

ottenuti sono praticamente coincidenti con quelli calcolati con il sistema proposto.

Per dimostrare le differenze nella forma delle deformate che si verifica anche in intorni vicini alla risonanza, in Fig. 5 sono riportate le deformate elastiche ottenute per i seguenti punti delle curve di risonanza:

$$\frac{\omega_e}{\omega_0} = 0,872 \text{ per la 9a armonica,}$$

$$\frac{\omega_e}{\omega_0} = 1,086 \text{ per la 12a armonica.}$$

Cioè un punto si trova sul ramo ascendente della curva di risonanza, il secondo sul ramo discendente. Su tale diagramma è riportata la deformata calcolata per $\frac{\omega_e}{\omega_0} = 1$. Assumendo per i tre casi un'ara-

piezza unitaria per il volano di estremità si nota che nella zona di massima sollecitazione le differenze delle ampiezze sono notevoli. La torsione della barra su cui si verifica il nodo, calcolata tenendo conto dell'ampiezza reale del volano d'estremità, assume i seguenti valori:

	k=9	k=12
Metodo esatto	0,00049	0,000934
Valutazione approssimata della deformazione	0,00064	0,00104
Scarto percentuale . .	+ 30 %	+ 12 %

Oscar Montabone

Una particolare applicazione del volano pendolare su una vettura da turismo

È abbastanza frequente nella pratica costruttiva l'applicazione di contrappesi pendolari come smorzatori delle vibrazioni torsionali degli alberi a gomito dei motori alternativi a combustione interna. In questo articolo si dà una descrizione sommaria di una particolare applicazione automobilistica di uno smorzatore di questo tipo, fatta non già con lo scopo di smorzare le vibrazioni torsionali degli alberi a gomito, intese nell'accezione comune di questo termine, ma con quello di filtrare la coppia all'uscita dal motore depurandola dall'armonica fondamentale.

In una autovettura a schema classico, cioè con motore e cambio disposti anteriormente e ponte rigido posteriore ancorato al telaio con balestre, il complesso formato dal motore-cambio, dalla trasmissione, dal ponte posteriore, costituisce un sistema oscillante che possiede delle frequenze proprie ben definite, il cui valore dipende dall'entità delle masse e delle rigidità degli elementi di cui è composto.

Poiché le forze che si generano all'interno del motore e che da questo vengono trasmesse al complesso considerato sono variabili periodicamente nel tempo, esse sono sviluppabili in una serie di armoniche aventi frequenze proporzionali alla velocità angolare del motore e all'ordine dell'armonica, ed esistono quasi sempre, nel campo di funzionamento, delle velocità alle quali il sistema oscillante è in risonanza con una delle armoniche componenti.

In corrispondenza di queste risonanze si scaricano in vettura, attraverso i punti di vincolo del ponte, cioè attraverso i punti d'attacco delle balestre, delle forze pulsanti di intensità dipendente dagli smorzamenti esistenti nel sistema elastico e dalla intensità e dalla frequenza dell'armonica eccitatrice. Queste forze pulsanti sono la causa della maggior parte dei rombi e dei tremolii avvertiti dal passeggero all'interno della vettura a certe velocità ben definite del motore, che in alcuni casi possono assumere intensità veramente fastidiose.

È uno degli assilli del progettista il far sì che questi disturbi non esistano o siano contenuti in

limiti molto ridotti; questo però costituisce sempre una meta abbastanza ardua da raggiungere poichè non si ha quasi mai la possibilità di dominare le frequenze proprie in modo da escludere qualsiasi risonanza nel campo di funzionamento normale.

Il problema inoltre diventa sempre più complicato quanto più ci si sposta verso le cilindrata elevate e i bassi numeri di cilindri. Ad esempio si può dire che mentre è abbastanza semplice raggiungere dei buoni risultati con un motore di 2-3 litri di cilindrata ad otto cilindri, non lo è altrettanto con un motore della medesima cilindrata a quattro cilindri.

Si è voluto esaminare se esisteva la possibilità di risolvere il problema senza ricorrere a sistemi non sempre economicamente possibili, quali l'applicazione di giunti idraulici, l'aumento del numero dei cilindri ecc..., sfruttando le proprietà dello smorzatore pendolare e utilizzandolo come filtro di coppia all'uscita dal motore.

Richiamiamo brevemente il principio di funzionamento del volano pendolare.

Si consideri il volano di fig. 1 di momento di inerzia polare J e si supponga che esso, soggetto ad un sistema di forze motrici e resistenti in equilibrio, ruoti con velocità angolare ω costante attorno al proprio asse. Si pensi che a partire da un dato istante a questo volano venga applicata una coppia, variabile nel tempo con legge sinusoidale

$$C = C_k \text{ sen } K\omega t$$

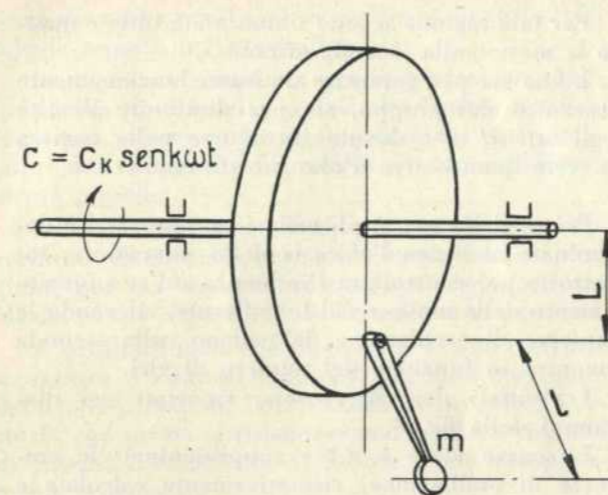


Fig. 1.

che compia quindi K cicli per ogni giro del volano (armonica di ordine K).

