FORZE TAGLIANTI

E MOMENTI INFLETTENTI MASSIMI

nelle travi longitudinali dei ponti a travate indipendenti.

Nota letta nell'adunanza del 25 febbraio 1878.

---

1. *Assunto di questo lavoro.* — Allorquando un convoglio di strada ferrata passa sopra un ponte ad una sola travata, la forza tagliante ed il momento inflettente per una determinata sezione retta della travata stessa (*) variano col cangiare di posizione del convoglio ; per ciascuna delle infinite sue posizioni, vi ha una sezione alla quale corrisponde la più grande forza tagliante ed un'altra per cui si verifica il più grande momento inflettente; e sommamente importa al costruttore di conoscere il valore massimo tanto di quella, quanto di questo.

Questo problema, per la parte che si riferisce ai momenti inflettenti, già da qualche tempo ed in modo sufficiente per la pratica trovasi risoluto; giacché, nelle officine di costruzione di ponti in ferro ed in quasi tutti gli uffizi di costruzione e di manutenzione di strade ferrate, si faceva e

(*) In una trave orizzontalmente collocata su due appoggi e caricata di pesi, si chiamano rispettivamente *forza tagliante e momento inflettente,* per una determinata sua sezione retta, la risultante e la somma algebrica dei momenti, per rapporto a questa sezione, di tutte le forze applicate alla trave da una stessa parte della sezione medesima, comprendendo fra queste forze anche la reazione dell'appoggio.

tuttora si fa uso di tavole numeriche le quali, per diverse portate e con molta approssimazione, danno quel peso che supposto uniformemente distribuito produrrebbe nelle travi longitudinali quel momento inflettente massimo, che effettivamente sarà per derivare dal più pesante convoglio che potrà passare sul ponte. Il signor ingegnere J. Foy ha pubblicato fin dall'anno 1865 nel giornale diretto dal signor C. A. Oppermann intitolato *Nouvelles annales de la construction* una siffatta tavola, compilata col considerare un convoglio di locomotive e col supporre che ciascuna di esse avesse il peso di 36 tonnellate, tre assi distanti metri 1,80 e quindi sei ruote producenti in corrispondenza di ciascun punto di contatto colle rotaie la pressione di 6000 chilogrammi. Un'altra tavola dello stesso genere venne pure calcolata e pubblicata fin dall'anno 1868 dal signor ingegnere A. Cottrau nel suo *Album di* 36 *ponti metallici,* considerando un convoglio di locomotive Engerth, aventi ciascuna il peso di 66 tonnellate e sei assi alle distanze di metri 1,50, 3, 1,30, 1,30 ed 1,30. Che anzi queste due tavole, unitamente alle norme che devono, aver servito di guida per la loro compilazione, trovansi riportate nel volume sesto della nostra *Arte di fabbricare,* intitolato *Costruzioni civili stradali ed idrauliche,* stato pubblicato nell'anno 1870. I calcoli per la formazione delle citate tavole furono fatti stabiliendo per semplice intuizione il posto sfavorevole della parte di convoglio che può stare su ponti colle portate riferite nelle tavole stesse, ed i risultamenti ottenuti sono unicamente d'approssimazione.

L'ingegnere francese signor Leygue, l'ingegnere italiano signor F. Biglia, Ispettore del Genio civile, e l'ingegnere francese signor F. Lefort, Ispettore generale di ponti e strade, trattarono del problema in quistione ; il primo nel 1869 in una sua memoria stata presentata alla Società degli Ingegneri civili di Parigi intitolata *Sur les charges roulantes d'exploitatión considerées comme surcharges d'épreuves des tabliers métattiques,* il secondo nel 1873 in una relazione intitolata *Sul carico di prova delle travate metattiche per ferrovie,* stata inserta nel giornale del Genio civile e quindi stata pubblicata a parte, il terzo nel 1876 in un lavoro intitolato *Ponts métalliques — Sur le bases des calculs de stabilité.* L'ingegnere Leygue dimostrò che in generale, pei convogli ferroviari, la sezione in cui si verifica il momento inflettente massimo si può determinare mediante la risultante di tutti i pesi che gravitano sul ponte ; giacché d'ordinario questo momento ha luogo nella sezione che corrisponde ad uno dei ponti d'applicazione dei pesi comprendenti la risultante e probabilmente nel più vicino. L'ingegnere Biglia, dopo aver citato il teorema che conduce all'esatta risoluzione del problema per quanto si riferisce ai momenti inflettenti massimi, temendo il troppo lungo lavoro che potrebbe presentare la sua applicazione, quasi del tutto lo abbandona per accontentarsi di un metodo approssimato, metodo che consiste nell'ammettere che per un dato sistema di pesi abbia luogo il maggior momento; nel mezzo della trave quando col mezzo stesso si può far coincidere uno dei punti di applicazione dei pesi maggiori cogli altri pesi presso a poco simmetrici, in uno dei due punti d'applicazione adiacenti al mezzo predetto negli altri casi. Nel lavoro dell'ingegnere Lefort si ammette che il momento inflettente massimo, il quale si verifica in una delle sezioni corrispondenti ai punti d'applicazione dei pesi, abbia luogo quando la verticale del centro di gravità della parte di convoglio che può stare sulla trave passa pel mezzo della trave stessa. I risultamene che si ottengono coi metodi stati proposti dai tre citati distinti ingegneri sono in verità utili e sufficienti per la pratica; ma, derivando essi da risoluzioni approssimate, che hanno per fondamento proposizioni che non si possono accettare come rigorosamente vere, non possono a meno di far nascere il desiderio di un procedimento più perfetto, meglio definito e che anche dal lato teorico nulla lasci desiderare.

Nel 1871 il sig. J. Bauschinger, professore di meccanica applicata nella scuola politecnica di Monaco, fu il primo a dare una risoluzione del problema, per quanto si riferisce alla determinazione dei momenti inflettenti massimi, cogli eleganti ed utili metodi della statica grafica. Nell'anno 1877 il signor ingegnere Modigliano Cesare, assistente alla cattedra di statica grafica nell'Università di Pisa, pubblicò nel rinomato giornale tecnico diretto dal signor ingegnere G. Sacheri, *L'ingegneria civile e le arti industriali,* due distinte note *Sulla posizione più favorevole di un sistema di carichi su di una trave sostenuta da due appoggi* e *Sul viaggio della sezione pericolosa lungo una trave sostenuta da due appoggi per effetto di un sistema di carichi scorrevoli,* le quali hanno rapporto coll'argomento in quistione; il signor ingegnere Mastellone Pasquale, seguendo metodi puramente analitici, parlò dei momenti inflettenti massimi nelle travi sotto l'azione di sovraccarichi mobili nel recente suo opuscolo intitolato *Poche osservazioni sulla flessioni dei solidi elastici ;* e finalmente un allievo della Scuola degli Ingegneri di Napoli, il signor Contarino Francesco, diede conoscenza di un suo studio stato pubblicato nel numero del dicembre dell'anno 1877 dell'ultimo giornale indicato sotto il titolo *Determinazione della sezione di rottura nei ponti metallici ad una travata sotto l'azione di un convoglio in movimento.*

I lavori citati del Bauschinger, del Modigliano, del Mastellone e del Contarino contengono tutti del buono, ma la risoluzione più spedita, più comoda per la pratica, ed in pari tempo la più adatta alla natura del problema di cui si parla, è quella stata data dal primo dei quattro autori or indicati; ragione per cui abbiamo creduto conveniente di informare quanto intendiamo esporre in questa nota al metodo del Bauschinger, completandolo colla dimostrazione di teoremi e con osservazioni che hanno per iscopo di apportare ordine, semplicità e facilità nella risoluzione del problema, e coll'aggiunta della determinazione delle forze taglianti massime.

