i tratti HA_2 e KB_2 sono appunto delle rette e non delle curve come dovrebbero essere; ma la media dei valori degli spostamenti virtuali così ottenuti differisce di pochissimo dalla media dei valori esatti.

Prima di presentare qualche esempio di calcolo per meglio illustrare ciò che ho esposto dianzi, credo opportuno di riportare gli elementi-base del calcolo grafico che serve alla costruzione dei diagrammi risolutivi degli spostamenti virtuali su accennati (vedi: Rivista « L'Industria », Vol. LI, 1937, n. 3 - B. ZUNINI).

Data una trave di lunghezza l incastrata in A e sollecitata in B da una coppia $C=1.l$, dette a e b le distanze del baricentro elastico G da A e da B , e W il peso elastico: la rotazione dell'estremo B avviene attorno a G e la sua grandezza è

$$\varphi = W.C = u/r$$

dove le lunghezze u ed r sono prese ad arbitrio, trattandosi di rotazioni virtuali.

Se la trave è di sezione costante $a=b$ e posto $r=l/6$ si ha

$$\varphi = W.C = 6u/l$$

dove u è arbitrario.

Se la trave è sollecitata all'estremo B da una forza $F=1$ la rotazione attorno all'antipolo B' di F è

$$\varphi_1 = FbW = u/r'$$

dove $r'/r = l/b$.

Se la trave è di sezione costante il centro B' di rotazione si trova a due terzi di l da B , ed essendo $b=l/2$, si ha $r'/r=2$ e quindi la rotazione è

$$\varphi_1 = lW/2 = 3u/l$$

Se la trave è appoggiata agli estremi e sollecitata all'estremo A da una coppia C la rotazione dell'estremo B rispetto all'estremo A avviene attorno al punto B' antipolo della reazione in B e la sua grandezza è evidentemente uguale a quella del caso precedente.

Se la trave è sollecitata in A ed in B da due coppie C_1 e C_2 la costruzione della rotazione relativa di A rispetto a B si ottiene evidentemente

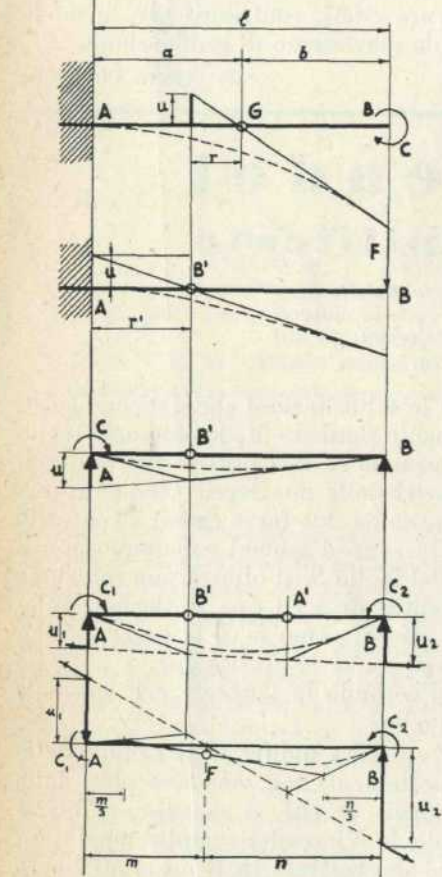


Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

Supposto ora di applicare successivamente alle faccie del taglio S altre due doppie virtuali V' e V'' , siano:

$$m'/u, t', n', y', x' \text{ e } m''/u, t'', n'', y'', x''$$

gli analoghi spostamenti dovuti alle due doppie.

Chiamiamo X ed Y le componenti orizzontale e verticale delle forze applicate F .