Il volano da quell'istante assume, in aggiunta al moto rotatorio uniforme, un moto oscillatorio, sempre funzione sinusoidale del tempo, che ha la medesima pulsazione $K\omega$ della coppia eccitante e un'ampiezza $\frac{C_k}{JK^2\omega^2}$, inversamente proporzionale al quadrato della frequenza di eccitazione.

Il moto risultante del volano è espresso quindi da

$$(1) \quad \varphi = \omega t - \frac{C_k}{JK^2\omega^2} \text{ sen } K\omega t.$$

Se ora si applica al volano una massa pendolare m come indicato in Fig. 1, essa seguirà una propria legge di moto ed in tali condizioni trasmetterà al volano certe forze, il cui momento rispetto all'asse di rotazione dipende quasi essenzialmente dalla forza centrifuga cui è sottoposta la massa m stessa, dagli spostamenti che essa subisce rispetto alla posizione media radiale e dal valore di l ed L . Analizzando il moto del volano sottoposto, oltre che alla coppia eccitante $C = C_k \text{ sen } K\omega t$, anche alle forze che gli vengono trasmesse dalla massa pendolare, si dimostra (V. appendice I) che per effetto della coppia nasce un moto oscillatorio forzato con legge

$$(2) \quad \varphi_1 = \frac{C_k}{JK^2\omega^2} \cdot \frac{K^2 - \frac{L}{l}}{\frac{L}{l} - K^2 + \frac{m(L+l)^2}{J} \frac{L}{l}} \text{ sen } K\omega t$$

Se il pendolo è stato proporzionato in modo che sia $\frac{L}{l} = K^2$, il termine $K^2 - \frac{L}{l}$ è uguale

a zero, quindi questo moto oscillatorio scompare; cioè se si sintonizza il pendolo sull'ordine della armonica eccitatrice, la coppia di richiamo che esso esercita sul volano per ogni valore della velocità angolare è tale da equilibrare in ogni istante

l'armonica eccitatrice stessa. Un pendolo siffatto costituisce la forma più semplice di uno smorzatore pendolare.

In un motore alternativo a combustione interna il volano e l'albero a gomito, ad esso rigidamente connesso, si trovano nelle medesime condizioni del volano di cui si è parlato. Essi sono sottoposti ad una coppia motrice che è sviluppabile in una coppia media di valore costante, equilibrata dalla coppia resistente, ed in una serie di armoniche, il cui ordine e la cui intensità dipendono dal numero dei cilindri e dalla cilindrata. Prendendo ad esempio come termine di riferimento un quattro cilindri, le armoniche eccitatrici esistenti sono: la seconda con una intensità di 1,6 volte la coppia motrice media, la quarta con una intensità di 0,6 volte la coppia media, la sesta con 0,3, l'ottava con 0,15 ecc.

Il moto del volano-albero è pertanto in generale il risultante di un moto a velocità costante e di tanti moti oscillatori quante sono le armoniche presenti, ognuno dei quali è rappresentato da una espressione identica al termine sinusoidale dell'equazione (1).

È possibile depurare il moto all'uscita del motore da alcune o da tutte queste oscillazioni, applicando al volano delle masse pendolari sintonizzate sull'ordine delle armoniche di cui si vogliono eliminare gli effetti.

È intuitivo, e del resto abbastanza semplice da dimostrare, che collegando un motore provvisto di queste masse pendolari al sistema oscillante costituito dalla trasmissione e dal ponte, di cui si è parlato all'inizio, le azioni trasmesse alla vettura attraverso i punti di vincolo delle balestre, dovute alle armoniche su cui sono sintonizzate le masse pendolari, sono mille. Nell'appendice 2 è riportata la dimostrazione.

Per controllare le possibilità pratiche del volano pendolare, lo si è applicato ad una vettura di schema classico con motore anteriore e ponte posteriore rigido. Il motore era un quattro cilindri di 3 litri di cilindrata. Il volano era stato costruito come rappresentato in fig. 2.

Il volano V , munito di mozzo per il calettamento sull'albero motore, forma con il coperchio C , a cui è solidale la corona d'avviamento A , una camera chiusa in cui sono alloggiate le masse pendolari M e che funge da serbatoio per il lubrificante.

Le masse M rotolano sui rulli r , i quali sono sostenuti dai supporti S solidali con il volano. In funzionamento la forza centrifuga agente sulle masse le tiene premute contro i rulli e quindi tende a mantenerle nella posizione di equilibrio disegnata in figura. Esse possono oscillare attorno a questa posizione, spostandosi come se fossero collegate al volano mediante due manovelle (tratteggiate in figura) di lunghezza uguale alla differenza fra il diametro D delle gole ricavate nelle masse e nei supporti e quello d dei rulli. Tutti i loro punti descrivono quindi delle traiettorie circolari di raggio $l = D - d$, con velocità uguali e parallele punto