Come finora venne fatto da quanti studiarono la quistione formante l'oggetto di questa nota, supporremo che i convogli prendano diverse posizioni, ma che in ognuna di esse siano in riposo, giacché la loro azione dinamica sui ponti in ferro, dipendendo non solo dai peso, dalla velocità e dalle posizioni rispettive dei corpi in movimento fra di loro e per rapporto alle diverse sezioni delle travi, ma ben anche dai sistemi di unione delle diverse parti, dalle strutture delle strade e da altre cause di cui non è possibile valutare gli effetti, non riesce, nello stato attuale della scienza, suscettiva di una plausibile ed accettabile rappresentazione algebrica o grafica.

È fuori di dubbio che i convogli a grande velocità producono nelle travi su cui passano una flessione più grande di quella che si verifica quando essi sono in riposo e quando hanno una velocità piccola ; da questa maggior flessione ne deriva la provocazione di una maggior resistenza; e di siffatta resistenza unitamente a quella che può provenire da altre cause i cui effetti non si possono assolutamente valutare, i costruttori (non sapendo fare di meglio) usano tener conto facendo sopportare ai materiali componenti le travi uno sforzo che sia minore, non solo di quello capace di produrre la rottura, ma anche di quello atto ad alterare la loro elasticità.

2. *Forza tagliante massima.* — Si consideri una trave *AB* (fig. 1[a]) orizzontalmente collocata su due appoggi e caricata da un dato sistema di pesi, che diremo *sistema sollecitante.* Chiamando :

a la distanza dei due appoggi,

P uno qualunque dei pesi componenti il sistema sollecitante,

R la risultante dell'intiero sistema dei pesi dati,

r la distanza di questa risultante dall'appoggio di sinistra A,

R_d la reazione dell'appoggio di destra B,

Y la forza tagliante per una sezione qualunque M della trave,

Σ una somma estesa a tutti i pesi del sistema sollecitante,

Σ' una somma estesa ai soli pesi posti a dritta della sezione M, si ha:

$$R = \Sigma P$$

$$R_d = \frac{r}{a} \Sigma P$$

$$Y = \frac{r}{a} \Sigma P - \Sigma' P.$$

Le forze verticali, la cui somma algebrica dà la forza tagliante Y, si sono assunte come positive o come negative secondo che hanno direzione dal basso all'alto o viceversa; e la forza tagliante stessa è diretta all'insù quando il valore di Y risulta positivo, è invece diretta all'ingiù quando questo valore risulta negativo.

Esaminando ora il valore di Y si vede tosto: che esso è massimo per il valore più grande che può prendere r e per il minor valore di $\Sigma' P$; che il valore più piccolo di $\Sigma' P$ ed il valore più grande di r hanno contemporaneamente luogo quando il punto M coincide col punto B e quando il sistema sollecitante è in tale posizione da essere la più grande possibile la distanza della risultante dei pesi componenti il sistema stesso dall'appoggio A; e che per conseguenza il valore massimo di Y ha luogo per la sezione corrispondente all'appoggio di destra B.

Ma il valore di Y, per $\Sigma' P = \Sigma P$ e per r col minor valore possibile, acquista un valore massimo negativo ; e siccome $\Sigma' P = \Sigma P$ ed r del minor valore possibile sono due condizioni, le quali si trovano soddisfatte quando il punto M coincide col punto A e quando la risultante R ha la minor distanza possibile da questo stesso punto, si conchiude che il maggior valore negativo di Y ha luogo per la sezione corrispondente all'appoggio di sinistra A.

Tenendo conto solamente dei valori assoluti delle accennate due forze taglianti massime, e dicendo :

Y_d la forza tagliante per la sezione corrispondente all'appoggio di destra B,

Y_s quella per la sezione corrispondente all'appoggio di sinistra A,

r' il valore più grande, ed

r'' il valore più piccolo di r, finché il sistema sollecitante può stare sulla trave,

Si ottengono le equazioni:

$$Y_d = \frac{r'}{a} \Sigma P$$

$$Y_s = \Sigma P - \frac{r''}{a} \Sigma P = \frac{a - r''}{a} \Sigma P,$$

le quali rappresentano rispettivamente le reazioni dell'appoggio B e dell'appoggio A, quando la risultante R del sistema sollecitante ha la minor distanza degli appoggi stessi, ossia per le *posizioni limiti* (*) del sistema predetto.

Il valore di Y_d è evidentemente maggiore del valore di Y_s, quando r' è maggiore di $a-r''$, ossia quando la risultante $R = \Sigma P$ è, nella posizione limite corrispondente all'appoggio di destra B, vicina a quest'appoggio più della risultante medesima dall'appoggio di sinistra A per la posizione limite corrispondente all'appoggio stesso; il contrario ha luogo quando r' è minore di $a-r''$, cosicchè ne deriva questo teorema: *per una trave orizzontalmente appoggiata e caricata di un dato sistema di pesi il quale può prendere infinite posizioni sulla trave stessa, la forza tagliante*

(*) Le posizioni limiti del sistema sollecitante sono le due per cui il primo peso a sinistra e l'ultimo peso a destra coincidono rispettivamente coll'appoggio di sinistra e coll'appoggio di destra.

massima si verifica in una delle due sezioni d'appoggio; e questa forza tagliante massima è eguale alla reazione di quell'appoggio che resta il più vicino alla risultante del sistema sollecitante nelle due posizioni limiti del sistema stesso.

3. *Determinazione della forza tagliante massima.* — Abbiasi una trave orizzontalmente collocata sui due appoggi A e B (fig. 2ª), caricata di un determinato sistema sollecitante costituito dai pesi P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5, e vogliasi trovare la massima fra le infinite forze taglianti che possono essere provocate nelle diverse sezioni della trave col cangiare la posizione dell'indicato sistema di pesi.