Per il Principio dei lavori virtuali potremo subito scrivere la terna di equazioni da cui si possono ricavare i valori delle tre sollecitazioni incognite agenti sulle faccie della sezione presa in esame:

Fig. 6

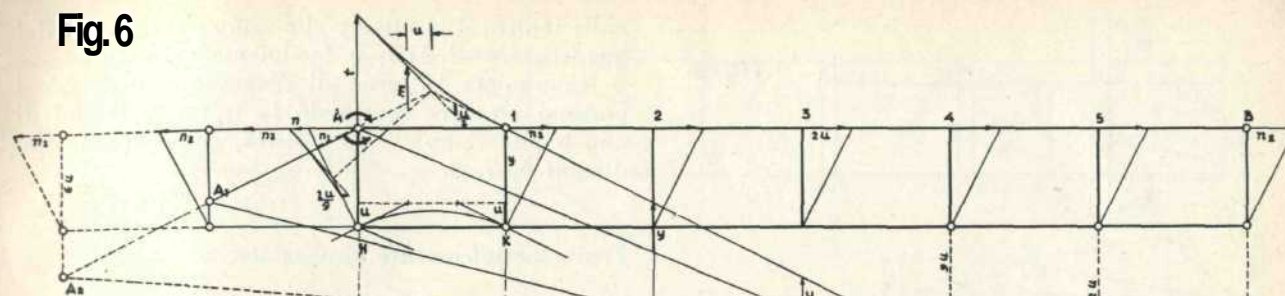


Fig. 7

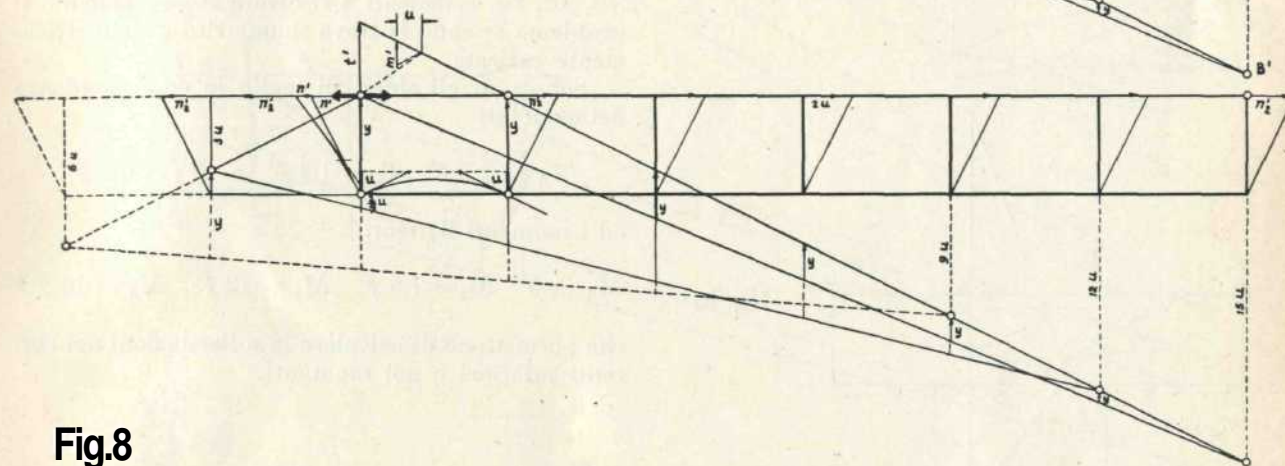
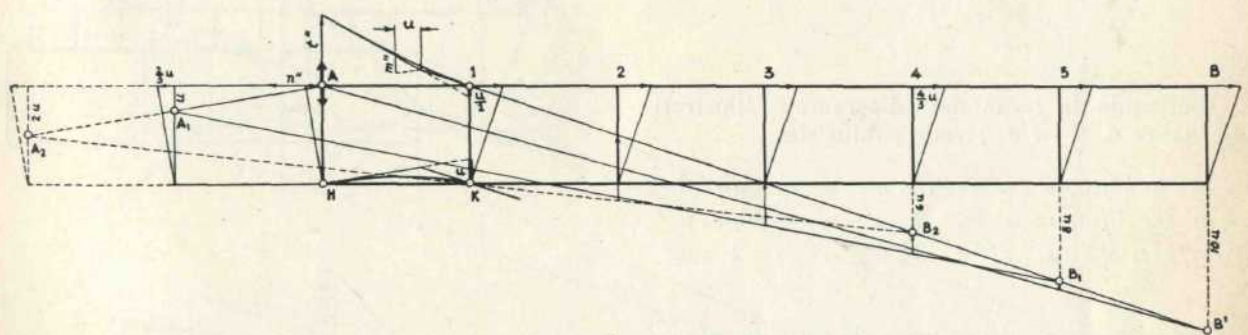


Fig. 8



dal caso precedente sovrapponendo gli effetti delle due coppie. Osserviamo che

$$C_1/C_2 = u_1 r''/u_2 r'$$

Se la trave è di sezione costante, posto

$$r' = r'' = l/3$$

si ha

$$C_1/C_2 = u_1/u_2$$

Se si vogliono mettere in relazione gli spostamenti virtuali di vari elementi di pesi elastici W , W'' , ecc. si deve tener presente la relazione

$$W/W'' = u_1 r''/u_2 r'$$

APPLICAZIONI

Trave Vierendel a correnti paralleli.