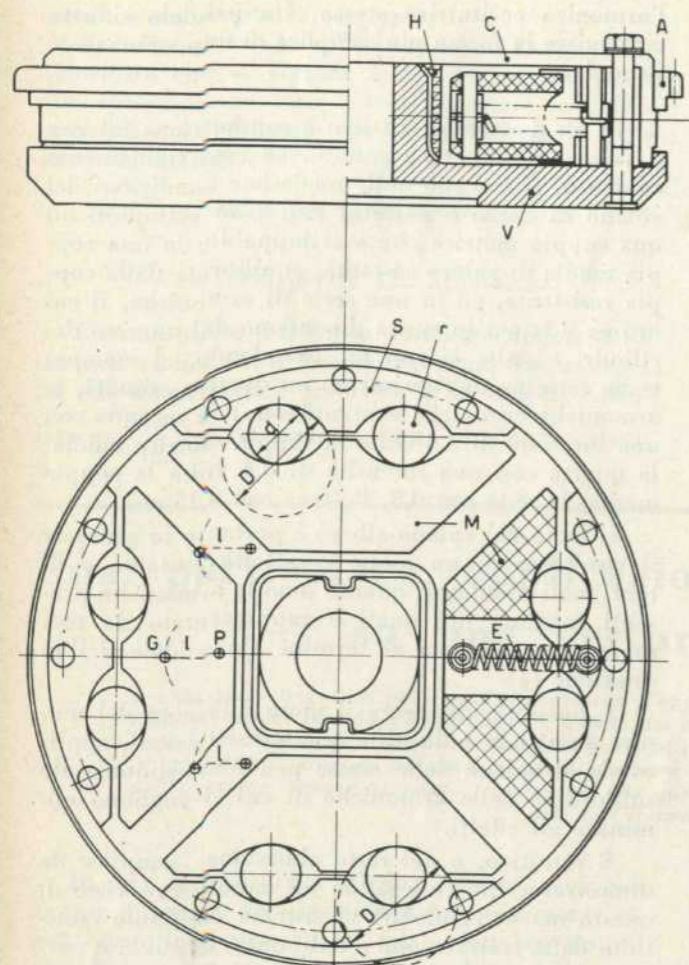


Fig. 2.

per punto sicchè esse si comportano come se la loro massa m fosse tutta concentrata nel baricentro G , cioè equivalgono perfettamente a dei pendoli di massa m puntiforme, collegati al volano mediante bracci di lunghezza l , incernierati nel centro P di rotazione del baricentro G .

Per impedire che a motore fermo le masse per effetto del loro peso si stacchino dai rulli, si sono disposte le molle ad elica E , proporzionate in modo da non pregiudicare il funzionamento dello smorzatore sulle cui masse dovrebbero agire unicamente le forze di inerzia.

Inoltre, per evitare che all'avviamento del motore le masse urtino contro il mozzo del volano oppure tra loro, si è rivestito lo stesso mozzo con una guaina di gomma (H in figura) che oltre ad attenuare l'urto serve anche da limitatore di corsa.

Per la vettura impiegata per l'esperienza le frequenze proprie del sistema oscillante motore-trasmissione-ponte, calcolate e controllate sperimentalmente, erano risultate abbastanza basse (la più elevata era dell'ordine dei 2500 cicli/min), e nel campo di velocità di funzionamento del motore esisteva unicamente la possibilità di una risonanza con la seconda armonica della coppia motrice (la più bassa per il quattro cilindri) nell'intorno dei 1200-1300 giri/min. del motore.

Per tale ragione si sono sintonizzate tutte e quattro le masse sulla seconda armonica.

Infine sia per garantire un buon funzionamento meccanico del gruppo, sia per diminuire l'entità degli attriti, si è dovuto introdurre nella camera un certo quantitativo d'olio lubrificante.

Prima della sua applicazione su vettura si è determinata al banco l'efficacia dello smorzatore, soprattutto per controllare l'influenza sul suo funzionamento delle molle e del lubrificante, rilevando le ampiezze di oscillazione del volano sulla seconda armonica in funzione del numero di giri.

I risultati dei rilievi sono riportati nei diagrammi della fig. 3.

Le curve « a » e « b » rappresentano le ampiezze di oscillazione, rispettivamente calcolate e rilevate, per il volano con masse bloccate, cioè funzionante come un volano rigido; « c » le stesse ampiezze rilevate con lo smorzatore funzionante, completo di molle ed olio; « d » i valori ottenuti senza molle e con olio; « e » quelli con le molle e senza olio.

L'efficacia del dispositivo appare evidente dal confronto fra le curve « b » e « c »: le ampiezze di oscillazione del volano risultano notevolmente ridotte; a 1000 giri/min, ad esempio l'ampiezza, che con volano normale è di circa 35' (curva « b »), si riduce a soli 5' con lo smorzatore (curva « c »).

Si osservi come l'olio, diminuendo gli attriti, rende più efficace il funzionamento dei pendoli e come le molle non lo alterino altro che in minima misura.

Un'osservazione nasce però, e legittima, dall'esame dei risultati esposti: le ampiezze di oscillazione si riducono e notevolmente, però qual'è il motivo per cui non si annullano completamente,

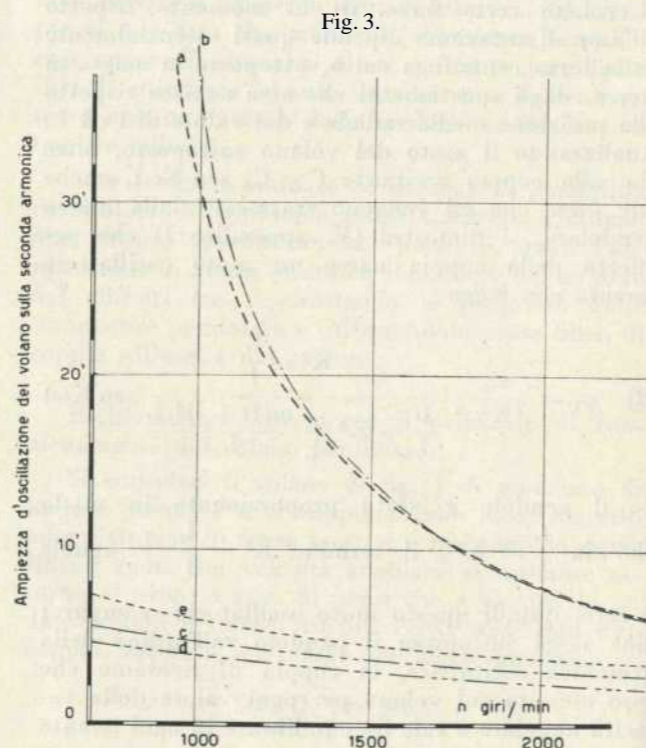


Fig. 3.

come dovrebbe verificarsi secondo le conclusioni del calcolo esposto nell'appendice 1.