La risoluzione grafica pel problema è la seguente: fatto il poligono delle forze 012345 e scelto un polo C, si conducano i raggi $C0$, $C1$, $C2$, $C3$, $C4$ e $C5$, per una posizione qualunque del sistema sollecitante si costruisca il corrispondente poligono funicolare $\alpha\ I\ II\ III\ IV\ V\ \beta$; si determini l'incontro E dei due lati estremi αI e βV e si conduca la verticale $E\varepsilon$ rappresentante la direzione della risultante del sistema stesso, ed incontrante in G la orizzontale AB; si confronti la distanza $\overline{GD_1}$ colla distanza $\overline{GD_5}$, e si dirà che la forza tagliante massima ha luogo per la sezione della trave corrispondente all'appoggio di sinistra A, quando la distanza $\overline{GD_1}$ è minore della distanza $\overline{GD_5}$, che invece la forza tagliante massima si verifica nella sezione corrispondente all'appoggio di destra B quando la distanza $\overline{GD_5}$ è minore della distanza $\overline{GD_1}$,

Nel caso concreto, essendo $\overline{GD_5}$ minore di $\overline{GD_1}$, la cercata forza tagliante massima ha luogo per la sezione corrispondente all'appoggio di destra B, e serve a determinarla il seguente semplicissimo procedimento. Si suppone trasportato il sistema dei pesi nella sua posizione limite per cui il punto D_5 coincide col punto B, o, ciò che torna lo stesso, si suppone che la trave coi suoi appoggi scorra sotto il sistema predetto finchè il punto B

cade sotto il punto D_5. Il punto A si porterà in A' in modo da essere $\overline{D_5 A'} = \overline{B A}$, e non cangierà di posizione la verticale $E \varepsilon$ della risultante del sistema sollecitante. Dopo questo, si passa a determinare le reazioni dei due appoggi A' e D_5 per la trave nella posizione ultima indicata, ciò che si fa costruendo il poligono delle forze ed il corrispondente poligono funicolare. Mantenendo invariate le posizioni del poligono delle forze e del polo C, il poligono funicolare risulta quello stesso già stato costrutto per determinare la verticale $E \varepsilon$, e per trovare le reazioni ultime indicate occorre: di ottenere il punto O intersezione del lato indefinito $I \alpha$ del poligono funicolare colla verticale condotta per A'; di segnare il lato di chiusura $O V$ di questo poligono; di condurre la retta $C 6$ parallela al lato stesso; e di misurare i due segmenti $\overline{5 6}$ e $\overline{6 7}$, i quali rappresentano rispettivamente le reazioni dell'appoggio D_5 e dell'appoggio A'. Il segmento $\overline{5 6}$, considerato nel suo valore assoluto, rappresenta la domandata forza tagliante massima.

4. *Momento inflettente massimo.* — Per la trave $A B$ (fig. 1ª) orizzontalmente collocata su due appoggi e caricata di un sistema di pesi, si conservino alle lettere a, P, R, r, Σ e Σ' i significati che loro furono attribuiti nel numero 2 e si chiamino:

p la distanza di uno qualunque dei pesi componenti il sistema sollecitante dall'appoggio di sinistra A,

z la distanza di una sezione retta qualsiasi M della trave dallo stesso appoggio,

μ il momento inflettente per questa sezione.

Considerando tutte le forze che si trovano a dritta della sezione M e non dimenticando che fra queste forze c'è la reazione dell'appoggio B, si ha l'equazione:

$$\mu = (a - z) \frac{r}{a} \Sigma P - \Sigma' (p - z) P \qquad (1),$$

nella quale il verso positivo dei momenti è quello della rotazione da z verso μ.

Osservando l'espressione del momento inflettente μ per una sezione qualunque della trave, immediatamente si riconosce: che esso si annulla per $z = 0$, giacchè $\Sigma' p P$ diventa eguale alla somma dei momenti di tutti i pesi applicati alla trave per rapporto alla sezione corrispondente all'appoggio di sinistra e quindi eguale al momento $r \Sigma P$ della risultante rispetto alla stessa sezione, e che si annulla pure per $z = a$, giacchè il fattore $a - z$ diventa zero, e lo stesso succede del termine $\Sigma' (p - z) P$ per non esservi forze al di là dell'appoggio di destra B; che l'espressione medesima è una funzione del primo grado in z, e che quindi il momento riflettente per una sezione qualunque della trave compresa fra i punti d'applicazione di due pesi successivi è rappresentato dalle ordinate di una linea retta; e che, variando nell'espressione di μ il coefficiente di z quando si passa dall'una all'altra delle parti in cui i punti d'applicazione dei pesi dividono la trave, i momenti inflettenti sono rappresentati dalle ordinate di una linea poligonale passante pei due appoggi ed avente i suoi vertici in corrispondenza dei punti d'applicazione dei pesi. Segue da ciò potersi stabilire: *che per una trave orizzontalmente appoggiata e caricata di un sistema di pesi ha luogo il momento inflettente massimo in una delle sezioni corrispondenti ai punti d'applicazione dei pesi.*

Si consideri ora uno qualunque dei pesi componenti il sistema sollecitante e si cerchi qual è la posizione del sistema stesso, affinchè nella sezione della trave corrispondente al peso considerato si verifichi il massimo fra tutti i momenti inflettenti che possono aver luogo nelle infinite sezioni per cui il detto peso può passare.

Supponendo che il peso considerato sia quello che si trova in D (fig. 3ª) a distanza $\overline{G D} = c$ dalla risultante R del sistema sollecitante, indicando con P uno qualunque dei pesi a dritta di D e con π la sua distanza da D, il momento inflettente M per la sezione corrispondente al punto D è dato dall'equazione (1) col porre

$$\mu = M, \qquad p - z = \pi, \qquad z = r + c;$$

cosicchè si ottiene

$$M = (a - r - c)\frac{r}{a}\Sigma P - \Sigma' \pi P \qquad (2).$$

Facendo la derivata di M per rapporto ad r onde vedere qual è la posizione da darsi al sistema sollecitante, affinchè il momento inflettente nel punto D, distante e dalla risultante R, sia un massimo, si ha

$$\frac{dM}{dr} = \frac{a-c}{a}\Sigma P - \frac{2r}{a}\Sigma P,$$

la qual derivata, eguagliata a zero, conduce alla relazione

$$\frac{a}{2} = r + \frac{c}{2} \qquad (3),$$

ossia che il momento inflettente in D è massimo, allorquando il mezzo H della trave cade ad eguai distanza fra la risultante R del sistema sollecitante ed il peso applicato in D, cosicché ne deriva il seguente teorema: *in una trave orizzontalmente collocata su due appoggi, lungo la quale può trovarsi in diverse posizioni un determinato sistema sollecitante, fra le infinite sezioni per cui può passare uno qualunque dei pesi del sistema, vi ha quella alla quale corrisponde il momento inflettente massimo nella posizione occupata da questo peso allorquando il mezzo della trave cade ad eguai distanza fra la risultante dell'intiero sistema ed il peso stesso.*

Né può nascere dubbio se la relazione (3) corrisponde a l un massimo oppure ad un minimo del momento inflettente M. Per una trave orizzontalmente collocata su due appoggi e caricata di pesi, i momenti inflettenti, i quali sono nulli per le sezioni estreme, conservano sempre lo stesso segno per le sezioni intermedie e conservano il segno positivo quando si assume il loro verso come da noi si è fatto, cioè dal basso all'alto : di maniera che, siccome la seconda derivata di M per rapporto ad r è $-\frac{2}{a}\Sigma P$ e quindi necessariamente negativa ossia di segno contrario a quello di M, si conchiude che la relazione (3) corrisponde effettivamente ad un massimo e non ad un minimo.