Studiamo una trave di sei campi di egual lunghezza L e di altezza $h=2L/3$.

Il corrente superiore ha momento d'inerzia doppio di quello del corrente inferiore, i montanti hanno momento d'inerzia triplo di quello del corrente inferiore; si ha cioè

$$W_t/W_s=2 \quad \text{e} \quad W_m/W_m=9/2$$

Si assume come unità di misura $u=L/6$.

Si noti che lo studio delle terne di equazioni risolutive è indipendente dalle reali dimensioni della trave (rispettando s'intende i rapporti sopra esposti) e che quindi il calcolo è di progetto oltre che di verifica.

Per costruire la terna di diagrammi d'influenza delle sollecitazioni nella sezione immediatamente a destra del nodo A che chiameremo Sezione Ad , si sono assunte come doppie eccitatrici applicate alle faccie del taglio:

N. 2 coppie $C=1.L$ (fig. 6).

N. 2 forze $V_n=1$ normali alle faccie (fig. 7).

N. 2 forze $V_t=1$ tangenti alle faccie (fig. 8).

Fig. 9

gidi; inoltre il termine y che rappresenta l'area del quadrilatero A_1AIB_1 è facilmente calcolabile.
Comunque le terne di diagrammi d e $2d$ si possono ottenere spostando la trave Vierendel di uno o due campj verso sinistra, come appare nei disegni 6, 7, 8.

Trave semplicemente appoggiata.

Supponiamo ora che la trave sia lunga m. 18 e cioè sia $L = m. 3$, $h = m. 2$ e quindi $u = m. 0,50$.

Riportiamo nello specchio n. 1 le terne di equazioni ed i valori delle sollecitazioni per le sezioni Ad, 1d, 2d, sufficienti a risolvere completamente il problema essendo la trave simmetrica e simmetricamente caricata.

Sono noti gli sforzi di taglio in corrispondenza dei montanti

$$T_A = 2,5 F \quad T_1 = 1,5F \quad e \quad T_2 = 0,5 F$$

ed i momenti flettenti.

$$M_A = 0 \quad M_1 = 7,5 F \quad M_2 = 12 F \quad M_3 = 13,5 F$$

che permettono di calcolare le sollecitazioni nei correnti inferiori e nei montanti.

Fig. 11

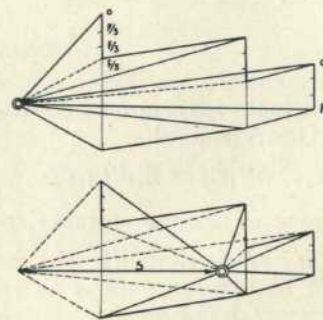
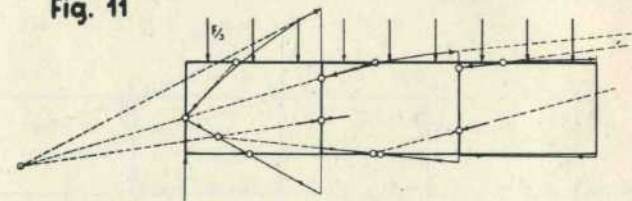