La risposta è semplice: per la trattazione analitica si era partiti dalle ipotesi che fossero mille le resistenze passive e che le ampiezze dei moti oscillatori del volano e del pendolo fossero sufficientemente piccole.

In realtà nè l'una nè l'altra sono esattamente verificate in pratica, sicchè le conclusioni cui si è giunti per via analitica costituiscono solo un caso ideale, al quale però si è sufficientemente prossimi.

A prove ultimate si è montato il volano costruito su vettura. I risultati sono stati del tutto corrispondenti alle previsioni fatte in sede di progetto; i disturbi che prima si riscontravano, rombi e tremolii di intensità veramente fastidiosa, sono completamente scomparsi.

Appendici.

1) Smorzatore pendolare.

Si consideri il volano della Fig. 4, munito della massa pendolare m e rotante con velocità angolare costante ω , e si supponga all'istante $t = 0$ di applicare ad esso una coppia variabile nel tempo con legge

$$C = C_k \text{ sen } K\omega t$$

Occorre ricavare le leggi dei moti sia del volano che della massa pendolare tenendo conto, oltre che della coppia eccitatrice, anche delle forze che essi si trasmettono mutuamente.

Con riferimento alla fig. 4 si indichi con:

- ω la velocità del moto uniforme del volano;
- φ_1 l'angolo di cui è ruotato il volano all'istante generico t per effetto del moto oscillatorio provocato dalla coppia C ;
- θ l'angolo istantaneo fra il braccio l e il raggio L (moto del pendolo rispetto al volano);
- l la lunghezza del braccio del pendolo;
- L la distanza del punto di incernieramento del pendolo dall'asse di rotazione del volano;
- m la massa del pendolo supposta concentrata nel suo baricentro;
- J il momento di inerzia del volano;
- R la distanza, ad un certo istante t , della massa m dall'asse di rotazione del volano;
- $C = C_k \text{ sen } K\omega t$ la coppia sinusoidale applicata al volano.

In un istante generico t , per una data configurazione del sistema definita dai valori di φ_1 e θ , la massa m possiede certe accelerazioni che si possono facilmente determinare. Precisamente, poichè il moto di m risulta dalla sovrapposizione di due moti diversi, quello del volano con velocità istantanea $\omega_t = \omega + \frac{d\varphi_1}{dt}$ (moto di trascinamento) e

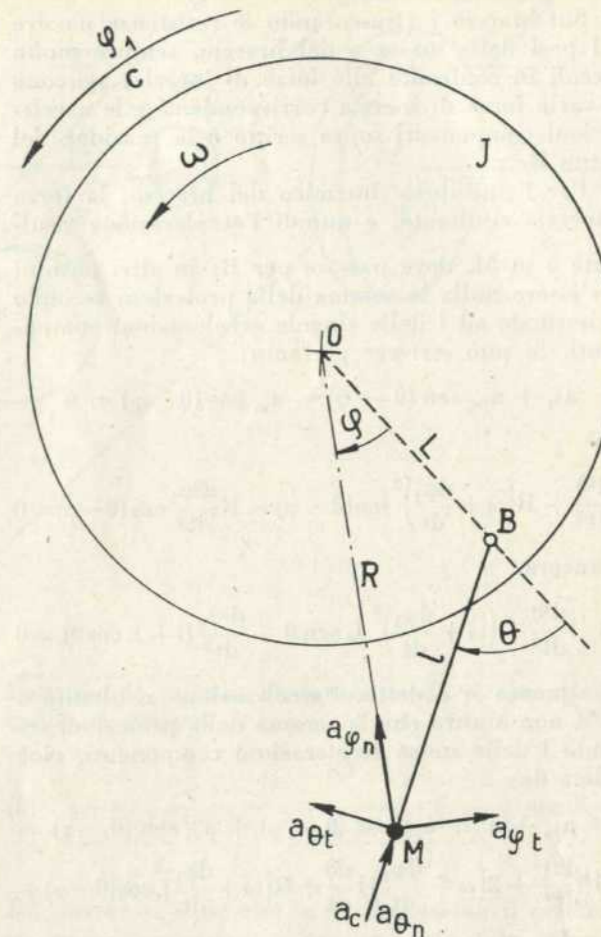


Fig. 4.

quello del pendolo rispetto al volano con velocità $\omega_r = \frac{d\theta}{dt}$ (moto relativo), le accelerazioni componenti di m sono:

$$\omega_r \text{ accelerazione tangenziale di trascinamento} = R \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$$

$$a_{\theta t} \text{ accelerazione centripeta di trascinamento} = R \left(\omega + \frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2$$

$$a_{\varphi n} \text{ accelerazione tangenziale relativa} = l \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$a_{\theta n} \text{ accelerazione centripeta relativa} = l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$a_c \text{ accelerazione di Coriolis} = 2\omega_t \wedge V_r = 2 \left(\omega + \frac{d\varphi_1}{dt} \right) l \frac{d\theta}{dt}$$

Le direzioni e i versi di queste accelerazioni, per i sensi positivi convenuti per le rotazioni, risultano quelli indicati in fig. 4.

Le relazioni che legano fra loro queste accelerazioni si trovano facilmente considerando l'equilibrio del volano e del pendolo.

Sul braccio 1 (trascurando le resistenze passive e i pesi della massa e del braccio, sempre molto piccoli in confronto alle forze di inerzia) agiscono le varie forze di inerzia corrispondenti alle accelerazioni componenti sopra scritte e la reazione del perno B.