Nel caso di un peso unico, siccome è esso medesimo la risultante, si ha $c = 0$, e quindi la relazione (3) diventa

$$\frac{a}{2} = r;$$

cosicché *in una trave, orizzontalmente collocata su due appoggi e caricata di un peso che su essa può prendere diverse posizioni, si verifica il momento massimo nella sezione di mezzo della trave stessa e quando il peso si trova in coincidenza con questa sezione.*

Se nella formola (2) si pone il valore di r dato dalla (3), si ottiene il valore massimo M_m di M, il quale a riduzioni fatte risulta

$$M_m = \frac{(a-c)^2}{4a}\Sigma P - \Sigma' \pi P \qquad (4).$$

Suppongasi ora che, disponendo il sistema sollecitante in modo da trovarsi il mezzo H della trave (fig. 4ª e 5ª) fra il punto d'applicazione D del peso considerato ed il punto d'applicazione G della risultante R, il sistema stesso si porti talmente verso l'appoggio di sinistra A o verso l'appoggio di destra B da sortire in parte dalla trave.

In questo caso la determinazione del massimo momento inflettente che corrisponde al punto d'applicazione D di uno dei pesi del sistema sollecitante non può più essere fatta colle relazioni (2) e (3); e sorge la questione di determinare qual'è quella, fra le infinite posizioni che questo punto può prendere finchè tutto il sistema sollecitante è sulla trave, cui corrisponde il momento inflettente di più gran valore. Per questa determinazione si faccia avanzare il sistema sollecitante verso dritta (fig. 4ª) o verso sinistra (fig. 5ª) in modo che tutto intiero sia sulla trave. La distanza $\overline{A\,G} = r$, che per la relazione (3) è data da

$$r = \frac{a - c}{2}$$

crescerà o diminuirà diventando

$$r' = \frac{a - c}{2} \pm h,$$

essendo h la distanza $\overline{G\,G'}$ e valendo il segno $+$ pel caso della figura 4ª ossia quando il sistema sollecitante sortiva dalla trave dalla parte dell'appoggio di sinistra, ed il segno $-$ pel caso della figura 5ª ossia, quando il sistema sollecitante sortiva dalla trave dalla parte dell'appoggio di destra. Il punto considerato D sarà passato in D' in modo da essere $\overline{D\,D'} = h$; il momento inflettente M' corrispondente al punto D' sarà quello che ricavasi dalla formola (2) col porre

$$M = M', \qquad r = r' = \frac{a - c}{2} \pm h;$$

e risulta

$$M' = \frac{(a - c)^2}{4\,a} \Sigma P - \Sigma'_\pi P - \frac{h^2}{a} \Sigma P.$$

Ora, siccome i due primi termini della formola determinatrice di M' rappresentano il momento massimo M_m che corrisponderebbe alla posizione del punto D quando il sistema sollecitante per intiero potesse stare sulla trave, si deduce che il valore di M' tanto meno si scosta dal detto valore di M_m quanto più la lunghezza h è piccola, ossia quando il sistema sollecitante è nella posizione limite corrispondente a quell'appoggio al di là del quale si portava il sistema sollecitante, e quindi il seguente teorema: *in una trave orizzontalmente collocata su due appoggi, lungo la quale può trovarsi in diverse posizioni un determinato sistema sollecitante, si ottengono i momenti di maggior valore corrispondenti a quei pesi, per cui non si può far cadere il mezzo della trave ad egual distanza fra la risultante dell'intiero sistema ed i loro punti d'applicazione, col considerare le due posizioni limiti del sistema sollecitante.*

5. *Determinazione del momento inflettente massimo.* — Per fare graficamente questa determinazione, si può seguire il semplicissimo procedimento che passiamo ad indicare, ragionando su un sistema sollecitante costituito dalle cinque forze P_1, P_2 P_3, P_4 e P_5 (fig. 6ª), ed applicando i teoremi stati indicati nel precedente numero.

Costrutto il poligono delle forze 0 1 2 3 4 5, scelto il polo C la cui distanza da 0 5 sia la base b e condotti i raggi $C\,0$, $C\,1$, $C\,2$, $C\,3$, $C\,4$ e $C\,5$, si costruisca il corrispondente poligono funicolare α I II III IV V β; si determini l'intersezione E dei due lati esterni $\alpha\,I$ e $\beta\,V$; e si tiri la verticale $E\,\varepsilon$ la quale rappresenta la direzione della risultante del sistema.

Fatto questo, si dividano per metà le distanze $\overline{G\,D_1}$, $\overline{G\,D_2}$, $\overline{G\,D_3}$, $\overline{G\,D_4}$ e $\overline{G\,D_5}$ determinando i punti H_1, H_2, H_3, H_4 ed H_5, i quali punti dànno rispettivamente le posizioni delle sezioni di mezzo delle travi per rapporto al sistema sollecitante, affinchè si abbiano i momenti inflettenti massimi in corrispondenza dei punti D_1, D_2, D_3, D_4

e D_5, cui sono applicati i pesi componenti il sistema stesso, sempre quando questo sistema si mantenga per intiero sulla trave. Si porti la metà della distanza a dei due appoggi in $\overline{H_1 A_1}$ ed $\overline{H_1 B_1}$, in $\overline{H_2 A_2}$, ed $\overline{H_2 B_2}$, in $\overline{H_3 A_3}$ ed $\overline{H_3 B_3}$, in $\overline{H_4 A_4}$ ed $\overline{H_4 B_4}$, in $\overline{H_5 A_5}$ ed $\overline{H_5 B_5}$, affinchè risultino $\overline{A_1 B_1} = \overline{A_2 B_2} = \overline{A_3 B_3} = \overline{A_4 B_4} = \overline{A_5 B_5} = a$, e si segnino le due posizioni limiti $A' D_5$ e $D_1 B''$ col prendere $\overline{D_5 A'} = \overline{D_1 B''} = a$. Per queste posizioni limiti e per tutte quelle come $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ ed $A_4 B_4$, per cui gli estremi A cadono fra A' e D_1 o, ciò che torna lo stesso, per cui gli estremi B cadono fra D_5 e B'' giacchè $\overline{A' D_1} = \overline{D_5 B''}$, si chiudano i poligoni funicolari corrispondenti col determinare sulla retta indefinita $I\alpha$ i punti $0'$, 0_2, 0_3 e 0_4 in cui essa è incontrata dalle verticali condotte dai punti A', A_2, A_3 e A_4, col segnare sul lato indefinito $V\beta$ i punti $(VI)_2$, $(VI)_3$, $(VI)_4$ e $(VI)'$ in cui è tagliato dalle verticali determinate dai punti B_2, B_3, B_4 e B'' e col tirare le rette $0'\,V$, $0_2\,(VI)_2$, $0_3\,(VI)_3$, $0_4\,(VI)_4$ e $I\,(VI)'$. Le lunghezze delle verticali $\overline{I M_1}$, $\overline{II M_2}$, $\overline{III M_3}$, $\overline{IV M_4}$ e $\overline{V M_5}$ valutate colla scala dei pesi e moltiplicate per la lunghezza della base b misurata sulla scala delle distanze rappresentano rispettivamente i maggiori momenti possibili (*) per le