Fig. 12

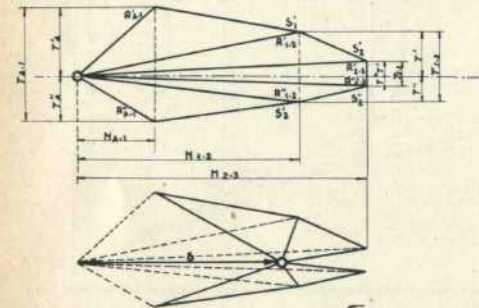
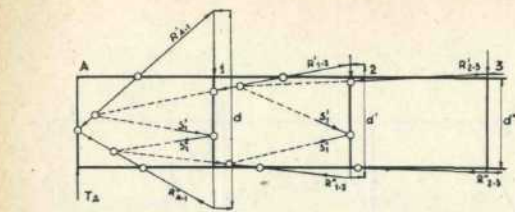
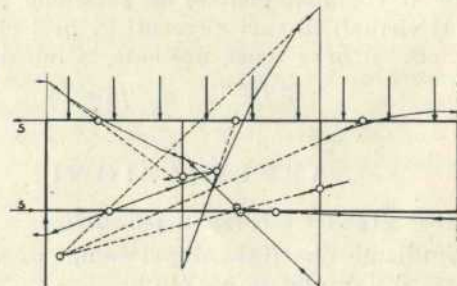
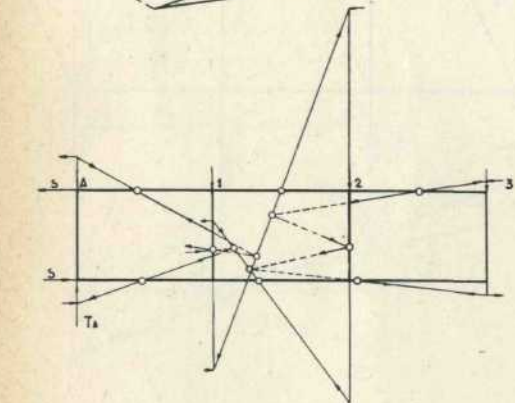


Fig. 10



Osservando la terna dei diagrammi illustrati nelle figure 6, 7 ed 8 si vede subito che

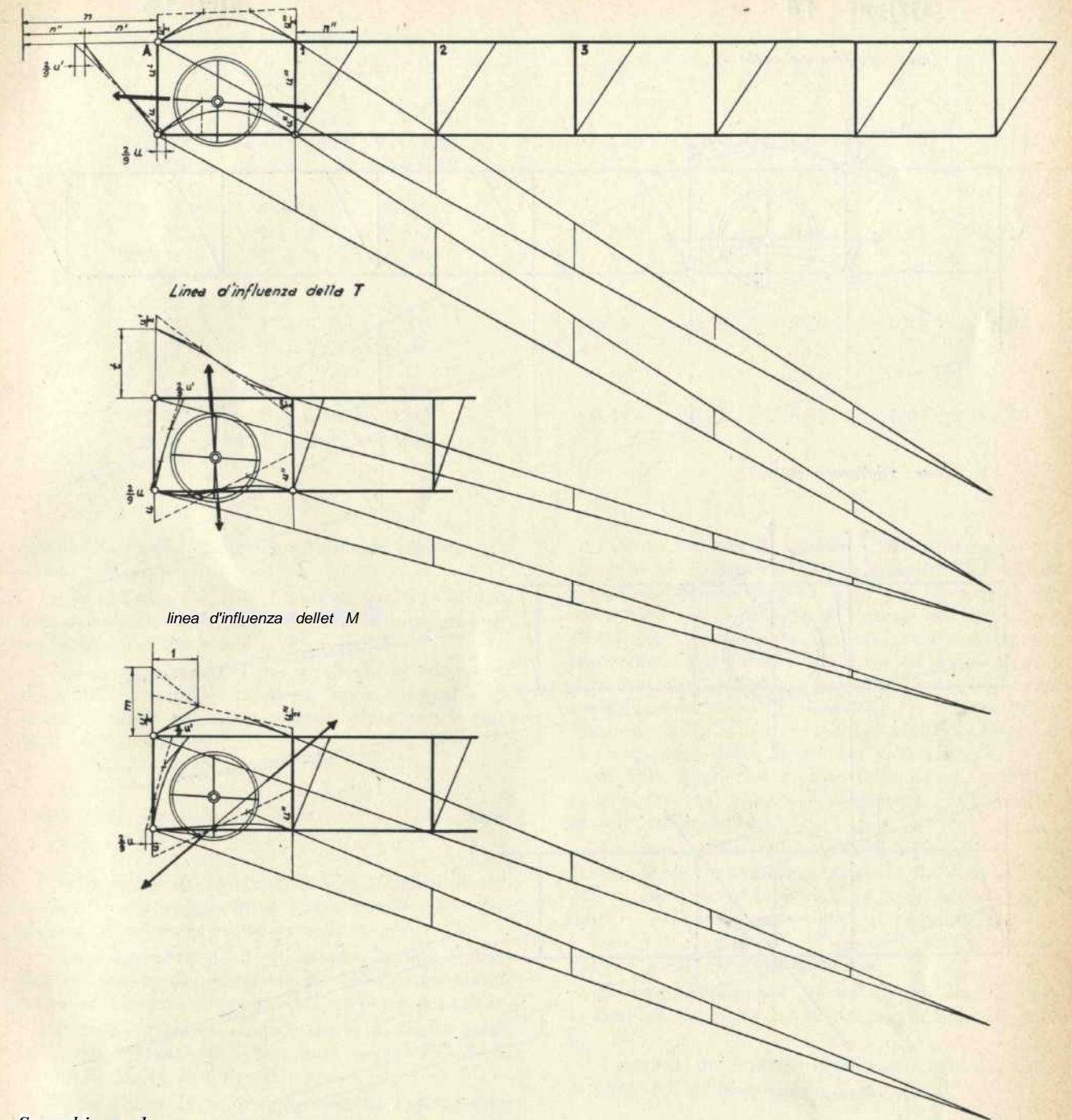
$$\begin{aligned} m &= 11/6 \cdot u & t &= 9/2 \cdot u & n &= 14/3 \cdot u \\ m' &= 7/6 \cdot u & t' &= 3 \cdot u & n' &= 40/9 \cdot u \\ m'' &= 3/4 \cdot u & t'' &= 3 \cdot u & n'' &= 2 \cdot u \end{aligned}$$