Per l'equilibrio dinamico del braccio, la forza d'inerzia risultante, e quindi l'accelerazione risultante \vec{a} in M, deve passare per B; in altri termini dev'essere nulla la somma delle proiezioni secondo la normale ad l delle singole accelerazioni componenti. Si può scrivere pertanto:

$$a_{\theta t} + a_{\varphi n} \sin(\theta - \varphi) - a_{\varphi t} \cos(\theta - \varphi) = 0$$

cioè

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} + R \left(\omega + \frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 \sin(\theta - \varphi) - R \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} \cos(\theta - \varphi) = 0$$

o ancora

$$(1) \quad l \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\omega + \frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 L \sin \theta - \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} (l + L \cos \theta) = 0$$

Per quanto si è detto, l'accelerazione risultante \vec{a} in M non è altro che la somma delle proiezioni secondo l delle stesse accelerazioni componenti, cioè è data da:

$$\begin{aligned} a &= a_{\theta n} + a_{\theta t} + a_{\varphi n} \cos(\theta - \varphi) + a_{\varphi t} \sin(\theta - \varphi) = \\ &= l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2 \left(\omega + \frac{d\varphi_1}{dt} \right) l \frac{d\theta}{dt} + R \left(\omega + \frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 \cos(\theta - \varphi) + \\ &+ R \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} \sin(\theta - \varphi) \end{aligned}$$

da cui semplificando:

$$(1') \quad a = l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2l \frac{d\theta}{dt} \left(\omega + \frac{d\varphi_1}{dt} \right) + (l + L \cos \theta) \left(\omega + \frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + L \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} \sin \theta$$

Per l'equilibrio dinamico del volano J, soggetto alla coppia C, alla coppia d'inerzia $J \frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$ e alla forza d'inerzia $m a$ della massa pendolare, si può scrivere:

$$C_K \sin K\omega t - J \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - m a L \sin \theta = 0$$

cioè, tenendo presente la (1'),

$$(2) \quad C_K \sin K\omega t - J \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - m L \sin \theta \left[l \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + 2l \frac{d\theta}{dt} \left(\omega + \frac{d\varphi_1}{dt} \right) + (l + L \cos \theta) \left(\omega + \frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 + L \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} \sin \theta \right] = 0$$

Integrando le due equazioni differenziali (1) e (2) si otterrebbero le due funzioni incognite $\varphi_1 = \varphi_1(t)$

e $\theta = \theta(t)$, cioè le leggi cercate del moto del volano e del pendolo.

Per semplificare l'integrazione delle equazioni:

a) si consideri il caso, del resto molto vicino a quelli reali, di oscillazioni φ_1 e θ di ampiezza molto piccola, per cui si accettano le uguaglianze:

$$\sin \theta = 0$$

$$\cos \theta = 1$$

b) si trascurino i termini contenenti i quadrati delle velocità di oscillazione $\frac{d\varphi_1}{dt}$ e $\frac{d\theta}{dt}$ e i loro prodotti per $\theta = \sin \theta$.

In tal modo le due equazioni si riducono alla forma:

$$(3) \quad l \frac{d^2\theta}{dt^2} + L\omega^2\theta - (L + l) \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = 0$$

$$(4) \quad C_K \sin K\omega t - J \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - m L (L + l) \omega^2\theta = 0$$

e l'integrazione ne è immediata.

Sostituendo nella (3) il valore di $\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$ ricavato dalla (4) e ponendo

$$\gamma^2 = \omega^2 \frac{L}{l} \left[1 + m \frac{(L + l)^2}{J} \right]$$

si ottiene l'equazione differenziale a coefficienti costanti nella sola funzione θ

$$(5) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma^2\theta - C_K \frac{L + l}{Jl} \sin K\omega t = 0$$

da cui l'espressione generale di θ

$$(6) \quad \theta = A \sin \gamma t + B \cos \gamma t + E \sin K\omega t$$

con A, B ed E costanti da determinare. Il valore di E si ottiene immediatamente sostituendo nella (5) la funzione θ data dalla (6)

$$E(\gamma^2 - K^2\omega^2) \sin K\omega t - C_K \frac{L + l}{Jl} \sin K\omega t = 0$$

$$E = \frac{C_K L + l}{J} \frac{1}{\gamma^2 - K^2\omega^2}$$

Per ricavare A e B basta imporre che all'istante iniziale, $t = 0$, siano

$$\theta = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad \text{Segue}$$

$$\text{per } \theta = 0 \quad B = 0; \quad \text{per } \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad A\gamma + EK\omega = 0$$

da cui

$$A = -E \frac{K\omega}{\gamma} = -\frac{C_K L + l}{J} \frac{1}{\gamma^2 - K^2\omega^2} \frac{K\omega}{\gamma}$$