(*) Risulta questo da quanto insegnasi nella statica grafica giacchè, parlando dei momenti delle forze giacenti in un piano, s'incomincia col dimostrare che il momento di una forza F (fig. 7ª) rispetto ad un punto O è eguale al prodotto del segmento $\overline{MN}$ della parallela alla forza condotta pel punto stesso, compreso questo segmento fra i due lati $\alpha\varphi$ e $\varphi\beta$ del poligono funicolare contigui alla forza e moltiplicato per la distanza $\overline{CD} = b$ del polo C dal lato $\overline{AF}$ del poligono delle forze il quale rappresenta la forza considerata.

Si deduce da questo teorema: che, se per un sistema di forze parallele P_1, P_2, P_3 e P_4 (fig. 9ª) si costruiscono il poligono delle forze $0\,P_1\,P_2\,P_3\,P_4$ ed il relativo poligono funicolare $\alpha\ I\ II\ III\ IV\ \beta$ e se per un punto O si conduce la retta $O\,X$ parallela alla direzione delle forze, i segmenti $\overline{m\,m_1}$,

sezioni della trave corrispondenti ai punti D_1, D_2 D_3, D_4 e D_5 allorquando la trave stessa ha le posizioni $A'\,D_5$, $A_2\,B_2$, $A_3\,B_3$, $A_4\,B_4$ e $D_1\,B''$. Confrontando fra di loro le cinque lunghezze accennate si rileverà quale è la maggiore e quale è la sezione della trave in cui, sotto l'azione del sistema sollecitante dato, si verifica il momento inflettente massimo.

Per fare questo confronto, si può condurre dal punto qualunque c la verticale indefinita $c\gamma$, unire il punto c ai punti I, II, III, IV e V, tirare dai punti M_1, M_2, M_3, M_4 ed M_5 altrettante rette rispettivamente parallele a cI, cII, $cIII$, cIV e cV, determinare su $c\gamma$ i punti d_1, d_2, d_3, d_4, d_5. Quello di questi punti il quale trovasi a maggior distanza da c mette in evidenza il massimo momento domandato; nel caso concreto, il momento massimo è quello che si ottiene moltiplicando la lunghezza $\overline{IVM_4}$ per la base b e che ha luogo nella sezione della trave determinata dal punto D_4 distante di $\overline{H_4 D_4}$ dal mezzo della trave stessa.

$\overline{m_1\,m_2}$, $\overline{m_2\,m_3}$ ed $\overline{m_3\,m_4}$ moltiplicati per la perpendicolare b abbassata dal polo C sulla direzione $0\,P_3$ rappresentano rispettivamente i momenti delle forze P_1, P_2, P_3 e P_4 rispetto al punto O; che i segmenti $\overline{m\,m_2}$, $\overline{m\,m_3}$, ed $\overline{m\,m_4}$, moltiplicati per la distanza b, detta *base*, rappresentano rispettivamente i momenti delle risultanti delle due forze P_1 e P_2, delle tre forze P_1, P_2 e P_3, e delle quattro forze P_1, P_2, P_3 e P_4; e che l'ultimo degli indicati tre momenti è di segno contrario a quello dei primi due, perchè il segmento $\overline{m\,m_4}$ si deve contare a partire dall'origine m, in direzione contraria a quella dei segmenti $\overline{m\,m_2}$ ed $\overline{m\,m_3}$.

Finalmente si conchiude ancora che per una trave $A\,B$ posta sotto l'azione delle forze estrinseche parallele P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 le quali si fanno equilibrio, ed alle quali per conseguenza corrispondono il poligono delle forze $0\,P_1\,P_2\,P_3\,P_4\,P_5$ ed il poligono funicolare $O\ I\ II\ III\ IV\ V$, ambedue chiusi, il momento inflettente per la sezione qualunque determinata dal punto M è data dal segmento $\overline{m\,m_4}$ della parallela alle forze condotte per M, compreso nel poligono funicolare e moltiplicato per la base b, ossia per la perpendicolare abbassata dal polo C sopra la retta sulla quale trovasi l'intiero poligono delle forze.

Si fa ancora notare che le due posizioni limiti $A'D_5$ e $D_1 B''$ della trave sono quelle che danno le forze taglianti massime per le sezioni corrispondenti all'appoggio di dritta ed all'appoggio di sinistra; cosicché, conducendo la retta C 6' parallela al lato di chiusura *0' V* del poligono funicolare e la retta *C* 6" parallela all'altro lato di chiusura *I (VI)'* si ottengono rispettivamente in 5 6'ed in 0 6" le forze taglianti massime per la sezione corrispondente all'appoggio di destra ed all'appoggio di sinistra. Per un determinato sistema sollecitante adunque, il quale può prendere differenti posizioni su una data trave, basta una sola figura per determinare la forza tagliante ed il momento inflettente massimo.

6. *Forze taglianti e momenti inflettenti massimi per le travi orizzontalmente disposte le quali, oltre di essere sollecitate da un sistema mobile di pesi, devono sopportare un peso uniformemente distribuito sull'intiera loro lunghezza.* — Essendo *AB* (fig. 8[a]) la trave proposta, e chiamando

a la distanza dei due appoggi,

p il peso corrispondente all'unità di lunghezza della trave,

R' le reazioni eguali dei due appoggi A e B,

Y' la forza tagliante per la sezione qualunque corrispondente al punto *M,*

z la distanza di questa sezione dall'origine *A,*

si ha per la sola azione del peso uniformemente distribuito

$$R' = \frac{1}{2} p\, a$$

$$Y' = p\left(z - \frac{1}{2} a\right).$$

Questo valore di Y' è eguale a $-\frac{1}{2} pa$ per $z=0$, ossia per la sezione corrispondente all'appoggio A, ed è eguale

a $\frac{1}{2} pa$ per $z = a$, ossia per la sezione corrispondente all'appoggio B. E questi due valori particolari di Y', considerati indipendentemente dal loro segno, rappresentano la forza tagliante massima, la quale non è altro che la metà del totale peso uniformemente distribuito sulla trave. Aggiungendo questa forza tagliante a quella derivante dal sistema dei pesi, il quale può prendere differenti posizioni sulla trave (num. 3 e 4), si ottiene la forza tagliante massima dovuta all'azione riunita del carico uniformemente distribuito e del sistema mobile.