Supponiamo ora che la trave sia caricata in corrispondenza del corrente superiore con forze eguali F applicate ai nodi.

Notando che in questo caso $\Sigma Xx=0$ e $\Sigma Yy = F\Sigma y$ e che Σy è l'area del triangolo AIB' (dove le y sono misurate con l'unità u) si può senz'altro scrivere la terna di equazioni risolutive per la sezione Ad:

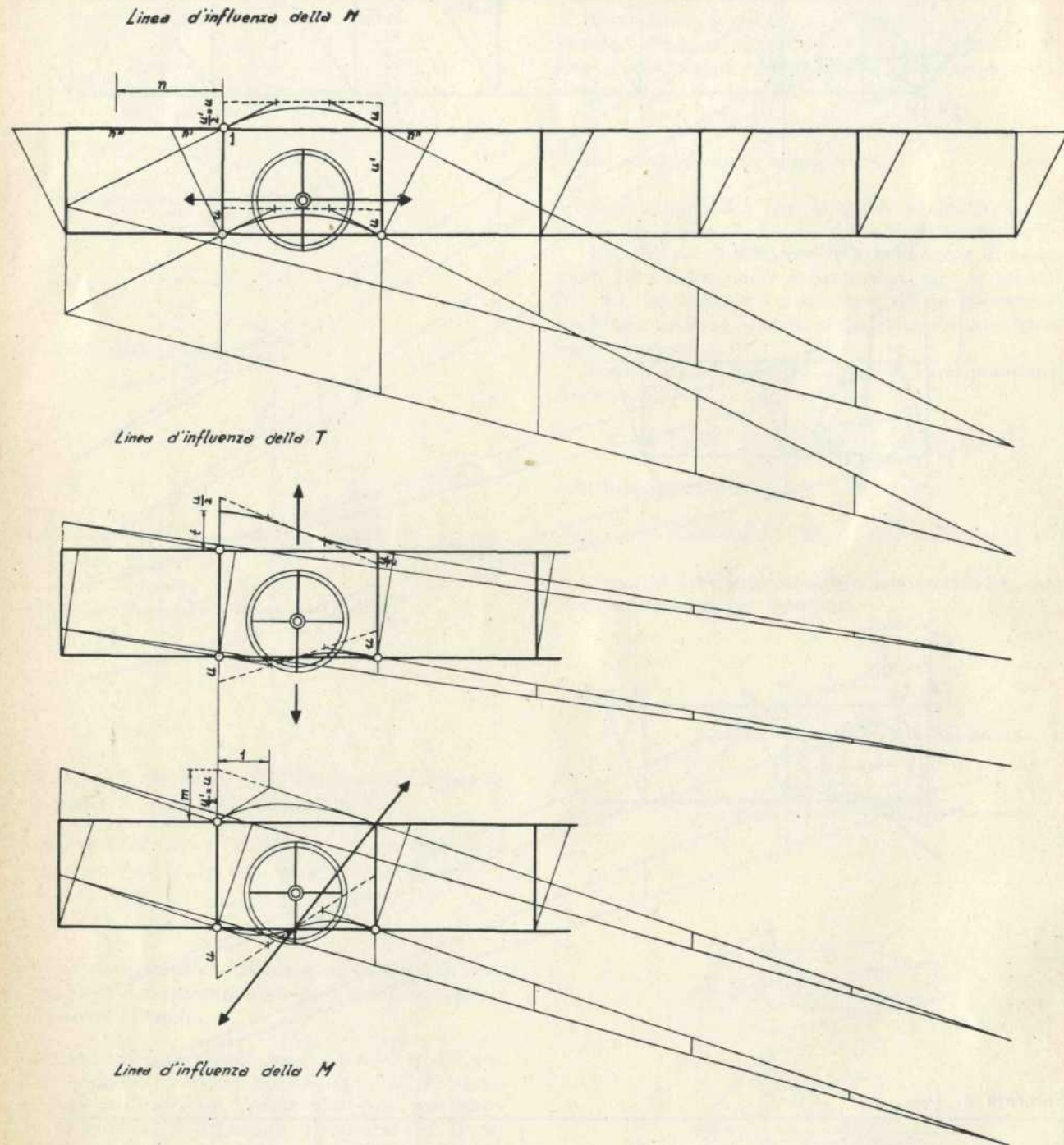
$$\begin{aligned} 11/6 \cdot M - 9/2 \cdot u T - 14/3 \cdot u N &= 7,5 u F \\ 7/6 \cdot M - 3 \cdot u T - 40/9 \cdot u N &= 7,5 u F \\ 3/2 \cdot M - 3 \cdot u T - 2u \cdot N &= 5 u F \end{aligned}$$