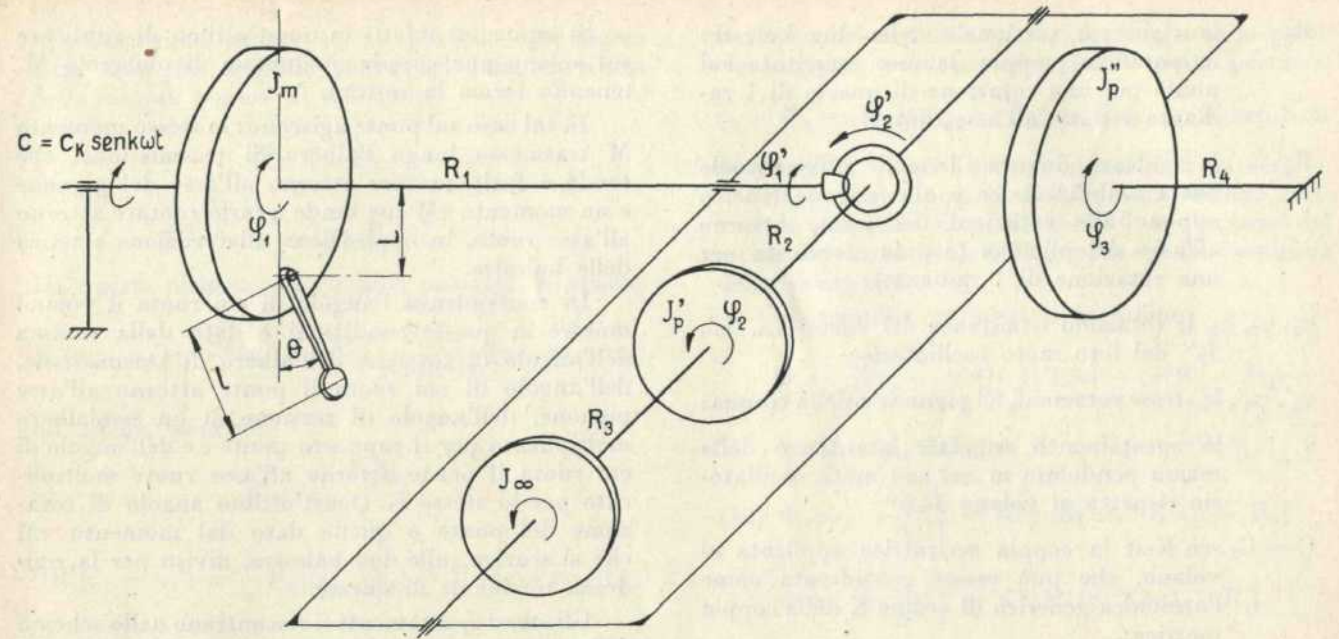


Fig. 5.

L'espressione di θ risulta quindi

$$(7) \quad \theta = \frac{C_K L + l}{J} \frac{1}{\gamma^2 - K^2\omega^2} \left[\sin K\omega t - \frac{K\omega}{\gamma} \sin \gamma t \right]$$

Per trovare la funzione incognita φ_1 basta allora sostituire la (7) in una delle equazioni di partenza, per es. nella (4), ed integrare l'equazione differenziale a variabili separate che ne risulta. Si ha

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\frac{C_K m (L + l)^2 L}{J} \frac{\omega^2}{\gamma^2 - K^2\omega^2} \left[\sin K\omega t - \frac{K\omega}{\gamma} \sin \gamma t \right] + \frac{C_K}{J} \sin K\omega t$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\frac{C_K m (L + l)^2 L}{J} \frac{\omega^2}{\gamma^2 - K^2\omega^2} \left[-\frac{\cos K\omega t}{K\omega} + \frac{K\omega}{\gamma^2} \cos \gamma t \right] - \frac{C_K}{JK\omega} \cos K\omega t + D$$

$$\varphi_1 = -\frac{C_K m (L + l)^2 L}{J} \frac{\omega^2}{\gamma^2 - K^2\omega^2} \left[-\frac{1}{K^2\omega^2} \sin K\omega t + \frac{K\omega}{\gamma^3} \sin \gamma t \right] - \frac{C_K}{JK^2\omega^2} \sin K\omega t + Dt + F$$

Le costanti d'integrazione D ed F possono essere facilmente determinate imponendo le condizioni ai limiti nel tempo, per es. che all'istante $t = 0$ siano nulli lo spostamento φ_1 e la velocità $\frac{d\varphi_1}{dt}$ del volano. Senza però completare il calcolo, si consideri dell'espressione di φ_1 solo la parte che rappresenta il moto oscillatorio forzato del volano, cioè quella costituita dai termini in $\sin K\omega t$

$$\varphi_{1f} = \frac{C_K}{JK^2\omega^2} \left[\frac{m(L+l)^2 L}{J} \frac{\omega^2}{\gamma^2 - K^2\omega^2} - 1 \right] \sin K\omega t$$

Sostituendo in essa l'espressione di γ^2 e semplificando si ottiene

$$(8) \quad \varphi_{1f} = \frac{C_K}{JK^2\omega^2} \frac{K^2 - \frac{L}{l}}{\frac{L}{l} - K^2 + \frac{m(L+l)^2 L}{J}} \sin K\omega t$$

Da questa si vede che se si dimensiona il pendolo in modo opportuno, e precisamente tale che sia $\frac{L}{l} = K^2$, risulta nullo il moto oscillatorio forzato, qualunque sia il valore di C_K , di J e di ω .

2) *Applicazione del volano pendolare al complesso trasmissione-ponte.*

Lo schema preso in esame per lo studio dell'effetto del volano pendolare sui moti oscillatori della trasmissione e del ponte è quello della fig. 5.

In esso rappresentano:

- J_m il volano motore cui è applicato il pendolo m ;
- J_p' un volano equivalente al momento d'inerzia del ponte per il suo moto di rotazione attorno all'asse ruota;
- J_p'' un volano equivalente al momento d'inerzia dello stesso ponte per il suo moto di rotazione attorno all'asse del pignone del gruppo differenziale;
- J un volano di momento d'inerzia infinito;
- m la massa del pendolo equivalente allo smorzatore applicato;
- L ed l le dimensioni caratteristiche del pendolo;
- R_1 la rigidezza torsionale dell'albero di trasmissione;
- R_2 La rigidezza dei due semialberi considerati in parallelo tra loro;

R_3 la rigidità torsionale delle due balestre in parallelo (coppia da esse esercitata sul ponte per una rotazione di questo di 1 radiante attorno all'asse ruote);

R_4 la rigidità, dovuta alle molle, all'eventuale barra stabilizzatrice e alle gomme, che si oppone alle rotazioni del ponte attorno all'asse del pignone (coppia esercitata per una rotazione di 1 radiante);

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ le rotazioni istantanee dei volani J_m, J_p', J_p'' nel loro moto oscillatorio;

$\varphi_1', \varphi_2', \varphi_3'$ le stesse rotazioni del pignone e della corona;

θ lo spostamento angolare istantaneo della massa pendolare m nel suo moto oscillatorio rispetto al volano J_m ;

$C = C_k \text{ sen } K\omega t$ la coppia eccitatrice applicata al volano, che può essere considerata come l'armonica generica di ordine K della coppia motrice;

T il rapporto ponte.