Se chiamasi

μ' il momento inflettente per la sezione della trave corrispondente al punto qualunque M del suo asse e per la sola azione del peso uniformemente distribuito, si ha la formola

$$\mu' = \frac{1}{2} p\,(a - z)\, z,$$

dalla quale risulta: che il detto momento inflettente si conserva positivo per tutti i valori dell'ascissa z compresi fra 0 ed a; che esso è nullo per $z=0$ e per $z=a$; che è rappresentato graficamente dalle ordinate di una parabola; e che acquista il suo valore massimo M per $z=\frac{1}{2} a$, il qual valore massimo è dato da

$$M = \frac{1}{8} p\, a^2.$$

Per trovare poi il momento inflettente massimo dovuto all'azione contemporanea del sistema dei pesi, il quale può prendere differenti posizioni sulla trave, e del peso uniformemente distribuito, si può adottare il seguente procedimento grafico fondato sull'applicazione del noto principio dell'accumulazione degli effetti.

Supponendo che il momento inflettente massimo, dovuto all'azione del sistema, il quale può prendere differenti posizioni sulla trave, si verifichi in corrispondenza del punto di applicazione D_4 (fig. 10ª) del peso P_4 quando la trave ha la posizione A_4B_4 per rapporto al sistema stesso, si consideri il relativo poligono funicolare O_4 $I\,II\,III\,IV\,V\,(VI)_4$. Si conduca dal polo C il raggio $C6$ parallelo al lato di chiusura $O_4\,(VI)_4$ del detto poligono, e a partire dal punto 6 si portino le due lunghezze quali $\overline{6a}$ e $\overline{6b}$ rappresentanti la metà del peso uniformemente distribuito sull'intiera trave $\overline{A_4\,B_4}$. Si conducano i due raggi Ca e Cb, dal punto O_4 si tiri una parallela al primo raggio e dal punto $(VI)_4$ una parallela al secondo raggio. Queste due rette s'intersecheranno nel punto F posto sulla verticale condotta pel mezzo H_4 di A_4B_4 e rappresenteranno le due tangenti nei punti O_4 e $(VI)_4$ della parabola, le cui ordinate verticali, limitate al lato di chiusura $O_4\,(IV)_4$ rappresentano i momenti inflettenti dovuti all'azione del carico uniformemente distribuito.

Fatto questo, si conducano fra le verticali H_4F e $D_4\,IV$ alcune altre verticali e si prendano le lunghezze

$$\overline{di} = \overline{dp} + \overline{d\,IV}, \qquad \overline{ek} = \overline{eq} + \overline{eu}, \qquad \overline{fl} = \overline{fr} + \overline{fv},$$
$$\overline{gm} = \overline{gs} + \overline{gx}, \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad \overline{hn} = \overline{ht} + \overline{hy};$$

si tracci la curva *iklmn;* si prenda per questa curva la massima ordinata verticale compresa fra la retta O_4 $(VI)_4$ e la curva stessa, e quest'ordinata massima moltiplicata per la base b darà il momento inflettente massimo per l'azione simultanea del sistema di pesi che può prendere differenti posizioni sulla trave e del peso uniformemente-distribuito.

Che il detto momento massimo debba essere proporzionale ad una delle ordinate comprese fra le due $\overline{di}$ ed $\overline{hn}$ e che non possa essere rappresentato, nè da un'ordinata a dritta di $\overline{di}$, nè da un'ordinata a sinistra di $\overline{hn}$, risulta ad evidenza: 1° dall'essere $\overline{d\,IV}$ la massima fra tutte le ordinate massime corrispondenti ai punti d'applicazione dei pesi P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5, e dall'essere per conseguenza anche l'ordinata massima della spezzata $O_4\,I\,II\,III\,IV\,V$ $(VI)_4$; 2° dall'essere $\overline{ht}$ l'ordinata massima della parabola $O_4\,t\,(VI)_4$; 3° dall'essere crescenti le ordinate della stessa parabola andando dal punto p al punto t, e decrescenti andando da t verso O_4 e da p verso $(VI)_4$.

7. *Determinazione del numero delle prove da farsi onde trovare la forza tagliante ed il momento inflettente massimi per una trave di data lunghezza, sulla quale devono successivamente passare parti diverse di un determinato sistema sollecitante.* — Il problema di determinare le forze taglianti ed i momenti inflettenti massimi non si presenta nella pratica colla semplicità stata finora ammessa. Nella maggior parte dei casi si ha un sistema sollecitante il quale per intiero non può stare sulla trave, e sorge quindi la quistione importantissima di trovare qual è la parte di questo sistema che pone la trave proposta nelle condizioni più sfavorevoli, tanto per rapporto alle forze taglianti, quanto per rapporto ai momenti inflettenti. Per risolvere questo problema bisogna generalmente applicare i metodi stati esposti nei numeri 3 e 5 a parti differenti del sistema sollecitante facendo parecchie prove, il cui numero massimo può essere determinato come segue.

Abbiasi il sistema sollecitante rappresentato nella figura 11ª, composto dei pesi P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 e P_8, aventi l'uno dall'altro le distanze risultanti dalla figura stessa; questo sistema sollecitante debba trovarsi in diverse posizioni su una trave da collocarsi orizzontalmente su due appoggi distanti a, venendo da destra e progredendo verso sinistra; e vogliasi trovare quali parti del sistema stesso vengono successivamente a portarsi sulla trave, o, ciò che torna lo stesso, quali differenti posizioni limiti può avere la trave rispetto al sistema sollecitante, nell'ipotesi che questo si supponga immobile e che la trave si faccia progredire da sinistra a destra. Tracciata l'orizzontale indefinita *x y,* si segnino i punti in cui essa è incontrata dalle verticali rappresentanti le direzioni dei pesi; e, presa un'apertura di compasso eguale ad *a,* si porti sulla detta orizzontale dalla verticale di P_1 in S, individuando le due estremità coi numeri 1, i quali danno nella lunghezza fra essi intercetta la prima posizione della trave. Dopo questo, si faccia scorrere la detta apertura di compasso da sinistra a destra successivamente individuando coi numeri 2, 3, 4,.... le posizioni delle due punte tutte le volte che una di esse incontra l'intersezione della *x y* colla direzione di una forza; si cessi quest'operazione quando la punta di sinistra del compasso è nell'incontro della *xy* predetta colla direzione del peso P_8 e la punta di destra in *D* a distanza *a* da questo peso. Per maggior chiarezza nel discernere le differenti posizioni della trave, i numeri che le indicano si possono mettere sotto o sopra l'orizzontale *xy,* secondo che si riferiscono alla punta di sinistra o alla punta di destra del compasso.