Riteniamo superfluo di rifare le terne di diagrammi per le sezioni d e $2d$, sufficienti a risolvere completamente il problema, perchè le deformate del secondo e del terzo elemento di corrente superiore ed inferiore sono eguali a quelle illustrate nelle figg. 6, 7, 8; variano soltanto gli spostamenti orizzontali (e quindi gli angoli) perchè i riquadri adiacenti alle sezioni tagliate sono considerati ri-



Specchio n. 1

Sezioni	Equazioni	M/F	T/F	N/F	y=M/N	x=M/T
Ad	$11/3 M + 9/2 T + 14/3 N = 7,5$	- 2,00	1,53	1,70	1,17	1,31
	$7/3 M + 3 T + 40/9 N = 7,5$					
	$3/2 M + 3 T + 2 N = 5,0$					
1d	$3 M + 9/2 T + 4 N = 19,50$	- 1,50	1,00	4,88	0,31	1,50
	$2 M + 3 T + 4 N = 19,50$					
	$3/2 M + 3 T + 2 N = 10,50$					
2d	$3 M + 9/2 T + 4 N = 24,50$	- 0,50	0,33	6,38	0,08	1,50
	$2 M + 3 T + 4 N = 25,50$					
	$3/2 M + 3 T + 2 N = 13,00$					



La terna riguardante la sezione di mezzeria 3d non è necessaria, ma può servire di controllo.

Gli sforzi di taglio nei correnti inferiori si ottengono per differenza dagli sforzi di taglio noti.

I momenti flettenti totali possono servire di controllo al calcolo fatto, dovendo essere (fig. 9):

$$\begin{aligned} d &= M_1/N_A = m. 4,40 \\ d' &= M_2/N_1 = m. 2,45 \\ d'' &= M_3/N_2 = m. 2,11 \end{aligned}$$

dove le d rappresentano i bracci delle coppie N_A , N_1 , N_2 applicate alla trave in corrispondenza dei montanti.

Nella figura 9 si è costruito il poligono delle forze agenti sugli elementi della trave Vierendel.

Trave perfettamente incastrata.

Come si sa, il momento d'incastro, nel nostro caso è:

$$M_i = 9 \cdot F$$

e poiché la trave è alta due metri, ciò equivale a supporre applicate ai nodi di estremità due coppie le cui forze sono $S=4,5 F$ di braccio h (fig. 10).