È da notare che i volani che compaiono nello schema sono da considerare dotati di puro momento d'inerzia attorno al loro asse di rotazione e del tutto privi di massa.

Si è fissato lo schema descritto accettando le ipotesi:

1) che fossero trascurabili i momenti d'inerzia polari dell'albero di trasmissione, degli ingranaggi del cambio e del differenziale, e dei semialberi;

2) che non esistesse nel sistema alcuno smorzamento a carattere dissipativo;

3) che fosse infinitamente grande la massa della vettura, in modo da poter considerare fissi nello spazio i punti di ancoraggio del sistema oscillante e nullo l'effetto sul moto della vettura delle fluttuazioni della coppia motrice alle ruote, dovute alle oscillazioni del volano motore e del ponte.

Il funzionamento dello schema deve essere pensato nel modo seguente. I volani J_m, J_p', J_p'' ruotano inizialmente a velocità costante (ω per J_m); a partire da un certo istante, assunto come $t = 0$, si applica al volano motore una coppia sinusoidale $C = C_k \text{ sen } K\omega t$; per effetto di questa J_m e J_p' assumono, in aggiunta a quello uniforme che già possiedono, un moto oscillatorio di legge rispettivamente $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ e $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ da determinare, mentre J_p'' continua a ruotare con velocità costante.

Il volano J_p'' risente l'effetto della coppia eccitatrice assumendo anch'esso un moto vibratorio, di legge $\varphi_3 = \varphi_3(t)$.

È facile vedere come, agli effetti delle oscillazioni della trasmissione e del ponte, nell'ambito delle ipotesi sopra enunciate, lo schema corrisponda perfettamente al sistema reale.

Si immagini infatti in quest'ultimo di applicare sul volano una coppia qualunque di momento M , tenendo ferma la vettura.

In tal caso sul ponte agiscono: lo stesso momento M trasmesso lungo l'albero di trasmissione, che tende a farlo ruotare attorno all'asse del pignone e un momento τM che tende a farlo ruotare attorno all'asse ruote, in opposizione alla reazione elastica delle balestre.

Di conseguenza l'angolo di cui ruota il volano motore in queste condizioni è dato dalla somma dell'angolo di torsione dell'albero di trasmissione, dell'angolo di cui ruota il ponte attorno all'asse pignone, dell'angolo di torsione di un semialbero moltiplicato per il rapporto ponte τ e dell'angolo di cui ruota il ponte attorno all'asse ruote moltiplicato per lo stesso τ . Quest'ultimo angolo di rotazione del ponte è quello dato dal momento τM che si scarica sulle due balestre, diviso per la rigidità torsionale di queste.

Gli stessi spostamenti si riscontrano nello schema della figura, quando al volano si applica lo stesso momento M . Poiché il volano J di inerzia infinita non può ruotare, l'angolo di rotazione di J_m è dato in tal caso dalla somma: dell'angolo di torsione della rigidità R_1 (albero di trasmissione), della rotazione φ_3 del volano J_p'' (rotazione del ponte attorno all'asse pignone), dell'angolo di torsione della rigidità R_2 (semialberi) moltiplicato per T , dell'angolo di rotazione del volano J_p' (rotazione del ponte attorno all'asse ruote) moltiplicato per lo stesso τ . Anche per lo schema inoltre la rotazione di J_p' è data dal momento τM sul ponte, diviso per la rigidità R_3 delle due balestre.

Verifiche analoghe possono eseguirsi in qualsiasi altra condizione di sollecitazione.

Ciò premesso, si analizzi il sistema della figura con il procedimento solitamente seguito in problemi del genere, cioè scrivendo le equazioni dell'equilibrio dinamico per ognuno dei volani presenti e ricavando da queste, per integrazione, le espressioni analitiche dei moti.

Per l'equilibrio del volano J_m vale l'equazione (4) nella quale però bisogna aggiungere, tra le forze agenti su esso, la coppia di reazione elastica della rigidità R_1

$$C_k \text{ sen } K\omega t - R_1(\varphi_1 - \varphi_1') - J_m \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - mL(L+1)\omega^2\theta = 0$$

Per la massa m vale integralmente l'equazione (3)

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 L\theta - (L+1) \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = 0$$

Per gli altri due volani si scrive immediatamente

$$R_2(\varphi_2' - \varphi_2) - R_3\varphi_2 - J_p' \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = 0$$

$$R_1(\varphi_1 - \varphi_1') - R_4\varphi_3 - J_p'' \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} = 0$$

Alle equazioni scritte se ne possono aggiungere altre due che tengono conto del funzionamento della coppia conica di riduzione.