Nel caso concreto, le posizioni limiti differenti della trave per rapporto alle parti del sistema sollecitante che su essa si possono trovare sono in numero di sedici, e quindi sono in numero di quindici le modalità dei sistemi di carichi operanti sulla trave. Queste modalità si verificano:

Fra le posizioni limiti	1 1 e 2 2	col peso P_1	sulla trave
»	2 2 e 3 3	coi pesi P_1 e P_2	»
»	3 3 e 4 4	» P_1, P_2 e P_3	»
»	4 4 e 5 5	» P_2 e P_3	»
»	5 5 e 6 6	col peso P_3	»
»	6 6 e 7 7	coi pesi P_3 e P_4	»
»	7 7 e 8 8	col peso P_4	»
»	8 8 e 9 9	coi pesi P_4 e P_5	»
»	9 9 e 10 10	col peso P_5	»
»	10 10 e 11 11	coi pesi P_5 e P_6	»

Fra le posizioni limiti	11 11 e 12 12	col peso P_6	sulla trave
»	12 12 e 13 13	coi pesi P_6 e P_7	»
»	13 13 e 14 14	» P_6, P_7 e P_8	»
»	14 14 e 15 15	» P_7 e P_8	»
»	15 15 e 16 16	col peso P_8	»

Per la trave posta in ciascuna delle accennate quindici condizioni di carico si potranno determinare la forza tagliante ed il momento inflettente massimi. La maggiore delle quindici forze taglianti ed il maggiore dei quindici momenti inflettenti trovati rappresenteranno rispettivamente la massima delle massime forze taglianti ed il massimo dei massimi momenti inflettenti che possono verificarsi nella trave sotto l'azione del proposto sistema sollecitante. L'applicazione poi dei metodi stati esposti nei numeri 3 e 5, per ciascuna delle differenti modalità di carico della trave, può essere fatta o mediante figure differenti, in ciascuna delle quali si considera la trave fra le quindici coppie di posizioni limiti già state specificate, o anche mediante una figura unica, nella quale si dovano il poligono delle forze ed il poligono funicolare per l'intiero sistema sollecitante, considerando di questi due poligoni le sole parti convenienti alle dette quindici coppie di posizioni limiti. Conviene però notare che, volendo raccogliere tutte le operazioni in una sola figura, si finisce generalmente per rendere l'operazione un po' confusa, sia per la moltiplicità delle linee da segnarsi, sia per la picciolezza della scala che convien impiegare.

Però sempre il problema notevolmente si semplifica, giacché vi sono alcune posizioni della trave per cui risulta ad evidenza che non possono aver luogo i massimi cercati. — Nella determinazione delle forze taglianti si escludono subito le posizioni 1 1 e 16 16, pel motivo che alle posizioni 4 4 e 13 13, le quali precisamente come le posizioni 11 e 16 16 hanno rispettivamente i pesi P_1 e P_8 in corrispondenza di un appoggio, corrispondono per forze taglianti all'estremo di sinistra ed all'estremo di destra non i soli pesi P_1 e P_8, ma sibbene questi pesi aumentati da quanto deriva dal trovarsi sulla trave, per la posizione 4 4 anche le forze P_2 e P_3, per la posizione 13 13 anche le forze P_6 e P_7. — Nella determinazione dei momenti inflettenti, siccome il momento inflettente massimo sotto l'azione di un determinato sistema sollecitante non può aver luogo finchè le parti estreme del sistema stesso non operano su più della metà della trave, si deduce: che, invece d'incominciare a far scorrere l'apertura di compasso eguale ad a a partire da S, si può incominciare da S' essendo $\overline{1\,S'} = {}^1/_2\,a$; e che, invece di finire questo movimento del compasso quando la sua punta di destra cade in D, si può finire quando cade in D' alla distanza $\overline{13\,D'} = {}^1/_2\,a$ dall'ultimo peso P_8. Questo modo di procedere diminuisce il numero delle operazioni da farsi per trovare il massimo momento inflettente, e nel caso della figura 11ª lo riduce da quindici a tredici.

Ma nei casi più frequenti della pratica c'è ancora di più, e quasi sempre si può senz'altro scegliere qual'è la parte più influente del sistema sollecitante col semplice esame dei pesi che lo compongono e delle distanze che questi pesi hanno fra di loro; giacché è evidente che, se nel sistema si trovassero riuniti l'uno presso l'altro i pesi maggiori, e se per di più avessero l'uno dall'altro le distanze minori, la parte del sistema sollecitante che metterebbe la trave nelle peggiori condizioni tanto per rapporto alle forze taglianti quanto per rapporto ai momenti inflettenti dovrebbe, a seconda della lunghezza della trave, comprendere o totalmente o parzialmente il gruppo di questi pesi. E questo caso dei pesi maggiori riuniti l'uno presso l'altro si verifica appunto nei convogli di strade ferrate, nei quali le parti più influenti del sistema sollecitante sono quelle in cui si trovano le locomotive.

8. *Diagrammi delle pressioni verticali prodotte nei punti di contatto delle ruote colle guide dai convogli tirati da locomotive merci a sei ruote accoppiate, da locomotive Beugniot e da locomotive Sigl, quali sono usate nelle ferrovie dell'Alta Italia.* — Questi diagrammi sono rappresentati nelle figure 12ª, 13ª e 14ª considerando la locomotiva, il suo carro di scorta ed un carro per merci da 10 tonnellate. Cogli elementi marcati su queste figure si può comporre il diagramma per un treno con un numero qualunque di veicoli dei più pesanti, tanto nell'ipotesi della doppia trazione, ossia di due locomotive l'una di seguito all'altra, quanto nell'ipotesi di due locomotive riunite di testa come avviene quando una macchina è venuta in soccorso di un convoglio. E generalmente, nelle deduzioni delle forze taglianti e dei momenti inflettenti massimi, conviene considerare i convogli composti, come risulta dalla trazione fatta nei due modi indicati.

Il diagramma rappresentato nella figura 12ª, relativo alle locomotive merci a sei ruote accoppiate, si può impiegare per le determinazioni riferentisi ai ponti posti lungo ferrovie in pianura con pendenza non eccedente il 10 per 1000; ma pei ponti lungo ferrovie con pendenza eccedente l'ultimo indicato limite si devono adoprare i diagrammi rappresentati nelle figure 13ª e 14ª, riferentisi rispettivamente alle locomotive Beugniot ed alle locomotive Sigl. Che anzi, potendosi promiscuamente adottare le une e le altre di queste macchine, conviene fare le determinazioni relative ai due diagrammi, per prendere quello dei risultati ottenuti nelle due ipotesi, il quale pone il ponte nella peggiore condizione. Siccome poi i bisogni del servizio cumulativo e l'economia del servizio delle merci richiedono ora che anche sulle strade di pianura si ricorra alle più potenti locomotive, si può dire che il primo diagramma, ossia quello rappresentato nella figura 12ª, è quasi da escludersi totalmente nelle pratiche applicazioni.