La risoluzione è immediata: nella figura 10 si è usato lo stesso diagramma della figura 9, ma spo-

Sezioni	Equazioni	MjF	TjF	N/F	y	X
Ad	$11/3 M + 9/2 T + 14/3 N = 9,50$ $7/3 M + 3 T + 40/9 N = 9,00$ $3/2 M + 3 T + 2 N = 6,40$	- 2,26	2,00	1,85	1,23	1,12
Id	$3 M + 9/2 T + 4 N = 21,50$ $2 M + 3 T + 4 iV = 21,00$ $3/2 M + 3 T + 2 iV = 11,90$	- 1,73	1,50	5,00	0,35	1,16
2d	$3 M + 9/2 T + 4 iV = 27,50$ $2 M + 3 T + 4 iV = 27,00$ $3/2 M + 3 T + 2 iV = 14,40$	- 0,85	0,90	6,50	0,13	0,95
U	$3 M + 9/2 T + 4 iV = 27,50$ $2 M + 3 T + 4 iV = 27,00$ $3/2 M + 3 T + 2 iV = 13,90$	0,45	0,10	6,50	0,07	4,50

stando l'origine O di una grandezza eguale alla spinta trovata S .

Con la stessa facilità si poteva risolvere il problema, quando fosse dato il grado d'incastro supposto proprio dei vincoli.

Nello stesso modo si può risolvere la trave continua determinando i momenti sugli appoggi e gli sforzi di taglio col solito metodo usato per le normali travi continue.

Trave uniformemente caricata, sul corrente superiore.

Nella terna di equazioni varia soltanto il termine $27 v$ che rappresenta l'area totale dei diagrammi d'influenza calcolati nelle figg. 6, 7, 8.

Nello specchio n. 2 riportiamo i dati riguardanti il nuovo caso, ponendo $pL = F$ il carico distribuito su ciascun elemento del corrente superiore.

Si tenga presente che gli sforzi di taglio totali in corrispondenza dei montanti sono: $T_A = 3 F$; $T_1 = 2 F$; $T_2 = 1 F$ e $T_3 = 0$.

Nella figura 11 sono rappresentati i diagrammi delle forze per il caso del semplice appoggio; nella figura 12 gli stessi diagrammi per il perfetto incastro.

La costruzione è così semplice che non vale la pena di descriverla.

Variatione del calcolo semplificato - Trave Vierendel.

Mantenendo le ipotesi semplificative espone nel calcolo precedente ci si propone di eseguire il calcolo seguendo il metodo classico per la costruzione delle linee d'influenza dello sforzo normale N , dello sforzo di taglio T e del momento flettente M nelle sezioni considerate dianzi.

Questo metodo di calcolo è indubbiamente più elegante ed appare molto più semplice del calcolo precedentemente esposto ma, per eseguirlo, occorre calcolare e disegnare l'ellisse in serie delle ellissi degli elementi tagliati nei vari casi; questa costruzione deve essere accurata ed esige almeno il tempo che, col primo metodo, viene impiegato a risolvere le terne di equazioni 1). Inoltre la costruzione delle ellissi centrali di elasticità suppone la conoscenza delle ellissi dei vari elementi della trave Vierendel, cioè le loro dimensioni, quindi il calcolo diventa, almeno teoricamente, di verifica anziché di progetto.

La costruzione delle linee d'influenza è più varia e leggermente più complicata. In conclusione, per quanto riguarda il tempo occorrente ad eseguire il calcolo, i due metodi si equivalgono, anzi è forse più conveniente l'uso del primo calcolo esposto nella presente memoria.

Le linee d'influenza calcolate, sono illustrate per la Sezione Ad nella fig. 13, e per la Sez. Id nella fig. 14.

I risultati finali sono praticamente eguali a quelli ottenuti col primo metodo.

Nota

Le deformate dei singoli elementi della trave Vierendel sono definite dalle tangenti estreme e dalla tangente nel punto di flesso: il procedimento è quello illustrato nella figura 5 e ripetuto nei singoli casi trattati sopra. Evidentemente queste deformate (che sono parabole o parabole cubiche) si possono disegnare ad occhio con grande risparmio di tempo e con una approssimazione più che sufficiente, come appare chiaro osservando le linee d'influenza riportate nelle figure 6, 7, 8, 13, 14.

Benedetto Zimini