$$\frac{\varphi_1' - \varphi_3}{\varphi_2'} = \tau$$

$$\tau R_1(\varphi_1 - \varphi_1') = R_2(\varphi_2' - \varphi_2)$$

Da queste ultime, con semplici passaggi, si ottiene

$$R_1(\varphi_1 - \varphi_1') = \frac{R_2}{\tau}(\varphi_2' - \varphi_2) = \frac{R_1 R_2}{R_2 + \tau^2 R_1}(\varphi_1 - \varphi_3 - \tau\varphi_2)$$

od anche, ponendo

$$R_t = \frac{R_1 R_2}{R_2 + \tau^2 R_1}$$

$$R_1(\varphi_1 - \varphi_1') = \frac{1}{\tau} R_2(\varphi_2' - \varphi_2) = R_t(\varphi_1 - \tau\varphi_2 - \varphi_3)$$

Sostituendo queste espressioni in quelle sopra scritte, si ottiene un sistema di quattro equazioni differenziali nelle quattro funzioni incognite

$$-J_m \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - mL(L+1)\omega^2\theta - R_t(\varphi_1 - \varphi_3 - \tau\varphi_2) = 0 \quad (9)$$

$$= -C_k \text{ sen } K\omega t$$

$$-J_p' \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} - R_3\varphi_2 + \tau R_t(\varphi_1 - \varphi_3 - \tau\varphi_2) = 0 \quad (10)$$

$$-J_p'' \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} - R_4\varphi_3 + R_t(\varphi_1 - \varphi_3 - \tau\varphi_2) = 0 \quad (11)$$

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 L\theta - (L+1) \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = 0 \quad (12)$$

Per risolvere questo sistema si cominci ad eliminare la funzione θ . Ricavando l'espressione θ dalla (9) e sostituendo nella (12) ci si riduce ad un sistema di tre sole equazioni con tre sole funzioni incognite

$$J_m \frac{d^4\varphi_1}{dt^4} + \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} \left[\omega^2 \frac{L}{l} (J_m + m(L+1)l^2) + R_t \right] -$$

$$- \tau R_t \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} - R_t \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + \omega^2 \frac{L}{l} R_t \varphi_1 - \tau \omega^2 \frac{L}{l} R_t \varphi_2 -$$

$$- \omega^2 \frac{L}{l} R_t \varphi_3 = \omega^2 \left(\frac{L}{l} - K^2 \right) C_k \text{ sen } K\omega t$$

$$- J_p' \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} - R_3\varphi_2 + \tau R_t(\varphi_1 - \varphi_3 - \tau\varphi_2) = 0$$

$$- J_p'' \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} - R_4\varphi_3 + R_t(\varphi_1 - \varphi_3 - \tau\varphi_2) = 0$$

Poiché nel caso in esame interessano solo le vibrazioni forzate dei volani eccitate dalla coppia C , è

lecito considerare dei moti φ_1, φ_2 e φ_3 solo la parte che compete a queste vibrazioni e porre pertanto

$$\varphi_1 = \Phi_1 \text{ sen } K\omega t; \varphi_2 = \Phi_2 \text{ sen } K\omega t; \varphi_3 = \Phi_3 \text{ sen } K\omega t$$

Sostituendo queste espressioni nel sistema scritto, si ottengono tre equazioni da cui si possono ricavare le ampiezze di oscillazione Φ in funzione del momento massimo C_k della coppia e della frequenza della eccitazione.

Con semplici passaggi si ha infine:

$$\Phi_1 = \frac{C_k}{\Delta} \left(\frac{L}{l} - K^2 \right) [(J_p' K^2 \omega^2 - \tau^2 R_t - R_3) \cdot$$

$$\cdot (J_p'' K^2 \omega^2 - R_t - R_4) - \tau^2 R_t^2]$$

$$(13) \quad \Phi_2 = - \frac{C_k}{\Delta} \left(\frac{L}{l} - K^2 \right) \tau R_t [J_p'' K^2 \omega^2 - R_4]$$

$$\Phi_3 = - \frac{C_k}{\Delta} \left(\frac{L}{l} - K^2 \right) R_t [J_p' K^2 \omega^2 - R_3]$$

essendo lo sviluppo del determinante formato coi coefficienti delle ampiezze, dato da

$$\Delta = \left(K^2 - \frac{L}{l} \right) [(J_m K^2 \omega^2 - R_t) (J_p' K^2 \omega^2 - \tau^2 R_t - R_3) \cdot$$

$$\cdot (J_p'' K^2 \omega^2 - R_t - R_4) + \tau^2 R_t^3 - \tau^2 R_t^2 \{ K^2 \omega^2 \cdot$$

$$\cdot (J_m + J_p'' + \frac{J_p'}{\tau^2}) - R_4 - R_3 \frac{1}{\tau^2} \} - K^2 \omega^2 m \cdot$$

$$\cdot \frac{L}{l} (L+1) \left[(J_p' K^2 \omega^2 - \tau^2 R_t - R_3) (J_p'' K^2 \omega^2 -$$

$$- R_t - R_4) - \tau^2 R_t^2 \right]$$

Ma se il pendolo è sintonizzato sulla coppia eccitatrice, cioè sull'armonica di ordine K , per quanto si è visto nell'appendice precedente è $K^2 = \frac{L}{l}$ cioè $K^2 - \frac{L}{l} = 0$; quindi per le espressioni (13) sopra scritte, in queste condizioni, essendo $\Delta = 0$, è sempre

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 0$$

Cioè le ampiezze di oscillazione del volano e del ponte sono nulle, qualunque sia il valore della coppia applicata C_k e la velocità angolare ω .

È evidente che in queste condizioni nessuna forza viene trasmessa da parte del sistema oscillante sui suoi punti di vincolo, cioè alla vettura.

Resta pertanto dimostrato che, sintonizzando il volano pendolare su una qualunque delle armoniche della coppia motrice, in particolare sulla fondamentale, quella armonica non riesce più ad eccitare oscillazioni di ampiezza sensibile del ponte e quindi questo non può trasmettere alla vettura forze pulsanti di intensità apprezzabile.

V. Montanari e E. Cordiano