9. *Applicazione ad un ponte di 15 metri di portata nell'ipotesi di un convoglio tirato da due locomotive Sigl*

poste l'una di seguito all'altra. — Il sistema sollecitante da considerarsi in questo caso è quello rappresentato nella figura 15ª disegnata, per quanto ha rapporto colle distanze, nella scala di $0^m,0075$ per 1 metro. Questo sistema, comprendente due locomotive col relativo carro di scorta, presenta due gruppi di pesi assai considerevoli corrispondenti alle pressioni trasmesse dalla 1ª e dalla 2ª locomotiva, e due altri gruppi di pesi minori riferentisi alle pressioni trasmesse dal 1° e dal 2° carro di scorta.

Innanzi tutto è evidente che l'ipotesi della quarta coppia di ruote della 1ª locomotiva in corrispondenza dell'appoggio di destra, ciò che porta come conseguenza di far gravitare sul ponte l'intiera 2ª locomotiva e l'intiero 1° carro di scorta, oltre di corrispondere al massimo carico corrisponde anche alla posizione per cui la risultante dei pesi che lo compongono è più vicina all'appoggio stesso, e che quindi è questa l'ipotesi per cui conviene applicare il metodo stato esposto nel numero 3 per trovare, la forza tagliante massima.

In secondo luogo nessun dubbio che alcuna delle ipotesi della 2ª locomotiva verso il mezzo del ponte, essendo pure su esso una parte dei due carri di scorta, deve, corrispondere al momento inflettente massimo.

Segue da ciò che la determinazione del numero delle prove da farsi, per trovare la forza tagliante ed il momento inflettente massimi, si può incominciare nel caso concreto col supporre che l'estremo di sinistra della trave sia in 1, ossia in corrispondenza della prima coppia di ruote della 1ª locomotiva, per finire quando lo stesso estremo è in 13, ossia in corrispondenza della terza coppia di ruote nel 2° carro di scorta. Ogni altra posizione della trave, che sorta dalle tredici posizioni limiti risultanti dai numeri mancati sulla figura, non può dare i massimi cercati.

La posizione 7 7, come già si è detto, deve essere considerata per determinare la forza tagliante massima. Le posizioni, a partire dalla 1 1 fino alla 8 8, non possono dare il momento inflettente massimo; perché non trovasi verso il mezzo del ponte la 2ª locomotiva. Le posizioni 9 9, 10 10, 11 11 e 12 12 sono invece quelle che soddisfano a siffatta condizione e quindi sono quelle cui bisogna applicare il metodo stato esposto nel numero 5. Tutte le posizioni al di là della 12 12 non si devono più considerare, giacché porrebbero il ponte in condizioni più favorevoli di quelle fatte dalle posizioni intermedie alle 9 9 e 12 12, tanto per rapporto all'intensità dei sistemi sollecitanti, quanto per rapporto alle posizioni delle loro risultanti.

La determinazione della forza tagliante massima si ha nella figura 16ª, colla quale, essendosi adottata la scala di metri 0,01 per 1 metro onde valutare le distanze e la scala di metri 0,025 per 1 tonnellata onde valutare i pesi, si è trovato che questa forza tagliante massima, la cui espressione grafica si ha nel poligono delle forze in $\overline{7\ 8}$ è di tonnellate 52,40.

La determinazione del momento inflettente massimo si ha nella figura 17ª stata costrutta colle scale già indicate per la figura 16ª adottando 10 metri per base, e raccogliendo tutte le costruzioni corrispondenti alle varie posizioni della trave fra le due posizioni limiti 9 9 e 12 12. Il metodo stato indicato nel numero 5 si applicò: 1° per la trave nelle posizioni fra le 9 9 e 10 10 sotto il carico dato dai pesi 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, ai quali pesi corrispondono la risultante passante pel punto *E' e la* posizione 1' 1' della trave, per cui il suo punto di mezzo si trova in *l*\ ad eguai distanza fra la direzione della detta risultante ed il peso 4; 2° per la trave nelle posizioni fra la 10 10 e la 11 11 sotto il carico dato dai pesi 2, 3, 4, 5, 6 e 7, ai quali pesi corrispondono la risultante passante pel punto *E'* e le posizioni 1" 1" e 2" 2" della trave, per cui il suo mezzo cade rispettivamente in $1''_1$ e $2''_1$ a distanze eguali dalla direzione della detta risultante e dei pesi 4 e 5; 3° per la trave nelle posizioni fra la 11 11 e la 12 12 sotto il carico dato dai pesi 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8, ai quali pesi corrispondono la risultante passante pel punto E''' e la posizione 1''' 1''' della trave col suo punto di mezzo in $1'''_l$ ad egual distanza fra la direzione della risultante ultima indicata ed il peso 5. Segnando i lati di chiusura del poligono funicolare per tutte le indicate posizioni della trave si trova: che il momento inflettente massimo corrisponde alla posizione 1' 1' della trave ; che esso si verifica nella sezione della trave cui è applicato il peso 4; e che il suo valore è dato dall'ordinata $\overline{NM}$ misurata sulla scala della forza moltiplicata per la base 10^m, ossia dal prodotto $16^t,8 \times 10^m = 168^{txm}$.

Si fa ancora notare: che si potrebbe tralasciare la ricerca delle direzioni delle risultanti; che, proiettati i punti 9, 10, 11 e 12 della orizzontale $\Omega\Omega$ sul perimetro del poligono funicolare nei punti cui sono apposti gli stessi numeri, si potrebbe fare la divisione delle due parti $\overline{9}\ \overline{10}$ in uno stesso numero di parti eguali e ripetere questa operazione sulle due parti $\overline{10}\ \overline{11}$ e sulle due parti $\overline{11}\ \overline{12}$; che, unendo due a due i punti di divisione che si corrispondono, si otterrebbero i lati di chiusura relativi ad altrettante posizioni differenti della trave per rapporto al sistema sollecitante; che le intersezioni successive di questi lati, ossia quella del primo col secondo, del secondo col terzo, del terzo col quarto, ecc, determinerebbero una curva che è l'inviluppo dei lati stessi ; e che questa curva si presterebbe per trovare il momento inflettente massimo, il quale evidentemente sarebbe rappresentato dalla massima ordinata verticale compresa fra il poligono funicolare e l'inviluppo indicato, misurata sulla scala dei pesi e moltiplicata per la base 10^m. Non occorre dire: che il numero delle parti in cui si dividono le coppie di rette $\overline{9}\ \overline{10}$, $\overline{10}\ \overline{11}$ e $\overline{11}\ \overline{12}$ può

essere differente dall'una all'altra; che, essendo meglio che queste parti siano presso a poco eguali, se ne avrà un maggior numero nelle coppie delle rette più lunghe come sono quelle della coppia 10 11; e che, pel primo teorema stato dimostrato nel numero 3, la massima ordinata richiesta deve corrispondere ad un vertice del poligono funicolare.

Torino, 1° febbraio 1878.

CURIONI GIOVANNI.